

This book was produced in EPUB format by the Internet Archive.

The book pages were scanned and converted to EPUB format automatically. This process relies on optical character recognition, and is somewhat susceptible to errors. The book may not offer the correct reading sequence, and there may be weird characters, non-words, and incorrect guesses at structure. Some page numbers and headers or footers may remain from the scanned page. The process which identifies images might have found stray marks on the page which are not actually images from the book. The hidden page numbering which may be available to your ereader corresponds to the numbered pages in the print edition, but is not an exact match; page numbers will increment at the same rate as the corresponding print edition, but we may have started numbering before the print book's visible page numbers. The Internet Archive is working to improve the scanning process and resulting books, but in the meantime, we hope that this book will be useful to you.

The Internet Archive was founded in 1996 to build an Internet library and to promote universal access to all knowledge. The Archive's purposes include offering permanent access for researchers, historians, scholars, people with disabilities, and the general public to historical collections that exist in digital format. The Internet Archive includes texts, audio, moving images, and software as well as archived web pages, and provides specialized services for information access for the blind and other persons with disabilities.

Created with hocr-to-epub (v.1.0.0)

This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online. It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover. Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you. Usage guidelines Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying. We also ask that you:

- + Make non-commercial use of the files We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for Personal, non-commercial purposes.
- + Refrain from automated querying Do not send automated queries of any sort to Google's System: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + Maintain attribution The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + Keep it legal Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe. About Google

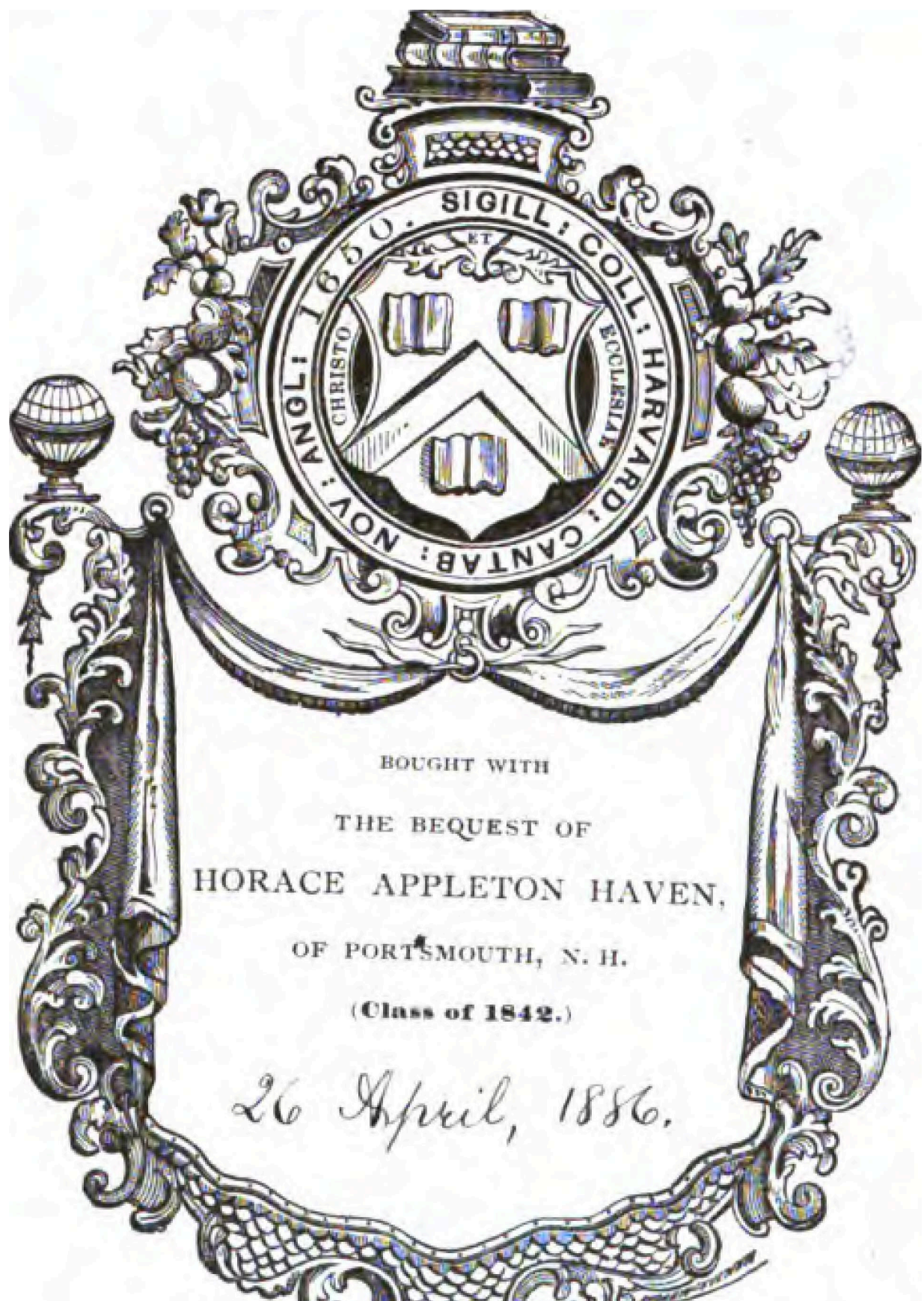
Book Search Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>

A propos de ce livre Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne. Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public. Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains. Consignes d'utilisation Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées. Nous vous demandons également de: + Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial. + Ne pas procéder à des requêtes automatisées N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de

travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile. + Ne pas supprimer l'attribution Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas. + Rester dans la légalité Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère. À propos du service Google Recherche de Livres En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse] ht tp : //books .google . corn

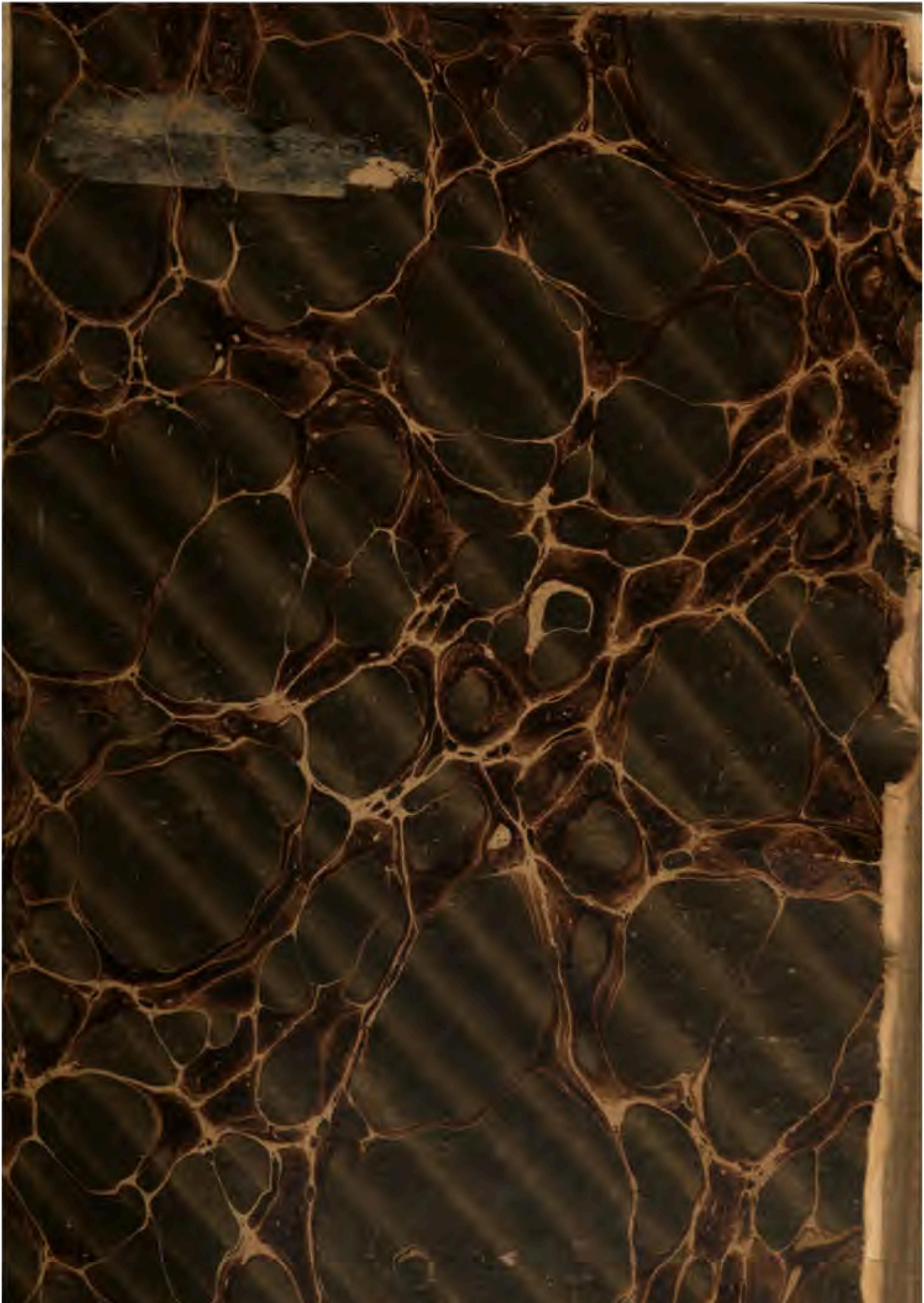
The text on this page is estimated to be only 7.00% accurate

Aici:ik^ùCi%.Z2_ SCIENCE CENTER LIBRARY



BOUGHT WITH
THE BEQUEST OF
HORACE APPLETON HAVEN,
OF PORTSMOUTH, N. H.
(Class of 1842.)

26 April, 1886.



The text on this page is estimated to be only 26.40% accurate

COURS D'ANALYSE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

The text on this page is estimated to be only 19.52% accurate

o COURS D'ANALYSE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, Par m.
C. JORDAN, ■ EMBRE DE l'INSTITUT, PROFESSEUR À L'ÉCOLE
POLYTECHNIQUE. TOME PREMIER. CALCUL DIFFÉRENTIEL.
PARIS, GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE DU BUREAU
DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, SUCCESSEUR
DE MALLET-BACHELIER, Quai des Augustins, 55. 1882 (Tous droits
réservés)

The text on this page is estimated to be only 9.33% accurate

./ APH 261886

PRÉFACE. L'Ouvrage dont nous publions aujourd'hui le premier Volume esty dans son ensemble, la reproduction des leçons que nous professons depuis quelques années à TÉcole Polytechnique. Nous y avons seulement ajouté, sur certains points, quelques développements nouveaux, mais sans altérer le caractère général de ce Cours. Il formera trois Volumes, consacrés : le premier, au Calcul différentiel ; le second, à la Théorie des intégrales ; le troisième, à rintégration des équations différentielles et aux éléments du Calcul des variations. Ce dernier Volume se terminera par un Supplément sur quelques théories importantes, mais dont l'exposition exige plus de développements que n'en comporte le cadre d'un cours, dont l'objet essentiel est d'exposer les principes généraux du Calcul infinitésimal, plutôt que d'en multiplier les conséquences. Nous avons apporté un soin particulier à l'établissement des théorèmes fondamentaux. Il n'en est aucun dont la démonstration ne soit subordonnée à certaines restrictions. Nous nous sommes efforcé d'apporter- dans cette discussion, parfois délicate, toute la précision et la rigueur compatibles avec un ensei^nement élémentaire. Nous aurons d'ailleurs à

VI PRÉFACE. revenir, dans le Supplément, sur quelques-unes de ces démonstrations. On trouvera en ou Ire, dans ce Livre, d'assez nombreuses applications, choisies, autant que possible, parmi celles qui se rattachent à quelque théorie générale d'Analyse, de Géométrie, de Mécanique ou de Physique mathématique, de préférence à celles qui ne sont que de simples exemples de calcul. Une série d'Exercices clora d'ailleurs ce dernier Volume. Ayant à faire un Livre d'enseignement, qui ne peut prétendre à la nouveauté, nous nous sommes cru autorisé à nous inspirer largement des travaux de nos devanciers, le plus souvent sans les citer. Nous avons consulté de préférence, pour la rédaction du présent Volume, les Ouvrages de MM. Hermite, Serret, Hoiïel et le grand Traité de M. Bertrand. Nous devons tous nos remerciements à M. Humbert pour la part active qu'il a bien voulu prendre à la correction de nos épreuves.

The text on this page is estimated to be only 26.52% accurate

TABLE DES MATIÈRES. INTRODUCTION. Ifameros raye» i-
ii. Quantités continues i iu~iT. Tangente à la parabole a Y. Quadrature de la
parabole 3 Ti-Yii. Infiniment petits de divers ordres 4^ ^ viu. Valeur
principale. — Développement en série 5 ii-si. Dans une limite de rapport ou
de somme on peut remplacer les infiniment petits par leurs valeurs
principales 6 à 7 PREMIÈRE PARTIE. CALCUL DIFFÉRENTIEL.
CHAPITRE i. ^ DÉRIVÉES ET DIFFÉRENTIELLES. I. — Définitions, 1 .
Variables indépendantes. — Fonctions 9 2. Revue des fonctions
élémentaires 10 3. Continuité i r II. — Dérivée et différentielle d'une
fonction d'une seule variable. 4. Dérivée la 5. Dérivée de .iT* i3 6. Dérivée
de sina? i3 7-8. Dérivée de loga? i4 9. Dérivée d'une somme 17 10. Dérivée
d'un produit 17 1 1 . Dérivée d'un quotient 18

VII TABLE DES MATIÈRES. Numéroi Pifes 12. Dérivée d'une fonction de fonction i8 13. Dérivée d'une fonction inverse i8 14. Dérivée de $\cos a$; $\tan^a$; $\arcsin a$; $\arctan a$; e^a ; a^b », etc 19 15. Formule $\frac{d}{dx}(a-T/i) = \frac{d}{dx}(a) = \frac{d}{dx}(a+e/i)$ ai IG. Une fonction dont la dérivée est constamment nulle est constante 32 17. Différentielle aa III. — Dérivées partielles. — Différentielle totale, 18. Dérivées partielles a^b 19-21. Différentielle totale 2^a à 26 22-23. Dérivées et différentielle des fonctions composées 26 à 28 24-26. Dérivée des fonctions implicites 28 à 30 IV. — Dérivées et différentielles d'ordre supérieur. 27-28. Dérivées d'ordre supérieur 30 à 31 29. L'ordre des dérivations est indifférent 31 30-31. Différentielles d'ordre supérieur 32 à 33 32. Expression générale de la différentielle $\frac{d}{dx} u^m$ d'une fonction de plusieurs variables u 33 33. Différentielle $\frac{d}{dx} u^m$ d'un produit 35 34. Différentielles successives d'une fonction composée 35 V. — Changements de variables. 35. Changement de la variable indépendante 36 36. Changement simultané de la fonction 37 37. Rayon de courbure en coordonnées polaires 38 38. Dérivées successives d'une fonction inverse 89 39-40. Extension au cas de plusieurs variables indépendantes. 40 à 41 41-42. Application aux paramètres différentiels 4^a à 44 43. Changement simultané de la fonction 46 CHAPITRE II. FORMATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES. I. — Équations différentielles ordinaires. 44-45. Définition 4; 46-49. Équations différentielles linéaires, auxquelles satisfont $\arcsin^a$, $U+v/F=r^7$)»/''^^>" 47 a 5. 50. Élimination des constantes 51 51-53. Équation différentielle des coniques homofocales : des cercles, des coniques, des paraboles 5a à 5^f

TABLE DES MATIÈRES. IX. Méthode pour que des fonctions soient liées par une relation linéaire 55 II. — Équations aux dérivées partielles, 55. Définition 55 56. Élimination des constantes ' 55 57. Élimination des fonctions arbitraires 56 58-60. Conditions pour que des fonctions soient liées par une relation. — Jacobien 57 à 59 61-63. Équation aux dérivées partielles des cylindres, des cônes, des surfaces de révolution 61 à 62 64. Théorème des fonctions homogènes 63 65. Élimination de n fonctions arbitraires dépendant des mêmes arguments 63 66. Équation des surfaces réglées 65 67-68. Équation des surfaces développables 66 à 67

CHAPITRE VI. DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE. I. — Formule de Taylor, 69-71. Formules de Taylor et de Maclaurin fig à 71 72-73. Extension aux fonctions de plusieurs variables 71 à 73 II. — applications. 74. Développement de $(1-x)^{-1}$ 73 75-76. Développement de $\log(1-x)$. — Calcul. des Tables de logarithmes 75 à 76 77-79. Développement de e^x , $\sin x$, $\cos x$ 77 à 78 80-81. Développement de $\arctan x$. — Calcul de π : 79 à 80 III. — Procédés pour effectuer les développements en série, 82-86. Développement d'une somme, d'un produit, d'un quotient. 80 à 83 87-88. Application aux nombres de Bernoulli 84 à 85 89-90. Développement d'un radical 85 à 86 91-93. Application aux fonctions X, 87 à 89 94-99. Développement des racines d'une équation algébrique... 89 à 91 100. Usages du développement précédent 94

The text on this page is estimated to be only 23.94% accurate

X TABLE DES MATIÈRES. .Numéros. Pages 101 . Limite de x^a pour $a=x$ 96 102. Limite de $a^x \log a$ pour $x \rightarrow 0$; $\log x$ pour $x \rightarrow 0$ 97 103. Développement d'un logarithme 97 104. Nécessité de la discussion du reste dans la formule de Maclaurin 98 105-106. Valeur des expressions indéterminées 99 107. Limite de $m(v^x - 1)$ pour $m \rightarrow \infty$ 107 108. Cas des fonctions de plusieurs variables ici IV. — Séries infinitesimales. 109. Définition de la convergence loi 110-115. Séries à termes positifs. — Règles de convergence... 113 à 115 116-118. Quantités imaginaires. — Module et argument. — Module et argument d'un produit. — Module d'une somme algébrique 106 à 107 119-122. Séries absolument convergentes. — On peut y changer l'ordre des termes. — Multiplication de deux séries 108 à 110 123-124. Séries semi-convergentes. — Leur valeur dépend de l'ordre des termes m à 11-2 125-126. Théorème d'Abel 114 à 115 127-128. Séries dont les termes sont fonctions d'une variable. — Convergence uniforme 116 à 117 129-131. Séries procédant suivant les puissances entières et positives de la variable. — Cercle de convergence 117 à 120 V. — Produits infinis. 132-135. Règles de convergence 121 à 123 136. Application au produit $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{z^n}{a^n})$ 124 137. Application au produit $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{z^n}{n!})$ VL — Fonctions exponentielles et circulaires. 138-140. Définition de e^z , $\sin z$, $\cos z$ pour z imaginaire. — Propriétés fondamentales de ces fonctions. — Formules d'Euler. 125 à 127 141-142. Définition de $\log z$. — Ses propriétés fondamentales.. 128 à 129 143-144. Définition de z^a . — Ses propriétés fondamentales.... 130 à 131 145-146. Discussion de la fonction e^z 131 147-149, Discussion des fonctions $\sin^2 z$ et $\cos^2 z$ 132 à 134 150. Expression de $\sin^m z$ et $\cos^m z$ par les sinus et cosinus des multiples de z 134 151. Expression de $\sin^m z$ et $\cos^m z$ en $\sin z$ et $\cos z$ 135

The text on this page is estimated to be only 27.69% accurate

TABLE DES MATIÈRES. XI MtuBéros Pages 152-155.

Expression de $\sin x$ et $\cos x$ en produits infinis. — Formule de Wallis ,
 136 à 189 156. Développement de $\cot x$; en série 189 VII — Séries et
 produits périodiques. 157-160. Séries infinies dans les deux sens. —
 Application à la série 1 — π — Périodicité des fonctions trigonométriques
 i^0 à i^a 161-165. Les quatre fonctions 6. — Formules fondamentales.. i/Q
 à i^6 166-167. Leur expression en produits infinis $i^47 \cdot 4^6$ 168. Fonction
 Z i^5i 169. Quotients des fonctions 0. — Double périodicité i^8 VIII. —
 Série hyper géométrique, — Fonction T. 170. Série hypergéométrique. —
 Condition de convergence i^6 171. Son équation différentielle i^55 172-173.
 Relation entre les fonctions contiguës. — Valeur de $F(a,?, -r, i)$ i^55 à i^57 174-
 176. Propriétés du produit $r(5)$ i^58 à 159 IX. — Séries et produits
 multiples, 177-178. Définitions 160 à 162 179-184 . Séries d'Eisenstein 162
 à 167 185-190. Séries G à plusieurs variables 168 à 172 X. — Fractions
 continues. 191-194. Développement d'un nombre en fraction continue. —
 Propriétés des réduites 172 à 173 195-198. Développement d'une fonction.
 — Calcul direct des réduites 176 à 178 CHAPITRE IV. MAXIMA ET
 MINIMA. 199-201. Maxima et minima des fonctions d'une variable 181 à
 182 202-204 . Maxima des fonctions de deux variables 182 à i^85 205.
 Maxima et minima relatifs i^85 206. Valeur maximum ou minimum d'une
 fonction dans un intervalle donné 187 207. Distance d'un point à une droite
 187 208-209. Plus courte distance de deux droites 188 à 101

XII TABLE DES MATIÈRES. Numéros Paseï 210. Distance d'un point à un plan 193 211 . Maxima et minima du rapport de deux formes quadratiques. 193 CHAPITRE V. APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA SÉRIE DE TAYLOR. I. — Points ordinaires et points singuliers. 212-217. Cas des courbes planes 198 a 201 218-222. Cas des surfaces 204 à 206 223-229. Cas des courbes gauches 308 à 214 IL — Théorie du contact, 230. Définition du contact 214 231-234. Contact des courbes planes 215 à 217 235-237. Contact d'une courbe et d'une surface 218 a 219 238-241. Contact de deux courbes gauches 319 a 221 242*247. Contact de deux surfaces 222 à 224 248-251 . Osculation 226 à 228 ni. — Courbes et sur/aces enveloppes, 252-254. Enveloppe d'une famille de courbes 229 a 281 255-258. Enveloppe d'une famille de surfaces dépendant d'un ou de deux paramètres 233 à 287 IV. — Courbes planes. 259-260. Tangente et normale 238 à 289 261-262. Différentielle de l'arc 2^0 à 241 263-264. Cercle osculateur. — Développée 242 à 24^0 265-269 . Courbure. — Points d'inflexion 243 à 246 270-272. Applications. — Parabole. — Ellipse. — Cycloïde 246 à 249 V. — Géométrie infinitésimale, 273 . Considérations générales 251 274. Tangente et différentielle de l'arc en coordonnées polaires.. . 262 275-278. Arc de développée 254 à 267 279. Tangente au lieu du sommet d'un angle constant circonscrit à deux courbes 258 280. Théorème sur les coniques homofocales 259 'VI. — Courbes gauches et sur/aces développables. 281 . Tangente et plan normal 260 282. Différentielle de l'arc 261

The text on this page is estimated to be only 28.48% accurate

TABLE DBS MATIÈRES. XIII Noniéro* l*aR(*K 283. Plan osculateur jG-jt 284. Surfaces développables 263 285. Enveloppe des plans normaux 365 286. Cercle osculateur 265 287. Sphère osculatrice 267 288-295. Valeur principale de divers infiniment petits. — Courbure. — Torsion. — Plans stationnaires 269 à 27.") 296. Différence entre l'arc et sa corde • 27.> 297-299 . Formules de M iM. Frenet et Serret 276 à 279 300. Une surface développable est applicable sur un plan 280 301 . Application à l'hélice * 282 VII. — Systèmes de droites. 3U2-303. Éléments qui déterminent la position relative de deux génératrices voisines 283 à 28/1 304-306. Surfaces réglées. — Loi de variation du plan tangent. 286 à 288 307-308. Caractère des surfaces développables 289 à 291 309-313. Congruences. — Génératrices ordinaires et singulières. — Points principaux. — Foyers. — Double système de développables 291 à 29.3 314-316. Lois de M. Kummer sur la répartition des génératrices voisines d'une génératrice ordinaire 295 a 298 317. Id. d'une génératrice singulière 299 318-319. Complexes 3oi à 3o3 VIII. — Théorie des sur/aces. 320-321. Plan tangent. — Normale 3o3 à 3o'| 322. Éléments de longueur 30.') 323-325. Éléments de l'aire 3o6 à 3o8 326. Indicatrice 3io 327-330. Courbure des lignes tracées sur une surface 3i2 à 3i5 331-332. Propriétés de la congruence des normales 3i5 à 317 333. Condition pour que les droites d'une congruence soient normales à une surface 317 334-337. Lignes de courbure. — Rayons de courbure principaux. 32o à 322 338. Ombilics 323 339. Ligne des points paraboliques 32^^ 340. Lignes asymptotiques 325 341 . Application aux surfaces de révolution 326 342. Application aux surfaces développables 32G 343. Application à l'ellipsoïde 327 344-345 . Courbure d'une surface 329 à 33o IX. — Coordonnées curvilignes. 346. Définitions. — Systèmes orthogonaux 33 1 347-348. Éléments de longueur 333 à 33',

The text on this page is estimated to be only 17.23% accurate

XIV TABLE DES MATIÈRES. Numéros Pages:» 349 . kienient de
\ olumo 335 3.)0. Coordonnées polaires 336 331 . Coordonnées semi-
polaires 33^ 352-357. Coordonnées elliptiques 338 à 3^3 358-359.
Théorème de Oupin 343 à 346 CHAPITRE VI. THÉORÈME DE OUPIN
COVRBKS PL4NKS ALGKBRIQI KS. 3G0-301. 302. 363. 304. 305. 366.
367-309. 370-374. 375. 376. 377. 378-379. 380-385. 386-387. 388-391.
392-396. 397. I. — Genre.
No^ll)^edespoinlsquidéter^linentunecourled'ordre^? 347 Faisceaux de
courbes 3|8 Hexagone de Pascal 3|8 Limite du nombre des points
singuliers 3|9 (jonre 35o Courbes unicursales 353 II. — Coordonnées
homogènes. Coordonnées linéaires 35 '1 à 356 . Covariants. — Leurs
équations différentielles 356 à 36i Discriminant 36i Hessian 363 Tangente
363 Points singuliers 364 Points d'inflexion. — Leur nombre 365 à 371
Polaires 371 Classe 372 à 373 Coordonnées tangentielles 374 à 376
Formules de Plücker ^:'^, FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

The text on this page is estimated to be only 9.07% accurate

ERRATA. i6 la 7'^ a V 3o 8V! '7 99 16 108 I »»9 5 '•9 10 ',2 «9
.43 2 .45 17 et 18 '4« «9 160 I 160 a et 6 Pages Lignes au lieu de Usez ■—
n' —«'—I ajoutez — . . . /•«^•(o) /— (o) /i-i-a — j^ /i— a-h2^ «/?rè* sera
ajoutez la limite de ^ Q ^ . . . = M, -h . . . (/?-hi)a,,s' («-f-i)a,,^,;;" par pour
imagiDaire négati>e 0 1 ^ = o 160 »9 m '■ ,64 27 /(m,,;/j, ...,m,,) i()8 4
limî: m '. """"* '79 2 A Q ^ P 190 3 ^^,^ '9* 2i Afl, la,, la^ »99 10 ^(\^nr,,*.)
2o:y 1 courbe 221 9 M23 I 20 X V 1^3' 236 V'(^-.-J7,)-^... C -h M, im > —
M, — ft, — A,, — /;, — JL«, — Aa,, — A«2 surface

The text on this page is estimated to be only 7.63% accurate

.^ ;vi ERRATA. P«ISP» LiRIIM «M /irw rf^ lřSfZ •j3(i 5 K F 236
20 (c,-c,)+R (r,-c.))»-f-R a38 26 \-x-a{y-y) Y->'a(X-x) 2^1 23 B,,C, B,C 34^
»^ N H 942 16 x' x" 2^47 6 r'+r' r"^^/^^ 248 12 ds^r dsr=z^ 25l II a X 252 i3
5,6 Pt ? -^- r^Fc^ 261 »7 c[>' c^jr dz ôx rJF «M» f*F a* ô¥ à^ dV rW» 261
*7 djc di dz àx ôx ôy ày ôx .73 r P Pi .76 i5 x" x" -{- y" y" -\s' z" x' x" -^ y'
y" -\z' z" 383 4 m'-+- n} i-i/i» î85 i4 et 16 dayda^yda^ — day — da^y —
rfo. .89 «4 -t\=pz\ »89 '7 I pz P 289 20 pr-.ac p-.o ,89 21 p^.o /?^oo >95 ; JI
^ 296 2/1 N - \ 295 à 3o3 T -T 3oi 18 \ P 335 5 outre les en vertu de5 35 1
29 *(:r) ^"(^)

INTRODUCTION. I. Les Mathématiques sont la science des quantités. Elles se divisent en plusieurs branches, suivant la nature des grandeurs soumises au calcul. On y distingue principalement l'Arithmétique, la Géométrie, la Mécanique, la Physique mathématique, le Calcul des probabilités. Ces diverses branches ont pour lien commun l'Algèbre, qu'on pourrait définir le calcul des opérations. II. On peut établir dans les Mathématiques une autre classification, fondée, non plus sur l'objet de la science, mais sur ses méthodes. A ce nouveau point de vue, nous aurions à distinguer deux sortes d'Analyse : 1^{re} Celle des quantités discontinues; 2^e Celle des quantités continues. Dans la première, on cherche les relations qui existent entre certaines quantités fixes données a priori. Cette méthode est employée dans les parties élémentaires des Mathématiques, et plus spécialement en Arithmétique et au début de la Géométrie, sauf pour un petit nombre de théorèmes fondamentaux, dont la démonstration exige la notion des quantités incommensurables. Dans l'Analyse des quantités continues, on considère au contraire les éléments de la question proposée comme susceptibles de varier par degrés insensibles, et l'on cherche à déterminer les lois qui régissent leurs variations simultanées.

J. — Cours, I. 1

2 INTRODUCTION. Cette méthode, dont Euclide et Archimède avaient donné autrefois de remarquables exemples, était tombée en oubli pendant plusieurs siècles, lorsque la mémorable découverte de Descartes sur l'application de l'Algèbre à la théorie des courbes obligea les géomètres à y revenir, pour résoudre les deux questions qui s'imposaient à eux, le problème des tangentes et celui des quadratures. III. L'ancienne définition de la tangente, une droite qui n'a qu'un point commun avec la courbe, cessait en effet d'être applicable en dehors des coniques. On dut en imaginer une nouvelle, ainsi conçue : La tangente est la limite vers laquelle tend une sécante qui tourne autour d'un de ses points d'intersection avec la courbe, lorsque son second point d'intersection se rapproche indéfiniment du premier. IV. Cherchons, d'après cette définition, la tangente à la parabole $y = x^2$ au point dont les coordonnées sont x, y . Soient $X = h, y = k$ les coordonnées d'un second point de la courbe. La sécante qui les joint aura pour équation $Y - y = \frac{Y^2 - y^2}{X^2 - x^2}(X - x)$. On a d'ailleurs $y = x^2, k = h^2$. $\frac{Y^2 - y^2}{X^2 - x^2} = \frac{(Y - y)(Y + y)}{(X - x)(X + x)}$, d'où et par suite $A = \frac{Y + y}{X + x}$, $\frac{Y - y}{X - x} = \frac{Y + y}{X + x}$, $Y - y = \frac{(Y + y)(X - x)}{X + x} = \frac{(2y + h^2 - y^2)(X - x)}{h^2 + x}$. Si le second point se rapproche du premier, h tend vers zéro; on aura donc, pour l'équation de la tangente, $Y - y = 2x(X - x)$. v. Pour donner une idée du problème des quadratures, nous allons chercher l'aire comprise entre la parabole, l'axe

INTRODCCTION. 3 des X et une droite $j? = a$, parallèle aux y.
 Divisons la distance $0A = a$ en i parties égales ($Jig \gg i$), et soit $/i=$: - la
 longueur de chacune d'elles. Traçons les ordonnées correspondantes, et par
 les points où elles rencontrent la courbe menons des parallèles à l'axe des :c.
 L'aire cherchée S sera ainsi décomposée en une somme de trapèzes
 curvilignes dont chacun sera lui-même composé d'un rectangle et d'un
 triangle curviligne. Fig. I. y L'aire de chaque rectangle est facile à évaluer.
 Soit BCDE le (m -f- 1**TM") d'entre eux. On aura d'où et enfin n BD $m^a^$
 et BC a - i n BCDE = $m^a^$ La somme des aires des rectangles sera donc ^'
 $r^* - / N \ll T a^{n\{n - i\}}(2n - i) 6n^a (a - h) (2 a - h)$

4 INTRODUCTION. Les triangles seraient plus difficiles à évaluer; mais on peut avoir une limite supérieure de l'aire de chacun d'eux. Soit, en effet, $EF = A$, i la hauteur du triangle DEF. Il est plus petit que le rectangle DEFG, dont l'aire est AA ; «. On aura donc $S > g < g_{hk}$, et, a fortiori, en remplaçant les n quantités $kt, \dots, kn$ par la plus grande d'entre elles k et remarquant que $nh = a, c^2 = a(a - h)(2a - h) \cdot S < a^2$. Faisons maintenant tendre h vers zéro ; k tendant également vers zéro, les deux quantités entre lesquelles S se trouve comprise tendront toutes deux vers la limite commune $-s^2$. Donc $S = -s^2 \cdot VI$. Les solutions des deux problèmes précédents offrent ce caractère commun de reposer sur l'introduction d'une quantité A , que Ton fait tendre vers zéro. Lorsqu'une quantité variable tend ainsi vers zéro ou vers ∞ , on dit qu'elle est infiniment petite ou infiniment grande. Mais il ne faut pas se laisser égarer par ces dénominations. Il n'y a pas, à proprement parler, d'infiniment petit, une quantité plus petite que toute quantité donnée étant évidemment nulle. Quant à l'infini, il échappe à toute mesure et ne saurait entrer dans un calcul. Les deux questions que nous venons de traiter mettent d'ailleurs en évidence les deux manières de faire intervenir les infiniment petits dans l'Analyse ; 1** Ou bien les quantités que l'on cherche se déterminent comme le coefficient angulaire de la tangente, en trouvant la limite du rapport de deux quantités infiniment petites; 2** Ou bien on les divise (comme l'aire S) en éléments

INTRODUCTION. D infiniment petits (les trapèzes curvilignes) que Ton décompose euxrmêmes en deux autres (rectangle et triangle), de telle sorte que l'une des deux sommes (celle des rectangles) ait une limite facile à évaluer et l'autre (celle des triangles) une limite nulle. vu. Soient h une quantité infiniment petite, k une quantité qui en dépende. Lorsque h tend vers zéro, il peut se faire k que $-T$ ne tende vers aucune limite déterminée. Soit, par exemple, $\hat{a} = A \sin t \cdot H$ est clair que le rapport $\frac{k}{h} = \sin t$ oscillera indéfiniment entre $+1$ et -1 là mesure que h se rapprochera de zéro. k Supposons au contraire que r tende vers une limite déterminée. Suivant que cette limite sera nulle, finie ou infinie, on dira que k est un infiniment petit d'un ordre supérieur, égal ou inférieur à l'ordre de A , On précisera cette notion en disant que k est d'ordre α par k rapport à A , si le rapport $\frac{k}{A^\alpha}$ tend vers une limite finie et différente de zéro, lorsque A se rapproche de zéro. D'après cette définition, A sera du premier ordre, une quantité finie sera d'ordre zéro, une quantité infinie sera d'ordre négatif. VIII. Si k est d'ordre α , on aura A étant une quantité finie et s un infiniment petit. On en déduit $A - \frac{k}{A^\alpha} \approx A^*$. Le premier terme de cette expression se nomme la valeur principale de k . Il représente k avec une erreur relative d'autant plus faible que A sera plus petit. Si celte première approximation ne suffit pas, on cherchera

6 L>TI0DI'CTI05. la valeur principale du terme complémeD taire s/i*. Soit $\frac{f}{h} = \frac{B}{h} + \frac{A}{h^2} + \dots$, B étant fini et $\frac{f}{h}$ infiniment petit. Nous aurons pour k cette seconde valeur approchée jusqu'à l'ordre p. On chercherait de même, si c'était nécessaire, la valeur principale de $\frac{f}{h^2}$ et ainsi de suite. IX. La détermination des valeurs principales des infiniment petits, et leur développement en série suivant les puissances de h, qui en est la conséquence, formeront l'objet de la première Partie de ce Cours. La solution de ce problème fondamental fournit une méthode d'approximation précieuse dans toutes les applications des Mathématiques ; mais là ne se borne pas son utilité : elle permet d'obtenir, comme nous allons le montrer, des résultats d'une rigueur absolue. . Supposons qu'une quantité inconnue x soit égale à la limite du rapport de deux infiniment petits du même ordre, k et l, ayant respectivement pour valeurs principales $\frac{A}{h^k}$ et $\frac{B}{h^l}$. On aura rigoureusement $A = B$ On a, en effet, $k - A \ll (h - s), l - B \ll (h - t), e$ et η étant des quantités infiniment petites. On en déduit $A - \frac{A}{h} = A(i - h e) = A(e - t) \eta \sim b U^\wedge - b^\wedge F(i^\wedge T,)$ et, en passant à la limite, $B = B(h - t) B e$ et η ayant pour limite zéro.

INTRODUCTION. 7 X. Supposons, d'autre part, que pour obtenir une quantité inconnue x nous Faisons décomposée en une somme d'éléments infiniment petits $A, A', \dots$, tous positifs. Soient $i_1, i_2, \dots$ les valeurs principales de ces éléments. On aura $A_i = m_i(i_1 - i_2)$, $A' = m, (i_1 - i_2)$, $y_j = A, -h A_j 4- \dots = W_i -h m, -h \dots -h e_j W_j -i -e_j m_j H- \dots$, $\dots$, $\dots$ • étant des quantités infiniment petites. Soient e et r , la plus petite et la plus grande d'entre elles. On aura évidemment $x = (M, H - n^2 - f- \dots)(i_1 - i_2)^{(n_i H - m, -!- \dots)(H - t_j$, d'où, en passant à la limite, $\alpha = \lim (m_j 4- m_j -f- \dots)$ • On a donc ce théorème : Dans l'évaluation de la limite d'Uin rapport ou d'une somme d' infiniment petits, on peut, sans erreur aucune, remplacer ces infiniment petits par leurs valeurs principales, XI. La considération des infiniment petits était familière aux géomètres du xvii* siècle; mais c'est à Newton et à Leibnitz que revient la gloire d'en avoir formé .un corps de doctrine systématique, qui porte le nom de Calcul infinitésimal ou Théorie des fonctions. Ce nouveau Calcul, développé par leurs successeurs, et principalement par les Bernoulli, d'Alembert, Euler, Lagrange, Cauchy, Gauss, Abel et Jacobi, formera l'objet de ce Cours. Il se divise en deux branches distinctes ; le Calcul différentiel et le Calcul intégral. Le Calcul différentiel résout le problème suivant : Connaissant les relations qui lient plusieurs quantités variables, trouver celles qui existent entre leurs variations infiniment petites .

8 INTRODUCTION]; Le Calcul intégral pose la question inverse : Des relations qui lient les variations, déduire celles qui existent entre les variables. Dans les applications de l'analyse aux phénomènes naturels ces deux problèmes pourraient se formuler ainsi : i** Des effets étant mesurés, remonter à leurs causes. a° Les causes étant connues, calculer leurs effets.

COURS D'ANALYSE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE. — «
 PREMIÈRE PARTIE. CALCUL DIFFÉRENTIEL CH. II. CHAPITRE I.
 DÉRIVÉES ET DIFFÉRENTIELLES. I. — Définitions. 1. Si deux
 quantités variables x et y sont liées entre elles par une relation, on peut
 choisir arbitrairement l'une d'elles comme variable indépendante, et l'on
 dira que l'autre variable est une fonction de la première. Soient, plus
 généralement, $x, y, z, \dots$ des variables en nombre m , liées entre elles par
 n relations. On pourra choisir n de ces quantités pour variables
 indépendantes, et les autres en seront des fonctions. Une fonction d'une
 variable x peut se désigner par le symbole $f(x)$; si l'on considère
 simultanément plusieurs fonctions différentes, on pourra les désigner
 respectivement par

JO PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE I. $F(x), {}^jcy \dots$ en changeant la lettre initiale de la notation précédente. Une fonction de plusieurs variables $x, y, \dots$ se représente par la notation analogue $/(j:jK\hat{\cdot} \bullet \bullet \bullet)$.

2. Nous allons passer rapidement en revue les diverses fonctions d'une variable que fournissent les éléments des Mathématiques. i° On rencontre d'abord les polynômes ou fonctions entières définies par des équations de la forme $V =: Kx^m - B_j x^{j-1} - \dots$ où $m, j, \dots$ sont des entiers et $A, B, \dots$ des constantes. Leur propriété fondamentale, démontrée pour la première fois par d'Alenibert, est exprimée par le théorème suivant, qui sera établi dans ce Cours ; Toute fonction entière de degré m peut être décomposée en un produit de m facteurs du premier degré (à coefficients réels ou imaginaires),

2° En second lieu viennent les fractions rationnelles, qui s'obtiennent en formant le quotient de deux polynômes. La fraction rationnelle est dite simple si elle a pour numérateur une constante, et pour dénominateur un polynôme du premier degré, ou une puissance d'un semblable polynôme. Nous verrons que toute fraction rationnelle peut être exprimée par la somme d'une fonction entière et d'un certain nombre de fractions simples. i° Les deux classes de fonctions qui précèdent rentrent comme cas particuliers dans celle des fonctions algébriques, définies par une équation de la forme $Kx^ny^m - BuC^jK^* - i - \dots = 0$, où les coefficients $A, B, \dots$ sont des constantes, et les exposants $n, m, j, \dots$ des entiers. Soit k le degré de l'équation par rapport y à chaque

DÉRIVÉES ET DIFFÉRENTIELLES. Il y a une valeur de x qui correspond à y en vertu du théorème de d'Alembert, pour des valeurs distinctes de la fonction y . Ce fait analytique remarquable établit une différence tranchée entre ces nouvelles fonctions et les fonctions entières ou rationnelles. 4° Enfin viennent les fonctions non algébriques, ou transcendentes. Les plus simples sont les suivantes : La fonction $y = \log x$ (pour x incommensurable). La fonction exponentielle $y = a^x$. La fonction logarithmique $y = \log x$, Inverse de la précédente. Les fonctions trigonométriques, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, etc., et leurs inverses $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$, etc. 3. On dit qu'une fonction $y = f(x)$ est continue pour la valeur $x = a$ si, quelque petite que soit la quantité ϵ , on peut toujours déterminer une seconde quantité δ telle que l'on ait pour toutes les valeurs de x comprises entre $a - \delta$ et $a + \delta$: $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. La fonction $f(x)$ sera continue en a si elle est continue pour toutes les valeurs de x comprises dans cet intervalle. Elle sera continue aux environs de la valeur a , si l'on peut déterminer un intervalle comprenant le point a et dans lequel elle soit continue. De même une fonction de plusieurs variables $z = f(x, y)$ sera continue pour $x = a$, $y = b$ si, quelque petit que soit ϵ , on peut déterminer δ de telle sorte que l'on ait $|f(x, y) - f(a, b)| < \epsilon$ tant que x et y seront compris entre $a - \delta$ et $a + \delta$ et $b - \delta$ et $b + \delta$. On exprime souvent cette idée d'une manière plus courte, mais moins précise, en disant qu'à tout système d'accroissements infiniment petits donnés aux variables correspond pour la fonction un accroissement infiniment petit.

la PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE I. Il est clair qu'une fonction quelconque est discontinue pour les systèmes de valeurs des variables qui la rendent infinie ou indéterminée. II — Dérivée et différentielle d'une fonction d'une seule variable. i. Soit $f(x)$ une fonction de x . Si nous donnons à cette variable un accroissement infiniment petit Δx , $f(x + \Delta x)$ prendra un accroissement $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. — $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ Supposons que Δx tende vers zéro; $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tendra vers une limite qu'on appelle la dérivée $f'(x)$. Il est clair que cette limite dépend en général de la valeur initiale donnée à x . Ce sera donc une fonction de x . Nous la désignerons avec Lagrange par $f'(x)$, ou avec Cauchy par $D_x f$ ou $Df(x)$. On sait d'ailleurs qu'il peut arriver que $f'(x)$ tende vers ∞ ou ne tende vers aucune limite fixe. Dans ce cas, $f'(x)$ serait infinie ou indéterminée. Il est clair qu'une fonction est continue aux points où sa dérivée est finie et déterminée, car son accroissement Δy correspondant à un accroissement infiniment petit de Δx étant sensiblement égal à $f'(x) \Delta x$ sera infiniment petit et de même ordre que Δx . On a longtemps admis, sans preuve suffisante, que, réciproquement, si la fonction y est continue, sa dérivée y' sera finie et déterminée, sauf pour certaines valeurs isolées données à la variable. Cette assertion est trop absolue. On a donné récemment des exemples de fonctions continues dont la dérivée est toujours indéterminée. Mais ces fonctions anormales ne seront pas abordées dans ce Cours. Nous nous bornerons à étudier les fonctions continues qui satisfont au postulat ci-dessus. Elles offrent déjà un champ fort vaste, car, parmi les fonctions en nombre infini qu'elles embrassent, se trouvent, ainsi que

DÉRIVÉES ET DIFFÉRENTIELLES. 13 nous allons le voir, toutes celles qui sont connues par les éléments des Mathématiques. 5. Dérivée de x^m {m étant entier et positif}. — On a, par définition, $(x^m)' = mx^{m-1}$. — On aura sin {x -f- A.r} = sin.r (sinj7)' = lim^x . LX (AJ7\ 2 Sm CCS I 07 H I, . 2 V 2 / Ix . A.r sm — r=: cos J7 lim —T— I AJ7 Or — 5 étant un petit angle, sera compris entre sin — cl . A.T . A^ sm — sm — . Aj? *^ t\ 2 ^ . Aj? tang — = Donc est compris entre i et cos ces — - Ax 2 2 ^x Mais, lorsque Ad; tend vers zéro, cos — tend vers Tunité ; on aura donc . A.r sm — 2 lim -T ^ :=i:i, d'où (sina7)'= cosx. \ Ao?

The text on this page is estimated to be only 20.03% accurate

14 PtnifeBE PAKTIK. — CHAPITU I. 7. Dérivée de $\log j$ ". — On aura $\dots$, $\dots$ W'f. $\dots$) 0, $\dots$ loi T^r — Xr — loi: $\wedge$, $\dots$ ' x } ' Pour déterminer cette limite, posons $\dots = \dots$ • Lorsque Ax *endra vers zéro, n tendra vers ∞ . On aura d'ailleurs $\wedge c \blacksquare \wedge X \text{'''K'} \wedge \ll \wedge X \text{'''K'} \wedge \ll \blacksquare$ Ioî; $(I - t) \dots$, $(\log x) = \wedge$ -lira — $\log \lim II - I \cdot 8$. Il nous reste à démontrer que, lorsque n tend vers ∞ , $I I - i \dots j$ tend vers une limite finie, et à déterminer cette limite. i" Supposons d'abord qu'on donne à n une série de valeurs positives, entières, indéfiniment croissantes. La formule du binôme donnera $\backslash n) n$ $T \dots - r I = 1 - \backslash h$. Les facteurs $i \wedge \dots > i > \dots$ étant positifs et $n \wedge$ moindres que l'unité, les divers termes de cette expression seront positifs et moindres que les termes de la suite $S \ll \text{— IH h} \dots 41 \cdot 2 \dots //t 1 \cdot 2 \dots / \wedge$ On aura donc constamment $(-7.)$ "

DÉFINITIONS ET DIFFÉRENTIELLES. d'où I (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^i} = 0$ pour $i > 0$
 1.2.1 Mais, d'autre part, m désignant un entier constant quelconque, on aura $\sum_{j=0}^m \frac{1}{n^j} \sim \frac{1}{n^0} = 1$ car les termes suivants du développement, que nous négligeons, étaient tous positifs. On aura donc (a)

$$= \sum_{j=0}^m \frac{1}{n^j} + \frac{1}{n^{m+1}} + \frac{1}{n^{m+2}} + \dots = \frac{1}{n^0} + \frac{1}{n^{m+1}} + \frac{1}{n^{m+2}} + \dots$$
 1.2.2 Les facteurs $\frac{1}{n^j}$ pour $j > m$ ont évidemment pour $n \rightarrow \infty$ limite l'unité. Le nombre m étant un entier quelconque qu'on peut supposer aussi grand qu'on veut, les inégalités (i) et (2) montrent qu'on aura exactement $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^m \frac{1}{n^j} = 1$
 1.2.3 La valeur numérique de cette série se désigne généralement par e . Elle est aisée à calculer avec une grande approximation. On trouvera $e = 2,718281828 \dots$
 2° Supposons maintenant que l'on donne à n une série de valeurs positives indéfiniment croissantes, mais qui ne soient plus nécessairement entières. Soient i et j les deux entiers entre lesquels n se trouve à chaque instant compris. On

16 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE I. aura évidemment (■-.-
 $\wedge, -)'^{-+} - !/ I$ D'ailleurs, $/ ?$ est supposé croître indéfiniment; donc $i - \}$ et $I H$
auront pour limite 1 unité, et $(i H -)$ et $1 I H 1$ auront pour limite e . Donc
les deux quantités entre lesquelles $(i H - j)$ est comprise, et par suite cette
quantité elle-même, ont pour limite e . 3° Supposons enfin qu'on donne à n
des valeurs négatives indéfiniment croissantes en valeur absolue. Posons n
 $— — /i' \#|$ il viendra Or, n' tendant vers ∞ , le premier facteur tendra vers e ,
le second vers l'unité. La limite cherchée sera donc encore égale à e . On
aura donc $\log x = - \wedge -$. Le seul système de logarithmes employé
dans les formules de l'Analyse est celui dont la base est e . On leur donne le
nom

The text on this page is estimated to be only 26.72% accurate

DÉRIVÉES ET DIFFÉRENTIELLES. I7 (le logarithmes népériens. Dans ce système, on aura évidemment $\log e = 1$, d'où $(\log a)' = \frac{1}{a}$.

9. Voici maintenant quelques théorèmes généraux qui nous permettront d'obtenir, sans nouvelle recherche, la dérivée d'une foule de fonctions.

Dérivée d'une somme, — Soit $y = u + v + \dots + t$ une somme algébrique de fonctions dont les dérivées soient connues. On aura évidemment $y' = u' + v' + \dots + t'$ et, en passant à la limite, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \frac{v(x+h) - v(x)}{h} + \dots + \frac{t(x+h) - t(x)}{h} = u'(x) + v'(x) + \dots + t'(x)$.

10. Dérivée d'un produit, — Soit $y = u \cdot v$, u et v ayant des dérivées connues u' et v' , On aura $y' = u'v + uv'$ (on peut le démontrer en utilisant la formule $y(x+h) = u(x+h)v(x+h)$ et en développant à l'aide du développement limité). Si le produit contenait plus de deux facteurs, on raisonnerait de même. On obtient ainsi la règle suivante : Pour obtenir la dérivée d'un produit, il faut prendre la dérivée de chaque facteur, la multiplier par le produit des autres facteurs et ajouter les résultats. Remarques, — 1° Si l'un des facteurs du produit est constant, sa dérivée est nulle. En effet, u étant constant, par hypothèse, on aura, quel que soit x , $u' = 0$, d'où $y' = 0$, et par suite $y = \text{constante}$.

— Cours, I. 2

18 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE I. 2** Les résultats ci-dessus permettent d'obtenir la dérivée d'une fonction entière quelconque, car l'application des règles précédentes donnera immédiatement $j' = \frac{1}{n} A_j \frac{d}{dx} \left(\frac{A_n}{A_{n-1}} \right) = \frac{A_n}{A_{n-1}} \left(\frac{A_n'}{A_n} - \frac{A_{n-1}'}{A_{n-1}} \right)$. H. Dérivée (Tun quotient, — Soit $j' = -\frac{1}{n} \frac{A_n}{A_{n-1}}$ On aura u $-h A_w // A_w A_r$ (. Il — A)' r H- Ar r _ Ar A.r Aj7 ~ Ax i'(r-l-Ar) et, à la limite, $\frac{1}{n} \frac{A_n}{A_{n-1}}$ Cette formule permet de trouver la dérivée de toute fraction rationnelle. 12. Dérivée d'une fonction de fonction. — Soit $\phi = F(w)$, $\frac{d}{dx} \phi = F'(w) \frac{dw}{dx}$ étant lui-même une fonction de x ; on aura évidemment $\frac{d}{dx} \left(\frac{A}{B} \right) = \frac{A' B - A B'}{B^2}$ d'où $y:z = \lim_{x \rightarrow a} \frac{y}{z} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} y}{\lim_{x \rightarrow a} z}$ $t = F(w) = F'(w) \frac{dw}{dx} = F'(a) \frac{dw}{dx}$ $L_x \wedge \frac{1}{j} \wedge f \wedge j \wedge f$ 13. Dérivée d'une fonction inverse, — Soit $j' = \frac{1}{j(x)}$ une fonction $A_c x$ et supposons que cette équation, résolue par rapport à x donne $x = \phi(y)$. Les deux fonctions ϕ et j seront dites inverses l'une de l'autre. Si l'on connaît la dérivée de l'une d'elles, on aura immédiatement celle de l'autre. Appliquons en effet la règle du numéro précédent à la recherche de la dérivée de $\phi(y)$. On trouvera, pour cette dérivée, la valeur suivante $\phi'(y) = \frac{1}{j(x)}$.

The text on this page is estimated to be only 24.52% accurate

DÉRIVÉES ET DIFFÉRENTIELLES. I9 Mais

COSJ? d'où ,, (sin.rVpos.r — sin.r^ros.ry cos*.r-i-sîn*.r t (tango;)
 — m r — — r — 3° Dérivée de arcsinx. — L'équation y izz arcsinx donne
 $X := \sin j'$. On aura donc, en appliquant la formule donnée pour former la
 dérivée des fonctions inverses, $y(\sin/)' \cos/ \text{ s}jx^x^$ le signe du radical étant
 déterminé dans chaque cas par celui de $\cos/'$.

The text on this page is estimated to be only 15.41% accurate

The text on this page is estimated to be only 26.33% accurate

BÈRIYÉES ET DIFFÉRENTIELLES. 21 15. Théorème. — Soit $y = f(x)$ une fonction de x dont la dérivée reste finie et déterminée lorsque x varie dans un certain intervalle. Soient a et $a + h$ deux valeurs de x prises dans cet intervalle. On aura $f(a + h) - f(a) = Lh$, L désignant une quantité intermédiaire entre la plus grande et la plus petite valeur de $f'(x)$ dans l'intervalle de a à $a + h$. En effet, donnons successivement à x une série de valeurs « 1, a_0 , a_1 » intermédiaires entre a et $a + h$. Posons $f(a) = f_0$, $f(a_1) = f_1$, $f(a_2) = f_2$, $f(a_3) = f_3$, $f(a_4) = f_4$, $f(a_5) = f_5$, $f(a_6) = f_6$, $f(a_7) = f_7$, $f(a_8) = f_8$, $f(a_9) = f_9$, $f(a_{10}) = f_{10}$, $f(a_{11}) = f_{11}$, $f(a_{12}) = f_{12}$, $f(a_{13}) = f_{13}$, $f(a_{14}) = f_{14}$, $f(a_{15}) = f_{16}$, $f(a_{16}) = f_{17}$, $f(a_{17}) = f_{18}$, $f(a_{18}) = f_{19}$, $f(a_{19}) = f_{20}$, $f(a_{20}) = f_{21}$, $f(a_{21}) = f_{22}$, $f(a_{22}) = f_{23}$, $f(a_{23}) = f_{24}$, $f(a_{24}) = f_{25}$, $f(a_{25}) = f_{26}$, $f(a_{26}) = f_{27}$, $f(a_{27}) = f_{28}$, $f(a_{28}) = f_{29}$, $f(a_{29}) = f_{30}$, $f(a_{30}) = f_{31}$, $f(a_{31}) = f_{32}$, $f(a_{32}) = f_{33}$, $f(a_{33}) = f_{34}$, $f(a_{34}) = f_{35}$, $f(a_{35}) = f_{36}$, $f(a_{36}) = f_{37}$, $f(a_{37}) = f_{38}$, $f(a_{38}) = f_{39}$, $f(a_{39}) = f_{40}$, $f(a_{40}) = f_{41}$, $f(a_{41}) = f_{42}$, $f(a_{42}) = f_{43}$, $f(a_{43}) = f_{44}$, $f(a_{44}) = f_{45}$, $f(a_{45}) = f_{46}$, $f(a_{46}) = f_{47}$, $f(a_{47}) = f_{48}$, $f(a_{48}) = f_{49}$, $f(a_{49}) = f_{50}$, $f(a_{50}) = f_{51}$, $f(a_{51}) = f_{52}$, $f(a_{52}) = f_{53}$, $f(a_{53}) = f_{54}$, $f(a_{54}) = f_{55}$, $f(a_{55}) = f_{56}$, $f(a_{56}) = f_{57}$, $f(a_{57}) = f_{58}$, $f(a_{58}) = f_{59}$, $f(a_{59}) = f_{60}$, $f(a_{60}) = f_{61}$, $f(a_{61}) = f_{62}$, $f(a_{62}) = f_{63}$, $f(a_{63}) = f_{64}$, $f(a_{64}) = f_{65}$, $f(a_{65}) = f_{66}$, $f(a_{66}) = f_{67}$, $f(a_{67}) = f_{68}$, $f(a_{68}) = f_{69}$, $f(a_{69}) = f_{70}$, $f(a_{70}) = f_{71}$, $f(a_{71}) = f_{72}$, $f(a_{72}) = f_{73}$, $f(a_{73}) = f_{74}$, $f(a_{74}) = f_{75}$, $f(a_{75}) = f_{76}$, $f(a_{76}) = f_{77}$, $f(a_{77}) = f_{78}$, $f(a_{78}) = f_{79}$, $f(a_{79}) = f_{80}$, $f(a_{80}) = f_{81}$, $f(a_{81}) = f_{82}$, $f(a_{82}) = f_{83}$, $f(a_{83}) = f_{84}$, $f(a_{84}) = f_{85}$, $f(a_{85}) = f_{86}$, $f(a_{86}) = f_{87}$, $f(a_{87}) = f_{88}$, $f(a_{88}) = f_{89}$, $f(a_{89}) = f_{90}$, $f(a_{90}) = f_{91}$, $f(a_{91}) = f_{92}$, $f(a_{92}) = f_{93}$, $f(a_{93}) = f_{94}$, $f(a_{94}) = f_{95}$, $f(a_{95}) = f_{96}$, $f(a_{96}) = f_{97}$, $f(a_{97}) = f_{98}$, $f(a_{98}) = f_{99}$, $f(a_{99}) = f_{100}$. L'addition de ces équations donnera $f(a + h) - f(a) = Lh$. Remplaçons, d'une part, les quantités $f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_{100})$ par leur maximum M , et les quantités $S_1, \dots, S_{100}$ par leur maximum s ; on aura évidemment $f(a + h) - f(a) \leq Ms$. On trouvera de même, en remplaçant les quantités $f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_{100})$ par leur minimum m et les quantités $S_1, S_2, \dots, S_{100}$ par leur minimum r , $f(a + h) - f(a) \geq mr$. (m - h T.) A. Supposons maintenant les valeurs intermédiaires $a_1, a_2, \dots, a_{100}$ indéfiniment multipliées. Les quantités $e_1, e_2, \dots, e_{100}$ teindront toutes vers zéro, car e_i , par exemple, est la différence entre $f(a_i) = f(a_{i-1}) + e_i$ et sa limite $f(a)$. Donc e_i tendront vers zéro $U_i \rightarrow 0$.

PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE I. vers zéro, et l'on aura à la limite $\frac{f(a-h) - f(a)}{h} = -f'(a)$. Remarque, — Si $f'(x)$ est une fonction continue de a à $a + A$, elle passera par degrés insensibles de son maximum M à son minimum m . Il existera donc entre a et $a + h$ une valeur b telle que l'on ait $f(a+h) - f(a) = hf'(b)$. D'ailleurs, b , étant compris entre a et $a + A$, sera de la forme $a + \theta h$ θ étant compris entre 0 et 1. 16.

Corollaire I. — Une fonction dont la dérivée est constamment nulle dans un certain intervalle est constante dans cet intervalle. Soient en effet a et $a + h$ deux valeurs quelconques de x comprises dans cet intervalle. On aura $M \geq f(x) \geq m$ et par suite $f(a) = f(a+h)$. Corollaire II. — Deux fonctions qui ont même dérivée ne peuvent différer que par une constante. Car leur différence, ayant une dérivée constamment nulle, est constante.

Réciproquement, deux fonctions qui ne diffèrent que par une constante, ayant mêmes accroissements, auront même dérivée. 17. De la relation $H = g^{\frac{1}{n}}$,

DÉRIVÉES ET DIFFÉRENTIELLES. 23 qui sert de définition à la dérivée, on déduit $Ar^{\wedge} = y^{\wedge} x^{-1} Xf$ e étant infiniment petit avec $x^{\wedge}$. Donc $A^{\wedge}$ se compose de deux termes : $Fun, y^{\wedge} x$, simplement proportionnel à $x^{\wedge}$ et qui constitue sa valeur principale; l'autre, $e A:r$, d'ordre supérieur au premier. Le premier de ces deux termes, $j^{\wedge} A_j c$, se nomme la différentielle de $x^{\wedge}$ et se désigne par dy . Dans le cas particulier où la fonction y ne serait autre que X , on aurait $j^{\wedge} = i$, et l'équation $dy^{\wedge} = y^{\wedge} Ix$ se réduirait à $Ix := dx$. Substituant cette valeur de Ix dans l'équation générale $dy = y^{\wedge} x$, on en conclura $dy = y dx$, $dy^{\wedge} dx$ III. — Dérivées partielles. Différentielle totale.

18. Passons à la considération des fonctions de plusieurs variables. Soit, par exemple, $z = f(x, y)$ une fonction continue de deux variables indépendantes x, y . Faisons d'abord varier x en laissant y constant; l'expression $\frac{\partial z}{\partial x}$ sera une fonction de x, y qu'on appelle la dérivée partielle de z par rapport à x .

The text on this page is estimated to be only 22.93% accurate

^4 PREMIÈRE PARTIE. ~ CHAPITRE I. Lagrange la représente par la notation fj^x^y ou z^y Cauchy par la notation $Dar/(-r, >)$ ou $D^rx;$. Tx» 11,' àz . dz D autres auteurs la désignent par $—j$ ou mieux par $-j— >$ par une raison que nous expliquerons tout à Theure. On appellera de même déris^ée partielle de z par rapport $\bullet A$ y l'expression $\lim^{-\wedge} Ak$ et on la représentera à volonté par $^j.$, $D^{-};$ ou $—^ \bullet$ 19. Cela posé, changeons simultanément x et j' en $x-h$ $Ajt^y-\wedge y^ Aj?$ et Ar étant des infiniment petits que nous considérons comme du premier ordre. On aura $A3$ $rrzf\{x$ 4- $Aj:-, y$ 4- $Av) —f^x, r) —f\{x -h A.r, r$ 4- $Aj) —/(J? 4- A.r, ,v) 4-/(x4-A.r, r)-/(.r, /). Or on a, par définition, /(r + A.r,r)-/(^,j)=^^: ^Ax4-sAa', /(r 4- A.r , r 4- A >') - /{.r 4- A.r , r) ^ ^/(-^"^-^-^^r) ^^^, ^ , ^^ ^^, .^ £ et £< étant infiniment petits. Si d'ailleurs on admet que $-j-$ est une fonction continue par rapport à $J7$, on aura $c>^K$ " ôy ' " ^ " " £•2 étant infiniment petit. On aura donc$

DÉRIVÉES ET DIFFÉRENTIELLES. ?..> Donc Lz sera formé de deux parties : I^{**} L'une, d'où $\hat{O}Y$ linéaire en Lx et $A>'$; i''' L'autre, $\oint A_j CTH(\oint i-f-ei) Ar$, d'ordre supérieur au premier. La première partie, qui est évidemment la principale lorsque $\wedge$ et A_j' sont suffisamment petits, se nomme la différentielle totale de z et se désigne par dz . Les deux termes dont elle se compose, et qui correspondent respectivement à la variation de x et à celle de $y^\wedge$ se nomment différentielles partielles, 20. Si z n'était autre que x , l'équation $dz = i^\wedge i^\wedge x - r - !^\wedge V \text{ ou } \hat{O}Y$ " se réduirait à $dx = i^\wedge x$. Si z se réduisait à $y^\wedge$, on aurait de même $dy = \hat{O}y$. On aura donc $dz = -f - dx - \dots - f - dY^\wedge dx \hat{O}z$ " Si l'on avait désigné les dérivées partielles par $\sim > \sim >$ on risquerait de les confondre avec les quotients de la différentielle totale dz par dx ou dy , tandis que ce ne sont que les quotients des différentielles partielles. C'est pourquoi il est préférable de changer la forme du d et d'écrire $-r^\wedge, -, - \bullet$

26 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE I. 21. Remarque. — Si -

z est identiquement nulle, z sera une constante relativement à x . Cette condition exprime donc que z ne dépend que de y . De même, si $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, z ne dépend que de x . Enfin, si l'on a identiquement $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ et $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, z , étant indépendant à la fois de x et de y se réduira à une constante. Ces deux conditions $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ peuvent être résumées en celle-ci $dz = 0$, car, à z $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ et, pour que cette quantité s'annule identiquement, indépendamment de toute valeur particulière donnée aux accroissements dx et dy il faut et il suffit que $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ soient nuls $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ et $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ séparément.

22. Dérivées des fonctions composées. — Une expression de la forme w où w , $\frac{\partial w}{\partial x}$, ... sont elles-mêmes des fonctions d'une ou plusieurs variables indépendantes $x, y, \dots$, est évidemment une fonction de $x, y, \dots$. On dit qu'elle est composée au moyen des fonctions m, r . Proposons-nous de trouver la différentielle d'une semblable fonction. Pour l'obtenir, donnons à $x, y, \dots$ des accroissements $dx, dy, \dots$. Soient $\Delta w, \Delta \frac{\partial w}{\partial x}, \dots, \Delta \frac{\partial w}{\partial y}$ les accroissements correspondants de $w, \frac{\partial w}{\partial x}, \dots, \frac{\partial w}{\partial y}$. On aura, d'après ce qui vient d'être établi, Δw au $\Delta \frac{\partial w}{\partial x} dx + \Delta \frac{\partial w}{\partial y} dy$ étant infiniment petit par rapport aux termes précédents.

The text on this page is estimated to be only 26.89% accurate

DÉRIVÉES ET DIFFÉRENTIELLES. 27 On a de même du j du j , Aw — — rtoT -^ ^r- cfy -+- . . . H- £, — rtM 4- e, , i.X / dv j dv j .
 $\frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \frac{dv}{dt}$, Substituant[^] dans Texpression de A/, et négligeant les termes multipliés par e, £|, ej, . . ., on obtiendra pour d/, valeur principale de A/, l'expression suivante : $\frac{\partial}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial}{\partial v} \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} (du \wedge dv \sim du \wedge dx \wedge dy \wedge \dots)$ $\frac{d}{dt} [dv \cdot (\frac{\partial}{\partial x} dv \wedge dx \wedge dy \wedge \dots)] = \frac{d}{dt} (\frac{d}{dt} du \wedge \frac{d}{dt} dv \sim \frac{d}{dt} du \wedge dx \wedge dv \wedge dx \wedge dy \wedge uv \wedge dy / *$ On voit, par cette formule, que la différentielle totale df s'exprime au moyen de du , dv , de la même manière que si u , V étaient des variables indépendantes. D'autre part, les coefficients de dx , dy , . . . dans Texpression de $c^{\wedge}$ représentent les dérivées partielles de /par rapport aux variables indépendantes $x, y, \dots$. On aura donc la règle fondamentale suivante pour former ces dérivées : La dérivée par rapport à une variable indépendante x d' une fonction composée $f(u^{\wedge} v, \dots)$ s'obtient en ajoutant ensemble les dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial}{\partial v} \dots$ respectivement multipliées par les dérivées de $u, v, \dots$ par rapport à la variable x .

