

# Des methodes en geometrie par Paul Serret

1. [Notice](#)

This book was produced in EPUB format by the Internet Archive.

The book pages were scanned and converted to EPUB format automatically. This process relies on optical character recognition, and is somewhat susceptible to errors. The book may not offer the correct reading sequence, and there may be weird characters, non-words, and incorrect guesses at structure. Some page numbers and headers or footers may remain from the scanned page. The process which identifies images might have found stray marks on the page which are not actually images from the book. The hidden page numbering which may be available to your ereader corresponds to the numbered pages in the print edition, but is not an exact match; page numbers will increment at the same rate as the corresponding print edition, but we may have started numbering before the print book's visible page numbers. The Internet Archive is working to improve the scanning process and resulting books, but in the meantime, we hope that this book will be useful to you.

The Internet Archive was founded in 1996 to build an Internet library and to promote universal access to all knowledge. The Archive's purposes include offering permanent access for researchers, historians, scholars, people with disabilities, and the general public to historical collections that exist in digital format. The Internet Archive includes texts, audio, moving images, and software as well as archived web pages, and provides specialized services for information access for the blind and other persons with disabilities.

Created with hocr-to-epub (v.1.0.0)



VITTORIO EM. JH



**The text on this page is estimated to be only 21.11% accurate**

BIBLIOTECA BIBLIOTECA PROVINCIALE > V)  
NAZIONALE B. Prov. Il 2007 V HAPOi.1 J Digitized by Google Palchetto



**BIBLIOTECA PROVINCIALE**

armadio



Num.º d'ordine

140

30806

Palchetto

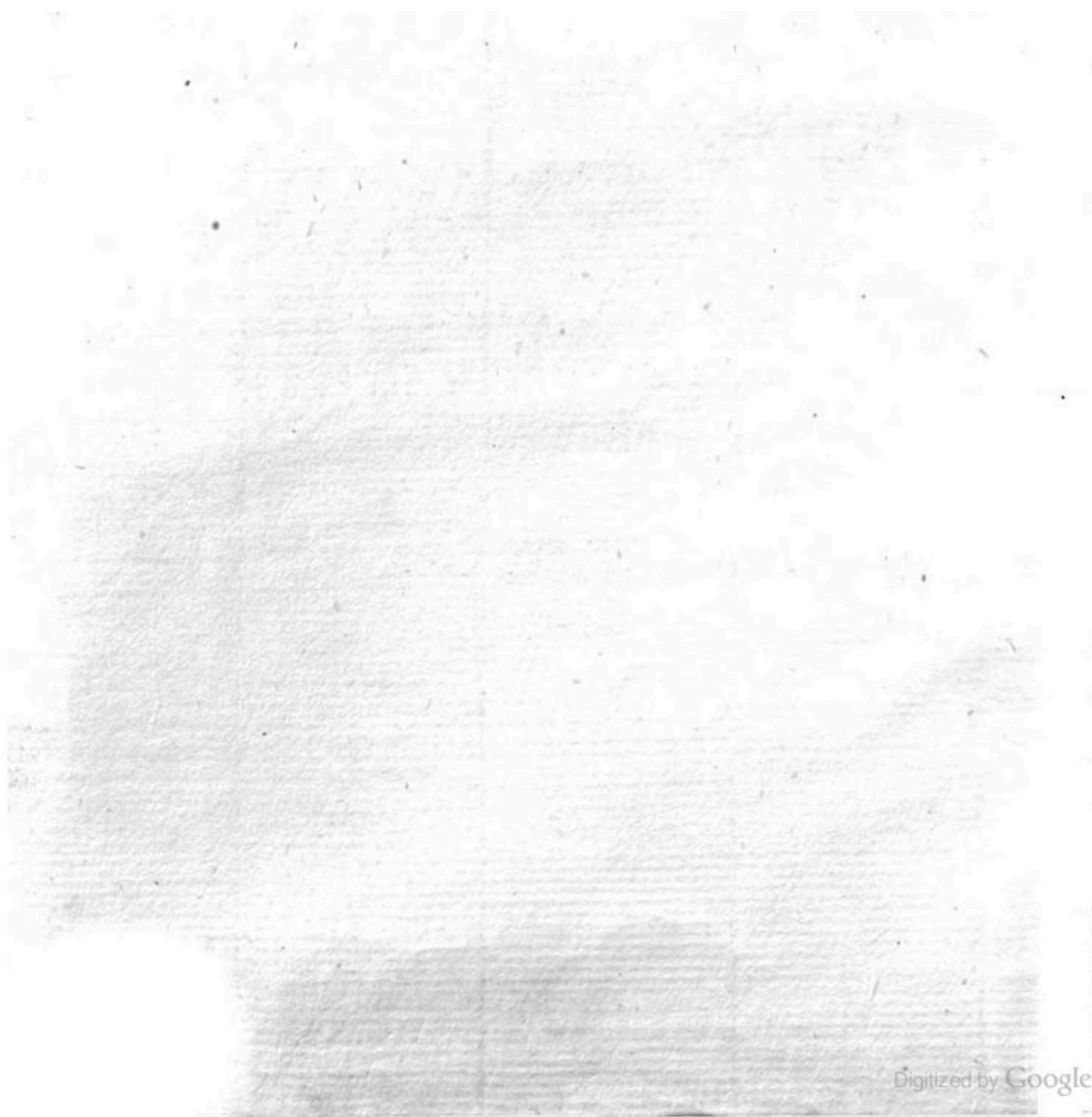
**The text on this page is estimated to be only 23.00% accurate**

Digitized by Google

Re. Case II 2004

**The text on this page is estimated to be only 0.00% accurate**

9



**The text on this page is estimated to be only 20.38% accurate**

À DES MÉTHODES E<sup>^</sup> GÉOMÉTRIE. Digitized by Google



DES

**MÉTHODES EN GÉOMÉTRIE.**

**The text on this page is estimated to be only 17.31% accurate**

PARTS. — T<sup>M</sup>PRIMRRIR DE MALLET-BACHELTER, rue (iu  
Jardinet, is. Digitized by Google

Handwritten text, mostly illegible due to extreme fading and bleed-through from the reverse side of the page. The text appears to be organized into several paragraphs, with some lines being more distinct than others. The ink is very light and scattered across the page.

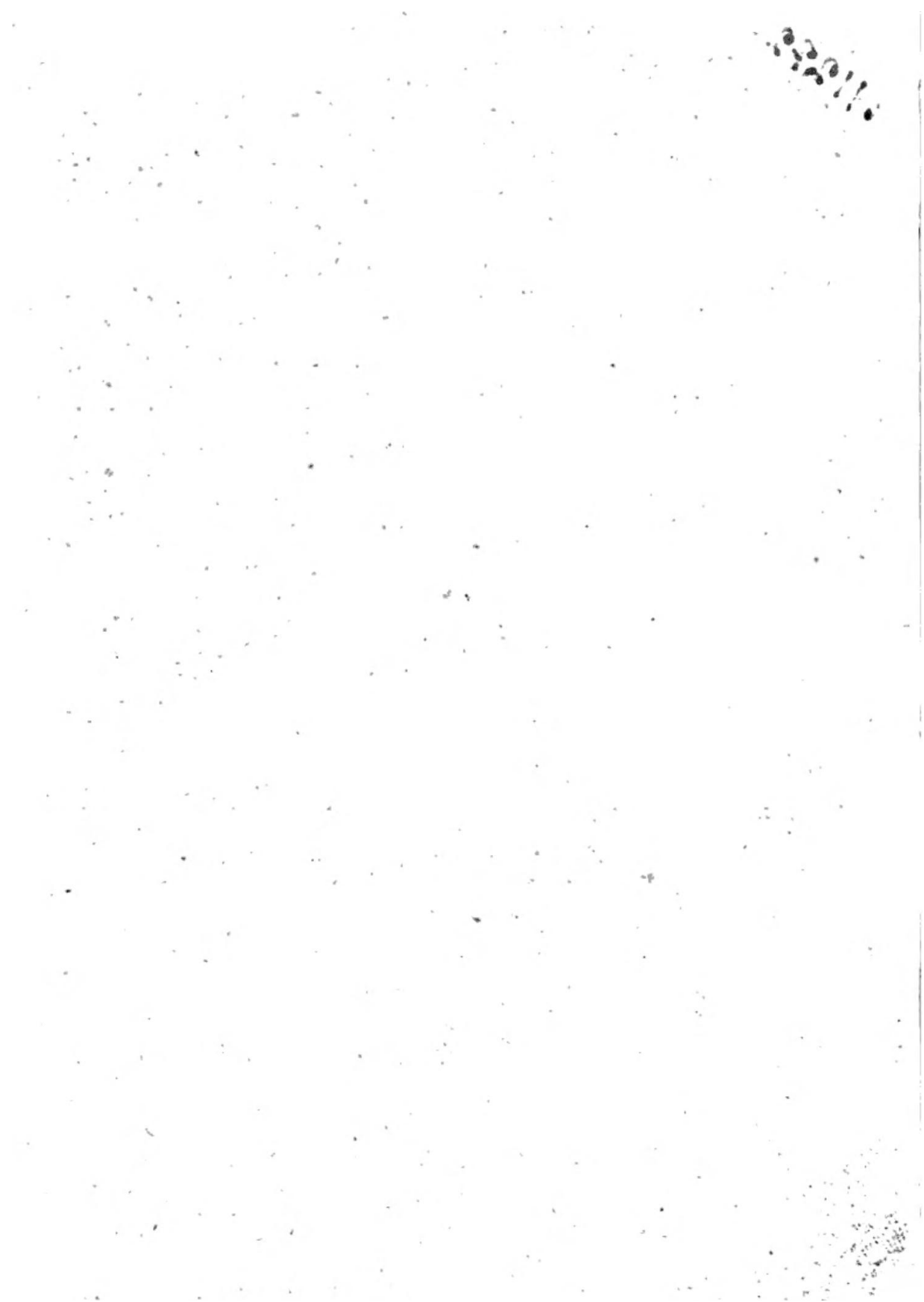
The text on this page is estimated to be only 22.99% accurate

MÉTHODES EN GÉOMÉTRIE, i Par Paul SERRET,  
l>ROreftfl(D> os MATSiMATIOCSS. • Il »Érait a <16alrer qu\*on ne  
laiiaAl pas aoUot dans , l'oubli ceriaîDS rèsiiilus des traTaox des Rèomèlres  
de< siècle» passés . cl qu'on revint un peu sur les principes presque toujours  
faciles et souvent ineénieus à l'aide desquels les rraiids humme» do ce  
temps-là j étalent parrenns; car ce no sont pas Uni les vérités particulière»  
«l'io les méthodes qu'il ne faut pos laisser périr. • iroRcr.LCT, F\$-u/>riet/r  
pro/r. Uveff paycKfl-) PARIS, MALLET - BACHELIER, IMPRIMEUR -  
LIBRAIRE ni1 BUREAtl DES LONCmiDES, DE l'ÉCOLB IMPÉRIALE  
POLVTECnNIQrE , Quai des Augustins, 55. 1855 Digiized by Google



**The text on this page is estimated to be only 22.67% accurate**

Digilized by Google



PRÉFACE. Si l'on doit juger de l'excellence d'une institution universitaire d'après les résultats qu'elle a fournis, d'après les \* fruits qu'elle a portés, il est peu d'institutions humaines qui paraissent plus excellentes et plus utiles que celle de l'École Polytechnique : née d'hier, elle a déjà ses litres de noblesse; et ces litres, personne ne les lui conteste, car ils sont en bonne forme et revêtus des noms glorieux de la plupart des inventeurs du siècle. Toutefois, si la création de l'École Polytechnique a été la réalisation d'une grande pensée, la marche suivie dans son enseignement intérieur, la direction qu'elle a imprimée aux études scientifiques extérieures, et même les travaux incessants des maîtres et des élèves, ont eu ce résultat, fâcheux selon nous, de créer autour de l'étudiant en mathématiques une atmosphère artificielle, le faisant vivre dans le présent, mais le séparant complètement du passé; réfléchissant vers lui toutes les lumières de l'analyse contemporaine, mais \* absolument impénétrable aux rayons de la Géométrie moderne. Pour celui qui vit dans un pareil milieu, l'histoire des mathématiques ne paraît guère commencer sérieusement (ju'à l'époque de la fondation de l'École Polytechnique. C'est là l'origine du monde, le commencement du temps, de la lumière et de l'ordre, au delà duquel on trouverait sans doute les ténèbres et le chaos. > Aussi les méthodes des inventeurs sont-elles généralement, ignorées des élèves; elles ont disparu sous l'uniformité d'une analyse élégante; et si leurs noms sont prononcés

fjueDigitized by Google

---

## PRÉFACE.

---

Si l'on doit juger de l'excellence d'une institution uniquement d'après les résultats qu'elle a fournis, d'après les fruits qu'elle a portés, il est peu d'institutions humaines qui paraissent plus excellentes et plus utiles que celle de l'École Polytechnique : née d'hier, elle a déjà ses titres de noblesse; et ces titres, personne ne les lui conteste, car ils sont en bonne forme et revêtus des noms glorieux de la plupart des inventeurs du siècle.

Toutefois, si la création de l'École Polytechnique a été la réalisation d'une grande pensée, la marche suivie dans son enseignement intérieur, la direction qu'elle a imprimée aux études scientifiques extérieures, et même les travaux incessants des maîtres et des élèves, ont eu ce résultat, fâcheux selon nous, de créer autour de l'étudiant en mathématiques une atmosphère artificielle, le faisant vivre dans le présent, mais le séparant complètement du passé; réfléchissant vers lui toutes les lumières de l'analyse contemporaine, mais absolument impénétrable aux rayons de la Géométrie moderne. Pour celui qui vit dans un pareil milieu, l'histoire des mathématiques ne paraît guère commencer sérieusement qu'à l'époque de la fondation de l'École Polytechnique. C'est là l'origine du monde, le commencement du temps, de la lumière et de l'ordre, au delà duquel on trouverait sans doute les ténèbres et le chaos.

Aussi les méthodes des inventeurs sont-elles généralement ignorées des élèves; elles ont disparu sous l'uniformité d'une analyse élégante: et si leurs noms sont prononcés quelque-



PRÉFACE. VI ■ fois, il semble que ce soit moins par (l'ébriété  
(juc pour la commodité du discours. Cette adoration du présent et cet oubli  
du passé se traduisent parfois d'une manière naïve . ainsi l'on dit  
généralement la formule de Petit (i) ou la formule de M. Ch. Dupin (a); il  
serait en effet de mauvais goût, eu pareille matière, de faire remonter ses  
connaissances histori<[ues au delà de 1794, • et d'attribuer une formule à  
celui qui l'a donnée pour la première fois, celui-ci s'appelât-il le marquis de  
l'Hôpital 4 ou Maclaurin. . Par un contraste remarquable, c'est d'une façon  
tout opposée que l'on procède dans les études littéraires. Là le culte du  
passé fleurit dans toute sa splendeur : les grandes voix des poètes, des  
philosophes, des bistoricus qui vivaient il y a deux mille ans, dominent  
toutes les voix du siècle; et si leurs œuvres renferment des beautés  
éternelles, <m n'est pas injuste envers eux, et l'admiration qu'ils inspirent  
demeure éternellement jeune. Et je ne sache pas de plus élocpiente louange  
des gloires littéraires de l'antiquité, que le spectacle donné depuis vingt  
siècles par chaque génération nouvelle venant continuer, avec les esprits les  
plus profonds et les plus élégants de la Grèce et de Rome, ce commerce non  
encore interrompu qui forme la chaîne vivante du passé au présent, et dont  
Descartes a si bien caractérisé le charme et l'utilité, en le présentant comme  
« une conversation avec les plus honnêtes gens des temps passés, et même  
une conversation étudiée en laquelle ils ne nous découvrent que les  
meilleures de leurs pensées (3) ». . \* Ainsi ranlagonisme entre le présent et  
le passé qui se manifeste dans tous les tléveloppements de la pensée  
moderne, se retrouve encore à l'état latent sans doute, mais avec une  
incontestable réalité, dans les voies contraires de. nos deux (1) Pt'oblètnü  
dot» caustiques. (q) Expression du rayon de courbure de t cllipse. (.H)  
Dibcours de la Méthode. , ^ Digitized by CoogLe

fois, il semble que ce soit moins par déférence que pour la commodité du discours.

Cette adoration du présent et cet oubli du passé se traduisent parfois d'une manière naïve : ainsi l'on dit généralement *la formule de Petit* (1) ou *la formule de M. Ch. Dupin* (2); il serait en effet de mauvais goût, en pareille matière, de faire remonter ses connaissances historiques au delà de 1794, et d'attribuer une formule à celui qui l'a donnée pour la première fois, celui-ci s'appelât-il le marquis de l'Hôpital ou Maclaurin.

Par un contraste remarquable, c'est d'une façon tout opposée que l'on procède dans les études littéraires. Là le culte du passé fleurit dans toute sa splendeur : les grandes voix des poètes, des philosophes, des historiens qui vivaient il y a deux mille ans, dominent toutes les voix du siècle; et si leurs œuvres renferment des beautés éternelles, on n'est pas injuste envers eux, et l'admiration qu'ils inspirent demeure éternellement jeune. Et je ne sache pas de plus éloquente louange des gloires littéraires de l'antiquité, que le spectacle donné depuis vingt siècles par chaque génération nouvelle venant continuer, avec les esprits les plus profonds et les plus élégants de la Grèce et de Rome, ce commerce non encore interrompu qui forme la chaîne vivante du passé au présent, et dont Descartes a si bien caractérisé le charme et l'utilité, en le présentant comme « une conversation avec les plus honnêtes gens des temps passés, et même une conversation étudiée en laquelle ils ne nous découvrent que les meilleures de leurs pensées (3) ».

Ainsi l'antagonisme entre le présent et le passé qui se manifeste dans tous les développements de la pensée moderne, se retrouve encore à l'état latent sans doute, mais avec une incontestable réalité, dans les voies contraires de nos deux

---

(1) Problème des caustiques.

(2) Expression du rayon de courbure de l'épissure.

PBÉFACE. Vil cnseigiieineuts littéraire et scientifique. Or, si les méthodes opj)osécs que l'on suit dans l'un et dans l'autre ont cependant porté leurs fruits, quels résultats plus excellents' encore ne devrait-on pas attendre de. l'introduction de la méthode historique dans l'enseignement scientifique actuel? Et sans parler de l'attrait que présente l'étude des origines de chaque science, de sa formation et de ses développements successifs , ii'est-il pas infiniment probable que plusieurs des méthode» créées par les Inventeurs pour résoudre certains problèmes aujourd'hui connus ou oubliés, pourront s'appliquer avec avantage à la solution de problèmes nouveaux, non encore formulés; et que, par suite, la connaissance de ces^ méthodes peut aider puissamment, dans leurs enfantements futurs , les esprits créateurs que nous réserve l'avenir? Ces réflexions m'ont inspiré le désir de tenter cet ouvrage , dans lequel j'ai cherché à réunir, sous les titres généraux d'un petit nombre de méthodes et de problèmes , en même temps .que les procédés d'investigation géométrique susceptibles d'une définition rigoureuse, la plupart des doctrines acquises à la géométrie infinitésimale pendant la première période de son histoire.

enseignements littéraire et scientifique. Or, si les méthodes opposées que l'on suit dans l'un et dans l'autre ont cependant porté leurs fruits, quels résultats plus excellents encore ne devrait-on pas attendre de l'introduction de la méthode historique dans l'enseignement scientifique actuel? Et sans parler de l'attrait que présente l'étude des origines de chaque science, de sa formation et de ses développements successifs, n'est-il pas infiniment probable que plusieurs des méthodes créées par les inventeurs pour résoudre certains problèmes aujourd'hui connus ou oubliés, pourront s'appliquer avec avantage à la solution de problèmes nouveaux, non encore formulés; et que, par suite, la connaissance de ces méthodes peut aider puissamment, dans leurs enfantements futurs, les esprits créateurs que nous réserve l'avenir?

Ces réflexions m'ont inspiré le désir de tenter cet ouvrage, dans lequel j'ai cherché à réunir, sous les titres généraux d'un petit nombre de méthodes et de problèmes, en même temps que les procédés d'investigation géométrique susceptibles d'une définition rigoureuse, la plupart des doctrines acquises à la géométrie infinitésimale pendant la première période de son histoire.

---

Digitized by Google

**The text on this page is estimated to be only 29.05% accurate**

TABLE DES MATIÈRES. PREMIÈRE PARTIE. DES  
MÉTHODES RELATIVES A LA GÉOMÉTRIE DES FIGURES FINIES.  
CHAPITRE PREMIER. Analyse de différentes méthodes que l'on peut  
suivre dans la solution des problèmes ou dans la démonstration des  
théorèmes de géométrie. Réflexions générales sur l'utilité d'une  
classification des divers procédés que l'on peut employer pour résoudre les  
questions de géométrie, page i. Deux méthodes générales. «-Analyse et  
synthèse, p. 2. Première méthode. — Par substitutions successives. — >  
Applications, p. i. Deuxième méthode, — Par construction. —  
Applications, p. 4. Troisième méthode. — Par duplication, p. 6.  
Quatrième méthode. — Par abstraction ou généralisation. — Application \*  
théorème de Newton, p. 8. § 1. De l'emploi des lieux géométriques  
et des courbes enveloppes» Application » p. 10. Cinquième méthode. —  
Par composition et décomposition, p. 10. \* \* ; . Sixième méthode. — Par les  
limites, p. 11. Septième méthode. — Par la réduction à l'absurde. —  
Applications, p. 12. Huitième méthode, — Par inversion. — Applications, p.  
13. Neuvième méthode. — Sur les lignes, les aires ou les volumes  
auxiliaires. — Applications, p. 14. Dixième méthode. — Par les solides  
auxiliaires. — Applications, p. 17. Onzième méthode. — Par la  
transformation des figures. — Réflexions générales sur l'importance de  
celle méthode, p. 18. ^ ^ ^ Digilized by Google

The text on this page is estimated to be only 22.64% accurate

TABLE DBS MATrft»»»» HHAymiB n. Pe la tramfownaUon det  
figuret pr raytwn vecteurs réctproqiat, ^ — PaîlCIPES ca^A»Aül  
HILATIFS A LA niA«BF0»«AT!0;< PCI FlCPaSS PAR RAYOîls  
VECTErnS RÉCIPROQIE8. , • ‘ PdfiDitîoü des figures réciproques. —  
Point^rigine. — Puiss^fice^ p. ai. Relations entre la distance de deux points  
4\*»no figure «t ïa^distancce des . • \* points correspondants de la figure  
réciproque^ p. ai. É(jalilG des an^jles correspondants do deux figures  
réciproques, p. l'i. Scolic. — On peut passer des propriétés m^iri^urj et  
descriptives d'une figure aux propriétés analogues de la figure réciproque ,  
p. a3. Correspondance des lignes de courbure dans deux surfaces  
réciproques; rela- \*\*lions nouvelles entre les rayons do courbure des deux  
surfaces, p. a3. ■ ‘ Ligne ou surface réciproque d'une circonférence ou  
d'uue sphère : ié quand le point~origine appartient à la circonférence, ou à  
là sphère; quand le point~ ♦ ' origine est quelconque, p. a4» • \* Nouvelles  
définitions; relations entre une figure sphérique et sa projection \*  
stéréographique, p. a4» » ^ IL — ArPLICXTIOW DES PIU?<CIPg8  
PaÉCéPEî<T8 A PIVBRSES FROPOSITIOSS : DE CËQMÉTRIE PLAXE.  
Transformation des propriétés descriptires des figures planes conpoêéeà de /  
lignes droites ou circulaires , p. gfi. \* . Transformation des propriétés  
métriques des mêmes ligures, p. 29. § 111. — ArPUeXTIOX DES MEMES  
PnmCJPES A LA TRIOONOMÉTaiE SPflEUioLE. Énoncé de diverses  
propriétés des triangles sphériques. Observation sur les théorèmes de  
géométrie plane qui en résultent, p» 3o. Démonstration du théorème de  
Leiell. — Énoncé d\*un théorème de M. Steiner. — Construction de Texcès  
sphérique , d après Oudermann , p.3i. Scol'(c> — Relations outre les angles  
d\*iin triangle sphérique ABC et du triangle rectiligne abc dont les sommets  
sont les projections stéréographiques des sommets du premier, p. 33. ^  
Établissement des diverses formules de la trigonométrie spliéwriqur , p. 3/;.  
0. Relations entre les côtés du triangle sphériquo ABC et ceux du triangle  
rectiligne p, 3.^|. ^ . 1. cosa = COS& cosc -é- sinfe sioc cosA.  
(Démonstraüou,) , p. 3/|. sinB sin& ftinC ( Démonstration. ) y p, 35. 3» cota  
sin A = cos& cosC -+■ sinC cot A , p. 35. 4. cosA =:~ cosB cosC •+■ sin  
15 sinC cosa , p« 35. 5. Démonstration directe des formules de Delambic p.  
35. ■Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 22.39% accurate

TABLE DES MATIÈRES. XI («. Démonstration directe des analogies de Nc2)cr, p. 37. ' " \* ^ 7 « Expressions des sinus et cosinus du demi-excès sphérique , oblongues directes, p. 38. S. Expression de la tangente du quart de l'excès sphérique , p. Sq. 9. Résolution des triangles sphériques dont les côtés sont très-petits par rapport au rayon de la sphère. — Théorème analogue à celui de Legendre, p. Sq. Établissement de quelques formules relatives aux quadrilatères sphériques, SECONDE PARTIE. DES MÉTHODES RELATIVES À LA GÉOMÉTRIE INFINIMENT ÉLÉMENTAIRE. CHAPITRE PREMIER. De la tangente. § 1<sup>er</sup>. — État ou problème des tangentes dans la géométrie des anciens. Définition de la tangente d'après Euclide. — Remarques sur l'usage de la tangente dans la définition de la spirale d'Archimède, p. 4<sup>re</sup>. De la tangente à la courbe décrite par un point dont on connaît la loi des distances à deux foyers, p. 51. § 11. — Méthode de Roberval. Définition de Roberval sur la description générale des courbes par le mouvement d'un point. — Solution du problème des tangentes par la composition des différentielles vitesses qui animent le point. Application aux cycloïdes et aux roulettes. p. 53. Usage de la méthode précédente. ~ Applications vicieuses qui en ont été faites, quoique sans erreur définitive, à des exemples auxquels elle doit rester étrangère, p. 54<sup>re</sup>. — Des tangentes aux courbes données par les différents points d'une FIGURE PLANE DONNÉE QUI SE MEUT DANS SON PLAN. Définition des roulettes. Méthode de Descartes pour la description des tangentes à ces courbes. — Expression de l'élément rectiligne, ou élémentaire, de la courbe, qui résulte de l'usage de cette méthode, p. 55. Théorie des courbes engendrées de rotation, p. 67. Usage de la théorie précédente dans le problème des tangentes. — ■ Examen de trois cas qui peuvent se présenter. — Applications, p. 60. ^ ^ . Digilized by Google



The text on this page is estimated to be only 16.49% accurate

XII TABLK UES .>IATIÈIIKS. ^ IV. — DfcHÿlTIQX Itt: LA TA!  
 <UEMTB i)'At»BfcS l.hü utoMKTRK» MOHEHXKS. — Applu:\*tio?is.  
 Divcr^pâ &olutiüUit du prubUnnc don taii(;eiites , d'après Oescui'lciï,  
 l'i'rmal ut Harrow. ^ Dorniùrc deliiiîtion do la tangoiïlo. — Foriniïles , p, di  
 . Api^icalions : i. C6fiâlruirc 1» tan('cnlu à la courlie ducriic par un poiïU  
 dont mi cunïiaH la loi des distanoos à plusiur& foyers , p. a. Un poly^jone  
 funiculairo plan, aux sommets duquel sont placés des points niutériols de  
 masses données, su mouvant dans son plan sous raction d'une force qui est  
 dirq^ée suivant le dernier cdte du poly|>onu; construire les taii['eii(es aux  
 couHk's décrites par ses diQfércnU sommets, p. (Î7. CBAPTTRE JJ. Be»  
 enveloppes. \* ♦ \$ 1\*^^. ÉWOXCC rRODLÊJHK ÜE.XtRAL I>KS  
 EXVJSi.OPrEs. ' Application de la méthode par les solidrs auxiliaires à la  
 recherche do IVqiiation de la courbe envelopi>e. — Théorème fournissant  
 le point où une liçnc plane, de forme et de grandeur invariables,, qui se  
 meut dans son plan, touche • son enveloppe , p. 6i». ^ . S II. ~ ÉTiPt; PC  
 riVOBLf.MK DANS LE CAS" SPKtl.VL OU LES LIOES PONT OS  
 CUEKtHB L\*EXVELOPPK SONT PES UOXEH ÜHüITtS. Historique. —  
 Méthode par la comparaison des vitesses angulaires , scrvaiu à déterminer  
 le point où la droite mobile touche son enveloppe, dans chacun dos deux  
 cas qui peuvent se présenter , p. 7 1 . Applications : 1. L'ctivloppe du  
 rayon du cercle^générateuf d\*iïine épicycluidc , qui aboutit au point  
 décrivant, est une epicycloïde, p. 73. 2. 1.a développée d'une épicyclüïdo est  
 une épicycloïde seniMablo, p.17'1. ^ 3. Problème et formule des caustiques  
 p&i; refraction , p. 7d. ^ 4. Délinition et conslruction des caustiques  
 .secondaires d'après M. Quclelet. — Construction des ovales de Descartes  
 et de leurs tfliq\*ciïles , p, 5. Expression du rayon de courbure des roulettes.  
 — Généralisation , p. 80. 6. Construire par points la développée de l'ellipse  
 plane , p. 83. 7. ('.onstnilre par points la développée de rcllipse sphérique, p.  
 84. 8. ('onstriiïre par points renvloppe du côté libre d\*nn poly^mne de  
 périmètre constant, p. 87. ^ CHAPITRE in. Bu cercle osculateur. l«^ "  
 Délinition». — lheuré-nic ;'énci'ai de Muclautin lournissunl la corde du i-  
 cnle Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 18.20% accurate

TABL. K HKS MATI fcnRX XIII osrtiiafour i\*ri un point tl'uur  
 ooiirhc algobriqm\*. — Applioniions de re Üiéorème ;i la cortHlrucliou dit  
 rrrrb» osnilatoup dntta coniques,, quelles que soient lc\*s lioiim'cs par  
 lrs«pu>IU«s rc» ouiM'bcs se (roiivcnl üéünief». — l'SAfre auxiliaire du  
 (béorème sefinientaim de \cwton, p. 8ii. lil, Melhudo du dulonunliuti  
 oiiiployéo par M. Ch. I>upin pour la dc'termination du cercle osculateur  
 datt& l'ellipse, p^ 94\* Pretnicr théorème. Comparaison des rayons des  
 cercles osculnlours de deux Courbes ayant une lan(îcñte commune et dont  
 les ordonnées, comptées à partir delà tangente, sont proportionnelles , p.94<  
 \* Second théorème. — Tranfornalion d'une courbe en une autre osculatrice  
 do la première en un point dohné, p. 9.4. \* Application : îloyon du ceréle  
 osculatciir do rollipsc on un point qnciconquo. • \* . ^ m. Théorème génér ni.  
 — (^om]>araison des cercios osrtilaleurs do deux courbes 011 fies points  
 coriospomlants à une même ahscis>o, quand les ordonnées eorrespoiw  
 dnntes des deux conibos sont proportionnelles, p. ph. AppUention Hayon du  
 cercle oscillateur de l'ellipse. — Théorème do MacC.iilla;»h , p. 97- | ^  
 Détinilion de la qualité de la courbure d'unc ligne, on un de scs points  
 d'après Newton. — Tlicorr'mc fournissant une expression géométrique de  
 ce rapport , et la s<diiti(>n d un pi\*oblème proposé par Carnot. — Solution  
 directe de ce ' problème, p. 98. \ ^CHAPITRE XV. Des maxima et minima  
 absolus. ^ Kr ^ || la\* OBANDKI'll M XIUt'M or PAnUi DFS  
 «.RANUErUS DF.TF.RMtSlTES. Obsm'vntipn de Kepler sur les variations  
 d'une grandeur dans le voisinoge de son maximum ou luinimuii, p. io3.  
 Théorème de Fermât. — Si />, , sont deux étals infiniincnl voisins d'une  
 grandeur variable A , et comprenant entre eux le maxinuui ou le minimum  
 a de ('elle grandeur, les'valeurs extrêmes /i,,, a, peuvent être regardées  
 comme rigoureusement égales entre elles , p. io3. Applications . t. Droite  
 minimum menée par un point donné dans un angle donné , p. 104. a.  
 Rectangle maximum inscrit dans un segment de courbe (Newton), p. io5. 3.  
 Problème du plus petit créjuscule. — Historique. — SoTution, p. loC. ^ 4-  
 Polygones à aire maximum ( ou minimum) inscrits ( ou circonscrits) à une  
 courbe donnée. — Théorèmes généraux; applications au cercle, a rdlipse, p.  
 108. 5. Polygones à périmètre niaxiiniim (on minimum) inscrits (ou  
 circoiiscriu) Digitized by Google

**The text on this page is estimated to be only 25.91% accurate**

XIV TABLE DES MATIÈRES. h nnc courbe ilonnéc. Théorèmes (généraux. — Applications au cercle et à rclUpae; théorèmes de M.r.hasles sur les ellipses homofocales, p. 109. § II. — De la grandeur maximum ou minimum i>ariii des grandeurs indéterminées. Nouveaux problèmca sur les maxima et minima , leur définition d'après Jean Bernoulli et Euler. — Méthode de Maclaurin pour leur résolution ; principe fondamentul de cette méthode; manière générale de rappliquer; il en résulte la définition de chacun des éléments de la grandeur maximum ou minimum que Ton cherche ; sa comparaison avec la méthode analytique, p. iia. Applications : ^ 1. Lcmme général , p. 1 1 3. 2. Problème de Format sur les routes de la lumière, p. ii43. Problème de la brachistochrone dans le cas ordinaire de la pesanteur, p. i i5. /|. Problème de la brachistochrone dans le cas d'un centre dtUrant placé à une distance finie. — Examen du cas particulier où la courbe cherchée est une épi\* rycloïde, p. 117. 5. Problème. — Trouver la courbe plane passant par deux points donnés^ et engendrant une aire minimum par sa rotation autour d'un axe situé dans son plan, p. 119. CHAPmUI V. Oe\* maxima et minima relatifs. Définition du problème général qui consiste à déterrainer parmi toutes les courbes pôur lesquelles la fonction ♦ de la courbe a une valeur constante , celle pour laquelle la fonction F de la courbe a une valeur maximum ou minimum. Énoncé général do la méthode qui ooiisisle à chercher la courbe pour haqielle la fonction mF de ln courbe acquiert une ^Icur maximum ou minimum, m et n étant des nombres indéterminés; remarque sur la détermination iillérteure de ces nombres , p. 120. > Applications : \* 1 . Brachistochrone parmi toutes les courbes d'une longueur donnée , la pesanteur s'exerçant par des parallèles, p. 121. ' • 2. Brachistochrone parmi toutes les courbes d'une longueur donnée , la pesanteur s'exerçant par des droites concourantes , p. 122. . 3. Parmi toutes les lignes planes d'une longueur donnée, réunissant deux points donnés, trouver celle qui, par sa rotation autour d'un axe situé dans le même plan , engendre une aire minimum , p. i23. 4. De la ligne qui renferme la plus grande aire parmi toutes les lignes d'égale longueur, p. i23. CHAPITRE VZ. De la méthode par déeoxnposition en éléments correspondants. Enoncé des deux problèmes généraux auxquels s'applique cette méthode.— Digitized by CoogLe

à une courbe donnée. — Théorèmes généraux. — Applications au cercle et à l'ellipse; théorèmes de M. Chasles sur les ellipses homofocales, p. 109.