28 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE I. 23. Supposons que les variables indépendantes x^j, y^j et les fonctions $w, r, \dots$ satisfassent identiquement à une équation $F(x, y, w, r, \dots) = 0$. Le premier membre de cette équation étant une fonction de $X, y, \dots$ dont la valeur est constante et égale à zéro, ses dérivées par rapport à chacune de ces variables seront nulles. On aura donc, en formant ces dérivées d'après la règle énoncée ci-dessus, à V $\left(\frac{\partial F}{\partial x^j} \frac{dx^j}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y^j} \frac{dy^j}{dt} + \frac{\partial F}{\partial w} \frac{dw}{dt} + \frac{\partial F}{\partial r} \frac{dr}{dt} \right) = 0$. Ces équations peuvent être concentrées en une seule, en exprimant que la différentielle totale dF est identiquement nulle. 24. Dérivées des fonctions implicites, — On nomme fonctions implicites celles dont l'expression, au moyen des variables indépendantes, n'est pas immédiatement donnée, mais qui dépendent d'équations non résolues. La remarque précédente fournit un moyen facile de calculer leurs dérivées partielles, ainsi que leur différentielle totale. Soit, par exemple, u une fonction de x, y définie par l'équation $\Phi(x, y, u) = 0$. Concevons qu'après avoir résolu cette équation par rapport à w on y substitue la valeur trouvée. Le premier membre sera identiquement nul. Ses dérivées par rapport à x et y par

The text on this page is estimated to be only 24.19% accurate

DÉRIVÉES ET DIFFÉRENTIELLES. 29 rapport à y seront donc nulles, ce qui fournira les équations dF à F au $\frac{dF}{dx}$ du $\frac{dF}{dy}$ d? $\frac{dF}{dx}$ du $\frac{dF}{dy}$ $\sim$ ' lesquelles pourront servir à déterminer les inconnues $y \rightarrow$ du r_i ' -T— • Un en tire $aF r > F$, . du $\frac{dF}{dx}$ du $\frac{dF}{dy}$ du du et, par suite, dF $\frac{dF}{dx}$, du, du, $\frac{dF}{dy}$ $\frac{dF}{dx}$, I du = --- $\frac{dF}{dx}$ -^ — $\frac{dF}{dy}$ — rpr $\frac{dF}{dx} \sim \frac{dF}{dy}$. $\frac{dF}{dx}$ $\frac{dF}{dy}$ '^ $\frac{dF}{dy}$ Oh ' du du On peut opérer d'une façon inverse. En égalant à zéro la différentielle totale rdF , on trouvera d'abord $\frac{dF}{dx}$ ^ $\frac{dF}{dy}$, $\frac{dF}{dx}$, $\frac{dF}{dy}$ du On tirera de là $\frac{dF}{dx}$ $\frac{dF}{dy}$, $\frac{dF}{dx}$, ^ $\frac{dF}{dy}$, du du et enfin, identifiant cette expression avec la suivante, , du . du , au =1:: ^ $\frac{dF}{dx}$ — $\frac{dF}{dx}$ -+- -T- $\frac{dF}{dy}$, $\frac{dF}{dx}$ $\frac{dF}{dy}$ "■' on retrouvera les équations (i). 2o. Soient, comme second exemple, w , v deux fonctions

The text on this page is estimated to be only 28.76% accurate

30 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE I. implicites de $x^{\wedge} y^{\wedge}$ définies par les deux équations $F(j?, V, \ll, r)$ -o, Égalant à zéro les différentielles totales, par exemple, on aura dV , à? $^{\wedge} dY^{\wedge} dY^{\wedge} -T- r/x + -r- ClY H- -T- rtM + -— dv — Q, \grave{U}X Oy "$ OU $()V -T- dx -h -r- ar 4- t- du -i- -.r— ai' = o. \hat{o}x ay "$ Ou dv Résolvant ces équations par rapport à du et dv , on obtiendra des expressions de la forme $du^{\wedge} A dx -+ - B dV_y dv = C <:$
d="" dy="" et="" ton="" aura="" par="" suite="" du="" .="" oy="" les="" th="" pr="" permettent="" la="" de="" toute="" fonction="" li="" aux="" variables="" ind="" un="" syst="" quelconque="" o="" ne="" figurent="" que="" des="" signes="" alg="" exponentielles="" logarithmes="" fonctions="" circulaires="" directes="" ou="" inverses="" el="" puissances="" incommensurables="" iv="" diff="" sup="" soient="" yz="zf{\^x)" une="" x="" y="" sa="" cette="" nouvelle="" elle-m="" qu="" appelle="" seconde="" dey="" repr="" j="" dv="" sera="" troisi="" aey="" se="" pary="" d="" ainsi="" suite="">

The text on this page is estimated to be only 24.81% accurate

DÉRIVÉES ET DIFFÉRENTIELLES. 31 28. Soit de même $z = f(x, y)$ une fonction de plusieurs variables indépendantes x, y ; ses dérivées partielles $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \dots$ seront elles-mêmes des fonctions de x, y ayant des dérivées partielles. Nous désignerons les dérivées partielles de z par $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \dots$ ou enfin par $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \dots$ et celles de $\frac{\partial z}{\partial x}$ par $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \dots$. En général, $\frac{\partial^m z}{\partial x^m}$ représentera la fonction déduite de z en y effectuant successivement m dérivations par rapport à x , puis n dérivations par rapport à y puis p dérivations par rapport à x_j etc. 29. Théorème. — Tant que $\frac{\partial^m z}{\partial x^m}$ et $\frac{\partial^n z}{\partial y^n}$ sont des fonctions continues de x, y , on aura $\frac{\partial^m z}{\partial x^m} = \frac{\partial^n z}{\partial y^n}$. Soit, en effet, $z = f(x, y)$. Nous allons prouver que l'une des deux quantités $\frac{\partial^m z}{\partial x^m}$ ou $\frac{\partial^n z}{\partial y^n}$ est égale à la limite du rapport $\frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$ lorsque h et k tendent vers zéro. Le numérateur de R est l'accroissement que prend la fonction $f(x, y-k)$ — $f(x, y)$ — $\frac{\partial f}{\partial y} k$

32 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE I. lorsqu'on y change x en $x + h$. Cet accroissement est égal, d'après un théorème précédemment démontré, à 0 étant compris entre 0 et i . D'après le même théorème, cette expression sera égale à B , étant compris entre 0 et i . On aura donc et, en passant à la limite, $\lim R = V^{(j)}$. On trouverait de la même manière $\lim R = V^{(r, v)}$. Corollaire. — On a généralement $\frac{dx}{dy} \frac{dy}{dx} = 1$. . .
 $\{^j; m^p \dots f\} y^{n^{\dots}}$ car, deux dérivations successives, opérées l'une par rapport à x l'autre par rapport à y , pouvant être interverties, comme on vient de le voir, sans changer le résultat final, on pourra évidemment intervertir d'une façon quelconque les dérivations à opérer et, par exemple, opérer d'abord toutes celles relatives à x , puis celles relatives à y , 30. Soit j' une fonction de x . Sa différentielle $y \, dx$ sera elle-même une fonction de x dont on pourra chercher la différentielle. Cette nouvelle différentielle dépend de la relation qu'on voudra établir entre la variable x et l'accroissement dx : qu'on lui fait subir. Si l'on admet que cet accroissement soit constant, quel que soit x , la différentielle sera évidemment égale $k \, y \, dx$. $\frac{dx}{dx} = y \frac{dx}{dx}$. On la nomme différentielle seconde $A_q y$ et on la désigne par $d^2 y$

DÉRIVÉES ET DIFFÉRENTIELLES. 33 De même d'y aura lui-même une différentielle $y' dy$; ce sera la différentielle troisième de y , et on la désignera par $y'' dy$. Continuant ainsi, on aura $y''' dy$, $y^{(4)} dy$, $y^{(5)} dy$, $y^{(6)} dy$, $y^{(7)} dy$, $y^{(8)} dy$, $y^{(9)} dy$, $y^{(10)} dy$, $y^{(11)} dy$, $y^{(12)} dy$, $y^{(13)} dy$, $y^{(14)} dy$, $y^{(15)} dy$, $y^{(16)} dy$, $y^{(17)} dy$, $y^{(18)} dy$, $y^{(19)} dy$, $y^{(20)} dy$, $y^{(21)} dy$, $y^{(22)} dy$, $y^{(23)} dy$, $y^{(24)} dy$, $y^{(25)} dy$, $y^{(26)} dy$, $y^{(27)} dy$, $y^{(28)} dy$, $y^{(29)} dy$, $y^{(30)} dy$, $y^{(31)} dy$. Soit de même z une fonction de plusieurs variables x, y . Elle aura une différentielle totale dz , dz la différentielle de cette différentielle, prise en supposant dx et dy constants, quels que soient x, y , se nomme la différentielle seconde de z et se désigne par d^2z . On aura, d'après cette définition. $d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2$. On calculerait de même les différentielles troisième, etc. 32. On aura généralement $d^m z = \frac{\partial^m z}{\partial x^m} dx^m + m \frac{\partial^m z}{\partial x^{m-1} \partial y} dx^{m-1} dy + \dots + \frac{\partial^m z}{\partial y^m} dy^m$. Cette formule étant confirmée pour dz et d^2z il suffira d'établir que, si elle est vraie pour un nombre n elle sera vraie pour $n+1$. — Cours, I. 3 /

The text on this page is estimated to be only 27.74% accurate

DÉRIVÉES ET DIFFÉRENTIELLES. 35 33. Soient u et V deux fonctions d'une ou de plusieurs variables. On aura généralement $\frac{dV}{du} = V' \frac{du}{du} + r \frac{dr}{du} = V' + r \frac{dr}{du}$. En effet, Δu , ΔV étant les accroissements de u et de V on aura $\Delta V = (V' + r \frac{dr}{du}) \Delta u + o(\Delta u)$. Négligeant le terme du second ordre $o(\Delta u)$, et remplaçant Δu , ΔV par leurs valeurs principales du et $r \frac{dr}{du}$, on aura, pour valeur principale de ΔV , $dV = (V' + r \frac{dr}{du}) du$. D'ailleurs, en la supposant démontrée pour le nombre m , on verra, comme précédemment, qu'elle est vraie pour $m + 1$. 34. Plus généralement, soit $V = V(x, y)$ une fonction quelconque de u et de v et u et v étant encore des fonctions d'une ou de plusieurs variables indépendantes x, y . Proposons-nous de déterminer les différentielles successives de V . On a pour la différentielle première, ainsi que nous l'avons vu, $dV = V'_u du + V'_v dv$. Pour calculer la différentielle seconde d^2V , il faudra différentier cette expression. Or $\frac{du}{dx}$ et $\frac{dv}{dx}$ sont des fonctions de x, y , qui ont respectivement pour différentielles $\frac{d^2u}{dx^2} dx + \frac{d^2u}{dy dx} dy$ et $\frac{d^2v}{dx^2} dx + \frac{d^2v}{dy dx} dy$. D'autre part, $\frac{d^2V}{dx^2}$ dépend de $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{d^2v}{dx^2}$, $\frac{d^2V}{dx dy}$, $\frac{d^2V}{dy^2}$, ... et ont, par

The text on this page is estimated to be only 22.53% accurate

36 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE I. définition, pour
 diflerenli elles $d^u d^v$. Appliquant la règle trouvée pour différentier un
 produit, il viendra donc rf. $V = (\wedge du + \wedge d.) du \wedge (J^u du \wedge J(rf.) d. \backslash \text{dir au}$
 $(\vee J \backslash \text{ôu } Qç d^{*'} / -h -f- d^u -h -f d^{*} r \text{ ou } c/t' =: \text{—}^{\wedge} du^{\wedge} + Ol, \backslash du dv + -T-$
 $4 d^{\wedge'} -h -f- rf^{*} \ll -l- -f- f^{\wedge} - r(\wedge w^{*} \text{ étaient des variables indépendantes : mais}$
 il n'en est pas de même des différentielles suivantes : $rf = *V$, par exemple,
 contient des termes en d^u et $d-v$ qui n'existeraient pas dans cette
 hypothèse. V. — Changements de variables. 35. Problème I. — Soit $y^{\wedge} = ^{\wedge}Y$
 $i^{\wedge}x^{\wedge}$ une fonction de $x dv d^{\wedge} V$ ayant pour dérivées successives $-j-y -j\text{—}^{\wedge}y$
 $\dots$ Supposons que X , au lieu d'être une variable indépendante y soit
 lui-même fonction d'une nouvelle variable t_j et soient $x \backslash x^{\wedge} \dots, ^{\wedge}y, y \backslash \dots$ les
 dérivées successives de x et de y par rapport à t . On demande de trouver les
 relations qui existent entre $dy (\text{£}2. ^1 V', ./, ,, dx' dx^{\wedge'} \dots^{\wedge} -^5 -^{\wedge} \gg \dots \gg J$
 $\gg. > 7 y$ étant, par rapport à $/$, une fonction de fonction, on aura, par la règle
 connue, $^{\wedge} -^{\wedge} dx''''$ Dérivant de nouveau par rapport à $t^{\wedge}$ en remarquant que
 $dy . ^T^{\wedge} -j-$ est une fonction de $x^{\wedge}$ qui est lui-même fonction de $^{\wedge}$, on

The text on this page is estimated to be only 25.28% accurate

DÉRIVÉES ET DIFFÉRENTIELLES. $\frac{dy}{dx}$ aura $\frac{dx}{dx}$ Dérivant encore, on trouvera $m \frac{d^2y}{dx^2}, n \frac{d^3y}{dx^3}, \dots$ Résolvant ces équations par rapport à $\frac{dy}{dx}$ on trouvera réciproquement $\frac{dx}{dy}$ $\frac{d^2x}{dy^2}$ $\frac{d^3x}{dy^3}$ (I) On remarquera qu'en appelant $r = \frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dr}{dx}$, $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^2r}{dx^2}$, les différentielles successives de r et de $\frac{dx}{dy}$ par rapport à la nouvelle variable t on aura $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \dots$ d'où $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$ Donc la dérivée de y par rapport à x reste égale au rapport des différentielles de x et de y quelle que soit la variable indépendante. L'expression des dérivées suivantes est au contraire changée. On aura, par exemple, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \frac{dt}{dx}$ 33.

Problème II. — Soit, comme précédemment, $y = F(x)$. Posons $(x, y) = X-f(t, U)$, $J = 0(x, f)$. Nous aurons trois équations entre x, r, t, u . On peut donc considérer x, y, u comme des fonctions de t . Cela posé, on

The text on this page is estimated to be only 15.12% accurate

38 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE I. dy d^ V demande d^ exprimer ~> -7-^? ••• en fonction de /, //, du d^u Tt' 1^' "" Prenons les dérivées successives des équations (a) par rapport à la nouvelle variable indépendante t. Il viendra dt du dt puis , do do du ^ ~ dt ~^dil 'dt' a;' = d\ f d'f du d'/du^ dfdUi dt' ' ^dtdu dt ' d«* dt^ ' du df' rd'o d^o du d^o du^ do d^u dt^ ' ' dt du dt ' du^ dt^ ' du dt^ ' On n'aura plus qu'à substituer ces valeurs dans les expressions (i). 37. Applications. — i° Soit $x = 0 \cos 8$, $y = 0 \sin \hat{O}$. O/i demande l^ expression de la quantité $R=r dy dx^*$ (nous la rencontrerons dans la théorie des courbes, sous le nom de rayon de courbure) en fonction de ^, ^, -^y -^• On aura $r dp$, . ^ X =:z-j- ces 6 — z smO, / ^? • . r =--sr sinO -h pcosO, d% • n d^p . dp , ^ x' =: -j^^ cosO — > -^ sinO — p cos6, ,, * d^p . ^ dp ^ , ^ -^ di^ ^ ^ ' 5e ^^^^ ~ " ^'o^'

DfñIRITÉES ET DIFFñRENTIBLLBS. Sg 8 1 Vñ _i_ v* — — ^
 -4- û' a-V— 7'x"~f-i^cose — p sin6)(-j^sin8 4-3^cosO — p sin6| — (~
 sinO + pcosOU-T^cos6 — 2-7^ sin6 — pcosôj û?p* (Po ^5r«-P5ê^ + p 38.
 2® Zre5 rfeMX variables x et y étant liées par un^ équation y on demande
 d^ exprimer les' dérivées x\ x!' ^ ... de X par rapport à y en fonction des
 dérivées y\ y\ . . . de y par rapport à x. On a, parle théorème sur la dérivée
 des fonctions inverses, Prenons la dérivée de cette équation par rapport à la
 nouvelle variable indépendante^ . En remarquant quey,y, . . . sont des
 fonctions de x, qui lui-même est fonction de y, le théorème sur la dérivée
 des fonctions de fonction donnera X — .^ X — , > y y ,_ / y» Sy'N
 ,_3y"3,y" — y,y*

The text on this page is estimated to be only 19.56% accurate

[illegible]

DÉRIVÉES ET DIFFÉRENTIELLES. On calculerait de même les dérivées troisièmes, etc. Cela posé, les équations (3), linéaires en $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ permettent d'exprimer ces quantités en fonction de $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ dérivées partielles de x et y , lesquelles sont des fonctions connues de x et y . Portant ensuite les valeurs trouvées pour $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ dans les équations (4), (5), (6), on pourra les résoudre par $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$ rapporta $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$; de même pour les dérivées des ordres supérieurs. Cette méthode est évidemment applicable à des fonctions d'un nombre quelconque de variables.

40. Remarque. — On ne doit pas perdre de vue que la dérivée partielle $\frac{\partial z}{\partial x}$ d'une fonction de deux variables x , y est, par définition, la dérivée de z considéré comme fonction de x y restant constant. Si nous remplaçons y par $\phi(x, u)$, de telle sorte que les nouvelles variables indépendantes soient x et u , la nouvelle dérivée partielle par rapport à x sera la dérivée de z par rapport à x , u restant constant. De ce changement de définition résulte naturellement un changement dans la valeur de cette dérivée partielle. Soit, par exemple, $z = F(x, y)$. On aura Mais, après le changement de variable, on aura

41. Exemples, — i° Soient x , y , z trois variables indépendantes. Posons $X = x$, $Y = y$, $Z = z$ at $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial Z}{\partial X}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial Z}{\partial Y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 Z}{\partial X^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2}$

The text on this page is estimated to be only 27.20% accurate

4a PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE I. a^b, C_j ... étant des constantes choisies de telle sorte que la substitution soit orthogonale, c'est-à-dire qu'on ait Cette condition fournira le système d'équations suivant, 6* $H - b'^{-1} b'^{-1} \dots, c \ll -h c'^{-1} -h c'^{-1} \dots 1$, $ab - \dots - a'b' - \dots a'b' z_i^{\wedge} O_y$ $bc - r - b'c' \wedge b^{\wedge} c^{\wedge} - \wedge o$, ou le suivant, qui lui est équivalent, comme on sait, $/ a' H - \wedge' 4 - c' \dots I$, (7) Soit maintenant V une fonction quelconque de $x^r z$. Considérons les deux expressions $fd \backslash y (d \backslash y fd \backslash y d' \backslash d^{\wedge} d^{\wedge} d^{\wedge}$ qui se présentent dans un grand nombre de problèmes, et que M. Lamé a nommées les paramètres différentiels du premier et du second ordre de la fonction V . Proposons-nous de les exprimer au moyen des dérivées partielles de V par $a'' - r ft'' _ _ c'' r - - l, a''' 4ft''' \dots |c'' \gg \dots I$, $aa' 4bb' - Tce' =:0$, $a'a'' Hb'b'' - fc'd=iO$, $. a^{\wedge} a - Tb''b 4c'c^{\wedge} 0$.

The text on this page is estimated to be only 14.00% accurate

DÉRITÉBS ET DIFFÉRKNTIBLLES. ^^ rapport aux nouvelles variables /, «, ç». On aura dt $-a^{\wedge} \backslash (i -^{\wedge} ha-r-$, dx ôy OZ dti,d\,,d\,,d\ dx ÔY ôz dx ôy OZ d\ (d^S , d'y ,, d\ \ IF^ "[à^ 'âTôJ^-"TFrz) \ dx dy ôy' dy dzj j d'Y , d\ ,, d'y \ \ dx dz dy dz dz' J ,d'y ,,d'y ,^d'y dx' dy' dz' , d'y , ,, d'y ,, d'y + 2 aa -T — T — v- 2 a' a -r — r — h 2 a a dx dy dy dz dz dx à""^ f^à'y ,,d'y ,,d'y m b' h b^ h b^ du' dx' ^ dy' dz' d' y d' y d' y dx oy dy dz dz dx d'y _ ,d'y ,^d'y ,,^d'y dv' - "" dx' "" ^ dy" "" "" dz' , à'y , ,, d'y ,, d'y 4- 2 ce -T i h 2 ce' r h 2 C"C dx dy " dy dz dz dx Ajoutons les carrés des trois premières équations. Il viendra, en tenant compte des équations (7), (dy\ fdy y /dy y /dy y /dy y fdy y {-di) -^Kd-n) -^[-dT^) -[tx) -^{{ Les trois suivantes, ajoutées ensemble, donneront de même à^ à^ à^ ,,^ à^ à^ dt' '^ ou"^ di' "" ôx' "" dy' "" dz' '

The text on this page is estimated to be only 19.02% accurate

44 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE I. La forme des paramètres différentiels n'est donc pas altérée par une substitution orthogonale effectuée sur les variables, et c'est à cette circonstance que ces expressions doivent leur importance en Analyse. •42. 2° Posons $jT\ z z:: p \sin\theta \cos\phi$, $j' = p \sin\theta \cos\phi$, $\phi = p \cos\theta$, et proposons-nous d'exprimer les paramètres différentiels de Y en fonction des nouvelles variables p, θ, ϕ . Le changement de variables qui précède équivaut évidemment aux deux suivants, opérés successivement : $r\ z = \sqrt{p} \cos\theta$, $j' = \sqrt{p} \sin\theta$, $z = -\sqrt{p} \cos\theta$. $\bullet i: z; p \sin\theta$, « $V - \theta$ 4'» $C = p \cos\theta$. Effectuons le premier changement de variables. Il viendra $-J-r = -r \frac{dr}{dp} - \cos\theta \frac{d\theta}{dp}$; $4- 2-r T-COS^2 \theta \frac{d\theta}{dp} - 7--r \sin\theta \frac{d\theta}{dp}$

The text on this page is estimated to be only 19.99% accurate

DÉUTfBS ET DIFFCBINTIELLES. paramètres différentiels deviendront donc respectivement et Le second changement de variables qui nous reste à effectuer, à savoir $\rho = z \cos \theta$, $\phi = \theta \sin \theta$, $\theta = r \sin \theta$ et transformera respectivement $\frac{dr}{r} \frac{dz}{z} \frac{d\theta}{\theta} p^{\frac{1}{d^J}} dr^{\frac{1}{d^J}} dz^{\frac{1}{d^J}} dp^{\frac{1}{d^J}} p^*()$ « $\frac{1}{d^J} p^{\frac{1}{d^J}}$ ' Enfin, on aura les relations $\frac{dr}{r} = \frac{dz}{z} \cos \theta - \frac{d\theta}{\theta} \sin \theta$, $dp = \frac{dz}{z} \sin \theta$ or $\frac{d\theta}{\theta} = \frac{dp}{p} \cos \theta$ d'où Ton déduit, en éliminant $\frac{d\theta}{\theta}$ on a $dV \propto \frac{1}{\cos \theta}$

The text on this page is estimated to be only 18.06% accurate

46 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE I. — DÉRIVÉES, ETC.

43. Problème IV. — Soit z une fonction de x^y . Posons $f(8) x = J\{t, u, v\}y$
 $..y = \{t, u, \backslash\}^{\wedge}$, $z = \{t, u, K\}^{\wedge}$. On demande d'exprimer les dérivées
partielles ;r-' ;r-;> d'^ z ^ — ^> ... en fonction de t^ w, v et des dérivées
partielles dv ds> d^ V Tt' dit' W "" z étant une fonction de x^y^ les
quantités x, j>', i> seront des fonctions de t et de w, en vertu des trois
équations (8). Prenant les dérivées partielles de ces équations par rapport à
ces nouvelles variables, il viendra $\frac{dt}{dv} \sim \frac{dt}{dv} \frac{dl}{dj} - \frac{df}{df} \frac{dr}{du}$
 $\frac{du}{dv} \frac{dr}{dl} \frac{d'a}{do} \frac{di}{-dt'^d'^di'} \frac{dy}{do} \frac{do}{dr} \frac{du}{du} \frac{dv}{du} \frac{dz}{dl} \frac{d^}{d^} \frac{dt'}{\sim dt'^d7'di'} \frac{ds}{d^} \frac{d'^}{dr} \frac{du}{\sim du} \frac{dr}{du} \frac{d'x}{dt'} \sim \frac{dl}{dt'} \frac{dt}{di'} \frac{dr}{d*//dry} \frac{d}{d-r} \frac{dt}{'^}$
 $\frac{dr}{dl} \frac{dl}{dr} \frac{dl}{dr} \frac{dl}{dr}$ On n'aura plus qu'à substituer ces valeurs dans les équations
(3) à (6), lesquelles détermineront ^y ~, — ^, (jtXf OY (JX

FORMATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES. ⁷

CHAPITRE n. FORMATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES. L

— Équations aux différentielles ordinaires. 11. On nomme équation différentielle de l'ordre n toute équation entre une variable indépendante x et une fonction y de cette variable et ses n premières dérivées. 40. Soit y une fonction quelconque, définie par l'équation (i) $F(x, y) = 0$. En prenant les dérivées de cette équation, il viendra $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0$, $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial y''} y'' = 0$, etc. Toute équation déduite de la combinaison de ces équations avec la proposée sera une équation différentielle à laquelle satisfait la fonction y . Parmi ces équations, il conviendra de rechercher celles qui ont la forme la plus simple ou la plus avantageuse pour le but qu'on se propose. 46. Il arrive souvent que des fonctions dont l'expression contient des transcendentes ou des radicaux satisfont à des équations différentielles d'où ces transcendentes ou ces radicaux ont disparu.

The text on this page is estimated to be only 23.02% accurate

48 PIEMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE II. Soit, par exemple, $y = \arcsin x$. On en déduit d'où Prenant la dérivée de cette équation et supprimant le facteur commun $\sqrt{1-x^2}$, on aura l'équation du second ordre On peut déduire de cette équation une formule récurrente commode pour le calcul des dérivées successives de y . Prenons en effet la dérivée $y^{(n)}$ de celle équation; il viendra, en appliquant la formule connue qui donne la dérivée d'un produit, $(i - a) y^{(i+a)} = m y^{(i)} - m \{m - i\} y^{(i-1)}$ — $r y^{(i-1)}$ — $\dots$ — $y^{(i)}$. Cette formule se simplifie pour la valeur particulière $x = 0$. Si Ton désigne par $y^{(n)}$, $y^{(n+1)}$, ... ce que deviennent alors $y, y', \dots$, il viendra On aura, par suite. $y^{(n+1)} = \dots$ $y^{(n)} = \dots$ $y^{(n-1)} = \dots$ $y^{(n-2)} = \dots$ $y^{(n-3)} = \dots$ $y^{(n-4)} = \dots$ $y^{(n-5)} = \dots$ $y^{(n-6)} = \dots$ $y^{(n-7)} = \dots$ $y^{(n-8)} = \dots$ $y^{(n-9)} = \dots$ $y^{(n-10)} = \dots$ $y^{(n-11)} = \dots$ $y^{(n-12)} = \dots$ $y^{(n-13)} = \dots$ $y^{(n-14)} = \dots$ $y^{(n-15)} = \dots$ $y^{(n-16)} = \dots$ $y^{(n-17)} = \dots$ $y^{(n-18)} = \dots$ $y^{(n-19)} = \dots$ $y^{(n-20)} = \dots$ $y^{(n-21)} = \dots$ $y^{(n-22)} = \dots$ $y^{(n-23)} = \dots$ $y^{(n-24)} = \dots$ $y^{(n-25)} = \dots$ $y^{(n-26)} = \dots$ $y^{(n-27)} = \dots$ $y^{(n-28)} = \dots$ $y^{(n-29)} = \dots$ $y^{(n-30)} = \dots$ $y^{(n-31)} = \dots$ $y^{(n-32)} = \dots$ $y^{(n-33)} = \dots$ $y^{(n-34)} = \dots$ $y^{(n-35)} = \dots$ $y^{(n-36)} = \dots$ $y^{(n-37)} = \dots$ $y^{(n-38)} = \dots$ $y^{(n-39)} = \dots$ $y^{(n-40)} = \dots$ $y^{(n-41)} = \dots$ $y^{(n-42)} = \dots$ $y^{(n-43)} = \dots$ $y^{(n-44)} = \dots$ $y^{(n-45)} = \dots$ $y^{(n-46)} = \dots$ $y^{(n-47)} = \dots$ $y^{(n-48)} = \dots$ $y^{(n-49)} = \dots$ $y^{(n-50)} = \dots$ $y^{(n-51)} = \dots$ $y^{(n-52)} = \dots$ $y^{(n-53)} = \dots$ $y^{(n-54)} = \dots$ $y^{(n-55)} = \dots$ $y^{(n-56)} = \dots$ $y^{(n-57)} = \dots$ $y^{(n-58)} = \dots$ $y^{(n-59)} = \dots$ $y^{(n-60)} = \dots$ $y^{(n-61)} = \dots$ $y^{(n-62)} = \dots$ $y^{(n-63)} = \dots$ $y^{(n-64)} = \dots$ $y^{(n-65)} = \dots$ $y^{(n-66)} = \dots$ $y^{(n-67)} = \dots$ $y^{(n-68)} = \dots$ $y^{(n-69)} = \dots$ $y^{(n-70)} = \dots$ $y^{(n-71)} = \dots$ $y^{(n-72)} = \dots$ $y^{(n-73)} = \dots$ $y^{(n-74)} = \dots$ $y^{(n-75)} = \dots$ $y^{(n-76)} = \dots$ $y^{(n-77)} = \dots$ $y^{(n-78)} = \dots$ $y^{(n-79)} = \dots$ $y^{(n-80)} = \dots$ $y^{(n-81)} = \dots$ $y^{(n-82)} = \dots$ $y^{(n-83)} = \dots$ $y^{(n-84)} = \dots$ $y^{(n-85)} = \dots$ $y^{(n-86)} = \dots$ $y^{(n-87)} = \dots$ $y^{(n-88)} = \dots$ $y^{(n-89)} = \dots$ $y^{(n-90)} = \dots$ $y^{(n-91)} = \dots$ $y^{(n-92)} = \dots$ $y^{(n-93)} = \dots$ $y^{(n-94)} = \dots$ $y^{(n-95)} = \dots$ $y^{(n-96)} = \dots$ $y^{(n-97)} = \dots$ $y^{(n-98)} = \dots$ $y^{(n-99)} = \dots$ $y^{(n-100)} = \dots$ $y^{(n-101)} = \dots$ $y^{(n-102)} = \dots$ $y^{(n-103)} = \dots$ $y^{(n-104)} = \dots$ $y^{(n-105)} = \dots$ $y^{(n-106)} = \dots$ $y^{(n-107)} = \dots$ $y^{(n-108)} = \dots$ $y^{(n-109)} = \dots$ $y^{(n-110)} = \dots$ $y^{(n-111)} = \dots$ $y^{(n-112)} = \dots$ $y^{(n-113)} = \dots$ $y^{(n-114)} = \dots$ $y^{(n-115)} = \dots$ $y^{(n-116)} = \dots$ $y^{(n-117)} = \dots$ $y^{(n-118)} = \dots$ $y^{(n-119)} = \dots$ $y^{(n-120)} = \dots$ $y^{(n-121)} = \dots$ $y^{(n-122)} = \dots$ $y^{(n-123)} = \dots$ $y^{(n-124)} = \dots$ $y^{(n-125)} = \dots$ $y^{(n-126)} = \dots$ $y^{(n-127)} = \dots$ $y^{(n-128)} = \dots$ $y^{(n-129)} = \dots$ $y^{(n-130)} = \dots$ $y^{(n-131)} = \dots$ $y^{(n-132)} = \dots$ $y^{(n-133)} = \dots$ $y^{(n-134)} = \dots$ $y^{(n-135)} = \dots$ $y^{(n-136)} = \dots$ $y^{(n-137)} = \dots$ $y^{(n-138)} = \dots$ $y^{(n-139)} = \dots$ $y^{(n-140)} = \dots$ $y^{(n-141)} = \dots$ $y^{(n-142)} = \dots$ $y^{(n-143)} = \dots$ $y^{(n-144)} = \dots$ $y^{(n-145)} = \dots$ $y^{(n-146)} = \dots$ $y^{(n-147)} = \dots$ $y^{(n-148)} = \dots$ $y^{(n-149)} = \dots$ $y^{(n-150)} = \dots$ $y^{(n-151)} = \dots$ $y^{(n-152)} = \dots$ $y^{(n-153)} = \dots$ $y^{(n-154)} = \dots$ $y^{(n-155)} = \dots$ $y^{(n-156)} = \dots$ $y^{(n-157)} = \dots$ $y^{(n-158)} = \dots$ $y^{(n-159)} = \dots$ $y^{(n-160)} = \dots$ $y^{(n-161)} = \dots$ $y^{(n-162)} = \dots$ $y^{(n-163)} = \dots$ $y^{(n-164)} = \dots$ $y^{(n-165)} = \dots$ $y^{(n-166)} = \dots$ $y^{(n-167)} = \dots$ $y^{(n-168)} = \dots$ $y^{(n-169)} = \dots$ $y^{(n-170)} = \dots$ $y^{(n-171)} = \dots$ $y^{(n-172)} = \dots$ $y^{(n-173)} = \dots$ $y^{(n-174)} = \dots$ $y^{(n-175)} = \dots$ $y^{(n-176)} = \dots$ $y^{(n-177)} = \dots$ $y^{(n-178)} = \dots$ $y^{(n-179)} = \dots$ $y^{(n-180)} = \dots$ $y^{(n-181)} = \dots$ $y^{(n-182)} = \dots$ $y^{(n-183)} = \dots$ $y^{(n-184)} = \dots$ $y^{(n-185)} = \dots$ $y^{(n-186)} = \dots$ $y^{(n-187)} = \dots$ $y^{(n-188)} = \dots$ $y^{(n-189)} = \dots$ $y^{(n-190)} = \dots$ $y^{(n-191)} = \dots$ $y^{(n-192)} = \dots$ $y^{(n-193)} = \dots$ $y^{(n-194)} = \dots$ $y^{(n-195)} = \dots$ $y^{(n-196)} = \dots$ $y^{(n-197)} = \dots$ $y^{(n-198)} = \dots$ $y^{(n-199)} = \dots$ $y^{(n-200)} = \dots$ $y^{(n-201)} = \dots$ $y^{(n-202)} = \dots$ $y^{(n-203)} = \dots$ $y^{(n-204)} = \dots$ $y^{(n-205)} = \dots$ $y^{(n-206)} = \dots$ $y^{(n-207)} = \dots$ $y^{(n-208)} = \dots$ $y^{(n-209)} = \dots$ $y^{(n-210)} = \dots$ $y^{(n-211)} = \dots$ $y^{(n-212)} = \dots$ $y^{(n-213)} = \dots$ $y^{(n-214)} = \dots$ $y^{(n-215)} = \dots$ $y^{(n-216)} = \dots$ $y^{(n-217)} = \dots$ $y^{(n-218)} = \dots$ $y^{(n-219)} = \dots$ $y^{(n-220)} = \dots$ $y^{(n-221)} = \dots$ $y^{(n-222)} = \dots$ $y^{(n-223)} = \dots$ $y^{(n-224)} = \dots$ $y^{(n-225)} = \dots$ $y^{(n-226)} = \dots$ $y^{(n-227)} = \dots$ $y^{(n-228)} = \dots$ $y^{(n-22$

FORMATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES. 49

Prenons la dérivée logarithmique des deux membres, c'est-à-dire la dérivée de leurs logarithmes ; il viendra $y' [x - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \dots - \frac{1}{x^n}] = y [X - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \dots - \frac{1}{x^n}]$ d'où ou, en prenant la dérivée et supprimant le facteur commun (3) $(a^* - \frac{1}{x}) f - h xy - n y z = z o$. Prenant la dérivée m^{*o} de cette équation, on aura la formule récurrente $(x^* - i) j^{*+} - f - am^{*y*} - ^* > - H m(m - i) jC^{**} - f - j^{*c^w-t-J} - f - mj^{*i} - n^{*yi} - q$, ou, en réduisant, $(^* - i) J('«-^{\blacksquare}) - 1 - (am - h i)^{*/Jx^{**} - 1}$ plus C fois le résultat de la substitution de $[x - sjx - i]$, sera nul. J. — Cours, I. 4

The text on this page is estimated to be only 26.16% accurate

50 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE II. Soit, en particulier, $C = C' = \sqrt[n]{a}$, et supposons n entier et positif. L'expression $y = a(1 - \sqrt[n]{x})^m$ étant développée suivant la formule du binôme, les puissances impaires du radical se détruiront, et Ton obtiendra évidemment un polynôme entier de la forme $\sum_{k=0}^m A_k x^k$. Le coefficient A_k peut se calculer aisément. On a en effet, en divisant par $\sqrt[n]{a}$ et faisant tendre x vers 0, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y}{\sqrt[n]{a}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sqrt[n]{x})^m = 1$. Pour calculer les autres coefficients, on remarquera qu'on a, en général, $y^{(k)} = (-1)^k m(m-1)\dots(m-k+1) \sqrt[n]{a}^{m-k} x^{k-1}$, d'où $y^{(k)} = (-1)^k m(m-1)\dots(m-k+1) \sqrt[n]{a}^{m-k} x^{k-1}$. Joignant, d'après la formule (4), $(n-2p)(i-2/2) = 0$ $\frac{y^{(k)}}{k!} = \frac{(-1)^k m(m-1)\dots(m-k+1) \sqrt[n]{a}^{m-k} x^{k-1}}{k!}$ Cette relation permettra de calculer successivement tous les coefficients, en partant du premier. Posons $\sqrt[n]{a} = r \cos \theta$, d'où $y^{(k)} = (-1)^k m(m-1)\dots(m-k+1) r^{m-k} (\cos \theta - i \sin \theta)^{m-k}$ il viendra $y = \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k m(m-1)\dots(m-k+1) r^{m-k} (\cos \theta - i \sin \theta)^{m-k}}{k!} x^k$

FORMATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES. 51 OU,
d'après une formule que nous établirons plus loin, $y = \frac{1}{h} (\cos \frac{4\pi}{h} - \cos \frac{4\pi}{h} \cos \frac{4\pi}{h})$
 $h - \frac{1}{h} (\cos \frac{4\pi}{h} - \cos \frac{4\pi}{h} \cos \frac{4\pi}{h})$

52 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE II. satisferont à une même équation différentielle de 2nd ordre qu'il est facile de former. Prenons, en effet, les n premières dérivées de cette équation ; on obtiendra les nouvelles équations suivantes : $d^2y/dx^2 = a^2 F$, $d^3y/dx^3 = 3a^2 F$ Entre ces équations et la proposée, éliminons les constantes $C_1, \dots, C_n$ nous obtiendrons l'équation cherchée 51. Considérons, par exemple, l'équation $A - X^2 = B - X^2$ où A et B sont des constantes déterminées et X un paramètre variable. Cette équation, considérée au point de vue géométrique, représente un système de coniques homofocales. (Si nous supposons, pour fixer les idées, $A > B$, les foyers réels seront sur l'axe des X à la distance $\pm \sqrt{A - B}$ de l'origine.) Prenons la dérivée de cette équation; il viendra, en supprimant le facteur commun $2X$, $y' = \frac{A - X^2}{X}$ Des équations précédentes on déduit $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{A - X^2}{X^2} - \frac{2X}{X^2} = \frac{A - X^2 - 2X}{X^2} = \frac{A - X^2}{X^2} - \frac{2}{X}$ $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx} \left(\frac{A - X^2}{X^2} - \frac{2}{X} \right) = \frac{-2X}{X^3} + \frac{2}{X^3} = \frac{-2X + 2}{X^3} = \frac{2(1 - X)}{X^3}$

FORMATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES. 53

Éliminante, on aura l'équation différentielle de ce système

The text on this page is estimated to be only 24.92% accurate

54 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE 11. On en déduit, par des dérivations successives, $y = a \pm \{px - \lambda q\} \{px^2 - iqx - \lambda r\}^*$, $y = z \pm zp \{px^2 - \lambda^2 q - h r\}^{\wedge} - \{px^2 - iqx - \lambda r\}^{\wedge} \wedge P_{ii} vx^{\wedge} - \wedge \% q.x - f.r - (px - hq)^{\wedge} (/ > X^* + iqx - \blacksquare r - rf - -1 - pr - 7' \{px^2 - \lambda^2 qx^{\wedge} rY d'o\grave{u} (5) r - -' = p X^* - h 2 (/x - h r - 7')'$ et, en effectuant trois nouvelles dérivations, (6) $(y - *J = 0$. Si la conique est une parabole, p sera nul. Le second membre de l'équation (5) ne contenant pas de terme en $a^{\wedge}$, deux dérivations suffiront pour faire disparaître les autres constantes. L'équation différentielle des paraboles sera donc (7) $(\text{''''''}) = 0$. Il est aisé d'obtenir les équations (6) et (7) sous forme développée. On a, en effet, $(yV'' \grave{a} \wedge .8.0 v''^3 \wedge W3 _x - \hat{A} v''^5 1/\wedge \blacksquare - v''^{\wedge} v'^* - 4 - JJ? . v''^{\wedge} v'^{\wedge} v'''^{\wedge} \wedge \wedge 9 y J J Z_j J'$ Portant ces valeurs dans les équations (6) et (7), chassant les dénominateurs et supprimant le facteur commun 2, il vien

FORMATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES. 55 dra,
pour réquation générale des coniques, et, pour celle des paraboles, S_j'''' —
37 V — o. 54. Cherchons enfin la condition pour que des fonctions $y^{(n)}$ $y^{(27)}$
 $\dots > JK/i$ d'une même variable x soient liées par une équation linéaire à
coefficients constants Prenant les dérivées successives de cette équation, il
viendra $C_1 y', -\lambda C_2 y, -\dots + C_n y^{(n)} = 0$, $C_{ijr} x^i y^{(r)} + \dots + C_n y^{(n)} = 0$, et,
en éliminant les constantes, $y^{(4/2)} \dots y^{(n)} = 0$. On verra dans le Calcul
intégral que cette condition est suffisante. II. — Équations aux dérivées
partielles. 55. On donne le nom adéquation aux dérivées partielles d'ordre n
à toute équation entre des variables indépendantes $x_1, \dots, x_p$, une
fonction z de ces variables et ses dérivées partielles des n premiers ordres.
56. Soit $F(x_1, \dots, x_p, z, z_1, \dots, z_n) = 0$ une équation contenant i constantes
arbitraires et définissant

56 PRBHiÈRB Partie. — chapitre ii. une fonction z des/?
variables indépendantes X_j . , »y X_p . On pourra joindre à cette équation
ses/> dérivées partielles $(J_j^? j \frac{dz}{dx} \frac{d^2 z}{dx^2} \dots \frac{d^p z}{dx^p})$ par rapport à
chacune des variables indépendantes X_i , . . X_p puis ses f -^ dérivées
partielles du second ordre $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \dots$ $\frac{d^2 F}{dz^2} \frac{d^2 F}{dz dx} \dots$
 $\frac{d^2 F}{dz^2} \frac{d^2 F}{dz dx} \dots$ et ainsi de suite jusqu'à ce que le
nombre total AT rrr I H- P 4- ^--^^- -h ... -h ^-^-- ^- 2 1.2. . .p des équations
ainsi obtenues surpasse le nombre n des constantes arbitraires. Éliminant
ces n constantes entre les k équations, on obtiendra un système de $k - n$
équations aux dérivées partielles d'ordre p , à chacune desquelles z satisfera,
quelles que soient les valeurs des constantes $C_1, \dots, C_n$ 57. Considérons
maintenant la fonction z définie par l'équation plus générale $F[j^7, \dots, ^p, ;j,$
 $cp, (a, \dots, ap_i), \zeta, (? , \dots, p^_i), \dots] = 0$, OÙ $a, \dots, OLp^{xy} p, \dots, p/$, «i, . . .
désignent des fonctions connues de $|r|, \dots, Xpy z$, et $\zeta_i, ^2$ » • • • des
fonctions arbitraires. Joignons à cette équation ses dérivées partielles
successives des ordres $i, a, \dots, p$. Nous obtiendrons ainsi $^2 1.2. . .p$
équations, dans lesquelles figureront les quantités suivantes : $i^{**} x^y \dots$,
 $Xpy z$ et ses dérivées partielles jusqu'à Tordre p ;

FORMATION DBS ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES. 67 a**

la fonction (p_i) et ses dérivées partielles $-\frac{\partial}{\partial y} \dots \frac{\partial}{\partial y} y \dots$ jusqu'à l'ordre p , la fonction ϕ et ses dérivées partielles $-\frac{\partial}{\partial y} \dots$ jusqu'à l'ordre p , etc. Le nombre $/$ de ces dernières quantités sera évidemment égal à $(p - i)p, (p - i - 1)p, \dots, 1$ ni $n - j \cdot H - \dots - h$ 1.2. n désignant le nombre des fonctions ϕ , $2, \dots$. Donnons successivement à p les valeurs $i, a, 3, \dots$. Il arrivera nécessairement un moment où le nombre k des équations surpassera le nombre $/$. En effet, en changeant p en $p - h$ 1, on accroît le nombre des équations de h tandis que le nombre $/$ s'accroît de $n(P^i)(p - i)p, (p - h - i)p, \dots, (p - h - 1)p$ quantité inférieure à la précédente, si $p - h - g > n(p - i)$. Donc, dès que p surpassera $n(p - i) - /$, k croîtra plus rapidement que $/$ et finira par le surpasser. A ce moment, on pourra éliminer entre les k équations obtenues les fonctions

The text on this page is estimated to be only 22.71% accurate

58 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE II. Supposons qu'une semblable relation existe. En résolvant par rapport à une des fonctions qui y figurent, on aura une équation de la forme Prenons les dérivées partielles de cette équation par rapport à chacune des variables indépendantes x, y, z , ... ; il viendra du $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{dV}{dx} + \dots \right) = 0$ etc. ; en éliminant $\frac{dV}{dx}$ et $\frac{dV}{dy}$ on obtient une équation (3) Cette équation sera la seule si le nombre des variables $x, y, z, \dots$ est égal à celui des fonctions « r, iv. S'il est supérieur, il faudra y joindre les équations analogues résultant de celles des équations (2) que nous n'avons pas écrites.

59. Les conditions dont la nécessité vient d'être établie sont en même temps suffisantes. En effet, considérons les différentielles totales , du V au , du , du $V = - dx \frac{\partial V}{\partial x} - dy \frac{\partial V}{\partial y} - dz \frac{\partial V}{\partial z} - \dots$, $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} , \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} , \dots$, $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} , \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} , \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} , \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} , \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} , \dots$, $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} , \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} , \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} , \dots$

FORMATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES. 69

Éliminons dx et dy entre ces équations. Les équations telles que (3), que nous supposons satisfaites, expriment que $dz^1 \dots$ s'éliminent en même temps. On obtiendra donc entre $du^1 dv^1 dw$ une relation linéaire telle que (4) $Adu + Bdv + Cdw = 0$. Mais une semblable équation ne peut exister, si u^1, v, w ne sont liées par aucune relation. En effet, prenons w, v pour variables indépendantes à la place de x^1, y . On obtiendra une équation de la forme « — $F(w, v, z, \dots)$, d'où les variables $2, \dots$ n'auront pas complètement disparu par hypothèse. On déduira de cette équation, $dF, dF \cdot dF, dsv =$ — du — $dr - dv - l - \wedge — dz - \dots$ \ Ou av oz F contenant Tune au moins des variables $^1, \dots$, l'une au dY moins des dérivées $XT' \cdot * \cdot$ différera de zéro. On pourra donc, après avoir assigné $kdu^1 di >$ des valeurs arbitraires, déterminer dz de telle sorte que div prenne également une valeur arbitraire. Il ne peut donc exister aucune relation de la forme (4) entre ces quantités.

60. Le cas où le nombre des fonctions u^1, s^1, w est égal au nombre des variables indépendantes Xy, y, z est le plus intéressant. On n'aura à considérer dans ce cas que le seul déterminant du $dv, dvf, dx, du, dx, du, dv, d^1v$ à $y, à y, à y, du, dv, à w, dz, ds, dz$ Il se nomme X Jacobien des fonctions $w, Vy \{v$ et joue dans

The text on this page is estimated to be only 26.26% accurate

60 PREMIÈRE PARTIE* •— CHAPITRE II. la théorie de ces fonctions un rôle semblable à celui de la dérivée d'une fonction d'une seule variable. Les considérations suivantes feront ressortir cette analogie : I** Soient ζ, η, θ des fonctions de w, r, v ; J_1 le jacobien de ζ, η, θ par rapport à u, v, w ; J_2 leur jacobien par rapport aux variables indépendantes x, y, z , J celui de u, ζ, w par rapport à x, y, z . Le déterminant $J^{\wedge}$ aura pour éléments $d^{\wedge}v$ $dx \, dx \, dx \, du \, du \, dv \, dx \sim du \, dx \, dv \, dx \wedge d^{\wedge}v \, dx$ -het, d'après le théorème connu sur la multiplication des déterminants, il sera égal à $d \, dri \, dv \, d^{\wedge}v \, dr$ $Ty \, à \, di \, dri \, dK \, du \, dv \, dw \sim dw \, d^{\wedge}v \, dz \, Tz \, dz$ On aura donc $(J^{\wedge} r r z J J, . 2^{\circ}$ Les variables u, v, w étant des fonctions de $x^{\wedge} y^{\wedge} Z y$ on pourra inversement considérer x, y, z comme fonctions de u, V, v . Posant donc $\wedge — x, ri — y, l \sim z$, d'où $(^? d? dl \, dx = 1, di -T- = 0,$

FORMATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES. il viendra, dans ce cas particulier. 61 J, d'où $I O O O I o o O 1 J J, = ZI$. Ces deux formules sont la généralisation évidente de celles qui donnent la dérivée d'une fonction de fonction et d'une fonction inverse. 61. L'équation (5) $x^{-az} - y^{-bz}$ représente un cylindre parallèle à la droite $[x^{-a} z, y^{-b} z]$. En effet, cette surface a une infinité de génératrices rectilignes parallèles à cette droite et données par les équations $X - az = p(a), y - bz = a$, a étant un paramètre constant pour une même génératrice, mais variable d'une génératrice à l'autre, En faisant varier la forme de la fonction

The text on this page is estimated to be only 24.72% accurate

6^e PARTIE. — CHAPITRE II. 62. L'équation où f est une fonction arbitraire, représente un système de cônes ayant pour sommet le point (a, b, c) et pour génératrices les droites $jr - n y - h = cp(a)$, $\frac{z}{c} = a$. L'équation aux dérivées partielles de ces cônes s'obtiendra en égalant à zéro le jacobien $(x - a) \frac{\partial}{\partial y} - h \frac{\partial}{\partial z} (z - cy) \{z - cY \frac{\partial}{\partial x} - z^c \{z - c\}$ ce qui donne, en effectuant les calculs et chassant les dénominateurs, 63. L'équation $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} (aj^7 - h by - \frac{\partial}{\partial z} - cz)$ représente un système de surfaces de révolution dont les parallèles $ax - h by - \frac{\partial}{\partial z} - czz = z(L$ sont perpendiculaires à $Taxe - > -t-j - \bullet \wedge \wedge abc$ Ces surfaces satisferont à l'équation $O::^{\wedge} I dz^{\wedge} ' dx \hat{=} 'dx . \hat{=} z , dz \hat{=} dy$

The text on this page is estimated to be only 29.97% accurate

FORMATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES. 63 OU ,
 • L K à z . . dz bx — a/= {cy — bz) - — +- {az — ex) -«— • 64. Une
 fonction u de plusieurs variables x, r, z est dite homogène et d'ordre n si elle
 peut se mettre sous la forme «=*"?(' j)Il résulte de cette équation que
 ;5""w est fonction de — et de ^« On aura donc, en égalant à zéro le
 jacobien, O — du 'B Z o du 1 à y 0 z du _ _ . •^ OU, en effectuant les calculs
 et chassant le dénominateur 2"+', du du "" dx^^dy du 'dz m: nu. 65. Comme
 seconde application de la théorie générale de Télimentation des fonctions
 arbitraires, considérons un système de/? fonctions ;5, a,, . . . , a;,_ , des p
 variables indépendantes ^1, . . . , Xp^ déterminées par le système des
 équations simultanées Fi(^i, . . , Xpf ZyCL^j . . . , ap_i, «p,, . . . , «p^) -^ o,
 Fp{xi, . . . , Xp, 5, a,, . . . , Vp-i, «pi, . . . , ç«) = o, OÙ f I, . . . , f/i désignent
 des fonctions arbitraires de a^ . . . , «/>-!• Nous allons montrer que z
 satisfait à une équation aux dérivées partielles d'ordre n, indépendante de
 ces fonctions.

The text on this page is estimated to be only 21.63% accurate

64 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE II. Formons, en effet, la dérivée partielle de F , par rapport à X_i ; elle se composera : « $T_x \text{ art } vFf \hat{O}Z$ $1,1 \bullet \bullet 1 I^{**}$ Des termes $-r \setminus -^{\wedge} -$, — , dus à la variation de x » et de z ; nous les désignerons, pour abréger, par $D_j^{\wedge} F$; 2^{**} Des termes $(-3^{\wedge} -^{\wedge} - \text{ — }^{\wedge} -> \text{ — } -! \bullet \bullet \bullet) 3^{\wedge} >$ dus à la varia\ à $Li d \bullet \bullet \bullet >$ dus à la variation des autres paramètres $a^{\wedge}$, Réunissant tous ces termes, on aura l'équation $D, F. - D, F. ^{\wedge} l; ^{\wedge} D, F. ^{\wedge}$, — O . Les dérivées partielles par rapport à $j^{\wedge} o$, . . . donneront de même à oL , doi. $I > x. F. - D \ll F. ^{\wedge} - l - D, F, ^{\wedge} + .. 'dj c. dxi : o$. Éliminant entre ces p équations les/? — i quantités $D, ^{\wedge} F, , D \gg F|, . . .$, il viendra ■-- o . Ce déterminant, développé, sera de la forme $AD^{\wedge} F, - ^{\wedge} BD^{\wedge} F, + \dots \text{ --- } o$, $A, B, . . .$ étant des fonctions de $- \text{ — } > . \text{ — }^{\wedge}$ Les équations $F o \text{ }^{\wedge \wedge} o$, ... donneront de même $AD^{\wedge} F, - f - BD, F, - i - \dots r = o$,

FORMATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES. 65

Éliminons entre les équations qui viennent d'être obtenues les rapports des coefficients $A, B, \dots$; il viendra $D^{\wedge} F_i D^{\wedge} F_i \dots : D^{\wedge} F, D^{\wedge} F, \dots = 0$. Le premier membre de cette équation sera une fonction $j \, dz \, dz$ de $X, \dots, \wedge^{\wedge}, \wedge^{\wedge}, \dots, \wedge^{\wedge}, a, \dots, a^{\wedge}, \dots$,

— : on trouvera de la même manière une nouvelle équation $D^{\wedge} F, D^{\wedge} F, \dots F_{p+i} = 0$, dans laquelle figureront, outre les quantités précédentes, les dérivées secondes de z . Continuant ainsi, on obtiendra une suite d'équations $F_{i+1}, \dots, F_{p+i}, F_{p+i+1} = 0, \dots, F_{p+i+n} = 0$, entre lesquelles on pourra éliminer les $i + n$ quantités $a, \dots, a_{p+i}, \dots$,

The text on this page is estimated to be only 23.80% accurate

66 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE II. premier trois des coefficients, par exemple a, i, p , en fonction du quatrième, a . Appliquons la méthode précédente. Nous formerons l'équation $0 = F, dz dz dar dv : D^F, D^F, I \sim, dz, dz \hat{o}x dy j dx dy$ L'équation suivante sera ' $D.F^3 D,F. ; , \dots ^\wedge, dz, dz ^\wedge \wedge \{ i - bp \} D^F, ^\wedge b \sim DyF ^\wedge — b ^\wedge - 1 — \hat{O} -- [\setminus dyj " ^\wedge \wedge dx ^\wedge \wedge dx dy I " ^\wedge$ ou, en remplaçant $i — b ^\wedge$ par $aj ^\wedge$ et supprimant le facdz teur commun $-r - > dx o ^\wedge a D^F j - h ^\wedge \wedge D^F, \setminus dx ^\wedge \hat{a} x dy j \setminus dx dy dy ^\wedge J - a ^\wedge \wedge 2ab \sim - b ^\wedge \wedge — F dx ^\wedge dx dy dy ^\wedge **$ On trouvera de même Téquation suivante $0 — F ^\wedge — a D : ^\wedge F ^\wedge - \{ - b DyF ^\wedge — 3 EL? 3 ,, d ^\wedge z ^\wedge d ^\wedge z jks ^\wedge \wedge f dx ^\wedge dx ^\wedge dy dx dy ^\wedge dy ^\wedge$ On n'aura plus, pour obtenir Téquation aux dérivées partielles, qu'à éliminer le rapport - entre les deux équations $F4$ et $F 5$ « 67. Considérons enfin une fonction z définie, ainsi que les paramètres $a, , \dots , dp ^\wedge i$, par un système d'équations de la

FORMATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES. 67]

forme suivante $(J_1, \dots, j^{\alpha}, 5, a_1, \dots, a^{\alpha}, \zeta, \dots, \langle p, \rangle) = 0$, Prenons les dérivées partielles de /par rapport à chacune des variables indépendantes $X_i, \dots, X_p$. En vertu des équations (6), ces dérivées se réduiront à leurs premiers termes $D_j p, \dots, D_x$ /. On aura donc $D^{\alpha} / = 0, \dots, D^{\alpha} / = 0$. Désignons ces équations par $F_i = 0, \dots, \forall p = Q$. On en déduira, comme dans le problème précédent, une suite de nouvelles équations $F^{\alpha}, \dots, F^{\alpha}, \dots, F^{\alpha} = 0$. Ces équations, jointes aux précédentes et à la primitive $y = 0$, fourniront un système de $j^{\alpha} H - i$ équations, entre lesquelles on éliminera $a_i, \dots, a^{\alpha}_i, \zeta_i, \dots, y^{\alpha}$. L'équation résultante sera encore de Tordre n . En effet, $F, \dots, F^{\alpha}$ contiennent z et ses dérivées partielles du premier ordre; $F/H - t$ contiendra, en outre, celles du second ordre, etc. ; enfin $F_{y, +i, i}$ contiendra celles du i^{*} ordre. 68. Exemple. — Cherchons l'équation aux dérivées partielles des surfaces développables. On nomme ainsi celles qui sont définies par le système des deux équations $z = x^{\alpha} - y^{\alpha} - t = 0, D_0 z = 0$, P et Y étant des fonctions de a . On en déduira, d'après la méthode précédente, F à dz

The text on this page is estimated to be only 20.58% accurate

68 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE II. — FORMATION,
ETC. puis $\int d^Z dz ! j \circ jc^* dx dy I 'dj: dy dy^j$ Ce sera l'équation cherchée.

The text on this page is estimated to be only 23.53% accurate

DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE. 69 CHAPITRE m.

DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE. I. ~ Formule de Taylor. 69. SI $j^{\wedge} = /(\wedge)$ est un polynôme entier en x de degré m , on aura y comme Ton sait, $S(x + A) = /(.r) + hf\{x\} + i^{\wedge}/'(x) + \dots + \text{---}^{\wedge}/"C^{\wedge})$ Cherchons à étendre cette formule au cas où $i/\{x\}$ représente une fonction quelconque. Considérons, à cet effet, la fonction $j^{\wedge}(\wedge) \text{---}/\{\wedge -+- h\} -/(z) -\{\text{œ}^{\wedge}h- z\}f(z) - \dots (1.2. \dots \{n \text{---} i\}^{\wedge} \backslash / \backslash ^{\wedge} ; \gg M$ étant une constante déterminée de telle sorte que $cp(\wedge)$ s'annule pour $z = x$. On aura $T' w = -/'\{\wedge\} - \{\wedge^{\wedge}h- \wedge\}f(z) - \dots - \wedge;"3^{\wedge\wedge\wedge\wedge}7,!!7/" (-^{\wedge})^{\wedge}f(z) - \backslash - \{x^{\wedge}h-z\}f(z) \sim \backslash - \dots - \wedge - k\{x^{\wedge}h-z\}^{\wedge} U 1.2. \dots (w \text{---} I) / \ll (:;) -+- k\{x -h h \text{---} 5\}^* \text{---} M$. Cette fonction sera continue de $\wedge = d: k z = x -] - h$ si $f'(z)$ est elle-même continue entre ces limites. On aura donc $q\{x -\backslash - h\} \text{---}^{\wedge}\{x\} \text{---} ko'\{x -h^{\wedge}h\}$,

70 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE III. 0 étant une quantité comprise entre 0 et 1. Mais $f(x-h) = 0$ et $f(x) = 0$. Donc on aura $(1 - \frac{h}{x})^k = 0$. Substituant cette valeur de M dans la formule (i) et faisant ensuite $z = x$, elle deviendra (2) $Ax^k = \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x) + \dots + \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a)$, en posant, pour abréger, $A = \frac{f^{(k)}(x) - f^{(k)}(a)}{k!}$. L'exposant k est d'ailleurs arbitraire. En le supposant d'abord égal k n on aura formule découverte par Lagrange. En posant $k = i$, on aura expression due à Cauchy. Il est clair que A n'a pas la même valeur dans ces deux formules. C'est d'ailleurs une quantité inconnue. On sait seulement qu'elle est comprise entre 0 et 1. Il importe de ne pas oublier que la démonstration précédente suppose que $f(x)$ est continue dans l'intervalle de $x - h$ à x .

70. La formule (2), due à Taylor, est fondamentale dans l'Analyse. Elle prend une forme très simple lorsqu'on y pose

DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE. 71 $f^{(n)}(a) = y$; A étant l'accroissement de x , $h f(x) y h^n f(x), \dots$, ne seront autres que les différentielles successives de $y f(x - h) \dots f(x + h)$ — $f^{(n)}(a)$ sera son accroissement A^n ; on aura donc (5) $Ay = dy + \frac{1}{2} A^2 y'' + \frac{1}{6} A^3 y''' + \dots + R_n$. 71. Si dans la formule (2) on pose $x = a$ et si Ton écrit ensuite j à la place de h , il viendra (6) $f(x) = f(a) + \frac{1}{1!} f'(a) h + \frac{1}{2!} f''(a) h^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) h^n + R_n$ pouvant être mis à volonté sous Tune ou l'autre des deux formes La formule (6), qui porte le nom de Maclaurin, sera valable à condition que $f^{(n)}(x)$ soit continue dans l'intervalle de a à X . 72. Pour étendre la formule de Taylor aux fonctions de plusieurs variables $z = f(x, y, z)$, considérons la fonction Supposant x, y, z constants et t variable, la formule de Maclaurin donnera $f(a) = f(a) + \frac{1}{1!} f'(a) h + \frac{1}{2!} f''(a) h^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) h^n + R_n$ Or il est aisé de calculer les dérivées successives de $f(x, y, z)$. En effet, $f'(x, y, z) = \frac{1}{1!} f'(a) h + \frac{1}{2!} f''(a) h^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) h^n + R_n$

The text on this page is estimated to be only 6.50% accurate

72 pftrMitmE PABTiE. — atAPim ui. est une fonction composée de $X \rightarrow \text{ht}^i$ et $V \rightarrow \text{ki} \rightarrow 3$. On aura donc $\cdot^{\wedge}$, dfdiL dfdl .df .df Mais on a, d'autre part, djc dt. djc c/» dl_ df d-idf dv ' di dy d'?' d^f _ à\ f di_ d\ f du:dy "dià'^dr ' âxàf dy_ d^/ à? _ dV ày' " à'^' dy ">•' d'où '■(')='.^^ + *|. Substituant les valeurs de ©(o),

The text on this page is estimated to be only 21.63% accurate

DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE. ']' dans l'équation (7) et faisant ensuite $t = i$, il viendra $f(x-h, y+k) = f(x, y) + (h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}) f(x, y) + \frac{1}{2!} (h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y})^2 f(x, y) + \dots$ ou: $dy / (8) < \dots$. La formule (7), dont nous avons déduit celle-ci en y posant $t = i$, suppose que $T \gg 0$ ($h A \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}$) $V(x, y)$ est continue de $x = 0$ à $x = i$. Cette condition sera évidemment satisfaite si les dérivées partielles d'ordre n de la fonction $V(x, y)$ restent continues lorsque x varie de $x = 0$ à $x = i$ et y de $y = 0$ à $y = k$. Si nous posons $V(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y})^n V(x, y)$, h et k étant les accroissements de x et de y , on aura $V(x-h, y+k) - V(x, y) \sim A; (A - C + X: -r) / (h, J)$ sera égal à $ds, \dots$. La formule (8) deviendra donc, en désignant par R , son dernier terme, $iz^h dz - h H 1 h R, \dots 1.2 i, 2 \dots \{n - 1\}$. Cette expression est entièrement analogue à celle qu'on avait trouvée pour les fonctions d'une seule variable.

II. — Applications. 74. Appliquons la formule de Maclaurin à la fonction $f(x) = (f-hx)^n$.

The text on this page is estimated to be only 23.29% accurate

74 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE III. On aura $f'(a) = m(m-i)(i-hx)''\ll-\ll, / \ll(r) = m\{m-i\} \dots (/n - /i h- i)(i -h 0:)'*''''$, et, par suite, $f'(o) = m$, $f'^{(o)} = m(m-i)$, $f''^{-(o)} = m(m-i) \dots (m -- W-+-2)$, $f' \gg (\hat{O}jr) = w(m-i) \dots (/w - /i-M)(i-f-ej:)' \gg -'S$ d'où $i / ^\ll m(m-i)$, $k 1.2) m(m - \backslash) \dots (m - 'n-h'>.) _ . ^ R \gg = (.e)'' - '^\wedge \wedge - = ; ^\wedge \wedge (.+e.)'' - . \ll. i . '2 \dots \{n - I)$ On reconnaît le développement du binôme, qui n'avait été démontré en Algèbre que pour une valeur entière de m . Si la valeur absolue de a , que nous représenterons, suivant l'usage reçu, par $\text{mod} : r$, est inférieure à l'unité, $R^\wedge$ tendra vers zéro lorsque n augmente ; en effet, $R_\wedge$ est le produit des trois facteurs $m(m-i) \dots (m - n -h i) 1 . 2 \dots \{ \ll - I) , \{ \tilde{i} \sim i - ^\wedge \hat{u}r)''' - \backslash '''' 'y ' "uT"$ Le premier facteur est positif et $- i, I 4- 9^\wedge$ sera $> i - 8$. La valeur absolue du deuxième facteur ne peut surpasser la limite finie $(i + \text{mod} x)''''''*$. Enfin le troisième tend vers zéro quand n augmente. En effet, désignons-le par $P; ,$. En changeant $/i$ en $/i -h i$, on aura $m(m - \backslash), .Am - n + \backslash) , , \dots ^ m - n$

DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE. 76 Or, lorsque n augmente, le facteur x tend évidemment vers $-\infty$. Sa valeur absolue tendra donc vers ∞ ; donc, en désignant par r une quantité quelconque comprise entre ∞ et l'unité, on pourra assigner une valeur v de i à partir de laquelle on aura constamment, $m - n \bmod X < r$. Cela posé, on aura $\bmod P v^i - 1 < r$, $\bmod P v, \bmod P v - H_j < r \bmod P v, -1$. Les modules des quantités $P v + i, P v + a, \dots$ m étant respectivement moindres que les termes d'une progression géométrique dont la raison est $< i$, décroîtront au-dessous de toute limite. Si donc on prolonge indéfiniment la série du binôme, elle sera convergente et tendra vers $(1 - x)^m$. Si $\bmod x$ était $>> i$, la série serait au contraire divergente, $1, j, \dots, m - n \bmod x$ car le rapport d'un terme au suivant est égal à x , quantité qui tend vers $-\infty$ quand n augmente. Les termes iraient donc croissant en valeur absolue. 73. Passons à la fonction $f(x) = \log(1 - x)$. On aura $f'(x) = -\frac{1}{1-x}$, $f''(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$, $f'''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$, $f^{(4)}(x) = \frac{6}{(1-x)^4}$, $f^{(5)}(x) = \frac{24}{(1-x)^5}$, $f^{(6)}(x) = \frac{120}{(1-x)^6}$, $f^{(7)}(x) = \frac{720}{(1-x)^7}$, $f^{(8)}(x) = \frac{5040}{(1-x)^8}$, $f^{(9)}(x) = \frac{40320}{(1-x)^9}$, $f^{(10)}(x) = \frac{362880}{(1-x)^{10}}$, $f^{(11)}(x) = \frac{3628800}{(1-x)^{11}}$, $f^{(12)}(x) = \frac{47900160}{(1-x)^{12}}$, $f^{(13)}(x) = \frac{677721600}{(1-x)^{13}}$, $f^{(14)}(x) = \frac{11113241600}{(1-x)^{14}}$, $f^{(15)}(x) = \frac{222264832000}{(1-x)^{15}}$, $f^{(16)}(x) = \frac{4838026368000}{(1-x)^{16}}$, $f^{(17)}(x) = \frac{111132416000000}{(1-x)^{17}}$, $f^{(18)}(x) = \frac{2799260390400000}{(1-x)^{18}}$, $f^{(19)}(x) = \frac{75285290900000000}{(1-x)^{19}}$, $f^{(20)}(x) = \frac{2054568000000000000}{(1-x)^{20}}$, $f^{(21)}(x) = \frac{58185804000000000000}{(1-x)^{21}}$, $f^{(22)}(x) = \frac{1629202512000000000000}{(1-x)^{22}}$, $f^{(23)}(x) = \frac{45253467328000000000000}{(1-x)^{23}}$, $f^{(24)}(x) = \frac{1216580149760000000000000}{(1-x)^{24}}$, $f^{(25)}(x) = \frac{31611083897600000000000000}{(1-x)^{25}}$, $f^{(26)}(x) = \frac{801887177932800000000000000}{(1-x)^{26}}$, $f^{(27)}(x) = \frac{20545680000000000000000000000}{(1-x)^{27}}$, $f^{(28)}(x) = \frac{521147500000000000000000000000}{(1-x)^{28}}$, $f^{(29)}(x) = \frac{13028688000000000000000000000000}{(1-x)^{29}}$, $f^{(30)}(x) = \frac{325717200000000000000000000000000}{(1-x)^{30}}$, $f^{(31)}(x) = \frac{8142931200000000000000000000000000}{(1-x)^{31}}$, $f^{(32)}(x) = \frac{203573793280000000000000000000000000}{(1-x)^{32}}$, $f^{(33)}(x) = \frac{5089344883200000000000000000000000000}{(1-x)^{33}}$, $f^{(34)}(x) = \frac{127233622016000000000000000000000000000}{(1-x)^{34}}$, $f^{(35)}(x) = \frac{3180840550400000000000000000000000000000}{(1-x)^{35}}$, $f^{(36)}(x) = \frac{79521013760000000000000000000000000000000}{(1-x)^{36}}$, $f^{(37)}(x) = \frac{1988025344000000000000000000000000000000000}{(1-x)^{37}}$, $f^{(38)}(x) = \frac{49700633600000000000000000000000000000000000}{(1-x)^{38}}$, $f^{(39)}(x) = \frac{1242515840000000000000000000000000000000000000}{(1-x)^{39}}$, $f^{(40)}(x) = \frac{31062896000000000000000000000000000000000000000}{(1-x)^{40}}$, $f^{(41)}(x) = \frac{7765724000}{(1-x)^{41}}$, $f^{(42)}(x) = \frac{194143104000}{(1-x)^{42}}$, $f^{(43)}(x) = \frac{48535776000}{(1-x)^{43}}$, $f^{(44)}(x) = \frac{1213394400}{(1-x)^{44}}$, $f^{(45)}(x) = \frac{30334860800}{(1-x)^{45}}$, $f^{(46)}(x) = \frac{75837152000}{(1-x)^{46}}$, $f^{(47)}(x) = \frac{18959288000}{(1-x)^{47}}$, $f^{(48)}(x) = \frac{473982208000}{(1-x)^{48}}$, $f^{(49)}(x) = \frac{118495552000}{(1-x)^{49}}$, $f^{(50)}(x) = \frac{29623888000}{(1-x)^{50}}$, $f^{(51)}(x) = \frac{7405972000}{(1-x)^{51}}$, $f^{(52)}(x) = \frac{1851493000}{(1-x)^{52}}$, $f^{(53)}(x) = \frac{462873200}{(1-x)^{53}}$, $f^{(54)}(x) = \frac{115718300}{(1-x)^{54}}$, $f^{(55)}(x) = \frac{2892957000}{(1-x)^{55}}$, $f^{(56)}(x) = \frac{723239200}{(1-x)^{56}}$, $f^{(57)}(x) = \frac{180809800}{(1-x)^{57}}$, $f^{(58)}(x) = \frac{4520245000}{(1-x)^{58}}$, $f^{(59)}(x) = \frac{11300612000}{(1-x)^{59}}$, $f^{(60)}(x) = \frac{2825153000}{(1-x)^{60}}$, $f^{(61)}(x) = \frac{706288200}{(1-x)^{61}}$, $f^{(62)}(x) = \frac{176572050000$

The text on this page is estimated to be only 27.04% accurate

76 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE III. La formule de Maclaurin deviendra $\log(i^{-x}) = -x \log i + \frac{x^2}{2} \log^2 i - \frac{x^3}{6} \log^3 i + \dots$ (2) $\log i = \frac{1}{2} \pi i$. Si x est en valeur absolue, elle sera au contraire divergente, car le rapport d'un terme au suivant tendant vers $-\infty$, ces termes croîtront indéfiniment en valeur absolue. 76.

Changeant x en $-x$ dans le développement précédent, il viendra $r' x^\wedge \log(i - x) \sim -x^\wedge \sim \sim \sim$, et, en retranchant, $I I X f T^* X^\wedge \setminus$ Posons 'à a il viendra $\log^\wedge = \log(a-i;:) - \log(a) - .2/ - -_h - a \setminus$

The text on this page is estimated to be only 27.31% accurate

DÉVELOPPEMENTS EX SÉRIE. 77 C'est sur cette formule et sur la suivante, $\log A - 4 \log j - \log r_j$, qu'est fondé le calcul des Tables de logarithmes. En posant $a = i$, $z = iy$ on aura tout d'abord Posant ensuite $a = ia^5$, $5 = 3$, il viendra $\log 28 - \log 25 - 2f - H U$ et, comme $\log a^8 = \log 2 = y \log a$, $\log i a^0 = 3 \log 5$, cette équation donnera $\log 5$. On trouvera de même $\log 3$ par l'équation $4 \log 3 - 4 \log 2 - \log 5 = \log 8 i - \log 8 o = 2f - 4 y$ puis $\log 7$ par l'équation $4 \log 7 - 5 \log a - \log 3 - 2 \log S - \log 7^* - \log(7^* - i)$ et ainsi de suite pour les autres nombres premiers. Une simple addition donnera ensuite les logarithmes des nombres composés. Les logarithmes ainsi calculés sont népériens. Pour obtenir les logarithmes vulgaires, on devra les multiplier par le facteur $j^{-0,43429448 \dots}$. 77. Passons à la fonction $f(x) = e^x$. Ses dérivées successives sont égales à e^x et se réduisent à l'unité pour $x = 0$. La formule de Maclaurin deviendra donc

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

78 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE III. R_n tend évidemment vers zéro quand n augmente indéfiniment, car le facteur $e^{X/n}$ a pour maximum l'unité ou e^0 , suivant que X est positif ou négatif. Quant au second facteur $>$ il tend vers zéro, car en y changeant w en $n - h$ on le multiplie par $1 - y$ quantité qui tend vers zéro quand n augmente. Donc, quel que soit x , la série $1 - \frac{X}{n} + \frac{X^2}{2n^2} - \frac{X^3}{6n^3} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} X^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{X^n}{n^n}$ convergera toujours et aura pour limite e^X .

78. Posons maintenant $f(x) = \sin x$. Les dérivées successives seront $\cos x, -\sin x, -\cos x, \sin x, \dots$, et se reproduiront périodiquement. Pour $x = 0$, on aura $f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = 0, f'''(0) = -1, f^{(4)}(0) = 0, \dots$ et ainsi de suite périodiquement. La formule de Maclaurin donnera donc, en supposant, pour fixer les idées, que n soit un nombre de la forme $4m + 1$.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^{m-1} x^{4m-3}}{(4m-3)!} + \frac{(-1)^m x^{4m-1}}{(4m-1)!} + R_m$$

tendant évidemment vers zéro quand m augmente, la série $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$ sera toujours convergente et aura pour limite $\cos x$.

79. Soit encore $f(x) = \cos x$. Les dérivées successives seront $-\sin x, -\cos x, \sin x, \cos x, \dots$, et pour $x = 0$ elles

DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE. 79 seront égales à 0, — i, 0, i, On aura donc, en supposant, pour fixer les idées, $i = 4/\pi$ 1.2 1.2.3.4 1 .2. . (4m — 2) ' ros6ar.^{^*}" H» — . — • 1.2. . ,[\m Ce reste tendant vers zéro quand m augmente, la série I .2 I .2.3.4 sera convergente et aura pour somme coso;. 80. Considérons enfin la fonction $y = \arctan x$. Cette fonction représente une infinité d'arcs différant les uns des autres de multiples de π . Pour préciser, nous considérerons celui de ces arcs qui est nul pour $x = 0$. Pour développer cette fonction en série et discuter la valeur du reste, il faudrait trouver l'expression générale de ses dérivées. Comme elle est fort compliquée, nous emploierons un autre procédé. On a $\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$. Si donc on pose $\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$ la fonction $R(x)$ s'annulera pour $x = 0$ et aura pour dérivée $R'(x) = \frac{2x}{1-x^2}$. En lui appliquant la formule de Maclaurin, réduite à son premier terme, on aura donc $R(x) = R'(0)x = -x^2$, 0 étant compris entre 0 et 1. Cette quantité, évidemment moindre que x^2 , tendra vers zéro si $|x| < 1$.

The text on this page is estimated to be only 26.20% accurate

80 PREXlteE PARTIB. — CHAPITRE III. Donc la série J_r „- -T-
 $-^3 0$ est convergente si $\text{mod } j_r < i$ et aura pour somme $\arctang j^*$. Au
 contraire, si $\text{mod } x \gg i$, il est clair que la série est divergente, car ses
 termes vont en croissant. 81. C'est sur le développement qui précède qu'est
 fondée la détermination numérique du nombre it . A cet effet, on calcule
 d'abord l'arc ζ qui a pour tangente j . La formule donnera $I I ?$ — $-< — 5$
 3.5 » On aura ensuite $\text{tans}[20: \text{tang}^\circ = i I — \text{tang}^\circ Q 12 \hat{>}$. $\text{lança}^\circ \text{icîo } I —$
 $\text{lang}^* 2^{\wedge 119} \text{tang}(\wedge 4 T-5 J-r^{\wedge} j — 4^{\wedge -\wedge}$ d'où $\wedge^{\wedge -7} = \wedge^{\wedge -\wedge} 4 239 3.239'$
 équation qui donnera it . m.-- Procédés pour effectuer les développements en
 séries. 82. Soient x un infiniment petit, $y=f(x)$ une quantité qui en dépend.
 Proposons-nous d'en déterminer une valeur approchée, de la forme $Ax \ll -h$
 $Bx? -h \dots -i- Mx>$ et qui ne diffère de la véritable que d'un infiniment petit
 d'ordre n . Si $f^{\wedge}\{x\}$ est continue aux environs de $j: = 0$, la formule

DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE. 81 de Maclaurin résoudra la question. Elle donne, en effet, $f^{(n)}(0) y^n / n! + \dots$ — $S_2 J^n + R_n$, R_n étant d'ordre $> 1/n$, et par suite négligeable. Mais cette méthode exige le calcul des dérivées successives de $f(x)$, qui peut être fort pénible. Elle est d'ailleurs inapplicable si $f(x)$ n'est pas continue aux environs de $x = 0$. Il convient donc d'indiquer d'autres procédés.

83. Si $y = w + \dots$ la valeur approchée de y sera évidemment la somme des valeurs approchées des fonctions partielles $w, v, \dots$. Si l'on veut se borner à calculer la valeur principale de y , on ne conservera, parmi les fonctions $w, v, \dots$, que celles dont l'ordre est le moins élevé; on calculera leurs valeurs principales et on les ajoutera ensemble. Si toutefois ces valeurs principales avaient une somme nulle, ce serait une preuve que l'approximation est insuffisante; il faudrait donc recommencer le calcul en prenant un terme de plus dans le développement de chacune des quantités $w, v, \dots$. Soit, par exemple, $y = 3 \sin^2 x - \sin 2x$. Les quantités $3 \sin^2 x$ et $-\sin 2x$ sont du premier ordre; mais la somme de leurs valeurs principales est nulle. Poussant donc l'approximation plus loin, on posera $2 \sin^2 x = 1 - \cos 2x$ et $-\sin 2x$ d'où $y = 1 - \cos 2x - \sin 2x$. — Cours, I. 6

84. Si $y = u + v$ et v étant respectivement d'ordre a et p , on aura sa valeur approchée en multipliant ensemble les u et v . — Cours, I. 6

82 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE III. leurs approchées des quantités u et r et négligeant dans ce produit les termes d'ordre $> 1/i$. Il suffira évidemment de pousser l'approximation de u jusqu'aux termes d'ordre $n - 3$, celle de v jusqu'aux termes d'ordre $n - a$. Le premier terme de l'expression de j' , qui constitue sa valeur principale, est évidemment le produit des valeurs principales de u et de $i^{\wedge}$. 80. Si $y' \sim y$ soient «1 — $A_j f \ll - + - A' j : *' - f - r, = B. r P^{\wedge} - B'^{\wedge \wedge} - h \dots$ des valeurs approchées de u et de $t^{\wedge}$, et soient $a = zM, 4 - R, i' = i'i - h S$. On aura $u M, \ll r, - c w i - R i \gg, - S m i^{\wedge} \zeta$ et $v^{\wedge}$ étant d'ordre p , et u^0 d'ordre a , cette expression sera d'ordre n si l'ordre de R est $w + \wedge$, et si celui de S est On aura alors, dans les limites d'approximation demandées, $u u$. Cela posé, on effectuera la division de w par $i'i$ jusqu'au moment où l'on introduirait au quotient des termes de degré Soient $qz = Cxy - h Gx^{\wedge} h \dots$ le quotient de la division, T le reste ; on aura $T 7 = -^{\wedge} = C j t T^{\wedge} C' x T'$

DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE. 83 On aura donc avec l'approximation demandée. Le premier terme de ce développement $Cd:Y$, qui est la valeur principale de $j^\wedge$, sera évidemment le quotient des termes $Ax^\wedge$, $Ba:P$, valeurs principales de $e^\wedge$ et de p . Si $P >^* a$, les premiers termes de la suite $y^\wedge \dots$ seront négatifs. Dans ce cas, la formule de Maclaurin n'aurait pas été applicable à la fonction r , car cette fonction, devenant infinie pour $a: rrr\ 0$, serait discontinue, et ses dérivées également. 88. Au lieu d'effectuer la division de $//$ par $t^\wedge$, on aurait pu, ce qui est au fond la même chose, poser $J = r:C^\wedge T^4 - CV.H - \dots$, $C, C, \dots, Y, y, \dots$ étant des coefficients indéterminés. Cela posé, l'équation $y =^\wedge \sim$ pourrait s'écrire $y_i \sim U_i$ ou $(Ca;T\ H - C'^\wedge i - h \dots) (B.T? H - B'x - ?^4 - \dots) =: Aa: \ll -1 - A'^\wedge \ll -i - \dots$, ou, en développant les calculs dans le premier membre, $BC\ J^\wedge -^\wedge T - h \dots = Aa? \ll 4 - A'^\wedge \ll -h$. En exprimant l'identité des termes du second membre de cette équation avec les termes correspondants du premier membre, on obtiendra une série d'équations de condition qui détermineront $C, y, \dots$. Ainsi, par exemple, les premiers termes $BC^\wedge ?^\wedge T$ et $A'^\wedge \ll$ devant être identiques, on aura $BG == A$,

The text on this page is estimated to be only 14.74% accurate

84 PKEntBi pabue. — oiAPmi m. d'où 87. Comme application
d»* celle mêlhode, proposons-nous de calculer les premiers l#*rme^ du
développement en série de l'expression -r JT _ JT e' — i e'— I 2 2 r' — I
Celle foDclion ne changeant pas quand x change de signe, le
développement ne contiendra que des puissances paires. Posons donc — -
^_ A — B, Bj .z — 7 — Bj X — • • 'i 2 er^—i 1.2 1.2.3.4 1.2. ..6 il viendra,
en chassant les dénominateurs et remplaçant e' par son dé\eloppeement, (JT
X^ J" V 2 1 i V 1 1.2 1.2. ..1 / \I f.2 I.2.../1 ^ '1.2 1.2.3.4 / Égalant les
coefficients des mêmes puissances de x dans les deux membres, on trouvera
i = A, I I A a 1.2. . ./i ~ i.2...(/i -hi) B, B, J.2...I.2...(/1 — 1) 1.2.3.4... 1.
2. ..(^/1 — 3) équations qui détermineront successivement A, B|, Ba, On
aura même deux équations pour calculer chacune des quantités B. On
trouve ainsi B,= ', ^'=k' 8-= 5' 43 "-âv *'=â' **• - 273o

DÉVELOPPEMENTS EN SfiRIB. 85 88. Les nombres Bi, B2, . .
 . portent le nom de nombres de Bernoulli. Ils se rencontrent dans une foule
 de questions d'Analyse. Ils ont, en particulier, une liaison intime avec les
 sommes de puissances des nombres entiers. Pour établir cette relation,
 posons $Y = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-H_n} \dots - H e^{*\sim\wedge\wedge}$. On aura $y(a) = \frac{1}{a} \log x = \frac{1}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} + \dots$
 . $-f- (\frac{1}{i} - Oe^{*-})^*$ et pour $X = 0$ ($j(\ll)$) $o = l \ll - + - 2 \ll - r \dots - ; - (l-l) \ll$. Mais on a
 d'ailleurs $e^{**} = I e^{**} = I j : y^\wedge e^\wedge = 1 X e^* = I n \} x^\wedge nx - h 1 . 2 \setminus 2 1.2 1$
 $. 2.3.4 / X = A.0 - + - AiJ : -h. . . 4- A \ll a ; * - h. . . ,$ en posant $i \ll + - * 1 / i \ll Bi \ll - * A$
 $I . . . , i.2 \dots (a-hi) 2 1.2. \dots a 1.2 1.2 \dots (a - I)$ On aura donc $i \ll - + - 2 \ll - H \dots + (\frac{1}{i}$
 $- i) \gg = \{j^\wedge \ll)\} o - i.2 \dots aA. \wedge \wedge \wedge \ddot{i} B, , Bj , ,, , , = : / l \ll H^\wedge a / i \ll - \gg ^{-}. a(a - i)(a -$
 $2) / i^* - \gg - + - \dots a-hi 2 1.2 1.2.3.4$ 89. Soient $y = y/\hat{a}$ et $m = M| + R, \ll 1 = A.r^* -$
 $H A'^{*'} - h . . .$ étant une valeur approchée de u. On aura $r- I - U - Wi R$
 $y/a 4- \vee \langle i v^\wedge a + sju^\wedge$

86 PREVIÈRE PARTIE. — CHAPITRE III. Le dénominateur de cette expression étant d'ordre n elle sera négligeable si l'ordre de R est $\frac{n}{2}$. Si donc U_i a été calculé avec cette approximation, on pourra poser $U_i = \sqrt[n]{u_i}$ et u_i pourra se calculer en extrayant la racine carrée de u_i jusqu'aux termes de l'ordre n . En effet, soit q la racine ainsi obtenue. On aura $U_i = q + \frac{v}{q^{n-1}} + \frac{w}{q^{2n-2}} + \dots$ quantité négligeable, car $\sqrt[n]{v}$ et q sont d'ordre $\frac{n}{2}$ et $\frac{1}{q^{n-1}}$ est d'ordre $\frac{n}{2}$; en effet, le terme suivant de la racine carrée, lequel s'obtiendrait, d'après la règle connue, en divisant le premier terme de $U_i = q + \frac{v}{q^{n-1}} + \frac{w}{q^{2n-2}} + \dots$ par le double du premier terme de y , lequel est d'ordre $\frac{n}{2}$, y serait d'ordre $\frac{n}{2}$ par hypothèse. On aura donc, avec l'approximation demandée, $r = q$. On aurait pu également employer la méthode des coefficients indéterminés, en posant $U_i = Ga + \frac{1}{2}hC^2 + \dots$ et déterminant $G, C, \dots, y$ de manière à rendre identique l'équation $(C^2 H - G^2 T - h \dots)^2 = A^2 H - X^2 a - h \dots$. Soit, plus généralement, $U_i = \frac{S}{m}$ étant fractionnaire ou incommensurable.

The text on this page is estimated to be only 28.26% accurate

DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE. 87 Posons $u = U_i - f_r, W|$ désignant sa valeur principale. On aura, par la formule du binôme, $V^{-1} u'''$
 $H - \mu T^{-1} V^{-4} - \dots \approx \langle f^{-2} p^1 - t - \dots - H R. \dots \rangle$ 1.2 ' Connaissant les ordres respectifs de U et de p , on verra aisément combien il faut prendre de termes dans la formule pour que R soit d'ordre $/i$, et par suite négligeable. Cela fait, on n'aura plus qu'à calculer $\backslash ?$ avec une approximation suffisante, et on en déduira aisément $v^{-1} v^{\wedge} \dots$ 91. Proposons-nous, comme application, de développer le radical $2^2 (i - i^x - \dots - a^*)$ suivant les puissances croissantes de a . Cette expression peut s'écrire $-1 [i - a(2J7 - a)] * i^1 I H a(2^{\wedge} - a) - f - \dots I 3 2 m - I a'''(2J7 - a)''' * 22 2 1 . 2 \dots /7t$ Il ne restera plus qu'à développer les puissances du binôme $IX - a$ et à réunir ensemble les termes qui contiennent une même puissance de a . On obtiendra ainsi un développement de la forme $iH - X_i a - h \dots 4 - X_{,,} a \dots$, où $X_{,,}$ désigne un polynôme en x dont nous allons déterminer la forme. Le terme $I 3 2 W \sim i a' \langle (2a7 - a)''' 22 2 \backslash .1, . . m$ ne fournira évidemment de terme en a'' que si m est $\wedge \sim >$ mais $\wedge /i$. S'il est compris entre ces limites, il donnera le

The text on this page is estimated to be only 20.81% accurate

88 PBEMIÈBB PAITIE. — CHAPITRE III. Ierme $i.3...(2m - 0$
 $1.2... m (2.r) \gg \langle \langle (1) \langle -//.a \langle i.3...(2m - i) o / \langle - \langle (_i) \langle -' \langle ^ \langle .r \rangle \rangle \langle , , 1.2. . . (^ / i$
 $— //i) . 1 . 2 . . . 2/71 \text{rtX}$ " Mais on a $1 . 3. . . (2/n - i) I I 1 . 2 ... 2 m \sim 2 . 4$
 $... 2 m \sim 2''^* . I . 2 . . //i$ Le terme précédent pourra donc s'écrire ' Al. $[(_ ,) - / \langle$
 $' \bullet ^ \bullet \bullet " ^ . m] a \gg 2'^* . 1 . 2. . . / i ^ \bullet ^ \bullet ^* L 1 . 2. . . m. 1 . 2. . . (^ / i - m) J '$ et Ton
aura, par suite, en ajoutant tous les termes en $ol^$, " $2'^* . 1 . 2. . . / i \ll x'^L^$
 $i.2...m.i.2...(/i - m) J m$ On peut d'ailleurs sans inconvénient étendre la
somme aux valeurs de m qui sont moindres que $-y$ les termes ainsi
ajoutés étant évidemment nuls. La somme entre parenthèses deviendra
égale à $(x'^ - i)''$. On aura donc, comme résultat final, $I z/'^* " 2'M.2.../i$
 $dx''^ ^$ Les expressions $X_{,}$, sont connues sous le nom de polynômes de
Legendre, Elles jouissent de propriétés remarquables, et nous aurons
plusieurs fois l'occasion de les retrouver. fin 92. L'expression $^= ---(x'^ -$
 $i)''$ satisfaisant, comme nous l'avons vu (19), à l'équation différentielle $(jc^*$
 $- i) /'' - h 2jry - n \{ n - h i \} y ^ o,$

The text on this page is estimated to be only 24.63% accurate

DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE. 89 et X^i n'en dérivant que par un facteur constant, on aura évidemment $(J^7 \gg -i)X; -4- 2a:X; -n \{n - ^i\}X^{n-2}$ o. 93. Trois polynômes successifs X, X^i, X^{i+1} sont liés par une relation linéaire que nous allons établir. Prenons la dérivée par rapport à a de l'équation $(1 - 2a^7 - 4a^*) \ll -i - X^{i+4} - \dots - h X^i \gg a \ll -h \dots$; il viendra $(j^? - a)(i - 2aj^? - ha)'''' = X, -f - \dots - h / i X, a \ll - \gg +$ Multipliant par $i - a^? - f - a^?$ et remplaçant ensuite $(1 - 2aj^? H - a') *$ par sa valeur, nous trouverons $(^ - a) (i^4 - X^i a H - \dots - h X,; a \ll -^ - \dots) = (1 - 2aj^7 - ha \ll)(X^i - f - \dots - h / i X,; a \ll - \gg - h \dots)$, d'où, en égalant les coefficients de a^n , $a: X^r - X^{n-i} - (n - h i) X^{n+i} - 2nx X^{n-h} (1 - l) X, _i$, ou enfin $(/i - hi) X, ^i \sim (2n - hi) a; X^{n-^} n X \ll _ , - o$. 94. Supposons maintenant que la quantité y soit définie par une équation $(1) o = z f \{x, y\} = \backslash j c^* j^? 4 - A i^{\wedge \wedge} j P^H - \dots$ de degré m par rapport à $a^?$ et de degré n par rapport à $^?$; cette équation donnera, pour $^?$, n valeurs distinctes $y \backslash y \bullet \bullet \bullet) y n'$ Proposons-nous de développer chacune d'elles suivant les puissances croissantes de x .

90 PREMIERE PARTIE. — CHAPITRE III. Cherchons d'abord leurs valeurs principales. A cet effet, nous poserons $V = R$, R étant d'ordre $>> x$. Cette valeur étant substituée dans l'équation, celle-ci devra être identiquement satisfaite. En particulier, les termes d'ordre minimum devront s'y détruire. Ils seront donc au nombre de deux au moins. D'ailleurs, ces termes ne peuvent évidemment être cherchés que dans la série des termes provenant de la substitution du premier terme Mx^r de la valeur de r . Donc $[A$ doit être choisi de telle sorte que dans la suite des exposants $a - \{x^3, \dots, i-h jx^i, \dots\}$ il y ait plusieurs termes minima. Supposons cette condition réalisée, et soient, par exemple, $(2) a - \{x^3 z=r. ai -t- (x^i -r. \dots - a,, -h |Ap,$ ces minima. On obtiendra les valeurs de M correspondant à cette valeur de $[a$ en égalant à zéro la somme des coefficients $AM^4 - AiM^? - \dots - hA,, M^$. D'ailleurs, M doit être différent de zéro. Si donc nous supposons les quantités $p, p_i, \dots$ rangées par ordre de grandeur décroissante, M aura $p - P/$ valeurs, déterminées par l'équation $(3) AMP ? - H A iMf' \blacksquare - ?' - ! - \dots i - A, --- = 0$.

95. Newton a donné une construction géométrique élégante pour déterminer les valeurs de $[a$. Représentons chaque terme de l'équation $f(x, r) = 0$, tel que $Ax^j P$, par un point ayant p pour abscisse et a pour ordonnée. On obtiendra un système de points dont l'un au moins sera sur l'axe des x ; sinon l'équation $f(x, r) = 0$ con

DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE. 91 tiendrait en facteur une puissance de x que Ton pourrait supprimer avant de la traiter. Cela posé, les relations (2) montrent que les points $P, a, a, \dots, 3/a$ sont situés sur la droite $Y-f-xX-a-i-[JLfi$; mais les autres points $^z+i, a._., \dots$ sont situés en dessus, en vertu des relations $a-\sim [xjâ -< a/^i 4- [J^pz+i, \bullet \bullet \bullet$. Donc la droite en question sera Tun des côtés inférieurs du polygone convexe PQRSTU circonscrit au système de points. Fig. 4. On n'aura donc qu'à tracer ce polygone pour construire les diverses droites qui répondent à la question. Leurs coefficients angulaires, changés de signe, donneront les valeurs de a . 96. Des relations (a) on déduit $f^{\wedge} = \wedge$ — Donc $[X$ sera un entier ou une fraction commensurable. Soit - cette fraction réduite à sa plus simple expression ; on aura évidemment $v, V, \dots$ étant des entiers.

ga PREnÈRE PARTIE. — CHAPITRE I^{er}. L'équation (3) deviendra donc (4) $A_0 M^4 - A_1 M^3 - A_2 M^2 - A_3 M - A_4 = 0$ et sera du degré y par rapport à M . A chaque valeur de M correspondent d'ailleurs q valeurs différentes de M , résultant de la multiplication de l'une d'entre elles par les q racines de l'unité. A chaque groupe de r racines égales de l'équation en M correspondront q groupes de r racines égales pour l'équation en M . Le degré $P = P'$ de cette équation étant d'ailleurs n , on aura q^n . 97. Cela posé, désignons par M une des racines de l'équation (4), par r son degré de multiplicité. Parmi les fonctions $y^1, \dots, y^n$ il en existera r qui ont pour valeur principale M^j . Pour les séparer, il faudra pousser l'approximation plus loin, en calculant le second terme de leur développement. A cet effet, et pour éviter les exposants fractionnaires, nous poserons X et Y étant de nouvelles variables. La substitution donnera une nouvelle équation du degré n en Y . On trouverait, comme tout à l'heure, la valeur principale M^j de chacune des racines de cette équation. Parmi ces racines, il en est évidemment r correspondant à des valeurs de Y plus grandes que p : ce sont celles qui correspondent aux valeurs de y dont la valeur principale était M^j . Soit Y_0 l'une de ces valeurs plus grandes que p , réduite à sa plus simple expression. Les coefficients correspon

DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE. 98 dants $M\{$ seront les racines d'une équation algébrique de degré r . Soient M_i une de ces racines, T_i son degré de multiplicité; on aura dans l'équation q^r groupes de a_i racines égales. Donc et, par suite, 98. Posons maintenant d'où $X = \alpha n^r$, $y = M$. $xP^{r-h} - M \mid x^{r-h} - h J_j$. On aura une nouvelle équation en y 21 que Ton traitera comme la précédente. Continuant ainsi, on obtiendra, pour Tune quelconque j_k des racines de l'équation proposée, un développement de la forme en posant $X = X^{r-h}$. Le produit $q^r q^{r-h} \dots$ ne pourra d'ailleurs surpasser i , quelque loin que l'on pousse le développement. Il arrivera donc nécessairement un moment à partir duquel les entiers $q^h q^{h-1} \dots q^{h-i+1} X^i \dots$ se réduiront à l'unité. Il existe donc une quantité X , puissance fractionnaire de x^r telle que le développement de y suivant les puissances de X , prolongé aussi loin qu'on le voudra, ne renferme que des puissances entières. Soit d'ailleurs $X = .a;^r$. L'équation pourra s'écrire $(XP, 7)^r$. Elle ne change pas si l'on y remplace X par QX , 0 étant l'une quelconque des racines p^{r-h} de l'unité. Donc la racine y , que nous avons développée suivant les puissances de X , fera

The text on this page is estimated to be only 25.43% accurate

94 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE III. partie d'un système de p racines associées, dont les développements se [déduiront les uns des autres en y remplaçant X par $\hat{O}, X, 62X, \dots, 04, 02, \dots$ désignant les racines p^{***} de l'unité. 99. On pourrait évidemment user du même procédé pour développer les racines de l'équation $(\wedge, y)^\wedge$ suivant les puissances descendantes de x . Il faudrait seulement considérer dans le polygone de Newton, au lieu des côtés inférieurs RQ, QP, IPU, UT , les côtés supérieurs RS, ST . 100. La théorie précédente est susceptible de nombreuses applications : I** Soient $(.r, 7) - : M j' \ll -h M, K''' \ll -1- \dots - o, o \{jc, Y) — Ny'^* t- ^l r''' H- \dots — o$ (feux équations algébriques. On demande de former l'équation finale en X résultant de l'élimination de y entre ces équations. Soient $^4, JK25 \dots ^ym$ les valeurs de $j^{\wedge}$ en x , déduites de la première équation, $7)4, \dots, tj,,$ les valeurs déduites de la seconde. La variable $.r$, devant évidemment être choisie de telle sorte que l'une des valeurs $jKi \gg ^i? \dots ? y m$ soit égale à l'une des valeurs $tj,, \dots, y^ny$ satisfait à l'équation Or on a d'une part $IV (y m — T^i l) \dots (y m — T, \ll) = cp (\wedge, y, n) \blacksquare = iN /?, , -+- i\, ^-Tn' "H . \bullet .$ et d'autre part $M(/, — T,,) (Jj — 7),) \dots (/,, — Tii) -/\{X, 7i,) -:= M\ddot{i}\hat{i}' -r- M, T, 7. -^\dots$

DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE. 96 L'équation (5) pourra donc se mettre sous les deux formes suivantes : Multipliant par $N''M'$ pour chasser les dénominateurs, il viendra (6) $0 = M \ll \mathbb{C}(j:, j,) \dots \text{cp}(j?, j,,) = x \backslash'' / (.r, t,,) \dots / (x, T f],,,)$. On voit, par cette double forme donnée au premier membre de l'équation finale (6), que son premier membre est une fonction entière, d'une part par rapport aux coefficients $N, N|, \dots$ de la fonction $(p,$ d'autre part par rapport aux coefficients $M, M|, \dots$ de la fonction/. C'est donc une fonction entière de x . Pour obtenir sous forme explicite le premier membre de cette équation, il suffira de calculer son développement suivant les puissances descendantes de $.r$, par les règles qui ont été exposées. Pour cela, on calculera d'abord les développements des racines $jK_n \dots ? J^m$, puis ceux des fonctions entières $M'', \text{cp}(\wedge, jKi), \dots, \wedge \{Xjy,,,)y$ et enfin celui de leur produit. Comme d'ailleurs on sait d'avance que ce produit est un polynôme entier en $j:$, on arrêtera le développement aux termes de degré zéro. Ce procédé de formation de l'équation finale serait assez compliqué, mais il permet de reconnaître facilement son degré. Il suffira pour cela de calculer le premier terme de l'équation. On peut reconnaître, par un procédé analogue, si l'équation finale a une racine nulle, et assigner son degré de multiplicité. Il faudra pour cela chercher le premier terme du développement de son premier membre suivant les puissances, croissantes de x , 2** Soit $/(Xj JK) = 0$ une courbe algébrique. On pourra étudier l'allure de ses branches infinies en développant les di

96 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE III. verses valeurs de l'ordonnée[^] suivant les puissances descendantes de X, 3° On pourra également étudier l'allure de la courbe aux environs d'un de ses points (a, h). Pour cela, posons a:- ~ a H- JTi, y - ^ -h Vi ; il viendra Il ne restera plus qu'à développer suivant les puissances de Xk celles des valeurs de Vi qui s'annulent avec jti. 101. D'après les définitions que nous avons données, une quantité j', dépendant d'un infiniment petit (ou infiniment grand) x[^] est d'ordre a si le rapport -[^] tend vers une limite finie, et différente de zéro lorsque x tend vers o (ou vers oc). Mais ce serait une erreur de croire que l'ordre d'infinitude d'une fonction quelconque de x soit toujours susceptible d'une semblable évaluation numérique. Considérons, par exemple, la fonction y[^]zzié^{^^} On aura, comme nous l'avons vu, I ï . 2 . . . /« et par suite, si a? >- o, 1 . 2 . . . W ni étant un entier quelconque. On aura donc y . -[^] X* 1 . 2 ... m Supposons m I> a et faisons tendre x vers 00 . On aura lim — > lim — = 00 . JT* "" 1 . 2 ... m On voit donc que, si x tend vers 4- oo , e[^] tendra égale

DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE. 97 ment vers $-\infty$ prise avec le
 signe $-$. Donc, pour x infiniment petit (ou infiniment grand), $\log x$ sera un
 infiniment grand négatif (ou positif), mais dont l'ordre est inférieur à toute
 limite. Il ne saurait donc être question de lui assigner une valeur principale
 de la forme Ax^α . C'est un infini d'une espèce particulière et irréductible à
 ceux que nous avons considérés jusqu'ici. 103. Soit maintenant $u = A J^{\alpha_1} +$
 $B J^{\alpha_2} + \dots + R$ une fonction quelconque développable suivant les
 puissances de x . Proposons-nous de développer $\log u$. On aura évidemment
 $\log u = \log A + \alpha_1 \log J + \frac{B}{A} J^{\alpha_1} + \dots + \frac{R}{A} J^{\alpha_n} + \dots$ Le dernier
 terme de cette expression sera développable au J^{α_n} . -- Cours, I. 7

98 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE III. moyen de la formule qui donne $\log(1-x)$. Mais le terme $\log x$ par lequel commence le développement de $\log x$ sera irréductible avec ceux qui le suivent. 104. Les divers développements que nous avons obtenus, étant limités à un certain nombre de termes, donneront toujours une valeur approchée de la fonction qu'on développe lorsque x sera suffisamment petit (ou suffisamment grand si les puissances de x vont en décroissant). En les prolongeant indéfiniment, on obtiendra des séries infinies. Si ces séries sont divergentes, elles n'ont aucun sens. Mais Cauchy a signalé ce fait remarquable que, même en étant convergentes, elles peuvent ne pas être égales à la fonction qui leur donne naissance. Considérons, à cet effet, la fonction $\frac{1}{(1-x)^3}$. Ses dérivées successives sont une somme de termes de la forme e^{ax} . Cela se voit immédiatement sur la dérivée première, et l'on vérifie non moins facilement que la dérivée d'un semblable terme se compose de deux termes de cette forme. Ces dérivées s'annulent toutes pour $x \rightarrow 0$, car, en posant $1-x = z$, on aura X quantité dont la limite est nulle pour $x \rightarrow 0$, d'où $z \rightarrow 1$. La série de Maclaurin $\frac{1}{(1-x)^3} = 1 + 3x + \frac{9}{2}x^2 + \dots$, prolongée indéfiniment, sera donc convergente, tous ses termes étant nuls. Mais elle est égale à zéro et non $\frac{1}{(1-x)^3}$. Il est donc nécessaire, pour reconnaître si une fonction est développable en série infinie par la formule de Maclaurin, d'étudier le reste R_n , et de s'assurer qu'il tend vers zéro quand n augmente indéfiniment. C'est ainsi que nous avons procédé pour développer $(1-x)^{-3}$, $\log(1-x)$,

DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE. 99 100. Soit $f(x)$ une fonction qui devienne indéterminée pour une valeur particulière a de la variable. On nomme vraie valeur de cette fonction pour $x = a$ la limite vers laquelle tend $f(a-h)$ lorsque h tend vers zéro. Cette vraie valeur peut être finie, infinie ou indéterminée. Si elle est déterminée, elle se trouvera en cherchant la Valeur principale du développement de $f(x \pm h)$ suivant les puissances croissantes de h . Soit, par exemple, $f(x) = \frac{A}{x-a}$ et A s'annulant pour $0? = a$, mais étant développables par la série de Taylor; on aura $A'' / 1.x o\{a\} \sim \{h^9\{a\} - \dots - i ?''(\ll) - + - R/i / (a^A)^{\wedge}$ Soient respectivement $o^{\wedge}(a)$ et $A^{\wedge}(\ll)$ les premiers termes qui ne s'annulent pas dans les deux suites $^{\wedge}(a)$, $cp'(a)$, ..., $(? \ll(\ll)$ et $il(a)$, $^{\wedge}a$, ..., $^{\wedge}.\ll(a)$. La vraie valeur sera $Uli \wedge a^{\wedge}vv^{\wedge}JL Jx L kP-q .i _J \text{---} : . 1.2.../? \wedge^{\wedge}l^{\wedge})$ Elle sera nulle si $p > q$ y infinie si $/? <$, égale à $;\wedge$ si 106. Si $f(j)$ devenait indéterminée pour $a: = \infty$, on développerait $f(jc)$ suivant les puissances décroissantes de j ; et la vraie valeur serait nulle, finie ou infinie, suivant que l'ordre du premier terme du développement serait négatif, nul ou positif. 107. Certaines expressions nécessiteront des changements de variables pour être ramenées à celles que nous avons traitées.

The text on this page is estimated to be only 27.49% accurate

100 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE III. Exemples. — i°

Soit à trouver la vraie valeur de l'expression $m(v-p) - 0$ pour m infini.

Lorsque m tend vers 0 , y tend vers 1 . Nous aurons donc h tendant vers 0 . On en déduit $m^{\log(H/0)}$ et, en substituant, $y = \frac{1}{m}$ pour $h = 0$. Mais $h^{\log(1-h)} = h - \dots$. Substituant cette valeur et supprimant le facteur h commun au numérateur et au dénominateur, il viendra $y = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m^{\log(1-h)}}$. Soit à trouver la vraie valeur de l'expression pour m infini. Posons $m = nx$. L'expression cherchée deviendra $(-x)^{\log(1-h)}$ et aura pour limite e^{-1} , ($1-h \rightarrow 0$ ayant e pour limite. 3° Cherchons encore la vraie valeur de l'expression $y = x^{\log(1-h)}$ pour $X = 0$.

DéVELOPPEMENTS EN SÉRIE. 101 On a $\lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{1}{n} = 0$, c'est-à-dire $\lim_{n \rightarrow \infty} \log n = \infty$. 108. La vraie valeur d'une fonction de plusieurs variables est généralement indéterminée. Considérons, par exemple, la fonction $z = x^2 + y^2$. Supposons que x et y s'annulent pour $x = y = 0$, mais que leurs dérivées partielles ne s'annulent pas. La vraie valeur serait la limite du rapport ou $\lim_{x, y \rightarrow 0} \frac{z}{x^2 + y^2}$ (cf. A, b, k) de $\lim_{x, y \rightarrow 0} \frac{z}{x^2 + y^2} = \lim_{x, y \rightarrow 0} \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = 1$. On voit qu'elle dépend du rapport variable $t = \frac{y}{x}$ à moins que l'on n'ait $\lim_{x, y \rightarrow 0} \frac{y}{x} = 0$ ou ∞ . — Séries infinies. 109. Nous avons trouvé au § III l'expression de diverses transcendentes par des séries infinies. L'étude directe de ces séries constitue une branche importante du Calcul de l'infini, sur laquelle nous allons donner quelques explications. Soient $U_1, U_2, \dots, U_n, \dots$ une suite indéfinie de quanti-

f02 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE III. tés. Formons les
 expressions M_n, H_n Si n augmente indéfiniment, il peut se faire : i^{**} Que ces
 sommes successives ne tendent vers aucune limite déterminée. Ce cas se
 présentera, par exemple, pour la série $1, -1, 1, -1, \dots$ Qu'elles tendent
 vers 0 . Ce sera le cas pour la série $1, 2, 3, 3^{**}$ Qu'elles convergent vers
 une limite finie s . On dira dans ce cas que la série infinie $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ est com'ergente et a pour somme s . Il l'aut évidemment, pour la
 convergence, qu'en prenant n suffisamment grand, toutes les sommes
 successives $s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, \dots$ ne diffèrent de leur limite commune
 s , et par suite ne diffèrent entre elles, que d'une quantité aussi petite que l'on
 voudra. On doit donc, quelque petite que soit la quantité ϵ , pouvoir
 déterminer une quantité n telle que l'on ait, pour toute valeur de $i > n$, $|s_i - s| < \epsilon$ —
 $|s_n - s| < \epsilon$

DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE. lo3 Des conditions
précédentes (en valeur absolue), on déduit que $a_n, \dots$, doivent
être , on aura, a fortiori, $W_n \ll H_n \dots$; *s, et, a fortiori.*

The text on this page is estimated to be only 29.36% accurate

I04 PREMIÈRE PARTIE. -^ CHAPITRE III. H2. Corollaire I. —

Une série $\sum r^n$ «i -f- W2 4- . • . à ternies positifs est convergente {divergente) s* il existe une valeur [j] du nombre variable n à partir de laquelle on ait constamment $V_{n,j} < r, \{ \} / un > r$, r étant une constante plus petite {plus grande) que r unité. En effet, à partir du moment où r inégalité est satisfaite, les termes de la série seront respectivement plus petits (plus grands) que ceux de la progression géométrique convergente (divergente) /• -I- /•- -f- . . . -I- r** -f- H3. Corollaire II — La série s sera encore convergente {divergente) s* il existe une valeur [j] du nombre n à partir de laquelle on ait constamment $\lim_{n \rightarrow \infty} (U_n)^{1/n} < i, (> i)$. On aura, en effet, $U_n < r^{n-j} \cdot x < r^{n-j} \cdot r^j = r^n$ «ji, $\{U_n > r^{n-j} \cdot r^j = r^n$). Les termes $W_{j,i}, \dots, u_{j,i}^{\wedge} \dots$ seront donc moindres (plus grands) que ceux de la progression géométrique convergente (divergente) $r^{n-j} \cdot r^j = r^n$. On obtient un critérium de convergence plus précis en considérant la série II I

DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE. 105 Ses termes peuvent être groupés comme il suit : $r' \gg$! Chacun des 2ⁿ termes qui composent le terme général étant moindre que $\frac{1}{2}$ mais au moins égal à $\frac{1}{2}$ (sa valeur sera comprise entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$ On aura donc $\frac{1}{2} \leq u_n \leq \frac{1}{2}$, $u_n \rightarrow 0$ 4, a 2 « 2 » 2ⁿ * -
 ^^ Les séries qui forment les seconds membres de ces inégalités sont (sauf les deux premiers termes) des progressions géométriques ayant pour raison $\frac{1}{2}$ • Ces progressions, et par suite la série s. seront convergentes si $c > 1$, divergentes si $a \leq 1$. 115. Théorème. — Une série $S = \sum W_j$ - { - W_j - h . . . à termes positifs est convergente {divergente) s'il existe une valeur de n à partir de laquelle on ait constamment r étant une constante plus grande (plus petite) que l'unité. Comparons, en effet, cette série à la suivante OL étant une quantité comprise entre r et l'unité.

106 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE III. On aura Celle
quantilé lënd vers a quand n tend vers ∞ . Il existe donc une valeur α de i
à partir de laquelle elle sera comprise entre r et 1 . A partir de ce
moment, on aura, si $r > 1$, d'où $a > 1$, d'où „ $(\frac{1}{r})^n$ “, „ $(\frac{1}{r})^n$ “, — $< \cdot >$ ou $-\hat{1}-^{\wedge}$
 $<$ On en déduit quantités respectivement moindres que les termes de la série
convergente Donc la série s est convergente. Si r

The text on this page is estimated to be only 28.83% accurate

DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE. IO7 Joignons OP. La longueur p de cette ligne se nomme le module de $a - h$ bi. L'angle POX — cp qu'elle forme avec l'axe Hg. 3. des X se nomme V argument. On a évidemment $Va' 6\% \cos 9 =: > P \sin \alpha$ $a - h$ bi — $p(\cos \alpha - i \sin \alpha)$. Pour que $a - h$ bi soit nul, il faut et il suffit qu'on ait à la fois $a = 0$, $6 \sin \alpha = 0$. Ces deux conditions peuvent se résumer en une seule, $p = 0$. 117. Soient $p(\cos \alpha - i \sin \alpha)$ et $p(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ deux imaginaires. Elles ont pour produit $p^2[\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha]$ $a - h$ cpi) $-f- \sin$

108 PREXifERS PARTIE. — CHAPITRE III. Pa, . . . iS^g' 4)-

Leur somme aura pour affixe le point ω qui a pour abscisse $p \cos \phi - i p \sin \phi$, et pour ordonnée $p \sin \phi + i p \cos \phi$. . . Pour obtenir ce point, il suffira évidemment de porter les unes au bout des autres les lignes OP, OP', OP'', en conservant leur direction. Fig. 4. La somme aura pour module la ligne OQ qui ferme le polygone. Aucun des côtés du polygone ne pouvant surpasser en longueur la somme des autres, on aura ce théorème : Le module d'une somme algébrique ne peut surpasser la somme des modules de ses termes; mais il ne peut être moindre que la différence entre l'un de ces modules et la somme de tous les autres, 119. Soit maintenant $s = a + bi$. Une série à termes réels ou imaginaires de la forme $\sum (a_n + bi_n)$. . .

DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE. 109 Pour qu'une semblable série soit convergente, il faut et il sùit évidemment qu'en prenant n suffisamment grand on puisse faire en sorte que la partie réelle a et la partie imaginaire p de la somme $u + u^2 + \dots + u^n$ soient toutes deux plus petites que toute quantité donnée, et cela pour toute valeur de p . S'il en est ainsi, le module $|u|^n$ de cette somme pourra lui-même être rendu inférieur à toute quantité donnée. Réciproquement, si n peut être choisi de telle sorte que ce module soit, pour toute valeur de ϵ , inférieur à ϵ , a et p seront, a fortiori, inférieurs à ϵ , et la série sera convergente. 120. Cela posé, soient respectivement $u, u^2, \dots$ les modules des termes $u, u^2, \dots$; nous formerons la série S . Si cette série est convergente, la série s le sera. En effet, on peut choisir n assez grand pour que $|u|^n < \epsilon$, et, a fortiori, $|u|^{n+1} < \epsilon$. Nous dirons qu'une série est absolument convergente lorsque la série des modules de ses termes est convergente. 121. Théorème. — On n'altère pas la valeur d'une série absolument convergente en changeant l'ordre de ses termes. Soit $S = u + u^2 + \dots$ la série donnée. Changeons l'ordre de ses termes, et prenons dans la nouvelle série s un nombre de termes suffisant pour qu'on y retrouve les n premiers termes de S . Soient S_n la somme de ces termes,

The text on this page is estimated to be only 25.64% accurate

IIO PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE III. Soit $Unjfp$ celui de ces termes qui a le plus grand indice. On aura $T - - .V., ni:: W» -+- ttp 4- \dots$, $\text{mod} (t7 - Sn) - \text{mod} (w« -h Wp -h \dots)$ et par suite, si n est suffisamment grand, $\text{mod} (7 Sn) < E$. Donc (7 différera aussi peu que Ton voudra de s ni qui lui-même diffère de s aussi peu que Ton voudra. 122.

Théorème b. — Si deux séries $5 = a« -r "a H- \bullet \bullet \bullet$, $f r=r \zeta^{4- i^j} -r \dots$ sont absolument convergentes, la série $Y^u^{\zeta^4}$ formée par les produits deux à deux de leurs termes, écrits dans un ordre quelconque, sera absolument convergente et égale à st . Soient, en effet. S, T les sommes des séries respectivement formées par les modules $Uj, U2, \dots$, et $V4, V2, \dots$ des termes de s et de t . Posons, d'autre part, $Sn - M, -h. . -h Uny tn - ^X -.-.-.-t',,,$. Prenons maintenant, dans la nouvelle série ' $Zu^v^{\wedge}$ ' assez de termes pour y retrouver tous ceux du produit s^tn . Soit K la somme de tous les termes que Ton a dû prendre. On aura évidemment $K^5 \ll f \ll -i R$, R désignant une somme de termes de la forme $\ll / \gg * > ?$ dans chacun desquels Tun au moins des deux indices $a, ^$ sera $> n$. Soit $R ^{-^} u^v^{\wedge} -r w^{\wedge} \{ > -r . \bullet .$, et soit $n - \setminus - p$ le plus grand des indices $a, j\beta, a', p', \dots$. On aura $K - s,, ta - \blacksquare - w^{\wedge} i' \{ \gg -f - w^{\wedge} r.r -\hat{i} - \dots$,

DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE. HT d'où $\text{inocl}(K \text{ — } s, t, t) \text{ — } +$
 $(U, ^\wedge, \text{—} + \dots 4 \text{— } U, ^\wedge)(V_j 4 \text{—} \dots 4 \text{— } V,)$; on aura donc $\text{moà}\{K \text{ — } \text{Snt},)$

112 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE III. D'autre part, elle est inférieure à y car chaque terme positif, sauf le premier, y est précédé d'un terme négatif plus grand que lui. Donc $U_n^i - f \dots - i - U_n^{pj}$ étant

DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE. 113 Supposons, pour fixer les idées, que $A < -f - A_2 H - \dots$ ait une somme infinie. Considérons la série

The text on this page is estimated to be only 28.00% accurate

l'if\ PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE lit. somme de la série
une expression de la forme $M \cdot X^n$, M étant quelconque. On voit par cet
exemple combien il est nécessaire de n'effectuer sur une série aucune
opération sans en avoir démontré la légitimité. $\wedge t > * 125$. Nous terminerons
ces considérations sur les séries dont les termes sont des quantités
numériques en démontrant, d'après Abel, le théorème suivant : Théorème.
— Soient (1) $w, w_1, w_2, \dots$ une série convergente et $a^1, a^2, \dots$ des quantités
quelconques telles que la série $\sum a^n w_n$ ait une limite finie, La série (2) $a, w, w_1, w_2, \dots$ sera
convergente. En effet, la série (1) étant convergente, on pourra déterminer
 n de telle sorte que l'on ait, pour toute valeur de n , $\sum_{k=n}^{\infty} w_k < \epsilon$. Pour démontrer que la série (2) est convergente, il suffit
d'établir que la quantité $\sum a^n w_n$ peut elle-même être rendue plus petite que toute quantité donnée. Or on a
évidemment $\sum_{n=1}^{\infty} a^n w_n = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \left(\sum_{k=1}^{\infty} w_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k \left(\sum_{n=1}^{\infty} a^n \right) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k \cdot \frac{1}{1-a}$
 $\hat{1} = \frac{2}{n-1} \left(\sum_{i=1}^{\infty} w_i \right) \left(\sum_{j=1}^{\infty} a^j \right) = \frac{2}{n-1} \cdot \frac{1}{1-a} \cdot \frac{1}{1-a} = \frac{2}{(n-1)(1-a)^2}$

The text on this page is estimated to be only 29.57% accurate

DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE. T15 et, par suite, $\text{mod} ((X_n^i$
 $U_n^x -!-...-+ a_{n,p} u^{+p}) \equiv a_n - (a_j - 04) - (a_n - \langle a \rangle - \dots -$
 $(\langle i+p-i - \langle \langle +p \rangle \rangle \text{ d'où } \text{mod } a_{n,p} = \text{mod } a^{+p} - \text{mod } (a_n - a^{+p}) - h. \dots 4-$
 $\text{mod } (a_{n,p} - a_{n,p}) < s$. D'autre part, $\text{mod}(a_{n,p} - a_{n,p}) - h \dots - h$
 $\text{mod}(a_{n,p} - a^{+p}) < 5$; donc $\text{mod}(a_{n,p} - a_{n,p} - h \dots - h) < 25e$,
quantité qui peut être rendue aussi petite que l'on voudra en choisissant e
assez petit. Le cas le plus intéressant de ce théorème est celui où les
coefficients $a_1, a_2, \dots$ sont réels et vont constamment en croissant ou en
décroissant, mais en tendant vers une limite finie. Soit m cette limite ; il est
clair que l'on aura $\text{mod } a_j \equiv \text{mod}(a_j - m)$. 126. Remarque. — Si la
série (i) est absolument convergente, la condition imposée aux coefficients
a par l'énoncé du théorème ne sera pas nécessaire. Pour que la série (2) soit
convergente, et même absolument convergente, il suffira que les modules
des coefficients a_n ne surpassent pas, au moins à partir d'un certain rang, une
limite fixe M ; car on aura évidemment, dans ce cas, en prenant n
suffisamment grand, $\text{mod} (a_{n,p} -!-, +, 4- \dots -h a_{n,p} u^{+p})$

ii6 ranitiB pâbtu. — chapitu m. 127. Passons à la considération des séries dont les termes sont des fonctions d'une même variable s . Une telle série sera convergente pour les valeurs de z comprises dans un certain intervalle, si pour chacune de ces valeurs et pour chaque valeur de la (quantité infiniment petite t on peut assigner une valeur de n telle que Ton ait pour toute valeur de p $(3) \bmod(M|, +, - + - \dots - t - tf, ^, .,)$

DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE. 117 d'où l'offe $\log(i - \wedge)$ Cette quantité reste finie pour toutes les valeurs de z que nous considérons. Toutefois elle croît au delà de toute limite si z se rapproche suffisamment de zéro. 128. L'importance de la notion de la convergence uniforme résulte du théorème suivant, que nous démontrerons dans le Calcul intégral. Si la série s est convergente dans un certain intervalle et si la série des dérivées de ses différents termes est elle-même uniformément convergente dans ce même intervalle, s sera, dans cet intervalle, une fonction continue de z , et sa dérivée sera s' . 129. Considérons, en particulier, une série $5''$ $ao -h \ll 1 -s -h .$ $. . -h \ll 5'' -I- . . .$ procédant suivant les puissances entières et positives de la variable z . On pourra donner à z une valeur telle que les modules $Mo, M, ,.$ $. . , M;, , . . .$ des termes de la série ne surpassent pas toute limite (la valeur $z = 0$ satisfait toujours à cette condition). Parmi les valeurs de z qui jouissent de cette propriété, soit ζ celle qui a le plus grand module, et soient R ce module, $[JL$ la limite supérieure des modules $Mq, Mj, . . . , M^i, . . .$ pour

Théorème. — La série s est absolument et uniformément convergente pour les valeurs réelles ou imaginaires de z dont le module ne surpasse pas p , p désignant une quantité quelconque inférieure à R .

The text on this page is estimated to be only 29.19% accurate

II8 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE III. Les séries $s' := a^{-h}$
 $2a, 5^{-h} \dots^{-h} \text{nanZ}^* \sim^{-h} \dots, 5'' = 2^4, 4^{-h} \dots^{-h} i(i - i)a, t-3' \gg^{-*} - | \dots,$
 obtenues en prenant les dérivées des ternies de s , jouiront des mêmes
 propriétés. En effet, la série s peut s'écrire Son terme général aura pour
 module $M \ll i = i \text{moda}, \dots^{\wedge} \gg \text{modi}^j$

DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE. II9 et son terme général aura pour module $M, -, = ^T noda, \hat{\imath} \ll \text{mod}^{\wedge \wedge J}) \ll \ll ^;$, $-'''*'''-\bullet]$ inférieure à e , il suffit de faire en sorte que la somme des termes correspondants de la série a soit

I20 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE III. d'où et enfin — $\wedge$
 — ;- o h 1 .2 /(.):= H,,r^l±:^\)-/i^=,!. Les transformations successives que
 nous avons fait subir à l'expression $/(z -\backslash- h)$ pour arriver à ce résultat ne
 sont évidemment licites que si la série $a_0 -h a_1 5 -f- a, /i -4- \langle j^\wedge -f- 2aiZh -^\wedge -$
 $a,A'4- . . .$ est absolument convergente. Mais cette condition sera satisfaite
 dès que h sera devenu assez petit pour que l'on ait $\text{mod};; -+- \text{mod}h$

DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE. 121 OU nul, comme pour la série $1 - 2H - I.2 > 3' - | - I.2.3 - 3'4 - \dots$. V. — Produits infinis. 132. Soient, comme au paragraphe précédent, M_j , $\langle 2, \dots, \langle \dots, \dots$, une suite indéfinie de quantités. Formons les produits successifs Si n augmente indéfiniment, il peut se faire : i® Que ces produits successifs ne tendent vers aucune limite déterminée; 2® Qu'ils tendent vers ∞ ; ^ 'A^ Qu'ils tendent vers une limite finie II. On dira, dans ce dernier cas, que le produit infini est convergent et a pour valeur II. 133. Nous admettrons, pour plus de généralité, que $u^{\wedge}, \dots, //; \dots$ puissent être imaginaires. Soit, en général, $U_n = a_n -^ b_n \hat{=} p_n$ (cosa,, H- « sina,,). Le produit $11^{\wedge}$ aura pour module $\pi \dots p/i$ et pour argument Deux cas de convergence seront à distinguer suivant que, pour $n = \infty$, U_n tend vers zéro ou vers une limite différente de zéro. Le premier cas se présentera, quels que soient les arguments, si Ton a $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n \sim 0$,

123 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE III. OU, ce qui revient au même, $\lim \log p, \dots p \ll = \lim (\log p_i 4- \dots -H \log p,,) = \infty$. Ce cas se reconnaîtra donc à ce caractère que la série $\log^p, -4- \dots 4-\log p,, -\hat{1}- \dots$ est divergente et a pour limite ∞ . 134. Pour que le second cas se présente, il sera évidemment nécessaire et suffisant que les deux expressions $\log p, \dots p \ll$ et $a, -f \dots - a,,$ tendent toutes deux vers des limites déterminées, autrement dit que les séries (i) $\log p, -+- \dots -f-\log p,, -h \dots$ et (2) $a, -+- \dots -+-a,, -f \dots$ soient toutes deux convergentes. Au lieu de la série (i), il sera, en général, plus commode de considérer celle-ci (3) $\log p_j 4- \dots -f-\log p_j -f \dots$, qui s'obtient en doublant tous ses termes. Si les séries (2) et (3) sont absolument convergentes, il en sera de même du produit II, dont la valeur sera évidemment indépendante de l'ordre des facteurs. Il dépendra au contraire de cet ordre et sera semi-convergent si les séries (a) et (3) sont elles-mêmes semi-convergentes. Si les quantités $w, , \dots, U_n, \dots$ dépendent d'une variable z , le produit sera uniformément convergent ou non en même temps que les deux séries. Une condition nécessaire, sinon suffisante, pour la convergence des séries (2) et (3), est que leurs termes tendent vers zéro pour n infini. Il faudra pour cela que p_j tende vers l'unité et $a,,$ vers zéro.

The text on this page is estimated to be only 29.46% accurate

DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE. 123 Mais on a $I_{\sin} = 1 \cdot p^j$
— «?» + $^0\%$ a,, ~arc

124 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE III. Mais si la série $\sum a_n$ est absolument convergente, il en sera de même de la série $\sum n b_n$, dont les termes ont des modules moindres, au moins à partir d'un certain rang. D'autre part, la série $\sum (a_n - i)$ peut s'écrire $\sum (a_n - h_i)(a_n - i)$ et sera absolument convergente en même temps que la série $\sum (a_n - i)^j$ puisque le facteur $a_n - i$ tend, pour $n \rightarrow \infty$, vers une limite fixe égale à 2. Donc, pour que $\sum a_n$ soit absolument convergent, il faut et il suffit que les deux séries $\sum (a_n - i)$ et $\sum n b_n$ soient absolument convergentes, ou, ce qui revient au même, que la série $\sum (a_n - i)^j$ le soit. 136. Considérons, comme exemple, le produit $\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$. Il sera absolument convergent si, x étant $> i$, les coefficients $A_0, \dots, A_n, \dots$ ont leurs modules inférieurs à une limite fixe M . On aura en effet $|A_n x^n| < M x^n$ et $\sum x^n$ est convergente, comme nous l'avons vu. Le contraire aura lieu si a^n et si $A_0, \dots, A_n, \dots$ ont leurs modules supérieurs à une limite fixe.

DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES. 137* Gomme application, considérons l'expression $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{z^n}{i})$, Soit r la limite vers laquelle elle tend pour $n = \infty$. On aura évidemment $r = \infty$ si z est un entier négatif, car, à partir de la valeur $n = -3 + i$, toutes les fonctions $\Pi(i, z)$ auront un facteur nul au dénominateur. Pour toute autre valeur de z , $\Pi(i, z)$ aura au contraire une valeur finie et déterminée. En effet, on peut évidemment écrire $\Pi(i, z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{z^n}{i})$ et il ne reste qu'à prouver la convergence de ce produit infini. Or on a $\frac{1}{1 - \frac{z^n}{i}} = 1 + \frac{z^n}{i} + \frac{z^{2n}}{i^2} + \dots$, tendant, pour $n = \infty$, vers la limite fixe 1 . Le produit est donc absolument convergent.

138. Pour donner à la théorie des équations algébriques la simplicité et la généralité qu'elle possède, il a été nécessaire de considérer, conjointement avec leurs racines réelles, les racines imaginaires qu'elles peuvent avoir. On se trouve donc naturellement conduit, dans l'étude des fonctions, à tenir compte des valeurs imaginaires qu'elles sont susceptibles de prendre pour certaines valeurs de la variable indépendante. Mais lorsque deux quantités variables sont liées par une relation, on peut choisir arbitrairement celle des deux que

126 PBEHIÈRB PARTIE. — CHAPITRE III. l'on prendra pour variable indépendante. On est donc amené par la force des choses à donner à la variable indépendante elle-même, non seulement des valeurs réelles, mais des valeurs imaginaires, et à étudier les valeurs correspondantes de la fonction. Cette extension n'offre aucune difficulté pour les fonctions algébriques, car on possède des méthodes pour calculer, sinon exactement, du moins avec telle approximation que l'on veut, les valeurs des racines d'une équation algébrique, que ses coefficients soient réels ou imaginaires. Il en est de même pour toute fonction transcendante définie par une série procédant suivant les puissances entières de la variable. En effet, dans l'intérieur de son cercle de convergence, une semblable série représente une fonction continue de s , dont on obtiendra la valeur $A - \lambda B i$ correspondant à $z^a - \lambda b i$, en effectuant la substitution dans chaque terme et développant chaque puissance de $a - \lambda b i$ par la formule du binôme. Les fonctions transcendantes élémentaires e^* , $\sin^*$, $\cos z$, $\log z$, z^{**} donnent lieu, au premier abord, à plus de difficulté. En effet, elles n'ont été définies que pour des valeurs réelles de la variable, de telle sorte que les expressions $e^{a - \lambda b i}$, $\sin(a - \lambda b i)$, . . . n'ont jusqu'à présent aucun sens. Il dépend de nous de leur en donner un, qu'il conviendra de choisir de telle sorte que les propriétés fondamentales de ces fonctions, démontrées pour les valeurs réelles de la variable a subsistent pour les valeurs imaginaires. 139. Or nous avons vu que e^* , $\sin^*$, $\cos s$ sont représentées par les séries toujours convergentes (i) $e^{a - \lambda b i} = 1 + (a - \lambda b i) + \frac{(a - \lambda b i)^2}{2!} + \dots$ (ii) $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$ (3) $\cos s = 1 - \frac{s^2}{2!} + \frac{s^4}{4!} - \dots$ 1.2.3 1.2.3.4-5 ^1 1.2 1.2.3.4

DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE. 127 On se trouve donc naturellement conduit à prendre ces séries pour définition de nos fonctions, que z soit réel ou imaginaire. En vertu de ces définitions, on aura immédiatement

$$z^i = e^{-\log z} = e^{-i \log z} = \cos(\log z) - i \sin(\log z)$$

$$z^{-i} = e^{i \log z} = \cos(\log z) + i \sin(\log z)$$

et, par suite,

$$\cos(\log z) = \frac{z^i + z^{-i}}{2}, \quad \sin(\log z) = \frac{z^i - z^{-i}}{2i}$$

Ces formules fondamentales, établies par Euler, réduisent les fonctions trigonométriques aux exponentielles, et réciproquement. 140. Il est aisé d'établir que les propriétés essentielles de ces fonctions, démontrées pour les valeurs réelles de la variable, subsistent pour les valeurs imaginaires. En effet, prenons les dérivées des séries (1), (2), (3); il viendra

$$\frac{d}{dz} z^i = i z^{i-1}, \quad \frac{d}{dz} z^{-i} = -i z^{-i-1}$$

$$\frac{d}{dz} \cos(\log z) = -\frac{1}{z} \sin(\log z), \quad \frac{d}{dz} \sin(\log z) = \frac{1}{z} \cos(\log z)$$

D'autre part, formons le produit $e^i e^*$. En groupant ensemble les termes de même degré, il viendra

$$e^i e^* = e^{i + (-i)} = e^0 = 1$$

$$e^i e^* = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-i)^m}{m!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n (-i)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$$

128 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE III. Enfin les formules
 $\sin(a - i\theta) = \sin a \cosh \theta - i \cos a \sinh \theta$, $\cos(a - i\theta) = \cos a \cosh \theta + i \sin a \sinh \theta$
 peuvent se vérifier immédiatement en remplaçant les sinus et cosinus par
 leurs valeurs en exponentielles et tenant compte de la relation (8). Nous
 signalerons encore la formule suivante : (9) $e^{a - i\theta} = e^a e^{-i\theta} = e^a (\cos \theta - i \sin \theta)$,
 qui permet de calculer aisément la valeur de la fonction
 exponentielle pour les valeurs imaginaires de la variable. 141. On sait que
 $\log z$ est la fonction inverse de e^z . Etendant cette définition aux valeurs
 imaginaires de la variable, cherchons à déterminer $\log[p(\cos \theta - i \sin \theta)]$.
 Soit $\log[p(\cos \theta - i \sin \theta)] = m + i\eta$. On en déduira $p(\cos \theta - i \sin \theta) = e^{m + i\eta}$

DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE. ^ 129 Les équations (10) deviendront alors $\cos \theta = \cos r, \sin \theta = \sin r$ et donneront k étant un entier quelconque, positif ou négatif. Nous voyons par là qu'un nombre fini et différent de zéro, tel que $z = p(\cos \theta - i \sin \theta)$, a une infinité de logarithmes, donnés par la formule (11) $\log p - i t(\theta + sA - t\theta)$. La fonction $\log z$ a donc une infinité de valeurs distinctes pour chaque valeur de z . Si z est réel et positif, on aura l'une de ces valeurs sera réelle. C'est le logarithme arithmétique. Si z n'est pas réel et positif, il n'aura que des logarithmes imaginaires. 142. Soit $a = p (\cos$

130 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE III. qui sert de
définition au logarithme, donne, par différentiation, $e^{-(\log j)} = i$, d'où
143. On a identiquement, lorsque m est entier et positif et z réel, (13)
 $z^m = e^{m \log z}$, en prenant pour le logarithme sa détermination arithmétique.
Cette même égalité pourra servir de définition à la fonction z^m pour tous les
systèmes de valeurs possibles de z ; et de m , et fournira les diverses valeurs
dont elle est susceptible, à la condition d'y laisser au logarithme son
ambiguïté. On aura donc, en posant $z = p(\cos \theta + i \sin \theta)$, m —
 $\frac{2\pi k}{m}$ et les diverses valeurs de cette expression
s'obtiendront en faisant parcourir à k la série des entiers réels. Ces valeurs
diffèrent les unes des autres par le facteur $e^{2\pi i k/m}$ — $\cos \frac{2\pi k}{m} + i \sin \frac{2\pi k}{m}$
Elles se réduisent à une seule si m est réel et entier, car m est
étant un multiple de 2π , le facteur ci-dessus se réduira à l'unité, quel que
soit l'entier k . Si m est une fraction réelle irréductible, telle que $\frac{p}{q}$, deux
valeurs quelconques de k différant d'un multiple de q
donneront la même valeur pour z^m . Soit, en effet, $k' = k + nq$, les deux
arcs $\frac{2\pi k}{m}$ et $\frac{2\pi k'}{m}$, différant d'un multiple de 2π ,
auront mêmes lignes trigonométriques ; on aura donc

DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE. 131 P Donc z^f n'aura que q valeurs distinctes, qui s'obtiendront en posant $k = 0, 1, \dots, q - 1$. Si m est incommensurable ou imaginaire, on voit aisément, au contraire, qu'à chaque valeur de k correspond une valeur distincte pour z^m . Ces valeurs seront donc en nombre infini. 14i. Prenons la dérivée de l'équation (13); il viendra
 Soit enfin $m = m' - \frac{1}{m''}$; on aura $\frac{d}{dx} z^{m'} = \frac{1}{m''} z^{m'} \log p - \frac{1}{m''} z^{m'} \log q$
 $\frac{d}{dx} z^{m'} = \frac{1}{m''} z^{m'} (\log p - \log q)$
 $\frac{d}{dx} z^{m'} = \frac{1}{m''} z^{m'} \log \frac{p}{q}$
 C'est la généralisation de la formule relative aux radicaux arithmétiques. Elle n'en diffère que par la présence du facteur $e^{2\pi i (A'm' + A''TO - Am)}$ laquelle ne peut être évitée, vu l'ambiguïté des fonctions $z^{\frac{1}{n}}$, $z^{\frac{1}{n^2}}$, $z^{\frac{1}{n^3}}$, etc. 1io. Les transcendentes élémentaires e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\log x$, z^x sont définies maintenant pour toute valeur de x , et nous avons établi que leurs propriétés fondamentales persistent après cette généralisation (140, 142 et 144). En particulier, les fonctions e^x , $\sin x$, $\cos x$, étant définies par des séries toujours convergentes, ont l'avantage de n'avoir pour chaque valeur de la variable qu'une seule valeur, parfaitement déterminée et toujours finie, tant que la variable reste elle-même finie. Nous allons donc les discuter avec un peu plus de détail.
 146. On a $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, $e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$, $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2 \cos \theta$, $e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i \sin \theta$.