§ II. — DE LA GRANDEUR MAXIMUM OU MINIMUM PARMI DES GRANDEURS INDÉTERMINÉES.

Nouveaux problèmes sur les maxima et minima, leur définition d'après Jean Bernoulli et Euler. — Méthode de Maclaurin pour leur résolution; principe fondamental de cette méthode; manière générale de l'appliquer; il en résulte la définition de chacun des éléments de la grandeur maximum ou minimum que l'on cherche; sa comparaison avec la méthode analytique, p. 112.

Applications :

1. Lemme général, p. 113.
2. Problème de Fermat sur les routes de la lumière, p. 114.
3. Problème de la brachistochrone dans le cas ordinaire de la pesanteur, p. 115.
4. Problème de la brachistochrone dans le cas d'un centre attirant placé à une distance finie. — Examen du cas particulier où la courbe cherchée est une épicycloïde, p. 117.
5. Problème. — Trouver la courbe plane passant par deux points donnés, et engendrant une aire minimum par sa rotation autour d'un axe situé dans son plan, p. 119.

CHAPITRE V.

Des maxima et minima relatifs.

Définition du problème général qui consiste à déterminer parmi toutes les courbes pour lesquelles la fonction  $\Phi$  de la courbe a une valeur constante, celle pour laquelle la fonction  $F$  de la courbe a une valeur maximum ou minimum.

Énoncé général de la méthode qui consiste à chercher la courbe pour laquelle la fonction  $mF + n\Phi$  de la courbe acquiert une valeur maximum ou minimum,  $m$  et  $n$  étant des nombres indéterminés; remarque sur la détermination ultérieure de ces nombres, p. 120.

Applications :

1. Brachistochrone parmi toutes les courbes d'une longueur donnée, la pesanteur s'exerçant par des parallèles, p. 121.
2. Brachistochrone parmi toutes les courbes d'une longueur donnée, la pesanteur s'exerçant par des droites concourantes, p. 122.
3. Parmi toutes les lignes planes d'une longueur donnée, réunissant deux points donnés, trouver celle qui, par sa rotation autour d'un axe situé dans le même plan, engendre une aire minimum, p. 123.
4. De la ligne qui renferme la plus grande aire parmi toutes les lignes d'égale longueur, p. 123.

CHAPITRE VI.

De la méthode par décomposition en éléments correspondants.

Énoncé des deux problèmes généraux auxquels s'applique cette méthode. —

**The text on this page is estimated to be only 25.68% accurate**

TABLE UES MATIÈRES. XV Elle remplit eu ^^éométric le rôle réservé üftns l'analyse au calcul intégral ^ ot «loi( fournir à celiti"ci le principe de ses transformations, p. \ 7l\.

Applications: I. Attraction d'une sphère sur un point extérieur (Newton), p. ia5. 'i. Attraction d'un cylindre indéfini sur un point extérieur, p. ia8. 3. Théorie géométrique des courbes tautochrones , d'après Newton. — Principo fundamental. ^ Applications : au cas ordiiiiairo de la pesanteur; au cas d'un contre attirant situé à une distance finie; cas spécial de Pépicycloïde , p. lafj. f\.

Problème de Viviani sur la voûte carrable. — Solutions en nombre infini , d'après Leibnitz et Jean Bernoulli. — Identité de l'une des solutions fournies par CO dernier avec celle de Viviani. — Observation de Rossut sur une solution particulière du problème de la voûte cubable d'Euler, p. i3a. 5. Rectification des épicycloïdes allongées ou raccourcies, d'après Pascal , p. i35, 6. Seconde solution du même problème. — Formules, i36. 7. Démonstration nouvelle du théorème de Fagnano , p. iSg. 8. Théorèmes de M. Chasles sur les arcs d'ellipse à différence rectifiable, 9. Construction géométrique des rayons de deux cercles dont les circonférenres comprennent entre elles !e périmètre d'une ellipse donnée. — Construction semblable s'appliquant à la détermination des limites inférieure et supérieure d'un arc quelconque d'cllipsc. — Enoncé d'un théorème de Bernoulli (.Ic.in ) fournissant une approximation plus rapiffe , mais s'np)»liqiiant seulement à réévaluation du périmètre total de l'ellipse, p. 1^7, \ bigitized by Coogle

Elle remplit en géométrie le rôle réservé dans l'analyse au calcul intégral, et doit fournir à celui-ci le principe de ses transformations, p. 124.

Applications :

1. Attraction d'une sphère sur un point extérieur (Newton), p. 125.
  2. Attraction d'un cylindre indéfini sur un point extérieur, p. 128.
  3. Théorie géométrique des courbes tautochrones, d'après Newton. — Principe fondamental. — Applications : 1<sup>o</sup> au cas ordinaire de la pesanteur ; 2<sup>o</sup> au cas d'un centre attirant situé à une distance finie ; cas spécial de l'épicycloïde, p. 129.
  4. Problème de Viviani sur la voûte carrable. — Solutions en nombre infini, d'après Leibnitz et Jean Bernoulli. — Identité de l'une des solutions fournies par ce dernier avec celle de Viviani. — Observation de Bossut sur une solution particulière du problème de la voûte cubable d'Euler, p. 132.
  5. Rectification des épicycloïdes allongées ou raccourcies, d'après Pascal, p. 135.
  6. Seconde solution du même problème. — Formules, 136.
  7. Démonstration nouvelle du théorème de Fagnano, p. 139.
  8. Théorèmes de M. Chasles sur les arcs d'ellipse à différence rectifiable, p. 141.
  9. Construction géométrique des rayons de deux cercles dont les circonférences comprennent entre elles le périmètre d'une ellipse donnée. — Construction semblable s'appliquant à la détermination des limites inférieure et supérieure d'un arc quelconque d'ellipse. — Énoncé d'un théorème de Bernoulli (Jean) fournissant une approximation plus rapide, mais s'appliquant seulement à l'évaluation du périmètre total de l'ellipse, p. 142.
-







DES MÉTHODES EN GÉOMÉTRIE. PREMIERE PARTIE.  
DES MÉTHODES RELATIVES A LA GÉOMÉ DES FIGURES FINIES.  
CHAPITRE PREMIER. Analyse de différentes méthodes que l'on peut  
suivre dans la problèmes ou dans la démonstration des théorèmes de  
géométrie. 1. Réciproquement géométriques sur milieux pour classification des  
divers problèmes. — Vous pouvez employer pour résoudre les questions de  
géométrie. — Nous nous proposons, dans ce chapitre, de présenter une  
classification rationnelle des différentes méthodes que l'on emploie en  
géométrie pour la démonstration des vérités déjà acquises ou pour la  
solution des problèmes. Sans doute une pareille classification aura quelque  
chose d'arbitraire, et les méthodes auxquelles nous donnerons des  
dénominations différentes, en les regardant comme parfaitement distinctes,  
pourront avoir bien des traits de ressemblance. Toutefois, et malgré ce  
défaut inévitable, une classification aura cet avantage de définir d'une  
manière plus nette plusieurs des méthodes que peut suivre l'esprit dans ses  
efforts pour établir une vérité géométrique, et qu'il suit quelquefois  
confusément, en ne se rendant pas un compte exact des opérations  
auxquelles il se livre ; elle éclairera les routes que nous avons suivies pour  
l'établissement des vérités élémentaires ; et, donnant pour ainsi dire à  
chacune d'elles un numéro d'ordre, elle nous permettra de les aborder  
successivement, sans confusion, jusqu'à celle qui nous montrera d'une  
manière plus visible le but que nous voulons atteindre. Ainsi que le fait  
observer M. Lamé dans son excellent ouvrage : Examen des différentes  
méthodes employées pour résoudre les problèmes de géométrie, la  
multiplicité même des moyens (que l'on peut employer la géométrie pour  
arriver au but proposé, paraît d'abord devoir écarter les méthodes générales  
et laisser l'esprit incertain de la route qu'il doit choisir parmi toutes celles  
qui sont ouvertes devant lui. Digitized by Google

DES  
**MÉTHODES EN GÉOMÉTRIE.**

---

**PREMIÈRE PARTIE.**

DES MÉTHODES RELATIVES A LA GÉOMÉTRIE  
DES FIGURES FINIES.

**CHAPITRE PREMIER.**

**Analyse de différentes méthodes que l'on peut suivre dans la solution des problèmes ou dans la démonstration des théorèmes de géométrie.**



1. *Réflexions générales sur l'utilité d'une classification des divers procédés que l'on peut employer pour résoudre les questions de géométrie.*

— Nous nous proposons, dans ce chapitre, de présenter une classification rationnelle des différentes méthodes que l'on emploie en géométrie pour la démonstration des vérités déjà acquises ou pour la solution des problèmes.

Sans doute une pareille classification aura quelque chose d'arbitraire, et les méthodes auxquelles nous donnerons des dénominations différentes, en les regardant comme parfaitement distinctes, pourront avoir bien des points de ressemblance. Toutefois, et malgré ce défaut inévitable, une classification aura cet avantage de définir d'une manière plus nette plusieurs des méthodes que peut suivre l'esprit dans ses efforts pour établir une vérité géométrique, et qu'il suit quelquefois confusément, en ne se rendant pas un compte exact des opérations auxquelles il se livre : elle éclairera les routes que nous avons suivies pour l'établissement des vérités élémentaires ; et, donnant pour ainsi dire à chacune d'elles un numéro d'ordre, elle nous permettra de les aborder successivement, sans confusion, jusqu'à celle qui nous montrera d'une manière plus visible le but que nous voulons atteindre.

Ainsi que le fait observer M. Lamé dans son excellent ouvrage : *Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de géométrie*, la multiplicité même des moyens que peut employer la géométrie pour arriver au but proposé, paraît d'abord devoir écarter les méthodes générales et laisser l'esprit incertain de la route qu'il doit choisir parmi toutes celles qui sont ouvertes devant lui.

2 DES .MÉTHODES EN GÉOMÉTRIE. CoUc incertitudo , qui , en laissant de côté des hasards heureux , frappe de stérilité les recherches inhabiles, provient précisément de l'absence de méthodes nombreuses et nettement délinées parmi lesquelles on puisse, par des essais successifs , rechercher celle qui s'adapte le mieux à la question proposée. Nous allons commencer l'exposition de plusieurs de ces méthodes , en avertissant, ce qui sera sans doute superflu, que nous n'attachons pas une réalité absolue à la séparation ou classification que nous en avons faite , et que nous sommes surtout très-éloigné de croire avoir prévu toutes les voies que l'on peut suivre dans la recherche directe des vérités géométriques.

2. Dtmx méthodes générales. — Analyse et Synthèse. — Les moyens si variés (pour lesquels on peut employer le mot d'établir) une proposition de géométrie peuvent tous se rattacher à deux méthodes principales : la méthode par analyse et la méthode par synthèse.

1°. Une proposition sera démontrée par la méthode analytique si , en prenant pour point de départ les relations données, explicitement ou implicitement, entre les éléments que l'on considère, on parvient, par un dénombrement complet de toutes ces relations, ou seulement par un choix intelligent des relations utiles et leur transformation , à faire voir qu'elles entraînent nécessairement les relations affirmées par la proposition.

2°. La synthèse peut arriver au même but par deux voies distinctes : Soit en excluant entre les éléments considérés toutes relations différentes de celles affirmées par la proposition ( voir ci-après la méthode par la réduction à l'absurde ) ; Soit en admettant les relations à démontrer, les prenant pour point de départ, et faisant voir que, par un enchaînement mutuel, elles entraînent des relations comprises dans les relations données. Il est peut-être inutile d'ajouter que l'on ne saurait parvenir à la solution d'un problème quelconque que par une suite de raisonnements dépendant essentiellement de la méthode analytique , la synthèse pouvant intervenir seulement dans la démonstration de la solution à laquelle on est parvenu. (Examen des différentes méthodes, pages 9 et 10.)

Nous allons passer maintenant à l'exposition de plusieurs méthodes particulières , moins vastes que les deux méthodes générales que nous avons dû signaler, et par cela même plus utiles , et dont chacune devra être regardée comme s'appliquant plus spécialement à une certaine classe déterminée de questions , quoique la solution d'un problème pris au hasard puisse exiger l'intervention simultanée de plusieurs d'entre elles. ■

3. PREMIÈRE MÉTHODE. — Par

substitutions successives. — Dans cette méthode , on fait dépendre la solution de la question proposée d'une question plus simple, celle-ci d'une troisième, etc., jusqu'à ce que l'on arrive enfin à un dernier problème dont la solution soit évidente ou simplement connue. Cette méthode intervient dans la solution de presque tous les problèmes Digitized by Google

Cette incertitude, qui, en laissant de côté des hasards heureux, frappe de stérilité les recherches inhabiles, provient précisément de l'absence de méthodes nombreuses et nettement définies parmi lesquelles on puisse, par des essais successifs, rechercher celle qui s'adapte le mieux à la question proposée.

Nous allons commencer l'exposition de plusieurs de ces méthodes, en avertissant, ce qui sera sans doute superflu, que nous n'attachons pas une réalité absolue à la séparation ou classification que nous en avons faite, et que nous sommes surtout très-éloigné de croire avoir prévu toutes les voies que l'on peut suivre dans la recherche directe des vérités géométriques.

**2. Deux méthodes générales. — Analyse et Synthèse.** — Les moyens si variés que l'on peut employer pour établir une proposition de géométrie peuvent tous se rattacher à deux méthodes principales : la méthode par analyse et la méthode par synthèse.

1°. Une proposition sera démontrée par la méthode analytique si, en prenant pour point de départ les relations données, *explicitement* ou *implicitement*, entre les éléments que l'on considère, on parvient, par un dénombrement complet de toutes ces relations, ou seulement par un choix intelligent des relations *utiles* et leur transformation, à faire voir qu'elles entraînent nécessairement les relations affirmées par la proposition.

2°. La synthèse peut arriver au même but par deux voies distinctes :  
*Soit* en excluant entre les éléments considérés toutes relations différentes de celles affirmées par la proposition (*Voir* ci-après la méthode par la réduction à l'absurde);

*Soit* en admettant les relations à démontrer, les prenant pour point de départ, et faisant voir que, par un enchaînement *mutuel*, elles entraînent des relations comprises dans les relations données.

Il est peut-être inutile d'ajouter que l'on ne saurait parvenir à la solution d'un problème quelconque que par une suite de raisonnements dépendant essentiellement de la méthode analytique, la synthèse pouvant intervenir *seulement* dans la démonstration de la solution à laquelle on est parvenu. (*Examen des différentes méthodes*, pages 9 et 10.)

Nous allons passer maintenant à l'exposition de plusieurs méthodes particulières, moins vastes que les deux méthodes générales que nous avons dû signaler, et par cela même plus utiles, et dont chacune devra être regardée comme s'appliquant plus spécialement à une certaine classe déterminée de questions, quoique la solution d'un problème pris au hasard puisse exiger l'intervention simultanée de plusieurs d'entre elles.

**3. PREMIÈRE MÉTHODE. — Par substitutions successives.** — Dans cette méthode, on fait dépendre la solution de la question proposée d'une question plus simple, celle-ci d'une troisième, etc., jusqu'à ce que l'on arrive enfin à un dernier problème dont la solution soit évidente ou simplement connue.

Cette méthode intervient dans la solution de presque tous les problèmes

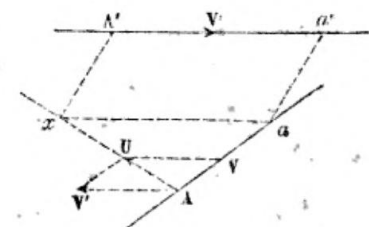
. PREMIÈRE PARTIE. 3 de géométrie, en se combinant avec les différentes méthodes que nous avons encore à examiner; et la marche qu'elle suit est tout à fait comparable à celle de l'analyse, dans la résolution des équations par les transformations successives qu'elle leur fait subir. [Examen des différentes méthodes, page 12.) ' ' APPLICATIONS. e\* -> — Probi.kme I. — Deux mobiles se mouvant uniformément et en ligne droite, on propose de construire les positions où ils se trouvent à l'instant où la distance qui les sépare est minimum. Solution. — Observons d'abord que si, dès l'origine du mouvement, on attribue aux deux mobiles A, A' deux nouvelles vitesses composantes égales, parallèles et de même sens, dans la nouvelle marche simultanée des deux mobiles, la droite qui, à l'époque quelconque t, mesure leur distance, sera égale (et parallèle) à la droite MM' qui eût mesuré leur distance à la même époque dans leur mouvement primitif : ceci résulte immédiatement de la composition des vitesses. Cela posé, communiquons à chacun des deux mobiles A et A', une vitesse égale et contraire à celle de A'; ce dernier restera en repos. Quant au mobile A, sa vitesse primitive et si nous menons AV' égale, parallèle et de sens contraire à la droite qui représentait la vitesse de A' dans le mouvement primitif, la diagonale AU (lu parallélogramme construit sur AV, AV' représentera la vitesse du mobile A dans son nouveau mouvement. D'ailleurs, d'après la remarque qui a été faite [du haut, la question proposée sera ramenée à la suivante ; Étant donné un point fixe A' et un point A qui décrit une droite AU, construire, la position du point mobile pour laquelle sa distance au point fixe est minimum. Or on obtient immédiatement la réponse à cette dernière question en abaissant du point A' une perpendiculaire sur la droite AU; et si l'on veut passer de la construction du second problème à la construction du premier, on mènera une droite parallèle à A'V', et rencontrant AV en K; et la droite AK, égale et parallèle à la distance minimum des deux mobiles A et A' dans leur mouvement primitif. Observation. — On trouve dans la Correspondance sur l'École Polytechnique, tome II, page 22, une solution analytique de ce problème, par Puissant. ' . . Problème II. — Les deux premiers sommets d'un triangle ABC glissant sur deux droites fixes Ox, Oy, trouver la nature du lieu décrit par le troisième sommet. .Solution. — Prenant la figure mobile dans l'une quelconque de ses positions

de géométrie, en se combinant avec les différentes méthodes que nous avons encore à examiner; et la marche qu'elle suit est tout à fait comparable à celle de l'analyse, dans la résolution des équations par les transformations successives qu'elle leur fait subir. (*Examen des différentes méthodes*, page 12.)

## APPLICATIONS.

**PROBLÈME I.** — *Deux mobiles se mouvant uniformément et en ligne droite, on propose de construire les positions occupées par ces mobiles à l'instant où la distance qui les sépare est minimum.*

*Solution.* — Observons d'abord que si, dès l'origine du mouvement, on attribue aux deux mobiles A, A' deux nouvelles vitesses composantes égales, parallèles et de même sens, dans la nouvelle marche simultanée des deux mobiles, la droite  $mm'$  qui, à l'époque quelconque  $t$ , mesure leur distance, sera égale (et parallèle) à la droite  $MM'$  qui eût mesuré leur distance à la même époque dans leur mouvement primitif; ceci résulte immédiatement de la composition des vitesses. Cela posé, communiquons à chacun des deux mobiles A et A', une vitesse égale et contraire à celle de A'; ce dernier restera en repos. Quant au mobile A, si AV représente sa vitesse primitive et si nous menons AV' égale, parallèle et de sens contraire à la droite qui représentait la vitesse de A' dans le mouvement primitif, la diagonale AU du parallélogramme construit sur AV, AV' représentera la vitesse du mobile A dans son nouveau mouvement. D'ailleurs, d'après la remarque qui a été faite plus haut, la question proposée sera ramenée à la suivante :



Étant donné un point fixe A' et un point A qui décrit une droite AU, construire la position du point mobile pour laquelle sa distance au point fixe est minimum.

Or on obtient immédiatement la réponse à cette dernière question en abaissant du point A' une perpendiculaire A'x sur la droite AU; et si l'on veut passer de la construction du second problème à la construction du premier, on mènera xa parallèle à A'V', et rencontrant AV en a; et la droite aa', égale et parallèle à xA', sera la distance minimum des deux mobiles A et A' dans leur mouvement primitif.

*Observation.* — On trouve dans la *Correspondance sur l'École Polytechnique*, tome II, page 22, une solution analytique de ce problème, par Puissant.

**PROBLÈME II.** — *Les deux premiers sommets d'un triangle ABC glissant sur deux droites fixes Ox, Oy, trouver la nature du lieu décrit par le troisième sommet.*

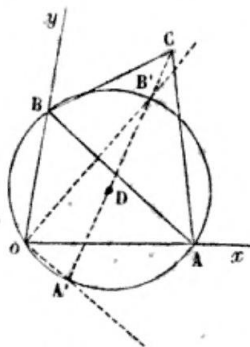
*Solution.* — Prenant la figure mobile dans l'une quelconque de ses posi-

4 DES MÉTHODES EN GÉOMÉTRIE. Faisons, construisons la circonférence  $OAB$ , joignons son centre  $D$  au sommet libre  $C$  par une droite qui coupe la circonférence en  $A'$ ,  $B'$ , et menons les droites indéfinies  $OA'$ ,  $OB'$ . Si l'on remarque que, le triangle  $ABC$  étant donné, ainsi que l'angle  $AOB$ , la grandeur de la circonférence  $OAB$  et la position de son centre  $D$ , par rapport au triangle  $ABC$ , sont déterminées, on pourra concevoir que cette circonférence participe au mouvement du triangle, et l'on verra que, dans le mouvement commun résultant, les différents segments de la droite  $A'DB'C$  conservent des grandeurs invariables. Or, il est facile d'établir que les droites indéfinies  $OA'$ ,  $OB'$  sont déterminées et demeurent immobiles dans le mouvement général que nous venons de substituer au premier. En effet, les angles de  $OA$  avec  $OB$ , de  $OA'$  avec  $OB'$ , et de  $CD$  avec  $AB$  demeurant constants, les sommes arc  $BB' +$  arc  $AB'$ , arc  $AB' -$  arc  $AA'$ , arc  $AA' -$  arc  $BB'$  demeurent aussi constantes : donc les arcs  $BB'$ ,  $AB'$ ,  $AA'$  sont constants, et les directions  $OA'$ ,  $OB'$  sont déterminées. Il résulte de là que le mouvement du point  $C$ , considéré comme sommet libre du triangle  $AUC$ , est le même que le mouvement du point  $C$  considéré comme appartenant à la droite  $A'B'C$  dont les points  $A'$  et  $B'$  glissent sur les deux axes rectangulaires  $OA'$ ,  $OB'$ ; et le problème est ramené au suivant, dont la solution est connue : Déterminer la nature du lieu décrit par un point sur deux axes rectangulaires, trouver la nature du lieu décrit par un point sur une droite. Ce lieu primitif est donc une ellipse ayant pour centre le point  $O$ .

4. SIXIÈME MÉTHODE. — Par construction. — Cette méthode consiste à substituer à la définition en langage ordinaire de certain élément d'une figure une construction géométrique équivalente qui mettra souvent en lumière des relations utiles à la solution de la question proposée. Il pourra même arriver que cette construction modifiée laisse subsister les mêmes relations, et la méthode actuelle fournira alors, en même temps que la réponse à la question proposée, la solution d'une question nouvelle. A cette méthode se rattache encore l'emploi des constructions auxiliaires d'une si grande importance dans la solution des questions de géométrie, mais pour lesquelles il est presque impossible d'assigner des règles générales. On peut toutefois indiquer une de ces constructions qui trouve son application dans beaucoup de cas, et qui consiste à fixer la position des points, connus ou inconnus, par rapport à l'ensemble de la figure, en menant par chacun de ces points des parallèles à



deux droites de la figure terminées à ces droites. D'ailleurs la méthode actuelle ne doit pas être regardée comme une méthode particulière , indépendante de celles que nous avons déjà examinées ; ' mais seulement comme une méthode de détail , destinée à prêter son appui à toutes les autres. Digilized by Google



tions, construisons la circonférence OAB, joignons son centre D au sommet libre C par une droite qui coupe la circonférence en A', B', et menons les droites indéfinies OA', OB'.

Si l'on remarque que, le triangle ABC étant donné, ainsi que l'angle  $\gamma O x$ , la grandeur de la circonférence OAB et la position de son centre D, par rapport au triangle ABC, sont *déterminées*, on pourra concevoir que cette circonférence participe au mouvement du triangle, et l'on verra que, dans le mouvement commun résultant, les différents seg-

ments de la droite A'DB'C conservent des grandeurs invariables.

Or, il est facile d'établir que les droites indéfinies OA', OB' sont *déterminées* et demeurent immobiles dans le mouvement général que nous venons de substituer au premier. En effet, les angles de OA avec OB, de OA' avec OB', et de CD avec AB demeurant constants, les sommes arc BB' + arc AB', arc AB' + arc AA', arc AA' + arc BB' demeurent aussi constantes : donc les arcs BB', AB', AA' sont constants, et les directions OA', OB' sont *déterminées*.

Il résulte de là que le mouvement du point C, considéré comme sommet libre du triangle ABC, est le même que le mouvement du point C considéré comme appartenant à la droite A'B'C dont les points A' et B' glissent sur les deux axes rectangulaires OA', OB'; et le problème est ramené au suivant, dont la solution est connue :

*Deux points d'une droite glissant sur deux axes rectangulaires, trouver la nature du lieu décrit par un troisième point de cette droite.*

Le lieu primitif est donc une ellipse ayant pour centre le point O.

**4. DEUXIÈME MÉTHODE.** — *Par construction.* — Cette méthode consiste à substituer à la définition en langage ordinaire de certain élément d'une figure une construction géométrique équivalente qui mettra souvent en lumière des relations utiles à la solution de la question proposée. Il pourra même arriver que cette construction modifiée laisse subsister les mêmes relations, et la méthode actuelle fournira alors, en même temps que la réponse à la question proposée, la solution d'une question nouvelle.

A cette méthode se rattache encore l'emploi des constructions auxiliaires d'une si grande importance dans la solution des questions de géométrie, mais pour le choix desquelles il est presque impossible d'assigner des règles générales. On peut toutefois indiquer une de ces constructions qui trouve son application dans beaucoup de cas, et qui consiste à fixer la position des points, connus ou inconnus, par rapport à l'ensemble de la figure, en menant par chacun de ces points des parallèles à deux droites de la figure terminées à ces droites.

D'ailleurs la méthode actuelle ne doit pas être regardée comme une méthode particulière, indépendante de celles que nous avons déjà examinées ; mais seulement comme une méthode de détail, destinée à prêter son appui

PREMIÈRE PARTIE. 5 APPLICATIONS. Première question. —

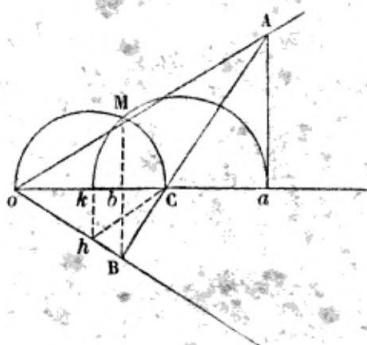
Problème. — Par un point  $C$ , situé sur la bissectrice (d'un angle  $O$ ), on mène une transversale coupant en  $A, B$ , les côtés de l'angle, et par les points  $A, B$  on abaisse, sur la bissectrice  $OC$ , les perpendiculaires  $AA', BB'$ ; prenant le milieu  $b$  de  $OC$ , si la droite  $ab$  comme diamètre, on construit une demi-circonférence qui est rencontrée en  $M$  par la droite  $Bb'$ ; et l'on demande le lieu géométrique des points  $M$ . Solution. — La construction fournit immédiatement la relation  $ab = ab' \cdot kb$ . Cela posé, on a («) Or, à la définition du point  $k$ , d'après laquelle ce point est le milieu de la droite  $CO$ , nous pouvons facilement substituer une construction géométrique. Car, si l'on mène  $CA$  parallèle au côté  $AO$  et terminée au côté  $BO$ , et que l'on abaisse du point  $h$  une perpendiculaire sur la bissectrice, le pied de cette perpendiculaire sera le milieu de  $CO$ , et par suite coïncidera avec le point  $k$ .  $ai) = Ci$ .  $A? CB'$  et au moyen de la construction du point  $k$ , on trouve aussi  $BA = OA \cdot BO$ . Substituant ces valeurs de  $ab$  et de  $kb$  dans la relation (i), et observant qu'en vertu de la construction il vient enfin (1)  $BA \cdot BO = BA \cdot BC \cdot BA' \cdot CB' \cdot BO \cdot Mi = Ci \cdot OA$ . Ce qui fait voir que le lieu des points  $M$  est la circonférence décrite sur la droite  $OC$  comme diamètre. Scolie. — Les relations précédentes subsisteraient encore et conduiraient par suite au même résultat, si, la droite  $OC$  n'étant plus la bissectrice de l'angle  $O$ , le point  $k$  était toujours défini par la même construction, qui consiste à mener  $CA$  parallèle à  $OA$ , et à abaisser  $AA'$  perpendiculaire sur  $OC$ . Deuxième question. — Théorème. — Les quatre côtés d'un quadrilatère, pris trois à trois, forment quatre triangles : construisant le point de rencontre des hauteurs de chacun de ces triangles, on obtient quatre points qui sont en ligne droite. , Digitized by Google

## APPLICATIONS.

PREMIÈRE QUESTION. — PROBLÈME. — *Par un point C, situé sur la bissectrice d'un angle O, on mène une transversale coupant en A, B, les côtés de l'angle, et par les points A et B on abaisse, sur la bissectrice OC, les perpendiculaires Aa, Bb; prenant le point k milieu de OC, sur la droite ak comme diamètre, on construit une demi-circonférence qui est rencontrée en M par la droite Bb; et l'on demande le lieu géométrique des points M.*

*Solution.* — La construction fournit immédiatement la relation

$$(1) \quad \overline{Mb}^2 = ab \cdot kb.$$



Or, à la définition du point  $k$ , d'après laquelle ce point est le milieu de la droite CO, nous pouvons facilement substituer une construction géométrique. Car, si l'on mène Ch parallèle au côté AO et terminée au côté BO, et que l'on abaisse du point  $h$  une perpendiculaire sur la bissectrice, le pied de cette perpendiculaire sera le milieu de CO, et par suite coïncidera avec le point  $k$ .