The text on this page is estimated to be only 29.49% accurate

132 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE III. Cette dernière formule montre que e^z est une fonction périodique ayant pour période $2\pi i$. Nous avons vu d'ailleurs que l'on peut déterminer pour la variable z une infinité de valeurs telles que e^z prenne une valeur donnée finie et différente de zéro, laquelle est $(\cos p + i \sin p)$. Ces valeurs sont données par la formule $z = \text{Log } p + i(\theta + 2k\pi)$. Si z est réel, e^z sera également réel et croîtra de 0 à ∞ lorsque z varie de $-\infty$ à $+\infty$. Soit $z = X - iy$ la quantité $\rho e^{i\theta}$; e^z aura e^X pour module et $-y$ pour argument. En particulier, si $\theta = 0$, e^z aura pour module l'unité. Si X tend vers $-\infty$, e^z tendra vers zéro. Si X tend vers $+\infty$, le module de e^z tendra vers ∞ , mais son argument variera avec y . Enfin, si y tend vers ∞ sans que X tende en même temps vers zéro, e^z ne tendra vers aucune limite déterminée. L'expression e^z ne représente donc rien de déterminé.

147. Passons aux fonctions trigonométriques. On a évidemment $\sin(-\theta) = -\sin \theta$, $\cos(-\theta) = \cos \theta$, et, d'autre part, $\sin(\theta + \frac{\pi}{2}) = \cos \theta$, $\cos(\theta + \frac{\pi}{2}) = -\sin \theta$. Ces relations sont évidentes si l'on trouve de même $\cos(\theta + \frac{\pi}{2}) = \sin \theta$, $\sin(\theta + \frac{\pi}{2}) = \cos \theta$, $\cos(\theta + \pi) = -\cos \theta$, $\sin(\theta + \pi) = -\sin \theta$, $\cos(\theta + \frac{3\pi}{2}) = \sin \theta$, $\sin(\theta + \frac{3\pi}{2}) = -\cos \theta$.

The text on this page is estimated to be only 29.29% accurate

DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE. 133 et en Q_n s'in^z -hcos^z
 $z = \cos(5 - 5) = i$. On voit par ces formules que $\sin z$ et $\cos z$ admettent la
période réelle $a-n$. Ces fonctions sont susceptibles de prendre toutes les
valeurs possibles (Finfini excepté) pour des valeurs convenables de la
variable. Cherchons, en effet, à résoudre l'équation $\sin z = a$, a étant une
quantité quelconque. Remplaçant $\sin^z$ par sa valeur en exponentielles, il
viendra 21 OU $e^{iz} - 2aie'^{-} - I \blacksquare - o$. Cette équation donne pour e'^*
deux valeurs finies et différentes de zéro, ayant pour produit -1 ; soient
donc $p(\cos p + i \sin p)$, - $[\cos(ir - \odot) - e \sin(ir - cp)]$ ces deux racines;
on aura, pour les valeurs correspondantes de iz $\text{Log} p - h i(\zeta p - 2kTz)$ et
 $\text{Log} - h ((tz - (p^4 - 2k - K))$. Posant donc, pour abrégier, $\text{Log} p - hcpzzz^{\wedge}$, 0 et
remarquant que $\text{Log} - = - \text{Log} p$, nous obtiendrons pour z les deux séries de
valeurs suivantes : $ZQ - h2kTZy$ it $-^0 - H 2 kiz$.

134 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE III. En traitant de même l'équation $\cos 5 = a$, on trouverait d'une manière analogue deux séries de solutions, données par la formule $i^r \sqrt[n]{a}$, $-h ikr$, 148. Cherchons, en particulier, comment varient $\sin$ et $\cos$ lorsque θ donne à z des valeurs purement imaginaires. Soit $z = iy$. On aura $\sin iV = \frac{e^{-V} - e^V}{2}$. Cette valeur est purement imaginaire et le coefficient de i croît évidemment de $-\infty$ à $+\infty$ en même temps que y . Quant à la fonction $\cos iV = \frac{e^{-V} + e^V}{2}$ sur fV , elle sera évidemment réelle et plus grande que l'unité. Elle est d'ailleurs positive, car elle est égale à 1 pour $y = 0$, et ne pourrait changer de signe qu'en s'annulant. Enfin elle croît évidemment en même temps que le module de $\sin iV$. Elle croîtra donc de 1 à ∞ lorsque y variera de 0 à ∞ ou de 0 à $-\infty$. 149. Cela posé, les formules $\sin(x - iy) = \sin x \cosh y - i \cos x \sinh y$, $\cos(x - iy) = \cos x \cosh y + i \sin x \sinh y$ montrent que, pour $y = \infty$, le sinus et le cosinus deviennent imaginaires, mais que le rapport de leurs parties réelles à leur partie imaginaire dépend de x , et cesse d'être déterminé si x ne tend pas vers une limite finie et déterminée. 150. Tout produit de sinus et cosinus peut être transformé en une somme de sinus et cosinus. Il suffit pour cela de rem

The text on this page is estimated to be only 25.43% accurate

DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE. 135 placer les sinus et cosinus par leur valeur en exponentielles, d'effectuer les multiplications et de revenir ensuite aux lignes trigonométriques. Proposons-nous, par exemple, d'exprimer $\sin^m z$; en fonction des sinus et des cosinus de z et de ses multiples (m étant supposé entier). On aura $(2i)^m \sin^m z = \frac{1}{2^m} (e^{iz} - e^{-iz})^m$. Associons ensemble les termes à égale distance des extrêmes ; il viendra : Si m est impair, $(2i)^m \sin^m z = \frac{1}{2^m} \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \binom{m}{k} \sin^{m-k} z \cos^k z$; si m est pair, $(2i)^m \sin^m z = \frac{1}{2^m} \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} \sin^{m-k} z \cos^k z$. On aura de même $2^m \cos^m z = (e^{iz} + e^{-iz})^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} e^{i(m-k)z} e^{-ikz} = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \cos^{m-k} z \cos^k z$. Cette série se terminera, si m est impair, par un terme en $\cos^5 z$; SI m est pair, par un terme constant 2^m . On peut réciproquement exprimer $\cos^m z$ et $\sin^m z$

The text on this page is estimated to be only 21.16% accurate

130 PRESliKE PARTiJE. — OUPITU IU. en fonction de $\sin^\wedge$ et de $\cos^\wedge$. On a, en effet, $\cos m z = \frac{1}{2} \left(e^{i m z} + e^{-i m z} \right)$; $e^{i m z} = (\cos z + i \sin z)^m$, d'où, en développant par la formule du binôme et égalant séparément les parties réelles et les parties imaginaires, $m(m-1)\dots(m-k+1) \cos^{m-k} z \sin^k z = \dots$. $\cos^m z = \cos^m z$; $\sin^m z = \dots$. $\cos^m z = \cos^m z$; $\sin^m z = \dots$. 1.2.3 Remplaçant dans ces formules $\sin^\wedge$ par $1 - \cos^\wedge$, ou réciproquement, on voit : 1° Que $\cos^m z$ s'exprime par une fonction entière de degré m en $\cos z$; 2° Que $\sin^m z$ est une fonction entière de degré m en $\sin z$ si m est impair; que, si m est pair, $\sin^m z$ sera égal au produit de $\cos^2 z$ par une fonction de degré $m-2$ en $\sin z$. 152. Soit m un entier impair quelconque; on aura, comme nous venons de le voir, $\sin^m z = (\sin z)^m$, désignant une fonction entière de degré m . Il est aisé de mettre cette fonction sous forme d'un produit de facteurs. En effet, $\sin^m z$ s'annule pour les m valeurs suivantes de z : $0, \pi, 2\pi, \dots, (m-1)\pi$ auxquelles correspondent autant de valeurs distinctes pour $\sin z$. On aura donc $\sin^m z = A \prod_{k=1}^m (\sin z - \sin \theta_k)$ désignant un facteur numérique.

DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE. iSj Pour le déterminer, donnons à z une valeur infiniment petite. Le premier membre de l'équation précédente aura pour valeur principale mz et le second A^5 . Donc $A = m$. Changeons 5 en ∞ ; l'équation deviendra $\sin m$. Cherchons quelle est la limite de cette expression lorsque m croît indéfiniment. Le premier facteur $m \sin \frac{1}{m}$ tend évidemment vers 1. Soit I un des autres facteurs; nous supposons $\sin \frac{1}{m} = \frac{1}{n}$ d'abord

The text on this page is estimated to be only 27.34% accurate

138 PREVifefE PAITIE. — CHAPITRE III. c étant infiniment petit. D'autre part on a, par la formule de Maclaurin, — $\cos O = 1 - \frac{O^2}{2!} + \frac{O^4}{4!} - \frac{O^6}{6!} + \dots$ 3.11 — $\frac{O^2}{2!}$, ni $\frac{O^4}{4!}$ étant compris entre 0 et $\frac{O^2}{2!}$. D'ailleurs $\frac{O^2}{2!}$ est compris entre 0 et $\frac{O^2}{2!}$. On aura donc 2 d'où $\frac{O^2}{2!} < \cos O < 1 - \frac{O^4}{4!}$. On aura, par suite, $\frac{O^2}{2!} < \cos O < 1 - \frac{O^4}{4!}$, étant une quantité comprise entre $\frac{O^2}{2!}$ et $1 - \frac{O^4}{4!}$. On aura, par suite, $\frac{O^2}{2!} < \cos O < 1 - \frac{O^4}{4!}$, étant une quantité dont le module est compris entre des limites fixes (la valeur de z étant supposée fixe). Or nous avons vu qu'un produit infini, dont le terme général est de la forme ci-dessus, est absolument convergent (136). Donc le produit d'un nombre quelconque de facteurs consécutifs $(1 - \frac{O^2}{2!})^k$ sera aussi voisin que l'on voudra de l'unité, si k est assez grand. On aura donc $\lim_{k \rightarrow \infty} (1 - \frac{O^2}{2!})^k = 0$ à mesure que k augmente. En le fai

DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE. 1 89 sant croître indéfiniment, on aura à la limite « = • loi. L'expression de cosus par un produit infini pourrait s'obtenir par un procédé analogue. On y parvient plus rapidement au moyen de la relation $\sin 2t:z \cos t:z = \frac{1}{2} \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1}$. 2 SIIT^ qui donne, en supprimant les facteurs communs, (i5) $\cos'jc^{--rT} I \frac{1}{2} \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1} = \frac{1}{2} \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1}$. Posons $X = \frac{1}{2} \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1}$ dans la formule (i4)- H viendra $j \frac{1}{2} \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1} \frac{1}{z^2 + 1} \frac{1}{z^2 + 1} \dots$ (2n-^i) 2 11 \ 4^iV 2 lA 2/2.2// 1 1 d'où 7C 2.2. '4.4... 2/2. 2/î... ^' 2 I.3.3.5... (2/i — l)(2/i-hlj...' formule découverte par WalHs. 156. Prenons la dérivée logarithmique de la formule (i4)? il viendra $1 V' 2w (17) \frac{1}{z^2 + 1} \frac{1}{z^2 + 1} \frac{1}{z^2 + 1} \dots$ 1 ety en développant chaque terme suivant les puissances de $z^{\frac{1}{2}}$ •ircotici;= $2z \frac{1}{2} \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1} \frac{1}{z^2 + 1} \frac{1}{z^2 + 1} \dots$

The text on this page is estimated to be only 22.36% accurate

I 40 PKESifeRE PAKTIE. — CBAPITM III. Mais on a, d'autre part, $\cos T. z. e'^* \sim e'^* = \frac{1}{2} M \sqrt{1 - z^2} e'^* \sim e'^* = \frac{1}{2} C'^* = \frac{1}{2} C'^*$ if $\{9jT.zy, (2l7rj)^H B|, B2, \dots$ désignant les nombres bernoulliens (88). Egalant les coefficients des mêmes puissances de z dans ces développements, il viendra $B_j = \frac{1}{j!} \frac{d^j}{dz^j} \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}} \Big|_{z=0}$ (8) ... $\ll k 1.2. .2 // t^n \}$ VII — Séries et produits périodiques. 137. On a souvent à considérer des séries de la forme $M_0 + M_1 z + M_2 z^2 + \dots + M_n z^n + \dots$ $W(j - h) \dots - h \ll n - H. S \ll -$ s'étendant à l'infini dans les deux sens à partir d'un terme central u^h . Pour qu'une semblable série soit convergente (absolument ou uniformément convergente), il faut et il suffit évidemment que les deux séries partielles $W_1 - h \dots - h \ll a - h \dots$, considérées isolément, soient convergentes (absolument ou uniformément convergentes).

DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE. 141 Toutefois, lorsque ces séries sont divergentes, il peut se faire que Ton arrive à un résultat convergent, à la condition d'établir une relation convenable entre le nombre des termes que Ton prend de chaque côté du terme central. 158. Considérons, par exemple, la série $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ a désignant un entier réel. On a a_n étant une quantité qui tend vers l'unité quand n augmente. Les deux séries partielles qui figurent dans l'expression de S_a seront donc convergentes si la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est convergente, autrement dit si $a > 1$. Si $a = 1$, elles seront, au contraire, divergentes, et tendront Tune vers $+\infty$, l'autre vers $-\infty$. Leur somme sera donc indéterminée. Mais si nous convenons de prendre constamment le même nombre N de termes dans ces deux séries, nous aurons l'expression $\sum_{n=-N}^N a_n z^n$ qui tendra, si N croît indéfiniment, vers la limite parfaitement déterminée $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$. 159. Ce qui précède met immédiatement en évidence la périodicité de la fonction cotre 3. En effet, si dans l'expression $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ on

The text on this page is estimated to be only 29.10% accurate

14[^] PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE III. on change 5 en z ; -
 $f - i$, chaque terme se changera dans le suivant, de telle sorte que la variation
de la fonction résultera simplement de la suppression du premier terme - —
 $^$ et de l'addition d'un dernier terme .. A la limite, N étant infini, ces deux
termes s'annulent; on aura donc $7: \cot(-3 - h i) := 11 \cot(-re);$. Le même
raisonnement s'appliquerait évidemment aux autres séries $S_2, \dots, S_n, \dots$
160. Pour établir la périodicité du sinus, nous partons de son expression en
produit $N = \prod_{i=1}^N (1 - \frac{z^2}{\alpha_i^2})$ Si Ton change -3 en $-3 - h i$, le produit
du second membre se w $-h N - h I$ reproduira évidemment, multiplié par le
facteur $^{\wedge \wedge \wedge} \wedge \text{---} \wedge$ — A la limite, pour $N = \infty$, ce facteur devient égal à $1 - i$;
donc $\sin 7t(z; -f- 1) \blacksquare$ -. — $\sin itc$, et, par suite, $\sin 7c(-3 -+- 2) = \sin ir^{\wedge}$. On
peut faire un raisonnement tout semblable yay le cosinus. 161. Passons à la
série de Jacobi, $OD = e^{\alpha} O \wedge \hat{r}$ et α désignent des constantes réelles ou
imaginaires.

DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE* 14^ Cette série sera
 absolument convergente si la partie réelle de a est $\text{Re } a > 0$.
 Considérons, en effet, la portion de la série qui correspond aux valeurs
 positives de n . La racine $n^{\text{ième}}$ du terme général sera $a^{1/n}$ et a pour module $e^{\frac{\text{Re } a}{n}}$
 mod. $e^{\frac{\text{Re } a}{n}}$, $a!$ désignant la partie réelle de a . Cette expression tend vers zéro
 lorsque n augmente, si a est négatif. Donc la série sera convergente. On
 démontrerait de même la convergence de la série correspondante aux
 valeurs négatives de n . 162. La fonction $\zeta(s)$ ainsi définie admet la période
 $2\pi i$ car, en changeant s en $s + 2\pi i$ le terme général se reproduit,
 multiplié par le facteur $e^{2\pi i n}$, qui est égal à l'unité. D'autre part, on a d'où et
 posant, pour abréger, $\zeta(-n) = 2\pi i$ Si nous changeons z en z^{-1} — z^{-1} le facteur
 exponentiel deviendra $e^{2\pi i n}$ et $\zeta(5)$ ne sera pas altérée, car le changement de z en
 z^{-1} équivalant à celui de $1/z$ en $n + i$, ne fait que per

144 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE III. muter les termes de
celte série. On aura donc $e^5 + \dots = e^{-\dots}$

The text on this page is estimated to be only 23.19% accurate

DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE. 145 qui prendra la forme voulue si Ton pose $e^{\alpha - \beta} = \pm I$, d'oii po) — Ôazr: — At:/, k étant entier. On en déduit $kr.i - \backslash - 3a > ' \bullet , 0)$,, to' $a = z . - ^ \sim = : / r - + A' - \bullet b Ql 1$ En donnant à A'', A' les valeurs o et i , on obtiendra quatre fonctions distinctes. Les autres systèmes de valeurs de k et de k' les reproduiraient à des facteurs constants près. En affectant ces quatre fonctions de facteurs numériques convenables, nous poserons (I) $(-i)' * 7 \ll ' e - ' \backslash _ Vi'' + i)$. — = — — 00 Si dans ces séries nous groupons ensemble les deux termes qui contiennent une même puissance de qj il viendra $1 3 (^) = 1 + 2 > ^ \ll ' \cos y X ^ (" \blacksquare * \blacksquare !)$ $(2/1 - l - i) 7r ; ; 6 . (. -) = :$ $^ Yr "" - = - ' , (" - ^ \backslash y . (2/1 - hr) - ! ! ; ; ^ \wedge \wedge *' \sin \bullet J .$ — Cours, I.

The text on this page is estimated to be only 24.44% accurate

146 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE III. 160. Si dans les formules (i) nous remplaçons successivement z par $z + 1$ pour abréger, 10^0), vement z par $z - 1$ — $j z - \lambda$)^{-|-} =: $03(x;)$, $\wedge\{z - \wedge - i\wedge\}$ — $e(\wedge)$, $0, (\wedge^5 - h a >)$ $r =$ — $6, (5)$, $61(5 + a >) =$ — $e, (;;)$; (2) (3) (4) (5) ($6, (5 - f - a >') = 1 \times 0, (5)$, $0 (5 + 0)' = z - 1 \times 6(5)$, $j 6, (5 - 4 - 0)' = 1 \wedge 16, (5)$, $6, (5 - 4 - 0 >') =: \sim - | \times 6, (5)$. Il résulte des expressions trigonométriques des fonctions θ que 83 , 0 , 62 sont paires; 6 est impaire, et s'annule pour $\wedge = 0$. D'ailleurs, les facteurs exponentiels X et π étant toujours finis et différents de zéro, les relations (2), (3), (4) et (5) montrent : 1° Que si 9 s'annule pour une valeur Z_q de la variable, il s'annulera encore pour les valeurs $z \wedge H -$, $-s \odot + w'$. et en général pour les valeurs $Z_q - \lambda - m i \wedge + n i \wedge' j$ m et n étant deux entiers positifs ou négatifs ; a^{**} Que 62 s'annulera pour $Z_q - \lambda$ — ; $Q \gg$ pour $> 50 H : * 2 ' n (X) b)' U3 \gg$ pour $50 H 1 \bullet$

The text on this page is estimated to be only 20.84% accurate

DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE. l^y On aura donc : Si $z = 5 = ma > -h wti > 61 = 0$ Si $5^h = (m H - J)o - H niù' 6, = o$ Si $z = z\{m-j-\backslash\}(i)^{-h} (n-h\{)iù' 63=1:0$ Si $5 = mto -h (/i -h^h)a > 6 m: o 466$. Cela posé, la fonction s^h annule pour les valeurs de z qui satisfont à la relation $— [(2v-M)u)^{-h} - 25] = \log(— i)z = (2m + i)ir$, , d'où Ton déduit ;; ru: $(m -h A)(o — (v -h i)a)^h$, m étant un entier arbitraire positif ou négatif; de même la fonction s^h annule pour les valeurs $5 = (m H - A)(ii -h (v -+- 1)0)^h$. Donc le produit infini $v=0 \blacksquare Q /''$, $4_2^h \ll V-H1 \cos^h -h^h (\ll >^h) A \bullet \# = 0$ s'annulera, comme $O3$, pour toutes les valeurs de la formé $(m + 5)^h$. *On est donc fondé à prévoir l'existence d'un lien intime entre ces deux fonctions.*

The text on this page is estimated to be only 27.59% accurate

148 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE IH. 167. Proposons-nous de vérifier celle induction. Posons, pour abrégér, e''' r=r JC, et considérons le produit v = m — 1 v = 0 Ce produit développé sera de la forme A_{—, ,} ^'-''' + .. .-h A_{—, a: -*-f-Ao-+-} A_{—, ^'-+-}. (6) i * (-+-A_{—, a7' *-h. . .H-X, n^} Pour calculer les coefficients, nous remarquerons tout d'abord que (f(jc) = 'f(x~*). Donc on aura A_{—, «=iA_{—, ,} ...j A_{—, =:A_{—, ,}} A_{—i} = Ai, de sorte qu'il ne reste plus qu'à calculer A cet effet, changeons x en q^x. La plupart des facteurs du produit se retrouveront dans l'expression transformée, de telle sorte qu'on aura simplement (i -l-7*'»-^*.r)(i -\ -q-^x-^) {i-hqx){i-+-q'''- 'x-') OU, en réduisant, (qx-^q^'''') ^(^'^) = (H-^*"»-^3b ?(^)Substituant, dans cette relation, la valeur (6) de ^ (x) et la valeur correspondante de ^ (q^)^ il viendra, en égalant les coefficients des termes en a:", ^*«-» A_{—, i} + (7«'»-^«'» A_{—, = A_{—, H- 7»"»-^* A_{—, i}, d'où (7) Kn-l=^^n ^î«-i/i ^î«-l(l _^yîm-î«--î)}}}

DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE. 149 On a d'ailleurs, en effectuant la multiplication, et la formule (7) donnera ensuite successivement $A^{(1)} z^{(1)} f^{(1)}(z) = r_1 \prod_{n=1}^{\infty} (1 - y^{(1)n}) (1 - z^{(1)n}) \dots (1 - z^{(1)n})$ Les coefficients de l'expression (6) étant ainsi déterminés, cherchons vers quelle limite elle tend, lorsque m croît indéfiniment. Le produit infini $p = (1 - z^{(1)}) (1 - z^{(2)}) (1 - z^{(3)}) \dots$ est absolument convergent ; car, q ayant son module inférieur à l'unité, la série $z^{(1)} + z^{(2)} + z^{(3)} + \dots$ le sera. Le numérateur $(1 - y^{(1)n}) \dots (1 - y^{(m)n})$ étant le produit de facteurs successifs de P , infiniment éloignés de l'origine, aura pour limite l'unité. Quant au dénominateur, on aura évidemment $\lim (1 - z^{(1)n}) \dots (1 - z^{(m)n}) = F$, tant que n ne surpassera pas une limite fixe A ; choisie d'ailleurs arbitrairement. Pour les valeurs de n supérieures à A , le produit $(1 - z^{(1)n}) \dots (1 - z^{(m)n})$ aura d'ailleurs son module compris entre π et M , π désignant le minimum et M le maximum des modules des produits successifs $(1 - z^{(1)n}), (1 - z^{(2)n}), \dots$

The text on this page is estimated to be only 26.15% accurate

150 PBEMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE III. On aura donc à la limite

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) \approx \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} - 1 \right) = \frac{1}{4} \frac{v^2}{c^2}$$
 Changeons, dans cette formule, v en H ; $H > 0$ puis en $5 H$ y il viendra, d'une part, $\frac{1}{4} \frac{(5H)^2}{c^2} = 25 \frac{1}{4} \frac{H^2}{c^2}$ et, d'autre part, 0

DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE. Soit z ou, en remplaçant k par sa valeur, faisant sortir du produit le facteur $i^{-1} e^{-k}$, et multipliant les autres deux à deux, on a : $27^k P \cos^k \theta / 1 - h 2q^{k/2} \cos^k \theta - 7^{k/2} M$. Enfin, en changeant dans cette dernière formule z en z^{-1} — il viendra $(1 - h) 61^k = 2^{k/2} P \sin^k \theta (1 - a^{k/2}) \cos^k \theta + 7^{k/2} M$. Il résulte de cette décomposition en facteurs des fonctions θ que les seules valeurs de la variable pour lesquelles elles s'annulent sont celles que nous avons indiquées plus haut. De plus, ces valeurs sont des racines simples des équations $83 = 0, \dots$. Car chacune d'elles n'annule qu'un des facteurs du produit, et n'annule pas sa dérivée. 168. On peut rattacher aux fonctions θ plusieurs autres fonctions intéressantes. Considérons d'abord la fonction On trouvera, pour cette fonction, l'expression suivante : $Tz^k Tzz^k T$. $2izz^k q^{k/2} (1 - h) O) 0) (1 - j^k V I - 27^{k/2} \cos^k \theta - h \hat{u} r^{k/2} M$ en prenant les logarithmes des deux membres de l'équation (i i), puis égalant les dérivées du premier membre de la nouvelle équation ainsi obtenue à la somme des dérivées des termes du second membre.

152 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE III. Cette opération est légitime si la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} z^n$ est uniformément convergente. Or il est aisé de voir qu'il en est ainsi. En effet, mod ρ étant < 1 , on pourra, quel que soit l'intervalle dans lequel on fasse varier z , déterminer un entier m assez grand pour que, pour toute valeur de n supérieure à m/ρ , le module de $\frac{h^n}{n!} z^n$ soit $> 1 - \epsilon$, ϵ étant une quantité aussi petite que l'on voudra. Le reste de la série sera donc inférieur à la quantité constante $1 - \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\rho^3} + \dots = \frac{1}{\rho} - 1$, qui sera d'ailleurs aussi petite que l'on voudra, si m est assez grand. La fonction $\eta(z)$ satisfait aux équations $\eta(z + \omega) = \eta(z)$, $\eta(z + \omega') = \eta(z) + 2\pi i$; on obtient en prenant la dérivée logarithmique des équations Une nouvelle différentiation donnera $\eta'(z + \omega) = \eta'(z)$, $\eta'(z + \omega') = \eta'(z) + 2\pi i$; η' a donc deux périodes distinctes, ω et ω' . 169. On obtient d'autres fonctions doublement périodiques en prenant les quotients deux à deux des fonctions η , η' , η'' , En effet, les équations (4) et (5) étant divisées les

The text on this page is estimated to be only 23.00% accurate

DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE. 153 unes par les aulres,
 rexponenlielle [x disparaîtra et il viendra $^{\wedge}(5 + o.) = -^{\wedge}(5)$, d'où $^{\wedge}(5 + 2,0)$
 $= ^{\wedge}(-)$; $^{\wedge}(.+)' = -?i(. -)$, d'où $^{\wedge}(c + u. + a,') = ^{\wedge}(\wedge)$; $^{\wedge}(= + 2a >$ et $(li\ 4- a >, \text{---} j\ o)$
 et $2w$. Y admet encore la période aco' ; mais ce n'est qu'une combinaison
 des deux précédentes ; car on a $2to' = r2(a > - hu)') \text{---} 20$). Ces trois fonctions
 deviennent infinies pour les valeurs de z contenues dans la formule et
 s'annulent respectivement pour $z = mt\grave{u} \text{---} +- no)'$, $5 =: (m-f- -J-)to \text{---} +- nu)'$, $^{\wedge}$
 $= (m-hi)u)4-(/H- \hat{i})w'$. Nous retrouverons ces fonctions dans le Calcul
 intégral, sous le nom de fonctions elliptiques.

The text on this page is estimated to be only 29.39% accurate

(0 154 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE III. VIII. — Série hypergéométrique. — Fonction T. 170. CoDsidérons la série hypergéométrique $F(a, p, Y, x) = 1 + \frac{a \cdot p \cdot Y}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot Y} \cdot \frac{(Y-i-i) \cdot \dots \cdot (y-h/i-i)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot Y}$. Cette expression est symétrique en a et p . Elle se réduira à un polynôme entier si a ou p est entier et négatif; car tous ses termes, à partir d'un certain rang, s'annuleront. Elle n'a d'ailleurs aucun sens si y est entier et négatif, car ses termes deviendraient infinis à partir d'un certain rang. Excluons donc le cas où l'un des paramètres a, p, y serait entier et négatif; nous obtiendrons une série infinie, dont nous allons étudier tout d'abord la convergence. Soit w_n le terme général; on aura l'expression qui tend vers x quand n augmente indéfiniment. La série sera donc absolument convergente si $\text{mod } j < i$, divergente si $\text{mod } x > i$. Soit enfin $\text{mod } x = i$. Admettons, pour plus de généralité, que a, p, y soient imaginaires, et posons $a = a' - ia''$, $p = p' - ip''$, $y = y' - iy''$, $r = r' + ir''$. On aura $\text{mod } \frac{a' + p' + y'}{2} = i$. Soit enfin $\text{mod } x = i$. Admettons, pour plus de généralité, que a, p, y soient imaginaires, et posons $a = a' - ia''$, $p = p' - ip''$, $y = y' - iy''$, $r = r' + ir''$. On aura $\text{mod } \frac{a' + p' + y'}{2} = i$.

DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE. . 155 et enfin $\text{Vimnft} \equiv \text{mod}$
 $\wedge \setminus \wedge i 4. y - a' - ?$. La série des modules sera donc convergente, et la série
 $F(a, j\hat{a}, Y, x)$ absolument convergente, si $\wedge \equiv \circ c' \equiv p' > 0$. Au contraire, si y'
 $\equiv (x! \equiv \wedge \equiv AF -h B^{\wedge}F -h C^{\wedge}F'^{\wedge} -h DF -+- Ejc\forall$ où A, B, C, D, E sont
des constantes arbitraires. Le terme en $\wedge \wedge$ aura pour coefficient $rA(Y4-/i) -$
 $+ -B/i(Y-f-/i) H-C/i(/i - i)(y-H/i) l [4-D(aH-/i)04-/i)-h-E/i(a4-/i)(P-h/l) y'$
en posant, pour abréger, $_ a(g-4-i) \dots (a-+-/? - l)p(?4-l) \dots 0 4-n - l) _ l^{\wedge} \dots$
 *$1, 2. \dots, n^{\wedge}\{-(-hi), \dots \{^{\wedge} -^{\wedge} n - i) Y + /l *$* La quantité qui multiplie q est un
polynôme en n du troisième degré, et l'on pourra évidemment disposer des
rapports des cinq constantes A, B, C, D, E , de manière à annuler ses quatre
coefficients; on aura alors identiquement $4 > l = 0$. On trouvera ainsi (Q) ($\wedge$
 *$\equiv a: *)F'' -h[Y \equiv (\ll -i-P-+-0^{\wedge}]F' \equiv \ll ?F = 0$. 172. En faisant varier les*
paramètres a, p, y de la série F , on obtiendra une infinité de fonctions
distinctes. Deux de ces fonctions seront dites contiguës si deux de leurs
para

The text on this page is estimated to be only 27.90% accurate

156 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE III. mètres ont la même valeur, leurs troisièmes paramètres différant d'une unité. Théorème. — La fonction F et deux quelconques de ses contiguës sont liées par une équation linéaire ayant pour coefficients des polynômes du premier degré en x . La fonction F ayant six contiguës différentes, on aura ainsi 6.5 — $\wedge = i5$ équations différentes. Nous allons indiquer comment on peut les établir. Considérons, par exemple, les trois fonctions $F(\langle, ?, Y, r)$, $F(a, ?, Y-i, \wedge)$, $F(\langle, ?, y \wedge i, x)$, que nous représenterons, pour abréger, par F , F_{-} , $F_{\cdot}$. Soit N le coefficient de $.r$ dans F , formons son coefficient dans les fonctions F , xF , $F_{-}i$, $a:F_{-}i$, $F|$, $;rF|$. On trouvera immédiatement les valeurs suivantes : pour F N , $\wedge P j^{\wedge\wedge} /i(Y-t-/i - i) \wedge (a 4-/i - i)(\hat{i}i-h w - I)' F_{-}$. $Nl--t^{\wedge---}i$, $Y - I 7$ — $1 (aH-/i - i)(pJ -h/i - I) F$, $N - \wedge -$, $y-\backslash- n$ On en déduit immédiatement que le coefficient de $a:$ dans l'expression $(A -h B^{\wedge})F -+- (G -h Do:) F_{\cdot}$, $-+- ExFi$

DEVELOPPEMENTS Elf SÉRIE* 15j N sera égal au produit de ;
 —r r par une fonction entière du troisième degré en N.- On pourra
 déterminer le rapport des constantes A, B, G, D, E de manière à annuler
 cette fonction. On trouvera ainsi Les quatorze autres équations peuvent
 s'obtenir par un procédé identique. On simplifiera les calculs, soit en per*
 mutant les paramètres a et jâ par rapport auxquels F est symétrique, soit en
 profitant des équations déjà trouvées pour en obtenir d'autres, par
 Élimination d'une des fonctions qui y figurent. Trois fonctions $F(a, p, Y, a;)$,
 $F(a', P', y', ^)$, $F(«', p', /, a:)$, dont les paramètres diffèrent de nombres
 entiers, sont liées par une équation linéaire, dont les coefficients sont des
 polynômes en X. En effet, ces trois fonctions se rattachent les unes aux
 autres par une suite de fonctions contiguës. Formant les relations qui
 existent entre ces fonctions, et éliminant les fonctions intermédiaires, on
 obtiendra l'équation cherchée. 173- Il est intéressant de déterminer la valeur
 de la fonction $F(a, p, Y^* ^)$ pour $j: = 1$, lorsque cette série est convergente.
 Posons $X := i$ dans l'équation (3); il viendra $Tl^{\wedge} + P-i)F(«>P>i,i)-+-(i\sim=)$
 $(i\sim P)F(a,p, Y^{-1-1,1})^{-0}$, d'où $F(«^P>r>i)^{\wedge} (Tu^{\wedge}(\text{in } P_{_})$ Changeant, dans
 cette équation , $Y^{\wedge\wedge} Y^{+ '}$; $\ddot{I}t^{\sim \wedge}$, . . • , $Y4- n \text{ — } i$

The text on this page is estimated to be only 22.45% accurate

158 PREMIÈRE PART». — CHAPITRE III. et multipliant ensemble les équations obtenues, il viendra $Y(YH-1) \dots (Y-i/i \sim 1)$
 $(Y-«-?)-(T-«-?+-'*— 0 \dots n(/^Y)n(/», Y \sim «-?) ^(/^, Y-«)^(/^, Y-P)'$ en
posant, comme au § V, 4) $n(i,5) = \dots \dots \dots - , -o^{*} \dots -h 1; \dots ^4* -\{- /i-$
— I[^] Faisons tendre n vers ∞ ; $F(a, P, yH-^i 0$ tendra évidemment vers
l'unité; on aura donc, en posant encore (5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \{n, z\} = T\{z\}$, $r(Y)r(Y-«-P)$
 $F(«, P, Y, i): r(Y-«)r(Y-?)$ 174. La fonction $r(z)$, définie par les équations (ii) et
(5), jouit de propriétés nombreuses et importantes. Nous allons en établir
quelques-unes. On a évidemment $n(i,5 + i) = \sim^{\wedge} n(i,5)$, d'où, en posant $n \rightarrow$
 ∞ , (6) $T\{z^{\wedge}, ^i\}z = -zT\{z\}$, et, par suite, k étant un entier positif
quelconque, On a d'ailleurs, identiquement, $n(n,i)r=i$, d'où $r(i)=z$, et, par
suite, $r(H-k)=1.2, \dots h \setminus$

The text on this page is estimated to be only 16.13% accurate

rÉTKLOPPBMSNTS EN SÉEIB. iSg 175. On a, en second lieu, et, à la limite, $T\{z)r\{-z\}^{\wedge\wedge} \text{---} (153)$. On en déduit (7) $T\{z)T\{i\text{---}^{\wedge}z)=^{\wedge}zT\{z)T\{-z\}:=.^{\wedge}\text{---}$. Posons, en particulier. $z = 1$; il viendra d'où 476. Formons encore le produit $m'\gg^* n(/i, 5) n u, ^{-h}^{\wedge}) \dots n (/i, ^{\wedge} + ^{\wedge\wedge})$ $ll(/w/i, m.5)$ On vérifie aisément qu'il a pour valeur $/n''\gg^{\gg}[i.2...(/i\text{---} i)l'''n^*$, 1,2. , . $\{^{\wedge}nin \text{---} i) '\sim '$ quantité. indépendante de z . On aura donc, en posant $/i = oo$, $m'\gg\text{---} r(5i) r(5 + \text{---})\dots rf;; \text{---} h^{\wedge}?\text{---} i) r(mz) ' C$ désignant une constante indépendante de $^{\wedge}$.

The text on this page is estimated to be only 19.66% accurate

16p PREK1feRB PARTIS. — CHAPITBE m. Pour la déterminer, posons $z = \text{Xi II}$ viendra M alti pllons cette équation par elle-même, en renversant Fordre des termes du premier membre. Il viendra, en tenant compte de l'équation (7), $1 \wedge \wedge \wedge C \setminus \text{sm} - \text{si} \text{ii} - \text{sm} \wedge \wedge \text{tn m m}$ Or on a $X - e'''7. \dots \setminus x -- e''') \blacksquare = \wedge \{ x^\wedge - \setminus \} x^\wedge - 2 \text{ CCS a; } - + - 1) \dots \text{I a?} \bullet - 2 \cos - \wedge 1 \setminus 2 // 1 / L 2 / 71 \text{ J}$ Posons $a := I - r A$, et égalons les termes du premier degré en h dans les deux membres ; il viendra $\text{am} - : 2 (2 \text{ sm } \sim) \dots 2 \text{ sm } \bullet \setminus 2 / n / _ 2 \text{m J}$ Posant $X = \wedge - I 4 - A >$ on trouverait de môme $2 \cos \dots 2 \cos \bullet \setminus 2 \text{ m} / L 2 \text{ m J } 2 \text{ m } r^\wedge 2$ Multiplions ces deux égalités, et extrayons la racine carrée; il viendra $m = : 2'''''' \text{ sm} - \dots \sin m$ et, par suite $m - t , 1 \text{ Ci} = (2ir) \ll m''^\wedge \ll$. IX. — Séries et produits multiples. 477. Considérons un système de quantités $U m^\wedge m^\wedge .$ » distinguées les unes des autres par plusieurs indices $m_i, m_s, \dots$,

DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE. • 161 dont chacun peut prendre une infinité de valeurs (par exemple toutes les valeurs entières et positives). Disposons ces quantités dans un ordre arbitraire et formons-en la série infinie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Formons également la série des modules $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| x^n$. Trois cas pourront se présenter :

- 1° La série (2) est convergente. Dans ce cas, la série (1) aura, comme nous Pavons vu, une limite parfaitement déterminée et indépendante de l'ordre des termes. Nous dirons que cette limite S est la valeur de la série multiple $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.
- 2° La série (1) est convergente; mais la série (2) divergente. Dans ce cas, la valeur de la série (1) dépend de l'ordre de ses termes. L'expression $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ n'acquerra donc un sens précis que lorsque cet ordre aura été spécifié.
- 3° La série (1) est divergente, quel que soit l'ordre des termes. Dans ce cas, l'expression $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, sera entièrement dépourvue de sens, et son emploi devra être proscrit.

Des théorèmes établis au § IV, on déduit immédiatement les conséquences suivantes :

- 1° Si la série $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| x^n$ est absolument convergente, il en sera de même de la série si les coefficients a_n sont tels que leurs modules {au moins à partir d'un certain rang) ne surpassent pas une limite fixe M .
- 2° On obtiendra le produit de deux séries absolument convergentes $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, en multipliant tous les J .

— Cours, I.

162 PRB MIRE PARTIE. *— CHAPITRE 111. termes de V une par tons les termes de V autre, et ajoutant les produits obtenus dans un ordre quelconque. 178. On peut considérer également des produits inGnis multiples, tels que $nw, \dots, \dots, \dots$. D'après ce qui a été démontré, pour qu'un produit de ce genre soit absolument convergent, il faut et il suffit que la série $2(w, n, \dots, \dots \text{ — } 1)$ le soit. Nous ferons encore remarquer que la notion de la convergence uniforme s'applique, sans aucune modification, aux séries ou produits multiples dont les termes ou les facteurs sont fonction d'une ou de plusieurs variables. 179. Considérons en particulier la série à termes réels et positifs $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

The text on this page is estimated to be only 29.94% accurate

DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE. 163 donc $x \gg \frac{1}{i} \ll x^2$
 On a d'ailleurs, évidemment, $S = S_1 + \dots + S_n + \dots$ et par suite, $T = S_1 + T_1$, en posant, pour abréger, $r = \frac{1}{i}$. — S sera donc convergente ou divergente en même temps que T . Mais on peut évidemment écrire $2j$ $j^2 \ll \frac{1}{i}$ An tendant vers $i = \infty$ pour la limite constante w . Pour que T soit convergent, il sera nécessaire et suffisant que la série $2j \ll \frac{1}{i}$ le soit, ce qui donne (H4) la condition $231 > \frac{1}{i}$. 180. Ce résultat peut être généralisé comme il suit : Soient f une fonction continue homogène de degré α à des indices $m^1, \dots, m^n$; ϕ une fonction des mêmes indices de degré inférieur à α . Si la fonction ϕ est de telle nature qu'elle ne s'annule pour aucun système de valeurs réelles des variables $m^1, \dots, m^n$.

164 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE III. (le système 0,0,... excepté), la série (où Ton exclut de la sommation les termes pour lesquels on aurait - , divergente _ n SI a 7 - . En effet, donnons successivement aux variables $\{x_i\}$, $\{y_i\}$, ... tous les systèmes de valeurs réelles qui satisfont à la condition $m_j - h m_j - h \dots = 1$. Les valeurs correspondantes de ϕ seront évidemment finies et de même signe, car (j) ne pourrait changer de signe qu'en s'annulant. Soient K la plus grande de ces valeurs, k la plus petite. Le rapport des fonctions ϕ et $(m_j + \dots - f - m^y)$ restera compris entre K et A" pour tous les systèmes de valeurs que Ton considère. D'ailleurs ce rapport, étant une fonction homogène et de degré zéro de $m_i, \dots, \{y_i\}$, ne dépend que des rapports mutuels de ces quantités ; il sera donc toujours compris entre K et k. D'autre part, ϕ étant de degré $< a$ par rapport à $\{y_i\}, \dots, m_i$, son rapport à $(m_j H - \dots - m^Y)$ tendra vers zéro si les variables $m^i, \dots, m_i$, ou seulement quelques-unes d'entre elles, croissent indéfiniment; car ce rapport est moindre que $\frac{m^i}{m^Y}$, m^i désignant la plus grande en valeur absolue des quantités $m_i, \dots, \{y_i\}$, et ce dernier rapport tend évidemment vers zéro. On aura donc $\frac{\phi}{(m_j H - \dots - m^Y)} = A; \dots, (m; 4 - \dots - h m_j)^*, A_i, \dots$, étant une quantité finie, comprise pour des valeurs suffisamment grandes des variables entre deux limites fixes,

DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE. 165 voisines de K et de k . La série $\sum$ sera donc convergente ou divergente en même temps que la série S , considérée tout à l'heure. 181. Comme application, considérons la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} z^n$, où $a = a' - \lambda a'' i^{\lambda}$ ($i^{\lambda} = 6' - \lambda b'' i$, $z^{\lambda} = z' - \lambda z'' i$) sont des quantités complexes et λ une quantité positive. La série des modules a pour terme général $[(a'/n, 4 - b'm^{\lambda} + z'Y^{-\lambda}\{a''m^{\lambda} - h b'm^{\lambda} - h z'YY''^{\lambda} \}^{\lambda}]^{\lambda}$ en posant $\lambda = r$. La fonction $f(z)$ est continue et homogène de degré λ . Enfin, elle ne s'annulera que si $m_i = m^{\lambda} = 0$, pourvu que le déterminant $a'b'' - b'a''$ soit différent de zéro. On voit donc, en appliquant le théorème précédent, que la série sera absolument convergente si $\lambda > 2$. Elle sera divergente, ou semi-convergente, si $\lambda \leq 2$. 182. Posons, en particulier, $\lambda = i$, et considérons l'expression $S_{\lambda} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} \lim_{n \rightarrow \infty} |z|^{\lambda}$ laquelle est évidemment formée des termes de S

The text on this page is estimated to be only 7.82% accurate

166 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE III On a, en effet (138),
 $\lim \backslash = - \lim \backslash U > /M \gg -i \cdot 3 = \text{---} \cot \text{---} (w'/?l, 4- -)$. puis % 1 ir Tî S', = $\lim$
 $> - \cot - (u)'/ye, -\backslash - z) m, = M, \ll r _ TT TT TT \text{"}\% \text{"}^{\wedge} I TZ 1 =: \text{---} \cot \text{---} Z -\backslash$
 $> \cot \text{---} \{tii'nii -+- \wedge\} \hat{i} - \text{COL}\{ \text{---} Co' / \ll j -r- z\} (u O) eu \wedge \wedge L^{**\wedge} . 'iT.Z \sin _$
 $tu - \cot .--3 H- - > (U OJ \wedge \wedge . \text{"}^{\wedge} V , \wedge \dots . TT 1 \sin - (tu'm, 4- x;) \sin \text{---} (\text{---}$
 $tu'/Wj -H 5) U > (U / = \text{---} \cot \text{---} ;; -47: . 2-5 V \text{---} \sin > l) tu \wedge \wedge$ ou, en
posant $tu \ tu \ tu \ tu / i \ 2 \ TTtu' \bullet > - ; \cos m, \text{---} \cos , , 2i:tu' n^{\wedge \wedge} t -\backslash - n^{\wedge \wedge} i e \bullet *$
 $=7, d \text{ ou } \cos m- = \wedge y' tu \ 2 \ 30 s, = - \cot - ; ; H \sin > tu \ tu (U tu \wedge \wedge ^2; n, 2 \ TT$
 $3 \ 1 \sim I \text{---} 2 \ 7^{*''} t \cos r \ 7^{\wedge ''}$ » et enfin, en changeant $m2$ en $n -r i, c \ 1 \ ri _ \wedge '$.
 $\wedge, 7: 7: Lk-n . 27t; ; V^{\wedge} S, 1 = - \cot - z -\backslash -- \text{---} -\sin - \text{---} > ' tu \ tu \ tu \ tu \wedge J^{\wedge} 2 \ 71$
 $.3 \ 0 \ I \text{---} 27^{*''} - * -' \cos \text{---} * h \ 7^{*''} \wedge *$ tu expression qui se réduit à $Z(5)(168)$.

DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE. 167 183. Cette relation étant supposée satisfaite, $S \setminus = Z\{z\}$ sera Tune des valeurs que peut prendre la série S . Il est d'ailleurs aisé de se rendre compte, dans une certaine mesure, de la manière dont la valeur de S , varie lorsqu'on change l'ordre de ses termes. On a, en effet, Si: $(i > m, -h (o'mj$ Or il est aisé de voir que la série $\{oifUi -+- a)'''/2\}^{(wmi -p (ii'fJii -+- -s)}$ est absolument convergente. Le changement de l'ordre des termes $n^{\wedge}$ influera donc que sur les deux premières* parties de la somme $>^{\wedge} \text{---} ; \text{---}$ et $\text{---} z \setminus (lomi -i- i^{\wedge} i^{\wedge} l^{\wedge} y$ et accroîtra $S <$ d'une quantité de la forme $A \text{---} B^{\wedge}$, A et B étant les accroissements que prennent les deux séries lesquels accroissements sont indépendants de z . 18i. L'expression que nous venons de trouver, $Z(c) := S'$, $== \lim \setminus - col \text{---} (a)'/W2 + >3)$, montre que $Z(z \setminus - (\grave{u}) = Z(z)^{\wedge}$ car le changement de z en $z -h$

The text on this page is estimated to be only 15.81% accurate

168 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE III. Changeons, d'autre part, z en $z - i - uy'$ il viendra $Z(c - + - tii') = \lim y - \cot - [to'(/?ij - + - I) H - j]$, $w. = - M$, d'où $yj\{z + 0\}) - Z(\wedge) - \lim? - '. \cot - [io'ifn^h - h i) 4 - -] - \cot \sim (tu'w, 4 - - i' - \lim - \hat{ic}ol - [a)'(M. - f - i) - H - gI - \cot - (- w'Mj - r wi' = \lim irtu - (2M, + 1) \wedge \wedge \wedge \wedge \wedge \wedge COsI - - (2M, - hl) I - COS - (w' - h2w) [o) J ***$
 $\pm r^{\wedge} \gg M \gg - 4 - j _ \wedge - 111, - 1) z = \lim n \text{ eu } |^{\wedge} tM, + 1 _ _ \wedge - 8Mj - l^{\wedge} - COS - (w' - \{- 3 j)$ Si le module de q est $<< i$, $\zeta^{*} \ll \wedge^{\wedge}$ tendra vers zéro, et $\wedge_tM, _i \wedge \wedge \wedge g^{\wedge} Q^{\wedge \wedge \wedge \wedge \wedge \wedge}$ donc à la limite ainsi qu'on Tavait déjà trouvé (168). Si, au contraire, le module de y est $> i$, c'est $q^{\wedge \wedge *} - \wedge^{\wedge}$ qui tendra vers 00, et Ton aura $Z(; + co') - Z(5) = z -$. 183. Il est aisé de généraliser la théorie des fonctions 6, en l'étendant au cas de plusieurs variables. Considérons, en effet, la série double (4) $f^{\wedge} \ll, \ll, p, ?, (-i, -i) \sim \wedge \wedge *$

The text on this page is estimated to be only 28.54% accurate

DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE. 169 OÙ a_1, a_2, p_i, l^2 sont des entiers constants, et $o(M_j, m^j) = f(m) - h_2(m) - h_1(m) - h_3(m) \dots$ une fonction homogène et du second degré en m^j , 7712, dont la partie réelle $(f^{(j)}(m) - h_2(m) - h_1(m) - h_3(m) \dots)$ reste constamment négative pour tout système de valeurs de m^j , m^j autre que le système o, o (ce qui implique, comme on sait, les deux conditions a)

170 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE III. forment une série convergente si $p > i$ (180). Donc, a fortiori, la série sera convergente. 186. L'expression (4) ne change pas si l'on change m^i en $m_i + i$, ses termes étant simplement permutés entre eux. Mais cela revient à changer a_i en $a_i - a$. On aura donc (5) $^{\wedge}\langle, -t-s.\langle, ?, p, = ^{\wedge}\langle, ct, p, ?..$ On aura de même (6) $^{\wedge}\langle.. \langle, H-i.?.P, = ^{\wedge}\langle, \langle, ?, ?, D'autre part, changeons z^i en $z^i - \frac{1}{2} a - rei$, ce qui revient à changer i en $j3| -h 2$. Le terme général de la fonction 8 se reproduira multiplié par la constante $e^{\wedge}' - (- 0' \bullet$. On aura donc et de même Les fonctions 9aja,p,8, se reproduisant ainsi au signe près lorsque $a_i, a-i, p_i$ ou 2 augmentent de deux unités, on peut se borner à considérer les seize fonctions distinctes obtenues en donnant à chacun de ces entiers les valeurs 0 ou i. Ces seize fonctions ont d'ailleurs entre elles des relations intimes, ainsi que nous allons le voir. 187. Si dans l'expression (4) nous changeons $j3|$ en ^i-f-i , ce qui revient à changer Z en $^{\wedge} -f$ Tût, il viendra$

The text on this page is estimated to be only 24.81% accurate

DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE. 17» On aura de même
Changeons, (l'autre part, ai en ai -f- i dans la formule (4) L' exposant du
terme général sera accru de la quantité On aura, par suite, («0 1 " '■'^*""^
*^a.,^?.(-i -h a, :?î H- b). On trouvera de même Les formules (5) à (i 2)
permettent évidemment de réduire nos seize fonctions à une seule d'entre
elles. 188. Changeons encore une fois ^i en ^i + i dans la formule (9). Il
viendra, en tenant compte de la formule (7), (i3) (- i)*'0,,ot,îi.?,(:î,, 5,) —
e.,,p,p,(:;j 4- 2 7CI, ^,)La formule (10) donnera de même (— 0*« V,i.i?i(-i>
-2) — V,?.?,(-i' -2 + 2-0Changeons ai en ai 4- 1 dans la formule (i i); on
trouvera, en tenant compte de (5), ^._^^^a.?,?,-i,-î) =
«?'e«^"0.^_.,a,j,,3,(:;, 4-^,^,-4-6) (-_ = (___ i)?e=i-^«e.^,3.p,(;3, 4- 2a, ;;,
4- 2 b). On trouvera enfin, de la même manière.

173 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE III. 189. On voit, par ces formules, que nos seize fonctions se reproduisent au signe près si Ton augmente Z_1 ou Z_2 de $stti$, et qu'elles se reproduisent au signe près, multipliées par une même exponentielle, si Ton augmente simultanément $;;i$ et 2 de a et de 26 , ou de 26 et de $2c$, Par ces divers changements, leurs logarithmes se reproduiront donc sans altération ou seront simplement accrus de fonctions linéaires de 1 , 2 « Les dérivées secondes aMo-e Mofçe i.

The text on this page is estimated to be only 22.92% accurate

DÉVELOPPEMENTS EX SÉRIE. 178 On pourra poser de l'même A, $1 = fli - r - r >$ cii étant un entier au moins égal à i , et A2 une quantité $> i$. Continuant ainsi, on obtiendra pour A un développement en fraction continue, tel que I Ce développement sera évidemment limité si A est commensurable, illimité dans le cas contraire. On nomme réduites de la fraction continue les fractions $p \gg \ll 0 p, 1 \ll ortiH-I - n \blacksquare u - i - 1 * 0 n - y a, ai Q^{\wedge} - ao + I \ll 1^{\wedge} 2 - H I 192$. Théorème. — On a généralement $1 * \ll \wedge = \wedge^{\wedge} \ll ' / i - i - H * rt - i \gg$ Cette formule est vérifiée pour $/i = 2$ par les valeurs cidessus de P2 et de $Q^{\wedge}$. Nous allons d'ailleurs montrer que si elle est vraie pour un nombre $/i$, elle le sera pour $n - i - i . p^{\wedge} . P$ En effet, $\sim -$ se déduit de $\wedge$ par le changement de $\ll$, en $an - \backslash$ On aura donc $\ddot{i} > (\wedge^{\wedge} * - * \sim r^{\wedge})^{\wedge} \ll - 1 - \wedge^{\wedge} \ll - - \ll a, _ , (a^{\wedge} P, _ , - f - P, _ , 8) - f - P, _ , - t _ \wedge _ , - m P, i 4 - P / , - i i : \ll + - i \ll rt - \gg - i (\ll / \gg Q / i - i - \wedge Q / \gg - i) - i - Q / i - i \ll / \gg + i Q \ll H - Q \gg - i$

174 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE III. On voit par les formules (i) que les quantités Q_i croissent au delà de toute limite quand n augmente. En effet, en étant au moins égal à i , on aura On déduit encore des formules (i) la relation $P_{n-i} \sim P_{n-i} Q_{n-i} = - (P_{n-i} Q_{n-i} - P_{n-i} Q_{n-i})$. et, comme $P_n \leq Q_n$ — $P_n Q_n \leq i$, on aura (2) $P_{n-i} Q_{n-i} - P_{n-i} Q_{n-i} = (-1)^{n-i}$. On voit par là que P_n et Q_n n'ont aucun diviseur commun. Les réduites sont donc des fractions irréductibles. On a enfin 3. $P_n P_{n-1} \leq P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n$. Les quantités j_n convergent vers A . En effet, si dans l'identité (3), qui peut s'écrire ainsi $P_n P_{n-1} - P_{n-1} P_n = 1$ on change a, i en a_n, i_n — t^{n-1} étant évidemment changé en A , il viendra (4) $A - \frac{1}{t^{n-1}}$. Les quantités Q_n croissant indéfiniment quand n augmente, cette différence décroîtra indéfiniment. D'ailleurs, i_n étant compris entre 0 et i , cette différence sera comprise entre les deux limites suivantes : et $Q_{n-1} Q_n - Q_{n-1} (Q_n - i_n)$.

The text on this page is estimated to be only 28.96% accurate

DÉVELOPPEMENTS EX SÉRIE. IjS p Changeant n en $n-i$, on trouvera de même que $A - \frac{1}{Q_n} \wedge$ est compris entre et Ces deux quantités sont de signe contraire aux précédentes et moindres en valeur absolue ; car on a $Q_n > Q_{n-1}$, $Q_{n-1} > Q_n + Q_{n-1}$, d'où $Q_{n-1} > Q_n - Q_{n-1}$ Donc A est compris entre deux réduites consécutives quelconques et plus rapproché de la dernière, P 194. Une réduite quelconque $\frac{1}{Q_n} \wedge$ est plus rapprochée p de A qu'une fraction quelconque $\frac{1}{Q_n}$ dont le dénominateur est moindre que Q_n . P Supposons, en effet, que $\frac{1}{Q_n}$ soit plus voisin de A que $\frac{1}{Q_{n-1}} > X \setminus : \ll P P P jT$ tombera nécessairement entre $t^{\frac{1}{Q_n} \wedge}$ et $-r$ • On aura donc "» • ou $TM' \wedge$ — $q:::q$ — J

The text on this page is estimated to be only 29.18% accurate

176 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE III. et rinégallté ne pourra avoir lieu que si $Q > Q$, contrairement à Tliypothèse faite. 190. Considérons maintenant une fonction A développabic en série suivant les puissances entières et décroissantes d\ine variable x . On pourra poser $A = a_0 - \frac{1}{4} - \frac{1}{H} + \dots$, $X x^a$ désignant un polynôme en x^a et $a_i, a^a, \dots$ des constantes. Posons «1 «• I $X x^a A$ Si $a^{^^}$ est le premier coefficient qui ne s'annule pas, A deviendra infini d'ordre $|j|$, avec x . En le développant suivant les puissances décroissantes de x , il viendra donc $X X^*$ (il étant un polynôme de degré $|j|$). Posons de même p, p . I on en déduira cii étant un polynôme en x du premier degré au moins. Continuant ainsi, on obtiendra un développement '■ CLq limité si A est une fraction rationnelle, illimité dans le cas contraire, $a^y a., \dots$ étant des polynômes dont les degrés

The text on this page is estimated to be only 26.87% accurate

DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE. I77 en Xy que nous désignerons par $[jL]$, $^y \cdot * \cdot ?$ sont au moins égaux à Puni lé. 196. Considérons les réduites $a^P, _ I a^a^ -h i Pj i - \text{---} y rT- \text{---} \hat{u}fo H \text{---} > 7^ =^ ^0 \blacksquare I a, -\backslash$ Les relations (i) subsisteront avec toutes leurs conséquences. On en déduit tout d'abord que le degré $v_{,,}$ du polynôme Q_i est égal à $1^1 - +- 1^2 -H \dots H- ix_{,,}$. La relation (a) montre ensuite que la fraction algébrique $j=^$ est irréductible. On voit enfin, par la relation (4), que la différence $p A \text{---} pr^{^} \text{---} \hat{i}$ est d'ordre $\text{---} v, |, \text{---} v_{,,}$ par rapport à x . Car $Q_{,,} i$ est d'ordre $>;, _ v_{,,} <$; donc l'ordre de $A \text{---} t^{^} \text{---}$ sera $V/\ll-i$ 197. Nous allons démontrer que, réciproquement, toute $P P$ fraction $-y$ telle que la différence $A \text{---} j^$ soit d'ordre $< \text{---} 2v$, V étant le degré du dénominateur Q , est nécessairement égale à l'une des réduites précédentes. En effet, considérons la série des nombres v

I-^S PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE III. On a, d'autre part, $A^{-1} = \frac{1}{V}$ d'où Or on a Donc le second membre de l'équation précédente sera d'ordre inférieur à $-(v + v_{-i})$. Donc il doit en être de même du premier. Mais le dénominateur $Q/f_i Q$ est d'ordre $v - v_{-i}$. Donc le numérateur doit être d'ordre ≥ 0 . $P = A P_{-i}$, k étant un polynôme d'ordre $v - v_{-i}$. On voit par là que P_{-i} sera irréductible que si $v = v_{-i}$, auquel cas le facteur k se réduit à une constante. 198. Proposons-nous de déterminer directement une fraction Y dont le dénominateur Q soit de degré v , et telle que l'on ait

DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE. On en déduit, en chassant le dénominateur, Il faut donc que, dans le produit AQ , les termes en x^j disparaissent. Soit, comme précédemment, $A(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ et posons $B(x) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j$. Le coefficient c_k du terme en x^k dans le produit AQ , sera évidemment donné par la formule $c_k = \sum_{j=0}^k a_j b_{k-j}$. Nous aurons à satisfaire aux conditions suivantes : (6) $c_0 = 1, \dots, c_{v-1} = 0$. Si le déterminant $\Delta = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_v \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{v+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{v-1} & a_v & \dots & a_{v+1} \end{vmatrix} \neq 0$, ces équations détermineront, sans ambiguïté, les rapports des inconnues b ; la fonction Q sera déterminée à un facteur constant près; on obtiendra la valeur correspondante de P en calculant la partie entière du produit AQ . 2° Si Δ est nul, les équations (6) ne détermineront pas complètement les rapports des coefficients b , et le polynôme Q contiendra plusieurs constantes arbitraires. Dans tous les cas, les constantes arbitraires disparaîtront

The text on this page is estimated to be only 24.87% accurate

180 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE III. —

DÉVELOPPEMENTS, ETC. p du rapport — > en vertu de la relation que nous avons trouvée plus haut. On voit par ce qui précède que la condition Av^0 exprime qu'il existe une réduite de degré v . Si donc tous les déterminants $A_{fy} A_a, \dots$ sont différents de zéro, ce qui aura lieu en général, les nombres $v, v^{\wedge}, \dots, v_{,,,} \dots$ formeront la série complète des nombres entiers, et, par suite, les degrés $j j l, (J^{\wedge} i) \dots * [J^{\wedge} / i j \dots$ des polynômes $a, \ll 2, \dots, < 7, \dots$ seront égaux à Tunilé.

MAXIMA ET MINIMA. 181 CHAPITRE IV. MAXIMA ET
 MINIMA. 199. Soit $y = f(x)$ une fonction de la variable réelle x , dont la
 dérivée soit continue de $x = a$ à $x = a + h$. On aura la formule $f(a+h) - f(a) =$
 $h f'(a + \theta h)$. Si h décroît indéfiniment en valeur absolue, $f'(a + \theta h)$
 tendra vers $f'(a)$, et finira par avoir le même signe que cette dernière quantité
 si elle diffère de zéro. La différence $f(a+h) - f(a)$ changera donc de signe
 avec h . Si $f'(a) > 0$, elle aura le même signe que h ; la fonction $f(x)$ croîtra
 donc en même temps que la variable dans les environs de la valeur $x = a$.
 Au contraire, si $f'(a) < 0$, elle aura le même signe que $-h$; la fonction $f(x)$

182 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE IV. μ ou minimum que pour les valeurs de la variable qui rendent $f(x)$ discontinue ou nulle. Pour trouver les maxima et minima de $f(x)$, on cherchera donc les valeurs de la variable qui rendent $f'(x)$ discontinue ou nulle. Soit a l'une de ces valeurs. Pour s'assurer si elle donne effectivement lieu à un maximum ou à un minimum, on calculera le terme principal de l'expression $f(a + h) - f(a) - f'(a)h$ car c'est évidemment de cette valeur principale que dépend le signe de l'expression tout entière pour les petites valeurs de h . Si ce terme principal reste constamment négatif quel que soit le signe de h , on aura un maximum; s'il reste toujours positif, on aura un minimum; s'il change de signe avec h , on n'aura ni maximum ni minimum.

201. Lorsque $f(a + h) - f(a) - f'(a)h$ est développable par la formule de Taylor, la question ne présente nulle difficulté. En effet, dans cette hypothèse, $f'(x)$ ne pouvant être discontinue pour $x \sim a$, sera nulle, et l'on aura, si $f''(a) \neq 0$, $f(a + h) - f(a) - f'(a)h \sim \frac{1}{2}f''(a)h^2 + R$. Le terme principal est $\frac{1}{2}f''(a)h^2$ toujours le signe de $f''(a)$, on aura un minimum si $f''(a) > 0$, un maximum si $f''(a) < 0$. Soit enfin $f''(a) = 0$. Supposons, pour plus de généralité, que $f''(a), \dots, f^{(n-1)}(a)$ s'annulent également, mais que $f^{(n)}(a)$ ne s'annule pas; on aura $f(a + h) - f(a) - f'(a)h = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + R$. Si n est impair, le terme principal change de signe avec h ; on n'aura ni maximum ni minimum. Si n est pair, il aura toujours le signe de $f^{(n)}(a)$; on aura un minimum si $f^{(n)}(a) > 0$, un maximum si $f^{(n)}(a) < 0$.

MAXIMA ET MIKHA. 183 sera dite maximum pour $x = a^y = ib^x$ si l'on peut déterminer une quantité s telle que Ton ait $f(a-h, b-hk) - f(a, b) < 0$ pour tous les systèmes de valeurs de h et de k , qui ne surpassent pas ϵ en valeur absolue. Si cette différence était constamment positive, $f(x, y)$ serait minimum. Tout système (a, b) de valeurs des variables qui rend $f(x, y)$ maximum ou minimum rend nulles ou discontinues les dérivées partielles. En effet, l'expression $f(a-h, b-hk) - f(a, b)$ doit avoir toujours le même signe pourvu que h et k soient $< \epsilon$; donc, en faisant en particulier $k = 0$ on voit que $f(a-h, b) - f(a, b)$ doit toujours avoir le même signe, ce qui suppose que la dérivée $\frac{\partial f}{\partial x}$ est nulle ou discontinue. La démonstration serait la même pour l'autre dérivée partielle. On aura donc à déterminer tout d'abord les systèmes de valeurs a, b de x et y , qui annulent ou rendent discontinues $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ puis à s'assurer s'ils donnent lieu à un maximum ou à un minimum. 203. Nous nous bornerons ici encore à discuter le cas où la formule de Taylor est applicable, au moins jusqu'aux termes du second ordre. Dans cette hypothèse, $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ ne pouvant être discon

184 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE IV. tinues po«r $x = a$, $y = b$ devront s'annuler, ce qui revient évidemment à dire que la différentielle totale s'annule identiquement pour $x := a$, $y := b$. Cela posé, et écrivant pour abréger $\frac{\partial f}{\partial x} = f_x$ on aura $f_x(a, b) = 0$ et $f_{xx}(a, b) = 0$. R, R étant un infiniment petit d'ordre supérieur au second, et qui sera négligeable par rapport à ceux du second ordre, à moins que h et k ne soient choisis de manière à annuler ces derniers. Supposons d'abord $A > 0$. Les termes du second ordre pourront s'écrire ainsi Si $AC - B^2 > 0$, le facteur entre parenthèses étant positif, l'expression aura le signe de A ; il y aura donc maximum si $A > 0$. Si $AC - B^2 = 0$, les termes du second ordre ne changeront jamais de signe, mais ils s'annulent lorsque $A = 0$; et, pour savoir dans ce cas quel signe aura l'expression, il faudra discuter le terme R auquel elle se réduit. Soit enfin $A = 0$. $AC - B^2$ sera < 0 ou $= 0$, suivant qu'on aura $B > 0$ ou $B = 0$. Dans le premier cas, il n'y aura ni maxi

MAXIMÀ ET MINIMA. 1 85 mum ni minimum ; car les termes
 du second degré auront à volonté le signe de k ou le signe contraire, suivant
 Ck qu'on prendra h plus grand ou plus petit que jtt* Dans le second cas, les
 termes du second degré s'annulant pour k = o, il y aura doute. Les résultats
 de celte discussion peuvent donc se résumer ainsi : Si $AC - B^2 > 0$, $A > 0$,
 minimum; $AC - B^2 > 0$, $A < 0$: o="" maximum="" ag="" b="" incertitude=""
 les="" r="" qui="" pr="" s="" sans="" difficult="" la="" recherche=""
 des="" raaxima="" et="" minima="" fonctions="" implicites="" car=""
 il="" suffit="" pour="" cet="" objet="" de="" d="" successives=""
 partielles="" y="" a="" plusieurs="" variables="" fonction="" implicite=""
 au="" moyen="" ont="" donn="" plus="" haut="" ma="" relatifs=""
 soient="" trouver="" maxima="" z="" m="" li="" par="" deux=""
 relations="" t="" imaginons="" qu="" ait="" tir="" ces="" valeurs="" u=""
 en="" x="" substituer="" dans="" viendra="" f="" ou="" minimum=""
 faudra="" que="" nulles="" discontinues="" dy=""/>

The text on this page is estimated to be only 27.12% accurate

186 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE IV. Bornons-nous encore au cas où l'on aura $-r = 0$, $- = 0$, ou plus simplement $r = 0$. On a (3) $d^2z = dx^2 - dy^2 - dz^2 - du = 0$, $dx dy - dz du$ et cette équation devra être identiquement satisfaite pour toute valeur de dx et de dy après qu'on y aura remplacé dj s et du par leurs valeurs tirées des équations (4) $-dx - dv - dz - du = 0$, $dx dy - dz du$ (j) $dx - dz - dv - dz = -r = 0$, $dx dy - dz du$ qu'on obtient en différentiant les équations $\zeta = 0$,

maxima et minima. 187 Les équations (6) et (7), jointes aux équations (1) et (p.), détermineront les six quantités $T, r, -3, 1/X, |j|$. On remarquera que les équations (6) et (7) s'obtiendraient immédiatement en égalant à zéro les dérivées partielles de la fonction $\hat{206}$. Soit à déterminer la plus grande (ou la plus petite) valeur que prend la fonction $f(r)$ lorsque x varie de X_q à X_i » Cette valeur peut correspondre à Tune des limites ou à un point intermédiaire a . Dans ce dernier cas, il est clair que $f(a)$ sera un maximum (un minimum) de la fonction $f(x)$. Pour résoudre la question, il faudra donc calculer les maxima (ou minima) $f(a), f(b), \dots$ de la fonction dans l'intervalle de X_q à X_i , ainsi que ses valeurs extrêmes $f(X_q), f(X_i)$, et prendre la plus grande (ou la plus petite) de ces quantités. On agirait d'une manière analogue pour déterminer la plus grande ou la plus petite valeur d'une fonction de plusieurs quantités lorsque le champ de leurs variations est assujéti à certaines limitations. 207. Appliquons les méthodes précédentes à quelques problèmes. Problème I. — Trouver la plus courte distance d'un point P à une droite D . Soient a, a^x, a^y les coordonnées du point; a, a_i, a^x celle d'un point fixe pris arbitrairement sur la droite; b, b^x, b^y ses cosinus directeurs, c'est-à-dire les cosinus des angles qu'elle fait avec les axes. Les coordonnées x^y, z d'un point situé sur la droite à la distance r du point a , a_i, a^x seront évidemment $X = a - b^x r, y = a^y + b^y r, z = G_i - b^z r$ et sa distance ρ au point P sera donnée par la formule $\rho^2 = (a - b^x r - a_i)^2 + (a^y + b^y r - a^y)^2 + (G_i - b^z r - L^z)^2$

The text on this page is estimated to be only 22.06% accurate

188 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE IV. Il s'agit de déterminer la distance variable t , de telle sorte que cette expression soit minimum. Elle a pour dérivée $Y^{\text{ib}}\{a\}-bt - a$, quantité toujours continue. Il faudra donc égaler cette dérivée à zéro, ce qui donnera d'où $\sim \pm b'$ ' Substituons cette valeur dans l'expression o« — $f(a - hbt - a)^* = 2:(a - a)$ » $-\wedge 2tl, b(a - a) - \wedge t^{\wedge}Zb \backslash$ il viendra $n - i^{\wedge} \ll a; a^{\wedge \wedge \wedge} - + - \wedge \wedge \wedge _ \text{lia} - 0L)^* \text{IfA} - [lfj(n^{\wedge} 0L)y _ f(\wedge - a)^{\wedge}, - (/7, - a,)/;]^* - ! - [i/i, - a,)/\wedge j - f/72 - xj)/;i]^* h - [(<7j - x,^A - (n - 2)]hiY \text{Il } 4_ \wedge j _ \wedge . 01$ Cette expression représente bien un minimum, car la dérivée seconde ! est positive. $ciC^{\wedge} = '\wedge "$

Problème II. — Trouver la plus courte distance de deux droites. Soient (8) $jc \sim - a \sim hbt, y = 1$ ai $- h \text{ bit}, z^{\wedge} za^{\wedge} hbit$ les coordonnées d'un point de la première droite, (9) $? = a - h?T, T. \sim a, - + - ?, \bullet :, C = a, - f - ?jt$ celles d'un point de la seconde droite.

The text on this page is estimated to be only 20.73% accurate

HAXIXA ET MINIJIA. 189 La distance 8 de ces points sera donnée par la formule -f- ($\langle j - a, 4 - \sqrt{2} \sqrt{?jT} \rangle$)*. Il s'agit de déterminer les variables / et t de telle sorte que cette expression soit minimum. Les dérivées partielles de cette expression par rapport à t et à T sont toujours continues. En les égalant à zéro, on aura les deux équations de condition - - $\sqrt{a - oL - h be - l^z} - h \sqrt{\langle 1 - a, - h bit - pj - c \rangle - hbii af - a^h - bil - Pjt} = 0$, -f- $!5j(a\hat{i} - a, 4 - 6, \sqrt{p, - :}) - o$. Eliminant successivement entre ces équations chacune des quantités entre parenthèses, et posant, pour abréger, $\sqrt{t} \sim \sqrt{P_i} \dots \sqrt{\hat{i}} \dots \sqrt{?} \dots A,, 6?, -6, ?^A,,$ on en déduit $a - ft - h bt - pT$ $a, - a, - h \sqrt{, \sqrt{Q, t a^{\sim} fx.n \sim \backslash - b^t - 9 \ll / \hat{A} \sim \hat{a}; "" a;;$ Soit X la valeur commune de ces rapports; on aura, pour déterminer t^t et \ les trois équations linéaires $AX - h pT - 6^{\wedge} = z a - a, AjX - h piT - bit - ai - ny,$ $A, X - h pjT - 6, / - \langle j - aj, d'o\grave{u} \text{ Ton déduit , } _ L M] \backslash X _ -, T _ - jj, izzzg,$

The text on this page is estimated to be only 20.50% accurate

igO PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE IY. L, M, N, D
désignant les déterminants suivants : $M: N: =: A(a - c:) + A, («, " - a,) - hA_j(a,$
 $— at_j).$ $a - a ? 6 z = a, - a, P. - *.$ $\ll I = 4 P, - / - 'i A a - \ll - 6 — A. \ll 1 - a, - 6, A. a, -$
 $\ll j - * f A ? a — a = A, ?. a, — a, A, P. a, — a. A ? — 6 := A. P. - 6, A. P. - 6,$
En fin, l'on a $A ? A \setminus. 8 = v / A' X' - i - A \hat{X}' - i - A J X \gg = — ^ \grave{a} / A * L s / A \langle \rangle + - A; - f -$
Aî Il est évident, d'après la nature du problème, que cette valeur de $0^{\wedge}$ est
un minimum. Pour le vérifier, formons les. dérivées secondes $\ddot{y}^{\wedge \wedge * 7 2 I. \ddot{I}}$
 $!, \ll I dn^{\wedge 2} dt \& z = ---^{\wedge ? - ^ pl - ^ ? \hat{I}},$ La quantité représentée dans la théorie
générale par $AC — B^{\wedge}$ est égale à $z = 4(A^{* \wedge A} \} + A^*)$. Elle est positive. Donc,
il y a bien maximum ou minimum.

The text on this page is estimated to be only 19.73% accurate

The text on this page is estimated to be only 16.96% accurate

ig[^] PREXIÈBE PARTIE. — CHAPITRE IV. et Ton aura encore .
 L M ^ N . ±L ly l> D ^ v[^]-hAî-hAJ Nous ferons un fréquent emploi de ces
 formules. 210. Problème III. — Trouver la plus courte distance d'Un point à
 un plan. Soient a, b, c les coordonnées du point, et (lo) mjc -h ny ^pz -[^]q
 z[^]o IY*quation du plan. Nous aurons à rendre minimum l'expression u[^] —
 {x — ay -T- {[^]Y-- by -+-(?: — c)«, où x, V, z sont liés par l'équation
 précédente. D'après la règle générale donnée pour la recherche des minima
 relatifs, nous aurons à égaler à zéro les dérivées partielles de l'expression {x
 — a)* -h (r— [^])*-f- (-S — c)*H- X(/ijr-h nv -[^] pz -h[^]), ce qui donnera les
 équations i{x — a) -\ - \m —. o, 2(j — b) -h X/i ~o, 2(5 — c) -h X/> — o.
 auxquelles on joindra la suivante : o = /n[^]--h ny -h pz-[^]ç — m{x — a) -h-
 n{Y — b) ^p{z — c) -h /;/CT 4- nb-r- pc -h g. On en déduit X -- a—. —
 JX/?!, r — b — — JX/j, -c — c=[^] — 7X/? , :X[^] , ^ wa -4- nb -J- pc -\ - q M /
 , s ., . , , ,. { ma -h nh -i- pc -4- 7 ")' 0*.zi(iX)*(77l»4-«'-h/>-) = 5 ~ [^]-[^]—'
 i/i'-hn[^]-[^]p*

The text on this page is estimated to be only 22.30% accurate

MàXIXA et MIMXA. IQ) Pour vérifier que celle expression
représente bien un minimum, cherchons les dérivées secondes de 8^*
considéré comme fonctions des variables indépendantes x^y et d'une
fonction z de ces variables, définie par l'équation (10). On aura
successivement $do^*, \dots, dz, \dots, 2m$. $z^2(a - a) - h^2(z - c) - \dots = \{2x$
 $- a)(z - c), dJc^{\wedge} \hat{a}.$ $P^2 m \hat{a} z p dx = 242 m' a \gg 5 \gg \dots dz 2mn \hat{U}Ji: dr$
 p' On trouvera de même $= 2-12/1^*$ Les expressions désignées dans la
théorie générale par $AC - B^{\wedge}$ et A seront ici et $2 m^* 2H r$. Toutes deux
étant positives, on aura un minimum. 2H. Problème IV. — Trouver les
maxima et minima f de la fraction $- >$ et $? = \ll 11^{\wedge} -+- \ll M J^* -+- \ll 38^* -H$
 $2a|, a'7 4- 2a,, j < 3 -h 2a,, 5J7 \acute{e}/\langle n/ t/$

The text on this page is estimated to be only 25.96% accurate

194 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE IV. des variables x, y, z , il est permis de supposer leurs valeurs absolues choisies de telle sorte qu'on ait $cp = i$. On aura donc à trouver les maxima et minima de f , étant donnée l'équation de condition $O - 1 = 0$. On devra, comme on sait, déterminer x, y, z par les équations, $\frac{df}{dx} = 0, \frac{df}{dy} = 0, \frac{df}{dz} = 0$ (il) $\frac{d^2f}{dx^2} = 0, \frac{d^2f}{dy^2} = 0, \frac{d^2f}{dz^2} = 0$, en effectuant les calculs, $(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z)^2 = 0, (a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z)^2 = 0, (a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z)^2 = 0$, $(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z)(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z) = 0, (a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z)(a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z) = 0, (a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z)(a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z) = 0$. Or l'équation $\frac{df}{dx} = 0$ montre que x^2, y^2, z^2 ne peuvent être nuls à la fois. Donc le déterminant des équations (12) doit être nul, ce qui donnera une équation du troisième degré en X . Soit X une des racines de cette équation; en la substituant dans les équations (1a), elles se réduiront à deux équations distinctes, qui fourniront les rapports de x^2, y^2, z^2 . L'équation $0 = I$ achèvera de déterminer ces quantités. La valeur correspondante de f sera $-X$. En effet, f et 0 étant des fonctions homogènes du second degré, l'on aura $\frac{df}{dx} = \frac{df}{dy} = \frac{df}{dz} = 0$. Les équations (11), respectivement multipliées par x^2, y^2, z^2 et ajoutées ensemble, donneront donc $f - 2X = 0$, d'où $-X = f$.

maxima et minima. 195 Avant d'aller plus loin, nous
 remarquerons que la fonction ϕ peut se mettre sous la forme $\phi(x) = \frac{1}{2}(\phi(x) + \phi(x))$
 $\phi(x) = \frac{1}{2}(\phi(x) + \phi(x))$, \ «Il $\phi(x) = \frac{1}{2}(\phi(x) + \phi(x))$, étant une fonction de 5, telle que $\phi(x) = \frac{1}{2}(\phi(x) + \phi(x))$
 $\phi(x) = \frac{1}{2}(\phi(x) + \phi(x))$ On pourra de même mettre $\phi(x)$ sous la forme $\phi(x) = \frac{1}{2}(\phi(x) + \phi(x))$ La fonction
 $\phi(x)$ sera ainsi décomposée en une somme de trois carrés, respectivement
 multipliés par a, p, y . Nous supposons, dans ce qui va suivre, que ces
 trois coefficients sont positifs. Il est clair que cette condition est nécessaire
 et suffisante pour que y prenne une valeur positive et différente de zéro pour
 tout système de valeurs de X, y, z autre que $0, 0, 0$. Cette condition étant
 remplie, les valeurs de x, y, z pour lesquelles on a $\phi(x) = 1$ auront
 nécessairement un module limité car il faudra que chacun des trois termes
 positifs dont $\phi(x)$ se compose, pris isolément, soit

The text on this page is estimated to be only 29.00% accurate

igG PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE IV. / et ζp deviendront des fonctions des nouvelles coordonnées, homogènes et du second degré, comme auparavant. La transformation une fois effectuée, appelons x, y, z nos nouvelles variables primitivement désignées par $\zeta, t, \hat{I}$. Appelons également $a_1, \dots, a_n, \dots$ les coefficients des fonctions/ et ζp rapportés à ces nouvelles variables; - sera maximum et ζ égal à l'unité pour $x = y = z = 0$, $\zeta = 1$. On aura, par suite, $a_i = 0$, et les équations (12) étant satisfaites pour le maximum, on aura, d'autre part, (i3) «11 -h X, l=0, $a_{ij} - HX_{ia} = 0$, «1, -1 - X, $a_i = 0$. Posant maintenant, pour abréger, $X \sim \hat{-i} - a, j$ 4- $Q_{t,5}$, on aura $\zeta = X^4 - \hat{-i} - Q$ on aura $Y = Z$, $\zeta = -X, Z'$, et, par suite, (•4) ($= X \ll + Y \ll + Z \gg, i/\hat{-} - _.$, $X \gg - X, Y \gg - X, Z \ll$,

maxima et minima. 197 d'où ce théorème : Étant donné un système de deux fonctions quadratiques f et ϕ dont l'une est toujours positive, on pourra, par un changement de variables réel, en faire disparaître les rectangles des variables. Les deux fonctions étant ainsi préparées, l'équation en x deviendra $0 = -X^2 + HX - fX = -X^3 + (H-f)X = -X(X^2 - (H-f)X)$. Cette équation a pour racines les trois quantités réelles $0, \frac{H-f}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{H-f}{2}\right)^2 - f}$. Donc, l'équation en x a toujours ses racines réelles. On voit immédiatement sur les équations (i4) que la plus grande de ces racines rendra minimum; la plus petite le rendra maximum, la troisième ne donnera ni maximum ni minimum.

19^ PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE V. CHAPITRE Y.
 APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA SÉRIE DE TAYLOR. L —
 Points ordinaires et points singuliers. 212. Courbes planes. — Une courbe
 plane est généralement représentée par une équation $F(x,y)=0$ entre ses
 coordonnées. Le premier membre de cette équation peut d'ailleurs se mettre
 sous une infinité de formes différentes équivalentes entre elles. Ainsi, par
 exemple, les équations $x^2+y^2-r^2=0$, $x^2+y^2=R^2$ représentent évidemment le
 même cercle. Soient P un point de la courbe, x, y ses coordonnées. Nous
 disons que P est un point ordinaire, si Ton peut mettre le premier membre
 de l'équation de la courbe sous une forme telle : i° que ses dérivées
 partielles successives $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$?

The text on this page is estimated to be only 27.49% accurate

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA SÉRIE DE
TAYLOR. I99 a** que — cl — ne s'y annulent pas simultanément. Dans le cas contraire, P sera un point singulier. Cette distinction est indépendante du choix des axes coordonnés. Soient, en effet, X_i, y^i les coordonnées relatives à un nouveau système d'axes. Elles sont liées k $x^i y^j$ par des équations de la forme $x^i = z a_{ij} x^j - b y^i - h a$, et l'équation de la courbe rapportée aux nouveaux axes sera $G = F(a_j, -I - 6/, M - a, a, x_i 4 - 6, 7i 4 - a_i) = 1 F_i(x_j, j_i, ^$. Prenons les dérivées partielles successives de cette équation par rapport à x^i, y^j ; il viendra $dx^i \hat{a} x^j \hat{a} y^k \hat{a} y^l \hat{a} y^m \hat{a} y^n \hat{a} y^o \hat{a} y^p$ Les dérivées partielles $\sim j - r - * j - t - t^{\cdot \cdot \cdot}$ » étant ainsi exoxi oy\ ôx . primées en fonction linéaire des dérivées ;f-.' 3-' \r-i ' \cdot \cdot \cdot > auront, en même temps que ces dernières, des valeurs finies et déterminées. . $\hat{o}F dF$ Enfin, si $-\hat{a}$ et $\hat{a}$ s'annulent à la fois, il en sera de même ox ôy dF, $\hat{a} \hat{o}F$, pour $3-\hat{a}$ et $-T-\cdot \hat{a}$ àxi dy, 213. Soit P un point de la courbe dont les coordonnées x, (JF dF ($\hat{a}^*F V$ soient telles, que $\hat{a}-) \hat{a}r-' \hat{i}-\hat{a}' \cdot \cdot *$ aient des valeurs finies ' $\hat{a} \hat{a} \hat{a} \hat{a} x \hat{a} y \hat{a} x \hat{a}$ et déterminées, et soit (X, Y) un point variable de la courbe, infiniment voisin du premier. On aura o $z = F(X, Y) = F(a: -h X - ^, r 4- Y - y)$.

aOO PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE V. Le second membre de cette équation sera développable par la série de Taylor, suivant les puissances des accroissements $X - x$ et $Y - y$ en effet, chacune des dérivées $\frac{\partial^n F}{\partial x^n \partial y^m}$ sera continue au point r , puisque ses dérivées partielles y sont données et déterminées. L'équation précédente pourra donc s'écrire ainsi $F(x, y) = F(x_0, y_0) + \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + R$, R étant du second ordre en $X - x$ et $Y - y$. Or, étant sur la courbe, on a $F(x, y) = 0$. D'autre part, si P est un point ordinaire, les termes du premier ordre ne s'annulent pas identiquement, et R pourra être négligé dans une première approximation. L'équation (i) se réduira donc à $\frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt} = 0$ équation d'une droite, qu'on nomme la tangente au point (x_0, y_0) , et avec laquelle la courbe se confondra sensiblement aux environs de ce point. 214. Supposons au contraire que P soit un point singulier. On aura $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = 0$, et l'équation (i) se réduira à $0 = R = \frac{1}{2}[A(X - x_0)^2 + 2B(X - x_0)(Y - y_0) + C(Y - y_0)^2] + R'$, A, B, C désignant les dérivées secondes $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ et R' un infiniment petit du troisième ordre. Si A, B, C ne s'annulent pas à la fois, R pourra être négligé dans une première approximation, et l'équation précédente se réduira à un système de deux droites qui se coupent en P . La courbe aura donc deux branches qui se croisent au point P et se confondent sensiblement avec les droites précédentes aux environs de ce point. On dira dans ce cas

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA SÉRIE DE

TATLOR. 201 que P est un point double y où la courbe a ces deux droites pour tangentes. Si $B^2 - 4AC > 0$, ces tangentes seront réelles. Si $B^2 - 4AC < 0$, elles seront imaginaires ; le point P sera donc un point isolé, aux environs duquel la courbe n'a aucun point réel. Enfin, si $B^2 - 4AC = 0$, ces deux tangentes se confondent, et l'on dira que P est un point de rebroussement. 215. Supposons, en dernier lieu, que A, B, G s'annulent à la fois, et admettons, pour plus de généralité, qu'il en soit de même des dérivées d'ordre 3, . . . , $\frac{1}{i} - i$, mais que l'une au moins des dérivées d'ordre n soit $\neq 0$. L'équation (i) se réduira à $i.2.../i L n$. Si on le néglige, l'équation représentera un système de n droites. La courbe aura donc n branches distinctes se croisant en P et se confondant sensiblement avec ces droites. On dira dans ce cas que P est un point multiple d'ordre n où la courbe a pour tangentes les n droites ci-dessus. Ces tangentes peuvent être réelles ou imaginaires. Si plusieurs d'entre elles venaient à se confondre, cette particularité importante devrait être soigneusement notée, parmi les caractères du point singulier considéré. 216. Il resterait à considérer les points singuliers pour lesquels l'une des dérivées $-r \frac{dy}{dx} > -r \frac{dy}{dx} > -r \frac{dy}{dx} i? \dots$ serait nulle ou $\frac{dy}{dx}$ indéterminée, quelque forme qu'on donnât à l'équation de la courbe; mais leur étude est moins intéressante, et nous ne nous y arrêterons pas. 217. Une courbe plane est fréquemment définie par un

The text on this page is estimated to be only 27.15% accurate

20> riEaitBC PABTIIt. — «.BAPITmE T. >\'^lème de deux équations entre x , y et une variable auxiliaire z . En éliminant cette variable, on obtiendrait une équation unique $F(x, y, z) = 0$ mais cette opération est rarement avantageuse. Une même courbe peut d'ailleurs être représentée d'une infinité de manières par un système d'équations de la forme $(^2)$. En effet, posons $z = \phi(t)$ désignant une nouvelle variable et ϕ une fonction quelconque il viendra Théorème. — Le point P qui a pour coordonnées x, y sera un point ordinaire, si les dérivées successives $x', x'', \dots, y', y'', \dots$ de X, Y par rapport à la variable indépendante t ont en ce point des valeurs finies et déterminées, et si x', y' ne s'annulent pas à la fois. Réciproquement, si P est un point ordinaire, la variable indépendante t pourra être choisie de telle sorte que les conditions précédentes soient satisfaites. 1° Supposons en effet que $x', x'', \dots, y', y'', \dots$ aient des valeurs finies et déterminées, et que x', y' , par exemple, soient $\neq 0$. Substituons dans la seconde des équations (a) la valeur de t tirée de la première ; on obtiendra l'équation de la courbe sous la forme ou $y' - f(x) = 0$. Désignons par $F(x, y)$ le premier membre de cette der

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA SÉRIE DE
 TAYLOR. Soit dF/dx n-ème équation. Il suffit de montrer que $\frac{d^n F}{dx^n} > -p > -r - j$, $\dots dF/dx$ ont des valeurs finies et déterminées, et que $-r - ? - ^r -$ ne sont $\wedge$ UJO ou pas nuls tous les deux. Ce second point est évident, car $\frac{d^n F}{dx^n} = i$.
 Pour établir le premier, nous remarquerons que les dérivées $\frac{d^n F}{dx^n} = -y - ^r - i > \dots$ se réduisent toutes soit à i , soit à 0 , soit aux dérivées $f(x) = \frac{d^n F}{dx^n} = \frac{d^n F}{dx^n} - \frac{d^n F}{dx^n} \dots$. Mais nous avons vu, dans la théorie du changement de la variable indépendante, que $x' \wedge x'' \dots, y', y'' \dots$ et $y - i - j \sim > \dots$ sont liées par les relations $\frac{d^n F}{dx^n} dx$. Ces équations, résolues par rapport à $j - j \wedge \frac{d^n F}{dx^n}$, $\dots >$ donneront ces quantités sous forme de fractions, ayant pour dénominateur des puissances de x' y quantité différente de zéro. Toutes ces expressions seront donc finies et déterminées. 2° Réciproquement, soit (x, y) un point ordinaire de la courbe $F(x, y) = 0$. $\dots dF/dx$ Par définition, $-r - ^r - y \sim \wedge \sim i' \bullet$ auront en ce point des $(jX) (jY) \setminus jX$ valeurs finies et déterminées; et de plus, l'une des dérivées premières $-r - ^r - y > -r - ^r - y >$ par exemple $-r - ^r - y$ sera différente de zéro. Cela posé, les dérivées successives $\sim > -r - ^r - \dots$ seront

The text on this page is estimated to be only 29.84% accurate

204 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE V. fournies par les équations $\frac{dF}{dx} = \frac{dF}{dy} \frac{dy}{dx}$ sous forme de fractions n'ayant en dénominateur que des puissances de x ; — Toutes ces expressions auront donc des valeurs finies et déterminées. Prenons x pour variable indépendante. On aura $\frac{dF}{dx} = \frac{dF}{dy} \frac{dy}{dx}$, D'autre part, $y = \frac{dF}{dx}$, $\frac{dF}{dy} = \frac{dF}{dx} \frac{dx}{dy}$, ont des valeurs finies et déterminées. Toutes les conditions du théorème seront donc remplies. 218. Surfaces, — Une surface peut être représentée par une équation Un point (x, y, z) de la surface sera ordinaire si le premier membre de l'équation de la surface peut être mis sous une forme telle : 1° que les dérivées partielles $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ aient des valeurs finies et déterminées; 2° que $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ ne s'y annulent pas simultanément. Dans le cas contraire, (x, y, z) est un point singulier. On verra, comme au n° 212, que cette distinction est indépendante du choix des axes. 219. Bornons-nous, comme tout à l'heure, à l'étude des points de la surface pour lesquels toutes les dérivées partielles $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ ont des valeurs finies et déterminées; soit (x, y, z) un de ces points et soit (X, Y, Z) un point variable

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA SÉRIE DE
 TAYLOR. 20-7 de la W)upt(>» infiniment voisin du précédent. On aura [o
 -■--= F(X, Y, Z) ----. F(a: 4- X - ^, 7 -4- Y - r, z-\-Z-^z) I rr.F(x,r,5)-f--^(\-
 x)-h^(Y-j)-+-^-(Z-^)-+-H, R étant du second ordre en X — x, Y — y y Z —
 z. Or on a F(a:, r, z) = o. D'autre part, si (^, r, ^) est un point ordinaire, les
 termes du premier degré ne s'annulant pas identiquement, R pourra être
 négligé dans une première approximation. Il viendra alors ^)F,^ ^ âF .^ ^ âF
 ^,, 5:^(X--4-^(Y-j) + -^-(Z-.)=o, équation d'un plan tangent avec lequel la
 surface se confondra sensiblement aux environs du point (^, r, z), 220. Si
 {oc, y, z) est un point singulier, on aura ^ _ ^F _ ^ _ dx ~' dv dz ' et le
 second membre de l'équation (3) se réduira à KA(X-j?)'--+-A,(Y-jr4-A,(Z-
 ^)«+2B(Y-r)(Z-^)-f-...] + R,, d^F d^F A, Ao ... étant les dérivées -r—^y ^-^
 > •• et R, étant du troisième ordre. I** Si A, Aï, A2, B, ... ne s'annulent pas à
 la fois, on pourra négliger R| , et l'équation représentera un cône du second
 degré, ayant son sommet au point (^, jK, z), et avec lequel la surface se
 confondra sensiblement aux environs de ce point. Dans certains cas, ce cône
 pourra dégénérer en un système de deux plans ou en un plan double. a°
 Supposons enfin que les dérivées secondes s'annulent toutes, ainsi que les
 dérivées d'ordre 3. ..., n — i, mais qu'une au moins des dérivées d'ordre n
 soit différente de zéro. En ne conservant dans l'expression de R que les
 termes

306 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE T. (l'ordre i , on obtiendra réqualion d'un cône d'ordre i , tangent à la surface au point $\{x, y, z\}$. Si Ton coupe ce cône par un plan arbitraire, on obtiendra une courbe algébrique d'ordre i . Dans certains cas particuliers, cette courbe pourra présenter des points multiples, ou se décomposer en courbes d'ordre inférieur à n . Toutes ces circonstances devront être notées, comme essentielles à la définition du point considéré. 221. Une surface peut présenter, non seulement des points singuliers isolés, mais des lignes singulières dont tous les points soient singuliers. Considérons par exemple un cône ayant pour base une courbe présentant un point double. La génératrice correspondante sera évidemment une génératrice double, en chaque point de laquelle on aura deux plans tangents correspondant aux deux nappes du cône qui se croisent suivant la génératrice. 222. On représente souvent une surface par un système de trois équations (4) $Jr^{\wedge} \{tyu\}, y^{\wedge} \{t, u\}, x; — \odot, (/ , a)$ entre $x, y^{\wedge} z$ et deux variables indépendantes $t^{\wedge} u$. L'élimination de ces variables auxiliaires donnerait l'équation de la surface sous la forme ordinaire La forme des équations (4) pourra d'ailleurs être variée à l'infini en remplaçant t, u par deux autres variables indépendantes quelconques. Théorème. — Le point P qui a pour coordonnées $x^{\wedge} j \setminus z^{\wedge} ty u$ sera un point ordinaire, si les dérivées partielles $\frac{dx}{du}, \frac{dy}{du}, \frac{dz}{du}$ cessives- $^{\wedge}$, $\sim$, $^{\wedge}$, $\dots$, $—$, $\dots$ $\cdot$ -, $\dots$ par rapport à t et u ont en ce point des valeurs i nies et déterminées, et si

The text on this page is estimated to be only 25.31% accurate

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA SÉRIE DE
TAYLOR. 207 de plus les trois déterminants $\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial t}$, $\frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}$ ne s'annulent pas à la fois. Réciproquement si P est un point ordinaire, les variables indépendantes pourront être choisies de telle sorte que les conditions précédentes soient satisfaites, I** Supposons en effet que ces conditions soient satisfaites au point $(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0, t_0)$ et qu'on ait, par exemple, $\frac{\partial x}{\partial u} = 0$. Substituons dans la troisième des équations (4) les valeurs de t, u tirées des deux premières; on obtiendra l'équation de la surface sous la forme ou $z - f(x, y) = 0 = Y(x, y, z)$. Il faut montrer : i° que $\frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial u} \neq 0$ à V d'où il faut montrer : i° que $\frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial u} \neq 0$ sont limites $\frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial u} \neq 0$ et $\frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial u} \neq 0$ ne s'annulent pas à la fois. Pour établir le premier point, on remarquera que les dérivées $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial t}$, ..., se réduisent toutes soit à 1, soit j, ..., df dz df dz a o, soit aux dérivées $\frac{\partial x}{\partial v} = 0, \frac{\partial y}{\partial t} = 0, \frac{\partial z}{\partial u} = 0$, dx dy Mais ces dérivées partielles sont fournies par les équations dz dt 'dz " dx dx Tt dz dt' dz du dz dx ~ dx du dz dy d7i'

1208 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE V. SOUS forme de
 (ractions n'ayant en dénominateur que des puissances du déterminant D , qui
 n'est pas nul; elles auront donc des valeurs finies et déterminées. • a**
 Réciproquement, soit $(j^{\wedge}, v, z)$ un point ordinaire de la courbe $I^{\wedge}C^{\wedge} \gg V, -)$
 ~o Les dérivées partielles successives de F auront par définition des valeurs
 finies et déterminées ; de plus, Tune au moins des dérivées premières, par
 exemple $-r^{\wedge} > sera^o$. Cela posé, $- \text{---} > \text{---} y \text{---} \text{---}^{\wedge} \bullet \bullet$ seront données par
 les équations $\hat{O}F \frac{dFdz}{dx dz} \text{ à } x'$

The text on this page is estimated to be only 28.00% accurate

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA SÉRIE DE
TAYLOR. 209 représentée par deux équations $F(x, y, z) = 0, \phi(x, y, z) = 0$.
Un point (x, y, z) de cette courbe sera dit ordinaire si les équations de la
courbe peuvent être mises sous une forme $\phi = 0$ telle, que les dérivées partielles
aient en ce point des valeurs finies et déterminées et que l'un au moins des
déterminants $A = \begin{vmatrix} \frac{dF}{dx} & \frac{dF}{dy} & \frac{dF}{dz} \\ \frac{d\phi}{dx} & \frac{d\phi}{dy} & \frac{d\phi}{dz} \end{vmatrix}, A' = \begin{vmatrix} \frac{dF}{dx} & \frac{d\phi}{dy} & \frac{d\phi}{dz} \\ \frac{d\phi}{dx} & \frac{dF}{dy} & \frac{dF}{dz} \end{vmatrix}, A'' = \begin{vmatrix} \frac{d\phi}{dx} & \frac{dF}{dy} & \frac{dF}{dz} \\ \frac{dF}{dx} & \frac{d\phi}{dy} & \frac{dF}{dz} \end{vmatrix}$ soit différent de zéro. Dans le cas contraire,
 (x, y, z) sera un point singulier, S.A. Cette distinction ne dépend pas du
choix des axes coordonnés. Supposons en effet qu'on les change. Les
nouvelles coordonnées x', y', z' seront liées aux anciennes par des
équations de la forme $x' = ax + by + cz + \dots, y' = a'x + b'y + c'y + \dots, z' = a''x + b''y + c''z + \dots$. Soit $F(x, y, z) = 0, \phi(x, y, z) = 0$ ce que deviennent les
équations de la courbe par cette substitution. Les identités $F(x', y', z') = 0, \phi(x', y', z') = 0$
v., 5.) = $F(jr, r, ;, ;), J.$ — Cours, I. i4

The text on this page is estimated to be only 20.90% accurate

210 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE V. étant dérivées par rapport aux nouvelles variables donneront $dF, \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ etc. Les nouvelles dérivées partielles s'exprimant ainsi en fonction linéaire des anciennes seront finies et déterminées en même temps que ces dernières. D'autre part, on déduit des équations précédentes $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = (ab - ba) \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) \frac{\partial x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z}$ et deux autres équations analogues pour $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z}$. Ces trois déterminants s'annuleront donc si A, A_1, A_2 s'annulent. • • • aient des valeurs unies $\frac{\partial x}{\partial y}, \frac{\partial x}{\partial z}$ et déterminées; et soit (X, Y, Z) un point variable de la surface

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA SÉRIE DE

TAYLOR. 211 courbe, infiniment voisin du premier. On aura $o = F(X, Y, Z)$
 $z = F(\frac{-h}{4} X + \frac{j}{4} T, \frac{7}{4} Y - \frac{1}{4} x; \frac{-h}{4} Z - \frac{1}{4} \wedge)$, $o = F(X, Y, Z) = \frac{4}{5} (\frac{-h}{4} X - \frac{1}{4} \wedge + \frac{7}{4} Y - \frac{1}{4} Z - \frac{1}{4} x)$. Développons suivant la série de Taylor (ce qui est permis d'après les hypothèses admises) et supprimons les termes nuls $F(\frac{1}{4} x, \frac{1}{4} \wedge)$ et $\frac{1}{4} x$ il viendra* (5) $o = g(X-x) + g(Y-\frac{1}{4} \wedge) + g(Z-\frac{1}{4} x) + R$, (6) $o = g(X-\frac{1}{4} \wedge) + g(Y-\frac{1}{4} \wedge) + g(Z-\frac{1}{4} x) + R$. R et R' étant du second ordre. Si l'on néglige R et R' , ces équations représenteront deux plans P , P' respectivement tangents aux deux surfaces $F(X, Y, Z) = 0$, $F(x, y, z) = 0$. Ces deux plans se coupent suivant une droite, avec laquelle la courbe se confondra sensiblement aux environs du point (o, y, z) . Cette droite se nomme la tangente. 226. Ce raisonnement serait néanmoins en défaut si (j, z) était un point singulier. En effet, les équations A in O , $A_j n :: O$, $A_2 = O$, que nous supposons satisfaites, équivalent à celles-ci : $JF \frac{dF}{dx} \frac{dF}{dy} \frac{dF}{dz} \sim d^2 \sim d^2 \frac{dx}{dy} \frac{dy}{dz}$ Soit X la valeur commune de ces rapports. Les deux plans P et P' , ayant la même équation au facteur X près, se confondront en un seul, à l'équation duquel $X = x, Y = y, Z = z$ devront approximativement satisfaire. On obtiendra d'ailleurs une nouvelle relation entre ces

212 • PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE T. quantités y en retranchant de l'équation (5) l'équation (6) multipliée par le facteur X . Il viendra une équation dont le second membre sera en général d'ordre a , mais pourra être d'un ordre plus élevé si certains termes se détruisent. Supposons que $R = Kt$ soit d'ordre n . En négligeant dans l'équation les termes d'ordre supérieur à i , elle représentera un cône d'ordre n que le plan P coupera suivant n génératrices. Le point (x, y, z) sera donc un point multiple d'ordre i ayant ces droites pour tangentes. Si plusieurs de ces tangentes coïncident, on devra signaler cette particularité. 227. Nous avons supposé implicitement, dans la discussion qui précède, que les dérivées du premier ordre $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ ne s'annulent pas à la fois. Si cette circonstance avait lieu, aucune des deux surfaces $F = 0$,

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA SÉRIE DE

TAYLOR. 3^o Théorème. — *Le point $\{x, y, z, t\}$ sera ordinaire si les dérivées successives $x'', \dots, y'', \dots, z'', \dots$ des coordonnées par rapport à t ont en ce point des valeurs finies et déterminées, et si, de plus, x, y et z ne s'annulent pas à la fois. Réciproquement, si $\{x, y, z, t\}$ est un point ordinaire, la variable indépendante pourra être choisie de telle sorte que ces conditions soient satisfaites. 1^o Supposons, en effet, ces conditions satisfaites au point $\{x_0, y_0, z_0, t_0\}$ soit, pour fixer les idées, $x_0 = 0$. Tirons la valeur de t de la première des équations (7) pour la reporter dans les deux autres. Elles prendront la forme ou $y = f(x) = 0 = F(x, y, z, t)$, — $F(x, y, z, t) = 0$ — $\{x, y, z\}$. Il faut montrer : 1^o que les dérivées partielles successives de F et se réduisent toutes à 1, à 0, ou aux dérivées des fonctions f, g, h qui ne sont autre chose que $y = f(x), z = g(x), t = h(x)$. Mais ces dérivées sont données par les équations y', z', t' , dy, dz, dt sous forme de fractions n'ayant en dénominateur qu'une puissance de x . Elles ont donc des valeurs finies et déterminées.

4 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE T. Réciproquement, soit
 (x, y, z) un point ordinaire de la courbe $F(x, y, z) = 0$, $F'(x, y, z) \neq 0$. L'un au
 moins des trois déterminants A, A_1, A_2 par exemple A , sera $\neq 0$. Cela posé,
 les dérivées $\frac{\partial x}{\partial z}, \frac{\partial y}{\partial z}, \dots$ seront fournies par les équations $dF = 0$
 à $\frac{\partial x}{\partial z}, \frac{\partial y}{\partial z}, \dots$ sous forme de
 fractions n'ayant pour dénominateur que des puissances de A . Elles auront
 donc des valeurs finies et déterminées. Prenons x pour variable
 indépendante, on aura $\frac{\partial y}{\partial x} = i, \frac{\partial z}{\partial x} = r = 0, \dots$. D'autre part, $y = -\frac{\partial F}{\partial z}, \dots$
 sont finies et déterminées. Toutes les conditions du
 théorème seront donc satisfaites. 229. Dans les théories qui vont suivre,
 nous nous bornerons exclusivement à la considération des points ordinaires.
 II. — Théorie du contact. 230. Deux courbes G et O ayant un point
 commun P (fig. 5) ont, en ce point, un contact d'ordre n si les points de ces
 deux courbes infiniment voisins de P peuvent être associés deux à deux, de
 telle sorte que la distance QQ' de deux points correspondants soit un
 infiniment petit d'ordre $n+1$ par rapport à leur distance au point P . La
 même définition s'applique au contact de deux surfaces S, S' . Enfin, une
 courbe C et une surface S , ayant un point commun P , auront de

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA SÉRIE DE

TAYLOR. 315 même un contact d'ordre r si à chaque point Q infiniment voisin de P pris sur C on peut faire correspondre sur S un point Q' tel que QQ' soit d'ordre $n - f - i$ par rapport à PQ . Fig. 5. 231. Contact des courbes planes. — Supposons d'abord que C et G soient deux courbes planes dont la seconde ait pour équation $F(a, r) = 0$. Soient X, Y les coordonnées du point P ; x, y celles d'un point Q infiniment voisin, pris sur la courbe C ; X', Y' celles d'un point correspondant Q' pris sur la courbe C . On aura $dF = F_x dx + F_y dy + F_r dr = 0$. S'il y a contact d'ordre i , la distance $QQ' = y/a + p \gg g$ a fortiori a et p , seront d'ordre $n - i$ par rapport à PQ , et l'équation (1) montre qu'il en sera de même de $Y/x^2 y$. Réciproquement, si $\{x^2 y\}$ est d'ordre $i - h$, on pourra en général déterminer sur C un point $x^2 + a, y^2 - p$, tel que a et p et, par suite, $y/a^2 - p^2 = QQ'$ soient d'ordre $n - i$. En effet, la seule condition à laquelle a et p soient assujettis pour que Q' soit sur C est l'équation (1). Si nous admettons que l'une au moins des deux quantités $-r - y^2 - \dots$ par exemple $-y^2$ ne soit pas infiniment petite, on pourra

Q16 PREMifRB PàBTIE. — CHAPITRE V. j prendre pour 3 une quantité quelconque d'ordre $\frac{1}{i} - i$, et ! Téquation (i), résolue par rapport à a, donnera pour celte quantité une valeur qui sera également d'ordre $\frac{1}{i} - h$. Cette conclusion serait en défaut si $-r > -^{\wedge}$ — étaient tous deux infiniment petits; mais ces quantités diffèrent infiniment peu des quantités constantes $> — »$; p' Il faudrait donc, pour qu'il y eût exception, qu'on eût simultanément $\hat{O}F \hat{O}F = 0$, $3 = 0$, Oj ; dy ce qui est impossible, x, y étant un point ordinaire sur la courbe C. Nous aurons donc pour condition générale du contact d'ordre n la suivante : Il faut et il suffit que les coordonnées $x^{\wedge}y^{\wedge}$ du point Q étant substituées dans Véquation de 01, le résultat de la substitution soit d'ordre $\frac{1}{i} - f - i$ par rapport à la distance $PQ^{\wedge}$ $s_j\{x, -xr^{\wedge}\{y, \sim -yy^{\wedge}$, 232. Supposons la courbe C définie par deux équations et soit $^{-4-} rf^{\wedge}$ la valeur du paramètre correspondante au point $Xiyyi$ on aura, en désignant, pour abréger, par jc' , $y \setminus \dots$ les dérivées de x, y par rapport à t, $yi^{\wedge} - y — ydt^{-}$ D'ailleurs, le point $x^{\wedge}y$ étant ordinaire sur la courbe C, on pourra supposer la variable indépendante t choisie de telle sorte que x' et y' ne s'annulent pas à la fois (217). On aura donc sensiblement $Pq — s/x'^{\wedge} - hf^{\wedge}dt$. Donc PQ est de l'ordre de dt.

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA SÉRIE DE
 TAYLOR. 21 J Posons, d'autre part[^] on aura — $W\{t\} = W\{t\} - hW'\{t\}dt -$
 $h\int W''\{t\} dt^2 + \dots$ 2. /1 Cette quantité devant être d'ordre $ai + i$, on aura,
 pour conditions du contact, les équations (2) $W\{t\} = 0$, $W'\{t\} = 0$...,
[^]«(0=0. 233. Ces conditions prendront une forme plus symétrique, si nous
 supposons les deux courbes données sous la forme et lesquelles équivalent,
 pour la première, à $y = f(x)$ et, pour la seconde, à $y = g(x)$ On aura alors $f'(x) = g'(x)$ -
 $y_1(x)$, et les équations (2) deviendront (3) $f(x) = g(x)$, $f'(x) = g'(x)$, ..., $f^{(n)}(x) = g^{(n)}(x)$.
 234. EnGn, si les deux courbes sont données sous la forme $F(x, y) = 0$, et
 on n'aura qu'à déterminer l'ordonnée y et ses dérivées $y', \dots$,

218 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE T. $y(\ll)$ dans la première courbe, au moyen des équations $dF d\mathfrak{Y}, _ — h -r- r — o$, et, dans la seconde, par les équations $dx dy \ast^{\wedge}$ Les valeurs de ces quantités devant, d'après ce qu'on vient de voir, être les mêmes dans les deux courbes, on n'aura qu'à identifier les résultats pour obtenir les équations de condition cherchées.

235. Contact cTune courbe G et d'une surface S . — Soient $\mathfrak{Y} \{x^{\wedge}y, 5) = o$ l'équation de la surface; $X, yj z$ les coordonnées du point P ; $\wedge oJKo$ Si celles du point Q ; $X \setminus H- \ll >^1 H- P \gg^{54} -I- Y$ celles du point correspondant. On aura $o =: F \{x, -h a, j, -H P, z, -H y) 17/ S \grave{a} F dF^{\wedge} dF S$ il y a contact d'ordre $/i, a, p, y$ étant d'ordre $n + 1$, il en sera de même de $\mathfrak{Y} \{x^{\wedge}y y^{\wedge\wedge} Z \}$, Réciproquement, si $F(a:i,^4,^i)$ est d'ordre $n-hi$, donnons à deux des quantités a, p, Y des valeurs arbitraires, mais d'ordre $/i 4- i \bullet$

L'équation précédente donnera, pour la troisième, une valeur du même ordre, pourvu que le coefficient qui la multiplie ne soit pas infiniment petit.

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA SÉRIE DE

TAYLOR. $Q^i Q^j$, s — ne seraient tous infiniment petits que si $y - T_i$ — dont ils diffèrent infiniment peu, étaient OJC $dy dz$ nuls. Cela est impossible, (x, y, z) étant un point ordinaire sur la surface. On voit que la condition du contact sera que $F(x, y, z)$ soit d'ordre $n + i$ par rapport à PQ .

236. Soient $a = \varphi(x)$, $y = \psi(x)$, $z = \chi(x)$ les équations de la courbe C .

Admettant, ce qui est permis, que les dérivées y', z' ne s'annulent pas à la fois, on aura sensiblement $PQ = y/x - f' - \chi' dt$. D'autre part, en posant $F(x, y, z) = 0$, on aura et la condition de contact sera exprimée par les équations $V(x) = 0$, $V'(f) = zO$, ..., $V''(x) = 0$. 237. Si la courbe est définie par deux équations $\varphi(x, y, z) = 0$, $\psi(x, y, z) = 0$, il faudra, pour appliquer ces formules, concevoir qu'on prenne $x = t$ et y, z seraient alors des fonctions implicites de la variable X définies par les équations $\varphi = 0$,

The text on this page is estimated to be only 23.86% accurate

220 PREMIÈRE PARTIE* — CHAPITRE T. On aura $d\forall o = F(J_7i -h a, j_i -f- p, T_j -f- y) = F(j:, j_i, Z_i) -h -^a \hat{O}F^{\wedge} dF o = * (x, 4- a, J_i -h p, x:, + y) = \wedge \{a^{\wedge}, j_j, \wedge^{\wedge} -+- -^{\wedge} \text{---} a -+- -: \hat{i} \text{---} P-H :r- T-^{\wedge} \text{---}$ Ces équations montrent que, si a, p, y sont d'ordre $n -r i$ par rapport à PQ , il en sera de même pour $F(X|, j'i, ^i)$. Réciproquement, si $F\{X_i, y^{\wedge}, z^{\wedge}\}$ et $(:r:, j'i, S|)$ sont d'ordre $/i + i$, on pourra assigner à l'une des quantités $a, ^S, Y$, par exemple à a , une valeur du même ordre, et les deux équations précédentes donneront, pour $^{\wedge}$ et y , des valeurs également d'ordre « $-j- i$, pourvu que le déterminant $dF^{\wedge} d^{\wedge} dF d^*$ qui en forme le dénominateur, ne soit pas infiniment petit, ce qui aura lieu si le déterminant $_ dF d^* _ dF d^* " df dz dz dy$ n'est pas nul. Or, le point P étant ordinaire sur C , le déterminant A , ou l'un de ses analogues $A|, A_j$, sera o . Donc on pourra assignera a, p, y un système de valeurs d'ordre $/i -f- i$. La condition du contact d $^{\wedge}$ ordre n est donc que $F(^i, /n-i)$ et $*(j?i, ri, 5j)$ soient d $^{\wedge}$ ordre $n 4- i$ par rapport à PQ .

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA SÉRIE DR

TAYLOR. 221 239. Soient maintenant les équations de la courbe C.

Admettant, ce qui est permis, que ar' , y , z ne s'annulent pas à la fois, on

aura sensiblement et si Ton pose $F[\varphi(O, \varphi_i(O), \varphi_i(O)) = \varphi^i(O) \gg J[\varphi^i(O), \varphi^i(O), \varphi^i(O)]$

$i(0) = \varphi^i(0)$, la condition du contact sera exprimée par les $2^i - 1$ a équations

$\varphi^i(r) = 0$, $V'(\varphi) = 0$, ..., $V^{(i)}(\varphi) = 0$, 240. Si les deux courbes étaient définies

par les équations et en choisissant x pour variable indépendante, ces

équations prendraient la forme symétrique (4) $(\varphi^i(\varphi) = \varphi^i(r), \dots, \varphi^i(r) = \varphi^i(\varphi)$,

241. Enfin, si elles étaient définies par les équations $Y\{x, y, z\} = 0$, $\varphi^i(r, j, 5)$

$= 0$, et on n'aurait, pour obtenir les équations du contact, qu'à calculer les

valeurs de φ^i , z et de leurs n premières dérivées dans les deux courbes, et à

identifier les résultats.

The text on this page is estimated to be only 25.72% accurate

222 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE T. 242. Contact de deux surfaces S et S' . — Soient l'équation de S' ; x, y, z et X, Y, Z les coordonnées de P et de Q . La condition du contact sera évidemment que $F(x, y, z)$ soit d'ordre $n-1$ par rapport à PQ . 243. Cela posé, soient les équations de la surface S ; t, u et $f(t, u)$ les valeurs des paramètres correspondant aux points (x, y, z) et (X, Y, Z) on aura $dx = \frac{\partial x}{\partial t} dt + \frac{\partial x}{\partial u} du$, $dy = \frac{\partial y}{\partial t} dt + \frac{\partial y}{\partial u} du$, $dz = \frac{\partial z}{\partial t} dt + \frac{\partial z}{\partial u} du$ et $dX = \frac{\partial X}{\partial t} dt + \frac{\partial X}{\partial u} du$, $dY = \frac{\partial Y}{\partial t} dt + \frac{\partial Y}{\partial u} du$, $dZ = \frac{\partial Z}{\partial t} dt + \frac{\partial Z}{\partial u} du$. On aura donc sensiblement dt et du étant considérés comme du premier ordre, on voit que PQ sera également du premier ordre. Cette conclusion ne serait en défaut que si le rapport de dt à du pouvait être déterminé de telle sorte qu'on eût à la fois $dx, dy, dz, dX, dY, dZ, dt, du = 0$, dt, du

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA SÉRIE DE
 TATLOR. 233 ce qui aurait lieu si les trois déterminants $D_{\frac{1}{2}}$ et z —
 $f^{\{x,y\}}$, ces équations de condition deviendraient (en prenant 2: j' pour
 variables indépendantes) $K^{\{ J-J^{\frac{1}{2}} dx \sim dx' dy \sim dy'' * 'dy'' \sim dy^{\frac{1}{2}} \}$ 243.
 Enfin, si elles sont représentées par des équations $F(jr, \frac{1}{2}, 5) = 0$, et on
 exprimera que le contact a lieu en égalant les valeurs

224 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE T. de z et de ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre i , respectivement calculées dans les deux surfaces. 246. Pour le contact du premier ordre, par exemple, il faudra exprimer d'abord que (x, y, z) est un point commun aux deux surfaces, puis égaliser les dérivées r^x, r^y, r^z . Elles sont déterminées dans la première surface par les équations $dF/dx = dz/dx, dF/dy = dz/dy, dF/dz = dz/dz$ et par les équations $dF/dx = dz/dx, dF/dy = dz/dy, dF/dz = dz/dz$ dans la seconde. La condition de contact est donc que r^x, r^y, r^z soient proportionnels à r^x, r^y, r^z ou que le déterminant $dF/dx, dF/dy, dF/dz, dz/dx, dz/dy, dz/dz$ soit nul. Ces conditions expriment que (x, y, z) est un point singulier sur la courbe d'intersection des deux surfaces F et F' (223). 247. Remarques. — Si deux surfaces S et S' ont un contact d'ordre n en un point, leurs intersections avec une troisième surface passant en ce point sans les y toucher auront un contact d'ordre n . Car les coordonnées d'un point Q infiniment voisin de P pris sur la courbe $S = 0, S' = 0$ satisfont par hypothèse à l'équation $S' = 0$ aux infiniment petits près d'ordre $i-4$. D'autre part, elles satisfont rigoureusement à l'équation $S' = 0$, qui, jointe à celle-ci, caractérise la courbe $S' = 0, S'' = 0$. Il y a donc contact d'ordre n entre les deux courbes. 2. Deux lignes (ou deux surfaces) ayant un contact

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA SÉRIE DE

TATLOR. 225 d'ordre n avec une troisième ont entre elles un contact de même ordre. Cela devient évident si Ton écrit les conditions du contact sous les formes (3), (4) et (5). 248. Osculation. — Soient C une courbe (ou surface) quelconque, K une autre courbe ou surface dont l'équation (ou les équations) contienne un nombre de paramètres égale celui des conditions trouvées ci-dessus pour que C et K aient un contact de l'ordre n en un point donné de C . Si Ton donne successivement à ces paramètres différentes valeurs, on obtiendra une famille de courbes (ou surfaces) K . Celle de ces courbes (ou surfaces) où ces paramètres sont déterminés de manière à satisfaire aux conditions du contact d'ordre n est dite osculatrice à C au point considéré. 249. Au lieu de déterminer les paramètres de K par la condition d'avoir avec C un contact donné en un point donné, on pourrait se proposer de les déterminer de telle sorte que K rencontrât C en un certain nombre de points donnés. Soit, par exemple, C une courbe plane ayant pour équation $\phi(x, y) = 0$ n paramètres. Soit K une autre courbe dont l'équation $F(x, y) = 0$ contienne $n + i$ paramètres. Posons, comme précédemment $F(x, y) = \phi(x, y) + A_1 \phi_1(x, y) + A_2 \phi_2(x, y) + \dots + A_i \phi_i(x, y)$, si l'on a les équations de condition $V(\phi, \phi_1) = 0, V(\phi, \phi_2) = 0, \dots, V(\phi, \phi_i) = 0$. J. — Cours, 1. 10

The text on this page is estimated to be only 26.75% accurate

226 PREMIERE PARTIE* — CHAPITRE V. Voyons ce que deviendront ces conditions lorsque $A, A', \dots$ tendront simultanément vers zéro. On aura, en développant $V(-hA)$, ... par la formule de Taylor, $V(-hA) = V(0) - hV'(0) + \frac{h^2}{2}V''(0) - \dots$, $V(0) = V(1) + W'(t)$, tA $/I \cdot 2 \dots /R_i, R_2, \dots, R_i$ désignant les restes du développement. Résolvant ces équations par rapport à $A(t)$, ... il viendra $1 \cdot 2 \dots /i \cdot v(0) = E$ M' M désignant le déterminant $I A^i I$ à l'ant 1.2. $\dots /i A$ » En M et $E, \dots, E$, les déterminants analogues qui s'en déduisent en y substituant la colonne des R à la place de chacune de ses colonnes successives. Or $A^i, A, \dots, A, \dots$ étant supposés du premier ordre, M sera en général d'ordre $r - j - 2 + \dots - 4 - /i =: n^{H1} \} j'g^{mp} 2'$ part, $R, R_0 \dots, R$, étant d'ordre supérieur à $i, E, E < \dots, E_j$ seront d'un ordre plus élevé que M ; on aura donc à la limite $V(0) = 0, \dots, V(0) = 0$, d'où ce théorème : Si les $n - 1$ points où K est assujettie à rencontrer la

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA SÉRIE DE

TAYLOR. 227 courbe C se rapprochent indéfiniment d'un même point ty K tendra à devenir oscilatrice en ce point à la courbe C . 200. Cette proposition subsiste quelle que soit la loi des variations simultanées de $A^{\wedge}, \dots, A_{i,j}^{\wedge}$, lors même que cette loi serait calculée de telle sorte que M fût un infiniment petit d'ordre supérieur à n . En effet, M s'annulant évidemment si deux quelconques des quantités $A^{\wedge}, \dots, A_{i,j}^{\wedge}$ sont égales, sera divisible par le produit des différences. Il est d'ailleurs du même degré que ce produit par rapport aux quantités $A^{\wedge}, \dots, A_{i,j}^{\wedge}$. Donc il lui est égal, à un facteur constant près, que la comparaison de M aux termes montre être égal à l'unité. Donc, si les $n+1$ points $t_1, \dots, t_{n+1}$, tout en se déplaçant, restent constamment distincts, M ne sera pas nul ; mais son ordre sera $> n$ si l'une des différences $2 | t_i - t_j |$, ... est infiniment petite d'un ordre supérieur au premier. Supposons que M soit de l'ordre h [1]. On aura, d'autre part, $R = \frac{1}{n!} (A_1^{\wedge} - A_2^{\wedge} + \dots + (-1)^{n-1} A_n^{\wedge}) + R'$, R' étant d'ordre $> n$. On aura, par suite, en désignant l'une quelconque des quantités E , $E = \frac{1}{n!} (A_1^{\wedge} - A_2^{\wedge} + \dots + (-1)^{n-1} A_n^{\wedge}) + R'$, R' étant d'ordre $> n$.

The text on this page is estimated to be only 28.61% accurate

228 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE T. OÙ II, . . . , Ij», E[^],, représentent ce que devient E_{ij}, quand on y remplace R₁, . . . , R_n, par 1[^]+*, . . . , A_i t[^]*, . . . ; par IC[^], . . . , A_{ij} et enfin par R₁, . . . , R_n. Or il est clair que l'ordre de E_{ij} est supérieur à l'ordre de M; et la même chose a lieu pour I_{ij}, . . . , I_j[^]; car chacune de ces quantités, s'annulant si deux des quantités A[^], . . . , A_i sont égales, est divisible par le produit M de leurs différences; étant d'ailleurs d'un degré plus élevé que M par rapport à A_i, . . . , A_j, elle sera égale à MN, N étant un infiniment petit. Donc chaque terme de E_{ij}, et par suite E_{ij}, lui-même, sera d'un ordre plus élevé que M, et l'on aura toujours à la limite 201. Ce mode de raisonnement s'appliquerait identiquement au cas où, C étant une courbe gauche, K serait une surface ou une autre courbe gauche, et conduirait au même résultat. Si C était une surface j: -z[^]{t,u), y=—[^]i{tyU), z:=o[^]{t,u) qui dût être rencontrée par une autre surface K — F(jc,y,z)—o aux points {t + A/, ti 4- Aw), (t -f- A, f, m -h Ai w, ...), on verrait de même que, si ces points se rapprochent indéfiniment du point (^, w), K tendra à devenir osculatrice en ce point, pourvu toutefois que It, Aw, Ai f, A| w, ... varient de manière que le déterminant I A[^] lu It[^] A/Att Aw* ... Am« I Ai[^] A,tt Ai[^]« A,fA, M A,a« ... Aj m» ne soit pas un infiniment petit d'un ordre supérieur à ce qu'indique son degré.

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA SÉRIE DE
TAYLOR. 229 III. — Courbes et surfaces enveloppes. 232. Soit $F(x, y, c) = 0$
une famille de courbes planes, caractérisées par les différentes valeurs
attribuées au paramètre c . Donnons à c une suite de valeurs $c_0, c_1, c_2, \dots$

a30 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE T. Mais on a $F(x, j, c - h^c)^F(r, v, c) 4 - dc - \sim, -t - \dots = 0$, ou, en supprimant le terme $F(jr, j', c)$, qui est nul, et divisant par de y $fp o^*F$ de $-h, - - - h \dots = 0$. ôe $oc^* 1 . 2$
 A la limite, de étant nul, on aura simplement ÔF On obtiendra donc
 ^équation de Venveloppe en élimi" nant e entre les équations 17 N àF $F(^, r, c) - G, ^- = 0$. 253. Remarques, — i° Si ces deux équations sont incompatibles, il n'y a pas d'enveloppe (ou, si Ton veut, l'enveloppe est rejetée à l'infini). 2° La règle donnée pour trouver l'enveloppe suppose que l'expression $F(j:, r, c)$ n'a qu'une seule valeur pour chaque système de valeurs de x, y^c . S'il en était autrement, l'enveloppe cherchée pourrait échapper en tout ou en partie à celte détermination. Cherchons, par exemple, l'enveloppe des courbes (l) $J? - + - V \gg - J^* - | - C := 0$. dF L'équation $- = 0$ se réduisant ici à $i = 0$, il semble qu'on n'ait pas d'enveloppe; en effet, les branches de courbe $-h^I - / * - + - Ci = 0$ et $wTH - ^/l - / * - f - c - i - ^c = 0$ ne se coupent pas. Mais le radical $yi - y'^$ pouvant être affecté du signe dz, la courbe (i) contient une seconde branche $x - ^i - y^ - | - c = 0$, laquelle coupe la courbe

The text on this page is estimated to be only 24.82% accurate

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA SÉRIE DE
TATLOR. 23 1 $Oc^{\wedge} V^{\wedge} I - .r - \wedge - c - \}$ - $dc^{\wedge} = o$ en un point qui tendra,
lorsque de se rapprochera de zéro, vers une limite définie par les équations
 $X - hS/l - J^{\wedge} - hC^{\wedge} = iO$, $07 - \vee i - j' = ^4 - c = o$. Éliminant c , on aura, pour
Téquation de Tenveloppe, $y/ I - yi :=^{\wedge} o$, ou $I - /* == o$. On aurait obtenu
ce même résultat en chassant le radical de Téquation (i), qui serait devenue
 $I - r^* - (.r - +- c)^* = o$. L'équation étant mise sous cette forme, on aurait
et, en éliminant c , $i - y^{\wedge} - o$. 2oi. Théorème. — Lem^elophe est tangente
en chacun de ses points à C enveloppée correspondante. L'enveloppe est
définie par le système des deux équations $h\{j:,f,c) - o, -- - o$. Soient donc
 Xq, Jq les coordonnées d'un de ses points, Co la valeur correspondante de c ,
on aura *«- " ^' ^ = ^' en désignant, pour abréger, par Fq , — - ^ ce que
deviennent $OCq F$ et $-j - ^$, lorsqu'on y remplace ^, j' , c par :ro, $J'o$ »
CoL'enveloppée correspondante au point $\{xo^{\wedge} Vq\}^{\wedge}$ pour équation

a32 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE T. Soit maintenant
 ($\alpha_j \circ C_i$) un point de Tenveloppe inGniment voisin de C_q , on aura les
 équations $F|$ et $-r^\wedge$ désignant ce que deviennent F et $-r^\wedge$ pour $j: = j:$, Pour
 établir qu'il y a contact entre Tenveloppe et l'enveloppée, il faut montrer que
 $F(j:i,^\wedge i, C_q)$, résultat de la substitution des coordonnées $x^\wedge y_i$ dans
 l'équation de l'enveloppée, est au moins du second ordre par rapport à O_r on
 a Mais F , et $-^\wedge$ sont nuls. Cette expression sera donc du second ordre au
 moins par rapport à $C| — c\odot$. D'autre part, posons, pour plus de clarté, on
 aura R étant du second ordre en $^\wedge$, — $J?o> J'i — ^0^4 — C_q$. Or $4>o d^*$

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DK LA SÉRIE DE

TAYLOR. . 233 la plus grande des quantités $\wedge_i - \wedge_o$? $JK_i - \wedge_o$ et, par suite, à l'ordre de $\wedge/(j; - j:oj--h U'« \sim J'o)"$ - Donc $F(x,j'i,Co)$ est d'ordre 2 au moins par rapport à cette dernière quantité. Cette démonstration serait en défaut si $-z-r$ était nul. Il àcl serait aisé de montrer que, dans ce cas, $\wedge^0$? $J>o$ est un point de rebroussement sur la courbe enveloppe. 255. Soit maintenant $F(r,j^\wedge, 5,c) = 0$ une famille de surfaces contenant un paramètre c . Si Ton donne à c une suite de valeurs infiniment voisines, deux surfaces consécutives se couperont suivant une courbe. A la limite, ces courbes dessineront une surface, enveloppe des surfaces proposées. Proposons-nous de déterminer son équation. Soit (2) $F(j:j,3,c)=\wedge_o$ Tune des enveloppées (3) $\forall \{x,y,z,c-\backslash-dc\}i^\wedge \forall \{x,y,z,c\}^\wedge-\wedge-dc-\backslash-^\wedge, -4-...$ la suivante. La courbe d'intersection sera définie par les deux équations (2) et (3), lesquelles équivalent aux suivantes : $d\forall d^\wedge \forall de oc OC^\wedge 1 . 2$ A la limite, $de = 0$, et les équations se réduisent à $F=\text{io}, - =\text{io}$. (Je La courbe définie par ces équations se nomme lAca/'acléristiqiie. L'enveloppe cherchée, lieu de ces caractéristiques, s'obtiendra en éliminant c entre les deux équations.

The text on this page is estimated to be only 11.85% accurate

2^4 p m r s i t s i P A B T 1 C — c m A n r m c t. Trois enveloppes
 con^trculives I' F r, V. j. c ^ o. F r. V. z, c ^ d i * = F ^ - de r-r R =: o, r F r. y.
 z. c ^ d c — F — d, c »- R. = o O c i k " 1 . J ont un) o i n l d' i n l e r s e c t i o n d r ^ f i n i
 par les trois équations ^4) Ces équations j i * u v «- n l s' é c r i r e a i n s i : c F _ —
 U d r ' ^ H . d i - I â ^ F _ n d i C — R i f i c ô c (U ' f i i c f i l c — t i r i 2 * c * (i c d i c { i l i C —
 de) et donneront à la limite, en remarquant que R et R | sont du troisième
 ordre, Ô F Ô ' F O c O f E l i m i n a n t c e n t r e c e s t r o i s é q u a t i o n s , o n a u r a
 T é q u a t i o n d e l a l i ^ n e l i e u d e s p o i n t s d' i n l e r s e c t i o n . C e t t e l i g n e s e n o m m e
 V a n H f d e r e h r o u s s e m e n t . E l l e r e n c o n t r e é v i d e m m e n t l e s c a r a t é r i s t i q u e s .
 256. T H É o i i È % f K . — [J e n i ' p i o p p r f ! e s t t a n g é n i e à V e n v e l o p p e t o u t l e
 l o n p ^ d e l a c a r c t e t r i s l i q u e . E n e f l e t , l' e n v e l o p p e a p o u r é q u a t i o n s
 \ { ' r , y , z , c) --- o , - ^ - = o . S o i t { j C q ^ Y ç ^ ^ ^ 0 ? ^ û) u n d e s e s p o i n t s , o n a u r a F o
 = o , - - = o . L' e n v e l o p p é e c o r r e s p o n d a n t e a u r a p o u r é q u a t i o n F (j : , V , : : , C o)
 = o . S o i t { x ^ ^ y x ^ 5 | , C |) u n p o i n t d e T e n v e l o p p e i n f i n i m e n t v o i

The text on this page is estimated to be only 22.82% accurate

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA SÉRIE DE
TATLOR. 235 sin de $(j\text{to}\hat{I}JKc^{\wedge}oj^{\wedge}o)$; $o\ddot{i}^*$ aura $F_{,=o,}^{\wedge}o$, et il faut prouver
que $F(jC|, >^{\wedge}i, 3|, Co)$ est du second ordre par rapport à $v/\wedge^{\wedge}, -Xq)^{\wedge}-j-$ [ju
— $J'o/-r$ ($v, -^{\wedge}Jcj$ "Or on a $F(*i^{\wedge}iT Vi, 5i, Co) - F[j:-,, r,, -1, Cl - (ci$
— $Co)$] Cette expression est du second ordre en $C| - Co$. D'autre part
posons, pour plus de clarté, de $=*(-^{\wedge}J'^{\wedge})^{\wedge}$ on aura $o - j^{\wedge} - *(j?,./i,.;i,c,)$
Or 0 est nul et R du second ordre en $Xi - Xo, . . \bullet j^{\wedge}i - Cq$, Cette
équation montre que, si $- = - - - n$ est pas nul, $Ci - Co$ sera au moins de
l'ordre de la plus grande des quantités $Xi - Xq^{\wedge} Yi - ^0?^{\wedge} - ^0f$ et, par
suite, au moins de l'ordre de $y/(j:, - Xo)^{-r}...$ Donc $F(j?,., j',., :;., Cq)$ sera
au moins d'ordre 2 par rapport à cette dernière quantité. Cette démonstration
serait en défaut si l'on avait $- = o$, àel auquel cas le point $j^{\wedge}o\hat{I}J^{\wedge}o?^{\wedge}o$
appartiendrait à l'arête de rebroussement. Il serait d'ailleurs aisé de voir que
cette arête est une ligne singulière sur l'enveloppe. $(r, - Co)] (c, c.)$

The text on this page is estimated to be only 23.99% accurate

236 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE V. 257. TnÉonEME.