Cela posé, on a

$$(a) \quad ab = Cb \cdot \frac{AB}{CB};$$

et au moyen de la construction du point  $k$ , on trouve aussi

$$(b) \quad kb = Ob \cdot \frac{Bh}{BO}.$$

Substituant ces valeurs de  $ab$  et de  $kb$  dans la relation (1), et observant qu'en vertu de la construction

$$\frac{BA}{BC} = \frac{BO}{Bh}, \text{ d'où } \frac{AB}{CB} \cdot \frac{Bh}{BO} = 1,$$

il vient enfin

$$(1) \quad \overline{Mb}^2 = Cb \cdot Ob.$$

Ce qui fait voir que le lieu des points M est la circonférence décrite sur la droite OC comme diamètre.

*Scolie.* — Les relations précédentes subsisteraient encore et conduiraient par suite au même résultat, si, la droite OC n'étant plus la bissectrice de l'angle O, le point  $k$  était toujours défini par la même construction, qui consiste à mener Ch parallèle à OA, et à abaisser hh perpendiculaire sur OC.

DEUXIÈME QUESTION. — THÉORÈME. — *Les quatre côtés d'un quadrilatère, pris trois à trois, forment quatre triangles: construisant le point de rencontre des hauteurs de chacun de ces triangles, on obtient quatre*

## 6 DES MÉTHODES EN GÉOMÉTRIE. Démonstration. —

Soient, par exemple,  $h, i, p$  les points de rencontre des hauteurs des triangles  $ABD, BCF, AGE$ , et cherchons à établir qu'ils sont en ligne droite. • Menons à cet effet la droite  $CL$  parallèle à  $BD$ , et construisons auxiliairement le point de rencontre des hauteurs du triangle  $ACL$ ; soit  $X$  ce point de rencontre. Appliquons donc, les pieds des hauteurs  $A, i$  sur la droite  $ABC$  des sommets  $D, L, E, F$ . — aperçoit immédiatement que les points  $A, i, X$  sont en ligne droite, ainsi que les points  $G, X$ ; et que les droites  $mk$  et  $C\alpha$  sont parallèles. Il suffira donc de démontrer que les points  $i, \alpha, p$  sont en ligne droite, d'établir Or les lignes  $km$  et  $Cn$  qui sont parallèles, les lignes  $kp$  et  $C/\wedge$  qui sont des segments d'une même droite, sont entre elles comme leurs projections sur la droite  $ABC$ ; on a donc les égalités suivantes : Il suffira donc d'établir l'égalité donc l'égalité à démontrer  $(.r')$  revient à la suivante qui résulte immédiatement de la construction,  $CL$  ayant été tracée parallèlement à  $BD$  ou  $FD$ . Donc l'égalité primitive  $(.r)$  est démontrée, et les trois points  $w, n, />$  sont en ligne droite, ce qui suffit pour la démonstration du théorème. S. TROISIÈME MÉTHODE. — Par duplication. — Cette méthode consiste à faire tourner une portion d'une figure autour d'une certaine droite, pour lui donner, par rapport à l'axe de rotation, une position



IIIIEMEKK PAITIE. 7 symétrique de celle <u'elle occupait  
 d'abord; oiwrafiion qu'on exprime plus simplement en langage ordinaire on  
 disant qu'on opère la duplication d'une portion de la figure primitive autour  
 do l'une des lignes do cette figure. Or, si la ligne autour de laquelle on a fait  
 la duplication a été convenablement choisie, il arrivera que. les éléments  
 linéaires ou angulaires que l'on avait à comparer ne seront pas altérés, et  
 que les relations qu'il fallait mettre en évidence dans la première figure  
 deviendront intuitives, ou au moins d'un plus facile accès, dans la seconde.  
 On pourra d'ailleurs, dans certains cas, avoir à opérer plusieurs duplications  
 successives autour de différents axes. ,iPPLIC.\TIO.\S. PnEMiÈaE  
 ovESTiox. — Problème. — Trouver le plus court chemin pour aller (P un  
 point à un autre, en passant par une droite donnée qui laisse à l'un des deux  
 points les deux points donnés. Solution. — Soit AB un chemin quelconque  
 réunissant les deux points A et B, en passant par un point M de la droite  
 Opérant la duplication autour de la droite AB- de la portion de la ligne qui  
 contient les droites issues du point A, le point A viendra en A', symétrique  
 de A par rapport à AB et le chemin AMB sera remplacé par le chemin égal  
 A'MB qui réunit le point déterminé A' au point B et qui traverse la droite  
 AB. Le chemin AMB sera donc minimum quand le chemin correspondant  
 A'MB sera minimum, c'est-à-dire quand la ligne A'MB sera droite. Le point  
 cherché M, auquel correspond le chemin minimum AMB, est donc  
 déterminé par l'intersection des droites A'B et AB-. Seconde question. —  
 Problème. — Etant donnés deux points A et B, situés du même côté (P  
 une droite AB, trouver sur celle-ci un point M tel, qu'en joignant AM et  
 BM, l'angle AMB soit double de l'angle BM\_). Solution. — Supposons le  
 problème résolu, et opérons la duplication autour de AB de la portion de la  
 figure AB qui contient BM; le point B viendra en B' symétrique de B par  
 rapport à AB- l'angle B'MA égal à B'MB sera donc la moitié de l'angle AMB;  
 donc si l'on prolonge AM suivant MC, la ligne B'M sera la bissectrice de  
 l'angle BMC ou «Mè, et le point B', sera également éloigné des deux côtés  
 de cet angle. Donc, si du point B' comme centre et avec un rayon égal à B'  
 A = B'B nous décrivons une circonférence, cette circonférence sera  
 tangente à la droite AB; donc, réciproquement, l'angle AMB sera double de l'angle BM\_

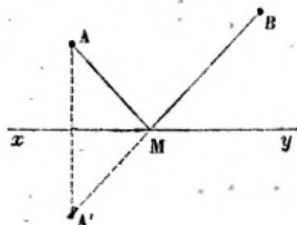
symétrique de celle qu'elle occupait d'abord; opération qu'on exprime plus simplement en langage ordinaire en disant qu'on opère la *duplication* d'une portion de la figure primitive autour de l'une des lignes de cette figure. Or, si la ligne autour de laquelle on a fait la duplication a été convenablement choisie, il arrivera que les éléments linéaires ou angulaires que l'on avait à comparer ne seront pas altérés, et que les relations qu'il fallait mettre en évidence dans la première figure deviendront intuitives, ou au moins d'un plus facile accès, dans la seconde.

On pourra d'ailleurs, dans certains cas, avoir à opérer plusieurs duplications successives autour de différents axes.

## APPLICATIONS.

**PREMIÈRE QUESTION. — PROBLÈME.** — *Trouver le plus court chemin pour aller d'un point à un autre, en passant par une droite donnée qui laisse d'un même côté les deux points donnés.*

*Solution.* — Soit  $AMB$  un chemin quelconque réunissant les deux points  $A$  et  $B$ , en passant par un point  $M$  de la droite  $xy$ .

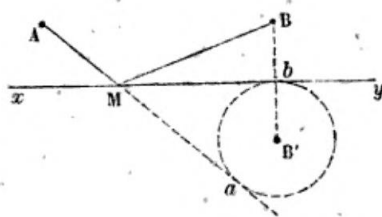


Opérant la duplication autour de la droite  $xy$  de la portion de la figure qui contient les droites issues du point  $A$ , le point  $A$  viendra en  $A'$ , symétrique de  $A$  par rapport à  $xy$ ; et le chemin  $AMB$  sera remplacé par le chemin égal  $A'MB$  qui réunit le point déterminé  $A'$  au point  $B$  et qui traverse la droite  $xy$ . Le che-

min  $AMB$  sera donc minimum quand le chemin correspondant  $A'MB$  sera minimum, c'est-à-dire quand la ligne  $A'MB$  sera droite. Le point cherché  $M$ , auquel correspond le chemin minimum  $AMB$ , est donc déterminé par l'intersection des droites  $A'B$  et  $xy$ .

**SECONDE QUESTION. — PROBLÈME.** — *Étant donnés deux points  $A$  et  $B$ , situés d'un même côté d'une droite  $xy$ , trouver sur celle-ci un point  $M$  tel, qu'en joignant  $AM$  et  $BM$ , l'angle  $AMx$  soit double de l'angle  $BMx$ .*

*Solution.* — Supposons le problème résolu, et opérons la duplication



autour de  $xy$  de la portion de la figure qui contient  $BM$ ; le point  $B$  viendra en  $B'$  symétrique de  $B$  par rapport à  $xy$ ; l'angle  $B'Mx$  égal à  $BMx$  sera donc la moitié de l'angle  $AMx$ ; donc si l'on prolonge  $AM$  suivant  $Ma$ , la ligne  $B'M$  sera la bissectrice de l'angle  $aMy$  ou  $aMb$ , et le point  $B'$  sera éga-

lement éloigné des deux côtés de cet angle. Donc, si du point  $B'$  comme centre et avec un rayon égal à  $B'b = \frac{1}{2} B'B$  nous décrivons une circonfé-



8 DES MÉTHODES ES UÉOMÉTHIE. quemenl, pour avoir la droite AM«, il suflira de mener du (loint A une tangente à la circonférence B', et le point M sera déterminé par l'intersection de cette tangente avec la droite u:r. Troisième question. — Théorème. — /xj foimc (les tUstams <riiii point quelconque rie la base /F un triangle isocèle aux deux côtés rie ce triangle est constante ^ quel que soit le point choisi sur la base.

Démonstration. ■— Soit o un point quelconque pris sur la base BC du triangle isocèle ABC; et oc, ob les perpendiculaires abaissées de ce point sur les côtés AB, AC. Prenons la duplication autoifr de la base BC de la portion de la figure qui contient le côté AC et la perpendiculaire correspondante ob\ le côté CA prendra la position symétrique CA', et la droite ob' sera encore perpendiculaire à CA'. Or on aperçoit immédiatement dans cette nouvelle figure que les droites BA et CA' sont parallèles; que, par suite, oc et ob' sont sur le prolongement l'une de l'autre, et que la somme oc + ob' est constante et indépendante de la position du point o, puisque cette somme représente la distance des deux parallèles AB, CA', distance qui reste la même, quelle que soit la perpendiculaire commune aux deux droites AB, CA' sur laquelle on la mesure. La somme égale oc + ob' est donc aussi constante. ■

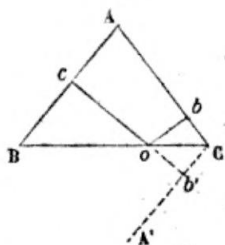
Remarque. - La nouvelle figure montre encore la modification (ju'il faudrait faire subir à l'énoncé dans le cas où le point o serait choisi sur l'un des prolongements de la base BC. 6. QUATRIÈME méthode. — Par abstraction ou par généralisation. — On peut en général regarder une vérité géométrique énoncée (Kier une certaine figure comme un cas particulier d'une autre vérité plus étendue, relative à une figure plus générale que la première, et dans laquelle certains éléments seraient définis par un nombre moindre de conditions que dans la figure de l'énoncé. On pourra donc, dans certains cas spéciaux, faire abstraction d'une ou de plusieurs des propriétés qui définissent certains éléments principaux de la figure primitive, pour ne conserver que celles qui paraîtront suffire à l'existence d'une proposition plus générale et dont la proposée ne sera qu'un cas particulier. Il arrivera souvent, d'ailleurs, que la démonstration de cette proposition générale paraîtra plus facile que celle de la proposition primitive, et c'est ce dont il est facile de se rendre compte : l'une des plus grandes difficultés que l'on éprouve à établir telle propriété d'une figure donnée, réside, en effet, dans le choix (pie l'on a préalablement à faire des relations utiles et dans leur séparation de toutes les autres

relations , souvent en nombre considérable,' qui existent entre les éléments de la figure, et (pie l'on n'a pas à employer dans la démonstration de la. projiosition. Si donc on est parvenu à cette séi»aration des relations utiles, on aura réellement fait un |ias vers la siilution de la (piestion imopcist'c. .  
Digiiiized by Google

quement, pour avoir la droite  $AMa$ , il suffira de mener du point  $A$  une tangente à la circonférence  $B'$ , et le point  $M$  sera déterminé par l'intersection de cette tangente avec la droite  $xy$ .

**TROISIÈME QUESTION. — THÉOREME.** — *La somme des distances d'un point quelconque de la base d'un triangle isocèle aux deux côtés de ce triangle est constante, quel que soit le point choisi sur la base.*

*Démonstration.* — Soit  $o$  un point quelconque pris sur la base  $BC$  du triangle isocèle  $ABC$ ; et  $oc$ ,  $ob$  les perpendiculaires abaissées de ce point sur les côtés  $AB$ ,  $AC$ . Opérons la duplication autour de la base  $BC$  de la portion de la figure qui contient le côté  $AC$  et la perpendiculaire correspondante  $ob$ ; le côté  $CbA$  prendra la position symétrique  $Cb'A'$ , et la droite  $ob' = ob$  sera encore perpendiculaire à  $Cb'A'$ . Or on aperçoit immédiatement dans cette nouvelle figure que les droites  $BA$  et  $CA'$  sont parallèles; que, par suite,  $oc$  et  $ob'$



sont sur le prolongement l'une de l'autre, et que la somme  $oc + ob'$  est constante et indépendante de la position du point  $o$ , puisque cette somme représente la distance des deux parallèles  $AB$ ,  $CA'$ , distance qui reste la même, quelle que soit la perpendiculaire commune aux deux droites  $AB$ ,  $CA'$  sur laquelle on la mesure. La somme égale  $ob + oc$  est donc aussi constante.

*Remarque.* — La nouvelle figure montre encore la modification qu'il faudrait faire subir à l'énoncé dans le cas où le point  $o$  serait choisi sur l'un des prolongements de la base  $BC$ .

**6. QUATRIÈME MÉTHODE.** — *Par abstraction ou par généralisation.* — On peut en général regarder une vérité géométrique énoncée pour une certaine figure comme un cas particulier d'une autre vérité plus étendue, relative à une figure plus générale que la première, et dans laquelle certains éléments seraient définis par un nombre moindre de conditions que dans la figure de l'énoncé. On pourra donc, dans certains cas spéciaux, faire abstraction d'une ou de plusieurs des propriétés qui définissent certains éléments principaux de la figure primitive, pour ne conserver que celles qui paraîtront suffire à l'existence d'une proposition plus générale et dont la proposée ne sera qu'un cas particulier.

Il arrivera souvent, d'ailleurs, que la démonstration de cette proposition générale paraîtra plus facile que celle de la proposition primitive, et c'est ce dont il est facile de se rendre compte: l'une des plus grandes difficultés que l'on éprouve à établir telle propriété d'une figure donnée, réside, en effet, dans le choix que l'on a préalablement à faire des *relations utiles* et dans leur séparation de toutes les autres relations, souvent en nombre considérable, qui existent entre les éléments de la figure, et que l'on n'a pas à employer dans la démonstration de la proposition. Si donc on est parvenu à cette séparation des relations utiles, on aura réellement fait un

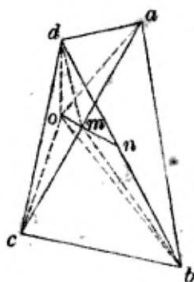
PREMIÈRE PARTIE. 9 APPLICATIONS. Théorème de Newton.

— Dans un quadrilatère circonscrit à un cercle, la droite qui joint les milieux des diagonales passe par le centre du cercle. Démonstration. — Soient  $ahcd$  le quadrilatère considéré et  $o$  le centre du cercle inscrit. Parmi les nombreuses relations qui lient le point  $o$  au quadrilatère  $ahcd$ , choisissons la suivante ; ( $\triangleright$ )  $\text{tri } oab + \text{tri } oed - \text{tri } ohe - \text{tri } oda$ , qui exprime que la somme des aires des triangles ayant pour sommet commun le point  $o$  et pour bases deux côtés opposés du quadrilatère, est équivalente à la somme des aires des triangles ayant pour bases les deux autres côtés. Or il est facile de démontrer que, dans un quadrilatère quelconque  $abcd$ , tout point  $o$  satisfaisant à la relation (i) est situé sur la droite  $mn$  qui joint les milieux des diagonales. La relation (i) peut, en effet, s'écrire ( $\bullet$ )  $\text{tri } oed - \text{tri } ohe = \text{tri } oad - \text{tri } oed$  ; et si l'on appelle  $m, n$  les milieux des diagonales  $ac, bd$ , on aperçoit immédiatement que ( $\alpha$ )  $\text{tri } oab - \text{tri } ohe = \frac{1}{2} \text{tri } omb$ . Car les triangles qui entrent dans la relation ( $\alpha$ ) ont une base commune  $ob$ , et sont, par conséquent, entre eux comme les distances des points  $a, c, m$  à la droite  $ob$ . On aura de même ( $\beta$ )  $\text{tri } oad - \text{tri } oed = \frac{1}{2} \text{tri } ond$ . « \* Il suffira donc, pour que le point  $o$  satisfasse à l'équation de condition (i'), qu'il satisfasse à la suivante : ( $\gamma$ )  $\text{tri } omb = \text{tri } ond$ , ce qui exige, les triangles  $omb, ond$  ayant une base commune  $om$ , que les sommets  $b, d$  soient également éloignés de la droite  $om$ , ou, ce qui revient au même, que  $om$  passe par le milieu « de la droite  $bd$ , ou enfin que le point  $o$  soit situé sur la droite  $mn$  qui joint les milieux des diagonales. Nous avons donc ce théorème général : I. Théorème. — Dans un quadrilatère plan quelconque, le lieu des points  $o$  tels, que des quatre triangles ayant pour sommet commun  $P$  un de ses points, et pour bases respectives les quatre côtés du quadrilatère, la somme de deux triangles non adjacents soit égale à la somme des deux autres, est la droite qui joint les milieux des diagonales. (Léon Kossuth) \_ . Digitized by Google

## APPLICATIONS.

**THÉOREME DE NEWTON.** — Dans un quadrilatère circonscrit à un cercle, la droite qui joint les milieux des diagonales passe par le centre du cercle.

*Démonstration.* — Soient  $abcd$  le quadrilatère considéré et  $o$  le centre du cercle inscrit. Parmi les nombreuses relations qui lient le point  $o$  au quadrilatère  $abcd$ , choisissons la suivante :



$$(1) \quad \text{tri } oab + \text{tri } ocd = \text{tri } obc + \text{tri } oda,$$

qui exprime que la somme des aires des triangles ayant pour sommet commun le point  $o$  et pour bases deux côtés opposés du quadrilatère, est équivalente à la somme des aires des triangles ayant pour bases les deux autres côtés. Or il est facile de démontrer que, dans un quadrilatère quelconque  $abcd$ , tout point  $o$  satisfaisant à la relation (1) est situé sur la droite  $mn$  qui joint les milieux des diagonales.

La relation (1) peut, en effet, s'écrire

$$(1') \quad \text{tri } oab - \text{tri } obc = \text{tri } oad - \text{tri } ocd;$$

et si l'on appelle  $m, n$  les milieux des diagonales  $ac, bd$ , on aperçoit immédiatement que

$$(2) \quad \text{tri } oab - \text{tri } obc = 2 \text{ tri } omb.$$

Car les triangles qui entrent dans la relation (2) ont une base commune  $ob$ , et sont, par conséquent, entre eux comme les distances des points  $a, c, m$  à la droite  $ob$ . On aura de même

$$(3) \quad \text{tri } oad - \text{tri } ocd = 2 \text{ tri } omd.$$

Il suffira donc, pour que le point  $o$  satisfasse à l'équation de condition (1'), qu'il satisfasse à la suivante :

$$(4) \quad \text{tri } omb = \text{tri } omd,$$

ce qui exige, les triangles  $omb$  et  $omd$  ayant une base commune  $om$ , que les sommets  $b, d$  soient également éloignés de la droite  $om$ , ou, ce qui revient au même, que  $om$  passe par le milieu  $n$  de la droite  $bd$ ; ou enfin que le point  $o$  soit situé sur la droite  $mn$  qui joint les milieux des diagonales. Nous avons donc ce théorème général :

**THÉOREME.** — Dans un quadrilatère plan quelconque, le lieu des points  $o$  tels, que des quatre triangles ayant pour sommet commun l'un de ces points, et pour bases respectives les quatre côtés du quadrilatère, la somme de deux triangles non adjacents soit égale à la somme des deux autres, est la droite qui joint les milieux des diagonales.

10 DES MATHÉMATIQUES EN GÉOMÉTRIE. Si le quadrilatère est  
 circonscriptible, le centre du cercle inscrit est évidemment l'un des points  
 du lieu précédent; nous retrouvons ainsi le théorème de Newton dans un cas  
 particulier du précédent. Scolie. — A la méthode actuelle se rattache  
 encore l'emploi des lieux géométriques ou des courbes enveloppes dans  
 la résolution des problèmes déterminés, ayant pour objet de trouver un  
 point (ou une droite) satisfaisant à plusieurs conditions A et B. En effet, si  
 l'on fait alternativement abstraction de l'une des conditions B ou A, qui  
 définissent le point (ou la droite) que l'on cherche, on trouvera  
 successivement deux lieux géométriques (a) et (b) [ou deux courbes  
 enveloppes (\*) et (?)] des points (ou des droites) satisfaisant isolément aux  
 conditions A et aux conditions B. Le point ou la droite que l'on cherche sera  
 donc le point commun aux courbes (a) et (b), ou la tangente commune aux  
 courbes (a) et (b). Supposons, par exemple, qu'il s'agisse d'inscrire dans un  
 triangle donné ABC un triangle MNP dont les côtés passent par trois  
 points donnés r, n, v, situés en ligne droite. Il suffit évidemment, pour  
 résoudre le problème, de déterminer l'un des sommets M, par exemple, du  
 triangle cherché. Or, d'après l'une des conditions du problème, le sommet  
 M doit se trouver sur le côté AB; et si nous faisons pour un moment  
 abstraction de cette condition, nous aurons, au lieu du triangle déterminé  
 MPN, une infinité de triangles, tels que m'p'n, dont les côtés passeront par  
 les points fixes r, n, v, et dont les sommets m', p' décrivent les côtés CB, CA  
 du triangle ABC. Mais, d'après un théorème connu, le sommet libre m' du  
 triangle variable m'p'n décrit une droite passant par le point de concours C  
 des droites CB, CA, (qui servent de directrices aux sommets n, p. point  
 cherché). M sera donc fourni par l'intersection du côté AB avec la droite  
 Cm. 7. CINQUIÈME MÉTHODE. — Par composition et décomposition.  
 — Cette méthode consiste à composer (soit par voie d'addition, soit par  
 voie de soustraction), avec les grandeurs dont on veut établir l'égalité,  
 d'autres grandeurs auxiliaires dont l'égalité est évidente ou peut être rendue  
 telle; les nouvelles grandeurs qui résultent de cette opération étant alors  
 identiques ou simplement équivalentes. • A cette méthode se rattachent  
 encore les démonstrations où l'on décompose les deux grandeurs  
 considérées en un même nombre (limité ou illimité) de parties que l'on  
 prouve être égales ou équivalentes deux à deux; la méthode prenant alors le  
 nom de méthode par décomposition. Applications. Les éléments de

géométrie présentent plusieurs applications de la méthode actuelle. Nous citerons comme exemples les théorèmes relatifs au

Digitized by Google





PaEMIÈBE PARTIE. I I triangle rectangle, et plusieurs propositions relatives à la mesure des solides. 8. SIXIÈME MÉTHODE.— /«r/e.î/i/Hite.t.— Cette méthode est fondée sur la définition même de la limite d'une grandeur variable ; elle consiste à substituer aux grandeurs A, B, C,..., entre lesquelles on s'est établi l'existence d'une certaine relation, des grandeurs variables a, b, c,... ayant pour limites respectives A, B, C,...; cherchant ensuite la relation  $(x)/(a^6, c, \dots) = p$ , ' qui existe entre les grandeurs a, b, c,..., et examinant ce que devient cette relation (x) quand a, b, c,... convergent simultanément vers leurs limites A, B, C,..., on obtiendra enfin la relation  $(X) F(A, B, C, \dots) = 0$  qu'il s'agissait de trouver. Remarque. — Les éléments de géométrie présentent un grand nombre d'applications de cette méthode. 9. SEPTIÈME MÉTHODE. — Par la réduction à V absurde. — Dans cette méthode on établit entre les grandeurs considérées les relations affirmées par l'énoncé, en faisant voir que toute supposition de relations différentes conduirait à des conséquences opposées aux données de la question, ou absurdes en elles-mêmes. Cette méthode ne doit, au point de vue de l'élégance géométrique, être employée que dans le cas où elle fournit une démonstration plus simple que la méthode analytique ordinaire, et particulièrement pour les cas où celle-ci serait insuffisante ; car il est visible que ces sortes de démonstration peuvent convaincre l'esprit, mais non pas l'éclairer, ce qui doit être cependant le principal fruit de la science. (Logique de Port-Royal.) APPLICATIONS. THÉORÈME. — Deux polygones circonscriptibles et d'un même nombre de côtés sont égaux si les distances de leurs différents sommets aux centres des cercles inscrits sont égales deux à deux et se succèdent dans le même ordre. IV. R. Le théorème suppose en outre que chacun des deux polygones enveloppe complètement le cercle inscrit correspondant. Démonstration... — On aperçoit immédiatement que l'égalité des deux polygones entraîne l'égalité des rayons des cercles inscrits, et que réciproquement, s'il était établi que les rayons des cercles inscrits sont égaux, il en résulterait l'égalité des deux polygones, (lui seraient alors composés d'un même nombre de triangles rectangles égaux (comme ayant l'hypoténuse égale et un côté de l'angle droit égal) et se succédant dans le même ordre. Il suffira donc d'établir l'égalité des rayons c, /'. \* \* Digitized by Google

triangle rectangle, et plusieurs propositions relatives à la mesure des solides.

**8. SIXIÈME MÉTHODE.** — *Par les limites.* — Cette méthode est fondée sur la définition même de la *limite* d'une grandeur variable : elle consiste à substituer aux grandeurs  $A, B, C, \dots$ , entre lesquelles on veut établir l'existence d'une certaine relation, des grandeurs variables  $a, b, c, \dots$  ayant pour limites respectives  $A, B, C, \dots$ ; cherchant ensuite la relation

$$(x) \quad f(a, b, c, \dots) = 0,$$

qui existe entre les grandeurs  $a, b, c, \dots$ , et examinant ce que devient cette relation  $(x)$  quand  $a, b, c, \dots$  convergent simultanément vers leurs limites  $A, B, C, \dots$ , on obtiendra enfin la relation

$$(X) \quad F(A, B, C, \dots) = 0$$

qu'il s'agissait de trouver.

*Remarque.* — Les éléments de géométrie présentent un grand nombre d'applications de cette méthode.

**9. SEPTIÈME MÉTHODE.** — *Par la réduction à l'absurde.* — Dans cette méthode on établit entre les grandeurs considérées les relations *affirmées* par l'énoncé, en faisant voir que toute supposition de relations différentes conduirait à des conséquences opposées aux données de la question, ou absurdes en elles-mêmes.

Cette méthode ne doit, au point de vue de l'élégance géométrique, être employée que dans le cas où elle fournit une démonstration plus simple que la méthode analytique ordinaire, et particulièrement pour les cas où celle-ci serait insuffisante; car *il est visible que ces sortes de démonstration peuvent convaincre l'esprit, mais non pas l'éclairer, ce qui doit être cependant le principal fruit de la science.* (Logique de Port-Royal.)

#### APPLICATIONS.

**THÉORÈME.** — *Deux polygones circonscriptibles et d'un même nombre de côtés sont égaux si les distances de leurs différents sommets aux centres des cercles inscrits sont égales deux à deux et se succèdent dans le même ordre.*

*N. B.* Le théorème suppose en outre que chacun des deux polygones enveloppe complètement le cercle inscrit correspondant.

*Démonstration.* — On aperçoit immédiatement que l'égalité des deux polygones entraîne l'égalité des rayons des cercles inscrits, et que réciproquement, s'il était établi que les rayons des cercles inscrits sont égaux, il en résulterait l'égalité des deux polygones, qui seraient alors composés d'un même nombre de triangles rectangles égaux (comme ayant l'hypoténuse égale et un côté de l'angle droit égal) et se succédant dans le même

i a , DES METHODES EN GEOMETRIE. Supposons, à cet effet, que l'on ait • • Soient ABC...L, A'B'C'...L' les deux polygones; O, O' les centres de ces cercles inscrits desquels nous abaisserons Oa, O' et ü'n', O'b',..., O'7' perpendiculaires respectives à AB, BC LA et à A' B', B'C',..., L'A'; joignons enfin les centres O et O' aux différents sommets des deux polygones. La comparaison des triangles rectangles AOa, A'O'n', dans lesquels les hypoténuses Oa, O'A' sont égales et les côtés Oa, O'a' sont inégaux, montre que les angles AOa, A'O'a' sont inégaux ; et d'ailleurs suivant que l'on aura r > r', c'est-à-dire • ' on aura on verrait de même que on a donc, en ajoutant, on aurait de même AOa > A'O'a'; «OB > O'B'; AUB > A'O'B'; BOC > B'O'G'. L'OA > L'O'A'. B > Par suite , en ajoutant ces inégalités membre à membre , on arriverait à \*cp résultat, (}uc la somme des angles formés autour du point O a'rait différente de celle des angles formés autour du point O', conséquence absurde, jtuisquo chacune de ces sommes est égale à quatre droits. Donc on a nécessairement r = r', et le théorème se trouve démontré. c TiiÉoiiÈ. ME IL — Deux polygones inscriptibles et )Fun même nombre de côtés sont égaux quand les distances à leurs côtés respectifs des centres des cercles circonscrits sont égales deux à deux et se succèdent dans le même ordre. La démonstration est entièrement analogue à la précédente ; elle consiste à établir, par la même méthode, l'égalité des rayons des cercles circonscrits. {Nouvelles Annales de Mathématiques , 1848j page 61.) •10. HUITIÈME MÉTHODE. — Par inversion. — Cette méthode consiste à prendre pour données d'une nouvelle question auxiliaire les inconnues de la question proposée, les données de celle-ci devenant le. « inconnues de la question auxiliaire. Si l'on résout directement cette dernière, on obtiendra une figure semblable à celle que l'on devait construire [U]n résoudre Digitized by Google

Supposons, à cet effet, que l'on ait

$$r > r'.$$

Soient  $ABC...L$ ,  $A'B'C'...L'$  les deux polygones;  $O$ ,  $O'$  les centres des cercles inscrits desquels nous abaisserons  $Oa$ ,  $Ob$ , ...,  $Ol$  et  $O'a'$ ,  $O'b'$ , ...,  $O'l'$  perpendiculaires respectives à  $AB$ ,  $BC$ , ...,  $LA$  et à  $A'B'$ ,  $B'C'$ , ...,  $L'A'$ ; joignons enfin les centres  $O$  et  $O'$  aux différents sommets des deux polygones. La comparaison des triangles rectangles  $AOa$ ,  $A'O'a'$ , dans lesquels les hypoténuses  $OA$ ,  $O'A'$  sont égales et les côtés  $Oa$ ,  $O'a'$  sont inégaux, montre que les angles  $AOa$ ,  $A'O'a'$  sont inégaux; et d'ailleurs suivant que l'on aura

$$r > r', \text{ c'est-à-dire } Oa > O'a',$$

on aura

$$\widehat{AOa} < \widehat{A'O'a'};$$

on verrait de même que

$$\widehat{aOB} < \widehat{a'O'b'};$$

on a donc, en ajoutant;

$$\widehat{AOB} < \widehat{A'O'B'};$$

on aurait de même

$$\widehat{BOC} < \widehat{B'O'C'},$$

$$\vdots$$

$$\widehat{LOA} < \widehat{L'O'A'}.$$

Par suite, en ajoutant ces inégalités membre à membre, on arriverait à ce résultat, que la somme des angles formés autour du point  $O$  serait différente de celle des angles formés autour du point  $O'$ , conséquence absurde, puisque chacune de ces sommes est égale à quatre droits. Donc on a nécessairement  $r = r'$ , et le théorème se trouve démontré.