— L'arête de rebroissement a en chaque point un contact du second ordre avec r enveloppée correspondante, et touche la caractéristique. Cette arête est définie par les équations $\hat{O}Y d'Y \setminus O, \text{---} = O, \text{---} =: O. \bullet OC oc^{\wedge}$
Soit $(j:ou^{\wedge}o\hat{o} ZQsCo)$ in de ses points, on aura $'^{\wedge}\ll^{\wedge\wedge};5?;=--'' -s^{\wedge\wedge}-$

"L'enveloppe correspondante sera donnée par l'équation la caractéristique par les équations $y^{\wedge}\{jc,y,z,c^{\wedge}\}\text{---}o, \text{---}^{\wedge} \text{---} o$. Soit $(X|,j'i,-3|,C|)$ un point de l'arête de rebroussement in(ininient voisin du précédent, on aura Le théorème sera évidemment démontré si nous prouvons que $F/\setminus j \dots 1 \bullet$
 $(^{\wedge}F(.r.,r,,c,,To) (\bullet^{\wedge}ijj'i?^{\wedge}1?$

The text on this page is estimated to be only 23.37% accurate

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA SÉRIE DE
TAYLOR. 287 Oa aura quantité du second ordre en $C| - Co$, car on a * dci
' dci dc\ Il reste à prouver que $C| - Cq$ est au moins de l'ordre de la plus
grande des quantités $Xi - Xq^{\wedge} V| -)o, ^{\wedge} - Zq$, et, par suite de Tordre
du radical $\sqrt{A^{**} - ^{\wedge}o} - 1 - \dots$ Pour Tétablir, posons On aura $1 = 4 >$
 $(Xo - + - ^1 - d^{\wedge}oj \dots > ^0 H - ^1 - ^0) (7 j?o aco ^i - ^o? \text{ pourvu que } -$
 $^{\wedge} \text{ soit } ^o$. Si cette quantité était nulle, la démonstration serait en défaut.
Mais, dans ce cas, $0:0, ^09 ^0$ serait un point singulier sur Taréte de
rebroussement. 258. Soit enfin $F(j:j^{\wedge}, 2, a, 6)$ une famille de surfaces
contenant deux paramètres a et 6 . Si l'on change a et 6 en

The text on this page is estimated to be only 25.85% accurate

338 PBEMifeU PABTIE. — CflAFITIK T. a — da cl b — dby on obtiendra une surface $\wedge F \wedge F F (.r, V, -, a -t- \wedge flr, 6 -- \wedge 6) m F -r- -\wedge da \sim r- -\wedge db -h - . oa$ où SI d/i et db sont infiniment petits, et quel que soit d'ailleurs leur rapport, la surface passera par le point défini par les équations $\hat{O}F dF \wedge = \wedge' \hat{o} \hat{a}' \wedge'' \wedge' rb \wedge \wedge''''''$ Éliminant 6r et 6 entre ces équations, on obtiendra l'équation de l'enveloppe. On vérifiera sans peine qu'elle est tangente à l'enveloppée. IT. — Courbes planes. 9. Considérons une courbe plane, définie par deux équations Soit P un point ordinaire pris sur cette courbe, x, y, / ses coordonnées. Tangente et normale, — L'équation générale d'une droite (i) $Y = aX + a_1z$ contient deux paramètres dont on pourra disposer pour faire passer la droite par le point P et établir entre elle et la courbe un contact du premier ordre. Il faudra pour cela satisfaire aux deux équations (2) $o = "V \{t\} --. f: \wedge \wedge \{t\} = a \wedge \{t\} = \wedge ziz Y = ax = OL$, (3) $oz = r(0 = -j' - ax'$. Des équations (i) et (2) on déduit $\wedge = \wedge'$ «(Y r)-û. Éliminant ensuite a entre cette équation et l'équation (3),

The text on this page is estimated to be only 29.02% accurate

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA SÉRIE DE
TAYLOR. 289 on aura l'équation de la droite osculatrice $X - r Y - r'' y' - y''$
Celle droite se nomme la tangente au point P. La perpendiculaire à la
tangente, ou normale, aura pour équation $(X - a) a' H - (Y - v) / - o$. 260. Pour
appliquer ces formules (ou toute autre formule dans laquelle figureraient $x^{\wedge}$
 $x' j x''^{\wedge} \dots, > -, r \backslash y, \dots$) au cas où la courbe serait donnée par une seule
équation $F(\wedge, j) - _ = z_0$, on n'aurait qu'à poser $x = p(\wedge)$, p étant une fonction
quelconque et t une variable auxiliaire. On aurait alors $x' --^{\wedge} o \backslash t$, $x' -^{\wedge} \wedge^{\wedge} t$,
.... Quant à $j >'$, ce sera une fonction implicite de $/$, définie par l'équation $F[?$
 $(0, 71 =^{\wedge} 0$, dont on pourra obtenir les dérivées par la règle connue. Le plus
simple est évidemment de poser $x^{\wedge} = ty$ d'où $x' = I$, $x'' = \dots^{\wedge} o$; r' , r'' , ... ne
seront autre chose que les dérivées $-j - t -^{\wedge}$ •• et seront fournies par les
équations $(? F^{\wedge} F dy _ \hat{x} dr dx \sim^{\wedge} (4) l d^{\wedge} d^{\wedge} F dy d^{\wedge} dy^{\wedge} \hat{O} F d \backslash r _ \hat{o} x^* dx dv$
 $dx dy^{\wedge} dj c^{\wedge} dy dx^{\wedge} \wedge$ On aura donc la règle suivante pour transformer les
formules : Remplacer x' par V unité, $x^{\wedge}$, $x'''^{\wedge} \dots$ par zéro, y .

240 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE V. $dy dy'' \dots$ par les valeurs de $-y' > -y'' > \dots$ tirées des équations (4). Opérant cette substitution, l'équation de la tangente deviendra $y'(X-x) + y''(Y-y) = 0$, et l'équation de la normale sera $y'(Y-y) - y''(X-x) = 0$. Différentielle de l'arc, — On nomme longueur d'un arc de courbe AH (Fig. 7) la limite vers laquelle tend le périmètre d'un polygone inscrit dans cet arc lorsqu'on multiplie indéfiniment le nombre de ses côtés. Fig. 7. Pour justifier cette définition, il faut montrer que cette limite est indépendante de la manière dont sont placés les sommets du polygone sur l'arc de courbe considéré. Soient ABCDEFGH, S.abcdefg\ deux polygones inscrits dont chaque côté soit infiniment petit. Inscrivons un troisième polygone passant par tous les sommets successifs ABfcCcDrfe Soient P, P', u les périmètres de ces trois polygones; nous allons démontrer que — ne diffère de l'unité que d'une quantité infiniment petite; il en sera de même de — 9 et par suite p de p' > quotient de ces deux rapports. Donc P et P' auront même limite.

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA SÉRIE DE

TAYLOR. 241 Or, Tz étant égal à la somme des côtés Afc , $6c$, de , . . . , considérons Tun quelconque de ces côtés, tel que de . Soient D , E les deux sommets du polygone P , entre lesquels il est compris. L'angle des droites de et DE sera infiniment petit. En effet, DE fait un angle infiniment petit avec la tangente en D ; de fait de même un angle infiniment petit avec la tangente en d ; enfin l'angle de ces deux tangentes, menées en deux points infiniment voisins, sera lui-même infiniment petit, si Ton admet que θ , coefficient angulaire de la tangente, soit une fonction continue de la variable indépendante. Il en résulte que de ne diffère de sa projection sur DE que d'une quantité infiniment petite par rapport à de ; de même, pour chacun des côtés du polygone $7t$, comparé à sa projection sur le côté correspondant de P . On pourra donc, en ne commettant qu'une erreur relative infiniment petite, substituer à chaque côté de i : sa projection sur le côté correspondant du premier polygone. La somme de ces projections n'est autre que P . Donc on a bien 8 étant infiniment petit. 262. Nous avons admis que la direction de la tangente variait d'une façon continue avec jt dans toute l'étendue de l'arc AH . S'il y avait sur cet arc quelques points $B^{\wedge} C^{\wedge}$, . . . Fig. 8. (Jig- 8), où cette direction variât brusquement, on appellerait longueur de rare AH la somme des longueurs des arcs AB , BC , GH , dont chacune a, d'après ce qui précède, une valeur déterminée. J. — Cours, I. i6

2² PUMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE V. Soient $j:0 > J'o > ^o ' ^s$ coordonnées du point A (Jîg' 9), supposé fixe; $Xy y^z$ celles du point H supposé variable. Fig. 9. L'arc AH, défini d'après ce qui précède, est une fonction de la variable t , au moyen de laquelle x e\y sont exprimés. On la désigne généralement par s . Il est aisé de trouver sa difTérentielle. ^ Soit en effet K un point infiniment voisin deff et correspondant à la valeur $t-^dt$ de la variable indépendante /. L'accroissement \s de l'arc sera la limite d'un petit polygone inscrit à IIK, polygone dont les côtés font un angle infiniment petit avec la corde IIK. On aura donc A.Ç rzL corde HK m- i ~ $y/Aj?^* -r Aj^* 4- £$, £ étant d'ordre supérieur au premier. On aura donc, en se bornant aux termes du premier ordre, pour la valeur principale de A5, ds ri $ydx^* ' H- dy^ ^ y/.r'V/* dt$. 263. Cercle osculateiu\ — L'équation d'un cercle $(X-a)^*-i-(Y-?)^*-R«=:o$ contenant trois paramètres $a, j3, R$, on pourra les déterminer de manière à établir un contact du second ordre au point P, entre le cercle et la courbe.

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA SÉRIE DE

TATLOR. 2[^] Ce contact sera exprimé par les équations (5) $0 = v(0 - (\frac{1}{r} - \frac{1}{R}))$, (6) $0 = r(0 - (\frac{1}{r} - \frac{1}{R}))$, (7) $O = \frac{1}{R} \frac{d}{dt} \{x - a\} x'' - (7 - P)y' \frac{1}{r} - \frac{1}{R}$. De ces deux dernières équations on tire (9) $\frac{1}{R} = \frac{1}{r} - \frac{1}{R} = \frac{1}{r} - \frac{1}{R}$ et, en substituant dans l'équation (3), Le rayon R du cercle osculateur et les coordonnées a, j de son centre se trouvent ainsi déterminés. 264. Le lieu des centres des cercles osculateurs se nomme la développée de la courbe primitive G. Pour l'obtenir, il faudrait substituer dans les équations (6) et (7) les valeurs de $J^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} \frac{1}{y} > x'' j y'$ en fonction de t, et éliminer t entre les deux équations. On remarquera que l'équation (6), en y regardant a, p comme des coordonnées courantes, n'est autre que l'équation de la normale à G. L'équation (7) est sa dérivée par rapport au paramètre t. La développée est donc l'enveloppe des normales, 260. Courbure. — On nomme courbure moyenne d'un arc le rapport de l'angle ϕ formé par les tangentes extrêmes à la longueur A5 de cet arc; courbure en un point $(x^{\frac{1}{2}} y)$ la limite vers laquelle tend la courbure moyenne d'un arc infiniment petit commençant en ce point.

The text on this page is estimated to be only 24.00% accurate

244 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE IV. v' Soient ■ — le coefficient angulaire de la tangente en x, y, y' ^ AV' ^-j ' — celui d'une tangente au point (x ^- Ax, y -h Av), o Tanglc de ces deux tangentes. On aura Av' y ^*"? - y^^y-y - (x" 4- ax') x' -^'o' -.- Aj') y ' jl' -t- Ax' x' Or, on a sensiblement langczizçp, A/ ^ ^Vy/, Ax' ~ x'dt, ^' A y' _ y xr' -^ (x' j" — y x") dt , (.r'-h Ax')x'-r Cr'-h A>')/ - x'»-h/*, d'où aux infiniment petits près du second ordre. On a d'ailleurs, avec la même approximation, tis-sjx'^^y^dt, Q ^' ^' y p^ La courbure c -^ lim — sera donc éfirale à — — ' -- • Elle est, comme on le voit, égale à yr> R étant le ra^on du cercle osculateur. Ce cercle a la même courbure que le courbe proposée. En efl'et, as désignant un arc de ce cercle et

, et la courbure — sera égale à $77 \cdot T' A5^\circ R$ On donne souvent à ce cercle le nom de cercle de courbure; son centre et son rayon seront dits le centre et le rayon de courbure.

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA SÉRIE DE

TAYLOR. 2⁵ 266. L'expression trouvée ci-dessus pour ρ est positive ou négative, suivant le signe de la quantité $y y'^{''''}$. Si cette quantité est de même signe que x' , la quantité y' —, 9 coefficient angulaire de la tangente, croîtra ou décroîtra en même temps que x , La courbe tournera donc sa convexité vers les y négatifs. Ce serait l'inverse si $x'y - yx''$ était de signe opposé à x . 267. Les points où $y - yx'' = 0$ se nomment points d'inflexion. La courbure y étant nulle, le cercle de courbure aura son rayon infini, et se confondra avec la tangente. La tangente T en un point d'inflexion se confondra avec la tangente T' en un point infiniment voisin aux infiniment petits près d'ordre supérieur au premier. Car, en bornant l'approximation au premier ordre, l'angle des deux droites est nul; en outre, le point de contact de T' est sur la tangente T . 268. Les formules précédentes se simplifient si x est pris pour variable indépendante, auquel cas il faudra poser $\theta = i$, Il viendra dans ce cas, pour l'équation de la tangente, $Y - j = (X - i)$; pour la différentielle de l'arc, pour la courbure, pour l'équation $ds = \sqrt{1 + y'^2} dx$ et, des points d'inflexion.

246 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE V. 269. On représente parfois une courbe par une équation $S^o\{c\}$ entre T arc compté à partir d'un point quelconque et la courbure à l'extrémité de cet arc. Ces deux, quantités, dépendant d'une même variable ϕ , sont en effet fonctions Tune de l'autre. Cette représentation a l'avantage de n'introduire aucun élément étranger à la courbe, comme le sont, dans le système cartésien, les axes coordonnés. Il en résulte que deux courbes égales, mais différemment situées dans le plan, auront la même équation. Pour passer de l'équation d'une courbe ainsi définie à son équation en coordonnées cartésiennes, on prendra la dérivée de cette équation. Il viendra ou De cette équation entre les dérivées de r il restera à déduire cette fonction. Ce problème est du ressort du Calcul intégral, et nous ne pouvons que le poser en ce moment. 270. Proposons-nous d'appliquer les formules qui précèdent à quelques courbes simples. Parabole, — On aura d'où, en prenant x pour variable indépendante, ϕ / P

The text on this page is estimated to be only 24.24% accurate

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA SÉRIE DE
TATLOR. ⁴⁷ Équation de la tangente : Différentielle de l'arc : Rayon de
courbure : P' P' Développée : Les formules (8) et (9) donnent $y - p^{\frac{1}{2}} = ix - \frac{1}{2}x^2$
 $' = 3J7 - f - p, p \text{ o } i - r' \gg (\text{ / } > - 4 - rMr \text{ r' } ^{-}, ^{-}, j' - - - - 7^{\wedge} ?$. On en déduit a or $\gg 3$
Mais l'équation $y^{\wedge} = r. ipx$ donne Substituant dans cette équation les valeurs
de $x \text{ Qlj}^{\wedge}$, il vient $pr^{\wedge} 1 - \{ -- py^{\wedge} 271$. Ellipse. — On a $f! - 4_ 1! a \gg " ^ 6^*$

The text on this page is estimated to be only 12.88% accurate

2^e PARTIE. — CHAPITRE V. Équation qui équivaut aux deux, suivantes : $y' = a \cos t$ / $— 6 \sin t$ / . On déduit de celles-ci $y' = -a \sin t$, $y' = b \cos t$, $u'' = a \cos t$ $r'' = \sin t$, puis $x'y = yu'' = zab$. On aura donc, pour l'équation de la tangente, $Y - a \cos t = I_{jsvnt} - U_i^{iit}$ $b \cos t$ pour la différentielle de l'arc, pour le rayon de courbure, R s $(r' \sin V - A^{ros} O^* \text{ au } t \text{ et, pour les coordonnées du centre de courbure, } /;$ $ros / (\sin^2 t \text{ si } II^* / -h / > \cos^2 t) a - A a - a \cos t = \cos t \text{ au } a$ (en remplaçant $\sin^2 t$ par $1 - \cos^2 t$), $\int a \sin t \cos t = \frac{1}{2} a \sin^2 t$ $a^* - A' . , 3 - \int \cos^2 t = \frac{1}{2} t - \frac{1}{4} \sin 2t$, $\sin t / \cos t = \tan t$ (en remplaçant $\cos^2 t$ par $1 - \sin^2 t$). On en déduit $\frac{1}{\cos^2 t} = \sec^2 t = 1 + \tan^2 t$, $\sim \{a' b'\} \sin t / \{b'\}$

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DK LA SÉRIE DE
 TAYLOR. 2/Jc| Élevant au carré et ajoutant, on aura l'équation de la
 développée 272. Cycloïde. — On donne ce nom à la courbe engendrée par
 un point d'un cercle qui roule sans glisser sur une droite fixe. Pour obtenir
 les équations de cette courbe, prenons pour axe des x la perpendiculaire
 menée par le point décrivant au moment où il se trouve sur l'axe des x .
 Considérons une seconde position du cercle générateur. Soit OA (fig. 10) la
 quantité dont le point de contact s'est déplacé sur la droite OX .
 D'après la définition du roulement, il devra s'être déplacé de la même
 quantité sur le cercle. Le point qui décrit la cycloïde se trouvera donc dans
 une position B , telle que l'on ait $AB = AO$. Cela posé, soient a le rayon du
 cercle, t l'angle ACB , que nous considérons comme variable indépendante.
 On aura $AO = AB = a$, $OA = BD = at = a \sin t$, $AC = CD = a \cos t$.

The text on this page is estimated to be only 20.02% accurate

a5o PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE V. On déduit de ces équations $a' := La \{i - \cos t\}$, $y r^{\wedge} a \sin t$, $a^{\wedge} = r t \sin^{\wedge}$, $y'' := a \cos t^{\wedge} x' y'' - y x'' \sim a' (1 - \cos t)$ La tangente aura donc pour équation $\sqrt{1 - \cos t} Y - x r t (1 - \cos t) a \sin t$ et la différentielle de Tare sera $a \sqrt{1 - 2 \cos t} dt$, La normale aura pour équation $(X - x)(1 - \cos t) - (Y - r) \sin t = 0$. Le point où elle coupe Taxe des x s'obtiendra en faisant $Y = 0$ dans cette équation. On trouvera $\frac{K r \sin t}{1 - \cos t} = X - x$. $r - h - a \sin t = \frac{1 - \cos t}{a}$ La normale passe donc par le point A, où le cercle générateur touche Taxe des x, La distance N de ce point au point B, qu'on nomme la longueur de la normale, sera donnée par l'expression $N := \sqrt{(X - x)^2 + (Y - r)^2} = \frac{a}{\sin t} \sqrt{1 - \cos t}$. Le rayon de courbure sera égal à $\frac{a r^{\wedge} x - \cos t}{t^2 \cos t}$. Il est donc double de la normale en grandeur absolue. Les coordonnées du centre de courbure seront $az = za \{t - \sin t\} - H$ $2a \sin t = a(1 - \sin t)$, $p T = a(1 - \cos t) - 2a(1 - \cos t) = -a(1 - \cos t)$.

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA SÉRIE DE

TAYLOR. a51 Posons, dans ces équations, $i = \hat{t} - j - \hat{i}$; elles deviendront $a = a_1 z - \frac{1}{2} a \{ \hat{t} i - \sin \hat{i} \}$, $\hat{a} = 1 - \frac{1}{2} a H - a (i - \cos \hat{i})$, et Ton voit qu'elles représentent une cycloïde égale à la proposée, mais déplacée de a dans le sens des x et de $-\frac{1}{2} a$ dans le sens des y . — Géométrie infinitésimale.

273. Soient $i, A, \dots$ des infiniment petits connus, $a, \hat{a}$ des quantités qui leur soient liées par des équations $f(a, i, \dots, A, \dots) = 0$. Supposons qu'on veuille déterminer $a, \hat{a}, \dots$ aux infiniment petits près d'ordre n ; il est clair qu'on pourra supprimer a priori dans les expressions de $h, k, \dots$ à porter dans les équations $f = 0$, $\hat{f} = 0$, tous les termes dont la présence n'altérerait $a, p, \dots$ que d'un infiniment petit d'ordre $\hat{i}$. On verra aisément dans chaque cas, avec un peu d'attention, ce qui est négligeable et ce qui ne l'est pas. Dans les applications géométriques du Calcul différentiel, les infiniment petits $a, p, \dots, i, A, \dots$ qu'il s'agit de calculer en fonction les uns des autres sont rattachés ensemble par une figure de laquelle on déduit les équations $f = 0$, $\hat{f} = 0$ qui les lient. Au lieu d'établir les équations exactes et d'y négliger ensuite certaines quantités, il est généralement plus simple de considérer, au lieu de la figure rigoureuse, la figure approchée qui s'en déduirait en négligeant ces quantités; de cette nouvelle figure on tirera les équations approchées. Pour que ce procédé soit légitime, il faut évidemment qu'on soit en mesure d'établir que les quantités négligées

202 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE V. n'altéreraient le résultat à obtenir que d'une quantité négligeable eu égard à l'approximation que Ton demande. La nécessité de cette discussion diminue notablement les avantages que présente souvent la méthode géométrique au point de vue de la simplicité et de l'évidence. Les exemples suivants éclairciront ces considérations générales.

274. Problème L — Soit $f = f(h)$ l'équation d'une courbe en coordonnées polaires. On demande l'angle V de la tangente avec le rayon vecteur et la différentielle de V arc. Soient P, Q (Fig. ii) deux points de la courbe infiniment voisins, ayant pour coordonnées A, B et A', B' . Fig. i. Du point O comme centre avec OP pour rayon, traçons un arc de cercle PR . Menons les droites PQ, PR . L'angle V diffère de l'angle QPS , qui lui-même ne diffère de RQP que d'un angle infiniment petit A ; de même l'arc PQ ne différera de sa corde PQ que d'une quantité infiniment petite par rapport à PQ . Les quantités à calculer seront donc l'angle RQP et la corde PQ . Cela posé, RP , corde infiniment petite du cercle PR , sera sensiblement perpendiculaire à OR . Sa longueur sera sensiblement égale à l'arc RP , qui est égal à $p \cdot AO$. D'ailleurs,

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA SÉRIE DE

TAYLOR. 253 $RQ = \frac{1}{2} Ap$. Donc le triangle PQR est sensiblement un triangle rectangle ayant pour côtés de l'angle droit p et Ao , et Ton aura, par la formule des triangles rectangles, $\tan RQP = \frac{p}{Ao}$, $PQ = \sqrt{A^2 + p^2}$ et à la limite $r/0$ $\tan V = p/A$ » ds- y $WpM-p-t/6^*$. Mais il faut s'assurer que les modifications faites au triangle PQR n'ont pas altéré la valeur principale des quantités cherchées RQP et PQ. On peut, à ce sujet, remarquer d'une manière générale que les angles A, B, C d'un triangle quelconque ABC et les rapports $\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}$ de ses côtés sont liés par les trois relations connues $a = b \cos C + c \cos B$, $b = c \cos A + a \cos C$, $c = a \cos B + b \cos A$, d'où $a = b \cos C + c \cos B$, $b = c \cos A + a \cos C$, $c = a \cos B + b \cos A$. Si l'on donne des accroissements infiniment petits à deux des quantités qui figurent dans ces formules, les trois autres prendront des accroissements correspondants infiniment petits et dont les valeurs principales s'obtiendront en différentiant les équations précédentes. Dans le cas actuel, on a modifié infiniment peu l'angle en RP, PO R et le rapport $\frac{p}{Ao}$. L'angle en Q et le rapport $\frac{PQ}{Ao}$ auront infiniment peu changé. Donc, l'angle Q et le côté PQ n'ont été altérés que d'une fraction infiniment petite de leur valeur, ce qu'il fallait démontrer.

The text on this page is estimated to be only 27.53% accurate

254 PftEXIÈRS PAHTtE. — CHAPITIB Y. 273. Problème II. —
 Trouver la longueur de Vorc de la développée d'une courbe C. Soient MT,
 M'T' (Jlff. 12) deux normales à C infiniment voisines; f leur angle ; T et T'
 les points où elles touchent la développée. Fie- 12. M' // \ C n^^ i\ En
 négligeant les infiniment petits du second ordre (MM' étant considéré
 comme du premier ordre), on pourra admettre : I** Que M est sur la
 tangente au point M', laquelle est perpendiculaire à M'T'; M , ^ \ \ M' Fig. i3.
 M' \ \ •r 2° Que T est sur la tangente M'T' à la développée ; 3** Que Tare
 TT' se confond avec la droite TT'.

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA SÉRIE DE

TATLOR. 255 Le quadrilatère curviligne $MM'TT'$ ainsi simplifié prendra la forme ci-jointe (fig. 13), laquelle donnera $M'r = MT \cos \alpha + TT'$. D'ailleurs, l'angle α étant infiniment petit, on a sensiblement $\cos \alpha = 1$, d'où $M'r = MT + TT'$. 276. Les considérations qui précèdent ne fournissent qu'un aperçu ; mais il est aisé de rendre la démonstration rigoureuse. A cet effet, nous remarquerons tout d'abord que, MM' étant supposé du premier ordre, o et TT' en seront également, car on a sensiblement $\frac{c}{k} MxM' - rzArTT'$, c et k désignant les courbures de la courbe donnée et de sa développée. Cela posé, projetons le quadrilatère curviligne $MM'T'T$ sur $M'T'$. On aura $M'T'rr$. proj. MM' h proj. MT h- proj. TT . Or proj. MM' = corde MM' $\cos \theta$, θ étant l'angle de ladite corde avec $M'T'$. La corde MM' étant du premier ordre et θ infiniment voisin d'un droit, proj. MM' sera d'un ordre supérieur au premier et pourra être négligé. D'autre part, proj. $MT = MT \cos \phi$, et, ϕ étant infiniment petit du premier ordre, $\cos \phi = 1 + \dots$ pourra être remplacé par l'unité. Donc proj. $MT = MT$. Enfin, on aura proj. $TT' =$ corde $TT' \cos \gamma$, γ étant l'angle formé par la corde TT' avec $M'T'$. Cet angle étant infiniment petit et la corde TT' différant infiniment peu de l'arc, on aura sensiblement proj. $TT' = TT'$. On aura donc bien $M'T' = MT + TT'$.

a56 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE V. 277. Cette équation n'a été démontrée que pour un arc $M > r$ infiniment petit, et en négligeant les infiniment petits d'ordre i . Mais il est aisé d'en conclure que l'égalité est rigoureuse, et qu'elle est vraie pour un arc quelconque MN pris sur la courbe C. Soient, en effet, MT, NU (Jiff- i4) les normales aux points M et N ; T, U les points où elles touchent la développée. Partageons l'arc MN en portions infiniment petites MM', M' M'', M'' M''', Menons les normales aux points M', M'', M''' Soient T', T'', T''', ... les points où elles touchent la développée. On aura, d'après ce qui a été démontré, $M'T' \wedge MT - hTT' - \wedge \xi$, $MT'' \wedge M'T'H - Tr T - \xi$, ξi , So, ... étant d'ordre $>> i$. Ajoutant toutes ces égalités, il viendra $NU \approx MT - TU - \xi$, $4 - \xi$, $-+-$ Soient s la plus grande en valeur absolue des quantités ξ , Sa, . . . ; n leur nombre. On aura Si $-f - \xi^2 - h \dots$

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA SÉRIE DE
 TAYLOR. 25" et $MT + TU$ est moindre que toute quantité donnée. Donc
 elle est nulle. 278. On doit pourtant remarquer que, en faisant la figure qui
 nous a fourni l'égalité $M'TrLMTn-TT'$, nous aurons implicitement supposé
 que $M'T'$ était $r > MT$. Si $M'T'$ avait été $< MT$, on aurait eu et, par suite, $NT -$
 $= MT - TT' NU - MT - TU$. Soit donc MN un arc de la courbe C choisi de
 telle sorte que la longueur de la normale comprise entre la courbe et la
 développée varie constamment dans le même sens; on aura $NU^{\wedge} - MT + TU$
 si cette longueur augmente, $NU = - MT - TL$ si elle diminue. Si Ton avait
 un arc MPN {fig- i5) tel que la longueur de la normale augmentât de M en
 P pour décroître ensuite de P en N , on aurait, en appliquant successivement
 le théorème J. — Cours, I. 17

258 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE Y. aux deux parties de
Tare, PS -r- MT -h TS, PSrr_NU-+-SU, d'où 2PS - MT + NU-hTSU. 279.
Problème III. — Construire la tangente à la courbe K lieu des sommets d'un
angle α de grandeur constante, dont les côtés restent tangents à deux
courbes données. Considérons deux positions infiniment voisines ABC, A|
B| C| {Jig» i6) de cet angle. L'angle des deux droites AB, Fig. i6. V A| :V|B|
est égal à celui des deux droites CB, C|B|. Cet angle étant considéré comme
du premier ordre, les arcs AA|, CC| seront du premier; quant à BB,, il ne
peut être d'un ordre supérieur au premier, car la droite A,B, n'étant en A|
qu'à une distance infiniment petite du second ordre de la droite \B, et faisant
avec elle un angle infiniment petit du premier ordre, en sera éloignée en B|
d'une quantité du premier ordre. Au contraire, la distance de A à la tangente
A| B| et celle de C à la tangente B, Cj seront du second ordre. Si donc, par
les points A et C, on menait des parallèles respectivement à A|Bj et à B|C|,
leur point d'intersection ^ serait, à une distance de B, infiniment petite du
second ordre, et par suite infiniment petite relativement à BB|, qui est du
premier. La

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA SÉRIE DE

TATLOR. 209 droite $BB|$ différera donc infiniment peu comme direction de la droite $B^\wedge$. Cette dernière est une corde infiniment petite du cercle, lieu des points d'où l'on voit AC sous l'angle cp , et, à la limite, devient la tangente à ce cercle. Mais, à la limite, $B^\wedge$ devient la tangente à K. Donc ces deux tangentes coïncident. 280. Théorème. — Soient E, E' (Jig- i'j) deux ellipses homo/ocales. Par chaque point P de E' menons deux tangentes PA, PB à E. La somme des tangentes PA, PB, diminuée de rare AB, sera constante. Nous nous appuierons sur cette propriété facile à démontrer, que les deux tangentes PA et PB l'ont un angle égal avec la tangente en P à la courbe E'. Soit α cet angle. Cela posé, soient P' un point infiniment voisin de P, situé sur E'; P'A', P'B' les deux tangentes correspondantes. La figure BB'P'P, projetée sur BP, donnera $BP^\wedge \text{ proj. } BB' -r- \text{ proj. } B'P - \text{ proj. } PP'$. Or, en négligeant le second ordre, BB' peut être considéré comme une ligne droite et $B^\wedge$ comme étant sur BP. Donc $\text{proj. } BB - : BB'$. De même, B'P' faisant un angle α infiniment petit avec BP, sa projection B'P'cosa se réduira à B'F, au second ordre près. Enfin, PP' étant du premier ordre et formant avec BP un

The text on this page is estimated to be only 29.26% accurate

200 PRBHlfeRB PARTIS. — CHAPITRE Y. angle infiniment
voisin de ζ , on aura, au second ordre près, pour sa projection, $PF \cos \alpha$:
d'où $BP = BB' - B'P = PF \cos \alpha$ (p. En projetant la figure $AA'P'P$ sur AP ,
on trouvera de même $AP \cos \alpha - AA' - A'P' + PP \cos \alpha$

7 — $f'(0, -) = f''(0)$ les équations d'une courbe gauche; $x^4 y^5$, t les
coordonnées d'un point P pris sur cette courbe. Tangente et plan normal, —
Les équations d'une droite (i) $Y = aX + a_1$, $Z = \alpha X + \alpha_1$
contiennent quatre paramètres dont on pourra disposer pour établir un
contact du premier ordre au point P entre la droite et la courbe. Il faudra
pour cela satisfaire aux équations

The text on this page is estimated to be only 26.64% accurate

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA SÉRIE DE
TATLOR. 26 1 Des équations (i) et (2) on déduit $Y - j - a(X - j?) = 0$, Z
 $- z - a\{X - x\} = 0$ et, en éliminant a , a^2 , on aura les équations de la
droite osculatrice ou tangente $X - x - Y - y - Z - z$ Le plan
perpendiculaire à la tangente, ou plan normal, aura pour équation $(\frac{\partial}{\partial x}x)^2 + (\frac{\partial}{\partial y}y)^2 + (\frac{\partial}{\partial z}z)^2 = 0$. Si la courbe était donnée par deux équations $F(x, y, z) = 0$, $G(x, y, z) = 0$, il faudrait, pour appliquer ces formules, y remplacer j par l'unité, y et z par leurs valeurs déduites des équations $\frac{dF}{dx} = -\frac{dF}{dy}$, $\frac{dF}{dy} = -\frac{dF}{dz}$, $\frac{dG}{dx} = -\frac{dG}{dy}$, $\frac{dG}{dy} = -\frac{dG}{dz}$. Par cette substitution, les équations de la tangente deviendront $X - x - Y - y - Z - z = 0$ et $\frac{dF}{dx} = -\frac{dF}{dy}$, $\frac{dF}{dy} = -\frac{dF}{dz}$, $\frac{dG}{dx} = -\frac{dG}{dy}$, $\frac{dG}{dy} = -\frac{dG}{dz}$.

à $\frac{d^2}{dz^2} = 0$. 282. Différentielle de Varc, — Nous appellerons longueur dl d'un arc de courbe la limite d'un périmètre d'un po

The text on this page is estimated to be only 26.73% accurate

262 PftBMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE V. Ivgone inscrit. On démontrera, comme pour les courbes planes : 1° Que cette limite ne dépend pas de la loi d'inscription des côtés; 2° Que la longueur s de l'arc compris entre le point $Q(v)$ (jro, $\wedge^o > \wedge^o j'0$) et un point variable $(x, v, >s, \wedge)$ éprouvera, lorsqu'on passera du point $(\wedge, J>', 5, \wedge)$ à un point infiniment voisin $(x - r \setminus x, y - \hat{i} - A>', z - A_j, t \sim dt)$, un accroissement $A^\wedge$ égal à $y/Ax - r$ $Av -$, $A^{\wedge\wedge} - i - s$, e étant d'ordre supérieur au premier. Donc dS_f valeur principale de A_5 , sera donné par la formule 283. Plan osculateir, — L'équation (3) $AX^\wedge BY - i - GZ$ 1 Do contient trois paramètres (les rapports des coefficients A, B, C, D) dont on peut disposer pour établir entre le point et la courbe un contact du second ordre. Cette condition sera exprimée par les équations (») $Kx - B> - \wedge C - JH - I) - o$, (5) $A^\wedge hy - Cz' - o$, (6) $Kx', By \sim, - Cz'' - o$. Des équations (3) et (4) on déduit d'abord $\wedge^7) A(\setminus a -) - \}$ $- B(\setminus \text{—}^\wedge > -) - hC(\bar{Z} - 3) . o$. Éliminant ensuite A, B, C entre (5), (6), (7), il viendra $\setminus \text{—} x Y \text{—} V Z - z ; x' y z' j - : o, 1 X'' y z'' \setminus$ Les coefficients A, B, C auront donc, à un facteur commun

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA SÉRIE DE
 TAYLOR. 263 près, qu'on peut supposer égal à Tunilé, les valeurs suivantes
 : $A = \frac{1}{5}x'' - 5x'$, $B = -z'x' - x'z$, $C = \alpha'y'' - yx''$. Ces coefficients satisfont
 identiquement aux équations (5) et (6), ainsi qu'à celle-ci : (8) $K\alpha'^{-1}B'y'-v-$
 $C'z' = 0$, laquelle s'obtient en prenant la dérivée de (5) et supprimant les
 termes qui se détruisent en vertu de (6). 28i. L'équation ci-dessus du plan
 osculateur contient le paramètre t variable d'un point à l'autre de la courbe.
 Considérons la surface enveloppe de ce plan, lorsqu'on fait varier ce
 paramètre. La caractéristique de cette surface sera donnée par l'équation (9)
 $A(X-a)^{-1}B(Y-j)-f-C(Z-c)=0$, jointe à sa dérivée $A'(X-x)-HB'(Y-7)-f-$
 $C'(Z-5)-A' - By - C'::^{\wedge}0$ par rapport à t . Cette dernière équation se
 réduit à (10) $A'(X-a) - 4B'(Y-7) - C^{\wedge}(Z-z) = 0$, en vertu de l'équation
 (5). Cette caractéristique n'est autre chose que la tangente $x^{\wedge} - \sim y_{-}$
 (iz'i au point $(j, j', \wedge)$). En effet, si l'on donne à $X = \alpha$, $Y = v$, $Z = z$ des
 valeurs proportionnelles à x, y, z les équations (9) et (10) seront
 identiquement satisfaites, leurs premiers membres contenant en facteur les
 quantités $Aa' - B^{\wedge} + C-3'$, et $A'a' + By' - C'::'$. Le point où la caractéristique
 rencontre l'arête de rebrous- .

a64 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE V. sèment est défini par les équations (9) et (10), jointes à la dérivée de l'équation (10). Cette dérivée se réduit à (11) $V(\lambda, r) - hB'(\lambda, v) - f - C''(Z - 5) = 0$, en tenant compte de l'identité (8). Les équations (9), (10), (11), combinées entre elles, donneront évidemment $\lambda, r, Y \rightarrow Z$. Donc la surface enveloppe des plans osculateurs a pour caractéristiques les tangentes à la courbe proposée et pour arête de rebroussement cette courbe elle-même. Réciproquement : soit donné un système quelconque de plans P dont l'équation contienne un paramètre λ . En faisant varier ce paramètre, on obtiendra une surface enveloppe dont les caractéristiques seront des lignes droites, tangentes à l'arête de rebroussement, et le plan P, ayant un contact du second ordre avec cette arête de rebroussement, lui sera osculateur. On donne le nom de surfaces développables aux surfaces engendrées par les tangentes à une courbe, ou enveloppes d'un plan variable dont l'équation ne contient qu'un paramètre. Ces deux définitions sont en général équivalentes, comme on vient de le voir. Toutefois, la seconde a sur la première l'avantage d'embrasser les surfaces coniques et cylindriques* On obtient les surfaces coniques en supposant que le plan variable soit assujéti à passer constamment par un point fixe, qui sera le sommet du cône. Ce point unique jouera le rôle dévolu en général à l'arête de rebroussement. On obtiendra les cylindres en supposant que le plan variable reste constamment parallèle à une droite fixe. Les génératrices caractéristiques, étant parallèles à cette droite, ne se couperont pas. La surface pourra être considérée comme la limite d'un cône dont le sommet s'éloigne à l'infini dans une direction déterminée.

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA SÉRIE DE

TAYLOR. 265 285. Enveloppe des plans normaux, — Le plan normal au point (x, y, z) a pour équation Cette équation contient le paramètre t . En le faisant varier, on obtiendra pour enveloppe une surface développable. • La caractéristique de cette surface est une droite qu'on nomme Vaxe du plan osculateur. Elle a pour équations $N = 0$, $\hat{t} = (x - X) / (Y - y) = (z - Z) / (y - y)$. Elle est perpendiculaire au plan osculateur, car les équations $Aa' - f - B - hCx\hat{t} : 0$, $kx''^h y'' - ^Cz' - : 0^$ trouvées plus haut, montrent que chacun des deux plans $N = 0$, $-- = 0$ est perpendiculaire au plan osculateur. Enfin Tarète de rebroussement de cette surface sera donnée par les équations 286. Cercle osculateur. — Les équations générales d'un cercle sont $(X - a)^2 + (Y - ?)^2 + (Z - y)^2 = R^2$, $(X - a) - i(Y - ?) - j(Z - Y) = 0$, $a, ^, Y$ étant les coordonnées de son centre et R son rayon. Nous avons ici six paramètres : $a, p, y \gg R$? — ' ' qu'on pourra déterminer de manière à obtenir un contact du second ordre au point $(x, ^, z)$.

The text on this page is estimated to be only 18.92% accurate

a66 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE V. On aura, à cet effet, les six équations de condition (12) $\{x - a\} \ll 4 - (V - ?)' - f - \{z - f\} \ll - R = 0$, (i3) $\wedge(\wedge - a)^{\wedge v}(r - p) - i - :: H^{\wedge} - Y) - - o, m\{x \bullet - a) - i - , i(y - - p)H - / ; (j - - Y) - - o, //ix' \bullet nv' - ' - pz' . o, mx'' , ny'' \wedge - pz'' - o$. Des trois dernières on déduit, en éliminant $niy / z, / >, X' x''^{\wedge t} - o$, ou (i5) $A(a - - ot) - uB(v - - p) - i - C(c - - y) - =^{\wedge} o$ Cette équation montre que le point (a, p, y) est dans le plan osculateur. La deuxième et la troisième montrent que ce point se trouve dans les deux plans $N : - - o, - j - = o$, dont l'intersection est l'axe du plan osculateur. Le centre cherché se trouve donc à l'intersection de cet axe avec le plan osculateur. Pour calculer a, β, y, R , nous résoudrons les équations (i3), (i4) et (i5) par rapport à $x - a, j >' - - p, z - - v$. Le déterminant x'' / C i $A B^{\wedge 1}$ de ces équations étant égal à $A'' - h 8 = " - \wedge - C''$, on trouvera $(C; - Bv')(r' \ll - r' \ll - 4 - 5' \ll) r - ! * A^* - t - B \gg - + - C \ll (A.r' - Cr')(y' + .r' \gg - ^s''^{\wedge} A = - f - B \gg - rC' (B.v' \blacksquare - A = H_j - (-.r'' - 4 - f'') A.^* - t - B^* H - C^*$

The text on this page is estimated to be only 26.34% accurate

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DK LA SÉRIE DE

TATLOR. 267 et, en substîluanl dans(i2), '*' == ^+S/ [^^'- By)« + (Aa'-C/)« - (B/- Ac')']. Or la quantité entre parenthèses peut s'écrire (A*-4-B«;-C^)(^'«-^v'«-+-^')«~(A^'-^BJ•'^-Gy)^ et comme Il viendra R 287. Sphère osculatrice. — L'équation d'une sphère (X - ay'-\ - (Y — by-\ - (Z - c)»-: ^--p« contenant quatre paramètres, on pourra obtenir un contact de troisième ordre. Oïl devra, pour cela, satisfaire aux équations M ■,,-. .r'(.r -a) ^ .y(y--ij) + ^ (^ - - c) - o, âM dont la première donnera p'^, après que les trois autres auront fourni a^ b^ c. Le lieu des centres des sphères osculatrices n'est autre chose que rareté de rebroussement de V emeloppe des plans normaux. Car ce lieu s'obtiendrait en éliminant t entre les équations M -~^ o, --^ - =^ o, — ^i= o, et 1 arête de rebroussement, en éliminant t entre les équations N -- o, - = o, (?* N -^ - — - o. Or M ne diffère de N que par le signe et par la

The text on this page is estimated to be only 26.33% accurate

268 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE Y. désignation des coordonnées courantes (a, b, c , au lieu de X, Y, Z). Nous admettrons, pour simplifier le calcul de a, b, c, p , que nous ayons choisi pour variable indépendante l'arc s de la courbe, compté à partir d'un point fixe. On aura, dans cette hypothèse, $t = s$ d'où $dt = ds$ — $y \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt$, et, par suite, (16) $\frac{1}{t} + y t^4 = \dots$. Prenant la dérivée de cette équation, on aura la suivante : $x''x' - y''y' - z''z' = 0$, Formons les dérivées de M en tenant compte de ces relations. Il viendra $\{x - a\}x' - \{y - b\}y' - \{z - c\}z' = 0$ $\frac{d}{ds} M = \dots$ En désignant par D le déterminant $X' y' z' / X'' y'' z''$ $\frac{d}{ds} \frac{1}{D} = \dots$ On aura de même $C = \dots$,

The text on this page is estimated to be only 29.67% accurate

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA SÉRIE DE
TATLOR. 269 et enfin $p = z \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + c^2}$ On peut
donner à cette valeur de p une autre expression. Le point (a, b, c) étant sur
Taxe du plan osculateur, qui coupe ce plan au centre du cercle osculateur, p
sera l'hypoténuse d'un triangle rectangle, ayant pour côtés R et la distance h
du point (a, b, c) au plan osculateur. Or, le plan osculateur ayant pour
équation $A(X-a) + B(Y-b) + C(Z-c) = 0$, on aura $p = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot h$
Mais, en tenant
compte de l'équation (i6), on aura $\frac{h}{R} = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$
C* Désignons, d'autre part, par r la quantité r (que nous retrouverons plus
tard sous le nom de rayon de torsion), il viendra $h = r \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, d'où 288.
Soient p un point (a, b, c) de la courbe correspondant à une valeur θ (de la
variable; T la tangente; P le plan osculateur. Soit P_i un point de la courbe
infiniment voisin de p ,

The text on this page is estimated to be only 20.90% accurate

270 PREXIfBE PARTIE. — CHAPITRE V. correspondant à la valeur $t + dt$, et soient $x -r Aj$;, $y -h Av$, 5 -f- $A^{\wedge}$ les coordonnées de $/>i$; $T|$, Pi la tangente et le plan osculateur correspondant. Les distances de $p^{\wedge}$ à $/>$, à T et à P , de Ti à T , et les angles de $T|$ avec T et P , de P , avec P sont autant d'infiniment petits, dont il est intéressant de déterminer les valeurs principales. Distance de $/>$, kp . — Elle est égale à $y Ax - . - A^>' = * - ; - A^{\wedge} *$, ou, en remplaçant Ax , Aj' , z par leurs valeurs approchées $x'dl.ydt$, $zfdl$, à $\backslash u'^{\wedge} i - y - \backslash - z^* dt --- ds$. 289. $An^{*\wedge}le$ de Ti a\ecT. — On sait que Tangle çp de deux droites, dont les cosinus directeurs sont respectivement proportionnels à flf , 6, c et à $rt|$, 6|, C|, est donné par la formule $V \ll * -r - ^* t - C^* V \ll \hat{H} \hat{H} - H \hat{H}$ On en déduit • s. — $i!l \text{ } ^{\wedge}l^{\wedge} - ^{\wedge}^{\wedge}l^{\wedge}^{\wedge} \wedge />; -h c;)$ — ($^{\wedge}$, 4- $/>^{\wedge}i$ -4- ce, $Y_{ihc}, ^{\wedge} cbyY -r - \{cay - aCxY - ^{\wedge} - \{ahy - ha, Y$ Pour appliquer cette formule, il faudra y remplacera, b.c. ($f^{\wedge} f^{\wedge}ty C \backslash$ par leurs valeurs actuelles $.r \backslash, y, .r'hAx', /-hA/, z' -r- lz \backslash$ ce qui donnera (17) $\sin^*cp = (J: - '=' -r - / == -T - ^{*}) [(.z: '4-A./;')^* -t - (/ -H Ao: ')^* H - (^' t - A - /] ' Ar', Ar', As'$, étant infiniment petits, peuvent être négligés au dénominateur, qui est fini. Au numérateur, on les rempla

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA SÉRIE DE

TATLOR. 27 1 sera parleurs valeurs approchées $cd^t y^t dt, z^t dt$. Il viendra alors Donc cp , qui est égal, au troisième ordre près, à $\sin cp$, aura pour valeur approchée $y/A^* - h B^* - h C^*$, Nous appellerons courbure, comme dans les courbes planes, la limite du rapport de Tangle de deux tangentes voisines à l'arc qui sépare les points de contact. Cette limite est évidemment égale au rapport des valeurs principales de ces deux quantités; en la désignant par A'' , nous aurons donc $o \sqrt{A^2 - hB^2 - tC^2} \sim I' \sim ds \sim \sqrt{A''} R$ désignant le rayon du cercle osculateur. Ce cercle, son rayon et son centre pourront s'appeler, comme pour les courbes planes, cercle^ rayons et centre de courbure. 290. Angle de P avec P|. — Cet angle $\bullet$, égal à celui des normales à ces deux plans, sera donné par la formule suivante, analogue à la formule (17), $\bullet = \frac{1}{2} \arccos \frac{(BaG - CaB) \sqrt{4 - (Ca^2 - AaC)^2 - (AaB - BaA)^2}}{(7v^2 - B^2 V^2 C^2) [(A - r - l) M - (BVAB) - (C - ir^2 \text{ au dénominateur, on pourra négliger } AA, AB, AC; \text{ au numérateur, on les remplacera par leurs valeurs approchées } r/A - z - (1/5 - z'y) dt, d^2 = i \{z'x'' - x'z''\} dl, dC' - \{x'y'' - yz''\} dt,$

The text on this page is estimated to be only 20.96% accurate

27*2 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE V. Posons, comme précédemment, $x' y' z' D - x' f' s' .$, $x' y' s'$ on trouvera $BxC - C^B - Dx'dt$, $CaA - AAC = D/rff$, $XIB - tixK - Dz'dt$. d'où Cl ni (ti $D \ll (.r' \ll + \gg \bullet)' \gg -$ $= 'M^/' _ D^{ds^}$ et, en remplaçant le sinus par l'arc, La quantité $-j- --^ -ri .r-^ -r^$ se nomme la torsion de la courbe; nous la désignerons par t . Son inverse se nomme le rayon de torsion . 291. Angle de P «rec $\ddot{I}$]. — Gel angle δ est donné par la formule $\sin \delta -$ Au dénominateur, on peut négliger Ax' , $A^{'}$, As' . Au numérateur, on les remplacera par leurs valeurs approchées $x''dt + ^x'''rf/^ ydt - \{- \backslash y''dt \backslash z''dt + ^, z'''dt \backslash$ Remarquant que Ton a et mettant 0 au lieu de son sinus, il viendra $y/A \gg + B' -+- C \ll y/x'^{-f-y* \blacksquare + \blacksquare -' \ll$

The text on this page is estimated to be only 16.11% accurate

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA SÉRIE DE
TAYLOR. 278 292. Distance de p à T . — Nous avons trouvé, pour la
distance du point (a, a_i, o_l) à la droite $X=ia-i\hat{o}/, Y==ai-i-\hat{f}, Z:=a,4-\hat{i}$,
la formule $3_{-} . /[(^{\hat{ij}}:2iil^{\hat{}} \blacksquare (aj-a,)M^{*}-h[(rt.-a2)^{\hat{}}-(a-a)^{\hat{}},]^{*}-h$. Nous avons
ici $a=ix, a\backslash\text{---}y'y a^{\hat{}}\text{---}z, az^{\hat{}}\text{---}t-Ao-, ai=7-t-Aj, a,:^{\hat{}}5-hA5, bz=Lx', ^1 = /, 6,$
 $= 5'$. I[^] formule deviendra , $_{-} / (y A: ? \text{---} z'ivY-]- (z'yr \text{---} Jo'lzY -h (j-'Av \text{---}$
 $/aT)''$ ou, en remplaçant $A^{\hat{r}}, A^{\hat{}}, As$ par leurs valeurs, $ix zzzx'dt-\hat{-} x'' h . . .$
 $, 1 .2 . . ., dt'^{\hat{}} As =. z'dt -h z'' h . . ., 1.2 y ir'^{\hat{}}-hy'^{\hat{}}-hs'^{\hat{}} 1.2 ' 293$. Distance
de $/?i^{\hat{}} P$. — Elle est donnée par la formule connue $^{\hat{}}^{\hat{}} A(>g-hAj? \text{---} a?)\text{---}f\text{---}$
 $B(v + Ar\text{---} y)H\text{---}C(s + As \text{---} s)^{\hat{}} VA^{*4}\text{---}B^{*4}\text{---}C\ll ' ou, en remplaçant $A^{\hat{}},$
 $Aj^{\hat{}}, As,$ par leurs valeurs approchées, $x' 4- \backslash x'dt^{\hat{}} + 1- x'dt^{\hat{}} \text{---}+ \dots, 5:.= :hi^{\hat{}}$
 $^{\hat{}} dt^{\hat{}} = \pm l^{\hat{}}. 6^{\hat{}} A\ll + B^{*}\text{---}hC\gg 6 J$. — Cours, I. 18$

The text on this page is estimated to be only 16.12% accurate

274 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE V. 294. Distance de i à T . — Appliquons la formule trouvée pour la distance de deux droites, en y posant, pour a^i , flj . $\rightarrow$, & i , & $2i$ $^*?$ $^M^a?$ $?)$ $?M$ $?2?$ leurs valeurs actuelles $-r, ^v, z. x \setminus y \setminus z \setminus X$ $4- Aj$., y $4- Ar$, $5 + Aj$, $:r-f- Ax'$, $; >-r A >'i$ $^+ Ac'$. Il viendra, pour la distance cherchée $s. V/(A3' - ^Av')^*H-(^A^'-^A3')^h(.r'Ar' - r'Xr';^$ où $Lrrr S, x Ix' - x' \setminus y \setminus y -y Hz Xz' - z' Le$ dénominateur a pour valeur principale $y/A = ^-t-B^*-|-C-r/$. On a, d'autre part, $x' dt-^x' h.r'^{-rT- 4-... x' dt-\setminus x'' h... - x^2 b^2 ' L = / , ^^^ \ll r dt^y' dt 4- r'' h v'' ^-4-... v'^2 , ^/* , dt^* z' dt-^ z'' \setminus ^-7^ Z'dt dt^2 OU$, en ajoutant aux termes de la première colonne ceux de la deuxième et de la troisième, respectivement multipliés par $-J dt$ et par dt (ce qui n'altérera pas le déterminant), $.dt^ Li = ^v'^dt'il-l)'dt, dt' y'^dt'(\setminus l)-h... fdt^r'—+ . ^-^^ \gg (l _ !.) + ... V/4- ^'^ -h... ^z'^2 pu$, en réduisant chaque terme à sa valeur principale, $Y y y 12$

APPLIcATIOnS GÉOMÉTRIQUES DE LA SÉRIE DE

TAYLOR. 75 Donc $\pm D \, dt^k \cdot k \cdot z \, ds^{\pm 1} \cdot VA^* - B^*4 - C^* > 2 \, 12 \, 293$. On nomme plans oscillateurs stationnaires ceux qui correspondent aux points où $D = 0$. La torsion étant nulle en ces points, le plan osculateur P s'y confondra, au deuxième ordre près, avec le plan osculateur en un point P , infiniment voisin. En outre, S étant nul, la distance de P à i sera du quatrième ordre. Le plan P aura donc un contact du troisième ordre avec la courbe, et se confondra avec la sphère osculatrice. On voit par là que les plans stationnaires sont analogues aux tangentes d'inflexion des courbes planes.

296. Proposons-nous encore de calculer la différence entre un arc infiniment petit et sa corde. Nous simplifierons un peu les calculs en admettant qu'on ait pris pour variable indépendante l'arc s . On aura, dans ce cas, et, en différentiant, puis $\frac{dx}{ds} \wedge \frac{dy}{ds} \wedge \frac{dz}{ds} = \frac{1}{\rho} \frac{dx}{ds} \wedge \frac{dy}{ds} \wedge \frac{dz}{ds}$, ■

La formule de la courbure se réduira à On a, en effet, $\frac{1}{\rho} = \sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2}$

The text on this page is estimated to be only 26.36% accurate

276 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE Y. quantité qui se réduit à $x'' + s''$ d'après les équations précédentes. Cela posé, soit ds un arc infiniment petit; sa corde sera $\sqrt{1 + s'^2}$. Il s'agit d'évaluer la différence de ces deux quantités. On a identiquement $ds = \sqrt{1 + s'^2} - \sqrt{1 + s'^2} = \frac{1}{2} s'^2 ds' + \dots$. Le dénominateur de cette expression est sensiblement ds . Pour avoir le numérateur, on remplacera Ax, A, As par leurs développements, $ds = \sqrt{1 + s'^2} = 1 + \frac{1}{2} s'^2 - \frac{1}{8} s'^4 + \dots$. Développant et ordonnant suivant les puissances de ds , il viendra $\{i^2 x'^2 - y'^2 - z'^2\} ds^2 - 2\{x'x'' - y'y'' - z'z''\} ds^3 + \dots$. Les coefficients des termes en ds^2 et ds^3 s'annulent. Celui du terme en ds^4 sera, d'après les équations précédentes, $(-s'' + 7s'' + s''')(t + i) = 12k ds^2 \sim 24297$. On nomme normale principale au point $(x, r, 5)$ la perpendiculaire à la tangente située dans le plan osculateur; binormale la perpendiculaire au plan osculateur. Ces deux droites forment avec la tangente un trièdre trirectangle.

The text on this page is estimated to be only 23.68% accurate

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA SÉRIE DE
TAYLOR. 1277 Déterminons les cosinus directeurs de ces trois droites : 1*
Les cosinus directeurs a, b, c de la tangente, étant proportionnels à x', y', z'
seront respectivement égaux à $a' dx, y' dy, z' dz$? Ceux de la binormale $a,$
 p, y étant proportionnels à A, B, G seront égaux à $ABC \sqrt{A^2 + B^2 + G^2} / A$
 $- B \sqrt{A^2 + B^2 + G^2} / A$? Enfin la normale principale étant
perpendiculaire aux deux droites précédentes, ses cosinus directeurs α, β, γ
satisferont aux équations $XA + YB + ZC = 0$, et seront proportionnels aux
quantités $G/\sqrt{A^2 + B^2 + G^2}, kZ - Cx/\sqrt{Y^2 + x'^2 - ky^2}$ On aura donc $\alpha^2 = Gy - B^2 \alpha^2 = Gr - B^2$
 $\sqrt{(A^2 + B^2 + G^2)(\alpha^2 - f - h^2)} = (Aa - f - B - hG)^2$ et, comme $Ajc - f - By +$
 $Gs' = 0, V/(A^2 + B^2 + G^2)(a^2 - 4 - 2H - 5^2)$ On aura de même $jA = ac - ya,$
 $- \alpha b = ?c.$

The text on this page is estimated to be only 12.87% accurate

27^ PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE V. 298. Cherchons comment varient ces cosinus directeurs lorsque le point (XjVjZ) se déplace infiniment peu sur la courbe. On aura d'abord y de ^ ^ î: Y-"—^ ^^ "y-"
dt^i^^^^'-^^dt^i.ds: On aura de même db = |i.A* ds, de = v A* ds. On aura,
en second lieu, doL^d ^ (A2-hB*-4-C«)* H(BA'- \BM+ -C(C\' — AC) ^ —
5 dt (A*-hB»-4-C2)"* — ^ •■ — - — j dt — —k'z dsy (Aî-i-B«-hC*)* et
de mtême ^3 = — [XT dSf d-^^n — VT ds. Enfin dk — rf(Y b — ^c) — -{
db ^ b d^i -- c d^ — ^ de ■:= (Yjx k — b^' -f- c jjLT — 3v A) ds — (TH-
~ pv) A- cfe H- (c |x — b^)-zds.

The text on this page is estimated to be only 29.65% accurate

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA SÉRIE DE
TATLOR. 279 On a d'ailleurs — — $rt, c \setminus L — 6v z=z c\{oLC — va) — b\{^a$
— %b) Donc et de même $^ = — akds -h at cfe, r/[x 1= — Z>A- f/^ -+- 3t$
 $^a-, ^/v T= — ck ds + Y'c ds^*$ 299. Il résulte de ces formules qu'une courbe
est complètement définie lorsqu'on connaîtra : 1** La loi suivant laquelle la
courbure et la torsion varient en fonction de l'arc s comme variable
indépendante; 2** Les valeurs de $x^y, z, a, fe, c, a, p, y, X, [jl, v$
correspondantes à une valeur particulière de Sy à la valeur zéro, par
exemple. En effet, les formules précédentes donnent les dérivées, par
rapport à $s^$ des quantités $dx, dy dz$. $^ "" = d^' *^{^^} ' ^Ts' ""P^{^^} ^{''''}^$ en
fonction de ces quantités elles-mêmes, de la courbure et de la torsion. En les
différentiant, on obtiendra les dérivées secondes, et ainsi de suite. Mais,
pour $^ = 0$, on connaît les valeurs des quantités $a, b, c, a, p, y, \setminus [jl, v$. On
aura donc, pour $5 = 0$, la valeur de toutes leurs dérivées. djc Connaissant
ainsi, pour $5=0$, les valeurs de $x, a= -^ \} -7- = —, …$, on pourra calculer x
par la formule de

280 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE T. Maclaurin De même, pour ρ et z , 300. Deux surfaces sont dites applicables l'une sur l'autre si l'on peut établir entre leurs points une correspondance telle que deux courbes correspondantes quelconques aient leurs arcs égaux. Théorème. — Toute surface développable est applicable sur un plan* Soient, en effet: S une surface développable ; C son arête de rebroussement; s l'arc de cette courbe compté à partir d'un de ses points; $k = f(s)$ et $T = \kappa(s)$ sa courbure et sa torsion. Un point Q de la surface sera défini si l'on connaît : i^{**} . La valeur de s correspondante au point de contact P de la tangente à l'arête de rebroussement qui passe par le point Q ; 2^{**} La longueur $PQ = l$. Une équation $l = zW(s)$ entre ces deux coordonnées représentera une courbe K tracée sur S . Proposons-nous de trouver la différentielle de l'arc c de cette courbe (Fig- i8). Soient Q, Q' deux points infiniment voisins ayant respectivement pour coordonnées $s, s + \Delta s$ et $l, l + \Delta l$; l'arc $QQ' = \Delta c$, dont on cherche la valeur principale, pourra être remplacé par sa corde QQ' . Celle-ci sera tout au plus de l'ordre de Δs^2 . En effet, la distance Δc de la droite $P'Q'$ au point P infiniment voisin étant du deuxième ordre par rapport à Δs , l'angle ϕ des deux tangentes étant du premier ordre, et enfin $PQ = l$ étant fini, la plus courte distance de Q à $P'Q'$

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA SÉRIE DE
 TAYLOR. 28 J sera du premier ordre, et a fortiori la distance QQ' sera du
 premier ordre au plus. Cela posé, par le point P menons une parallèle à PQ'.
 Soient F', Q'' les projections de P', Q' sur cette droite. On aura P'P'' = Q'Q''
 = 0. Ces quantités sont donc du deuxième ordre. A fortiori la différence
 entre QQ' et QQ'' sera du deuxième ordre au moins, et Ton pourra substituer
 QQ'' à QQ' pour le calcul de sa valeur principale. Fig. 18. \ Or, dans le
 triangle PQQ'', l'angle en P est sensiblement égal à k A5. Le côté PQ est
 égal à /. Enfin le côté PQ'' est égal à PF - P''Q' = PF - FQ'. Mais P'Q' = / + A/
 d'autre part, PF' est la projection de PF, quantité infiniment petite du
 premier ordre, et dont l'angle avec PQ' est infiniment petit. On aura donc, en
 négligeant le second ordre. d'où PP' = PP' = arc PP' = A5, P'Q' = / + A/ - A5.
 Cela posé, la formule trouvée pour l'arc d'une courbe en coordonnées
 polaires donnera d^i = L val. princ. $\zeta^i \zeta^i = \text{val. princ. } \sqrt[4]{A^2 A5^2 - \{il - A^i\}}$

a82 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE V. On voit que cette expression est indépendante de la torsion T . Cela posé, construisons dans un plan une courbe $C|$ dont la courbure en fonction de l'arc soit la même que pour la courbe C . Au point de la surface développable qui a pour coordonnées s et φ , faisons correspondre dans le plan un point construit de la même manière, en prenant sur la courbe $C|$, à partir de l'origine des arcs, un arc égal à s , menant la tangente au point obtenu et prenant une longueur φ sur cette tangente. A la courbe K correspondra une courbe $K|$, et l'arc $a-$ de cette courbe, considéré comme fonction de s , aura la même différentielle, d'après ce qui précède, que l'arc $a-$. Les arcs $o-$ et $o-|$, ayant même différentielle, ne pourront différer que par une constante. Si, d'ailleurs, on prend pour origines respectives des arcs sur les courbes K et $K|$ des points correspondants, c et $c|$, s'annuleront en même temps, et par suite seront toujours égaux. 301. Proposons-nous d'appliquer les formules trouvées dans cette section à V hélice. On nomme ainsi la courbe engendrée par un point qui se meut sur un cylindre droit à base circulaire de telle sorte que sa distance au plan de base soit constamment proportionnelle à l'angle dont a tourné sa projection. Soient t cet angle, m le rayon du cercle de base. La courbe sera évidemment définie par les équations $A' = m \cos t$, $y = r \sin t$, $z = nt$. On en déduit successivement $r' = -m \sin t$, $y' = n \cos t$, $z' = n$, $r'' = -m \cos t$, $y'' = -n \sin t$, $z'' = 0$, $r''' = m \sin t$, $y''' = n \cos t$, $z''' = 0$, $A'' = -m \sin t$, $B = z' x'' - x' z'' = m n \cos t$, $C = x' y'' - y' x'' = m n \sin t$.

The text on this page is estimated to be only 28.93% accurate

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA SÉRIE DE
TAYLOR. 283 D: $x' y'' m^{\wedge} riy ds - sjx'^* + j'^* -h -'^* dt = v'm^* -^{\wedge} ^* ^{\wedge}$ »
(18) $^{\wedge}=H = (i9) 1 \backslash fm^* n^* -hrn^* m y/i -+- n\}$ D n On voit que la courbure et la torsion sont constantes, ce qui était évident, les divers arcs de la courbe étant superposables les uns aux autres. Réciproquement, toute courbe dont la courbure et la torsion sont constantes sera une hélice, dont les paramètres m, n seront déterminés par les équations (i8) et (19). VIL — Systèmes de droites. 302. Une droite D, passant par un point (r/, «1, ^2) et dont les cosinus directeurs sont proportionnels à 6, 61, 62, a, comme on Ta vu, pour équations, $X - a Y - \ll 1 Z - ^2$ ou, en introduisant une variable auxiliaire f, (2) $X = a-i-6/, Y = a, -1-6, ^, Z = \ll j-i-6, ^, tyJb'-\backslash- b\backslash- b\backslash$ étant la distance du point (X, Y y Z) au point (a, ai, «2)» Supposons que les coefficients a, b^ , , , dépendent de certains paramètres a, p, En faisant varier ces paramètres, on obtiendra un système de droites. S'il n'y a qu'un paramètre a, ces droites formeront une

2S4 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE V. sur/ace réglée dont on obtiendrait l'équation en éliminant a entre les deux équations (i). S'il y a deux paramètres a, p , on aura une congruence de droites. Par chaque point (x^y, z) de l'espace passeront une ou plusieurs droites de la congruence, correspondant aux systèmes de valeurs de x, y, z , qui satisfont aux équations $x = a + p \cdot y, z = a^2$. S'il y a trois paramètres a, p, y , on aura un complexe de droites. Par chaque point (x^y, z) passeront une infinité de droites du complexe, formant un cône, dont on obtiendra l'équation en éliminant a, p, y entre les équations (1) et (3). Enfin, s'il y avait plus de trois paramètres, le système contiendrait toutes les droites possibles, car on pourrait déterminer les paramètres de manière à faire passer la droite par deux points arbitraires $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$, ce qui ne donnerait que quatre équations de condition. 303. Soient D une droite du système, ayant pour équations $X = a + bt, Y = G + ht, Z = a + H - 6t$, et D' une droite infiniment voisine, laquelle aura pour équations $X = a + bt + da - h(b - hdb)t, Y = a + da - h(b - hdb)t, Z = a + H - da - h(b - hdb)t$ en bornant l'approximation au premier ordre et écrivant par suite $da, db, \dots$ à la place de $Aa, A6, \dots$. La position relative de ces deux droites dépend de quatre éléments : 1° Leur angle ϕ . On aura, d'après des formules précédemment trouvées, $\sin \phi = \frac{y}{A} - \frac{A}{y} - 4a$;

The text on this page is estimated to be only 27.92% accurate

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA SÉRIE DE
TAYLOR. en posant[^] pour abréger, $A_i = z b_i db^{\wedge} - b_i db^{\backslash}$, $A_i = b_i db - b$
 $db^{\wedge} A^{\wedge} - b db_i - b, db$. 2° Leur plus courte distance S. Elle a pour valeur L
285 L désignant le déterminant $da b db dui b_i db_i da^{\wedge} b^{\wedge} dbf 3^{\wedge}$ La position
du point où cette plus courte distance vient rencontrer D. La valeur T de la
variable t qui correspond à ce point est donnée par la formule $N K$ où N
désigne le déterminant $A b - h db^{\wedge} da A. A, b_i - H db^{\wedge} \bullet \bullet da^{\wedge} b^{\wedge} - h dbx^{\wedge} da^{\wedge}$
ou, plus simplement, $A b 'da A_j^{\wedge} 1^{\wedge} a^{\wedge} A_j 6j \bullet c^{\wedge} a$, en négligeant $db^{\wedge} db^{\wedge}$,
 db^2 par rapport à 6, &« 63. 4° La direction de cette plus courte distance.
On peut la déterminer soit par Tangle

The text on this page is estimated to be only 26.53% accurate

2S6 PREFIÈRE PARTIE. — CHAPITRE T. perpendiculaire à D et à D,, on aura $6X - 6l A, H - 6, X_j$ nr o, $\{b - h db\} X H - (^, 4 - db,) li - h (6, H - \epsilon/6,) X, = o$. On déduit de ces équations $A \sim A, \sim a/$ et, comme $X \ll - X\hat{I} - hXJ = i, x, = . A, V/A \ll + A\} 4 - AJ V A^* - + - AJ H - A\hat{I} A, X, : vA^* - t - A\} + A\hat{I}$ On voit par ces formules que T, X, X|, T.^ sont des quantités finies; 8 et q sont du premier ordre, mais leur rapport $\wedge \sim > - A^{\wedge} - hA^f - hA^{\wedge}$ sera une quantité finie, qu'on nomme le paramètre de distribution. Proposons-nous de déterminer les relations qui existent entre ces éléments T, \ X,, Xo? P* Nous aurons à distinguer trois cas distincts, suivant le nombre des paramètres variables. 304. Premier cas : Surfaces réglées. — On n'a qu'un seul paramètre a, et si, dans les expressions de T, X, A,, Aj, /?, on remplace rfa, rfè, . . . par leurs valeurs a'rfa, é'rfa, la quantité rfa, se trouvant en facteur avec le même degré au numérateur et au dénominateur, disparaîtra de ces expi-essions. La droite E, sur laquelle se mesure la plus courte distance des droites D et D|, étant complètement déterminée parles valeurs de T, \ X^i Xo, on aura ce théorème : Les génératrices d'une surface réglée infiniment voisines d'une même génératrice D tnennent toutes couper

The text on this page is estimated to be only 26.81% accurate

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA SÉRIE DE
TAYLOR. Q87 perpendiculairement une même droite E {au second ordre
près). Le point d'intersection de D avec E se nomme le point central Ae la
génératrice D. Il aura pour coordonnées $\alpha \sim a^{-b}T$, $r = o'i \ 4- \ /-^i T$, $z \text{ — } a^{\wedge} \text{ — } b^{\wedge} T$, Le lieu des points centraux se nomme ligne de striction. On aura ses
équations en éliminant a entre les trois équations ci-dessus. 303. Soit $x^{\wedge} = z$
 $a \text{ — } b t$, $y r = \hat{u} T i \text{ — } h \ 6 i \ t$, $a^{\wedge} \text{ — } \{- b f t$ un point de la surface. Ses coordonnées
sont exprimées, comme on le voit, en fonction des deux paramètres a et /,
L'équation générale d'un plan $X \setminus H \text{ — } D I Y \text{ — } I \text{ — } G Z \ 4 \text{ — } (\hat{i}) = o$ contient trois
paramètres, dont on pourra disposer pour établir un contact du premier
ordre avec la surface. Il faudra pour cela satisfaire aux trois équations
 $o = \wedge \{ t y a i \} = z^{\wedge} o \{ a \text{ — } h b t \} \ 4 \text{ — } i f t \} (a i \text{ — } + \text{ — } 6 i^{\wedge}) \text{ — } t \text{ — } C(a, \text{ — } h \ 6, \wedge H \text{ — } (\pounds), o = \wedge \text{ dt } X b \ o = \text{ — } \text{ — } = X \{ a' \ H \text{ — } b' t \} \ 4 \text{ — } o l \hat{i} \} \{ a \setminus \text{ — } h \ b \setminus t \} \text{ — } h e \ (a, \text{ — } h \text{ — } b'^{\wedge} t) \text{: } O i^{\wedge} \text{ en déduira } o \text{:} = X \{ X \text{ — } a \text{ — } b t \} \text{ — } r \text{ — } D b \ (\ Y \text{ — } a t \text{ — } \wedge^1 \ 0 \text{ — } \wedge^{\wedge} (Z \text{ — } \ll j \ 4 \text{ — } b^{\wedge} t), \text{ et, en éliminant — } A., \ i H, \ G, \text{ on aura Téquation du plan tangent sous la forme } X \text{ — } a \text{ — } b t \ Y \text{ — } a^{\wedge} \text{ — } b i t \ Z \text{ — } a^{\wedge} \text{ — } b^{\wedge} t \ b \ b i \ b i \ b' t \ b \setminus t \ b \setminus t = 0.$

a88 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE V. Ce plan contient la génératrice. En effet, un point quelconque de cette génératrice a ses coordonnées de la forme $a + bi + c\sqrt{-1}$, a, b, c réels. Substituant ces valeurs des coordonnées dans l'équation du plan tangent, les deux premières lignes du déterminant deviennent identiques, sauf le facteur commun $a + bi + c\sqrt{-1}$. Mais la direction de ce plan tangent variera en général avec la position du point de contact (a, b, c) sur la génératrice. On voit, en effet, que l'équation du plan tangent dépend de a, b, c . Pour déterminer simplement la loi de cette variation, nous admettrons que nous ayons choisi pour axe des z la génératrice considérée D , et pour axe des y la droite E qui lui correspond. On aura, pour tous les points de D , $x = 0, y = 0$. Donc, pour cette génératrice, a, b, c seront égaux à zéro. D'ailleurs rien n'empêche de prendre pour variable indépendante, à la place de a , la fonction linéaire $a + bi + c\sqrt{-1}$. On peut donc supposer qu'on a constamment $a = 0, \sqrt{-1} = 1, a + bi = c$, $HZ = 0$. Cela posé, la génératrice D aura pour équations $Z = 0, a + bi = c$. Une génératrice infiniment voisine aura pour équations $z = t, X = da + 4 - dbt - da - dbz, y = da - dbi + 1 = da - dbi + 5$. Mais, par définition, cette génératrice rencontre l'axe des y à une distance 0 de l'origine ; on aura donc $(fa = 0, c/a = 8$.

The text on this page is estimated to be only 28.77% accurate

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA SÉRIE DE

TATLOR. 289 De plus, elle est perpendiculaire à cet axe et fait un angle α avec l'axe des z. On aura donc $db_i = 0$, $db^{\wedge} iz \text{ tangcp} = tp$, en négligeant la différence entre la tangente et Tare. On aura, par suite, $da' \sim d^0 = 0$, «; $dO_i \sim doi \ 8 \ b' \ db - dx - h \ b \ dbt \sim \sim dn = 0$. Substituons ces valeurs et celles de a, $a^{\wedge}$, $a2f \ b$, 64, 62» $a^{\wedge} j \ b \ j$ dans l'équation du plan tangent; elle deviendra $X \ Y \ Z \text{ — } t \ 0 \ 0 \ I \ da \ 8 \ doL \ 0 = 0$, OU l'angle V que le plan tangent forme avec le plan des yz sera donné par la formule $\text{tang} V = pK$ Cet angle, en général variable avec 2, sera constant dans les deux hypothèses suivantes: $/? = \alpha$, d'où $8 = 0$. $p = \alpha 91^{\wedge}$ d'où

The text on this page is estimated to be only 29.80% accurate

Q90 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE V. particulière des surfaces réglées pour lesquelles une de ces deux conditions $\delta = 0$ ou $\delta = 0$ est constamment satisfaite. Théorème. — L'équation $u = 0$ exprime que la surface réglée est développable. * Cherchons en effet à quelles conditions la surface sera développable. Soient x, y, z les coordonnées du point où la génératrice touche l'arête de rebroussement, H la valeur correspondante de δ . On aura x, y, z et δ variant en général d'une génératrice à l'autre, et par suite étant des fonctions de a . Ces équations, différenciées par rapport à a , donneront $dx = da \cdot \delta - \delta da$, $dy = da \cdot \delta - \delta da$, $dz = da \cdot \delta - \delta da$. Mais, la génératrice étant tangente à l'arête de rebroussement, ses cosinus directeurs seront proportionnels à dx, dy, dz ils le sont d'ailleurs $k \delta^2$ on aura donc, en désignant par L un facteur convenable, $dx = L \delta$, $dy = L \delta$, $dz = L \delta$. Substituant ces valeurs dans les équations précédentes, il viendra $0 = da \cdot \delta - \delta da$, $0 = da \cdot \delta - \delta da$, $0 = da \cdot \delta - \delta da$. Ces trois équations entre les deux quantités B et δ ne seront pas compatibles en général, mais elles le deviendront si le déterminant $\begin{vmatrix} da & \delta & \delta \\ \delta & da & \delta \\ \delta & \delta & da \end{vmatrix}$

APPLICATIONS OÈOMÉTRIQUES DE LA SÉRIE DE

TAYLOR. SQI s'annule. Or ce déterminant est précisément $L^{\wedge}$ numérateur de S . Donc 8 sera nul, à moins qu'on n'ait $A = A_1 = A_2 = 0$, auquel cas le dénominateur s'annulerait également. 308. Les trois équations $A = x \ll i = A_j = 0$ équivalent à l'équation unique $cp = 0$. Si celle-ci est satisfaite, la surface sera un cylindre. Car deux génératrices infiniment voisines ne formant qu'un angle du deuxième ordre, les cosinus directeurs de la génératrice, considérés comme fonctions de a , n'éprouveront qu'une variation du second ordre par rapport à l'accroissement de a . Donc leurs différentielles sont nulles ; donc ils sont constants. 309. Deuxième cas : Congruences, — On a dans ce cas deux paramètres variables $a, ^$ et, par suite, $, da j da , _ , dh , db , _$ Substituant ces valeurs dans les expressions de $\backslash \wedge ^2 > T, p$, on voit que, pour une génératrice donnée D , correspondant à un système déterminé de valeurs de a et de p , ces cinq quantités ne dépendent que du rapport $-\wedge$ Il doit donc exister entre elles quatre relations indépendantes du choix de la génératrice $D <$. proposons-nous="" de="" trouver="" ces="" relations="" .="" nous="" remarquerons="" tout="" d="" que="" la="" quantit="" a="" aj="" qui="" figure="" au="" des="" expressions="" xi="" t="" ne="" pourra="" en="" g="" s="" pour="" aucune="" valeur="" effet="" il="" faudrait="" cela="" qu="" e="" simul="" />

The text on this page is estimated to be only 29.12% accurate

292 PREMIÈRE PARTIE. ^ CHAPITRE tanément A l=1 O, Al =
0, AjmO, d'où db dbi dbt b ~ bi ~ 6, ' ou, en appelant [xla valeur commune
de ces rapports. db rfa db d? =bv., db* , db* -o , db^ , db^ ,. équations qui
ne peuvent subsister simultanément que si l'on a (4) db db dx a? ^ djh d

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA SÉRIE DE

TAYLOR. 298 obtenir, ainsi que les valeurs correspondantes de α par la méthode exposée au n°211. Substituant ces valeurs à la place de t dans les équations (5), on aura les coordonnées des points correspondants de D , exprimées en fonctions de a , p . Ces points se nomment points principaux. On nomme plans principaux ceux qui passent par les lignes de plus courte distance correspondantes à ces points et par la droite D . Éliminant a et α entre les équations qui donnent les coordonnées d'un point principal, on obtiendra le lieu de ce point. On obtiendra de même le lieu du second point principal. Les deux surfaces principales ainsi obtenues pourront constituer, soit deux surfaces distinctes, soit plus habituellement deux nappes d'une seule et même surface. 312. Passons à l'examen de l'expression qui donne le paramètre de distribution p . Le déterminant L qui figure au numérateur, étant du second degré en $-j-y$ s'annulera pour deux valeurs réelles ou imaginaires de ce rapport. A chacune de ces deux valeurs correspondent une valeur de T et, par suite, un point de D . Les deux points ainsi obtenus se nomment foyers. Ils pourront être réels ou imaginaires. Les lieux de ces points {surfaces focales} se détermineront comme les surfaces principales. 313. Soient (6) (7) α' les deux valeurs de α tirées de l'équation $L = 0$; M et M' seront des fonctions connues de a , α .

294 PBEVfÈRE PARTIE. — CHAPIUIE T. Nous verrons dans le Calcul intégral qu'on peut trouver pour $\wedge$ une expression $\wedge = \wedge(a)$ qui satisfasse identiquement à l'équation différentielle (ti) et qui, de plus, se réduise à Sg pour $a = a_0$, les constantes $Z_0, \wedge_0$ pouvant être choisies à volonté. Cela posé, substituons $\wedge = o(x)$ dans les équations $JT = a - h \frac{\partial}{\partial r}, r = 1$ a, $-H \frac{\partial}{\partial r}, 5 := a, -\hat{r} - \frac{\partial}{\partial r}$ des génératrices de la congruence. Ces équations, ne contenant plus qu'un seul paramètre a , représenteront une surface réglée, dont les génératrices font partie de la congruence: cette surface est développable, car, l'équation (6) étant une conséquence de l'équation $p = \wp(a)$, on aura $\frac{dp}{da} = 0$ pour deux génératrices voisines prises sur cette surface. Enfin, cette surface contient la génératrice correspondante aux valeurs $p = j_3 0, a = a_0$ des paramètres variables. La considération de l'équation différentielle (7) donnerait une seconde surface développable jouissant des mêmes propriétés que la première. On aura donc ce théorème : Une droite quelconque D de la congruence fait partie de deux surfaces développables, formées de droites de la congruence. On doit remarquer toutefois que ces surfaces n'auront d'existence réelle que si les valeurs de $\wedge$ déduites de l'équation $L = 0$ sont réelles. La droite D est tangente à l'arête de rebroussement de chacune des développables dont elle fait partie. Mais ces arêtes de rebroussement sont évidemment situées sur les surfaces focales; on a donc cette proposition : Toutes les droites de la congruence sont tangentes à chacune des surfaces focales. On nomme plans focaux les plans menés par D et respectivement perpendiculaires aux lignes E de plus courte distance

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA SÉRIE DE

TAYLOR. SqS correspondantes à ses deux foyers. Ces plans sont tangents aux deux développables qui se croisent suivant la droite D. On a $\sqrt{U}$ en effet, que, dans une surface réglée quelconque, le plan tangent en un point situé sur une génératrice D à une distance z du point central fait, avec la perpendiculaire E, un angle Y donné par la formule $\tan Y = \frac{z}{r}$ dans une développable, où $r = 0$, $\tan Y$ sera infini et Y sera droit. 314. Pour nous rendre un compte plus exact de la distribution autour de D des droites de la congruence qui en sont infiniment voisines, prenons cette droite pour axe des z en nous réservant de disposer ultérieurement de la position de l'origine, ainsi que de l'orientation du plan des xz. Supposons, en outre, qu'on prenne z pour variable indépendante; on aura constamment $a^2 = 0$, $b^2 = 0$ d'où $da^2 = db^2 = 0$. En outre, D ayant pour équations $x = 0$, $y = 0$, $z = t$, on aura, pour cette droite, $a = 0$, $b = 0$. Portons ces diverses valeurs dans les formules générales; il viendra $A = 1$, $A_j = 0$, $da = 0$, $db = 0$, $da^2 = 0$, $db^2 = 0$, $da db = 0$, $da^2 db = 0$, $da db^2 = 0$, $da^2 db^2 = 0$, $da^3 = 0$, $db^3 = 0$, $da^4 = 0$, $db^4 = 0$, $da^5 = 0$, $db^5 = 0$, $da^6 = 0$, $db^6 = 0$, $da^7 = 0$, $db^7 = 0$, $da^8 = 0$, $db^8 = 0$, $da^9 = 0$, $db^9 = 0$, $da^{10} = 0$, $db^{10} = 0$, $da^{11} = 0$, $db^{11} = 0$, $da^{12} = 0$, $db^{12} = 0$, $da^{13} = 0$, $db^{13} = 0$, $da^{14} = 0$, $db^{14} = 0$, $da^{15} = 0$, $db^{15} = 0$, $da^{16} = 0$, $db^{16} = 0$, $da^{17} = 0$, $db^{17} = 0$, $da^{18} = 0$, $db^{18} = 0$, $da^{19} = 0$, $db^{19} = 0$, $da^{20} = 0$, $db^{20} = 0$, $da^{21} = 0$, $db^{21} = 0$, $da^{22} = 0$, $db^{22} = 0$, $da^{23} = 0$, $db^{23} = 0$, $da^{24} = 0$, $db^{24} = 0$, $da^{25} = 0$, $db^{25} = 0$, $da^{26} = 0$, $db^{26} = 0$, $da^{27} = 0$, $db^{27} = 0$, $da^{28} = 0$, $db^{28} = 0$, $da^{29} = 0$, $db^{29} = 0$, $da^{30} = 0$, $db^{30} = 0$, $da^{31} = 0$, $db^{31} = 0$, $da^{32} = 0$, $db^{32} = 0$, $da^{33} = 0$, $db^{33} = 0$, $da^{34} = 0$, $db^{34} = 0$, $da^{35} = 0$, $db^{35} = 0$, $da^{36} = 0$, $db^{36} = 0$, $da^{37} = 0$, $db^{37} = 0$, $da^{38} = 0$, $db^{38} = 0$, $da^{39} = 0$, $db^{39} = 0$, $da^{40} = 0$, $db^{40} = 0$, $da^{41} = 0$, $db^{41} = 0$, $da^{42} = 0$, $db^{42} = 0$, $da^{43} = 0$, $db^{43} = 0$, $da^{44} = 0$, $db^{44} = 0$, $da^{45} = 0$, $db^{45} = 0$, $da^{46} = 0$, $db^{46} = 0$, $da^{47} = 0$, $db^{47} = 0$, $da^{48} = 0$, $db^{48} = 0$, $da^{49} = 0$, $db^{49} = 0$, $da^{50} = 0$, $db^{50} = 0$, $da^{51} = 0$, $db^{51} = 0$, $da^{52} = 0$, $db^{52} = 0$, $da^{53} = 0$, $db^{53} = 0$, $da^{54} = 0$, $db^{54} = 0$, $da^{55} = 0$, $db^{55} = 0$, $da^{56} = 0$, $db^{56} = 0$, $da^{57} = 0$, $db^{57} = 0$, $da^{58} = 0$, $db^{58} = 0$, $da^{59} = 0$, $db^{59} = 0$, $da^{60} = 0$, $db^{60} = 0$, $da^{61} = 0$, $db^{61} = 0$, $da^{62} = 0$, $db^{62} = 0$, $da^{63} = 0$, $db^{63} = 0$, $da^{64} = 0$, $db^{64} = 0$, $da^{65} = 0$, $db^{65} = 0$, $da^{66} = 0$, $db^{66} = 0$, $da^{67} = 0$, $db^{67} = 0$, $da^{68} = 0$, $db^{68} = 0$, $da^{69} = 0$, $db^{69} = 0$, $da^{70} = 0$, $db^{70} = 0$, $da^{71} = 0$, $db^{71} = 0$, $da^{72} = 0$, $db^{72} = 0$, $da^{73} = 0$, $db^{73} = 0$, $da^{74} = 0$, $db^{74} = 0$, $da^{75} = 0$, $db^{75} = 0$, $da^{76} = 0$, $db^{76} = 0$, $da^{77} = 0$, $db^{77} = 0$, $da^{78} = 0$, $db^{78} = 0$, $da^{79} = 0$, $db^{79} = 0$, $da^{80} = 0$, $db^{80} = 0$, $da^{81} = 0$, $db^{81} = 0$, $da^{82} = 0$, $db^{82} = 0$, $da^{83} = 0$, $db^{83} = 0$, $da^{84} = 0$, $db^{84} = 0$, $da^{85} = 0$, $db^{85} = 0$, $da^{86} = 0$, $db^{86} = 0$, $da^{87} = 0$, $db^{87} = 0$, $da^{88} = 0$, $db^{88} = 0$, $da^{89} = 0$, $db^{89} = 0$, $da^{90} = 0$, $db^{90} = 0$, $da^{91} = 0$, $db^{91} = 0$, $da^{92} = 0$, $db^{92} = 0$, $da^{93} = 0$, $db^{93} = 0$, $da^{94} = 0$, $db^{94} = 0$, $da^{95} = 0$, $db^{95} = 0$, $da^{96} = 0$, $db^{96} = 0$, $da^{97} = 0$, $db^{97} = 0$, $da^{98} = 0$, $db^{98} = 0$, $da^{99} = 0$, $db^{99} = 0$, $da^{100} = 0$, $db^{100} = 0$, $da^{101} = 0$, $db^{101} = 0$, $da^{102} = 0$, $db^{102} = 0$, $da^{103} = 0$, $db^{103} = 0$, $da^{104} = 0$, $db^{104} = 0$, $da^{105} = 0$, $db^{105} = 0$, $da^{106} = 0$, $db^{106} = 0$, $da^{107} = 0$, $db^{107} = 0$, $da^{108} = 0$, $db^{108} = 0$, $da^{109} = 0$, $db^{109} = 0$, $da^{110} = 0$, $db^{110} = 0$, $da^{111} = 0$, $db^{111} = 0$, $da^{112} = 0$, $db^{112} = 0$, $da^{113} = 0$, $db^{113} = 0$, $da^{114} = 0$, $db^{114} = 0$, $da^{115} = 0$, $db^{115} = 0$, $da^{116} = 0$, $db^{116} = 0$, $da^{117} = 0$, $db^{117} = 0$, $da^{118} = 0$, $db^{118} = 0$, $da^{119} = 0$, $db^{119} = 0$, $da^{120} = 0$, $db^{120} = 0$, $da^{121} = 0$, $db^{121} = 0$, $da^{122} = 0$, $db^{122} = 0$, $da^{123} = 0$, $db^{123} = 0$, $da^{124} = 0$, $db^{124} = 0$, $da^{125} = 0$, $db^{125} = 0$, $da^{126} = 0$, $db^{126} = 0$, $da^{127} = 0$, $db^{127} = 0$, $da^{128} = 0$, $db^{128} = 0$, $da^{129} = 0$, $db^{129} = 0$, $da^{130} = 0$, $db^{130} = 0$, $da^{131} = 0$, $db^{131} = 0$, $da^{132} = 0$, $db^{132} = 0$, $da^{133} = 0$, $db^{133} = 0$, $da^{134} = 0$, $db^{134} = 0$, $da^{135} = 0$, $db^{135} = 0$, $da^{136} = 0$, $db^{136} = 0$, $da^{137} = 0$, $db^{137} = 0$, $da^{138} = 0$, $db^{138} = 0$, $da^{139} = 0$, $db^{139} = 0$, $da^{140} = 0$, $db^{140} = 0$, $da^{141} = 0$, $db^{141} = 0$, $da^{142} = 0$, $db^{142} = 0$, $da^{143} = 0$, $db^{143} = 0$, $da^{144} = 0$, $db^{144} = 0$, $da^{145} = 0$, $db^{145} = 0$, $da^{146} = 0$, $db^{146} = 0$, $da^{147} = 0$, $db^{147} = 0$, $da^{148} = 0$, $db^{148} = 0$, $da^{149} = 0$, $db^{149} = 0$, $da^{150} = 0$, $db^{150} = 0$, $da^{151} = 0$, $db^{151} = 0$, $da^{152} = 0$, $db^{152} = 0$, $da^{153} = 0$, $db^{153} = 0$, $da^{154} = 0$, $db^{154} = 0$, $da^{155} = 0$, $db^{155} = 0$, $da^{156} = 0$, $db^{156} = 0$, $da^{157} = 0$, $db^{157} = 0$, $da^{158} = 0$, $db^{158} = 0$, $da^{159} = 0$, $db^{159} = 0$, $da^{160} = 0$, $db^{160} = 0$, $da^{161} = 0$, $db^{161} = 0$, $da^{162} = 0$, $db^{162} = 0$, $da^{163} = 0$, $db^{163} = 0$, $da^{164} = 0$, $db^{164} = 0$, $da^{165} = 0$, $db^{165} = 0$, $da^{166} = 0$, $db^{166} = 0$, $da^{167} = 0$, $db^{167} = 0$, $da^{168} = 0$, $db^{168} = 0$, $da^{169} = 0$, $db^{169} = 0$, $da^{170} = 0$, $db^{170} = 0$, $da^{171} = 0$, $db^{171} = 0$, $da^{172} = 0$, $db^{172} = 0$, $da^{173} = 0$, $db^{173} = 0$, $da^{174} = 0$, $db^{174} = 0$, $da^{175} = 0$, $db^{175} = 0$, $da^{176} = 0$, $db^{176} = 0$, $da^{177} = 0$, $db^{177} = 0$, $da^{178} = 0$, $db^{178} = 0$, $da^{179} = 0$, $db^{179} = 0$, $da^{180} = 0$, $db^{180} = 0$, $da^{181} = 0$, $db^{181} = 0$, $da^{182} = 0$, $db^{182} = 0$, $da^{183} = 0$, $db^{183} = 0$, $da^{184} = 0$, $db^{184} = 0$, $da^{185} = 0$, $db^{185} = 0$, $da^{186} = 0$, $db^{186} = 0$, $da^{187} = 0$, $db^{187} = 0$, $da^{188} = 0$, $db^{188} = 0$, $da^{189} = 0$, $db^{189} = 0$, $da^{190} = 0$, $db^{190} = 0$, $da^{191} = 0$, $db^{191} = 0$, $da^{192} = 0$, $db^{192} = 0$, $da^{193} = 0$, $db^{193} = 0$, $da^{194} = 0$, $db^{194} = 0$, $da^{195} = 0$, $db^{195} = 0$, $da^{196} = 0$, $db^{196} = 0$, $da^{197} = 0$, $db^{197} = 0$, $da^{198} = 0$, $db^{198} = 0$, $da^{199} = 0$, $db^{199} = 0$, $da^{200} = 0$, $db^{200} = 0$, $da^{201} = 0$, $db^{201} = 0$, $da^{202} = 0$, $db^{202} = 0$, $da^{203} = 0$, $db^{203} = 0$, $da^{204} = 0$, $db^{204} = 0$, $da^{205} = 0$, $db^{205} = 0$, $da^{206} = 0$, $db^{206} = 0$, $da^{207} = 0$, $db^{207} = 0$, $da^{208} = 0$, $db^{208} = 0$, $da^{209} = 0$, $db^{209} = 0$, $da^{210} = 0$, $db^{210} = 0$, $da^{211} = 0$, $db^{211} = 0$, $da^{212} = 0$, $db^{212} = 0$, $da^{213} = 0$, $db^{213} = 0$, $da^{214} = 0$, $db^{214} = 0$, $da^{215} = 0$, $db^{215} = 0$, $da^{216} = 0$, $db^{216} = 0$, $da^{217} = 0$, $db^{217} = 0$, $da^{218} = 0$, $db^{218} = 0$, $da^{219} = 0$, $db^{219} = 0$, $da^{220} = 0$, $db^{220} = 0$, $da^{221} = 0$, $db^{221} = 0$, $da^{222} = 0$, $db^{222} = 0$, $da^{223} = 0$, $db^{223} = 0$, $da^{224} = 0$, $db^{224} = 0$, $da^{225} = 0$, $db^{225} = 0$, $da^{226} = 0$, $db^{226} = 0$, $da^{227} = 0$, $db^{227} = 0$, $da^{228} = 0$, $db^{228} = 0$, $da^{229} = 0$, $db^{229} = 0$, $da^{230} = 0$, $db^{230} = 0$, $da^{231} = 0$, $db^{231} = 0$, $da^{232} = 0$, $db^{232} = 0$, $da^{233} = 0$, $db^{233} = 0$, $da^{234} = 0$, $db^{234} = 0$, $da^{235} = 0$, $db^{235} = 0$, $da^{236} = 0$, $db^{236} = 0$, $da^{237} = 0$, $db^{237} = 0$, $da^{238} = 0$, $db^{238} = 0$, $da^{239} = 0$, $db^{239} = 0$, $da^{240} = 0$, $db^{240} = 0$, $da^{241} = 0$, $db^{241} = 0$, $da^{242} = 0$, $db^{242} = 0$, $da^{243} = 0$, $db^{243} = 0$, $da^{244} = 0$, $db^{244} = 0$, $da^{245} = 0$, $db^{245} = 0$, $da^{246} = 0$, $db^{246} = 0$, $da^{247} = 0$, $db^{247} = 0$, $da^{248} = 0$, $db^{248} = 0$, $da^{249} = 0$, $db^{249} = 0$, $da^{250} = 0$, $db^{250} = 0$, $da^{251} = 0$, $db^{251} = 0$, $da^{252} = 0$, $db^{252} = 0$, $da^{253} = 0$, $db^{253} = 0$, $da^{254} = 0$, $db^{254} = 0$, $da^{255} = 0$, $db^{255} = 0$, $da^{256} = 0$, $db^{256} = 0$, $da^{257} = 0$, $db^{257} = 0$, $da^{258} = 0$, $db^{258} = 0$, $da^{259} = 0$, $db^{259} = 0$, $da^{260} = 0$, $db^{260} = 0$, $da^{261} = 0$, $db^{261} = 0$, $da^{262} = 0$, $db^{262} = 0$, $da^{263} = 0$, $db^{263} = 0$, $da^{264} = 0$, $db^{264} = 0$, $da^{265} = 0$, $db^{265} = 0$, $da^{266} = 0$, $db^{266} = 0$, $da^{267} = 0$, $db^{267} = 0$, $da^{268} = 0$, $db^{268} = 0$, $da^{269} = 0$, $db^{269} = 0$, $da^{270} = 0$, $db^{270} = 0$, $da^{271} = 0$, $db^{271} = 0$, $da^{272} = 0$, $db^{272} = 0$, $da^{273} = 0$, $db^{273} = 0$, $da^{274} = 0$, $db^{274} = 0$, $da^{275} = 0$, $db^{275} = 0$, $da^{276} = 0$, $db^{276} = 0$, $da^{277} = 0$, $db^{277} = 0$, $da^{278} = 0$, $db^{278} = 0$, $da^{279} = 0$, $db^{279} = 0$, $da^{280} = 0$, $db^{280} = 0$, $da^{281} = 0$, $db^{281} = 0$, $da^{282} = 0$, $db^{282} = 0$, $da^{283} = 0$, $db^{283} = 0$, $da^{284} = 0$, $db^{284} = 0$, $da^{285} = 0$, $db^{285} = 0$, $da^{286} = 0$, $db^{286} = 0$, $da^{287} = 0$, $db^{287} = 0$, $da^{288} = 0$, $db^{288} = 0$, $da^{289} = 0$, $db^{289} = 0$, $da^{290} = 0$, $db^{290} = 0$, $da^{291} = 0$, $db^{291} = 0$, $da^{292} = 0$, $db^{292} = 0$, $da^{293} = 0$, $db^{293} = 0$, $da^{294} = 0$, $db^{294} = 0$, $da^{295} = 0$, $db^{295} = 0$, $da^{296} = 0$, $db^{296} = 0$, $da^{297} = 0$, $db^{297} = 0$, $da^{298} = 0$, $db^{298} = 0$, $da^{299} = 0$, $db^{299} = 0$, $da^{300} = 0$, $db^{300} = 0$, $da^{301} = 0$, $db^{301} = 0$, $da^{302} = 0$, $db^{302} = 0$, $da^{303} = 0$, $db^{303} = 0$, $da^{304} = 0$, $db^{304} = 0$, $da^{305} = 0$, $db^{305} = 0$, $da^{306} = 0$, $db^{306} = 0$, $da^{307} = 0$, $db^{307} = 0$, $da^{308} = 0$, $db^{308} = 0$, $da^{309} = 0$, $db^{309} = 0$, $da^{310} = 0$, $db^{310} = 0$, $da^{311} = 0$, $db^{311} = 0$, $da^{312} = 0$, $db^{312} = 0$, $da^{313} = 0$, $db^{313} = 0$, $da^{314} = 0$, $db^{314} = 0$, $da^{315} = 0$, $db^{315} = 0$, $da^{316} = 0$, $db^{316} = 0$, $da^{317} = 0$, $db^{317} = 0$, $da^{318} = 0$, $db^{318} = 0$, $da^{319} = 0$, $db^{319} = 0$, $da^{320} = 0$, $db^{320} = 0$, $da^{321} = 0$, $db^{321} = 0$, $da^{322} = 0$, $db^{322} = 0$, $da^{323} = 0$, $db^{323} = 0$, $da^{324} = 0$, $db^{324} = 0$, $da^{325} = 0$, $db^{325} = 0$, $da^{326} = 0$, $db^{326} = 0$, $da^{327} = 0$, $db^{327} = 0$, $da^{328} = 0$, $db^{328} = 0$, $da^{329} = 0$, $db^{329} = 0$, $da^{330} = 0$, $db^{330} = 0$, $da^{331} = 0$, $db^{331} = 0$, $da^{332} = 0$, $db^{332} = 0$, $da^{333} = 0$, $db^{333} = 0$, $da^{334} = 0$, $db^{334} = 0$, $da^{335} = 0$, $db^{335} = 0$, $da^{336} = 0$, $db^{336} = 0$, $da^{337} = 0$, $db^{337} = 0$, $da^{338} = 0$, $db^{338} = 0$, $da^{339} = 0$, $db^{339} = 0$, $da^{340} = 0$, $db^{340} = 0$, $da^{341} = 0$, $db^{341} = 0$, $da^{342} = 0$, $db^{342} = 0$, $da^{343} = 0$, $db^{343} = 0$, $da^{344} = 0$, $db^{344} = 0$, $da^{345} = 0$, $db^{345} = 0$, $da^{346} = 0$, $db^{346} = 0$, $da^{347} = 0$, $db^{347} = 0$, $da^{348} = 0$, $db^{348} = 0$, $da^{349} = 0$, $db^{349} = 0$, $da^{350} = 0$, $db^{350} = 0$, $da^{351} = 0$, $db^{351} = 0$, $da^{352} = 0$, $db^{352} = 0$, $da^{353} = 0$, $db^{353} = 0$, $da^{354} = 0$, $db^{354} = 0$, $da^{355} = 0$, $db^{355} = 0$, $da^{356} = 0$, $db^{356} = 0$, $da^{357} = 0$, $db^{357} = 0$, $da^{358} = 0$, $db^{358} = 0$, $da^{359} = 0$, $db^{359} = 0$, $da^{360} = 0$, $db^{360} = 0$, $da^{361} = 0$, $db^{361} = 0$, $da^{362} = 0$, $db^{362} = 0$, $da^{363} = 0$, $db^{363} = 0$, $da^{364} = 0$, $db^{364} = 0$, $da^{365} = 0$, $db^{365} = 0$, $da^{366} = 0$, $db^{366} = 0$, $da^{367} = 0$, $db^{367} = 0$, $da^{368} = 0$, $db^{368} = 0$, $da^{369} = 0$, $db^{369} = 0$, $da^{370} = 0$, $db^{370} = 0$, $da^{371} = 0$, $db^{371} = 0$, $da^{372} = 0$, $db^{372} = 0$, $da^{373} = 0$, $db^{373} = 0$, $da^{374} = 0$, $db^{374} = 0$, $da^{375} = 0$, $db^{375} = 0$, $da^{376} = 0$, $db^{376} = 0$, $da^{377} = 0$, $db^{377} = 0$, $da^{378} = 0$, $db^{378} = 0$, $da^{379} = 0$, $db^{379} = 0$, $da^{380} = 0$, $db^{380} = 0$, $da^{381} = 0$, $db^{381} = 0$, $da^{382} = 0$, $db^{382} = 0$, $da^{383} = 0$, $db^{383} = 0$, $da^{384} = 0$, $db^{384} = 0$, $da^{385} = 0$, $db^{385} = 0$, $da^{386} = 0$, $db^{386} = 0$, $da^{387} = 0$, $db^{387} = 0$, $da^{388} = 0$, $db^{388} = 0$, $da^{389} = 0$, $db^{389} = 0$, $da^{390} = 0$, $db^{390} = 0$, $da^{391} = 0$, $db^{391} = 0$, $da^{392} = 0$, $db^{392} = 0$, $da^{393} = 0$, $db^{393} = 0$, $da^{394} = 0$, $db^{394} = 0$, $da^{395} = 0$, $db^{395} = 0$, $da^{396} = 0$, $db^{396} = 0$, $da^{397} = 0$, $db^{397} = 0$, $da^{398} = 0$, $db^{398} = 0$, $da^{399} = 0$, $db^{399} = 0$, $da^{400} = 0$, $db^{400} = 0$, $da^{401} = 0$, $db^{401} = 0$, $da^{402} = 0$, $db^{402} = 0$, $da^{403} = 0$, $db^{403} = 0$, $da^{404} = 0$, db^{404}

The text on this page is estimated to be only 24.79% accurate

3⁶ PBEinfRB PARTIE. — CHAPITRE T. Enfin, le déterminant (4) se réduira à $\det \begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 & \delta_5 & \delta_6 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 & \delta_5 & \delta_6 \end{pmatrix}$, $\delta_1 \delta_2 \delta_3 \delta_4 \delta_5 \delta_6$ étant supposée une génératrice ordinaire, ce déterminant ne sera pas nul. On pourra donc des équations $j, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5, \delta_6$ déduire l'expression de r et d en fonction linéaire de δ_1 et de δ_2 . Les quantités $d_1, d_2, \dots, d_6$ étant des fonctions linéaires de $d_1, d_2, \dots, d_6$ deviendront des fonctions linéaires de δ_1, δ_2 telles que $d_1 = P \delta_1 + Q \delta_2, d_2 = V \delta_1 + h Q \delta_2$. On aura, par suite, $\frac{P}{V} \delta_1 + \frac{Q}{h} \delta_2 = \frac{P}{V} \delta_1 + \frac{Q}{h} \delta_2$, $\frac{P}{V} \delta_1 + \frac{Q}{h} \delta_2 = \frac{P}{V} \delta_1 + \frac{Q}{h} \delta_2$, $\frac{P}{V} \delta_1 + \frac{Q}{h} \delta_2 = \frac{P}{V} \delta_1 + \frac{Q}{h} \delta_2$. Soit d'ailleurs θ l'angle que la plus courte distance forme avec l'axe des x . On aura d'où $X = \sin \theta, X' = \cos \theta, X'' = 0, X''' = \tan \theta, \dots$. Les valeurs de z correspondantes aux points principaux

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA SÉRIE DE

TAYLOR. On s'obtiendront en cherchant le maximum et le minimum de T . On sait qu'il faut pour cela poser les équations (9) $2l'db-h\{Pt'hQ\}dbi-h^2[Ldb = 0$, (10) $(P, -4-Q) \sqrt{6} - h^2 Q, dbi - + - 2 \sqrt{Ldbi} = 0$, d'où (II) $2PH-2[X PjH-Q P,4-Q 2Qi-h^2lx O$. Cette dernière équation donnera au signe près le maximum et le minimum cherchés. Les précédentes donneront la valeur correspondante de $-tt = -\tan^2 j$. Supposons maintenant que nous ayons pris pour plan des zy l'un des plans principaux, et choisis l'origine à égale distance des points principaux. On devra avoir un $\dots, j$, $\wedge dbi$ maximum ou un minimum pour $\wedge p = 0$, d'où $-\wedge = 0$, ce qui réduira l'équation (10) à $P + Q = 0$. L'équation (i i) se réduira à $(2P+2[x)(2Q,4-2jl)=z:0$, et, ses racines devant être égales et opposées, on aura $Q = -P$. Faisant donc $P = -Q$, $Q = -P$, $-\dots i = -\tan^2 j$ dans les formules, il viendra $\wedge' i - htang - tj; \wedge' \wedge' \wedge' H - lang$

298 PREXIfE RE PARTIE. — CHAPITRE T. 315. On déduit de ces formules des conséquences importantes : $I \otimes T$ est maximum ou minimum pour $\theta = 0$ et $\theta = 90^\circ$; d'où cette conséquence : Les deux plans principaux sont rectangulaires. 7. $\frac{p}{\sin \theta} \sin \theta \cos \theta = \frac{p}{\sin \theta}$, d'où Ces deux valeurs étant égales et de signe contraire, et moindres que P , on aura ce résultat : Les foyers sont situés entre les points principaux, à égale distance du milieu de la droite qui les joint. Les foyers seront d'ailleurs réels ou imaginaires, suivant que P sera $> Q$ ou $< Q$ en valeur absolue. 3 $\otimes$ L'équation $\sin^2 \theta = \frac{P}{Q}$ a deux racines : $\theta = \theta_0$ et $\theta = \pi - \theta_0$. Les plans focaux auront pour azimut θ_0 et $\pi - \theta_0$. On voit donc qu'ils font des angles égaux avec les plans principaux, 4 $\otimes$ Si $Q = 0$, les foyers et les plans focaux seront réels et se confondront avec les points et les plans principaux. Les plans focaux seront donc rectangulaires. Réciproquement, si ces plans sont rectangulaires, on aura d'où

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA SÉRIE DE

TATLOR. 299 OU (4) $\wedge \wedge$ et seront distingués Tun de l'autre par le signe du radical. Soit, d'autre part, $D|$ une droite de la congruence infiniment voisine de D ; elle aura pour équations $x^{da} - \lambda dht^{\wedge} = ida - \lambda dbz - \{z - hP\}db - hQdbi$, $y^{da} - \lambda db^{t^{\wedge}} : da^{\wedge} \rightarrow rdbxZ - Qdb - Jr \{z - P\}dbi$. Elle rencontrera le plan focal (i4) en un point dont le z est déterminé par l'équation $Qdb - h\{z - F\}dbi - Q(z - hP)db - i - i^{\wedge}dbi \sim P = t:v/P \ll -^{\wedge}Q^*$. Or cette équation est satisfaite, quel que soit le rapport $\wedge S$ en posant $z = \pm v/P : * - Q^{\wedge}$. Cette équation, jointe à l'équation (i4) représente une perpendiculaire à D menée dans le plan focal et passant par le foyer. Cette perpendiculaire a reçu le nom de droite focale. On peut donc énoncer cette proposition : Les intersections d'une génératrice quelconque $D|$, infiniment voisine de D , avec les plans focaux, sont situées sur les droites focales (aux infiniment petits du second ordre près). 317. Il nous reste à étudier la distribution autour de D des droites infiniment voisines, lorsque D est une génératrice singulière. Dans ce cas, le déterminant $I^{\wedge \wedge} dbj^{\wedge} db^{\wedge}$

The text on this page is estimated to be only 23.92% accurate

300 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE T. étant nul, le rapport des quantités ne dépendra pas du rapport $\frac{a}{b}$. On aura donc $\frac{db}{dx} \tan \alpha = -\frac{a}{b}$ - $\frac{a}{b} = \text{const.}$, d'où $\alpha = \text{const.}$ On pourra orienter les axes coordonnés de telle sorte que Ton ait $\alpha = 0$, d'où $\frac{db}{dx} = 0$. Les formules (8) deviendront alors — T: Si le déterminant (15) n'est pas nul, on pourra déduire des équations les valeurs de $\frac{a}{b}$, $\frac{a^3}{b^3}$ en $\frac{a}{b}$ et en $\frac{db}{dx}$. Substituant dans la valeur de $\frac{a}{b} = -\frac{a}{b}$, et, par suite, $\frac{db}{dx} = \frac{a}{b} \frac{da}{db}$ dox $p = \frac{db}{da}$, $\frac{1}{da}$ à $\frac{db}{dx} \frac{1}{db} \frac{1}{df} \frac{1}{1}$

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA SÉRIE DE

TÂTLOR. 301 On peut d'ailleurs, en déplaçant l'origine de la quantité Q , faire disparaître le second terme de cette expression. On aura donc les deux relations Les génératrices infiniment voisines de D auront pour équation $a: = c^2 a - h dbz = VcUzi - H dbz$, $y =: da^h - h db^h zzm da^h$. Ces génératrices sont donc parallèles au plan des xz . Celles pour lesquelles $da^h = 0$ sont dans ce plan lui-même et rencontrent la droite D à l'origine des coordonnées. Celles pour lesquelles $db=0$ sont parallèles à D . Ce cas diffère donc de celui des génératrices ordinaires en ce que l'un des foyers est rejeté à l'infini, l'autre étant à l'origine des coordonnées. Enfin, si le déterminant (i 5) est nul, $-y^h$ ne dépendant plus du rapport $-^h y$ on aura les deux relations $^h = 0$, $n = \text{const.}$ Désignons par P le rapport constant $-^h$. Les génératrices infiniment voisines de D auront pour équations $X := da - h dbzy y^h Pdb$, et aucune d'elles ne coupe plus D à distance finie, mais celles pour lesquelles $db=0$ lui sont parallèles. 318. Troisième cas : Complexes. — On a, dans ce cas, trois paramètres : a , p , y . Soit D une droite du complexe. En la choisissant pour axe des Zy et prenant z pour variable indépendante, on pourra réduire ses équations à la forme $x=zo$, $y = 0$, $s=it$,

The text on this page is estimated to be only 25.42% accurate

30a PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE V. et celles d'une droite D , infiniment voisine, à la forme $z = z_0 + x \frac{dz}{dx} + y \frac{dz}{dy}$, $y = y_0 + x \frac{dy}{dx} + z \frac{dy}{dz}$, $da, db, \dots$ étant linéaires en rfa, rf^a, rfy . Supposons d'abord que D soit une droite ordinaire, c'est-à-dire telle que l'on n'ait pas simultanément $\frac{dz}{dx} = 0, \frac{dz}{dy} = 0$. Les deux équations $da = 0, db = 0$ permettront d'exprimer deux des quantités rfa, rf^a, rfy , par exemple rfa et rf^a , en fonction linéaire de rf^b, db, rfy . Par suite, da, db deviendront des fonctions linéaires de rf^b, db, rfy telles que $da = iFdb - hQdbi - hRd^a, db = Vdb + q^a dbx - h^a d^a$. Si l'on pose, en particulier, $db = dbt = o^a$ ces équations se réduiront à $rfa = Rrf^b, rf^a = R|rf^b$, et Dj , ayant pour équations $a = 0, R^u Y. y = R^i Y$ sera parallèle à D . Supposons le plan des zy orienté de manière à contenir une de ces droites parallèles à D ; on devra avoir $R = 0$. Cela posé, entre les formules $\frac{dp}{dib} = \frac{h}{hny} \frac{db^a}{db} - \frac{dbday}{da db^a} - \frac{db^a db^b}{db^a db^b} - \frac{db^a db^b}{db^a db^b}$

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA SÉRIE DE
 TAYLOR. 303 éliminons r et i , il viendra $r^2 + db^2 - da^2 = 0$. $Pdb - h Qdb^2$
 OU ou enfin, en déplaçant l'origine sur l'axe des z de la quantité P , ce qui
 changera T en $T - P$, $r^2 + (jD - Q) \tan^2 \theta = 10$. 319. Si D était une droite
 singulière, le rapport r^2 étant indépendant de d , d^2 , $d^2 y$ on aurait la
 relation plus simple $\tan^2 \theta = \text{const.}$ VIII. — Théorie des surfaces. 320. Plan
 tangent et normale, — Considérons une surface, représentée par les
 équations Soit $(x^2 + y^2 + z^2 + Ux + Vy + Vz + W)$ un de ses points. L'équation générale d'un
 plan $AX + BY + CZ + D = 0$ contient trois paramètres, dont on peut disposer
 de manière à obtenir un contact du premier ordre avec la surface au point
 considéré. On devra, pour cela, satisfaire aux équations $Ax + By + Cz + D = 0$
 $z^2 + A^2 x^2 + B^2 y^2 + C^2 z^2 + 2ABxy + 2ACxz + 2BCyz = 0$. On déduit de ces équations $A(X - a) - h$
 $B(Y - b) - C(Z - c) = 0$.

The text on this page is estimated to be only 26.25% accurate

304 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE T. Éliminant ensuite A, B, C, on aura l'équation du plan tangent $I X - :c Y - j' Z - i dx dy dz du$ du $du z = 0$. $dx dy dz di^{\wedge} dv di^{\wedge} hfi$ normale, perpendiculaire au plan tangent, sera donnée par les équations $X - X B Z - 5$ en posant, pour abrégé, $\backslash = z dy dz dy dz du dv dv du T. dz dx dz dx du di^{\wedge} i?^{\wedge} du C = dx dy dx dy du di^{\wedge} dv du$ 32i. Ces formules se simplifient, mais en perdant leur symétrie, si Ton suppose que x et y aient été pris pour variables indépendantes. Il est d'usage, dans ce cas, de représenter d'une manière abrégée les dérivées partielles $dz dz d^{\wedge} z d^{\wedge} z _ _ d^{\wedge} dx dy dx^{\wedge} dx dy dy^*$ par les lettres />, gr, r, 5, t. Posant donc dans les formules précédentes $x = u^{\wedge} y = Vj$ d'où $dx dU dz du = 0$, $dx d^{\wedge} dz _ _ _ dy dy du dv dz dz$

▲ APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA SÉRIE DE

TAYLOR. Soit l'équation du plan tangent deviendra et les équations de la normale $X = 0, Y = r, Z = 5 p q$. Enfin, si z est une fonction implicite définie par l'équation $F(x, y, z) = 0$, on aura $dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz = 0$ et les formules prendront la forme suivante : Équation du plan tangent, Équation de la normale, $X = 0, Y = r, Z = 5 p q$; dx, dy, dz . Distance de deux points infiniment voisins. — Soient (x, y, z) et $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ deux points infiniment voisins. Il est aisé d'évaluer la valeur principale de la distance de ces deux points sur la surface. En effet, l'arc infiniment petit qui les joint diffère infiniment peu de sa corde, qui a pour valeur $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$, et pour valeur principale $\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2} dy + dz$. J. — Cours, 1. 30

306 PREVIÈRE PARTIE. — CHAPITRE V. Donc dsj valeur principale de A5, sera donné par l'équation $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - 2(dx dy + dy dz + dz dx)$; en posant, pour abréger, $N = \sqrt{1 - 2(dx dy + dy dz + dz dx)}$ — — ET $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - 2(dx dy + dy dz + dz dx)$. — Pour définir l'aire d'une portion de surface S limitée par une courbe quelconque C (Fig. 19), on peut opérer de la manière suivante : traçons sur cette portion de surface un réseau de lignes infiniment voisines, qui la décomposent en éléments infiniment petits dans les deux sens, et considérons un de ces éléments abcd. On pourra déterminer d'une infinité de manières un polygone plan cdvdd y dont les sommets soient à une distance infiniment petite du second ordre des sommets correspondants

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA SÉRIE DE

TAYLOR. Soit a, b, c, d . On pourra, par exemple, prendre pour a', b', c', d' les projections de a, b, c, d sur le plan tangent en un point quelconque de la région $abcd$, car on sait que, dans cette région, la distance de la surface au plan tangent est du second ordre. Substituons de la même manière, à chacun des éléments de la surface S , le polygone plan correspondant, et formons la somme des aires de ces polygones. La limite vers laquelle tend cette somme, lorsque l'étendue de chaque élément décroît indéfiniment, sera l'aire de la surface S . Pour justifier cette définition, il faut prouver : 1° que cette limite est indépendante de la manière dont on choisit le polygone plan substitué à l'élément $abcd$ 2° qu'elle est également indépendante de la manière dont on opère la décomposition de S en éléments infiniment petits.

1° Supposons d'abord qu'on substitue à l'élément $abcd$ au lieu du polygone $a'bcd'$ un autre polygone plan $a'b'c'd'$. Les sommets a', b', c', d' et a'', b'', c'', d'' étant respectivement à une distance du second ordre de a, b, c, d , seront à une distance du second ordre les uns des autres. Donc les distances $a'b', a'b'', \dots$ ne différeront que d'une quantité du second ordre des distances $a'b, a'b'', \dots$. Or ces longueurs sont évidemment du premier ordre; elles ne seront donc altérées que d'une fraction infiniment petite de leur valeur primitive. On en conclut sans peine que l'aire $a'b'c'd'$ ne différera de l'aire $a'b'c'd$ que d'une fraction infiniment petite de sa valeur primitive. On aura, par suite, $a'b'c'd' = a'b'c'd + \epsilon$, ϵ étant une quantité infiniment petite. On aura donc $a'b'c'd' - a'b'c'd = \epsilon$, ϵ désignant la plus grande et la plus petite des quantités ϵ .

308 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE V. A la limite, 7) et t), tendant vers 0, on aura 2^e Supposons maintenant qu'on remplace le réseau des lignes qui ont servi à découper S en éléments infiniment petits par un autre réseau. Nous allons montrer que l'aire calculée en se servant de l'un quelconque de ces réseaux est la même que celle qu'on obtiendrait en se servant d'un troisième réseau comprenant toutes les lignes des deux premiers. Soit, en effet, E l'un des éléments obtenus par l'emploi du premier réseau. En traçant les lignes du deuxième réseau, on le décomposera en un certain nombre de régions e, e_i, ... qui seront les éléments du troisième réseau. Projetons les sommets de cette figure sur le plan tangent en un point quelconque de E. Il est clair que les polygones plans e'_j e'_y ..., projections des éléments e, e_i, ..., auront pour somme le polygone E', projection de E.

324. Si, dans les équations de la surface nous faisons varier ϕ en conservant à u une valeur constante U₀ le point (ϕ , ϕ , z) décrira une courbe, dont les équations s'obtiendraient en éliminant $s^\wedge$ entre les trois équations précédentes; nous l'appellerons la courbe U_q. En faisant varier la valeur de U_q, on obtiendrait une série de courbes analogues En donnant à (ϕ une série de valeurs constantes $\phi^0, \phi^1, \dots$ et faisant varier $u^\wedge$ on obtiendrait une seconde série de courbes i'o» ♦'u • • • 325. Proposons-nous de déterminer l'aire du quadrilatère curviligne infiniment petit, compris entre les quatre courbes $ty\ t + dt^\wedge u^\wedge u^\wedge - du \{ \text{fi g. 20} \}$. Les coordonnées des sommets de ce quadrilatère auront, au second ordre près, les valeurs suivantes :

The text on this page is estimated to be only 28.14% accurate

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA SÉRIE DE
TATLOR. 809 Pour le point a, S , J, -; Pour le point 6, M, $s^{\wedge}-\backslash-dv$, $x^{\wedge}-\backslash-$ -
 $^dv^{\wedge}y^{\wedge}-T-$ $^{\wedge}>5-h3-a(^{\wedge}$; Pour le point c, u $-\backslash-$ du, V, Pour le point rf, ,
(Ja; , $dy^jdz^ju^{\wedge}-du$, V, $x^{\wedge}-\backslash^{\wedge}-du$, $Y-h-T-dUy^z-h-j-du$; $du^{\wedge}$ ou $du^y^jdx^jdx^j$
 $u^{\wedge}-hdu$, $V^{\wedge}d\backslash f$, $X^{\wedge}-\backslash^{\wedge}-du^{\wedge}-\backslash^{\wedge}-dv$, ' du di $> \grave{a}y^jdy^jdz^j^{\wedge}du^{\wedge}dv^{\wedge}du^{\wedge}$
Les quatre points a, 6', c', d'y dont les coordonnées ont les valeurs ci-
dessus, ne sont écartés des sommets réels du quadrilatère curviligne que de
quantités du second ordre. Fig. ao. W+rfl4 D'ailleurs ils forment les
sommets d'un parallélogramme; car les coordonnées des points a et b'
différant de la même quantité que les coordonnées correspondantes de d et
d'^ ab' et dd! seront égales et parallèles. Nous pouvons donc, dans
l'évaluation de l'aire, substituer au quadrilatère abcdle parallélogramme
aVdd'. Ce parallélogramme se projette sur le plan des $xy^{\wedge}$ suivant

310 PBBXIÈRE PARTIE. — CHAPITRE T. un parallélogramme dont les sommets ont pour coordonnées x, y, z, v (Ici dy, dz, dv du x, y, z, v D'après un théorème connu de Géométrie, son aire sera représentée, au signe près, par le déterminant $\begin{vmatrix} dx & dy & dz & dv \\ dy & dz & dv & dx \\ dz & dv & dx & dy \\ dv & dx & dy & dz \end{vmatrix}$ On aura de même, pour l'aire des projections du parallélogramme sur les deux autres plans coordonnés, les deux expressions $\pm A du dv \pm B dv dx$. Désignons par d

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA SÉRIE DE
 TAYLOR. 3 II R désignant un ensemble de termes d'ordre supérieur au
 second. (Les termes d'ordre 0 et 1 manquent » car, l'origine étant sur la
 surface et le plan des xy lui étant tangent, z et ses dérivées premières
 devront s'annuler pour $a = 0$, $^{\wedge} = 0$.) Nous pouvons d'ailleurs disposer de la
 direction des axes OX , OY de manière à faire disparaître le terme en xy . On
 aura alors simplement, en négligeant les termes du troisième ordre, $(>) z^{\wedge} \setminus$
 $\{ax^{\wedge} - cy^{\wedge}\}$. Si, dans cette équation, nous substituons successivement à z
 une série de valeurs très petites, nous obtiendrons une série de courbes de
 niveau de la surface proposée ; ces courbes seront des courbes semblables à
 la suivante : ■ cj' laquelle porte le nom à $^{\wedge}$ indicatrice. Supposons d'abord a
 et c {fig* ai) de même signe. Les Fig. ai. courbes de niveau seront de petites
 ellipses, réelles lorsque z a le même signe que a et c , imaginaires lorsqu'il
 est de

31a PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE T. signe contraire. La surface est donc située tout entière du même côté de son plan tangent, et n'a qu'un seul point commun avec lui. Si a et c (Jig- aa) sont de signes contraires, les courbes de niveau sont approximativement (dans le voisinage de l'origine) des hyperboles, ayant pour asymptotes les deux droites définies par l'équation Le plan tangent coupe la surface suivant une courbe se confondant, dans le voisinage de l'origine, avec ces deux asymptotes. Les plans parallèles situés au-dessus donnent, pour sections des hyperboles telles que H, les plans situés en Fig. 22, dessous des hyperboles K tournant leur convexité aux premières. Enfin, dans le cas de transition où a ou c sont nuls, les courbes de niveau sont formées de deux droites parallèles. On dira, dans ce cas, que O est un point parabolique de la surface. 327. Courbure des lignes tracées sur une surface. — Considérons maintenant une ligne L tracée sur la surface et passant par le point O, et proposons-nous d'évaluer sa courbure en ce point.

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA SÉRIE DE

TATLOR. 313 Menons le plan osculateur au point O à la ligne L ; soient θ l'angle de ce plan avec l'axe des z ; ϕ l'angle de sa trace OQ sur le plan des xy avec l'axe OX. Soient enfin M un point de la courbe infiniment voisin de O ; X, y, z ses coordonnées ; P et N ses projections sur le plan OXY et sur la droite OQ ; k la courbure cherchée. La droite OQ étant tangente à L au point O, on aura, par une formule connue $MN = \frac{1}{2} OM^2 k$, d'où $2MN = OM^2 k$. Mais le triangle MPN donne $\cos \theta = \frac{PN}{PM}$. D'autre part, $CM^2 = ar^2 - 4r \cdot \frac{1}{2} \theta^2 = a^2 - h^2 r^2$, en négligeant z^2 qui est du quatrième ordre ; on aura donc $a^2 - h^2 r^2 = \frac{1}{2} OM^2 k$ ou $\cos^2 \theta = \frac{1}{2} k$. On voit, par cette formule : $k = \frac{2 \cos^2 \theta}{a^2 - h^2 r^2}$ Que la courbure cherchée ne dépend que de la posi

314 PRÉFACÉ. — CHAPITRE V. Du plan osculateur de la courbe L. La courbe L aura donc la même courbure que la section plane faite dans la surface par son plan osculateur ; 1** Que la courbure d'une section plane est égale à celle de la section normale menée par la même tangente, divisée par le cosinus de V obliquité. Ce résultat est connu sous le nom de théorème de Meunier; 2** Que la courbure d'une section normale est donnée en fonction de V azimut ^ par la formule $\kappa_z = \kappa \cos V$ ces'

APPLICATIONS GÉOSÉTRIQUES DE LA SÉRIE DE
TAYLOR. 315 infini pour une seule direction (pour $c_p = -$, si c'est le coeffi-
cient c qui est nul). 329. Considérons deux sections normales
perpendiculaires entre elles et ayant respectivement pour azimut

α, p, q sont fonctions de deux variables indépendantes x, y . Les
normales à la surface formeront donc une congruence. Pour reconnaître le
caractère particulier de cette congruence, cherchons comment se distribuent
autour de la normale OZ les normales infiniment voisines.

316 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE IV. On a $p = ax - h$, $q = cy + k$. Si donc on suppose x et y infiniment petits, on aura, au deuxième ordre près, $p = 0$, $q = 0$, ce qui donnera, pour équations des normales dont il s'agit, $ax = cy$ ou $X^2 - axT - cyZ = 0$. La droite, ainsi définie, rencontrera la normale OZ , si l'on peut satisfaire aux deux équations $0 = LX - axT$ et $0 = iy - cyZ$. Si O n'est ni un ombilic ni un point parabolique, cela pourra se faire de deux manières : 1° En posant $0 = 0$, $Z = i$; 2° En posant $Y = 0$, $Z = -i$. Les deux foyers de la congruence situés sur la normale OZ auront pour ordonnées i et $-i$. Ils se confondront donc avec $\frac{1}{2}a$ et $-\frac{1}{2}a$ les centres de courbure des sections principales. Ces points portent le nom de centres de courbures principaux. Les normales infiniment voisines de OZ , qui la rencon-

à APPUGATIONS géométriques de Là SÉBIB DE TÀTLOR. ¹⁷
 Irent au foyer $Z = -$ correspondant à $\wedge = o$, ont pour équations $Xz^{\wedge}O$, $Yrzzj-$
 C/Z , et sont situées dans le plan des YZ . Ce plan est donc le plan focal. De
 même, au foyer $Z = -$ correspondra comme plan focal le plan des XZ , D'où
 ce résultat : Les plans focaux sont rectangulaires et se confondent avec les
 plans des sections principales. Les plans principaux de la congruence, se
 confondant avec les plans focaux (313), seront les plans des sections
 principales, et ses points principaux seront les centres de courbure
 principaux. 332. Examinons maintenant le cas où O serait un ombilic ou un
 point parabolique. I** Si O est un ombilic, on aura $a = c$. Les deux foyers
 coïncident. Enfin les normales infiniment voisines de OZ , ayant pour
 équations $X = a7 - axZ$, $Yi = j - \ll/Z$, viennent toutes la rencontrer au même
 point $Z = - \bullet 2$ Si O est un point parabolique, pour lequel on ait $c = o$, par
 exemple, le foyer correspondant sera à l'infini. Les normales voisines de
 OZ auront pour équations $X = J7 - axTjy$ $Y = :^{\wedge}$ et seront parallèles à OZ
 pour $j; = o$. La normale OZ sera donc une droite singulière dans le système
 des normales. 333. On voit, par ce qui précède, qu'un système de droites (a)
 $X = a4 - 6f$, $Y = a,4 - ^if$, $Zz = a, + 6,f$,

318 PREWfcmB PARTIE. — CHAPITRE Y. dépendant de deux paramètres a, α , n'est pas formé, en général, de normales à une même surface. Il faut, en effet, pour qu'il en soit ainsi, que sur chaque génératrice les foyers et les points principaux se confondent. Proposons-nous de trouver directement l'expression de la condition à remplir pour que les droites (3) soient normales à une même surface. Posons à cet effet, pour plus de simplicité, $b = \frac{1}{\sqrt{a}}$, $u = \frac{1}{\sqrt{a}}$. Les équations (2) pourront s'écrire et Ton aura (3) $c = -\frac{1}{2} \frac{dr}{r}$; — r , d'où (4) $cdC' \frac{1}{C} \frac{dr}{r} = -\frac{1}{2} \frac{dr}{r}$. Soient maintenant x, y, z les coordonnées du point où l'une des droites (2) coupe la surface cherchée; u la valeur correspondante de u . On aura (5) $\frac{1}{a} \frac{dr}{r} = -\frac{1}{2} \frac{dr}{r}$, jrrai-hCjO, -Snra,-hC,6, et, comme la droite est normale, d'où $\frac{1}{a} > \frac{1}{a}$ I (6) $p = -r \frac{dr}{r} = -7'$ Il s'agit de trouver des fonctions $or, jk, \alpha, 0$ des variables a et p , telles que les équationne (5) et (6) soient satisfaites.

The text on this page is estimated to be only 25.77% accurate

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA SÉRIE DE
TAYLOR. SiQ Les équations (5) différenciées donneront $dx^{da} - h^{dc} -$
 $hcd^{\wedge}, dy = da^{\wedge} h - 6 c^{\wedge} Cj - f - Ci c^{\wedge}, da| - t - 6dfcj + c,rf6^{\wedge} =^{\wedge} dz = zpdx + qdy C$
 $Ci \text{ — } \{da^{\wedge} dc^{\wedge} cd^{\wedge}\} \{da^{\wedge} -^{\wedge} dci -^{\wedge} c^{\wedge} d^{\wedge}\} Cl Ci$ ou, en chassant le
dénominateur C2 et tenant compte des équations (3) et (4), $cda - hCidai^{\wedge} -$
 $c, da, -i - rf6 = 0$. Remplaçant da, $da^{\wedge} da^{\wedge} d^{\wedge}$ par leurs valeurs da, da j^ et
égalant séparément à zéro les termes en doi et en d^ on aura les deux
équations $da dax da^{\wedge} d^{\wedge} C - z h Cj - r r Cl - 3 h 3 - = o, aa dot doL doL da dtti$
 $da^{\wedge} d6$ Prenons la dérivée de la première équation par rapport à p, celle de
la seconde par rapport à a, et retranchons-les; 6 disparaîtra en vertu de la
relation connue et il restera Téquation de condition à ^ da d - da OU, en
effectuant les calculs et supprimant les termes qui se détruisent, (de da __dc
da\ __ \hat{di} doid?)^{\wedge}

340 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE T. 334. Les théorèmes généraux démontrés sur les congruences étant appliqués aux normales à une surface, montrent que par chacune d'elles passent deux normales (surfaces composées de normales) développables. Elles se coupent à angle droit, les deux plans focaux qui leur sont respectivement tangents étant perpendiculaires l'un à l'autre, comme nous l'avons vu. Les intersections de ces normales avec la surface portent le nom de lignes de courbure. Par chaque point de la surface passent deux lignes de courbure ayant respectivement pour tangentes les tangentes à la surface situées dans les plans focaux. Ces plans étant ceux des sections principales, les lignes de courbure seront en chaque point tangentes aux sections principales, et se couperont à angle droit. 335. Il est aisé de trouver l'équation différentielle qui caractérise ces normales et la grandeur des rayons de courbure principaux relatifs à une quelconque d'entre elles. Soient, en effet, x, y, z et $a, -f, dx, dy, z + dz$ les coordonnées de deux points infiniment voisins de la surface; $\frac{dx}{p} = \frac{dy}{q} = \frac{dz}{r}$ les équations de la normale au point (x, y, z) . En introduisant une nouvelle variable u , égale à la valeur commune de ces rapports, on pourra mettre ces équations sous la forme $X = Lx - \frac{1}{2}ky, Y = j - hB^u, Z = j^4 - C^u$. La normale au point $(x + dx, y + dy, z + dz)$ aura des équations analogues $X = j^4 - C^u, Z = z - \frac{1}{2}dz - \frac{1}{2}C^u \frac{dC}{dt}$. Ces deux droites se rencontreront, si l'on peut donner aux

The text on this page is estimated to be only 27.69% accurate

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA SÉRIE DE
TATLOR. 321 variables t et tt des valeurs T et T_4 telles que l'on ait $X = j? +$
 $AT - : J7 -h \acute{e}/j7 H- (A-h- cfA)Ti$, $Y \text{ zr}z j. -h BT - :/ -h \hat{u}T^4- (B -i- rfB)T,$, Z
 $=1 z -^ CT - z -\{- dz -h \{C -h dC)T^$ ou, en réduisant, $10 - e/j? hA(T, -$
 $T) f-TidA$, $o -.d[x +B(T,-T)-^TirfB$, $0-^5 -+-C(T_4 - T)-HTi(iC$. Pour que
ces équations soient compatibles, il faudra qu'on ait d'a: $A dA (S) ^7 B \acute{e}/B$
 $- o. dz G rfC$ Il ne restera plus qu'à substituer aux diverses quantités qui
figurent dans cette équation leurs valeurs en u , $i^$, $du^ dv$. Les normales
développables une fois déterminées par l'équation différentielle précédente,
leurs intersections avec la surface proposée donneront les lignes de
courbure. 336. Reste à déterminer le rayon de courbure principal. En le
désignant par R , on a évidemment $R--ziv/(X-a:)^*-4-(Y-/)\ll-H(Z-^)\ll =$
 $Tv/A\ll H-B*4-C*$. D'ailleurs, les équations (7) montrent que $T< - T$ est
infinitement petit. On pourra donc poser $R=Tiv/A\ll hB*-+-G*$. Pour
déterminer T_j , on n'aura qu'à remplacer dans les équations (7) $\hat{u}tr$, dj , dz , $d\backslash$,
 rfB , rfC par leurs valeurs $dx =1 \grave{c}- du -r- r- dv$, au av J . — Cours,

The text on this page is estimated to be only 24.13% accurate

3aa PRSMIIIRB PARTIE. — CHAPITRE V. Elles deviendront du
 $\frac{dv}{dt} = \frac{1}{\Delta} \frac{d\Delta}{dt}$ du Éliminant entre ces équations les rapports des quantités du, $\frac{dv}{dt} = \frac{1}{\Delta} \frac{d\Delta}{dt}$
 $T < T$, il viendra $\Delta^4 \dots$). d (9) $\frac{dx}{dK} \frac{dx}{dX} \dots$. au ou av av du au $\frac{dv}{dt} = \frac{1}{\Delta} \frac{d\Delta}{dt}$
 $\frac{dz}{dCrj}, \frac{dz}{dCrj}, \Delta$ OU ou ov ov — o. Substituant pour T sa valeur $R \frac{v}{A} \dots$
 $hb = \dots$ on aura, pour déterminer R, une équation du second degré,
 comme cela doit être. 337. Voyons ce que deviennent ces formules dans le
 cas simple où Δ est donné en fonction de x, y , supposées variables
 indépendantes. On aura, d'après nos définitions, $\frac{dz}{dt} = \frac{1}{\Delta} \frac{d\Delta}{dt} \dots$
 $\frac{rdx}{dt} \dots \frac{tdy}{dt} \dots \frac{A}{dt} \dots \frac{B}{dt} \dots \frac{C}{dt} \dots \frac{I}{dt}$. L'équation
 différentielle (8) des normalies développables

The text on this page is estimated to be only 15.66% accurate

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA SURFACE

TAYLOR. 323 deviendra $dx p r dx - Jt - s dy dy q s dx - h t dy (lo) \{ p dx - q dy \sim i$
 $o = [\{i - p\}s - pqr]dx^2 - [\{i - p\}t - \{i - r q\}r]dxdy - [\{i - q\}s - pqt]dy^2$
D'autre part, x Qly se confondant avec u et v on aura dr dx dit "" dx dy ov
du dv I. à $P^2 _ \dot{p}^2 _ \dot{k} _ dp _ du$ dx ~ ' dv "" dy ' dB dq du dC dB dq , (M
(^J7 ' (Jt' dy ' dTi — ' dz dC di^ dz R L'équation des rayons de courbure
deviendra donc $rR sR (II) . \dot{r} R V^{i+} / > * - h < 7' P tn 1 - + - v/l - h p^t - q^P 1 —$
o. 338. Aux ombilics, l'équation des normales développables est
identiquement satisfaite. On aura donc, pour déterminer ces points, les
équations $\{i - p\}s - pqr = 0, (14-7^*)^2 - (i4-7')r = LO, . (\dot{p} - q^2)s -$
 $pqt = 0,$

The text on this page is estimated to be only 24.57% accurate

'²⁴ matu PAKTiE. — CMàwnwa, t. qui ie réduient ans deoi
sui\aiile> : (12; 1-- zzi î-i := 1— Eo les combiDaol avec l'éqaatîon de la
surface, od aura, ftouT déterminer les coordooooées des ombilics, trois
équations géDéralement distinctes. Le nombre des ombilics sera donc
limité. 339. EnGn, aux points paraboliques, la normale est parallèle à une
normale inGniment voisine. On pourra donc déterminer le rapport de du à
d^r de telle sorte qu'on ait d\ A dB B dC ou, en désignant par I la valeur
commune de ces rapports, A/, 3- tftf -h -Y- di' au dr ÔB. -z- au au âC , dC .
au dv Cl Éliminant du, dç, t, on obtient Téquation de condition A (i3) du ds[^]
dB dB du di' dC dC du dv B C = o. En la combinant avec les équations de la
surface, on obtiendra les équations de la courbe formée par les points
paraboliques. SI z est exprimé en fonction des variables indépen

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA SURFACE DE

TATLOR. 325 dans les ordres, l'équation (13) se réduira à $r^2 p^2 \{14\}$ où n est tel que $z = is^2 - rt$. On a — i 340, Lignes asymptotiques. — Continuons à désigner par $A(X - ar) + B(Y - j) + C(Z - 5) = 0$ l'équation du plan tangent à la surface au point (a, b, c) . Les coordonnées a, b, c d'un point infiniment voisin satisferont à cette équation au second ordre près. Il existera néanmoins deux directions (les asymptotes de l'indicatrice) suivant lesquelles elles y satisfont jusqu'au troisième ordre près. Pour déterminer ces directions, substituons dans le premier membre de l'équation les valeurs des coordonnées $X = a + dx, Y = b + dy, Z = c + dz$. . . , $y = b + dy, z = c + dz$. Dans le résultat de la substitution, les termes du premier ordre $kdx + ldy + m dz$ s'annulent identiquement. Ceux du second étant égaux à zéro, donneront une équation du second degré pour déterminer dy/dx . Soit $M = \{u, p\}$ l'une des racines de, cette équation. On pourra trouver une fonction $p = \phi(w)$ satisfaisant à l'équation différentielle $\frac{dw}{dp} = f$

326 PRBSIÈRB PÀITIE. — CHAPITRE V. et qui se réduise à ζ^u pour $u = Uq$, $u^\wedge$ et $f^\wedge o$ étant des constantes choisies à volonté. La courbe définie par l'équation $i? = \zeta(w)$, jointe aux équations de la surface, satisfera en chacun de ses points à l'équation différentielle précédente; elle sera donc tangente en chaque point aux asymptotes de l'indicatrice. Les courbes ainsi définies se nomment lignes asymptotiques. Par chaque point de la surface $(i/o, ^\wedge o)$ il en passe évidemment deux, réelles ou imaginaires, correspondant aux deux racines de l'équation en t « Si: r, j > ' sont pris pour variables indépendantes, on aura $f/*d:-=zo$, $(Py=-zo$, et l'équation différentielle des lignes asymptotiques se réduira à $o—d^\wedge z — rcijc^\wedge -\} - sdx dy -!- tdy^\wedge$. 341. Appliquons les théories qui précèdent à quelques exemples. Surfaces de révolution. — La tangente au parallèle étant évidemment perpendiculaire au plan méridien, la normale sera située dans le méridien. Les normales en deux points consécutifs se couperont donc si ces deux points sont dans le même méridien. Elles se couperont également si le déplacement a lieu le long d'un parallèle, car il est évident que les normales à un même parallèle forment un cône de révolution autour de l'axe. Les lignes de courbure seront donc les méridiens et les parallèles. 342. Sur/aces dé^eloppables. — Elles sont, par définition, l'enveloppe d'un plan mobile, dont l'équation contient un paramètre variable a . Soit (i5) $z --=(a)$ $X -h (p(a) r-h ^\wedge(a)$ l'équation de ce plan. Celle de la surface s'obtiendra en

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA SÉRIE DE

TATLOR. 827 considérant a comme variable et défini par l'équation (16) $\frac{1}{a} - f - \frac{1}{a^2} f'(a) = 0$. Le plan (15) étant tangent à la surface, on aura $A = \frac{1}{a}$, $B = -\frac{1}{a^2} f'(a)$, $C = -\frac{1}{a^3} f''(a)$. L'équation des lignes de courbure sera donc $\frac{dx}{a} + \frac{dy}{a^2} f'(a) + \frac{dz}{a^3} f''(a) = 0$. Cette équation contenant doL en facteur, l'une des séries de lignes de courbure sera donnée par l'équation $doL = 0$, d'où $a = \text{const.}$ Mais les points de la surface pour lesquels a a une valeur déterminée sont ceux de la génératrice suivant laquelle elle touche un même plan tangent. La première série des lignes de courbure sera donc formée des génératrices & la seconde sera formée des lignes qui coupent ces génératrices à angle droit. On remarquera que, dans les surfaces développables, tous les points sont paraboliques, car les normales sont parallèles entre elles le long d'une même génératrice. C'est d'ailleurs ce qu'exprime l'équation aux dérivées partielles de ces surfaces trouvée au n° 68. 343. Ellipsoïde. — On a $or^2 = r^2 \sin^2 \theta + z^2$ d'où, $Q. \int dr \int dv \int dz \int \frac{1}{a^2} dx \int \frac{1}{b^2} dy \int \frac{1}{c^2} dz$

The text on this page is estimated to be only 28.16% accurate

3⁸ PRBHftKB PÀETiB. — GHÀPITIB T. L'équation des normales développables sera donc $-X \frac{dx}{dz} \frac{dy}{dz} - \frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dz} \right)^2 \frac{dy}{dz}$ ou, en chassant les dénominateurs et effectuant les calculs, $\{a^2 - c^2\} y \{x \frac{dz}{dy} - \{b^2 - a^2\} z \frac{dy}{dx} - \frac{1}{2} (c^2 - b'^2) x \frac{dz}{dy} = 0$, ou, en multipliant par z et substituant à z^2 et $z \frac{dz}{dy}$ leurs valeurs tirées de (17) et (18), ou, en divisant par $-(a^2 - c^2)$ et posant, pour abréger, $a^2 - c^2 = M$, $- \frac{1}{2} (c^2 - b'^2) = N$. $0 = xy \frac{dx}{dz} - Wxy \frac{dy}{dz} - (x^2 - Mj^2 - N) dx dy$. On obtiendra les ombilics en écrivant que cette équation devient identique. Or, si z n'est pas nul, dx et dy sont indépendants l'un de l'autre, car ils ne sont liés que par l'équation (18), qui contient l'indéterminée dz . On aura donc séparément d'où $xy \frac{dx}{dz} - Wxy \frac{dy}{dz} - N = 0$,

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA SÉRIE HE

TATLOR. $S_s Q$ et ou bien d'où $X = 0$, $\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}$ — ., Enfin, pour $z = 0$, on obtiendra, par raison de symétrie, quatre nouveaux ombilics, en posant $s = 0$. On voit immédiatement que, sur ces douze ombilics, il y en a quatre réels. Ce sont les quatre premiers, si Ton suppose, pour fixer les idées, $a > 6 > c$. Ce sont les points de contact des plans tangents parallèles aux sections circulaires. Cela devait être, car, pour un semblable point, un plan parallèle au plan tangent et infiniment voisin coupe la surface suivant un cercle, ce qui est l'une des définitions des ombilics.