**THÉORÈME II.** — *Deux polygones inscriptibles et d'un même nombre de côtés sont égaux quand les distances à leurs côtés respectifs des centres des cercles circonscrits sont égales deux à deux et se succèdent dans le même ordre.*

La démonstration est entièrement analogue à la précédente; elle consiste à établir, par la même méthode, l'égalité des rayons des cercles circonscrits. (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1848, page 61.)

**10. HUITIÈME MÉTHODE.** — *Par inversion.* — Cette méthode consiste à prendre pour données d'une nouvelle question *auxiliaire* les inconnues de la question proposée, les données de celle-ci devenant les inconnues de la question *auxiliaire*. Si l'on résout *directement* cette dernière, on ob-

PHEMIKRE PARTIE. I 3 In problème proposé , qui n'offrira plus  
 dès lors aucune difficulté. {Examen t/es différentes mclhotles, page i6. ) La  
 méthode actuelle pourra être employée avec avantage dans la plupart des  
 problèmes ayant pour objet 'de construire une figure semblable à une figure  
 connue, et ayant avec une autre figure donnée certaines relations de  
 [losition spécifiées dans l'énoncé. On lient d'ailleurs, dans certains cas,  
 diriger la construction du problème inverse de manière à obtenir  
 immédiatement certains éléments principaux suffisant pour déterminer la  
 figure que l'on avait à construire dans le problème primitif. On en verra un  
 exemple dans le second des problèmes suivants. APPLICATIONS. Nous  
 prendrons, comme application de la méthode, l'e.xemplo choisi parM.  
 Lamé, en modifiant seulement la solntion de la question auxiliaire.  
 PnoBLKJIE I. — Inscrire à un quadrilatère dunné (Q) un quadrilatère  
 sem/dable à un autre quadrilatère donné (Q')/. Solation. — Pi oposons-nous  
 le problèmu inverse consistant à circonscrire h un quadrilatère donné (Q')  
 un quadrilatère (Q) donné trespère. Cette (luestion auxiliaire est plus facile  
 à traiter directement , et c'est de » solution que nous allons nous occuper.  
 Soit abt'd le quadrilatère cliercljé , circonscrit au quadrilatère A'B'C'D' (Q')  
 et semblable ail quadrilatère donné (Q). Les angles d, a, b étant donnés, les  
 .sommets rf, «, b seront respectivement sur des segments caiiables d'angles  
 connus construits sur les côtés D'A', A' B', B'C'; si, do plus, nous joignons  
 ôc/"qui conpe en b'd' les segments construits sur B'C', D'A', nous  
 reconnâtrons que nous jiouvons déterminer à priori les points b\ c/'; car le  
 quadrilatère abcd étant semblable à un quadrilatère donné (0), le triangle  
 partie! «ic/, par exemple, est semblable à un triangle donné; les angles ahd,  
 adb sont donc connus; et comme ils oiït pour mesures resjjectives les demi-  
 arcs B'ô', k'd\ nous pourrons, par une construction simple, obtenir chacun  
 des points b'pf. Cela posé, la'droite b'd', joignant ces deux points, ira  
 coujver une deuxième fois les segments construits sur B'C' et D'.' suivant  
 les points b, d\ nous aurons donc deux sommets opposés b, d du  
 quadrilatère cherché , et le problème auxiliaire sera résolu. Enfin, si nous  
 revenons au problème primitif, il nous suffira, pour le résoudre, de diviser  
 les côtés du quadrilatère ABCD (Q) dans des rapports égaux aux rapports  
 des segments que les points B', C', D', déterminent sur les côtés «//, br , cd,  
 da de la figure précédente, et de joindre les points de division. Digiiized by  
 Google

14 DES MÉTHODES EN GÉOMÉTRIE. Remarque. — Le problème piiijsô a liait solution.<sup>^</sup>. Car, si nous examinons le nombre des solutions du problème auxiliaire nous trouverons ([UC ; i". En supposant d'abord ([uo l'angle a s'appuie sur le côté A' B', nous [inuvons supposer : soit que les angk'S b et fl s'appuient reS])octivement sur A'D' et sur B'C', ce qui fournit une [iremière solution ; soit au contraire que h et <l s'appuient respectivement sur B't^'et A'D' comme dans notre figure, CO qui fournit une seconde solution (cette seconde solution rentrerait toutefois dans la première , si l'on avait à la fois et cercle A' r/D' = cercle C'B'ô', c'est-à-dire .V1V=B'C). a". On aura do même trois autres systèmes de deux solutions fournis successivement par l'hypothèse que l'angle 'n s'appuie sur les côtés B'C, C D', D'A', au lieu de s'appuyer sur le côté A'Ii'. Li''' problème aura donc huit solutions dans le cas général. Puoii.i;ME il. — On propose iPinscrire /Ions un Iri/tngle donné un triangle dont les rôtés soient jmr/illèles à des tlirections données. ' Solution. — Construisons un triangle mnp ayant ses côtés parallèles à ceux du triangle cherché, et dont Iw sommets m, n soient situés sur les côtés AC, AB. Ün voit immédiatement alors que, si par le sommet P de ce triangle on menait la droite be parallèle à BC, on obtiendrait une figure Aôr, mnp semblable à celle que l'on veut construire, et semblablement placée ; ces deux figures ayant d'ailleurs le point A pour centre de similitude , il suffira , pour obtenir le sommet P du triangle cherché, de prolonger la droite \p jusqu'à son intersection avec le côté BC, et le problème se trouvera résolu. 11. NIHJVIÈME WÉTHODE. — PrtT les lignes, les aires ou les volumes nujdlitdrcs. — Cette méthode consiste à employer comme auxiliaires , dans la recherche d'une relation entre des grandeurs d'une certaine espèce (lignes, aires ou volumes) des grandeurs d'espèce différente (aires, volumes ou lignes) entre lesquelles on pourra mettre en évidence des relations contenant im[)licitement celles que l'on cherchait à établir entre les grandeurs de la première espèce. La mesure des aires et des volumes qui permet d'exprimer ces grandeurs jiar le produit des nombres qui représentent certaines de leurs dimensions linéaires, conduit naturellement à substituer à la comparaison de deux aires ou de deux volumes la comparaison d'un certain nombre de lignes, dont on n'a plus ensuite qu'à composer les rapports. Cette substitution est, comme on sait , d'un usage très-fréquent dans les éléments, où elle fournit en général des démonstrations beaucoup plus simples que ne le ferait l'étude directe

des grandeurs que l'on envisage : c'est ainsi (juo les théorèmes relatifs aux  
aires que l'on peut construire sur Digilized by Google

*Remarque.* — Le problème proposé a huit solutions. Car, si nous examinons le nombre des solutions du problème auxiliaire nous trouverons que :

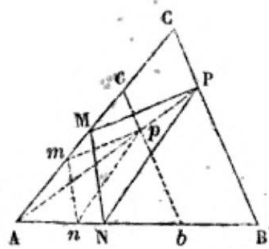
1°. En supposant d'abord que l'angle  $a$  s'appuie sur le côté  $A'B'$ , nous pouvons supposer : soit que les angles  $b$  et  $d$  s'appuient respectivement sur  $A'D'$  et sur  $B'C'$ , ce qui fournit une première solution ; soit au contraire que  $b$  et  $d$  s'appuient respectivement sur  $B'C'$  et  $A'D'$  comme dans notre figure, ce qui fournit une seconde solution (cette seconde solution rentrerait toutefois dans la première, si l'on avait à la fois  $\hat{b} = \hat{d}$ , et cercle  $A'dD' =$  cercle  $C'B'b'$ , c'est-à-dire  $A'D' = B'C'$ ).

2°. On aura de même trois autres systèmes de deux solutions fournis successivement par l'hypothèse que l'angle  $\hat{a}$  s'appuie sur les côtés  $B'C'$ ,  $C'D'$ ,  $D'A'$ , au lieu de s'appuyer sur le côté  $A'B'$ .

Le problème aura donc huit solutions dans le cas général.

**PROBLÈME II.** — *On propose d'inscrire dans un triangle donné un triangle dont les côtés soient parallèles à des directions données.*

*Solution.* — Construisons un triangle  $mnp$  ayant ses côtés parallèles à ceux du triangle cherché, et dont les sommets  $m, n$  soient situés sur les côtés  $AC, AB$ . On voit immédiatement alors que, si par le sommet  $p$  de ce triangle on menait la droite  $bc$  parallèle à  $BC$ , on obtiendrait une figure  $Abc$ ,  $mnp$  semblable à celle que l'on veut construire, et semblablement placée : ces deux figures ayant d'ailleurs le point  $A$  pour centre de similitude, il suffira, pour obtenir le sommet  $P$



du triangle cherché, de prolonger la droite  $Ap$  jusqu'à son intersection avec le côté  $BC$ , et le problème se trouvera résolu.

**11. NEUVIÈME MÉTHODE.** — *Par les lignes, les aires ou les volumes auxiliaires.* — Cette méthode consiste à employer comme auxiliaires, dans la recherche d'une relation entre des grandeurs d'une certaine espèce (lignes, aires ou volumes) des grandeurs d'espèce différente (aires, volumes ou lignes) entre lesquelles on pourra mettre en évidence des relations contenant implicitement celles que l'on cherchait à établir entre les grandeurs de la première espèce.

La mesure des aires et des volumes qui permet d'exprimer ces grandeurs par le produit des nombres qui représentent certaines de leurs dimensions linéaires, conduit naturellement à substituer à la comparaison de deux aires ou de deux volumes la comparaison d'un certain nombre de lignes, dont on n'a plus ensuite qu'à composer les rapports.

Cette substitution est, comme on sait, d'un usage très-fréquent dans les éléments, où elle fournit en général des démonstrations beaucoup plus simples que ne le ferait l'étude directe des grandeurs que l'on envisage : c'est ainsi que les théorèmes relatifs aux aires que l'on peut constater que



PREMIÈRE PARTIE. 15 les côtés d'un triangle, sur la hauteur opposée à l'hypoténuse et sur les segments de celle-ci, se démontrent avec plus de rapidité, on substituant à ces aires les produits de lignes qui les représentent, et en comparant ces lignes entre elles. Dans ce cas et dans la plupart de ceux que présente la géométrie élémentaire, on substitue aux grandeurs à comparer, surfaces ou volumes, des grandeurs plus simples, lignes ou surfaces. Mais il arrive d'autres fois que la recherche de la relation qui existe entre des lignes ou des surfaces présentant des difficultés, on pourra recourir avec avantage à des surfaces ou à des volumes auxiliaires : on aura alors substitué aux grandeurs à comparer, lignes ou surfaces, des grandeurs plus complexes, surfaces ou volumes; et, quoique cette substitution paraît d'abord contraire à l'élégance géométrique, on ne devra pas cependant l'exclure systématiquement dans les cas surtout où elle conduira plus rapidement que les méthodes directes au but que l'on se propose. ' . APPLICATIONS.

**Théorème I.** — Dans un triangle, trois segments menés d'un même point sur les côtés forment un produit égal au produit des trois autres. Démonstration. — Ainsi l'on aura ( $\{$ )  $Ac.Df.Cô = Br.Cn.$  etc. Désignons en effet par A, B, C les aires des triangles que la transversale considère; déterminons dans les angles B, C du triangle, on aura l'identité. ( $\blacksquare$ )  $ABC \cdot b'c'a$  Mais deux triangles qui ont un angle égal ou supplémentaire sont entre eux comme les produits des côtés qui comprennent cet angle; on a donc les valeurs suivantes pour chacun des rapports rapportés entre eux dans la formule ( $\cdot$ ) :  $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$   $\frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}$   $\frac{c}{a} = \frac{c'}{a'}$  Multipliant ces égalités membre à membre, substituant dans l'identité (2) et simplifiant, on trouve la relation qu'il s'agissait d'établir. **Théorème U.** — Les droites qui joignent les sommets d'un triangle à un même point déterminent sur les côtés opposés six segments, le produit de trois segments non adjacents est égal au produit des trois autres. Digitized by Google

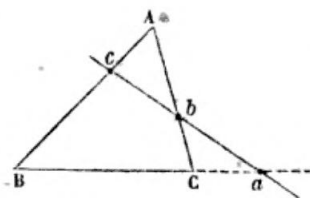
les côtés d'un triangle rectangle, sur la hauteur opposée à l'hypoténuse et sur les segments de celle-ci, se démontrent avec plus de rapidité, en substituant à ces aires les produits de lignes qui les représentent, et en comparant ces lignes entre elles. Dans ce cas et dans la plupart de ceux que présente la géométrie élémentaire, on substitue aux grandeurs à comparer, surfaces ou volumes, des grandeurs plus simples, lignes ou surfaces. Mais il arrive d'autres fois que la recherche de la relation qui existe entre des lignes ou des surfaces présentant des difficultés, on pourra recourir avec avantage à des surfaces ou à des volumes auxiliaires : on aura alors substitué aux grandeurs à comparer, lignes ou surfaces, des grandeurs plus complexes, surfaces ou volumes ; et, quoique cette substitution paraisse d'abord contraire à l'élégance géométrique, on ne devra pas cependant l'exclure systématiquement dans les cas surtout où elle conduira plus rapidement que les méthodes directes au but que l'on se propose.

## APPLICATIONS.

**THÉORÈME I.** — *Des six segments qu'une transversale rectiligne détermine sur les côtés d'un triangle, trois segments non adjacents forment un produit égal au produit des trois autres.*

*Démonstration.* — Ainsi l'on aura

$$(1) \quad Ac \cdot Ba \cdot Cb = Bc \cdot Ca \cdot Ab.$$



Désignons en effet par A, B, C les aires des triangles que la transversale considérée détermine dans les angles A, B, C du triangle, on aura l'identité.

$$(2) \quad \frac{A}{B} \cdot \frac{B}{C} \cdot \frac{C}{A} = 1.$$

Mais deux triangles qui ont un angle égal ou supplémentaire sont entre eux comme les produits des côtés qui comprennent cet angle ; on a donc les valeurs suivantes pour chacun des rapports qui entrent dans la formule (2) :

$$\frac{A}{B} = \frac{Ac}{Bc} \cdot \frac{cb}{ca},$$

$$\frac{B}{C} = \frac{Ba}{Ca} \cdot \frac{ac}{ab},$$

$$\frac{C}{A} = \frac{Cb}{Ab} \cdot \frac{ba}{bc}.$$

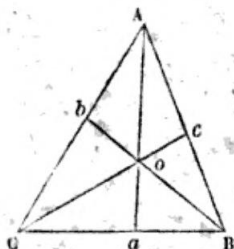
Multipliant ces égalités membre à membre, substituant dans l'identité (2) et simplifiant, on trouve la relation qu'il s'agissait d'établir.

**THÉORÈME II.** — *Les droites qui joignent les sommets d'un triangle à un même point déterminent sur les côtés opposés six segments ; le produit de trois segments non adjacents est égal au produit des trois autres.*

# 16 DES MÉTHODES ES OÉOMÉTHIE. Démonstration. —

Soient ABC le triangle et o le point considérés; désignons par  $a, a', b, b', c, c'$ , les aires «les triangles ayant [leur sommet commun le point o et pour bases les différents segments pris dans leur ordre de succession, en faisant le tour du triangle à partir du sommet B dans le sens BCA. On aperçoit immédiatement les relations suivantes ;  $Bb' = h \cdot Cc' = Ac'$  d'où, en multipliant membre à membre,  $ti.b.r \cdot Brt.Cé.Ac (>) a'.b'.r' \cdot A\hat{A}.Bc.C$  D'un autre côté, comparant deux à deux les aires  $a, b, r$  avec celles des aires  $rt', /c', c'$  qui ont un angle commun avec les premières, on trouve  $a \cdot oB \cdot ou \cdot b \cdot oC \cdot nb \cdot c \cdot n \cdot \backslash \cdot or$  I?  $o \cdot \backslash \cdot oh \cdot r' \cdot oB \cdot or \cdot a' \cdot oC \cdot oa$  D'où, en multipliant membre à membre et en simplifiant, il vient Enfin, la comparaison des relations (i) et (2) démontre le théorème énoncé. Tiikoubme UI. — Soient o le sommet et l'angle solide il'octaèdre  $rt'$ -gulicr, et  $a, b, c$ , (I les points situés sur les arêtes issues du point o) sont coupées par un plan ipu'lonipie ; on a cette égalité  $IIII$ ,  $oa \cdot or \cdot ob \cdot oil$  (Lévy.) Démonstration. — Menons les diagonales  $ac, bd$  du quadrilatère  $abcd$ , on a l'identité  $pyram. oacb + pyram. oacd = pyram. oWc/ + pyram. obde$ . D'ailleurs deux quelconques de ces pyramides sont entre elles comme les produits de leurs bases par leurs hauteurs; et, en choisissant pour bases les triangles  $aOc$  ou  $bOd$  dont les angles en o sont égaux, on verra que les bases sont entre elles comme les rectangles  $on \cdot oe$  et  $ob \cdot od$  quant aux hauteurs des quatre pyramides, elles sont entre elles comme les segments  $ob, oil, oa, oc$ ; donc, en divisant les deux membres de l'identité précédente par un même nombre, on aura ,  $ob \cdot oa \cdot oc \cdot od \cdot oa \cdot or = oa \cdot ob \cdot oil \cdot + oe \cdot ob \cdot oil$ ; It O Digilized by Google

*Démonstration.* — Soient  $ABC$  le triangle et  $o$  le point considérés; désignons par  $a, a', b, b', c, c'$ , les aires des triangles ayant pour sommet commun le point  $o$  et pour bases les différents segments pris dans leur ordre de succession, en faisant le tour du triangle à partir du sommet  $B$  dans le sens  $BCA$ . On aperçoit immédiatement les relations suivantes :



$$\frac{a}{a'} = \frac{Ba}{Ca}, \quad \frac{b}{b'} = \frac{Cb}{Ab}, \quad \frac{c}{c'} = \frac{Ac}{Bc};$$

d'où, en multipliant membre à membre,

$$(1) \quad \frac{a \cdot b \cdot c}{a' \cdot b' \cdot c'} = \frac{Ba \cdot Cb \cdot Ac}{Ab \cdot Bc \cdot Ca}.$$

D'un autre côté, comparant deux à deux les aires  $a, b, c$  avec celles des aires  $a', b', c'$  qui ont un angle commun avec les premières, on trouve

$$\frac{a}{b'} = \frac{oB \cdot oa}{oA \cdot ob}, \quad \frac{b}{c'} = \frac{oC \cdot ob}{oB \cdot oc}, \quad \frac{c}{a'} = \frac{oA \cdot oc}{oC \cdot oa}.$$

Donc, en multipliant membre à membre et en simplifiant, il vient

$$(2) \quad \frac{a \cdot b \cdot c}{a' \cdot b' \cdot c'} = 1.$$

Enfin, la comparaison des relations (1) et (2) démontre le théorème énoncé.

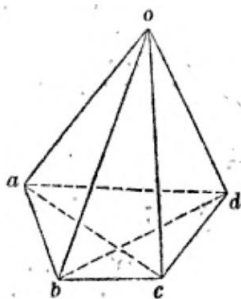
**THÉORÈME III.** — Soient  $o$  le sommet d'un angle solide d'octaèdre régulier, et  $a, b, c, d$  les points suivant lesquels les arêtes issues du point  $o$  sont coupées par un plan quelconque; on a cette égalité

$$\frac{1}{oa} + \frac{1}{oc} = \frac{1}{ob} + \frac{1}{od}.$$

(LÉVY.)

*Démonstration.* — Menons les diagonales  $ac, bd$  du quadrilatère  $abcd$ ; on a l'identité

$$\text{pyram. } oacb + \text{pyram. } oacd = \text{pyram. } obda + \text{pyram. } obdc.$$



D'ailleurs deux quelconques de ces pyramides sont entre elles comme les produits de leurs bases par leurs hauteurs; et, en choisissant pour bases les triangles  $aoc$  ou  $bod$  dont les angles en  $o$  sont égaux, on verra que les bases sont entre elles comme les rectangles  $oa \cdot oc$  et  $ob \cdot od$ ; quant aux hauteurs des quatre pyramides, elles sont entre elles comme les segments  $ob, od, oa, oc$ ; donc, en divisant les deux membres de l'identité précédente par un même nombre, on aura

$$ob \cdot oa \cdot oc + od \cdot oa \cdot oc = oa \cdot ob \cdot od + oc \cdot ob \cdot od;$$

I PREMIÈRE PAKTIK. T 7 OU, en (livisanl chaque terme par le produit, oa.ob .or.otl , l = -J- H — J\* c. 0^ F. D. ofi oc ob ofl {NouveUrs Annales de Mathématiques^ i853. ) 12. SIXIÈME MÈTBOSE. — Par les solides aujciliaircs. — Cette méthode consiste à faire intervenir la géométrie à trois dimensions dans la solution d'une question de géométrie plane. Elle possède en général le précieux avantage de fournir des solutionseldémonstrations intuitives des problèmes et théorèmes auxquels on a su l'appliquer ; dans cette méthode, on effet, si l'on veut, par exemple, établir une propriété déterminée d'une figure plane ,. on considère cotte figure comme la base d'un édifice dont on règle la construction comme on le veut, sans être arrêté par aucune des exigences ordinaires des données- de la question ; et , si l'imagination de l'architecte a été heureusement inspirée , il n'a plus qu'à s'élever au-dessus de son œuvre pour apercevoir nettement, dans les harmonies de l'ensemble, les propriétés particulières de la figure qu'il considèrait d'abord. ' • De grands géomètres se sont servis avec avantage de cette élégante méthode : Desargues d'abord , qui l'employait à peu près exclusivement dans ses démonstrations ; Pascal , dans la rectification des roulettes ci-après le chapitre VI), et Monge dans l'établissement des propriétés des pèles et des polaires pour les courbes du second degré. APPLICATIONS. Première oi'Estiom. — Problème. — Mener, par un point donné c, une droite co ridant passer par le point de concours inaccessible de deux droites données ao et bo. \* Solution. — Le problème étant supposé résolu , regardons les droites an, ho , CO comme les projections sur le plan de la figure des arêtes d'un angle solide trièdre O, et concevons. que celui-ci soit coupé par deux plans parallèles qui' y détei- minent deux sections triangulaires à côtés parallèles ABC, A'B'C'. La projection de cotte figure auxiliaire sur le plan de la figure primitive se composera dos droites ao, bo, co cl des triangles abc, a'b'c', dont les côtés do même nom seront parallèles, et dont les sommets a, a'-, b, b'; c, c' seront situés deux à deux .sur les droites ao , bo, co. Or ceci suffit à la solution du problème : car le triangle abc peut être regardé comme donné; et [wur construire le triangle db'c', il suffira de tracer dans la (wrtion accessible des droites ao, bo , a' b' parallèle à ab -, et do mener enfin par a' et b', parallèlement aux droites ne et bc , des droites qui se couperont en c' et détermineront un second point do la droite cher- « \* chée cc'o. Seconde question. — Problème. — Mener, parallèlement à une direction donnée dd',

une droite co allant passer par le /mint de concours inaccessible de deux  
dmities données an ,< bo. Digitized by Google

ou, en divisant chaque terme par le produit,  $oa.ob.oc.od$ ,

$$\frac{1}{oa} + \frac{1}{oc} = \frac{1}{ob} + \frac{1}{od}. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

(*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1853.)

**12. DIXIÈME MÉTHODE.** — *Par les solides auxiliaires.* — Cette méthode consiste à faire intervenir la géométrie à trois dimensions dans la solution d'une question de géométrie plane. Elle possède en général le précieux avantage de fournir des solutions et démonstrations intuitives des problèmes et théorèmes auxquels on a su l'appliquer : dans cette méthode, en effet, si l'on veut, par exemple, établir une propriété déterminée d'une figure plane, on considère cette figure comme la base d'un édifice dont on règle la construction comme on le veut, sans être arrêté par aucune des exigences ordinaires des données de la question ; et, si l'imagination de l'architecte a été heureusement inspirée, il n'a plus qu'à s'élever au-dessus de son œuvre pour apercevoir nettement, dans les harmonies de l'ensemble, les propriétés particulières de la figure qu'il considèrerait d'abord.

De grands géomètres se sont servis avec avantage de cette élégante méthode : Desargues d'abord, qui l'employait à peu près exclusivement dans ses démonstrations ; Pascal, dans la rectification des roulettes (voir ci-après le chapitre VI), et Monge dans l'établissement des propriétés des pôles et des polaires pour les courbes du second degré.

#### APPLICATIONS.

**PREMIÈRE QUESTION. — PROBLÈME.** — *Mener, par un point donné  $c$ , une droite  $co$  allant passer par le point de concours inaccessible de deux droites données  $ao$  et  $bo$ .*

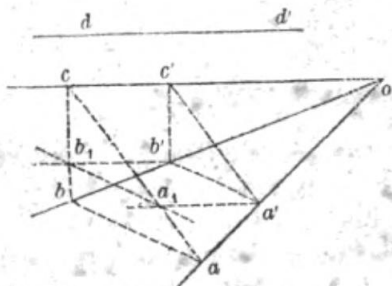
*Solution.* — Le problème étant supposé résolu, regardons les droites  $ao$ ,  $bo$ ,  $co$  comme les projections sur le plan de la figure des arêtes d'un angle solide trièdre  $O$ , et concevons que celui-ci soit coupé par deux plans parallèles qui y déterminent deux sections triangulaires à côtés parallèles  $ABC$ ,  $A'B'C'$ . La projection de cette figure auxiliaire sur le plan de la figure primitive se composera des droites  $ao$ ,  $bo$ ,  $co$  et des triangles  $abc$ ,  $a'b'c'$ , dont les côtés de même nom seront parallèles, et dont les sommets  $a$ ,  $a'$ ;  $b$ ,  $b'$ ;  $c$ ,  $c'$  seront situés deux à deux sur les droites  $ao$ ,  $bo$ ,  $co$ . Or ceci suffit à la solution du problème : car le triangle  $abc$  peut être regardé comme donné ; et pour construire le triangle  $a'b'c'$ , il suffira de tracer dans la portion accessible des droites  $ao$ ,  $bo$ ,  $a'b'$  parallèle à  $ab$  ; et de mener enfin par  $a'$  et  $b'$ , parallèlement aux droites  $ac$  et  $bc$ , des droites qui se couperont en  $c'$  et détermineront un second point de la droite cherchée  $cc'o$ .

**SECONDE QUESTION. — PROBLÈME.** — *Mener, parallèlement à une direction donnée  $dl$ , une droite  $co$  allant passer par le point de concours inaccessible de deux droites données  $ao$  et  $bo$ .*

|8 DES MÉTHODES ES GÉOMÉTBIE. Solution. — Imaginons encore un angle trièdre O défini comme précédemment et coupé par les plans pa \_d rallèles ABC, A'B'C'. Regardons le triangle A'B'C' comme la base supérieure d'un prisme auxiliaire ayant |K)uraréteCC' (qui représente la droite cc'o dont la direction est connue ) ; et soit A, B, C la base inférieure de ce prisme ; A, B, C sera inscrit dans l'angle ACB et sera égal et parallèle à A'B'C'. Si nous passons maintenant de la figure de resjiace à ea projection, nous parviendrons facilement à cette constniction : Trarrrr ilans la jiùrlie arcfssible de l'angle aob les pa- • rallèles ab, a'b' \ par a' et b', parallèlement à M'f mener les droites indéfinies n'rt, et b' b, que Pon coupe par une transversale parallèle h ab\ mener enfin les droites aa,, bb, qui se coupent en un point c apparrcnfl/j/n/<f//>/tccAer<^ec cc'o. On peutd'aiHeurs, si on le veut, obtenir un second point c' do la même droite , en achevant la construction du triangle a'b'c' parallèle à abe. \* Tboisième qcestiox. — Théorème. — Propriétés des pôles et des polaires dans les coniques. Soient AEBF une section conique quelconque et CD une droite située dans son plan. Concevons que la courbe tourne autour de l'un de ses axes AB, de manière à engendrer une surface de révolution, et -concevons les deux plans tangents à cette surface menés par la droite CD ; ces plans auront leurs points de contact particuliers C' et D', et la droite C'D' sera perpendiculaire au plan de ;la courbe .AEBF, et rencontrera ce plan en un point déterminé N. Cela posé, si l'on conçoit le cône ayant pour sommet un point quelconque H de la droite CD et circonscrit à la surface de révolution, il louchera celte surface suivant une courbe passant nécessairement par les deux points C'etD'. Cette courbe, C'...D', sera plane; son plan, qui contiendra la droite C'ND' perpendiculaire au plan de la section AEBF, coupera ce dernier suivant une droite EF passant par le point déjà déterminé N, et cette droite EF sera précisément la corde réunissant les points de contact des tangentes menées à la section conique par le point H. On retrouve donc ainsi l'une des propriétés des pôles (N) et des polaires (CD) dans les courbes du second degré. { Voir \e& Séances des Écoles normales , tome n , page 356 ; Monge. ) Quatrième question. — Théorème de Brianchon. Soit abca'b'e' un hexagone circonscrit à une ellipse (E). Dig.îi7^<! by GoosU



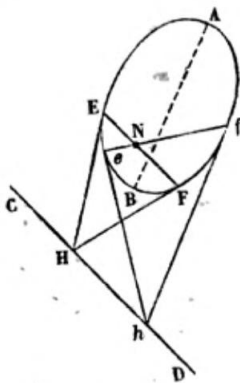
*Solution.* — Imaginons encore un angle trièdre  $O$  défini comme précédemment et coupé par les plans parallèles  $ABC$ ,  $A'B'C'$ . Regardons le triangle  $A'B'C'$  comme la base supérieure d'un prisme auxiliaire ayant pour arête  $CC'$  (qui représente la droite  $cc'o$  dont la direction est connue); et soit  $A_1 B_1 C_1$  la base inférieure de ce prisme;  $A_1 B_1 C_1$  sera inscrit dans l'angle  $ACB$  et sera égal et parallèle à  $A'B'C'$ . Si nous passons maintenant



de la figure de l'espace à sa projection, nous parviendrons facilement à cette construction : Tracer dans la partie accessible de l'angle  $aob$  les parallèles  $ab$ ,  $a'b'$ ; par  $a'$  et  $b'$ , parallèlement à  $dd'$ , mener les droites indéfinies  $a'a_1$  et  $b'b_1$  que l'on coupe par une transversale  $a_1b_1$  parallèle à  $ab$ ; mener enfin les droites  $aa_1$ ,  $bb_1$  qui se coupent en un point  $c$  appartenant à la droite cherchée  $cc'o$ . On peut d'ailleurs, si on le veut, obtenir un second point  $c'$  de la même droite, en achevant la construction du triangle  $a'b'c'$  parallèle à  $abc$ .

**TROISIÈME QUESTION. — THÉORÈME. — Propriétés des pôles et des polaires dans les coniques.**

Soient  $AEBF$  une section conique quelconque et  $CD$  une droite située



dans son plan. Concevons que la courbe tourne autour de l'un de ses axes  $AB$ , de manière à engendrer une surface de révolution, et concevons les deux plans tangents à cette surface menés par la droite  $CD$ ; ces plans auront leurs points de contact particuliers  $C'$  et  $D'$ , et la droite  $C'D'$  sera perpendiculaire au plan de la courbe  $AEBF$ , et rencontrera ce plan en un point déterminé  $N$ . Cela posé, si l'on conçoit le cône ayant pour sommet un point quelconque  $H$  de la droite  $CD$  et circonscrit à la surface de révolution, il touchera cette surface suivant une courbe passant nécessairement par les deux

points  $C'$  et  $D'$ . Cette courbe,  $C'...D'$ , sera plane; son plan, qui contiendra la droite  $C'ND'$  perpendiculaire au plan de la section  $AEBF$ , coupera ce dernier suivant une droite  $EF$  passant par le point déjà déterminé  $N$ , et cette droite  $EF$  sera précisément la corde réunissant les points de contact des tangentes menées à la section conique par le point  $H$ . On retrouve donc ainsi l'une des propriétés des pôles ( $N$ ) et des polaires ( $CD$ ) dans les courbes du second degré. (Voir les *Séances des Écoles normales*, tome II, page 356; MONGE.)

**QUATRIÈME QUESTION. — THÉORÈME DE BRIANCHON.**

Soit  $abca'b'c'$  un hexagone circonscrit à une ellipse ( $E$ ).

PHEMIÈRE PiBTIE. ■9 Regardons les côtés de cet hexagone comme les projections, sur le plan de l'ellipse, de sU- génératrices rectilignes d'un hyperboloïde auxiliaire à une nappe dont l'ellipse proposée serait l'ellipse de gorge.' Toutefois, comme chacun de ces côtés reçoit la projection de deux génératrices de la surface, nous entendrons que deux côtés consécutifs de l'hexagone reçoivent les projections de deux génératrices de systèmes différents, lesquelles se rencontrent, par conséquent, sur la perpendiculaire au plan de l'ellipse donnée, menée par l'extrémité commune à ces deux côtés. \* On aperçoit facilement alors que les six génératrices forment un circuit fermé, ou "Cm hexagone gauche ABCA'B'C'A, et que les côtés opposés de cet hexagone sont deux à deux dans un même plan. Il en résulte que les diagonales AA', BB', CC', qui joignent les sommets opposés de l'hexagone gauche, sont deux à deux dans le même plan. » . Or, si l'on supposait un moment que ces diagonales se coupent deux à deux en des points différents, 7, a, p, on en conclurait que les six points A, B, C, A', B', C' sont dans un même plan, ce qui n'est pas; donc les diagonales de l'hexagone gauche se coupent en un même point O ; donc il en est de même de leurs projections, c'est-à-dire des diagonales tui', bb\ cc' de l'hexagone plan nbca'b'c'. c. q. f. d. ' Scolic^ — On démontrerait avec la même facilité et par les mêmes considérations que ; Si dans un polygone de 4 m 2 côtés, circonscrit à une conique y im diagonales, joignant les sommets opposés, se coupent en un même point o, la dernière diagonale passera aussi par le point o. La condition que le nombre des sommets du polygone soit de la forme  $4n + 2$  résulte, dans ce mode de démonstration, de la nécessité que la génératrice initiale et la génératrice extrême soient de systèmes différents et puissent, en se rencontrant, fermer le circuit. . CIXQCIÈME OCESTION. — THÉORÈME DE PASCAL. Le théorème de Pascal se déduit avec la même facilité de la figure précédente. Observons, en effet, que les plans ABC, A'B'C; BCA', B'C'A; CA'B', C'AB se coupent deux à deux, suivant trois droites situées dans un même plan P (et ce plan P est déterminé par les trois points AB A'B', BC B'C, CA C'). Les traces de ces plans sur le plan de l'ellipse de gorge se couvriront, par suite, deux à deux, suivant trois points situés en ligne droite (et cette droite sera la trace du plan P sur le plan de l'ellipse de gorge). Or ce résultat démontre le théorème en question, car les traces dont nous parlons sont précisément les côtés opposés d'un hexagone \* inscrit à l'ellipse de gorge,

et dont les sommets coïncident avec les points de contact des côtés de l'hexagone circonscrit  $abca'b'c'$ . Digitized by Google

## 20 RF.S méthodes en GEOMETRIE. 13. OMZIÈEIE

MÉTHODE. — Par la transformation des figures, — Reflexions générales sur l'importance de cette méthode. — Cette méthode, l'une des plus importantes et des plus fécondes de la géométrie, est certainement celle qui a le plus puissamment servi les géomètres de notre siècle dans leurs efforts pour reculer les bornes de la science de leurs prédécesseurs. Ceux-ci paraissent l'avoir à peu près ignorée, et c'est à peine si quelques-uns l'emploient accidentellement, dans des applications isolées ; Cavalieri, par exemple, en faisant naître la parabole du second degré de la spirale d'Archimède par un mode particulier de dérivation qui, n'altérant pas les éléments superficiels correspondants des deux figures, lui permit de déduire de l'expression connue des aires paraboliques celle des aires spirales ; Grégoire de Saint-Vincent et Pascal, qui traitèrent le même sujet avec de grands développements ; Newton, qui donna, en passant, les formules qui servent de base à la construction des figures homologues ; et Maclaurin, qui appliqua à divers sujets de géométrie et de mécanique la méthode si féconde et si rapide des projections. Dans notre siècle, au contraire, d'éminents géomètres, parmi lesquels nous citerons M.M. Poncelet, Chasles et Ch. Dupin, ont cultivé cette méthode avec une sorte de prédilection. Ainsi chacun connaît les élégantes transformations par lesquelles Al. Ch. Dupin (\*) est parvenu à une déduction si lumineuse des théorèmes d'Euler et de Monge sur la courbure des surfaces, ainsi que les belles et nombreuses propriétés des courbes et des surfaces du second degré, découvertes par M.M. Poncelet (\*\*) et Chasles (""), à l'aide de transformations purement géométriques. C'est donc de nos jours seulement que cette méthode a réellement pris naissance ; et, des fruits qu'elle a déjà portés, des rapprochements inattendus qu'elle établit si fréquemment entre des figures diverses, il est permis de conclure qu'elle constitue la véritable méthode en géométrie, et doit le mieux contribuer à agrandir indéfiniment le champ des vérités géométriques, sans introduire, par ce nombre considérable de vérités nouvelles ajoutées à celles déjà acquises, aucune confusion dans la science. Elle aura, en effet, pour point de départ l'ensemble des vérités simples, élémentaires qui doivent être toujours présentes à l'esprit, et pour instruments les divers modes de transformation déjà découverts et que leur classification permettra d'appliquer à telle figure déterminée que l'on aura à envisager. Nous allons donner, comme exemple

de la méthode actuelle, les principes relatifs à la transformation des figures  
par rayons focaux réciproques, et leur application à plusieurs propositions  
de géométrie plane et sphérique. (\*) Développement de Géométrie. (\*\*)   
Traité des propriétés projectives. ', (\*\*•) Mémoire sur deux principes  
(Général de la science: La Dualité Vtonioffraptie. . • ' Dkji--- r

, ; PREMIÈRE PARTIE. 31 Cette partie de notre travail ne sera pas inutile, si l'on trouve que le nouveau mode d'exposition de la trigonométrie sphérique qu'elle renferme permet d'établir dans un parallélisme plus complet les formules analytiques relatives aux triangles sphériques, et leurs principales propriétés géométriques ; car c'est là, ce nous semble, le critérium de l'excellence de telle ou telle méthode appliquée à un problème donné : que la source à laquelle le calcul vient puiser ses formules successives s'en tienne en mémoire de centre aux investigations de la géométrie.

CHAPITRE II. ' De la transformation des figures par rayons vecteurs réciproques. § 1. — PRINCIPES GÉNÉRAUX. RÈGLES A LA TRANSFORMATION DES FIGURES PAR RAYONS VECTEURS RÉCIPROQUES. 1. i. Définitions préliminaires. — Point-origine. — Puissance. — Deux points m et m' sont dits réciproques par rapport à un point o, appelé l'origine, et suivant une puissance V, positive ou négative, lorsqu'ils sont situés sur une même droite passant par le point o et que le produit de leurs distances à ce point est égal à la puissance P. Si le point m se meut et engendre dans son mouvement une ligne L (ou une surface S), le point m' réciproque du premier, par rapport à une même origine et suivant une même puissance, engendrera une ligne L' (ou une surface S') réciproque de la première. Enfin si l'on a un système quelconque de points isolés, de lignes et de surfaces formant une figure F, les points, les lignes et les surfaces réciproques, par rapport à une même origine et suivant une même puissance, formeront une figure F' réciproque de la première; et la transformation par laquelle on passe de la première figure à la seconde porte le nom de transformation par rayons vecteurs réciproques'.

13. Relation entre la distance de deux points d'une figure et la distance des points correspondants de la figure réciproque. — Soient m, m' les distances de deux points correspondants des deux figures. De la relation fondamentale «  $om \cdot om' = P$  » on tire  $\frac{om}{om'} = \frac{P}{om'^2}$ . Les triangles omn, om'n' sont donc semblables et fournissent la proportion, «  $\frac{om}{om'} = \frac{m}{m'} \cdot \frac{P}{om'^2}$  ». De là, en remplaçant om (ou om') par sa valeur — (ou —, si —, il vient  $om = \frac{P}{om'}$ ) (A) on a  $\frac{om}{om'} = \frac{P}{om'^2}$ . Digitized by Google

Cette partie de notre travail ne sera pas inutile, si l'on trouve que le nouveau mode d'exposition de la trigonométrie sphérique qu'elle renferme permet d'établir dans un parallélisme plus complet les formules analytiques relatives aux triangles sphériques, et leurs principales propriétés géométriques; car c'est là, ce nous semble, le criterium de l'excellence de telle ou telle méthode appliquée à un problème donné: que la source à laquelle le calcul vient puiser ses formules successives serve en même temps de centre aux investigations de la géométrie.

## CHAPITRE II.

### De la transformation des figures par rayons vecteurs réciproques.

#### § I. — PRINCIPES GÉNÉRAUX RELATIFS A LA TRANSFORMATION DES FIGURES PAR RAYONS VECTEURS RÉCIPROQUES.

##### 14. Définitions des figures réciproques. — Point-origine. — Puissance.

— Deux points  $m$  et  $m'$  sont dits *réciproques* par rapport à un point  $o$ , appelé point *origine*, et suivant une *puissance*  $P$ , positive ou négative, lorsqu'ils sont situés sur une même droite passant par le point  $o$  et que le produit de leurs distances à ce point est égal à la puissance  $P$ .

Si le point  $m$  se meut et engendre dans son mouvement une ligne  $L$  (ou une surface  $S$ ), le point  $m'$  réciproque du premier, par rapport à une même origine et suivant une même puissance, engendrera une ligne  $L'$  (ou une surface  $S'$ ) réciproque de la première.

Enfin si l'on a un système quelconque de points isolés, de lignes et de surfaces formant une figure  $F$ , les points, les lignes et les surfaces réciproques, par rapport à une même origine et suivant une même puissance, formeront une figure  $F'$  réciproque de la première; et la transformation par laquelle on passe de la première figure à la seconde porte le nom de *transformation par rayons vecteurs réciproques*.

15. Relation entre la distance de deux points d'une figure et la distance des points correspondants de la figure réciproque. — Soient  $mn$ ,  $m'n$  les distances de deux points correspondants des deux figures.

De la relation fondamentale

$$om \cdot om' = on \cdot on' = P,$$

on tire

$$\frac{om}{on} = \frac{on'}{om'}.$$

Les triangles  $omn$ ,  $on'm'$  sont donc semblables et fournissent la proportion

$$\frac{mn}{m'n'} = \frac{om}{on'}.$$

De là, en remplaçant  $om$  (ou  $on'$ ) par sa valeur  $\frac{P}{on}$  (ou  $\frac{P}{om'}$ ), il vient

$$mn = \frac{m'n'}{D}.$$

32 DES MÉTHODES EN GÉOMÉTRIE. (A') • P. Ainsi : La distance entre deux points de P une des figures est égale à la distance des points correspondants de la seconde , divisée par le produit des rayons vecteurs qui aboutissent à ces derniers points, et multipliée par la puissance.

THÉORÈME I. — Les angles correspondants sont égaux dans deux figures réciproques. Démonstration. — Lemme. — Le rayon vecteur qui aboutit à deux points correspondants de deux lignes réciproques , coupe celles-ci sous des angles supplémentaires . Menons en effet un rayon voisin du rayon  $omm'$  , et joignons  $mn$ ,  $m'n'$ . L'égalité fondamentale  $om \cdot ont' = on \cdot on'$  , montre que le quadrilatère  $mnn'm'$  est inscriptible, et que, par suite, la somme des angles  $m$  et  $n'$  est égale à deux droits. D'ailleurs, si l'on suppose que le rayon  $onn'$  se rapproche indéfiniment du rayon  $omm'$ , on voit : 1° que la somme des angles  $m'$ ,  $n'$  tend vers deux droits, et , par suite, que les angles variables  $m$ ,  $m'$  tendent vers l'égalité ; 2° que dans ce rapprochement, les cordes correspondantes variables  $mn$ ,  $m'n'$  tendant simultanément vers les tangentes  $mt$ ,  $m't'$  en  $m$ ,  $m'$  aux deux lignes réciproques, les angles  $m$ ,  $m'$  du quadrilatère variable  $mnn'm'$  ont pour limites respectives les angles  $m'mt$ ,  $mm'i'$ . Ces derniers sont donc égaux, et les angles  $omt$ ,  $om't'$  sont supplémentaires. . Cela posé, soient  $mt$  ,  $mt'$ , les tangentes de deux lignes de la première figure qui se coupent au point  $m$ , et  $m't'$ ,  $m'é$ , les , tangentes en  $m'$  aux lignes correspondantes de la figure réciproque. Nous supposons d'ailleurs  $mt$  et  $m't'$ ,  $mt$ , et  $m'é$ , (qui sont deux à deux dans un même plan) , dirigées de part et d'autre du rayon  $omm'$ . Sous cette condition, les triangles, formés aux points  $m$  et  $m'$  par les droites  $mo$ ,  $mt$  ,  $mt'$ , et  $m'o$ ,  $m't'$ ,  $m'é$ , , seront égaux , comme ayant un angle dièdre égal (dièdre suivant  $om =$  dièdre suivant  $om'$ ), compris entre des faces égales (à  $s \wedge N \wedge$  savoir  $omt = om't'$  ,  $omt' = om't$  }, ces égalités ayant lieu en vertu du lemme et à cause des directions opposées de  $mt$  ,  $m't'$ ,  $Aemt$ ,  $m'é$ ). Les troisièmes faces



ou

$$(A') \quad m'n' = \frac{mn}{om \cdot on} \cdot P.$$

Ainsi : La distance entre deux points de l'une des figures est égale à la distance des points correspondants de la seconde, divisée par le produit des rayons vecteurs qui aboutissent à ces derniers points, et multipliée par la puissance.

16. THÉOREME I. — Les angles correspondants sont égaux dans deux figures réciproques.

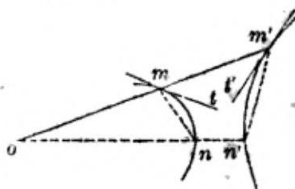
Démonstration. — LEMME. — Le rayon vecteur qui aboutit à deux points correspondants de deux lignes réciproques, coupe celles-ci sous des angles supplémentaires.

Menons en effet un rayon  $onn'$  voisin du rayon  $omm'$ , et joignons  $mn$ ,  $m'n'$ .

L'égalité fondamentale

$$om \cdot om' = on \cdot on'$$

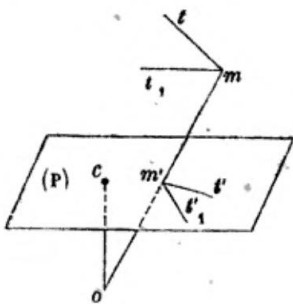
montre que le quadrilatère  $mnn'm'$  est inscriptible, et que, par suite, la somme des angles  $m$  et  $n'$  est égale à deux droits. D'ailleurs, si l'on suppose



que le rayon  $onn'$  se rapproche indéfiniment du rayon  $omm'$ , on voit : 1° que la somme des angles  $m$ ,  $n'$  tend vers deux droits, et, par suite, que les angles variables  $m$ ,  $m'$  tendent vers l'égalité ; 2° que dans ce rapprochement, les cordes correspondantes variables  $mn$ ,  $m'n'$  tendant simultanément vers les tangentes  $mt$ ,  $m't'$  en  $m$ ,  $m'$  aux deux lignes réciproques,

les angles  $m$ ,  $m'$  du quadrilatère variable  $mnn'm'$  ont pour limites respectives les angles  $m't$ ,  $m't'$ . Ces derniers sont donc égaux, et les angles  $omt$ ,  $om't'$  sont supplémentaires.

Cela posé, soient  $mt$ ,  $mt_1$  les tangentes de deux lignes de la première figure qui se coupent au point  $m$ ; et  $m't'$ ,  $m't'_1$  les tangentes en  $m'$  aux lignes correspondantes de la figure réciproque. Nous supposons d'ail-



leurs  $mt$  et  $m't'$ ,  $mt_1$  et  $m't'_1$  (qui sont deux à deux dans un même plan), dirigées de part et d'autre du rayon  $omm'$ . Sous cette condition, les trièdres, formés aux points  $m$  et  $m'$  par les droites  $mo$ ,  $mt$ ,  $mt_1$  et  $m'o$ ,  $m't'$ ,  $m't'_1$ , seront égaux, comme ayant un angle dièdre égal (dièdre suivant  $om$  = dièdre suivant  $om'$ ), compris entre des faces égales (à savoir  $\widehat{omt} = \widehat{om't}$  et  $\widehat{omt_1} = \widehat{om't'_1}$ , ces égalités ayant lieu en vertu du lemme et à cause

PREMIÈRE PARTIE. sont donc égales, et l'on a 23 (//, =r Ce qui montre d'abord que l'angle formé par deux lignes d'une figure est égal à l'angle des lignes correspondantes de la figure réciproque. Enfin, si dans la figure primitive on a deux surfaces  $S, S'$ , se coupant suivant la courbe  $mn$ , et que par l'un de ses points  $m$  on mène sur chacune d'elles les lignes  $ma, ma'$ , coupant à angle droit la ligne commune  $mn$ , l'angle des lignes  $ma, ma'$  mesurera l'angle sous lequel se coupent les deux surfaces au point  $m$ . Or, d'après ce qui précède, si l'on passe à la figure réciproque, les lignes  $m'a', m'n'$ , (réciproques de  $ma, ma'$ ), couperont encore à angle droit la ligne  $m'n'$  commune aux deux surfaces réciproques  $S', S$ ; l'angle de ces dernières, au point  $m'$ , sera donc encore mesuré par l'angle des lignes  $m'a', m'a'$ ; et comme ce dernier est égal à l'angle des lignes  $ma, ma'$ , on voit en second lieu que : L'angle de deux surfaces en un point  $m$  de leur courbe d'intersection est égal à l'angle des surfaces réciproques au point correspondant  $m'$ . Corollaire. — Si l'angle de deux surfaces demeure constant tout le long de leur courbe d'intersection {et si, en particulier, cet angle constant est droit), il en sera de même pour les surfaces réciproques. Scolie. — Le principe de la conservation des angles dans deux figures réciproques et la possibilité d'exprimer la distance de deux points quelconques de l'une de ces figures en fonction de distances qui se rapportent uniquement à la seconde, permettent fréquemment de substituer à l'étude de certaines propriétés métriques et descriptives d'une figure, une étude analogue pour la figure réciproque. Nous verrons bientôt les avantages spéciaux que présente cette substitution dans l'étude des propriétés des figures sphériques.

17. Propriétés particulières de deux surfaces réciproques. Théorème II. — Deux surfaces réciproques quelconques jouissent des propriétés suivantes : 1°. Toute ligne de courbure de la première surface a pour ligne réciproque une ligne de courbure de la seconde ; 2°. Aux lignes de plus grande ou de plus petite courbure de la première correspondent les lignes de plus petite ou de plus grande courbure de la seconde; et par suite à un ombilic de l'une des surfaces correspond un ombilic de l'autre; 3°. Si l'on désigne par  $r, r'$  les rayons vecteurs qui aboutissent à deux points réciproques  $m, m'$  des deux surfaces; par  $p, p'$  les rayons de courbure des sections principales de la première surface en  $m$ ; par  $p', p'$  les rayons de courbure des sections

principtdes correspondantes tic la secontlc surface en m', on aura la relation  
(A) Digitized by Google

sont donc égales, et l'on a

$$\widehat{mt}_1 = \widehat{m't'_1}.$$

Ce qui montre d'abord que l'angle formé par deux lignes d'une figure est égal à l'angle des lignes correspondantes de la figure réciproque.

Enfin, si dans la figure primitive on a deux surfaces  $S, S_1$ , se coupant suivant la courbe  $mn$ , et que par l'un de ses points  $m$  on mène sur chacune d'elles les lignes  $ma, ma_1$ , coupant à angle droit la ligne commune  $mn$ , l'angle des lignes  $ma, ma_1$  mesurera l'angle sous lequel se coupent les deux surfaces au point  $m$ . Or, d'après ce qui précède, si l'on passe à la figure réciproque, les lignes  $m'a', m'_1a'_1$  (réciproques de  $ma, ma_1$ ), couperont encore à angle droit la ligne  $m'n'$  commune aux deux surfaces réciproques  $S', S'_1$  : l'angle de ces dernières, au point  $m'$ , sera donc encore mesuré par l'angle des lignes  $m'a', m'_1a'_1$ ; et comme ce dernier est égal à l'angle des lignes  $ma, ma_1$ , on voit en second lieu que : *L'angle de deux surfaces en un point  $m$  de leur courbe d'intersection est égal à l'angle des surfaces réciproques au point correspondant  $m'$ .*

**COROLLAIRE.** — *Si l'angle de deux surfaces demeure constant tout le long de leur courbe d'intersection (et si, en particulier, cet angle constant est droit), il en sera de même pour les surfaces réciproques.*

**Scolie.** — Le principe de la conservation des angles dans deux figures réciproques et la possibilité d'exprimer la distance de deux points quelconques de l'une de ces figures en fonction de distances qui se rapportent uniquement à la seconde, permettent fréquemment de substituer à l'étude de certaines propriétés métriques et descriptives d'une figure, une étude analogue pour la figure réciproque.

Nous verrons bientôt les avantages spéciaux que présente cette substitution dans l'étude des propriétés des figures sphériques.

#### 17. Propriétés particulières de deux surfaces réciproques.

**THÉORÈME II.** — *Deux surfaces réciproques quelconques jouissent des propriétés suivantes :*

1°. *Toute ligne de courbure de la première surface a pour ligne réciproque une ligne de courbure de la seconde ;*

2°. *Aux lignes de plus grande ou de plus petite courbure de la première correspondent les lignes de plus petite ou de plus grande courbure de la seconde ; et par suite à un ombilic de l'une des surfaces correspond un ombilic de l'autre ;*

3°. *Si l'on désigne par  $r, r'$  les rayons vecteurs qui aboutissent à deux points réciproques  $m, m'$  des deux surfaces ; par  $\rho, \rho_1$  les rayons de courbure des sections principales de la première surface en  $m$  ; par  $\rho', \rho'_1$  les rayons de courbure des sections principales correspondantes de la seconde surface en  $m'$ , on aura la relation*

$$r \left( \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_1} \right) = r' \left( \frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho'_1} \right).$$

a4 DES MÉTHODES EN GÉOMÉTRIE. 4°. Enfin, si Von désigne par  $R, R'$  les rayons de courbure de deux sections normales correspondantes des deux surfaces, on a, quelles que soient les sections considérées autour des points  $m, m'$ . Ut relation (B)  $R \cdot R' = \text{constante}$ . Observation. — Nous ne nous arrêterons pas à démontrer ces propriétés que nous avons dû énoncer parce qu'elles peuvent être utiles, mais qui ne sont pas essentielles à l'objet que nous avons eu en vue. ■ 18. Théorème UI. — Une circonférence a pour ligne réciproque, par rapport à P un quelconque de ses points pris pour origine, une ligne droite perpendiculaire au diamètre origine. . , ' . Corollaire. — Une sphère a pour surface réciproque, par rapport à P un quelconque de ses points, pris pour origine, un plan perpendiculaire au diamètre origine. Remarque. — Il est peut être inutile d'ajouter que, par inversion, une droite et un plan ont pour réciproques une circonférence et une sphère. 19. Théorème IV. — Une circonférence a pour ligne réciproque, par rapport à un point quelconque de son plan, une seconde circonférence. Corollaire I. — Une surface a pour surface réciproque par rapport à un point quelconque de l'espace, une seconde surface. Remarque. — Les centres de deux circonférences, ou de deux surfaces réciproques, sont sur une même droite passant par l'origine. Corollaire II. — La ligne réciproque d'une circonférence par rapport à un point quelconque de l'espace, pris pour origine, est une circonférence. Il suffit, pour le démontrer, de regarder la circonférence donnée comme l'intersection de deux sphères auxiliaires  $S, S'$ . Car la ligne réciproque de cette circonférence devant coïncider avec l'intersection des sphères  $S', S$ , réciproques des premières, sera elle-même une circonférence. (Poussin's Annales de Mathématiques, 1854, p. 38.)

20. Nouvelles définitions. — Relations entre une figure sphérique et sa projection stéréographique. On sait que l'on appelle projection stéréographique d'une figure sphérique, la projection (ou perspective) de cette figure que l'on obtient en prenant pour centre de projection (ou point de vue) un point de la sphère, et pour plan de projection (ou plan du tableau) le plan diamétral perpendiculaire au rayon qui aboutit au centre de projection. \* Or, de cette définition et du corollaire du théorème III, il résulte que la transformée, par rayons vecteurs réciproques, d'une figure sphérique coïncide avec sa projection stéréographique lorsque, l'origine des rayons vecteurs coïncidant avec le point de vue, on suppose la

/juissance égale à deux fois le carré du rayon de la sphère. ' l.a  
transformation des figures sphériques par projection stéréographique "ized by  
Google

4°. Enfin, si l'on désigne par  $R$ ,  $R'$  les rayons de courbure de deux sections normales correspondantes des deux surfaces, on a, quelles que soient les sections considérées autour des points  $m$ ,  $m'$ , la relation

$$(B) \quad \frac{r}{R} + \frac{r'}{R'} = \text{constante.}$$

*Observation.* — Nous ne nous arrêtons pas à démontrer ces propriétés que nous avons dû énoncer parce qu'elles peuvent être utiles, mais qui ne sont pas essentielles à l'objet que nous avons en vue.

18. THÉORÈME III. — Une circonférence a pour ligne réciproque, par rapport à l'un quelconque de ses points pris pour origine, une ligne droite perpendiculaire au diamètre origine.

COROLLAIRE. — Une sphère a pour surface réciproque, par rapport à l'un quelconque de ses points, pris pour origine, un plan perpendiculaire au diamètre origine.

*Remarque.* — Il est peut être inutile d'ajouter que, par inversion, une droite et un plan ont pour réciproques une circonférence et une sphère.

19. THÉORÈME IV. — Une circonférence a pour ligne réciproque, par rapport à un point quelconque de son plan, pris pour origine, une seconde circonférence.

COROLLAIRE I. — Une sphère a pour surface réciproque par rapport à un point quelconque de l'espace, pris pour origine, une seconde sphère.

*Remarque.* — Les centres de deux circonférences, ou de deux sphères réciproques, sont sur une même droite passant par l'origine.

COROLLAIRE II. — La ligne réciproque d'une circonférence par rapport à un point quelconque de l'espace, pris pour origine, est une circonférence.

Il suffit, pour le démontrer, de regarder la circonférence donnée comme l'intersection de deux sphères auxiliaires  $S$ ,  $S_1$ . Car la ligne réciproque de cette circonférence devant coïncider avec l'intersection des sphères  $S'$ ,  $S'_1$  réciproques des premières, sera elle-même une circonférence. (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1854, p. 238.)

20. Nouvelles définitions. — Relations entre une figure sphérique et sa projection stéréographique.

On sait que l'on appelle *projection stéréographique* d'une figure sphérique, la projection (ou perspective) de cette figure que l'on obtient en prenant pour centre de projection (ou point de vue) un point de la sphère, et pour plan de projection (ou plan du tableau) le plan diamétral perpendiculaire au rayon qui aboutit au centre de projection.

Or, de cette définition et du corollaire du théorème III, il résulte que la transformée, par rayons vecteurs réciproques, d'une figure sphérique coïncide avec sa projection stéréographique lorsque, l'origine des rayons vecteurs coïncidant avec le point de vue, on suppose la *puissance* égale à deux fois le carré du rayon de la sphère.

PREMIÈRE PARTIE. 15 m que étant dès lors un cas [réciproque] de la transformation par rayons vecteurs réciproques, on peut, en réunissant les résultats précédents, énoncer ce théorème : THÉORÈME V. — Étant donnée une figure sphérique et sa projection stéréographique : 1°. On peut déterminer (d'après la formule (A') du n° 13, page 22), la distance entre deux points quelconques de la figure projetée, en fonction de distances prises uniquement dans la figure sphérique ; 2°. Les angles correspondants des deux figures sont égaux ; 3°. Un cercle de la figure sphérique a pour projection stéréographique un cercle ; 4°. Enfin, le centre du cercle projection coïncide avec la projection du sommet du cône, circonscrit à la sphère suivant le cercle primitif. Cette dernière remarque, que l'on doit à M. Chasles, constitue un théorème important par ses nombreuses applications ; pour cette raison, nous en donnerons deux démonstrations, l'une plus élémentaire, et l'autre déduite du corollaire du théorème I. Première démonstration. — Soient  $sm$  une génératrice du cône circonscrit à la sphère suivant le cercle considéré ;  $s'$  et  $m'$  les projections du sommet du cône et du point  $m$  du cercle suivant le centre de projection stéréographique  $o$  ; joignons  $s'm'$ . D'après le 1°, lemme du théorème I (ou par une démonstration directe fort simple),  $ms$  étant tangente à la sphère, le rayon vecteur  $om'$  coupe, sous des angles supplémentaires, la tangente  $ws$  ; et sa projection  $m's'$ . Les triangles  $om's'$ ,  $oms$  ont donc l'angle commun  $o$  et les angles  $gn m'$  et  $m$  supplémentaires ; par suite (d'après un théorème qui manque dans les éléments de géométrie), les côtés de ces triangles, opposés aux angles égaux et supplémentaires, sont proportionnels, et l'on a  $s'm' os' sm os' = d'où sm = sm \cdot$  et comme la génératrice du cône  $sm$  conserve une valeur constante,  $os'$  sont des grandeurs fixes, on voit que le point  $m'$ , projection du point  $m$ , décrit une circonférence dont le centre est  $v'$ , projection du point  $a$ . Seconde démonstration. — Imaginons une sphère auxiliaire  $S$ , ayant pour centre le sommet  $a$  du cône circonscrit à la sphère  $S$  suivant le cercle considéré, et passant par ce cercle. Celui-ci sera dès lors l'intersection des deux sphères orthogonales  $S, S'$ . Or, si l'on forme la figure réciproque par rapport au point  $o$  de la sphère  $S$ , celle-ci se transforme suivant le plan diamétral de projection  $P$ , et la sphère  $S$ , est remplacée par une sphère  $S''$ , dont le centre est quelque part sur le rayon  $oa$ , et qui est d'ailleurs coupée orthogonalement par le plan  $P$  (corollaire du théo-



que étant dès lors un cas particulier de la transformation par rayons vecteurs réciproques, on peut, en réunissant les résultats précédents, énoncer ce théorème :

**THÉORÈME V.** — *Étant données une figure sphérique et sa projection stéréographique :*

1°. *On peut exprimer (d'après la formule (A') du n° 15, page 22), la distance entre deux points quelconques de la figure projetée, en fonction de distances prises uniquement dans la figure sphérique ;*

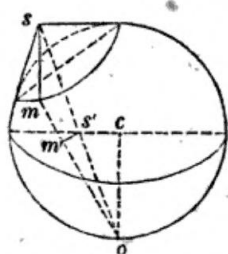
2°. *Les angles correspondants des deux figures sont égaux ;*

3°. *Un cercle de la figure sphérique a pour projection stéréographique un cercle ;*

4°. *Enfin, le centre du cercle projection coïncide avec la projection du sommet du cône circonscrit à la sphère suivant le cercle primitif.*

Cette dernière remarque, que l'on doit à M. Chasles, constitue un théorème important par ses nombreuses applications ; pour cette raison, nous en donnerons deux démonstrations, l'une plus élémentaire, et l'autre déduite du corollaire du théorème I.