344. Courbure d'une surface. — Considérons, sur une surface S , la portion σ limitée par une courbe C ; soit σ son aire. Par les divers points de C , menons les normales à la surface. Par un point O de l'espace, menons des parallèles à ces normales : elles formeront un cône. Décrivons autour du point O une sphère de rayon ρ . La portion de la surface de la sphère contenue dans l'intérieur du cône se nomme, d'après Gauss, la courbure totale de la portion de surface σ . Le rapport — sera sa courbure moyenne» Enfin, on appellera courbure de la surface S , en un point (x, y, z) , la courbure moyenne d'un élément infiniment petit de cette surface contenant le point (x, y, z) .

330 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE T. 345. Pour

déterminer cette courbure, supposons d'abord que l'élément de surface soit limité par les deux lignes de courbure MN, MP, qui se croisent au point (X, y, z) et par Fig. aj. deux lignes de courbure infiniment voisines PQ, NQ. Ces lignes se croisant à angle droit, l'élément MNPQ pourra être assimilé à un petit rectangle plan, et son aire sera sensiblement représentée par le produit MN.MP. D'autre part, la normale en N sera contenue (aux infiniment petits près du second ordre) dans le plan mené par la normale en M et la tangente à MN, car elle passe par le centre de courbure et par le point N, qui tous deux sont dans ce plan. De même la normale en P sera dans le plan mené par la normale en M et la tangente à MP. Ces deux plans sont évidemment rectangulaires. Cela posé, si, par le point O, centre de la sphère, on mène des droites OM, ON, OP parallèles à ces normales, les plans OMN, ONP seront rectangulaires. L'élément de surface sphérique aura donc ses côtés rectangulaires et aura pour aire le produit de ces côtés, qui sont évidemment les angles α et β formés par la normale en M avec les normales en N et P. Mais on a évidemment α^2 et β^2 représentant les courbures des lignes MN et MP, lesquelles sont évidemment égales aux courbures principales.

ÀPPLIGÀTIOIfS GÉOMÉTRIQUES DE LA SÉRIE DE
 TAYLOR. 33 1 On aura donc ce théorème : La courbure d'une surface en un
 point est égale au produit des courbures des sections principales. Pour
 établir complètement cette proposition, il faut pourtant démontrer que le
 résultat resterait le même si Ton considérait un élément o- de forme
 quelconque, au lieu de l'élément particulier que nous avons choisi. Pour le
 faire voir, décomposons cet élément o- {fig» 25), Fig. 25. par un réseau de
 lignes de courbure, en une infinité d'éléments plus petits. Ceux de ces
 éléments qui forment le pourtour de la figure pourront être négligés, car ils
 ne représentent qu'une partie infiniment petite de l'aire or, et leur courbure
 totale est également infiniment petite par rapport à

333 PIKMIfeIB PARTIE. — CHAPITRE T. Mais si Ton change de variables en posant on voit que ar, jk, z seront déterminés lorsqu'on connaîtra $ty w, V$. On peut donc considérer ces nouvelles variables comme constituant un système de coordonnées différent du système ordinaire, et auxquelles on donne le nom de coordonnées curvilignes. Les équations (i), résolues par rapport à t^m, r , donneront $t = F(j, J, 5), (2) \quad t = -*(j, V, 5)$, Les points pour lesquels t a une valeur constante C représentent une surface $F(a, ^\wedge, ^\wedge) = C$. En donnant successivement à cette constante toutes les valeurs possibles, on obtiendra un système de surfaces. Les équations $M \text{ --- } ^\wedge\{x, y, z\} = \text{const.}, V \text{ --- } ^\wedge(X, j, 5) = \text{const.}$ représenteront deux autres systèmes de surfaces. Par chaque point $a, 6, c$ de l'espace passe une surface de chacun de ces systèmes. Car si, dans l'équation générale $F(^>V, ^\wedge) = \text{const.}$ des surfaces du premier système, on donne à la constante la valeur particulière $F(a, 6, c)$, la surface correspondante $\forall \{x', y, z\} \cdot V \{a, b, c\}$ passera évidemment par le point $(a, 6, c)$; de même pour les deux autres systèmes.

The text on this page is estimated to be only 23.56% accurate

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA SÉBIB DE TATLOR.

333 Les plans tangents en un point (x, y, z) aux trois surfaces

■ $F(X, Y, Z) = F(x, y, z)$, $\diamond (X, Y, Z) = (ar, 7, -)$, qui s'y croisent ont respectivement pour équations $dF, dF, \dots dF$, Us se couperont à angle droit si Ton a les équations $dF \wedge dF \wedge dF = 0$ $\frac{dx}{dx} \frac{dy}{dy} \frac{dz}{dz} \sim \frac{dx}{dx} \frac{dy}{dy} \frac{dz}{dz} \sim$ Si ces équations sont identiquement satisfaites pour toutes les valeurs de x, y, z , les surfaces des trois systèmes se couperont partout à angle droit, et formeront ce qu'on nomme un système orthogonal. 347. La distance A de deux points infiniment voisins (x, y, z) et $(x + dx, y + dy, z + dz)$ est évidemment donnée par la formule $A^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, et sa valeur principale par $c^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ $\frac{dx}{dx} \frac{dy}{dy} \frac{dz}{dz} \sim \frac{dx}{dx} \frac{dy}{dy} \frac{dz}{dz} \sim$

The text on this page is estimated to be only 10.42% accurate

334 PREWtlB PARTIE. — CHAPITRE T. en posant, pour
abrégé, $\sim$ au $\hat{v}$ du $\hat{d}i$ du $\hat{d}v$ \- _ àf df 09 do $\hat{d}$ $\hat{d}'$ ' $\hat{d}\ddot{i}$ $\hat{d}i$ ' $\hat{d}$ ai $\hat{d}$ $\hat{d}i$
 \ - $\hat{f}$ $\hat{d}o$ do $\hat{d}'$ $\hat{d}^{\wedge\wedge\wedge}$ $\hat{d}\hat{u}$ "" de ' $\hat{d}\hat{u}$ $\hat{d}t$ $\hat{d}\hat{u}$ ' 348. Si les coordonnées t ,
 w , i forment un système orthogonal, on aura $N = \backslash, = \backslash, = o$, $M = 1$. $M \blacksquare = v$
« $\bullet = i$ en posant, pour abrégé, --(©'

The text on this page is estimated to be only 24.32% accurate

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA SÉRIE DE

TATLOR. 335 Les quantités $\alpha = v \rightarrow -r = -r \cdot y \dots$ sont les coefficients d'une substitution orthogonale, car on a immédiatement $(\pm \cdot y / j^{\wedge\wedge} Y / _1 _ V _ \backslash s j l d x) \wedge \wedge u y) \wedge \backslash s j l \grave{a} z) \blacksquare -' \gg$ D'autre part, ottno loo équations (3), on aura $V/\hat{A} \grave{a} x y/\hat{A} dx \wedge l dy y l dy) J i dz \wedge ' dz \sim \wedge$ On aura donc, en faisant la somme des carrés des équations (4), $dt^{\wedge} du^{\wedge} dv^*$, $- , , - + - r - - - - dx^{\wedge} - f - dy^{\wedge} - \backslash - dz^{\wedge}$, ce qu'il fallait démontrer. 349. Si, dans les équations (i), nous faisons varier u elv[^] par exemple, en laissant constante la valeur de f , le point $(j?,^, .3)$ décrira, comme on Ta vu, une surface que nous appellerons, pour abréger, la surface t . Proposons-nous d'évaluer le volume de l'élément infiniment petit compris entre les surfaces t , $t - \backslash - dt$, w , $u - + - du$, r , $V - h di$. Les huit sommets de cet élément auront respectivement pour coordonnées $/ (/ , M, (>), / \{ t - \backslash - dt y U y v), \dots, / \{ t - \backslash - dt, u - h du, i > - \backslash - dv), o (/ , w, i^{\wedge}), (f \{ t - h dt, u, v), \dots, (f \{ t -^{\wedge} dt, u - h du j i f \backslash - dv) y^{\wedge} (^, w, r), \wedge \{ t -^{\wedge} dt, u, \grave{c}), \dots, \wedge \{ t - h dty u -^{\wedge} d u y i > - \backslash - di >)$,

3⁶ PRU^{lt}RE PARTIE, — CHAPITRE T. quantités égales, au second ordre près, au^l suivantes : $J \gg -i''' \cdot \blacksquare - p \rightarrow$ à du à v y -H -^{dt} -h^{du} -h -r-dv^y ^{dt} du dv * de dt -r^{du} -i- -^{dt} d\ au âv Les huit points qui ont ces dernières coordonnées sont les sommets d'un parallélépipède infiniment peu différent de Télément proposé, et dont le volume sera, d'après une formule connue de Géométrie, égal à la valeur absolue du déterminant dû d^{dt} dt dt dt à f^{du} — du du ^{dt} j ~^{du} du dt d^{du} du du df dv d^{du} d^{du} dv dv dv dK^{du} -^Sdtdu d\ y J désignant le jacobien des fonctions /, ^, ^ . On aura donc, pour la valeur principale rfV de Télément de volume cherché, l'expression d\ — moà{idtdudv), 350^{Co}ordonnées polaires, — Posons, par exemple, w^{iiz} r sinX cosjx, j ziz r sin X sin jx, z . = z rcosX. Les nouvelles variables r, \k seront ce qu'on nomme des coordonnées polaires. Ajoutons les carrés de ces trois équations, il viendra Les surfaces r = cons t. sont donc des sphères ayant pour centre l'origine des coordonnées.

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA SÉRIE DE
 TAYLOR. 887 Ajoutant les carrés des deux premières équations et divisant
 par le carré de la troisième, il vient $\frac{dx^2 + dy^2}{dz^2} = \tan^2 X$. A» Les surfaces X
 $= \text{const.}$ sont donc des cônes de révolution autour de l'axe des z . Enfin,
 divisant la seconde équation par la première, il vient $\frac{dy}{dx} = \tan X$. Les
 surfaces $y = \text{const.}$ sont donc des plans passant par l'axe des z . Ces trois
 systèmes de surfaces se coupent évidemment à angle droit. L'élément de
 longueur ds sera donné en coordonnées polaires par la formule $ds^2 = (dx \cos X +$
 $dr \sin X)^2 + (r \cos X dx - r \sin X dr)^2$. L'élément de volume dV , par la formule $dV =$
 $r^2 \sin X dr dX d\phi$. L'emploi des coordonnées polaires est
 surtout avantageux dans les questions relatives à la sphère ou aux surfaces
 de révolution. 301. Dans les questions relatives aux cylindres droits, on
 emploie de préférence les coordonnées semi-polaires $x = r \cos \phi, y = r \sin \phi, z = z$. — Cours, I. 11

The text on this page is estimated to be only 27.06% accurate

338 pmentmi partib. — cflÂFiTu t. Les surfaces $z = \text{const.}$ représentent ici des plans parallèles au plan des xy ; les surfaces $r = \text{const.}$, des cylindres droits ayant pour équation $x^2 + y^2 = r^2$; les surfaces $jx = \text{const.}$, des plans $- = \tan jx$ passant par l'axe des z . Ces surfaces se coupent à angle droit. On aura d'ailleurs $ds^2 = (dx^2 + dy^2 + dz^2) - (r^2 dx^2 + r^2 dy^2 + dz^2) \sin^2 jx$; mod $\sin[x \cos jx \cos drd] Ldz \cos I t$; mod $rdrd \backslash kdz$. 3S2. Coordonnées elliptiques. — Les surfaces $X' Y' Z' = A - 1 - X^2 - li - hX^2 - C - hX^2$ où X est un paramètre variable, forment un système de surfaces homofocales du second degré. Par chaque point $x^2 y^2 z$ de Tespace passent trois surfaces du système, dont les paramètres seront les racines de l'équation du troisième degré en X . 3S3. Cette équation a ses trois racines réelles, et respectivement comprises entre $- A e / - B$, entre $- B e / - C$, entre $- C e / + oc$ (en supposant, pour fixer les idées, qu'on ait $A > B > C$). En effet, posons $\backslash^{\wedge} - A H - e$, $\pounds$ étant une quantité positive infiniment petite, le premier membre de l'équation deviendra $e B - A - 6 C - A - he$

ÀPPUGÀTIONS GÉOMÉTRIQUES DB LÀ SÉRIE DE

TATLOR. 889 Le premier terme — est positif et infiniment grand. Il l'emportera sur les autres, qui sont finis. Le résultat de la substitution sera donc positif. Si Ton posait $X = -B - s$, le premier membre de l'équation deviendrait $X^* y^z A - B - e - \text{£ } c - B - \text{£ } '$ et serait négatif, le second terme $--->$ qui est négatif et infini, l'emportant sur tous les autres. Donc, le premier membre de l'équation change de signe entre $) = -A - r - e$ et $1 = -B - e$. Or, il est évidemment continu dans cet intervalle. Donc, il s'annulera entre ces limites. On voit de même que $X = -B + e$ donnera un résultat positif; $X = -C - e$ un résultat négatif. Donc, il y a une seconde racine réelle dans cet intervalle. Enfin, $) = -C - 1 - e$ donne un résultat positif; $X = +\infty$ un résultat négatif. Donc, il y a une troisième racine réelle, supérieure à $-C$. Lorsque $\backslash$ est $< -A$, $A + X$, $B - h X$, $C + X$ étant négatifs, la surface représentée par l'équation (5) sera imaginaire. Si $X > -A$ et $< -B$, $A - hX$ étant positif et $B + X$, $C - H - X$ négatifs, la surface sera un hyperboloïde à deux nappes. Si $X > \blacktriangleright -B < -C$, ce sera un hyperboloïde à une nappe. Enfin, si $X > -G$, ce sera un ellipsoïde. Donc, en chaque point de V espcice se croisent trois surfaces du système, à savoir, un hyperboloïde à une nappe, un hyperboloïde à deux nappes et un ellipsoïde.

354. Ces surfaces se coupent à angle droit, — Soient, en efiet, $X \ll Y \ll Z' _$
 $X' Y' Z \ll _$

The text on this page is estimated to be only 17.56% accurate

340 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE T. deux de ces surfaces qui se coupent au point $(-r, V, z)$. Leurs plans tangents ayant respectivement pour coefficients $j, c, y, z, A, B, C, X, Y, Z$ la condition de Torthogonalité sera $(A - X)(B - Y)(C - Z) = 0$. Or cette équation s'obtient immédiatement en retranchant Tune de Tautre les deux équations $A^2 + B^2 + C^2 = 1$ et $A^2 + B^2 + C^2 = 1$ et supprimant le facteur commun $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$. Prenons maintenant pour nouvelles coordonnées d'un point $(j, ^, 3)$ les trois racines $^2, ^3$ de l'équation (5). Elles seront liées $-d, x, y, z$ par les relations $r^2 + v^2 = 1, A - X, B - Y, C - Z$. Des deux premières, on déduit, par l'élimination de z , $i\hat{A}TT, \sim \hat{A}:rx"J-^ \wedge VB^{\wedge\wedge}. B + Xj^ '-^{\wedge\wedge}$

The text on this page is estimated to be only 22.23% accurate

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA SÉRIE DE
TAYLOR. 34 1 OU, en réduisanl et supprimant le facteur commun).2 —
)m j A-G . B-C (A -T- X,) (A 4- X,) ^ (B -^ XO(H -h X,) On trouvera de
même 7' = «. A— C , H— C (A^X,)(A4-X3) (B-^Xi)(H4-X3) Éliminons
j>'2, il viendra A-r-X, \A-HA3 A-hAj/ OU, en réduisant et supprimant le
facteur).3 — À2, (_C)(A-B) (A-^Xl)(A^-X,)(A + X3) 1, ^ (A-+-X,)(A-+-
X,)(A-f-X,) ^A-B)(A-C) On trouvera de même vî (B-^X,)(B + X,)(B-f-X»)
(B-A)(B-C) ., ^ (C-^X,)(C + X,)(C-i-X,) (C-A)(C-B) Les coordonnées x,y^
z n'étant déterminées que par leurs carrés, à chaque système de valeurs de
X,,).2î ^3 correspondront huit points, dont un seul situé dans le trièdre des
coordonnées positives. 336. Pour calculer l'élément de Tare ds en fonction
de).|, ^2? ^3? prenons les dérivées logarithmiques des deux membres des
équations précédentes. Il viendra ^X, ^Xa A-1-X5 A-hXj' B-i-X, B-+-X,' C
-h Â, G -h X3 djc 2 _ d).i ~ A-hX, dv 2 ^y ^X, "B-hXi dz 2 — z ûfX, ""G-
^Xi

The text on this page is estimated to be only 21.35% accurate

34^1 PEEHitaB PàETU. — CHifini Y. d'où $\wedge^{\bullet} V \ll + \hat{A}, \wedge B + X,$
 $B + X_j (A + x,)' \blacksquare + \blacksquare (BTX7) \tilde{I}''^{\wedge} ((T^{\wedge} x \hat{o}' J (A + X,)' + (B + X.)' \wedge (C + X,))' J r$
 $x' y^* 5^* 1^{\wedge} t^{*\wedge} \gg 1 (A + X.)' -^{\wedge} (FTI\hat{O}' ''^{\wedge} iC-4-X,)' J$ Les autres termes se
 détruiront en vertu de l'équation (6) et de ses analogues. Reste à calculer la
 somme $i f o r^* y \gg _1 L _1 4 L (A -^{\wedge} x,)' \gg^{\wedge} (B - h X 0 \ll ''^{\wedge} (C -^{\wedge} x,)' J$ et ses analogues.
 Substituant les valeurs de $x^{\wedge j^{\wedge}}, 5^{\wedge}$, cette somme devient $i j'' (A^{\wedge} X,)(A-4-$
 $X.) (B4-X,)(B-hX,) 4 L (A-B)(A-C)(A-i-X,)' \wedge (B-A)(H-G) \{B-i-X,)(C + X,)$
 $(C-4-X,) 1 . (G-A)(C-B)(C-t-X,)' J$ elle est égale à $I (X,-X,)(X,\sim X,) 4 (A-i-$
 $X 0 (B4-X i)(C-+-X 0$ On peut le vérifier immédiatement en appliquant à cette
 dernière expression, considérée comme fraction rationnelle en X , la règle
 connue pour la décomposition en fractions simples. Donc, en désignant par
 M cette fraction et par M_s, M_3

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA SÉRIE HE

TATLOR. 343 deux fractions analogues qu'on obtiendrait en permutant circulairement X_1, X_2, X_3 , on aura (7) $ds^2 = L^2 (M_1^2 d\theta_1^2 + M_2^2 d\theta_2^2 + M_3^2 d\theta_3^2)$ 4-M.eAJ. 307. L'expression de l'élément de volume compris entre les surfaces $X_1 = c_1, X_2 = c_2, X_3 = c_3$ $H = dX_1^2 + dX_2^2 + dX_3^2 = 0$, $W(x, y, z) = z \cos \theta$, forment un système orthogonal, elles se coupent mutuellement suivant leurs lignes de courbure. Soient $F(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = c = 0$,

The text on this page is estimated to be only 26.82% accurate

344 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE T. On aura d'ailleurs $t < 0$, sinon l'origine serait un point singulier sur la surface $F = c$, hypothèse que nous excluons. Le plan des yz étant tangent à la surface $4 > = C$, on aura de même, pour $x = y = z = 0$, d

$-t > -j^{\wedge}$ s'annulent, $^{\circ} \wedge dx dy dz$ \ cette équation se réduit à $d^*F d^*P d^*F d^{\wedge} _ dx dy dx dz dz dy$

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA SÉRIE BE

TAYLOR. 345 Prenant de même la dérivée de la deuxième équation par rapport à z , celle de la troisième par rapport à X_j et faisant ensuite $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$, on trouvera les deux équations analogues $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$, d'où $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$. Ces trois équations, linéaires et homogènes en $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$ montrent que ces quantités s'annulent, car le déterminant de ces équations, étant égal à $2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$, est $\neq 0$. On aura donc, à l'origine des coordonnées, non seulement $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial z} = 0$, mais encore $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$. Cela posé, soient, pour abréger, A , B , C , ... les valeurs $\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y}$, $\frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial z}$, ... pour l'origine. La série de Maclaurin donnera $F = F_0 + \frac{1}{1!} \frac{\partial F}{\partial x} x + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} x^2 + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} x^3 + \dots$ d'où • Ce développement ne contenant pas de terme en xy , les plans coordonnés seront les sections principales de la surface $F = c$. Donc, l'axe des z , qui est tangent à l'intersection des deux surfaces $F = c$, $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$, sera en même temps tangent à l'une des sections principales. Mais l'origine est un point quelconque de l'intersection des deux surfaces $F = c$ et $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ cette courbe sera donc tangente en chaque point à l'une des sections principales, ce qui est l'une des propriétés caractéristiques de la ligne de courbure.

The text on this page is estimated to be only 24.10% accurate

346 PinOÈftl PARTIS. — CHAPIT&B Y. — APPUGATIONS,
BTC. 3S9. CoEOLLAi&E. — Les lignes de courbure de Vellipsoute sont
ses intersections avec les hyperboloïdes homofoeaux. Car les ellipsoïdes et
les hyperboloïdes homofocaux à l'ellipsoïde considéré forment un système
orthogonal.

The text on this page is estimated to be only 26.93% accurate

THÉORIE DES COURBES PLANES ALGÈBRIQUES. 847
 CHAPITRE VI. THÉORIE DES COURBES PLANES ALGÈBRIQUES. I.
 — Genre. 360. Soit $\phi = F(x, y) = A_0x^n + A_1x^{n-1}y + \dots + A_ny^n$ l'équation d'une
 courbe plane algébrique d'ordre n . Son premier membre contient un terme
 constant, deux termes du premier degré, trois du deuxième, .., enfin n
 termes du degré n . On en aura en tout $\frac{n(n+1)}{2}$ termes. Il existe
 toujours une courbe de degré n passant par $n+2$ points donnés, à condition
 qu'ils ne soient pas tous sur une même droite. En existe en général qu'une seule.
 Exprimons, en effet, que la courbe passe par ces points. Nous aurons les
 équations de condition $A_0x_i^n + A_1x_i^{n-1}y_i + \dots + A_ny_i^n = 0$, $i = 1, 2, \dots, n+2$,
 lesquelles détermineront les rapports des coefficients $A, B, C, \dots$.
 L'équation de la courbe sera donc déterminée à un facteur constant près,
 lequel est indifférent.

348 PREXÈRE PARTIE. — CHAPITRE YU On remarquera toutefois que si le déterminant Δ est égal à zéro, les équations (i) ne suffiront plus à déterminer les rapports mutuels de A, B, C, On aura donc, dans ce cas, une infinité de courbes passant par les points donnés. 362. Si le nombre des points donnés, au lieu d'être égal à I, se réduisait à 2, les 2 équations (i) permettraient d'exprimer les coefficients de la courbe en fonction linéaire de deux d'entre eux, tels que A et B. L'équation de la courbe cherchée prendra donc la forme $AM^2 + NB^2 + 2CABM = 0$, M, N étant des fonctions déterminées de x, y et les constantes A, B conservant un rapport arbitraire. En faisant varier ce rapport, on obtiendra un faisceau de courbes, dont chacune passe par les points donnés. Mais les courbes du faisceau passent toutes par les $I-2$ points d'intersection des courbes $M = 0, N = 0$. Donc, si 2 est

THÉORIE DES COURBES PLANES ALGÈBRIQUES. 349 On déduit immédiatement de là la démonstration de ce théorème de Pascal : Les trois points de rencontre des côtés opposés d'un hexagone inscrit à une conique sont en ligne droite. Soient, en effet, $1, 2, 3, 4, 5, 6$ (Jig. 26) les côtés consécutifs de l'hexagone; $(1, 4), (2, 5), (3, 6)$ les points d'intersection des côtés opposés 1 et $4, 2$ et $5, 3$ et 6 . Fîg. 26. Les côtés $1, 3, 5$, de rang impair, forment ensemble une ligne G du troisième ordre; les côtés $2, 4, 6$, de rang pair, en forment une seconde C_1 ; la conique et la droite D menée par $(1, 4)$ et $(2, 5)$ en forment une troisième C_2 . Ces trois lignes du troisième ordre ont huit points communs, à savoir $(1, 4), (2, 5)$ et les six sommets de l'hexagone. Donc C_2 passe par le neuvième point d'intersection de G et C_1 , qui n'est autre que $(3, 6)$. Ce point se trouvant sur C_2 , et n'étant évidemment pas sur la conique, sera sur la droite D . 364. Théorème. — Une courbe plane algébrique d'ordre n , $F(x, y) = 0$, ne peut avoir plus de points singuliers sans se décomposer en courbes d'ordre inférieur à n . Supposons, en effet, qu'elle en ait davantage. Faisons

350 pftEntii pâitik. — cBArmi ti. passer une courbe $\wedge$ d'ordre n —
i par *i* polnls pris sur r , parmi lesquels il y en ait *i* qui soient singuliers.
Chacun de ceux-ci compte pour plusieurs intersections. En eflet, soient P
Tun d'entre eux, {jl son degré de multiplicité. Si *Ton* altèrait infiniment peu
les coefficients de la courbe $\wedge$, elle ne passerait plus au point P , mais dans
son voisinage, et y couperait les jx branches qui se croisent en ce point. On
aurait donc {x intersections distinctes qui, pour la courbe $\wedge$, se confondront
en une seule. Chaque point singulier comptant ainsi pour deux intersections
au moins, le nombre total des intersections de F et de $\wedge$ sera au moins égal à
 $n(n - n \{n - \backslash M n - -\hat{i}) 1 -^ \backslash -\backslash zzin(n - i) - f I. 2 2 ^ '$ Mais deux courbes
d'ordre n et $n - i$ ne peuvent avoir plus de $n(n - i)$ intersections sans se
confondre au moins en partie. Donc F , ayant une partie commune avec $*$,
sera formée de plusieurs courbes. 363. Soit $F(x,y) \wedge \wedge o$ une courbe
algébrique de degré $/*$, non décomposable, et possédant d points doubles et
 r rebroussements. Admettons , pour plus de simplicité, qu'elle n*ait aucune
singularité d'ordre plus élevé. On aura, d'après ce qui précède, Soit $4 > (a:,j')$
 $=: \wedge o$ une autre courbe dont le degré m soit $\wedge n$. Elle coupera F en mn points.
Il existera d'ailleurs une infinité de courbes du même degré m qui ont les
mêmes intersections avec F . Elles sont données par la formule générale $* -h$
 $FG = 1 o$, G étant un polynôme quelconque de degré $m - n$.

THÉORIE des COURBES PLANCHES ALGÈBRIQUES. 35 1

L'indétermination des coefficients de G permet d'annuler un nombre égal de coefficients dans $H - FG$. Il en restera $(m - f - 1)(m - h - 2)(m - n - h - 1)(w - i - f - 2)$ au $(2m - h - 3 - i) \cdot 2 \sim 2$. On peut déterminer ces coefficients de telle sorte que la courbe $H - FG$ passe par les $rf - f - r$ points singuliers de F ($2m - h - 3 - n$), ..., $j \cdot \bullet$ et par $i - a - r = q$ points ordinaires pris arbitrairement sur cette courbe. Les équations de condition qui en résultent, linéaires et homogènes par rapport à ces coefficients, permettront de les exprimer (à un facteur constant près, qu'on peut supposer égal à 1) en fonction rationnelle des coordonnées x_i, y_j . J'ai ... à ces points ci-dessus. Les coordonnées des autres points d'intersection des courbes F et $H - FG$ s'obtiendront comme il suit : Éliminant y entre ces deux équations, on formera l'équation finale en x de degré mn , et dont les coefficients sont des fonctions rationnelles des coefficients de F et de $H - FG$, et, par suite, des fonctions rationnelles des coefficients de F et des coordonnées x_i, y_j ; Cette équation admet pour racines les abscisses x_i, y_j ... des points donnés; celles des points multiples seront même des racines doubles. Désignons par $Q(x)$ le produit des facteurs linéaires de $W(x)$ qui correspondent à ces racines, par $R(x)$ le produit des autres facteurs; on aura $B(x)$ étant encore un polynôme dont les coefficients sont rationnels en x_i, y_j ; x_i, y_j ...

35a PEEMIfcMI PARTIE. — CHAPITRE YI. Le degré de $\phi(r)$ est m/i , et celui de $Q(x)$ sera $gr - f - ar$ (chacun des $d - r$ points singuliers comptant pour deux intersections. Celui de $R(j)$ sera donc égal à la différence $d - r$ de ces deux nombres. Il est remarquable que ce nombre soit indépendant de m . On le nomme le genre de la courbe F , et on le désigne ordinairement par la lettre g . Soit α une des racines de $R(x) = 0$. L'ordonnée correspondante η s'obtiendra en cherchant, par la méthode du plus grand commun diviseur, la racine commune aux deux équations $F(x, y) = 0$, $G(x, y) = 0$. Elle sera ainsi exprimée en fonction rationnelle de α et de K .
 Remarque. — Si m , au lieu d'être $> i$, comme nous l'avons supposé, était égal à $n - a$, la courbe ϕ contiendrait dans son équation paramètres ; et le nombre des intersections de ϕ et de F , dont on ne pourrait pas disposer, serait $(m - j) \{m - t\} mn - \dots - ci - r$. Ce nombre est encore égal à $>$. Nous obtenons donc la proposition suivante : Théorème. — Soient $F = 0$ une courbe d'ordre n et de genre p ; m un nombre entier au moins égal à $n - 2$. On pourra déterminer une courbe ϕ d'ordre m , passant par les points singuliers de F , et telle que, sur les intersections des deux courbes, $mn - p$ soient en des points de la courbe F assignés a priori. Si d'ailleurs on désigne par $x^i y^j$ les coordonnées de ces points d'intersection, les abscisses des p points d'intersection restants seront les

THÉORIE DES COUBBBS PLANES ALGÉBRIQUES. 353

racines d'une équation de degré p à coefficients rationnels en X if $y \setminus ; x^t j^{\wedge}; \bullet \bullet \bullet ?^{\wedge}$ leurs ordonnées s'exprimeront rationnellement en fonction de l'abscisse correspondante et de $Xtyi'y X2, ^2 \hat{\bullet} \bullet \bullet \bullet 366$. Signalons encore le théorème suivant : Théorème. — Si le genre de la courbe $Y \{x^y\} = 0$ est nul, son équation pourra être remplacée par un système de deux équations de la forme suivqnte, $^$ et $'\}$ désignant des fonctions rationnelles.

Imaginons, en effet, une courbe de degré mZ, n et de Tespèce $4 > 4 - FG$, ou une courbe $*$ de degré $n - i$ ou $w - 2$, assujettie à passer par les points singuliers de F et par des points ordinaires, en nombre inférieur d'une unité à ce qu'il faudrait pour achever de la déterminer. L'équation de cette courbe prendra la forme $AM - f - BN = 0$, M et N étant des fonctions déterminées de $x^y^$ ou en posant, pour abréger, $t^{\wedge} \wedge'$ Considérons, comme tout à l'heure, l'équation finale $V(jc)^Q(^)R(x) = 0$, qui donne les abscisses des points d'intersection des deux courbes. Le nombre des intersections données a priori étant moindre que tout à l'heure d'une unité, le degré de $R(x)$ sera $/ > + I$, et, comme on suppose $/ ? = 0$, il sera égal à l'unité. Il est d'ailleurs évident que les coefficients de cette équation $R(^) = 0$ sont rationnels par rapport aux coefficients des courbes F et $M - f - N^$, et, par suite, rationnels par rapJ.

— Cours, I. 23

354 PBEHIÈRE PARTIE. — CHAPITRE YI. port à t . On aura donc, pour la racine unique de cette équation, une valeur rationnelle $(2)^{\wedge} = ?(0$. L'ordonnée correspondante $y^{\wedge}$ étant une fonction rationnelle de X et des coefficients de la courbe $M - f - N^{\wedge}$, sera également une fonction rationnelle de $t^{\wedge}$ telle que la suivante : (3) $y^{\wedge} WY$ Gela posé, assujettissons la courbe $M - f - N^{\wedge}$ à passer par un nouveau point pris à volonté sur F . Cette nouvelle condition déterminera la valeur de t , qui sera liée aux coordonnées $X_j y$ de ce point par les équations (a) et (î). Faisons maintenant varier la position de ce point, de manière qu'il décrive toute la courbe F . Ses coordonnées $x^{\wedge} y$ et la nouvelle variable t seront liées à chaque instant par les équations $(\blacksquare^{\wedge})$ et (3) On nomme courbes unicursales celles dont les coordonnées X, y peuvent être ainsi exprimées en fonction rationnelle d'un même paramètre t . II. — Coordonnées homogènes. 367. Dans ce qui précède, nous avons considéré les courbes à discuter comme représentées par des équations en coordonnées cartésiennes. Mais les théories qui nous restent à exposer prennent une forme plus élégante si l'on change de variables, ainsi qu'il suit : 368. Coordonnées trilineaires. — Les coordonnées cartésiennes étant représentées par X et Y , posons $a X + 6 Y - f - c = p^{\wedge}$, (i) $\cdot \backslash a_i X - + - 6 i Y - h C_i \text{ — } p_j, a_j X - h b t Y \text{ 4- } c, = 1 p > 5$.

THÉORIE DES COURBES PLANES ALGÈBRIQUES. 35

by Cy ... étant des constantes quelconques dont le déterminant ne soit pas nul, et p un facteur indéterminé. La présence de ce facteur ne permet pas d'assigner la valeur des quantités a, b, c, z ; mais si Ton divise les équations membre à membre, p s'éliminera, de telle sorte qu'à chaque système de valeurs donné à X et Y correspondra un système bien déterminé de valeurs des rapports $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{z}$. Réciproquement, à chaque système de valeurs de $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{z}$ correspondra un système unique de valeurs pour X et Y , qu'on obtiendra en résolvant les équations (i) par rapport à X, Y, p . Ces valeurs seront évidemment de la forme $\frac{X}{p}, \frac{Y}{p}, \frac{p}{z}$ et ne dépendront que des rapports mutuels des quantités a, b, c, z . Les nouvelles variables x, y, z ainsi définies se nomment des coordonnées linéaires ou homogènes. Les équations $a; = 0, b = 0, c = 0$ représentent respectivement les trois droites $aX - bY - cZ = 0, bX - cY - aZ = 0, cX - aY - bZ = 0$. Le triangle formé par ces droites se nomme triangle de référence. Si (3) l'on posait $\frac{a}{b} = \frac{x}{y}, \frac{b}{c} = \frac{y}{z}, \frac{c}{z} = \frac{z}{x}$, d'où $\frac{a}{b} = \frac{x}{y}, \frac{b}{c} = \frac{y}{z}, \frac{c}{z} = \frac{z}{x}$, (4) $\frac{a}{b} = \frac{x}{y}, \frac{b}{c} = \frac{y}{z}, \frac{c}{z} = \frac{z}{x}$,

(5) 356 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE V. f. ζ , r., ζ
 formeraient un nouveau système de coordonnées trilineaires, ayant pour
 triangle de référence $l\{a\backslash-h bY \sim\backslash- c) -h m\{aiX-h Z>iY + c,)-i- /i(a,X-+-$
 $6,Y-h c,) = 0$, Réciproquement, toute fonction linéaire de X et de Y pouvant
 être mise sous la forme (5) par un choix convenable des constantes $/, m, /?$,
 deux systèmes de coordonnées trilineaires correspondant à des triangles de
 référence différents seront liés entre eux par des équations linéaires, telles
 que (3) ou (4). 369. Soit maintenant $F(X,Y)^o$ l'équation d'une courbe de
 degré n. Substituons à la place de X, Y leurs valeurs (2), et chassons les
 dénominateurs. On obtiendra une équation de la forme dont le
 premier membre sera une fonction entière, homogène et de degré n. Cette
 homogénéité nous sera très utile, en nous permettant de faire usage de
 l'équation aux dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} \dots$ à laquelle il a été
 démontré que satisfait toute fonction homogène de degré n (n° 64). 370.
 Covariants. — Soit $f(x,y,z)$ une fonction homogène du degré n , dont les
 coefficients A, B, . . . sont des constantes indéterminées. Si nous posons $x =$
 $X^5 - f \cdot i.7i4 - v\hat{i}$; (6) $< y --XiE - r - p.,7i \wedge - v,\zeta$,

THÉORIE DES COURBES PLANES ALGÈBRIQUES. 357

$(jL, V, \dots)$ étant des constantes dont le déterminant D soit différent de zéro, $(\wedge^j, z)$ sera transformée en une nouvelle fonction (7) $(\wedge^5 + H^r, 4-v!; \dots, A, B, \dots)$ $z = (5, 7i, \zeta, Aj, B, \dots)$ de même degré, et dont les coefficients $A_i, B_i, \dots$ seront des fonctions linéaires de $A, B, \dots$. Cela posé, soit $P(a; j', 5, A, B, \dots)$ une fonction entière et homogène, par rapport à x^y, z d'une part et à $A, B, \dots$ d'autre part. Si, en substituant pour $\zeta, r, IJ, A_i, B_i, \dots$ leurs valeurs en $X_j y, Z_j A, B, \dots$, on a identiquement (8) $P(\zeta, 7), \zeta, A, B, \dots) = M P(J7, 7, z, A, B, \dots)$, M désignant un facteur convenable, on dira que la fonction P est un covariant de $\wedge$. Ce sera un invariant si les variables x^y, z n'y figurent pas. 371. Il est aisé de déterminer la nature du facteur M . En effet, les relations (6), résolues par rapport à S, r, ζ , donneront $\wedge = l X^{-m} y^{-n} z, r = \frac{1}{l} x^{-h} m^y - \frac{1}{n} z, \zeta = \frac{1}{l} x^{-h} m^y - \frac{1}{n} z, l^m n, \dots$ étant des fonctions rationnelles en $v, [j], v, \dots$, ayant D pour dénominateur commun. Cela posé, substituons dans $P(S, r, IJ, A, B, \dots)$, à la place de $S, Tj, IJ, A_i, B_i, \dots$, leurs valeurs en fonction de $x^y, z, A, B, \dots$. L'expression obtenue sera évidemment du même degré que $P(j; j', 5, A, B, \dots)$, tant par rapport à $\wedge^j$, -3 que par rapport à $A, B, \dots$. Le quotient M de ces deux expressions sera donc une fonction de $X, [j], v, \dots, /, m, n, \dots$ seulement; et si l'on remplace $/, m, /i, \dots$ par leurs valeurs en $X, [jL, V, \dots]$, il prendra la forme $\wedge^j Q$ désignant une fonction entière de $X, [j], v, \dots$, et a un entier. »

The text on this page is estimated to be only 27.99% accurate

358 PUXifeEE PAITIE. — CHAPITRE Yf. Or, en appliquant aux fonctions $f(r, i; A, B, \dots)$ et $P(T, ; A, B, \dots)$, la substitution (9), on retrouverait évidemment $f(T, ; A, B, \dots)$ et (10) $P(T, ; A, B, \dots)$ $MiP(\zeta, 7i, \zeta, A, B, \dots)$, Ml : '[étant formé avec $/, m, n, \dots$, comme M l'est avec $X, [A, V$, La comparaison des équations (8) et (10) donnera car les déterminants $D|$ et D sont évidemment inverses Pun de Pautre. Mais, si Pon remplace dans Qj les quantités $/, m, n, \dots$ par leurs valeurs en $X, [j], v, \dots$, cette expression prendra la forme $\blacksquare r - rf R$ désignant une fonction entière. On aura donc $QR = D^j$; donc Q , et par suite M^j se réduira à une puissance de D , telle que D^* . Pour déterminer $P_{exposant}/r$, faisons une hypothèse particulière, en posant (11) $J7 \sim X|, / \sim Xt, Z \sim t^j$, d'où La fonction $/$ étant d'ordre n , celte substitution multipliera tous les coefficients par X^* . On aura donc $P(5, T), ;, A, B, \dots) - P(f > f . f . AX-, BX^{\dots j} : ^X - " \rangle \rangle ^{ / } P(a; j, 4; A, B, \dots)$.

THÉORIE DES COURBES PLANES ALGÈBRIQUES. 869 m
étant le degré de P par rapport aux variables, et p son degré dans les
coefficients. On aura donc, en général, $\ast = 3 - 372$. Les covariants
satisfont à un système d'équations différentielles qu'il est aisé de former. A
cet effet, désignons, pour plus de clarté, par $a^{\wedge\wedge}$ le coefficient du terme en
 $x'^{\wedge}y^{\wedge}z'^{\wedge}$ dans la fonction $\{x^{\wedge}y^{\wedge}z\}$ nous aurons la sommation s'étendant à
tous les systèmes de valeurs de a, P, Y qui satisfont à la relation $a - f^{\wedge} + y =$
 $/w$. Opérons sur cette fonction la substitution particulière de déterminant i ,
(12) $J7 - 5-i-\xi r, y - ri, -S - \zeta$, e étant un infiniment petit. On aura ou, en
développant et négligeant les termes du deuxième ordre en e, Remplaçons,
dans la seconde somme, a par a H- i et P par p — I ; elle prendra la forme
 $2(a-hi)a.^{\wedge},jj_{-}^{\wedge},5\ll T,P;T$. La sommation s'étendra aux mêmes systèmes de
valeurs des indices que précédemment, à l'exception de ceux où Ton aurait
 $p = 0$. Réunissant les deux sommes en une seule, il viendra On voit que,
dans la transformée, le coefficient $a^{\wedge p^{\wedge}}$ sera

3Go PBBMIÈRE PARTIE. ^ CHAPITRE VI. remplacé par $a^{^^}$ -
 f- 6« $^{\cdot}$, $^{\cdot}$ p_J $^{\cdot}$ (à moins qu'on n'ait $^{\cdot} = 0$, auquel cas il resle inaltéré). Cela
 posé, l'équation (8), qui définit les covariants $P(^{\cdot}, ^{\cdot}, 5, \dots j \ll p^{\cdot}, \dots)$ se
 réduira, dans ce cas particulier, à Remplaçons, dans cette identité, ζ, r, JJ
 par $or, j>'$, 5, et développons par la formule deTajlor, en négligeant les
 termes du second ordre ; il viendra V/N àP dP la sommation s'étendant à
 toutes les valeurs des indices pour lesquelles on a a -f- p -f- 7 = n et $^{\cdot} >> o$.
 En permutant les variables $x, y^{\cdot} z$ et en même temps les indices $a, ^{\cdot}, y^{\cdot}$ on
 obtiendra cinq autres équations analogues, exprimant que la condition de
 covariance est satisfaite pour chacune des substitutions particulières (.3)
 Réciproquement, toute fonction homogène qui satisfait à ce système
 d'équations différentielles est un covariant. En effet, en vertu de
 l'homogénéité, elle satisfera encore à la condition de covariance pour la
 substitution (11), et l'on peut s'assurer aisément que toute substitution
 linéaire s'obtient par la combinaison de substitutions successives des formes
 (1 1), (12), (i3). 373. Pour bien apprécier l'importance de la notion des
 covariants, nous remarquerons qu'une propriété quelconque $x-A + t^{\cdot}, y^{\cdot}r,, -$
 $- \zeta, X-?, y \dots T, -+- t^{\cdot}, -\blacksquare^{\cdot}i, x.^{\cdot}\backslash, . j \text{---} TH-e\zeta, ^{\cdot}\zeta, x^{\cdot}\backslash. V'-'i, z.-.r,-u^{\cdot}\backslash, x^{\cdot}l,$
 $y^{\cdot}r,, 5-.-.C-er..$

THÉORIE DES COURBES PLANES ALGÈBRIQUES. 361 de
la courbe $f(x, y, z) = 0$ est généralement représentée par une ou plusieurs
relations entre ses coefficients. Admettons qu'une certaine propriété soit
représentée par un système d'équations $A = 0, B = 0, \dots$ où $A, B, \dots$
soient les coefficients d'un covariant P . Cette propriété sera commune à
toutes les courbes de la forme (14) $f(x, y, z) = 0$. En effet, puisqu'on a identiquement $P(A, B, \dots) = 0$,
l'équation (8) donnera $P(f, f', f'', \dots) = 0$, ou, en remplaçant
 $f, f', f'', \dots$ par $a, a', a'', \dots$ dans cette identité, $P(a, a', a'', \dots) = 0$. Or le premier
membre de cette relation n'est autre chose que le covariant analogue à P
formé avec les coefficients de la courbe (14). Ces propriétés, communes à
toutes les courbes de la forme (14), se nomment propriétés projectives. On
appelle propriétés métriques celles qui sont spéciales à la courbe. 374.
Dans les applications qui vont suivre, nous poserons, pour abréger, $\Delta =$
Discriminant. — Il est généralement impossible de

36a PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE VI. déterminer les rapports de x, y, z de manière à satisfaire simultanément aux trois équations $l^2 = 0, l = 0, j = 0$. Il faut, pour cela, une équation de condition $A = 0$, qu'on obtiendra en éliminant l et j entre ces trois équations (après les avoir divisées par $5^{1/2}$). La quantité A se nomme le discriminant de f . C'est un invariant. En effet, soit $\phi(x, y, z)$ ce que devient $f(x^2y, z)$ par la substitution $X = x, Y = y, Z = z$, et soit A' le discriminant de

$\phi(x, y, z)$. Mais, si nous prenons les dérivées partielles de l'équation par rapport à x, y, z , il viendra Ces relations montrent que, si l'on peut annuler à la fois l, j , on pourra annuler à la fois A, A' , et réciproquement. Donc, les deux équations $A = 0, A' = 0$ sont équivalentes et ne peuvent différer que par un facteur constant.

376. Hessien, — On nomme hessien de f le déterminant $H_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$. Ce n'est autre chose que le jacobien des trois fonctions f, g, h ; et $H = 0$ exprimera, comme on sait, la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une relation linéaire entre df, dg, dh . Soit H le hessien de

364 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE TI. 378. Points singuliers, — Ce résultat est en défaut pour les points singuliers, où l'on aurait non seulement $f = 0$, mais encore (19) $y_i = 0$, $f_s = 0$, $f_s^2 = 0$, car les termes du premier ordre, s'annulant identiquement, n'apprennent plus rien sur l'allure de la courbe, et il faut recourir à ceux du second. Pour qu'il existe un point singulier sur la courbe, il faut que les équations (19) soient compatibles; d'où la condition $A = 0$. Cette condition est suffisante, car la quatrième équation à satisfaire, $f = 0$, n'est qu'une conséquence des trois autres, d'après la formule (17). Les fonctions f_i^2 , f_z étant homogènes de degré $n - i$, on aura, pour un point singulier, $(f_{ii}^2 - 4f_{i1}f_{135} - (n - i)f_{i7} - o, (20) f_{i7} - f_{i7} - f_{i7} - \dots \sim \{n - 0\} = o$ » Éliminant entre ces équations les rapports de $x^j Z y$ on aura l'équation $H = 0$. Enfin, les équations (20), respectivement multipliées par X , y et z et ajoutées ensemble, donneront (21) $f_{ij}^2 - 2f_{ij}f_{j7} - \dots = 0$. 379. Pour étudier l'allure de la courbe aux environs du point $(\alpha, 7, 5)$, on égalera à zéro les termes du second ordre dans le développement (16). En tenant compte des relations (20) et (21), on obtiendra l'équation $f_{i7} + a_{i7}XY + \dots = 0$. Le premier membre de cette équation se décompose en un produit de deux facteurs linéaires. On sait, en effet, par la

THÉORIE DES COURBES PLANES ALGÈBRIQUES. 365

théorie des coniques, que cette circonstance se présente lorsque le déterminant $\begin{vmatrix} u & f \\ 13 & yti & fw & ftz \\ si & s\hat{i} & as \end{vmatrix}$ que nous avons désigné par H , est égale à zéro, et nous avons vu que c'est ici le cas. L'équation représente donc un système de deux droites, qui seront les tangentes au point double $\{x^y, z\}$. Si ces deux tangentes coïncident, $\{x^y, z\}$ sera un point de rebroussement. Si H, i_2j' s'annulent identiquement, il faudrait recourir à l'examen des termes du troisième ordre, et ainsi de suite. 380. Points d'inflexion, — Soient $\{x^y, z\}$ un point d'inflexion de f ; $iX4-, Y-f-AZrz.o$ la tangente correspondante ; la tangente au point infiniment voisin. Ces deux tangentes devant coïncider, par définition, on aura $f \mid J_i J^o$ et, par suite, en désignant par k un facteur convenable, (22) $df \wedge kf, df^{\wedge}kf, dj \wedge kf$. Mais on a $dJx - J^{\wedge}dx - f^{\wedge}dy^f ydz, dft^{\wedge}fixdx^{\wedge}Jitdy - f^{\wedge}dz, dfz - fzi dx - 4 - A\ddot{i} dy - 4/33 dz$.

The text on this page is estimated to be only 26.10% accurate

366 PREMIÈRE PARTIE. CHAPITRE TI. D'ailleurs, $i, 2, 3$ étant homogènes et de degré $n - i$, on aura $\frac{\partial^2 H}{\partial x^i \partial y^j} = \{n - i\} \frac{\partial H}{\partial x^i \partial y^j}$. Les équations (23) pourront donc s'écrire ainsi : $\frac{\partial^2 H}{\partial x^i \partial y^j} = \{n - i\} \frac{\partial H}{\partial x^i \partial y^j}$ ('-', ^) -/» ("-- , ^) -^' /» (^-^ - //rr) -^•^" if y - r^ + •^» ("^ - ;r^) ~- °On doit d'ailleurs supposer que $dx - - \gg dy n - i \wedge n - I dz \wedge$ ne s'annulent pas à la fois; car, si cela avait lieu, $dx \wedge dfj dz$ étant proportionnels à $x \wedge y \wedge z$, le point $(x + dx \wedge y - r - dy \wedge z - \} - dz)$ ne différerait pas du point $\{x \wedge y \wedge z\}$, puisque la position d'un point ne dépend que des rapports de ses coordonnées. Il est donc nécessaire que le déterminant H soit égal à zéro. /u f\ t f\% f\i\ f\it fu f%\ f%\ fzz 381 . L'équation $H = 0$ représente donc la condition nécessaire et suffisante pour qu'un point non singulier de la courbe $y=0$ soit un point d'inflexion. Les deux courbes $y=0, H=0$, étant respectivement d'ordre n et $3(i - a)$, auront $3(n - 2)/i$ intersections. S'il n'existe pas de points singuliers, on aura donc $3(n - 2)/i$ points d'inflexion, et les rapports des coordonnées seront fournis pour chacun d'eux par

THÉORIE DES COURBES PLANES ALGÈBRIQUES. 867 les équations $f = 0$, $H = 0$. Mais, s'il y a des points singuliers, la courbe $H = 0$ y passera, comme nous l'avons vu. Pour avoir le nombre vrai des inflexions, il faudra donc retrancher du nombre total des solutions communes aux équations $f = 0$, $H = 0$ celui des solutions correspondantes aux points singuliers, comptées chacune avec le degré de multiplicité qui lui convient.

382. Pour déterminer le degré de multiplicité relatif à l'un quelconque P de ces points singuliers, on opérera de la manière suivante : Soient $l \in \{-m, y - \dots - n\}$, $i \in \{-k, m^y - \dots - ij\}$ $5 \dots 0$, $l^x - 4 - m^y - i - \dots, 5 \dots 0$ les équations de trois droites quelconques, dont les deux premières se croisent au point P et dont nous nous réservons d'ailleurs de choisir la direction de la manière la plus convenable. Prenons pour coordonnées, à la place de x, y js, les trois fonctions $\$ \text{---} l X - \dots - m y - \{ - nzy r^{\wedge} \text{---} l^x - t - m^y - \{ - rixZy ; - / , . r - h / n, j - h n^z$. Soit l'équation de la courbe rapportée à ce nouveau système de coordonnées. Le hessien étant un covariant, on aura $II(\wedge, J, S)3z: \hat{A}: ni(S, 7i, C)$, k étant un facteur constant et H_f le hessien de la nouvelle fonction cp. L'équation $H = 0$ sera donc transformée dans la suivante : $II_i = 0$.

368 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE YI. On a d'ailleurs, au point P, $l = O_j T_j = O$, et ce point, étant singulier, sera commun aux deux courbes $\phi(5, f, C) = O, H, (\hat{i}, T, \hat{i}) = O$. Il s'agit de déterminer le degré de multiplicité de cette solution. Remarquons d'abord que, les rapports des quantités $5, v, \hat{I}J$ étant seuls à considérer, on pourra, sans inconvénient, supposer $!J = I$. Considérons donc les deux équations $\phi(\phi > TO, 0 - o > H(\hat{i}, T, i) = o$. Soient $r^{\wedge}, 7j2, \dots$ les diverses valeurs de $y \backslash$ en fonction de i tirées de l'équation $\phi(i, v), i) = o$; N le coefficient de la plus haute puissance de T_j dans cette équation, et enfin m le degré en 71 de l'équation $H, (\phi, T_j, i) := o$. L'équation finale résultant de l'élimination de t_j sera $N^{''ni}(\phi, i, i)H, (\phi, r, i) \dots^{\wedge} o$. Pour déterminer le nombre de ses racines nulles, on calculera le premier terme du développement de son premier membre, suivant les puissances croissantes de ϕ . Son degré sera le nombre cherché. 383. Supposons, par exemple, que P soit un point double. Prenons, pour les droites $5, t_j$ les deux tangentes à ce point double. La courbe $\phi = -^{\wedge} o$ devant se confondre aux termes près du troisième ordre avec le système des droites $\phi^{\wedge} r z o, t_j r = i o$, on aura $^{\wedge} ' I^{\wedge} T, !: \rangle - \langle H - (a\$) + 6f \langle i \rangle - f - c\phi r, 'H - rfT, \rangle \rangle !; '-h \dots - H^* T. ' \langle \langle$. Formons les dérivées secondes, et posons $\phi = i$ après les

The text on this page is estimated to be only 28.85% accurate

THÉORIE DBS COURBES PLANES ALGÈBRfQUES. 869

dérivations, nous aurons, pour les éléments du déterminant $H|(\zeta, T, I)$, les valeurs suivantes : $\odot, 3 = (i - 2)t, + \{n - 3\} (3a\$« -h 2 6?r. -4- cr, ^)-h, . . , \zeta ^{,,} = i = (« - 2) 5 + (i - 3)(A5' -h 2c\zeta t, -h SûfV) 4- . . . , 0, 3 .zz (i - 2) (A1 - 3)?T, + (, 1 - 3) (« - 4) («?» -h ... -^ \hat{U}^T, ») -f.$ Gela posé, cherchons le premier terme du développement de chacune des racines $7^{1,7}21 \bullet \bullet \bullet$ de l'équation 11 faudra pour cela, d'après la méthode du n° 94, poser et déterminer Texposant (x de telle sorte que le polynôme $\zeta(\zeta, T_j, 1)$ présente plusieurs termes d'ordre minimum; on obtiendra ensuite le coefficient M en égalant à zéro la somme de ces termes. Or on voit immédiatement, à l'inspection de l'équation (23)> qu'on devra poser $JJL = 2, M^{rz} — a$, ou ou, enfin, $|j| =: o$, M étant racine de Téquation $\wedge \wedge - \dots - \wedge AM^{\wedge - ' \wedge} o$. L'équation $cp(\zeta, 7_j, i) = o$ a donc une racine T_j , d'ordre $\hat{i} >$ par rapport à ζ , deux racines v^a, r^s d'ordre 7, et enfin $n - 3$ racines $tt_j, . . .$ d'ordre zéro. Si, dans les expressions de

370 PREMIÈRE PARTIE. — CHAPITRE VI. dérivées, par
rapport à ζ , sera respectivement i , o , a , 1 , $i, 3$, et l'ordre du déterminant Δ_i ?
it $\Delta_i H_j(\zeta, n, l)_{r=0,1} Q$.,

THÉORIE DES COUBBBS PLANES ALGÈBRIQUES. 87 1 Les valeurs de c_{pn} , $\zeta_{2>-}$ et de H_i , correspondantes à chacune d'elles, seront respectivement d'ordre i , i , 2 , o , J , 3 et 4 . Les autres racines de l'équation sont d'ordre zéro, ainsi que les valeurs correspondantes de $c_{p,,}$, $(p, 2. \dots, II.$ L'équation finale admettra donc la solution $\zeta = o$, avec un ordre de multiplicité égal $4 + 4 = 8$. 385. Nous pouvons donc énoncer ce théorème : Si une courbe γ , de degré γ , présente d points doubles et r points de rebroussement, mais n'offre pas de points singuliers d'une espèce plus compliquée, le nombre p de ses points d'inflexion sera donné par la formule $p = 3(\gamma - 2)/\gamma - d - r - 8$. 386. Polaire, Proposons-nous de mener une tangente à la courbe γ par un point extérieur (a, β, c) . Soit (j, γ, δ) le point de contact de cette tangente inconnue; il est sur la courbe; donc $\gamma(a, \gamma, \delta) = o$. D'autre part, la tangente en ce point passe par (a, β, c) , d'où la condition $\gamma_j(a, \gamma, \delta) + \beta \gamma_{\gamma}(a, \gamma, \delta) + c \gamma_{\delta}(a, \gamma, \delta) = o$. Cette équation représente, si l'on regarde x, y, z comme coordonnées courantes, une courbe d'ordre $n - i$, qu'on nomme la polaire Au point (a, β, c) . 387. L'équation de cette courbe conserve sa forme si l'on change le triangle de référence. Posons, en effet, $\gamma = z/X, \beta = y/X, c = x/X$, et soit

$3;^{\wedge}$ PIBIIÈRB PARXIE. -- CHAPITIE TI. I/identité donnera par
 difTérenliation ?i = > i/i -- ÀiA H- X,/, D'autre part, les nouvelles
 coordonnées a, p, y du point $\{a, b, c\}$ sont données par les formules Les
 équations précédentes permettent de vérifier immédiatement ridentité 388.
 Classe. — On nomme classe de la courbe / le nombre des tangentes qu'on
 peut lui mener par un point extérieur $\{x, y^{\wedge} z\}$. Leurs points de contact sont
 donnés par les $n\{n - i\}$ intersections de / avec la polaire de $(ar, y^{\wedge} z)$. Mais
 la polaire passe évidemment par les points singuliers, s'il y en a, ce qui
 donne des solutions impropres qui sont à exclure et dont il faudra assigner
 le degré de multiplicité. Nous opérerons comme pour les points d'inflexion.
 389. Soit P un point double. Par un changement de variables, nous
 réduirons Téquation de la courbe à la forme (a3). Prenant ses dérivées
 partielles et posant ensuite $s = i^{\wedge}$ il viendra

THAORIB DBS COURBES PLANES ALGÉBRIQUES. 878

courbe proposée et de sa polaire « $l + P \hat{=} Y$ » = $l' (5, TQ , 1) = o$. On aura le degré de multiplicité de cette solution en cherchant Tordre par rapport à i de la quantité A'^* -»

The text on this page is estimated to be only 24.03% accurate

374 PRENifcRE PARTIE. — CHAPITRE Tl. 392. Coordonnées
tangentiellcs, — Soil nx -\- r V -h

THÉORIE DES COURBES PLANES ALGÈBRIQUES. 3-^{^^})

Négligeant les termes du deuxième ordre et tenant compte des équations $F = 0$, $F_1 M - F_2 H - F^w z z z v F = G$, il restera $F_1 L_h - F_2 V - F^3 V^0$. Cette équation exprime que toutes les tangentes infiniment voisines de la tangente $(w, v^i v)$ viendront se croiser en un même point (F_1, F_2, F_3) ; ce point est évidemment le point de contact de la tangente $(1, r, iv)$. 394. La tangente (w, r, w) sera dite singulière, si Ton a simultanément $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, $F_3 = 0$. Il faudra, dans ce cas, considérer les termes du deuxième ordre. Ceux-ci se réduiront à $(25) i(F_1, L_1^2 - f_2 F_2^2, UV + \dots)$, et, le hessien de F étant nul, cette expression sera le produit de deux facteurs linéaires. Donc, il existera deux points tels que toute tangente infiniment voisine de la tangente (w, i^*, v) passe par l'un d'eux, autrement dit deux points de contact, qui pourront être réels ou imaginaires. On dira, dans ce cas, que (w, i^*, iv) est une tangente double. Si l'expression (aS) est un carré parfait, les deux points de contact coïncident, et Ton pourrait dire que (w, i^*, v) est une tangente rebrousante. Mais ce n'est autre chose que la tangente à un point d'inflexion, ces points étant précisément définis par la condition d'avoir la même tangente qu'un point infiniment voisin. 395. On pourrait encore appeler provisoirement tangentes inflexionnelles les tangentes autres que les tangentes singu

3;^ PRBMEIB PARTIE. — CHAPITRE VI. lières qui satisfont
aux deux équations $F = 0$, $I F|_i F|_i$ Pts I 1 Fil Pti Ffa $|=0$. • $\ddot{r}^i$ $Fs\hat{r}^i$ $\ddot{r}^i$ »i I
Mais on peut déjà prévoir que, de même que les tangentes rebroussantes ont
pour points de contact des points d'inflexion, réciproquement, les tangentes
inflexionnelles auront pour points de contact des points de rebroussement.
396. Pour achever de rendre cette réciprocité évidente, cherchons à former
l'équation en coordonnées ponctuelles de la courbe qui a pour équation
tangentielle (26) $F(\langle r, ir \rangle) = 0$. Soient $(jr, \wedge, z)$ un point de cette courbe; $(w,$
 $r,$

THÉORIE DES COURBES PLANES ALGÈBRIQUES. 877 et
 Ton aura l'équation tangentielle en éliminant les rapports de $x^ayy z$ entre
 ces équations et (27) On voit qu'il y a réciprocity parfaite entre les deux
 modes de représentation d'une courbe par ses points ou par ses tangentes, et
 que tout théorème qu'on aura établi en donnera un autre corrélatif en y
 écrivant tangente au lieu de point de contact, ordre au lieu de classe, et
 réciproquement. 397. Formules de Plücker. — Reprenons, par exemple, les
 deux formules $p = \frac{3}{2}(v - 2)v - d - 8r$, $t = \frac{1}{2}n\{n - i\} - 2d - 3r$.
 trouvées plus haut. On en déduira deux formules nouvelles, en y remplaçant
 'Vf $n^p r$, d par $n, y r$ (nombre des tangentes inflexionnelles ou tangentes
 aux points de rebroussement), p (nombre des tangentes rebrousantes ou
 tangentes aux points d'inflexion), et enfin 8 (nombre des tangentes doubles).
 On trouvera ainsi $r = \frac{3}{2}(v - 2)v - 68 - 8p$, $t = \frac{1}{2}rv(v - i) - 28 - 3p$.

Observation sur le n° 217. Nous avons établi dans ce numéro qu'un point (x, y) d'une courbe $y = f(x)$ doit être considéré comme point ordinaire, si les dérivées $y', y'', \dots$ sont finies et déterminées, et si, de plus, on n'a pas à la fois $x' = 0, y' = 0$. Cette démonstration est fondée sur ce fait, qu'en éliminant y entre ces équations, on obtient pour x une valeur en y telle, que les dérivées $x', x'', \dots$ au point considéré soient toutes finies et déterminées. Il en résulte que, si (X, Y) est un point quelconque de la courbe, infiniment voisin de (x, y) , $Y - y$ sera développable en série suivant les puissances entières et positives de $X - x$, par la formule de Taylor, ce qui est le véritable caractère d'un point ordinaire. On doit toutefois remarquer qu'il peut se faire qu'on obtienne le même point (x, y) assignant au paramètre une autre valeur t différente de t . Dans ce cas, les points de la courbe correspondant aux valeurs $t + r$ du paramètre ne seront pas les seuls qui soient infiniment voisins du point (x, y) . Il y en aura d'autres, correspondant aux valeurs $t - r$ dt infiniment voisines de t , lesquels constitueront une seconde branche de la courbe, rencontrant la première en x, y . Ce point sera donc un point multiple, si l'on considère l'ensemble de la courbe, bien qu'étant un point ordinaire sur la branche correspondant aux points $t + r$, si on l'envisage isolément. Soit, par exemple, $x = \frac{1}{t^2}, y = \frac{1}{t^3}$, d'où $t = \pm \sqrt[3]{y/x}$, $x' = \pm \frac{2}{3} \sqrt[3]{y/x}, y' = \pm \frac{1}{3} \sqrt[3]{y/x}$. On obtient le point x^0, y^0 soit en posant $t = 1$, soit en posant $t = -1$. L'origine est donc un point double, ce qu'on vérifierait aisément en chassant le radical. Aux valeurs de t infiniment voisines de $+1$ correspond la branche de courbe $y = -\frac{1}{3}x^{3/2}$; à celles qui sont voisines de -1 , la branche $y = \frac{1}{3}x^{3/2}$. Sur chacune de ces branches, considérée isolément, l'origine se comporte comme un point ordinaire. Les théorèmes des n° 222 et 228 comportent des observations analogues.

DU TOME PREMIER.

P. 8. - Librairie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, &c.

The text on this page is estimated to be only 0.00% accurate

]t^

The text on this page is estimated to be only 11.17% accurate

$X \sim ;^{\wedge}s. ')\grave{e}^{\wedge}K$