*Première démonstration.* — Soient  $sm$  une génératrice du cône circonscrit à la sphère suivant le cercle considéré ;  $s'$  et  $m'$  les projections du sommet du cône et du point  $m$  du cercle suivant le centre de projection stéréographique  $o$  ; joignons  $s'm'$ . D'après le



lemme du théorème I (ou par une démonstration directe fort simple),  $ms$  étant tangente à la sphère, le rayon vecteur  $om'm$  coupe, sous des angles supplémentaires, la tangente  $ms$  et sa projection  $m's'$ . Les triangles  $om's'$ ,  $oms$  ont donc l'angle commun  $o$  et les angles en  $m'$  et  $m$  supplémentaires : par suite (d'après un théorème qui manque dans les éléments de géométrie), les côtés de ces

triangles, opposés aux angles égaux et supplémentaires, sont proportionnels, et l'on a

$$\frac{s'm'}{sm} = \frac{os'}{os}, \quad \text{d'où} \quad s'm' = sm \cdot \frac{os'}{os};$$

et comme la génératrice du cône  $sm$  conserve une valeur constante, que  $os'$ ,  $os$  sont des grandeurs fixes, on voit que le point  $m'$ , projection du point  $m$ , décrit une circonférence dont le centre est  $s'$ , projection du point  $s$ .

*Seconde démonstration.* — Imaginons une sphère auxiliaire  $S_1$  ayant pour centre le sommet  $s$  du cône circonscrit à la sphère  $S$  suivant le cercle considéré, et passant par ce cercle. Celui-ci sera dès lors l'intersection des deux sphères orthogonales  $S, S_1$ . Or, si l'on forme la figure réciproque par rapport au point  $o$  de la sphère  $S$ , celle-ci se transforme suivant le plan diamétral de projection  $P$ , et la sphère  $S_1$  est remplacée par une sphère  $S'_1$ , dont le centre est quelque part sur le rayon  $os$ , et qui

20 DES MÉTHODES DE STÉRÉOGRAPHIE. Règle I). Cette dernière circonstance exige que le centre de la sphère  $S'$ , soit situé dans le plan  $P$ , et coïncide par conséquent avec le point  $s'$  projection du sommet  $s$ . Le cercle primitif, intersection des sphères  $S, S'$ , a donc pour réciproque le grand cercle déterminé dans la sphère  $S'$ , par le plan  $PJ$  et celui-ci a pour centre le centre même de la sphère  $S'$ , c'est-à-dire le point  $s'$ , projection du sommet du cône circonscrit. Corollaire. — Etant donné un cercle  $U' C$  et un point intérieur  $o$ , on peut toujours [et d'une infinité de manières d'ailleurs) le projeter centralement suivant un cercle  $C'$  qui ait pour centre le point  $o'$ , projection du point donné  $o$ . Il suffit, en effet, pour satisfaire, à cette double condition, de faire passer une sphère quelconque par le cercle donné, et de former ensuite la projection stéréographique de ce dernier, en prenant pour point de vue l'un des deux points d'intersection de la sphère avec la droite qui joint le point donné  $o$ , au sommet du cône circonscrit à la sphère suivant le cercle  $J$  donné. Observation. — Le mode de transformation par rayons vecteurs réciproques, employé d'abord par M. W. Thomson, sous le nom de principe des images, a été étudié par M. Liouville dans un beau Mémoire que l'on trouve dans le Journal de Mathématiques, tome XII, page 275. § II. — Application des principes précédents à diverses propositions DE GÉOMÉTRIE PLANE. 21. Transformation des propriétés descriptives des figures planes composées de lignes droites ou circulaires. " La figure réciproque d'un polygone rectiligne ou... par rapport à un point quelconque  $o$  de son plan, est un polygone curviligne  $a'b'c'...$ , formé par des arcs de cercle qui se croisent au point  $o$  : de cette remarque et du principe de l'égalité des angles dans deux figures réciproques, on déduit les propositions suivantes : 1°. La somme des angles d'un polygone circulaire ou,  $a'b'c'...$ , est égale autant de fois deux droits qu'il y a de côtés moins deux dans le polygone. Dans un triangle circulaire ou,  $a' b' c'$ , si l'on mène par le point  $o$  et par chaque sommet un arc de cercle, divisant en deux parties égales l'angle en ce sommet, ou perpendiculaire au côté opposé, les trois arcs hauteurs, ou les trois arcs bissecteurs obtenus, se couperont suivant les deux mêmes points. 3°. Le lieu géométrique du second point d'intersection de deux circonférences qui passent respectivement par les points fixes  $o$  et  $A$ ,  $o$  et  $B$ , et qui se coupent sous un angle constant, est une circonférence. Soit une figure plane composée de trois cercles qui se coupent deux à deux ; on sait que les

cordes communes à ces circonférences, prises deux à deux, se coupent en un même point. Si l'on forme la figure réciproque on obtient ce théorème :  
 4\*. Étant données trois circonférences situées dans le même plan, si, par un même point  $o$ , et par les intersections de deux quelconques

rème I). Cette dernière circonstance exige que le centre de la sphère  $S'_1$  soit situé dans le plan  $P$ , et coïncide par conséquent avec le point  $s'$  projection du sommet  $s$ . Le cercle primitif, intersection des sphères  $S, S'_1$ , a donc pour réciproque le grand cercle déterminé dans la sphère  $S'_1$  par le plan  $P$ ; et celui-ci a pour centre le centre même de la sphère  $S'_1$ , c'est-à-dire le point  $s'$ , projection du sommet du cône circonscrit.

**COROLLAIRE.** — *Étant donné un cercle  $C$  et un point intérieur  $o$ , on peut toujours (et d'une infinité de manières d'ailleurs) le projeter centralement suivant un cercle  $C'$  qui ait pour centre le point  $o'$ , projection du point donné  $o$ .*

Il suffit, en effet, pour satisfaire à cette double condition, de faire passer une sphère quelconque par le cercle donné, et de former ensuite la projection stéréographique de ce dernier, en prenant pour point de vue l'un des deux points d'intersection de la sphère avec la droite qui joint le point donné  $o$ , au sommet du cône circonscrit à la sphère suivant le cercle donné.

*Observation.* — Le mode de transformation par rayons vecteurs réciproques, employé d'abord par M. W. Thomson, sous le nom de *principe des images*, a été étudié par M. Liouville dans un beau Mémoire que l'on trouve dans le *Journal de Mathématiques*, tome XII, page 275.

## § II. — APPLICATION DES PRINCIPES PRÉCÉDENTS À DIVERSES PROPOSITIONS DE GÉOMÉTRIE PLANE.

**21. Transformation des propriétés descriptives des figures planes composées de lignes droites ou circulaires.**

La figure réciproque d'un polygone rectiligne  $abc...$  par rapport à un point quelconque  $o$  de son plan, est un polygone curviligne  $a'b'c'...$ , formé par des arcs de cercle qui se croisent au point  $o$ : de cette remarque et du principe de l'égalité des angles dans deux figures réciproques, on déduit les propositions suivantes :

1°. *La somme des angles d'un polygone circulaire  $o, a'b'c'...$ , est égal à autant de fois deux droits qu'il y a de côtés moins deux dans le polygone.*

2°. *Dans un triangle circulaire  $o, a'b'c'$ , si l'on mène par le point  $o$  et par chaque sommet un arc de cercle, divisant en deux parties égales l'angle en ce sommet, ou perpendiculaire au côté circulaire opposé, les trois arcs hauteurs, ou les trois arcs bissecteurs ainsi obtenus, se couperont suivant les deux mêmes points.*

3°. *Le lieu géométrique du second point d'intersection de deux circonférences qui passent respectivement par les points fixes  $o$  et  $A, o$  et  $B$ , et qui se coupent sous un angle constant, est une circonférence.*

Soit une figure plane composée de trois cercles qui se coupent deux à deux : on sait que les cordes communes à ces circonférences, prises deux à deux, se coupent en un même point. Si l'on forme la figure réciproque on obtient ce théorème :

4°. *Étant données trois circonférences situées dans le même plan, si,*

PREMIÈRE PARTIE. ' 2'] ques (Centre elles, on fait passer un cercle, les trois noncelles circonférences ainsi obtenues se couperont suivant les dcujc mêmes points. Soit la figure formée par tes différentes normales d'une circonférence, qui passent toutes par le centre c. Formons la figure réciproque par rapport à un point quelconque , -o , du même plan. Si l'on désigne par a et b tes extrémités du diamètre ce par a' , b' , c' les réciproques de a, b, c, par rapport au point o, on verra facilement que le point c' est conjugué harmonique du point o, par rapport aux extrémités a' et b' du diamètre ' oh' c'a' de la circonférence réciproque. Car la relation en ~ eu de la figure primitive ehtraîfte la suivante dans la figure réciproque ; \* \* • \* c'a' c'b' c'a' c' h' —, — r, ou -7-; = ^,; (K- .0(1 m- .OU o a o où on aura donc ce théorème : i, 5°. lyCS circonférences passant par un point fixe o , et coupant orthogonalement une circonférence donnée, se coupent suivant les deux mêmes jxiints o et o', conjugués harmoniques par rapport (/u.c extrémités du diamètre que la dsoite 00' détermine clans la circonférenof donnée. Considérons encore un angle fixe et tous les systèmes dç deux circon• férences tangentes entre elles et inscrites dans cet angle ;.lo lieu des points du contact t de ces circonférences est évidemment la bissectrice de l'angle considéré ; et si , en outre , on mènq, par un point fixe o , une circonférence tangente en t aux deux circonférences de l'un des systèmes, toutes les circonférences ainsi obtenues passeront évidemment par un point fixe o' ( symétrique du point o par rapport à la bissectrice do l'angle ).. Cela posé , la figure réciproque fournit ce théorème : 6°. Si dans Pespace compris entre deux arcs de cercles qui .se coupent, on inscrit une infinité de systèmes de deux cercles tangents entre eux, le lieu géométrhpie de leur point de contact est un arc de cercle , et Cenveloppc de leur tangente commune se réduit à un jmint. Proposons-nous enfin, comme application du corollaire du théorème V (page 26), de démontrer cette proposition ; 7°. Un polygone de 4 /« -1- 2 côtés circonscrit à un cercle, présentant un I diagonales c/ui réunissent les sommets opposés , si un de ces diaDigitized by Google

ques d'entre elles, on fait passer un cercle, les trois nouvelles circonférences ainsi obtenues se couperont suivant les deux mêmes points.

Soit la figure formée par les différentes normales d'une circonférence, qui passent toutes par le centre  $c$ . Formons la figure réciproque par rapport à un point quelconque,  $o$ , du même plan. Si l'on désigne par  $a$  et  $b$  les extrémités du diamètre  $cc$ ; par  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$  les réciproques de  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , par rapport au point  $o$ , on verra facilement que le point  $c'$  est conjugué harmonique du point  $o$ , par rapport aux extrémités  $a'$  et  $b'$  du diamètre  $\overline{ob'a'}$  de la circonférence réciproque. Car la relation

$$ca = cb$$

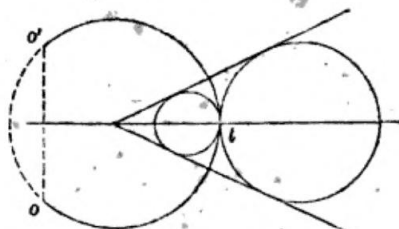
de la figure primitive entraîne la suivante dans la figure réciproque :

$$\frac{c'a'}{oc' \cdot oa'} = \frac{c'b'}{oc' \cdot ob'} \quad \text{ou} \quad \frac{c'a'}{o'a'} = \frac{c'b'}{o'b'};$$

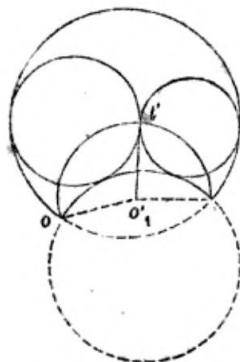
on aura donc ce théorème :

5°. Les circonférences passant par un point fixe  $o$ , et coupant orthogonalement une circonférence donnée, se coupent suivant les deux mêmes points  $o$  et  $o'$ , conjugués harmoniques par rapport aux extrémités du diamètre que la droite  $oo'$  détermine dans la circonférence donnée.

Considérons encore un angle fixe et tous les systèmes de deux circonférences tangentes entre elles et inscrites dans cet angle : le lieu des points du contact  $t$  de ces circonférences est évidemment la bissectrice de l'angle considéré; et si, en outre, on mène, par un point fixe  $o$ , une circonférence tangente en  $t$  aux deux circonférences de l'un des systèmes, toutes les circonférences ainsi obtenues passeront évidemment par un point fixe  $o'$  (symétrique du point  $o$  par rapport à la bissectrice de l'angle). Cela posé, la figure réciproque fournit ce théorème :



6°. Si dans l'espace compris entre deux arcs de cercles qui se coupent, on inscrit une infinité de systèmes de deux cercles tangents entre eux, le lieu géométrique de leur point de contact est un arc de cercle, et l'enveloppe de leur tangente commune se réduit à un point.



Proposons-nous enfin, comme application du corollaire du théorème V (page 26), de démontrer cette proposition :

7°. Un polygone de  $4m + 2$  côtés circonscrit à un cercle, présentant

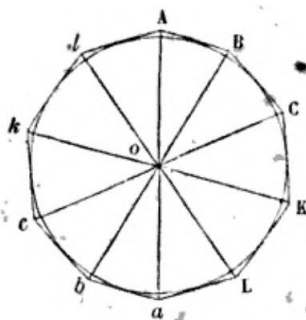
28 DES MÉTHODES ÉLÉMENTAIRES DE GÉOMÉTRIE.

Soit un polygone circonscrit d'un nombre pair de côtés (nous n'ajoutons pas que ce nombre pair est de la forme  $4n - 2$ , la démonstration que nous allons donner devant nous conduire d'elle-même à cette condition), et dans lequel les diagonales  $BO, CO, \dots, KO$ , passant par le centre  $O$  du cercle inscrit ; joignons  $AO$ , et établissons que la somme des angles formés d'un côté de la ligne  $AO$  est égale à la somme des angles formés de l'autre côté de cette ligne ; ou, si l'on désigne en général par  $F$  l'angle formé par la droite  $OF$  avec le rayon qui aboutit au point de contact de l'une des tangentes issues du sommet  $F$ , démontrons l'égalité  $\angle AOF + \angle BOF + \angle COF + \dots + \angle KOF = \angle AOF + \angle BOF + \angle COF + \dots + \angle KOF$  ou, en simplifiant, l'égalité  $\angle BOF + \angle COF + \dots + \angle KOF = \angle BOF + \angle COF + \dots + \angle KOF$ . Or, les lignes  $BO, CO, \dots, KO$  étant droites, on a les égalités  $\angle BOC = \angle COB$ ,  $\angle COE = \angle OCE$ , etc. ou, en remplaçant chacun de ces angles, tels que  $\angle DOE$ , par sa valeur,  $\angle DOE = \frac{1}{2}(\angle BOC + \angle COE) = \frac{1}{2}(\angle COB + \angle OCE)$ . Ajoutant toutes ces égalités membre à membre, on trouve l'égalité (x), et le théorème se trouve démontré. Remarque. — Pour que la combinaison des relations (B) entraîne l'égalité (x), il faut et il suffit que les angles qui entrent dans les relations (B) soient tous différents ; et, par suite, que les angles entre lesquels existent les relations (A) n'aient aucun côté commun. D'où l'on voit que si le nombre des égalités (A) est  $m$ , les rayons  $OB, OC, \dots, OK, OL$  seront

gonales concourent en un même point, la dernière diagonale passera elle-même par le point de concours de toutes les autres.

Il suffirait évidemment, pour établir cette proposition, de faire voir que l'on peut projeter la figure considérée de telle façon, que la projection de la dernière diagonale passe par le point  $O$ , commun aux projections de toutes les autres. Donc, en vertu du principe contenu dans le corollaire du théorème V (page 26), il suffira d'établir le théorème énoncé pour le cas où le point d'intersection  $O$  des  $2m$  diagonales concourantes coïncide avec le centre du cercle inscrit au polygone.

Soit donc  $ABC...KLabc...kl$ , un polygone circonscrit d'un nombre



pair de côtés (nous n'ajoutons pas que ce nombre pair est de la forme  $4m+2$ , la démonstration que nous allons donner devant nous conduire d'elle-même à cette condition), et dans lequel les diagonales  $Bb, Cc, ..., Kk, Ll$ , passent par le centre  $O$  du cercle inscrit : joignons  $AO, aO$ , et établissons que la somme des angles formés d'un côté de la ligne  $AOa$  est égale à la somme des angles formés de l'autre côté de cette ligne ; ou, si l'on désigne

en général par  $F$  l'angle formé par la droite  $OF$  avec le rayon qui aboutit au point de contact de l'une des tangentes issues du sommet  $F$ , démontrons l'égalité

$$A + 2B + 2C + ... + 2K + 2L + a = a + 2b + 2c + ... + 2K + 2l + A;$$

ou, en simplifiant, l'égalité

$$(x) \quad B + C + D + ... + H + K + L = b + c + d + ... + h + k + l.$$

Or, les lignes  $BOb, ..., LOl$  étant droites, on a les égalités

$$(A) \quad BOC = bOc, \quad DOE = dOc, ..., KOL = kOl;$$

ou, en remplaçant chacun de ces angles, tels que  $DOE$ , par sa valeur,  $D + E$ ,

$$(B) \quad \begin{cases} B + C = b + c, \\ D + E = d + e, \\ \vdots \\ K + L = k + l. \end{cases}$$

Ajoutant toutes ces égalités membre à membre, on trouve l'égalité  $(x)$ , et le théorème se trouve démontré.

*Remarque.* — Pour que la combinaison des relations  $(B)$  entraîne l'égalité  $(x)$ , il faut et il suffit que les angles qui entrent dans les relations  $(B)$  soient tous différents; et, par suite, que les angles entre lesquels existent les relations  $(A)$  n'aient aucun côté commun. D'où l'on voit que si

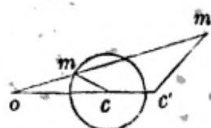


PREMIÈRE PARTIE. 39 au nombre de  $2h_i$ , les sommets B, C,..., K, L, / seront donc au nombre de  $4'«$ ; et en tenant compte des sommets A, on voit que le polygone doit avoir  $4w + a$  sommets pour que la démonstration précédente réussisse.

22. Transformation des propriétés métriques. — Dans un plan, le lieu géométrique des points m également éloignés d'un point fixe c, est par définition une circonférence. Formant la figure réciproque par rapport à un point du même plan, et désignant par et c' les réciproques des points m et r, on aura, <l'après la formule (A) du n<sup>o</sup> dS (page ai), et l'on voit que le rapport demeurera constant. Donc I. Le lieu géométrique des points dont les distances à deux points fixes ont un rapport constant, est une circonférence, «• Soient trois points en ligne droite et se succédant dans l'ordre », b, c. On a, entre les distances de ces points, la relation évidente  $ac = ab - bc$ . Formant la figure réciproque', par rapport à un point extérieur o, on obtient un quadrilatère inscriptible oa'b'c', et la relation (i) est remplacée par celle-ci :  $a'c' = a'b' - b'c'$  (I) • 1 T — » 77 “1 TT T' ' OU .OC oa.ol) ob .oc > qu'on peut écrire (2),  $a'.c'.oV = oa'.b'c' + oc'.a'b'$ . Ainsi ; a. Dans un quadrilatère inscrit à une circonférence, le rectangle des diagonales est équivalent à la somme des rectangles des côtés opposés. 3. Réciproquement, si un quadrilatère présente cette propriété, ses sommets o, a', b', c' tiennent à une même circonférence.. Car la relation (a), ou ce qui revient au même, la relation (i'), ayant lieu entre les distances mutuelles des quatre sommets o, a', b', c' du quadrilatère considéré, si l'on construit les points a,b,c réciproques de a', b\ c' par rapport au point o, on aura, entre les distances de ces nouveaux points, la relation (i),  $ac = ab - bc$ . Digitized by Google

au nombre de  $2m$ ; les sommets  $B, C, \dots, K, L, b, c, \dots, k, l$  seront donc au nombre de  $4m$ ; et en tenant compte des sommets  $A, a$ , on voit que le polygone doit avoir  $4m + 2$  sommets pour que la démonstration précédente réussisse.

22. *Transformation des propriétés métriques.* — Dans un plan, le lieu géométrique des points  $m$  également éloignés d'un point fixe  $c$ , est par définition une circonférence. Formant la figure réciproque par rapport à un point  $o$  du même plan, et désignant par  $m'$  et  $c'$  les réciproques des points  $m$  et  $c$ , on aura, d'après la formule (A) du n° 15 (page 21),



$$mc = \frac{m'c'}{om' \cdot oc'} P,$$

et l'on voit que le rapport  $\frac{c'm'}{om'}$  demeurera constant. Donc

1. *Le lieu géométrique des points dont les distances à deux points fixes ont un rapport constant, est une circonférence.*

Soient trois points en ligne droite et se succédant dans l'ordre  $a, b, c$ ; on a, entre les distances de ces points, la relation évidente

$$(1) \quad ac = ab + bc.$$

Formant la figure réciproque, par rapport à un point extérieur  $o$ , on obtient un quadrilatère inscriptible  $oa'b'c'$ , et la relation (1) est remplacée par celle-ci :

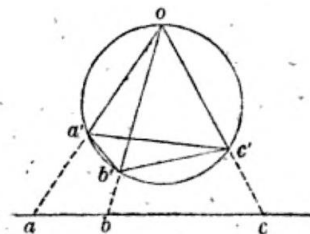
$$(1') \quad \frac{a'c'}{oa' \cdot oc'} = \frac{a'b'}{oa' \cdot ob'} + \frac{b'c'}{ob' \cdot oc'},$$

qu'on peut écrire

$$(2) \quad a'c' \cdot ob' = oa' \cdot b'c' + oc' \cdot a'b'.$$

Ainsi :

2. *Dans un quadrilatère inscrit à une circonférence, le rectangle des diagonales est équivalent à la somme des rectangles des côtés opposés.*



3. *Réciproquement, si un quadrilatère présente cette propriété, ses sommets  $o, a', b', c'$  appartiennent à une même circonférence.*

Car la relation (2), ou ce qui revient au même, la relation (1'), ayant lieu entre les distances mutuelles des quatre sommets  $o, a', b', c'$  du quadrilatère considéré, si l'on construit les points  $a, b, c$  réciproques de  $a', b', c'$  par rapport au point  $o$ , on aura, entre les distances de ces nouveaux points, la relation (1),

$$ac = ab + bc.$$

30 DES méthodes de géométrie. Les points  $a, b, c$  sont donc en ligne droite; et, par suite, les points  $f, b', c'$  appartiennent à une circonférence passant par le point  $o$ , et le quadrilatère  $oa'b'c'$  est inscriptible. c. o. F. n. 1. Entre les distances mutuelles des points  $a, b, c$  en ligne droite et leurs distances à un point extérieur  $o$ , existe la relation connue où  $bc + ot \cdot nb = ob \cdot ac$   $ab \cdot bc \cdot ac$ . Si l'on forme la figure réciproque par rapport au point  $o$  lui-même, on retrouve le théorème qui donne l'expression du rapport des diagonales dans un quadrilatère inscrit. Considérons enfin un nombre quelconque de points en ligne droite  $a, b, c, \dots, l$ , ils fournissent la relation  $ab + bc + \dots + bl = al$ . Formant la figure réciproque par rapport à un point extérieur  $o$ , et transformant la relation qui précède, on obtient ce théorème : 4. Si l'on a un nombre quelconque de points  $a, b, c, \dots, l$  situés sur une même circonférence et se succédant dans l'ordre  $a, b, c, \dots, l$ , entre les distances mutuelles de ces points existe la relation  $ab \cdot bc \cdot \dots \cdot kl = al \cdot oa \cdot ob \cdot oc \cdot \dots \cdot ol$ . Si le polygone ayant pour sommets les points  $a, b, c, \dots, l$  devient régulier, la relation se simplifie et l'on a ce théorème : 5. Si  $ab \cdot bc \cdot \dots \cdot kl$  est un polygone régulier et  $o$  un point du cercle circonscrit compris entre les sommets  $a$  et  $l$ , on a la relation  $ab \cdot bc \cdot \dots \cdot kl = al \cdot oa \cdot ob \cdot oc \cdot \dots \cdot ol$ . Scolie. — Les théorèmes généraux de M. Lhuillier sur des systèmes de points situés en ligne droite ( Géométrie supérieure, page 229 ) fourniraient, par des transformations analogues, des théorèmes correspondants sur des systèmes de points appartenant à une même circonférence. § III. — Application à la trigonométrie sphérique. 23. Énoncé des diverses propriétés des triangles sphériques, et conséquences de ces propriétés. — Les triangles sphériques jouissent de nombreuses propriétés analogues à celles des triangles rectilignes. Ainsi : Les trois arcs de grand cercle menés par les milieux des côtés perpendiculairement à ces côtés, se coupent suivant les deux mêmes points, extrémités d'un diamètre de la sphère ; il en est de même des arcs joignant chaque sommet au milieu du côté opposé, des arcs passant par chaque sommet et perpendiculaires au côté opposé, et enfin des arcs qui divisent en deux parties égales les angles du triangle.

PREMIÈRE PARTIE. 31 ' Les démonstrations que l'on connaît de ces propositions sont très-simples (\*), et il n'y aurait pas avantage à leur en substituer d'autres que l'on pourrait en déduire des principes précédents. Nous ferons d'ailleurs en passant cette remarque, que toute propriété descriptive d'un triangle sphérique fournit immédiatement une propriété analogue pour un système de trois circonférences qui se coupent deux à deux dans le même plan. Ainsi, par exemple, de ce que les trois arcs hauteurs d'un triangle sphérique se coupent suivant les deux mêmes points, il résulte que trois circonférences se coupant deux à deux dans le même plan, si, par les points communs à deux d'entre elles, on mène une circonférence coupant orthogonalement la troisième, les trois nouvelles circonférences ainsi obtenues se couperont suivant les deux mêmes points. (Plucker.) Il suffit en effet, pour parvenir à ce théorème, de joindre au principe rappelé plus haut cette observation, que trois circonférences qui se coupent deux à deux dans le même plan, peuvent être considérées comme les projections stéréographiques des trois côtés d'un triangle sphérique. 24. Démonstration du théorème de Lexell. — Énoncé d'un théorème de M. Steiner. — Construction du demi-excès sphérique. Théorème de Lexell. — Le lieu géométrique des sommets des triangles sphériques de même base et de surfaces équivalentes, est un petit cercle de la sphère, passant par les points diamétralement opposés aux extrémités de la base. Démonstration. — Soient ABC l'un des triangles que nous avons à considérer, et (i)  $2E = A + B + C - a$  l'excès sphérique donné mesurant l'aire de ce triangle. Soient a le centre de la sphère. A' et B' les points diamétralement opposés aux extrémités de la base donnée AB ; et formons la projection stéréographique de la figure en prenant pour centre de projection le point A'. Le triangle ABC a pour projection un triangle abc dont les côtés ab et ac sont rectilignes, le premier étant fixe et le second mobile autour du centre a. Le troisième côté bc est un arc de cercle passant par les points fixes b et b', projections des points B, B'. D'ailleurs si l'on mène les droites bt, et tangentes on ô, c à l'arc beb', les angles en a, b, c du quadrilatère rectiligne abet, étant respectivement égaux aux angles A, B, C du triangle sphérique, on aura, en désignant par l'angle bte,  $A + B + C - a = 2\pi$  ou  $A + B + C - a = 2\pi$  — (\*) Théorèmes et problèmes de Géométrie, de la FÉLIX ARTHUR et Catalan ; 2<sup>e</sup> édition, pages 215 et suivantes. Digitized by Google

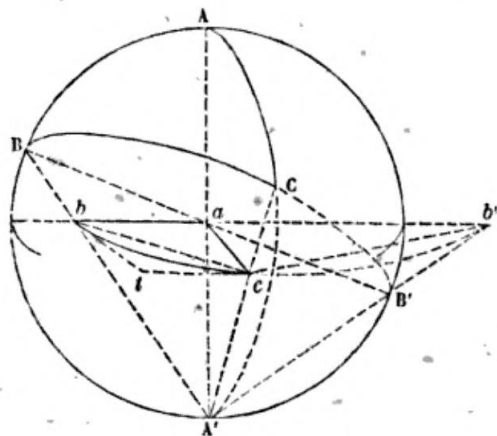
3-2 DES METHODES EN GÉOMÉTRIE. (le là, en vertu «le la relation donne (i), Or, si l'on mène la droite  $b'c$ , et que l'on désigne par  $P$  l'angle inscrit  $bb'c$ , on verra ; i° que l'angle  $t$  a pour mesure  $180$  degrés moins l'arc  $bc$  évalué en degrés ; 2° que ce dernier arc mesure le double de l'angle  $P$ , et que, par suite, on a l'égalité (3)  $t = 2P$  — La comparaison des relations (2) et (3) montre donc que le demi-excès sphérique  $E$  est constant dans la projection par l'angle  $P$  ou  $bb'c$  : cet angle est donc constant, et comme le côté  $b'c$  est fixe, ainsi que le sommet  $b'$ , on voit que, dans la projection, le lieu géométrique des sommets  $c$  des triangles  $abc$  est une ligne droite passant par le point  $o'$ . ■ Donc, on revenant à la figure primitive, on voit que le lieu géométrique des sommets  $C$  des triangles  $ABC$ , est la courbe déterminée dans la sphère par le plan mené par le point  $A'$  et par la droite  $b'e$ , c'est-à-dire un petit cercle de la sphère passant par les points  $A'$  et  $B'$ . c. q. f. d. Concl. I. — Du théorème précédent M. Steiner a déduit cette propriété des triangles sphériques ; les trois arcs de grand cercle passant par chaque sommet et divisant l'aire du triangle en deux parties équivalentes, se coupent suivant les deux mêmes points. Concl. II. — Dans la figure projetée, l'angle inscrit  $bli'c$  qui mesure le demi-excès sphérique  $E$ , est égal à l'angle  $c/t$ , c'est-à-dire à l'angle sous lequel la droite  $bc$  coupe la circonférence  $brb'$ . Il en résulte que le demi-excès est mesuré, sur la sphère, par l'angle du grand cercle  $BC$  avec le petit cercle déterminé par les trois points  $B$ ,  $C$  et  $A'$ . Cela posé, menons le grand cercle  $af$ , passant par les milieux des côtés  $AB$ ,  $AC$  et coupant en  $I$  le côté opposé  $BC$  ; traçons le grand cercle  $ap$  perpendiculaire au côté  $BC$  en son milieu  $a$ , et soit, sur ce grand cercle,  $P$  le pôle du petit cercle  $A'BC$ . Les rayons  $ao$ ,  $a^p$  de la sphère étant respectivement parallèles aux cordes  $A'B$ ,  $A'C$ , le point  $o$  est aussi le pôle du grand cercle  $af$ . Il résulte de là : 1° que les arcs  $pu$ ,  $2'$  sont complémentaires  $2E = 2'' - t$ , ou (2)  $(2' = 2'' - 2E$ . A Digitized by Google

et de là, en vertu de la relation donnée (1),

$$2E = 2^{\text{dr}} - \hat{t},$$

ou

$$(2) \quad \hat{t} = 2^{\text{dr}} - 2E.$$



Or, si l'on mène la corde  $b'c$ , et que l'on désigne par  $\hat{b}'$  l'angle inscrit  $bb'c$ , on verra : 1° que l'angle  $\hat{t}$  a pour mesure 180 degrés moins l'arc  $bc$  évalué en degrés; 2° que ce dernier arc mesure le double de l'angle  $\hat{b}'$ , et que, par suite, on a l'égalité

$$(3) \quad t = 2^{\text{dr}} - 2\hat{b}'.$$

La comparaison des relations (2) et (3) montre donc que le demi-excès sphérique  $E$  est mesuré dans la projection par l'angle  $\hat{b}'$  ou  $bb'c$  : cet angle est donc constant, et comme le côté  $b'b$  est fixe, ainsi que le sommet  $b'$ , on voit que, dans la projection, le lieu géométrique des sommets  $c$  des triangles  $abc$  est une ligne droite passant par le point  $b'$ . Donc, en revenant à la figure primitive, on voit que le lieu géométrique des sommets  $C$  des triangles  $ABC$ , est la courbe déterminée dans la sphère par le plan mené par le point  $A'$  et par la droite  $b'c$ , c'est-à-dire un petit cercle de la sphère passant par les points  $A'$  et  $B'$ . C. Q. F. D.

**COROLLAIRE I.** — Du théorème précédent M. Steiner a déduit cette nouvelle propriété des triangles sphériques :

*Les trois arcs de grand cercle passant par chaque sommet et divisant l'aire du triangle en deux parties équivalentes, se coupent suivant les deux mêmes points.*

**COROLLAIRE II.** — Dans la figure projetée, l'angle inscrit  $bb'c$  qui mesure le demi-excès sphérique  $E$ , est égal à l'angle  $cbt$ , c'est-à-dire à l'angle sous lequel la droite  $bc$  coupe la circonférence  $bc'b'$ . Il en résulte que le demi-excès est mesuré, sur la sphère, par l'angle du grand cercle  $BC$  avec le petit cercle déterminé par les trois points  $B$ ,  $C$  et  $A'$ .

Cela posé, menons le grand cercle  $\gamma\beta I$ , passant par les milieux des côtés  $AB$ ,  $AC$  et coupant en  $I$  le côté opposé  $BC$ ; traçons le grand cercle  $\alpha'zp$  perpendiculaire au côté  $BC$  en son milieu  $\alpha$ , et soit, sur ce grand cercle,  $p$  le pôle du petit cercle  $A'BC$ . Les rayons  $a\gamma$ ,  $a\beta$  de la sphère étant respectivement parallèles aux cordes  $A'B$ ,  $A'C$ , le point  $p$  est aussi le pôle

PREMIÈRE Partie 33  
 que les angles  $a, a'$  étant droits, les arcs  $la, la'$  sont des quadrants, et quo, par suite, l'angle  $l$  est mesuré par l'arc  $aa'$ . Or, si l'on mène maintenant l'arc du grand cercle  $l > C$ , le triangle  $l-aC$ , rectangle en  $a$  et dans lequel l'angle en  $G$  est le  $A$ . complément du demi-excès, fournira cette relation :  $\sin Ca = \frac{\text{lang} y}{\text{cotang} C}$ , ou enfin  $\sin l = \cotang aa' \cdot \text{lang} E \cdot \sin l = \text{tang} E \cdot \cotang l$ . ■, Celle formule démontre la construction suivante donnée par M. le professeur Gudermann ; Prendre sur le côté  $BC$ , à partir du point  $I$ , une  $IM$  égale à la moitié du côté  $BC$ , et mener par le point  $M$  le grand cercle  $MN$  perpendiculaire à  $IM$  et terminé par l'arc  $MN$  ainsi obtenu mesure le demi-excès sphérique. Soit. — Si la somme des angles du triangle  $ABC$  surpasse 4 droits, le point de concours des tangentes en  $b$  et  $c$  sera // situé du côté opposé à celui où se mesurent les angles de la figure projetée, qui sont égaux aux angles  $B$  et  $C$  du triangle ; -toutefois les mêmes conclusions subsisteront encore. En effet, la somme des angles intérieurs du quadrilatère  $abce$ , (où  $a$  présente alors un angle rentrant en  $a$ , est encore égale à 4 droits; on a donc, en observant que les angles  $on a, b$  et  $c$  du quadrilatère ont pour valeurs  $4 - A, 4 - B$  et  $4 - C$ , la relation  $A + (4 - B) + (4 - C) + 2 = 2\pi$  fin trouve facilement d'ailleurs  $i = \pi$ . Et l'on voit, comme précédemment, que l'angle  $on abe$  est égal au demi-excès sphérique. Il résulte de cette discussion le corollaire suivant, essentiel pour les applications que nous avons encore à exposer : Soit un triangle sphérique  $ABC$  et le triangle rectiligne  $abc$ .

mentaires; 2° que les angles  $\alpha$ ,  $\alpha'$  étant droits, les arcs  $I\alpha$ ,  $I\alpha'$  sont des quadrants, et quo, par suite, l'angle  $I$  est mesuré par l'arc  $\alpha\alpha'$ .

Or, si l'on mène maintenant l'arc de grand cercle  $pC$ , le triangle  $p\alpha C$ , rectangle en  $\alpha$  et dans lequel l'angle en  $C$  est le complément du demi-excès, fournira cette relation :

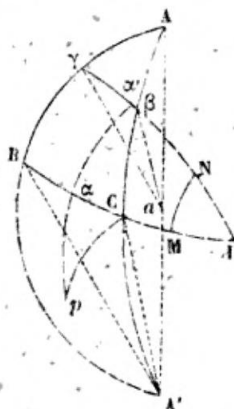
$$\sin C\alpha = \tan p\alpha \cdot \cotang \alpha Cp,$$

ou

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \cotang \alpha\alpha' \cdot \tan E,$$

ou enfin

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \tan E \cdot \cotang I.$$



Cette formule démontre la construction suivante donnée par M. le professeur Gudermann :

*Prendre sur le côté BC, à partir du point I, l'arc IM égal à la moitié du côté BC, et mener par le point M le grand cercle MN perpendiculaire à IM et terminé à l'arc Iβ; l'arc MN ainsi obtenu mesure le demi-excès sphérique.*

*Scolie.* — Si la somme des angles du triangle ABC surpasse 4 droits, le point de concours  $t$  des tangentes en  $b$  et  $c$  sera situé du côté opposé à celui où se mesurent les angles de la figure projetée, qui sont égaux aux angles B et C du triangle; toutefois les mêmes conclusions subsisteront encore. En effet, la somme des angles intérieurs du quadrilatère  $abtc$ , qui présente alors un angle rentrant en  $a$ , est encore égale à 4 droits; on a donc, en observant que les angles en  $a$ ,  $b$  et  $c$  du quadrilatère ont pour valeurs  $4^{\text{dr}} - A$ ,  $2^{\text{dr}} - B$  et  $2^{\text{dr}} - C$ , la relation

$$\widehat{t} + (4^{\text{dr}} - A) + (2^{\text{dr}} - B) + (2^{\text{dr}} - C) = 4^{\text{dr}},$$

ou

$$(2') \quad \widehat{t} = 2E - 2^{\text{dr}}.$$

On trouve facilement d'ailleurs

$$(3') \quad \widehat{t} = 2\widehat{b'} - 2^{\text{dr}}.$$

Et l'on voit, comme précédemment, que l'angle  $\widehat{b'}$  ou  $ab'c$  est égal au demi-excès sphérique.

Il résulte de cette discussion le corollaire suivant, essentiel pour les applications que nous avons encore à exposer :



The text on this page is estimated to be only 27.58% accurate

3/j ' DKS MÉTHODES F.\ r.ÉOMÉTKtE. ilimt lcs somnirts saut  
l?s i/iiijfitinns itercdf'rii/j/iiijifrx {suivant /c crntre üv fntjvrtiun A'  
ifitimcinili'luciit uppusc au suiniiwt A) des siaumets du premier, les a/if^lrs  
en a, h, e du irianj^le rertiUgne auront respct Itvement /tour râleurs A , U —  
K , C — I' , lî ilésio/iant le denii-e veès sjthèrii/ue. aux aiiÿlcs un a , h' ul r  
du Irianulu ab'r, (|ui' nous aurons aussi à considérer dans ce qui sui( , ds ont  
é\idcinnu'nt |«iur \alcurs i''' — A , l>, et A - R. JuaLlissemeat d< s itiverses  
formules de la trigonométrie s/thèra/ue. O. Uetalions entre les éléments îles  
triangles AIK' et ahr ; AUC. et niée. Nous désignerons conune à l'ordinaire  
par a, b. r lesrôtés du triangle spliérique AUC; et, quand nous aurons à les  
employer, |iar "o, b , , l?, e les angles des triaiiLrles rectilignes «éc. ab'r  
dont nous avons vonné les valeur^ en fonction de A, 11, C., K. C.ela posé,  
si l'on prend 4e ra\on U de la spliere pour unité île longueur, rinspection de  
la figure de la page 3'j nous 'donne iinmédialemi'iil : ab tang-i ai - tang-; ••  
'i ' -x (Aj , cotang-i f/<' rotang-; ■ g ' a et, par suite. t,b' -g:- , Slll r >\nb' ee'  
désignant la corde que en prolongée détermine dans la (ârconférence beb'.  
Rniin la formule f.\') du lé' Ki (piage rr), ilans laipielle nous devons  
renq/lacer la puissance P pur alC ou 2, nous donnera (li) be := lic. . ? A II.  
AC. . a sin •i h r . cr»s - fos •i. -A (/ , lu: A ii , A r. n sm •f h . r rus - siiï•/ A il  
est sans (inute inutile d'ajouter que ces formules ne doivent pas être n-  
lenues, et qu'il suflit d'apprendre à les ///r rapidement sur la li"ure. 1 . eus ti  
- cos h cüs r -f- si n /» sin c eos A . On a, ilans le triangle rerlilijîne nhv. U)  
be ■■ ab 4- (/< — •ioi.rtc eos A ; Digilized by GocJgle

dont les sommets sont les projections stéréographiques (suivant le centre de projection  $A'$  diamétralement opposé au sommet  $A$ ) des sommets du premier, les angles en  $a, b, c$  du triangle rectiligne auront respectivement pour valeurs  $A, B - E, C - E$ ,  $E$  désignant le demi-excès sphérique.

Quant aux angles en  $a, b'$  et  $c$  du triangle  $ab'c$ , que nous aurons aussi à considérer dans ce qui suit, ils ont évidemment pour valeurs  $2^{\text{de}} - A, E$ , et  $A - E$ .

23. Établissement des diverses formules de la trigonométrie sphérique.

o. Relations entre les éléments des triangles  $ABC$  et  $abc$ ;  $ABC$  et  $ab'c$ .

Nous désignerons comme à l'ordinaire par  $a, b, c$  les côtés du triangle sphérique  $ABC$ ; et, quand nous aurons à les employer, par  $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$ ,  $\hat{b}', \hat{c}$  les angles des triangles rectilignes  $abc, ab'c$  dont nous avons donné les valeurs en fonction de  $A, B, C, E$ . Cela posé, si l'on prend le rayon  $R$  de la sphère pour unité de longueur, l'inspection de la figure de la page 32 nous donne immédiatement :

$$(A) \quad \left\{ \begin{array}{l} ab = \tan \frac{c}{2}, \quad ac = \tan \frac{b}{2}; \\ ab' = \cot \frac{c}{2}, \quad ac' = \cot \frac{b}{2}; \\ \text{et, par suite,} \\ bb' = \frac{2}{\sin c}, \quad cc' = \frac{2}{\sin b}; \end{array} \right.$$

$cc'$  désignant la corde que  $ca$  prolongée détermine dans la circonférence  $beb'$ .

Enfin la formule (A') du n° 13 (page 22), dans laquelle nous devons remplacer la puissance  $P$  par  $2R^2$  ou 2, nous donnera

$$(B) \quad \left\{ \begin{array}{l} bc = \overline{BC} \frac{2}{\overline{A'B} \cdot \overline{A'C}} = \frac{\sin \frac{a}{2}}{\cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}}, \\ b'c = \overline{B'C} \frac{2}{\overline{A'B} \cdot \overline{A'C}} = \frac{\sin \frac{a}{2}}{\cos \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2}}. \end{array} \right.$$

Il est sans doute inutile d'ajouter que ces formules ne doivent pas être retenues, et qu'il suffit d'apprendre à les lire rapidement sur la figure.

$$1. \quad \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

On a, dans le triangle rectiligne  $abc$ ,

$$(1) \quad \overline{bc}^2 = \overline{ab}^2 + \overline{ac}^2 - 2 \overline{ab} \overline{ac} \cos A.$$

PREMIERE PARTIE. Remettant chaque ligne par sa valeur, réduisant au même dénominateur et supprimeant le dénominateur commun, il vient  $\sin A \sin B \sin C = \sin A' \sin B' \sin C'$ . Multipliant par  $\sin A$ , changeant les signes, ajoutant à aux deux membres et complétant le carré, on a  $\sin^2 A - \sin^2 A' = \sin^2 B \sin^2 C - \sin^2 B' \sin^2 C'$ . Or, d'après la formule (111), on a  $\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$ , etc. La construction sur laquelle repose la démonstration précédente, ne comporte d'autres restrictions que celles qui sont nécessaires pour la construction des points  $i, r$ . Or ces points pourront toujours être construits comme nous l'avons supposé dans la figure, quand les angles  $AA'B, AA'C$  seront moindres que le droit, c'est-à-dire quand les arcs  $c, h$ , qui mesurent les doubles de ces angles, seront moindres que 180 degrés; ce qui a toujours lieu dans les triangles sphériques si l'on considère  $\sin B = \sin B'$ ,  $\sin C = \sin C'$ . Désignons par  $r$  le rayon du cercle  $ABC$ , qui est coupé en un second point  $c'$  par la droite  $in$  prolongée. On sait que, dans un cercle, une corde quelconque est égale au diamètre multiplié par le sinus de l'angle formé par la corde avec la tangente menée par l'une de ses extrémités. Appliquant cette remarque à chacune des cordes  $bc', rc'$ , on a  $\sin B \sin C = \sin B' \sin C'$  et, en remplaçant  $hl'$  et  $ce'$ , par leurs valeurs. 3.  $\cot(7) \sin A = \cos A \cos C - \sin B \sin C \cos A$ . (111)  $\cos A = \cos B \cos C - \sin B \sin C \cos A$ . (112) La méthode analytique ordinaire permet de passer des formules établies dans les n° 1 et 2 à la formule (111); et la considération du triangle supplémentaire permet de déduire la formule (IV) de celle du n° 1. a. Fonnelles de Delumbr. On sait que, dans un triangle rectiligne dont les côtés sont  $a, b, c$ , et les angles opposés  $A, B, C$ , on a pour chaque côté la relation  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ ,  $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$ ,  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ . Digitized by Google

Remplaçant chaque ligne par sa valeur, réduisant au même dénominateur et supprimant le dénominateur commun, il vient

$$\sin^2 \frac{a}{2} = \sin^2 \frac{b}{2} \cos^2 \frac{c}{2} + \sin^2 \frac{c}{2} \cos^2 \frac{b}{2} - \frac{\sin b \sin c}{2} \cos A.$$

Multipliant par 2, changeant les signes, ajoutant 1 aux deux membres et remplaçant  $\cos^2 \frac{b}{2}$ ,  $\cos^2 \frac{c}{2}$ , par  $1 - \sin^2 \frac{b}{2}$ ,  $1 - \sin^2 \frac{c}{2}$ , il vient

$$\cos a = \left(1 - 2 \sin^2 \frac{b}{2}\right) \left(1 - 2 \sin^2 \frac{c}{2}\right) + \sin b \sin c \cos A,$$

ou enfin

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A. \quad (I)$$

*Remarque.* — La construction sur laquelle repose la démonstration précédente, ne comporte d'autres restrictions que celles qui sont nécessaires pour la construction des points  $b$ ,  $c$ . Or ces points pourront toujours être construits comme nous l'avons supposé dans la figure, quand les angles  $AA'B$ ,  $AA'C$  seront moindres que 1 droit, c'est-à-dire quand les arcs  $c$ ,  $b$ , qui mesurent les doubles de ces angles, seront moindres que 180 degrés; ce qui a toujours lieu dans les triangles sphériques que l'on considère.

$$2. \quad \frac{\sin B}{\sin C} = \frac{\sin b}{\sin c}.$$

Désignons par  $r$  le rayon du cercle  $bc'b'$ , qui est coupé en un second point  $c'$  par la droite  $ac$  prolongée. On sait que, dans un cercle, une corde quelconque est égale au diamètre multiplié par le sinus de l'angle formé par la corde avec la tangente menée par l'une de ses extrémités. Appliquant cette remarque à chacune des cordes  $bb'$ ,  $cc'$ , on a

$$2r = \frac{bb'}{\sin B} = \frac{cc'}{\sin C}, \quad \text{d'où} \quad \frac{\sin B}{\sin C} = \frac{bb'}{cc'}$$

et, en remplaçant  $bb'$  et  $cc'$  par leurs valeurs,

$$\frac{\sin B}{\sin C} = \frac{\sin b}{\sin c}. \quad (II)$$

$$3. \quad \cot a \sin b = \cos b \cos C + \sin C \cot A. \quad (III)$$

$$4. \quad \cos A = \cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a. \quad (IV)$$

La méthode analytique ordinaire permet de passer des formules établies dans les nos 1 et 2 à la formule (III); et la considération du triangle supplémentaire permet de déduire la formule (IV) de celle du n° 1.

##### 5. Formules de Delambre.

On sait que, dans un triangle rectiligne dont les côtés sont  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $c_1$ , et les angles opposés  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ , on a pour chaque côté la double relation

$$(b_1 + c_1) \sin A_1 = (b_1 - c_1) \sin A_1.$$

H6 ' DES  $m^{\wedge}$ :thode.s en nÉoMÉmiE. uu, en sim|>lifiant, ( h -4- r  
 $\wedge \sin \text{ — } (h \text{ — } r) \cos \text{ — } (A) n, = B, - C. U, - C, \text{ fir, ii} |> | \gg li(|U(\gg ns \text{ rn prcniirr}$   
 lieu relh\* donble iTldtitm au coté hc du triaiijilc riH'liligne on aint . (I sm  
 y. b .  $h \pm ii \sin = hc = : \text{ — } ' \text{ — } , b. d: r, = /7r \pm: ab = lanu \pm laiii \gg ' 0 r ' ' y y.$   
 $\cos - \cos y^2 b \cos - \cos y y B, - C, = \wedge ' - ? = (B - E) - \{C - E\} = H - C; A. > . n$   
 sulistilunnt res valeurs dans (aJ el siinplifiimt, il \ient . b -\r . X b — r A sin  
 sm “ sin ros. a y y y y rosB-C Appliquons rn scroml lieu les mêmes  
 relalions (A) au rôlû //<• du lriai^:le rectiligne ah'c, on aura a, ~ h'c = • ros•i  
 $\cos - sm \bullet 1 a < 1, \text{ db } r, = \ll r \pm ah' \text{ — } \tan u - \pm \text{rot} - = ri \text{ au } \pm \cos m h . r \cos -$   
 $\sin a a B, - 0, = ' ? ; ' - \wedge ' = E - (A - E) = aE - A = B + C - a - " .$  par suite ,  
 d'aiiletirs B, - C Substituant ces valeurs dans (A), et simplifiant, il vient h  
 $\text{ — } r A A - t - c , A \cos \text{ — } \cos - \cos \sin \cos = i . - T \hat{t} . \text{ — } = \text{ — } \text{ — } (V') \sin B - l - t' .$   
 $\cos B + C y$  Digiized by Google

ou, en simplifiant,

$$(A) \quad a_1 = \frac{(b_1 + c_1) \sin \frac{A_1}{2}}{\cos \frac{B_1 - C_1}{2}} = \frac{(b_1 - c_1) \cos \frac{A_1}{2}}{\sin \frac{B_1 - C_1}{2}}.$$

Or, appliquons *en premier lieu* cette double relation au côté  $bc$  du triangle rectiligne  $abc$ , on aura

$$a_1 = bc = \frac{\sin \frac{a}{2}}{\cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}}, \quad b_1 \pm c_1 = ac \pm ab = \tan \frac{b}{2} \pm \tan \frac{c}{2} = \frac{\sin \frac{b \pm c}{2}}{\cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}};$$

$$B_1 - C_1 = \widehat{b} - \widehat{c} = (B - E) - (C - E) = B - C; \quad A_1 = \widehat{a} = A.$$

En substituant ces valeurs dans (A) et simplifiant, il vient

$$\sin \frac{a}{2} = \frac{\sin \frac{b+c}{2} \sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{B-C}{2}} = \frac{\sin \frac{b-c}{2} \cos \frac{A}{2}}{\sin \frac{B+C}{2}}. \quad (V)$$

Appliquons *en second lieu* les mêmes relations (A) au côté  $b'c$  du triangle rectiligne  $ab'c$ , on aura

$$a_1 = b'c = \frac{\cos \frac{a}{2}}{\cos \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2}},$$

$$b_1 \pm c_1 = ac \pm ab' = \tan \frac{b}{2} \pm \cot \frac{c}{2} = \frac{\pm \cos \left( \frac{b \mp c}{2} \right)}{\cos \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2}},$$

$$B_1 - C_1 = \widehat{b'} - \widehat{c} = E - (A - E) = 2E - A = B + C - 2^{\text{dr}},$$

par suite,

$$\frac{B_1 - C_1}{2} = - \left( 1^{\text{dr}} - \frac{B + C}{2} \right);$$

d'ailleurs

$$\frac{A_1}{2} = 1^{\text{dr}} - \frac{A}{2}.$$

Substituant ces valeurs dans (A), et simplifiant, il vient

$$\cos \frac{a}{2} = \frac{\cos \frac{b-c}{2} \cos \frac{A}{2}}{\sin \frac{B+C}{2}} = \frac{\cos \frac{b+c}{2} \sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{B+C}{2}}. \quad (V')$$

PREMIÈRE PARTIE. 3? Les formules (V) et (V') sont les quatre formules découvertes par Delambre. On pourrait, en suivant la marche ordinaire, déduire ces analogies de la combinaison des relations précédentes. Mais comme, en général, on n'établit les formules de Delambre que dans le but d'arriver, par leur secours, aux analogies de Néper, il paraîtra sans doute préférable d'établir ces dernières directement, ainsi qu'il suit; i°. Le triangle rectiligne ABC nous donne cette formule connue.  $\tan A = \frac{a}{b} \cot C$ , ou  $\tan A \sin C = a \cos C$ . En substituant... le triangle ABC nous donne de même  $\tan B \sin C = b \cos C$ . On a d'ailleurs dans ce triangle  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$  (IM-C), d'où  $\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}$ ; d'où  $\tan A \sin C = \tan B \sin C \frac{\sin A}{\sin B}$ . Il vient donc, en substituant,  $\tan A \sin C = \tan B \sin C \frac{\sin A}{\sin B}$ . A lang-b  $\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}$ ,  $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ ,  $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$ . Les formules (VI) et (VI') forment deux des analogies de Néper; et la considération du triangle ABC (élémentaire) fournit les deux autres, à sa. Digitized by Google

Les formules (V) et (V') sont les quatre formules découvertes par Delambre.

#### 6. Analogies de Néper.

On pourrait, en suivant la marche ordinaire, déduire ces analogies de la combinaison des relations précédentes. Mais comme, en général, on n'établit les formules de Delambre que dans le but d'arriver, par leur secours, aux analogies de Néper, il paraîtra sans doute préférable d'établir ces dernières directement, ainsi qu'il suit :

1°. Le triangle rectiligne  $abc$  nous donne cette formule connue,

$$(B) \quad \operatorname{tang} \frac{\hat{b} - \hat{c}}{2} = \frac{ac - ab}{ac + ab} \cot \frac{\hat{a}}{2},$$

et de là, en substituant...

$$\operatorname{tang} \frac{B - C}{2} = \frac{\sin \frac{b - c}{2}}{\sin \frac{b + c}{2}} \cot \frac{A}{2} \quad (VI_1)$$

2°. Le triangle  $ab'c$  nous donne de même

$$(C) \quad \operatorname{tang} \frac{\hat{c} - \hat{b}'}{2} = \frac{ab' - ac}{ab' + ac} \cot \frac{\hat{a}}{2}.$$

On a d'ailleurs dans ce triangle

$$\hat{c} - \hat{b}' = A - 2E = 2^{\text{dr}} - (B + C); \quad \frac{\hat{a}}{2} = 1^{\text{dr}} - \frac{A}{2};$$

et

$$\frac{ab' - ac}{ab' + ac} = \frac{\cot \frac{c}{2} - \operatorname{tang} \frac{b}{2}}{\cot \frac{c}{2} + \operatorname{tang} \frac{b}{2}} = \frac{\cos \frac{b + c}{2}}{\cos \frac{b - c}{2}}.$$

Il vient donc, en substituant,

$$\cot \frac{B + C}{2} = \frac{\cos \frac{b + c}{2}}{\cos \frac{b - c}{2}} \operatorname{tang} \frac{A}{2},$$

ou

$$\operatorname{tang} \frac{B + C}{2} = \frac{\cos \frac{b - c}{2}}{\cos \frac{b + c}{2}} \cot \frac{A}{2} \quad (VI_2)$$

Les formules (VI<sub>1</sub>) et (VI<sub>2</sub>) forment deux des analogies de Néper; et la considération du triangle supplémentaire fournit les deux autres. À ce



38 voir et DES MCrMODES EX «GEOMETRIE. U - c b sm •  
 $\sin \frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c} \tan \frac{A}{2}$  (VIJ • À n ^ t .  
 X tx>s 7. E-irprcsiions des sinus et cosinus ilu demi-excès S/dièrii/ie. Le  
 triangle rectiligne nh'c, dans lequel l'angle c^st égal au ilemi-exc^s, donne  
 la relation (D) el de là , en substituant , siiii\* \_ ne b'c s\nu h . c h tang- • sin  
 $\sin E = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \sin A$ , ou enfin  $\cos \frac{1}{2} B \cdot \cos \frac{1}{2} C \sin \frac{1}{2} A = \sin \frac{1}{2} E$  (Vil)  
 n ' rosX cl si l'on veut remplacer dans cette formule sin A par sa valeur, il  
 vient  $\sin E = - \frac{a}{b} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$  (Vir) Si l'on  
 veut obtenir cosE, on appliquera au triangle nb'c la formule . connue (E)  
 $\cos E = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ , et par les mêmes substitutions on en déduira cosE  
 $= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \cos A$  (CX)S« — COS 6 COSr cot - + tang-\*cos A cos - cos - +  
 $\sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} - \sin^2 \frac{A}{2} = \cos^2 \frac{E}{2}$  SIU 0 sine a b . c cos - : COS- SI II 2 2 2 a COS- .  
 2 ou bien  $\cos E = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \cos A$  Digilized by Coôgle

voir :

$$\operatorname{tang} \frac{b-c}{2} = \frac{\sin \frac{B-C}{2}}{\sin \frac{B+C}{2}} \operatorname{tang} \frac{a}{2} \quad (\text{VI}_1)$$

et

$$\operatorname{tang} \frac{b+c}{2} = \frac{\cos \frac{B-C}{2}}{\cos \frac{B+C}{2}} \operatorname{tang} \frac{a}{2} \quad (\text{VI}_2)$$

7. *Expressions des sinus et cosinus du demi-excès sphérique.*

Le triangle rectiligne  $ab'c$ , dans lequel l'angle  $\hat{b}'$  est égal au demi-excès, donne la relation

$$(\text{D}) \quad \frac{\sin \hat{b}'}{\sin a} = \frac{ac}{b'c};$$

et de là, en substituant,

$$\sin E = \frac{\operatorname{tang} \frac{b}{2} \cdot \sin \frac{c}{2} \cos \frac{b}{2}}{\cos \frac{a}{2}} \sin A,$$

ou enfin

$$\sin E = \frac{\sin \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2}}{\cos \frac{a}{2}} \sin A; \quad (\text{VII})$$

et si l'on veut remplacer dans cette formule  $\sin A$  par sa valeur, il vient

$$\sin E = \frac{\sqrt{\sin p \cdot \sin(p-a) \cdot \sin(p-b) \sin(p-c)}}{2 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}}. \quad (\text{VII}')$$

Si l'on veut obtenir  $\cos E$ , on appliquera au triangle  $ab'c$  la formule connue

$$(\text{E}) \quad ab' = ac \cdot \cos \hat{a} + cb' \cos \hat{b}',$$

et par les mêmes substitutions on en déduira

$$\cos E = \frac{\cot \frac{c}{2} + \operatorname{tang} \frac{b}{2} \cos A}{\cos \frac{a}{2} : \cos \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2}} = \frac{\cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2} + \sin \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2} \cdot \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}}{\cos \frac{a}{2}},$$

ou bien

$$\cos E = \frac{\cos a - \cos b \cos c + 4 \cos^2 \frac{b}{2} \cos^2 \frac{c}{2}}{\cos a \cos b \cos c};$$

The text on this page is estimated to be only 29.59% accurate

(•RKMItK l>Altili:. Cl si l (ni icmiilatc cnlin diiiiis le numérateur u ces' - et l'i''' I -( cosA el 1 4-cos<' , il viendra déliuitivement  $\cos E \wedge I 4- \cos r t 4- \cos A -f- c( , n t > <: 4 \cos- \cos- \cos \bullet X \bullet \}$ . X a. /r/tn-saiou th' la Imigriile tlu ijuarl tir l'r.rrr\ xplirriiilir. Si, dans le triangle ah' r, on désigne [wr a, S, ■/ les côtés 0|H»osés aux angles rt, A', c, et par a et le périmètre a-f- [i y, ou a ... A' E /. 51— x)(ct — y) (+) tang—tang—y ; et si l'on calcule les valeurs do w, ct — etc., on trouve . ' 1' t' — a i! — A ~ r , tang - - i Utng • lang ~ • lang • lang — ( 1 X.) V ^ A X À (). lititolulion tics tritngles splirrit/iirs thial lrs rôles sont lrrs-pt:lils jMir rapitorl au rtuna tic Itt spltrrr. Throrcme ttiiah"iit: à rrlili tic Jj'jfcatlrc Nous désii^ierons , dans ce qui suit, («ir«. A, c et U les uombses qi mesurent, au moyen d'une même unité de longueur, les cotés du trianglr. sphérique et le rayon de la sphère. Les rapports seront îles sphérique et le rayon de la sphère. Les rapports ^ seront des nombres lrès-])etits, que nous appellerons des iafiaimrai /a'tits tla premier ortlre. Nous appellerons de même infiniment petits du .second, troif\* " sicme et quatrième ordre, des nombres tels qtic :jp' et nous désignerons ces infiniment petits des divers ordres par t, s', é', Cela posé, considérons comme précédemment {vtàr la figure de la page 3'il le triangle sphérique .MK'. , le triangle rectiligne «Ac el un second triangle rectiligne AD,C,, , .semblable à «Ac, de dimensions doubles et que l'on peut construire géométriquement en projetant les sommets B, C, du triangle sphérique, suivant le centre de projection et sur le plan tangent eu A. Les anghs du triangle rectiligne AB, C, auront pour valeurs exacles  $A^{\wedge} B, = B — E$  , C, = C — E ; et si l'on désigne ses côtés par a, , A, , c, , ou aura, en rélabli.ssant le rayon île la sphère dans les formules (.\) el (B) de la page 34» qui donnent «A, «c, Ac, •. rt, - 2 Ac X R sincos-^ • iT 2.11 2 R 2 R sin — n2 R Digitized by Google

et si l'on remplace enfin dans le numérateur  $2 \cos^2 \frac{b}{2}$  et  $2 \cos^2 \frac{c}{2}$  par  $1 + \cos b$  et  $1 + \cos c$ , il viendra définitivement

$$\cos E = \frac{1 + \cos a + \cos b + \cos c}{4 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}}. \quad (\text{VIII})$$

8. *Expression de la tangente du quart de l'excès sphérique.*

Si, dans le triangle  $ab'c$ , on désigne par  $\alpha, \beta, \gamma$  les côtés opposés aux angles  $a, b', c$ , et par  $2\varpi$  le périmètre  $\alpha + \beta + \gamma$ , on a

$$(\text{F}) \quad \widehat{b'} = \tan \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{(\varpi - \alpha)(\varpi - \gamma)}{\varpi(\varpi - \beta)}};$$

et si l'on calcule les valeurs de  $\varpi, \varpi - \alpha$ , etc., on trouve

$$\tan \frac{E}{2} = \sqrt{\tan \frac{p}{2} \cdot \tan \frac{p-a}{2} \cdot \tan \frac{p-b}{2} \cdot \tan \frac{p-c}{2}}. \quad (\text{IX})$$

9. *Résolution des triangles sphériques dont les côtés sont très-petits par rapport au rayon de la sphère. Théorème analogue à celui de Legendre*

Nous désignerons, dans ce qui suit, par  $a, b, c$  et  $R$  les nombres qui mesurent, au moyen d'une même unité de longueur, les côtés du triangle sphérique et le rayon de la sphère. Les rapports  $\frac{a}{R}, \frac{b}{R}, \frac{c}{R}$  seront des nombres très-petits, que nous appellerons des *infinitement petits du premier ordre*. Nous appellerons de même infinitement petits du second, troisième et quatrième ordre, des nombres tels que  $\frac{a^2}{R^2}, \frac{b^2}{R^2}, \frac{c^2}{R^2}$ , et nous désignerons ces infinitement petits des divers ordres par  $\varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^4$ .

Cela posé, considérons comme précédemment (voir la figure de la page 32) le triangle sphérique  $ABC$ , le triangle rectiligne  $abc$  et un second triangle rectiligne  $AB_1C_1$ , semblable à  $abc$ , de dimensions doubles et que l'on peut construire géométriquement en projetant les sommets  $A, B, C$  du triangle sphérique, suivant le centre de projection  $A'$  et sur le plan tangent en  $A$ . Les angles du triangle rectiligne  $AB_1C_1$  auront pour valeurs exactes  $A, B, C$ ; et si l'on désigne ses côtés par  $a_1, b_1, c_1$ , on aura, en rétablissant le rayon de la sphère dans les formules (A) et (B) de la page 34, qui donnent  $\overline{ab}, \overline{ac}, \overline{bc}$ ,

$$a_1 = 2 \overline{bc} = \frac{2R \sin \frac{a}{2R}}{\cos \frac{b}{2R} \cdot \cos \frac{c}{2R}} = \frac{a - \varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2} = a - \varepsilon^2,$$

$$b_1 = 2 \overline{ac} = \frac{2R \sin \frac{b}{2R}}{\cos \frac{a}{2R}} = b - \varepsilon^2,$$

40 DES MÉTHODES EN GÉOMÉTRIE. Ainsi, les côtés du triangle\* rectiligne AB, C, ne diffèrent des côtés correspondants du triangle sphérique proposé, que par des infiniment petits du second ordre. Il en résulte immédiatement la proposition suivante : Théorème. — Si  $\frac{cd}{c' \cdot i}$  fl, h, r  $\frac{i}{i'}$  Irin/iglr sp/icrii/ur .mnt trèsj>HiU par rapproché au rayon Hr du sphère, on j>rat sub.'Uituer à sa résolution velle fl'un triangle rrrtiUgne auxiliaire, ayant pour l'un de ses côtés a, et j>nur angles A, B — E, C — E (àE liésigna/it l'excès sphérique)', et les flaux autres côtés de ce triangle ne différeront des côtés correspondants du triangle sphérique que parties infiniment petits du second ordre. On voit en effet que le triangle auxiliaire dont il s'agit étant semblable au triangle AB, C, et ayant pour l'un de ses côtés a, qui ne diffère de a, que par un infiniment petit du second ordre, les différences entre les autres côtés homologues des deux triangles rectilignes seront du même ordre; et il en sera de même, par conséquent, des différences entre les derniers côtés du triangle auxiliaire et du triangle sphérique. Remarque. — Le théorème précédent peut, ce nous semble, être employé aux mêmes usages que le théorème analogue de Legendre. Toutefois, l'emploi de ce théorème exige, comme on le sait pour celui de Legendre, que le triangle auxiliaire que l'on substitue au triangle sphérique ait même surface ([lie ce dernier. Or, il est facile de démontrer que la différence entre les surfaces du triangle sphérique et du triangle auxiliaire défini précédemment, est un infiniment petit du second ordre. Il suffira, en effet, pour le démontrer de faire voir que la différence entre les surfaces S, S', des triangles ABC, AB, C, est du même ordre. On a, en effet, (i)  $S - R' = \frac{1}{2} a^2 \sin A \cos \frac{1}{2} B$ , c,  $\sin A$  Or la formule (VU), page 38, devient, en y rétablissant le rayon de la sphère, et en développant les sinus et cosinus,  $\sin E = b' \cdot c \dots \sin A \cos \frac{1}{2} B$  —  $\frac{1}{2} a^2 \sin A \cos \frac{1}{2} B$  étant un nombre. > • On en déduit, par la division. •  $\sin A$ , ' D'après cette formule  $\sin E$  et par suite E sont du second ordre; la différence entre E et  $\sin E$  est donc du sixième ordre, et l'on [K\*ut Digitized by Google

Ainsi, les côtés du triangle rectiligne  $AB_1C_1$  ne diffèrent des côtés correspondants du triangle sphérique proposé, que par des infiniment petits du second ordre. Il en résulte immédiatement la proposition suivante :

**THÉORÈME.** — *Si les côtés  $a, b, c$  d'un triangle sphérique sont très-petits par rapport au rayon de la sphère, on peut substituer à sa résolution celle d'un triangle rectiligne auxiliaire, ayant pour l'un de ses côtés  $a$ , et pour angles  $A, B - E, C - E$  ( $2E$  désignant l'excès sphérique); et les deux autres côtés de ce triangle ne différeront des côtés correspondants du triangle sphérique que par des infiniment petits du second ordre.*

On voit en effet que le triangle auxiliaire dont il s'agit étant semblable au triangle  $AB_1C_1$ , et ayant pour l'un de ses côtés  $a$ , qui ne diffère de  $a_1$  que par un infiniment petit du second ordre, les différences entre les autres côtés homologues des deux triangles rectilignes seront du même ordre; et qu'il en sera de même, par conséquent, des différences entre les derniers côtés du triangle auxiliaire et du triangle sphérique.

**Remarque.** — Le théorème précédent peut, ce nous semble, être employé aux mêmes usages que le théorème analogue de Legendre. Toutefois, l'emploi de ce théorème exige, comme on le sait pour celui de Legendre, que le triangle auxiliaire que l'on substitue au triangle sphérique ait même surface que ce dernier. Or, il est facile de démontrer que la différence entre les surfaces du triangle sphérique et du triangle auxiliaire défini précédemment, est un infiniment petit du second ordre.

Il suffira, en effet, pour le démontrer de faire voir que la différence entre les surfaces  $S, S_1$  des triangles  $ABC, AB_1C_1$  est du même ordre.

On a, en effet,

$$(1) \quad S = R^2 \cdot 2E$$

et

$$(2) \quad S_1 = \frac{b_1 c_1 \sin A}{2}.$$

Or la formule (VII), page 38, devient, en y rétablissant le rayon de la sphère, et en développant les sinus et cosinus,

$$\sin E = \frac{\sin \frac{b}{2R} \sin \frac{c}{2R} \sin A}{\cos \frac{a}{2R}} = \frac{\frac{bc \sin A}{4R^2} - \varepsilon^4}{1 - \lambda \frac{a^2}{4R^2}} = \frac{bc \sin A - \varepsilon^2}{4R^2 - a^2 \lambda},$$

$\lambda$  étant un nombre.

\* On en déduit, par la division,

$$\sin E = \frac{bc \sin A}{4R^2} + \varepsilon^4.$$

D'après cette formule  $\sin E$  et par suite  $E$  sont du second ordre;

PREMIERE PARTIE. 4<sup>e</sup> section, br. » , bt sinA , , De là , en multipliant par IV, et ayant égard à (1) , il vient ( $>$ )  $\sin A = \frac{a}{R}$  , Pin A , et si l'on observe que  $\frac{a}{R} = \sin A$  , que par un infiniment petit, du second ordre, il vient enfin ( $i$ ) " '  $S = S_0 + t$  . ■ c. V. F. D. ■■ Scotie. — On peut, d'après ce qui précède, substituer au triangle sphérique proposé l'un quelconque des triangles rectilignes suivants ; 1<sup>er</sup> . Le triangle T , ayant pour l'un de ses côtés a et pour angles  $\angle B = E$  , ' (C-E. A-E, 'a". Le triangle T , ayant pour l'un de ses côtés a et pour angles I A. s B, ( C - E jA-E, 3". Le triangle Tj, ayant pour l'un de ses côtés «et pour angles | B — E, Prenant les données moyennes entre les trois systèmes de données qui précèdent , on retrouve le triangle de Legendre , . aE ' — T' . ' fV ü E - ^ 6 , ayant pour un de ses côtés a et pour angles B — ' ' i\* c - 2^ . : " 2fi.

Établissement de quelques formules relatives aux quadrilatères sphériques. , I. Dans tout quadrilatère sphérique inscrit à un petit cercle, le produit des sinus des moitiés des diagonales est égal à la somme des produits des sinus des moitiés des côtés opposés. ■ , Projetons en effet le quadrilatère inscrit ABCD, en prenant pour centre de projection le point A', diamétralement opposé au sommet A : nous obtiendrons un quadrilatère plan abcd qui sera inscriptible et fournira la relation

$|i\ n i:s\ ^{ii:Tii}i>^{\wedge}\langle^{\wedge}K.\backslash\ \text{croMKTRii..}$  or, si l'on dosisnie juir n. h .  
c, d W?. rdtés Al! , BC.. ('.l), HA .  $|>Hr\ h/$ . «' U'S (liiii;onalps AC, Bl», on  
élabliufklk'mi'nt i|iu“ la relation ( i) se transforme dans la sui'aiiU' ; ' ■(1) m  
U . r . h . d ,sin — sin - — •sin- sin — h sin - sin- • a a a a a Renuirque 1.  
— I,a relatiot^ (1) a été déeouvert par M. Coliele, solrtiU do marine  
[Noui'ctrls- Jiiirndf.i , i84o, pa^o 4iol. la! démonsî l'a lion préecôdento a  
l'avantage d'établir la proposition réciproque en mémo temps que la  
proposition directe. Cair, si la relation (1) a lien [lour un fpiadrilaU>ro  
sidiérique ABC.l), la relation (i) aura lieu pour le (luadrilatère plan . uhid,  
ipii en est la projection stéréographique. Donc , d'après la réci)ro(pie déjà  
établie du théorème de Ptolémée, le ([uadrilatère abi-d sera inscriptible; il  
on scia donc, de même du quadrilatère sphéiiqtte ABQ). licimin/iif //. — On  
établirait de même, (pioi que par un calcul  $|>$ lus long, celle st'comle relation  
nu - /Il . Il . il h . r Sin— siu- sin- -f- sm- sm-■i. a ■>. •>. 'X . n sm •X . n .  
h sm- sin- ■ •a 2 , r . d -.-•m- sin2 2 que M. Collèlū établit aussi à l'endroit  
déjà cité.2. E.ri>r<'s.iinii du sinus du ijiiiirt du Cuxcès d'un i/iiidriintr/f  
sjjjifs rii/iif i/iir/i'ini/iif. Soit un quadrilatère sphérique .ACCI); désignons  
par ii, h, c, d, nr, n scs cétés et SOS diauonales .U! , BC, CD, DA, \C, BD;  
posons A -1- B -T- C D — 4'^^ — 1- » et proposons-nous d'évaluer sin  
Formons, à cet effet, la projection sti'-réographique du ipiadrilalère ABCD,  
en prenant pour centre de projection le point A', 'diainélalementl üpjKisé au  
sommet A. Nous oblièndrons un ipiadrilalère nlii d, dont les cétés n/> , tld  
sont rectilignes et les cétés /«', rd circulaires; et, si nous menons les  
tangentes In, rt à l'arc In-, les tangentes <■(/, du à l'arc cd , l'hexagone plan  
nlui iid nous donnera . •A-^ B J-C i M • ou■iE — . -- \t -d- "1Or. si l'on  
appelle r' le second point d'inlecsection «hs arcs /«-, <v/, et .si I on mené  
lcs,droiles c'h, r'nr, c'd, on voit facilement que l'on a l 2 21 OC '-, O ST 2 —  
%-dc r . Digilized by Google



or, si l'on désigne par  $a, b, c, d$  les côtés AB, BC, CD, DA, par  $m, n$  les diagonales AC, BD, on établit facilement que la relation (1) se transforme dans la suivante :

$$(1) \quad \sin \frac{m}{2} \sin \frac{n}{2} = \sin \frac{a}{2} \sin \frac{c}{2} + \sin \frac{b}{2} \sin \frac{d}{2}.$$

*Remarque I.* — La relation (1) a été découverte par M. Collète, soldat de marine (*Nouvelles Annales*, 1849, page 440). La démonstration précédente a l'avantage d'établir la proposition réciproque en même temps que la proposition directe. Car, si la relation (1) a lieu pour un quadrilatère sphérique ABCD, la relation (1) aura lieu pour le quadrilatère plan  $abcd$ , qui en est la projection stéréographique. Donc, d'après la réciproque déjà établie du théorème de Ptolémée, le quadrilatère  $abcd$  sera inscriptible; il en sera donc de même du quadrilatère sphérique ABCD.

*Remarque II.* — On établirait de même, quoique par un calcul plus long, cette seconde relation

$$(II) \quad \frac{\sin \frac{m}{2}}{\sin \frac{n}{2}} = \frac{\sin \frac{a}{2} \sin \frac{d}{2} + \sin \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2}}{\sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} + \sin \frac{c}{2} \sin \frac{d}{2}},$$

que M. Collète établit aussi à l'endroit déjà cité.

2. *Expression du sinus du quart de l'excès d'un quadrilatère sphérique quelconque.*

Soit un quadrilatère sphérique ABCD; désignons par  $a, b, c, d, m, n$  ses côtés et ses diagonales AB, BC, CD, DA, AC, BD; posons

$$A + B + C + D - 4^{\text{dr}} = 2E,$$

et proposons-nous d'évaluer  $\sin \frac{E}{2}$ .

Formons, à cet effet, la projection stéréographique du quadrilatère ABCD, en prenant pour centre de projection le point A', diamétralement opposé au sommet A. Nous obtiendrons un quadrilatère  $abcd$ , dont les côtés  $ab, ad$  sont rectilignes et les côtés  $bc, cd$  circulaires; et, si nous menons les tangentes  $bt, ct$  à l'arc  $bc$ , les tangentes  $cu, du$  à l'arc  $cd$ , l'hexagone plan  $abtcud$  nous donnera

$$A + B + C + D + \widehat{t} + \widehat{u} = 8^{\text{dr}},$$

ou

$$2E = 4^{\text{dr}} - (\widehat{t} + \widehat{u}).$$

Or, si l'on appelle  $c'$  le second point d'intersection des arcs  $bc, cd$ , et si l'on mène les droites  $c'b, c'a, c'd$ , on voit facilement que l'on a

Oil.en déduit PRKMIERF. PARTII.: •i.iWti -- 4\*' - (;-}-«) — iE,  
 43 et . ■ E = C'<1 Cela ■pose, si l'on joint bt/, le triangle rwliligne hc'il  
 donne ■ ,E sin'À i hd -f\* br ' — bd -f- <iv ' — //f') '■\* ^ybc\dc' On lit  
 d'ailleurs facilement sur la figure les valeurs de ces lignes, à savoir : ' bd =  
 H sin •i. fi d Cü8 - cos 2 a bc b cosa . m cos-sin— . •i. 'À dv' = •<■05d .. ni  
 COS - sin — a ' a (111) sin Substituant ces valeurs dans la formule  
 précédente, il vient ( . m . n ne b d\ / .///. // b d a « \ sm —sin — hcos-cos —  
 cos-cos- ) ( sm—sm-4-cos-cos — cos- cos - ) 2 25 2 2 2 2/\ 2 2 2 2 2 2 / , a  
 b c . d 4 cos - cos - cos - cos 2 2 2 2 (^OAOLLAiRE I. — Si lo  
 tiuadrÜalore proposé est inscriptiblo dans un İH'lit cercle de la sphère, on  
 trouve, en remplaçant le produit sin par sa vdjour, tirée de la formule (I), et  
 en posant rt 4- /> + c 4- f/ — 2 /> , ;> — /7 . ri — b . /) — c P — d sm . sin '  
 . sin ' . sm . , Ci 2 2 2 2 • Sin'-« J — — r, 2 n b C U cos - cos - cos - CO» 2  
 2 2 2 ConoLLAiRR II. — Si le quadrilatère est en mvrne temps  
 circonscriptiblo à un petit cercle, on aura, d'après un tliéorème connu, «4- c  
 = /; 4- r/, et la formule précédente deviendra (ur) . , E a h r U sm' - = tang -  
 lang - tang - tang — 2 'a '2 2 \*^2 Ob.'icn'ntiin. — Les relations  
 précédentes conduiraient, jiar la méHiode connue, aux élégantes formules  
 données par jM. Dostor, et relatives à l'aire d'un quadrilatère plan. (  
 .Vo«ir//c.ï Annules de Mathéimitiijies , .1848, jwges (>9 et 229. ) Digilized  
 by Google

On en déduit

$$2 \cdot \widehat{bc'd} = 4^{dr} - (\widehat{t} + \widehat{u}) = 2E,$$

et

$$E = \widehat{bc'd}.$$

Cela posé, si l'on joint  $bd$ , le triangle rectiligne  $bc'd$  donne

$$(a) \quad \sin^2 \frac{E}{2} = \sin^2 \frac{\widehat{bc'd}}{2} = \frac{(\overline{bd} + \overline{bc'} - \overline{dc'}) (\overline{bd} + \overline{dc'} - \overline{bc'})}{4 \cdot \overline{bc'} \cdot \overline{dc'}}.$$

On lit d'ailleurs facilement sur la figure les valeurs de ces lignes, à savoir :

$$\overline{bd} = \frac{\sin \frac{n}{2}}{\cos \frac{a}{2} \cos \frac{d}{2}}, \quad \overline{bc'} = \frac{\cos \frac{b}{2}}{\cos \frac{a}{2} \sin \frac{m}{2}}, \quad \overline{dc'} = \frac{\cos \frac{c}{2}}{\cos \frac{d}{2} \sin \frac{m}{2}}.$$

Substituant ces valeurs dans la formule précédente, il vient

$$(III) \quad \sin^2 \frac{E}{2} = \frac{\left( \sin \frac{m}{2} \sin \frac{n}{2} + \cos \frac{a}{2} \cos \frac{c}{2} - \cos \frac{b}{2} \cos \frac{d}{2} \right) \left( \sin \frac{m}{2} \sin \frac{n}{2} + \cos \frac{b}{2} \cos \frac{d}{2} - \cos \frac{a}{2} \cos \frac{c}{2} \right)}{4 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2} \cos \frac{d}{2}}.$$

COROLLAIRE I. — Si le quadrilatère proposé est inscriptible dans un petit cercle de la sphère, on trouve, en remplaçant le produit  $\sin \frac{m}{2} \sin \frac{n}{2}$  par sa valeur, tirée de la formule (I), et en posant

$$a + b + c + d = 2p,$$

$$(III') \quad \sin^2 \frac{E}{2} = \frac{\sin \frac{p-a}{2} \cdot \sin \frac{p-b}{2} \cdot \sin \frac{p-c}{2} \cdot \sin \frac{p-d}{2}}{\cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2} \cos \frac{d}{2}}.$$

COROLLAIRE II. — Si le quadrilatère est *en même temps* circonscriptible à un petit cercle, on aura, d'après un théorème connu,  $a + c = b + d$ , et la formule précédente deviendra

$$(III'') \quad \sin^2 \frac{E}{2} = \tan \frac{a}{2} \tan \frac{b}{2} \tan \frac{c}{2} \tan \frac{d}{2}.$$

*Observation.* — Les relations précédentes conduiraient, par la méthode connue, aux élégantes formules données par M. Dostor, et relatives à l'aire d'un quadrilatère plan. (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1848, pages 69 et 229.)

DKS MÉTHODES E. OÉOMÉTKIE. 44 SECONDE PARTIE.  
 DES MÉTHODES UELATUES A LA GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE  
 CHAPITRE PREHIER. Ses tangentes. É^TAT 1)1! PnOBLÈ-UE DES  
 T.\SGE.NTES DANS LA GÉOMÉTHIE DES A.NCIENS. 27. üéfinitwn de  
 la tangente d'après Eiiclide. — Rcmaripics sur l'insujfisimcc de ecltc  
 définitùm et sur le raractère cssentu llemciit sy nthétique qu'elle présente.  
 — D'iiprès les anciens géomètres', la tangente en un jMiint (P une courbe  
 est une limite passant par ce i>oint , et telle, qu'une seconde droite issue du  
 nuime /xtint ne puisse passer entre la première et la Courbe. Ainsi, Euclitle,  
 dans ses Éléments, détiTinino la position do la tangente à la circonférence  
 en démontrant que toute droite i>erpendiculaire à l'extrémité du rayon  
 tombe hors du çrclo , et que f oh ne peut mener aucune dmitc dans [espace  
 compris entre cette perpendiculaire et la circonférence. De celte définition il  
 est facile do déduire la conséquence que ; si d'un côté et de Tautro du point  
 do contact la concavité de la courbe est tournée vers une même région, la  
 tangente laissera d'un même côté tous les points do la courbe (ou au moins  
 tous les J)oinls d'un arc fini de la courbe, entre les extrémités duquel se  
 trouvera le i>oint do contact). Ce fait général, rapproché de la propriété  
 particulière de la tangente à la circonférence et aux autres sc'clions  
 coniques, a . conduit à une seconde définition fréquemment employée par  
 les géomètres racxlernes, imitateurs de la forme synthétique des anciens, et  
 d'après laquelle la tangente est une dmitc n'ayant qu'un jmint commun avec  
 la courbe et laissant itun même côté tous les /wints de celle-ci. Or si,  
 revenant à la première définition, l'on essaye de l'appliquer à la résolution  
 géométrique du problème des tangentes, on est immédiatement frapiié du  
 J)eu de ressources qu'elle présemte en général , et l'on cesse de s'étonner  
 que ce problème ait été à peine ébauché par les anciens. 11 est d'ailleurs  
 facile do se rendre compte, d'une manière générale, de l'insuffisance  
 géométrique do cette définition. ' Le créateur do la théorie des caustiques,  
 Walter do Tschirnhausen , qui occupait un rang distingué parmi les savants  
 de son temj)S les plus versés dans la philosophie des mathématiques,  
 énumère longuement les diverses qualités que doit J)résenter toute  
 définition, dans l'ouvrage ayant pour titre : \edicinn mentis, s'ive tenlamen  
 genuinte logica\ Il y J)t)Se , entre autres. • Digitized by Goegle

SECOXDE PARTIE. 45 re préfi'iilo que toute définition doit renfeimei' le mode de formation, la (génération de l'objet auquel elle se rapiwrle ; Secundo palet omnem rei sin"ularis, deJinUionem semper tjiidem rei prirniin frmrformationis rindtwi dehrre incltalere , i/ueiii alirOjiix rei generationein nitncupalm (page 50). Or, on chercherait en vain Vidéo première de la génération do la tan'gente dans la définition que nous en avons donnée plus haut, d'après les 'anciens; cette définition est donc incomplète, au point de vue philosophhiuc , et c'est précisément de là que provient son insuffisance eu géométrie. Elle présente d'ailleurs, à un haut degré, le caractère synthétique de la méthode exclusivement suivie par les anciens dans l'exposition de leurs découvertes géométriques. Car, tandis (piè la définition modern(î de la tangente contient, implicitement, Vénoncé d'un problème dont la solution fournirait la construction de cette droite, celle des anciens indique seulement l'existènee d'un théorème dont l'énoncé inconnu attribuerait une certaine position à la tangente cherchée , et dont la démonstration établirait que la tangente occupe en effet cette position. Nous allons rapporter la solution donnée i«r Archimède du problème des tangentes aux hélices on spirales. Celte solution offre un bel exemple de la méthode géométrique des anciens ; elle présente quelques longueurs, mais ces longueurs sont nécessaires et rachetées d'ailleurs par la rigueur de la démonstration qui so trouve dégagée dp tout usage de la considération de l'infini. ' 28. De la tangente h la spirale d Archimède. 1. Lemme 1. — Dans un triangle, la bissectrice d'un angle, terminée au côté opposé , est moindre que la demi-somme des deux autres côtés. a. Lemme II — Soit dans une circonférence ayant pour centre le point o, ■' ab une corde moindre qu'un diamètre, et soit oh perpendiculaire sur cette corde ; on pourra toujours mener un rayon orc tel^ que la portion de ce rayon , comprise entre la circonférence et la conlc ab prolongée, soit à la corde ra dans un rapport donné , pourvu que ce rapport soit plus grand que celui de ah à oh. {Des hélices, prop. 7.) Menons, en effet, le rayon indéfini okt jiarallèlc à la corde ab et qui est coupé en k et en t par la corde ar prolongée et par la tangente en z?. Les triangles semblables arc et kro donnent l'égalité Démonstb.vtion. cr \_ or ar kr ' . ' et l'on voit quece dernier rapiiort , dont le numérateur est consûnt, varie en sens inverse de son dénominateur ; et comme celui-ci va constamment en décroissant, depuis la valeur at jusqu'à zéro, lors<iue le raj'on variable orc ■ . Digitized by Google

ce précepte que toute définition doit renfermer le mode de formation, la génération de l'objet auquel elle se rapporte ; *Secundò patet omnem rei singularis definitionem semper ejusdem rei primum formationis modum debere includere, quem alicujus rei generationem nuncupabo* (page 50). Or, on chercherait en vain l'idée première de la génération de la tangente dans la définition que nous en avons donnée plus haut, d'après les anciens ; cette définition est donc incomplète, au point de vue philosophique, et c'est précisément de là que provient son insuffisance en géométrie.

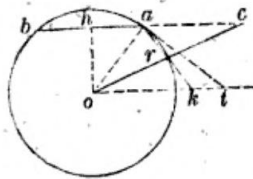
Elle présente d'ailleurs, à un haut degré, le caractère synthétique de la méthode exclusivement suivie par les anciens dans l'exposition de leurs découvertes géométriques. Car, tandis que la définition moderne de la tangente contient, implicitement, l'énoncé d'un problème dont la solution fournirait la construction de cette droite, celle des anciens indique seulement l'existence d'un théorème dont l'énoncé *inconnu* attribuerait une certaine position à la tangente cherchée, et dont la démonstration établirait que la tangente occupe en effet cette position.

Nous allons rapporter la solution donnée par Archimède du problème des tangentes aux hélices ou spirales. Cette solution offre un bel exemple de la méthode géométrique des anciens ; elle présente quelques longueurs, mais ces longueurs sont nécessaires et rachetées d'ailleurs par la rigueur de la démonstration qui se trouve dégagée de tout usage de la considération de l'infini.

### 28. De la tangente à la spirale d'Archimède.

1. LEMME I. — Dans un triangle, la bissectrice d'un angle, terminée au côté opposé, est moindre que la demi-somme des deux autres côtés.

2. LEMME II. — Soit dans une circonférence ayant pour centre le point *o*, *ab* une corde moindre qu'un diamètre, et soit *oh* perpendiculaire sur cette corde ; on pourra toujours mener un rayon *orc* tel, que la portion de ce rayon, comprise entre la circonférence et la corde *ab* prolongée, soit à la corde *ra* dans un rapport donné, pourvu que ce rapport soit plus grand que celui de *ah* à *oh*. (Des hélices, prop. 7.)



DÉMONSTRATION. — Menons, en effet, le rayon indéfini *okt* parallèle à la corde *ab* et qui est coupé en *k* et en *t* par la corde *ar* prolongée et par la tangente en *a*.

Les triangles semblables *arc* et *kro* donnent l'égalité

$$\frac{cr}{ar} = \frac{or}{kr},$$

et l'on voit que ce dernier rapport, dont le numérateur est constant, varie en sens inverse de son dénominateur ; et comme celui-ci va constamment en

**The text on this page is estimated to be only 27.18% accurate**

4\* > l>i:s Mi'/T'IIDOKS EX «^O.MKTRII'. pri'nd UmU'S lus  
iKwiiiois t ompiist-s uniru wi ut of>i \ oii voit ([ue Ip rapport ^ peut  
prundru touli's lus \alours siiptîiripün's à — ^ • / " \_ tu ot ■■ P--Q. F. I). 3.  
Lkmuf. III. - Soif, U riirnrr, ,/,,,,s une rin tmfvrem c ayant jmirccnti f tf  
!>oint », ah laïf rortlf main, Ire ija'iin dianif/n-, oh ta perijemliailairr  
abaisser du rnlrr sar fa enrtrr , et at ta tan fiente à Cane des ext, tin, itès de  
la conte : on pc,,t tnajoars mener an rayon ont trt , qae ta portion eide ce  
rayon, interceptée entre in corde et ta circonfé-nce , soft au seg-, ,,,,;il at  
qae ce rayon intercepte sar ta tangente issae d,, pont a, ,ians an rapport ,  
tonné , pmiva qae , e rapp.rt soit moindre qae cetai de oh à oh.  
Démonstration. — On doit avoir (V) fit  $n^{\wedge} n$  oh \*\*\*\*' ~N oh utaiil la  
parallùlu à la ( (.rdp ah nu'ncu pat lu cuntru n ut turmiiw an [.rolonguinunl  
<lu la laiijtunlu; ou, comme »■/■ = on - oc; on doit avoir («) CH' Of/ r/f. n  
Prenons sur la tangente une longueur «/telle, que l'on ait ftft rm Kn  
remplaçant »« par cette valeur dans («), on. devra avoir ""il . m , oc = — [ai  
— at) — t, n ' n < 'r, le triangle oth et la ligne ca parallèle à .sa base donnent  
ah d'ailleurs o,.\_;  $m^{\wedge} on^{\wedge} a$  at' donr, en substituant dans (A), on aura à  
satisfaire à cette relation, 0(t ('■) ot : ./ .1 fat ■ —, — OU . th.a at.ak Or, si  
Ion construit le ccclo déterminé par les trois points», X-, /. et <iue oa et ot  
)rolongéc>s ronpent ce cercle en «' ot t', on anra'ces deux égalités. on  
~Ûd, ■ "" . tt'. th . tl Dqitized by Google

prend toutes les positions comprises entre  $oa$  et  $ok$ ; on voit que le rapport  $\frac{rc}{ra}$  peut prendre toutes les valeurs supérieures à  $\frac{or}{at} = \frac{oa}{at} = \frac{ah}{oh}$ .

C. Q. F. D.

3. LEMME III. — Soient encore, dans une circonférence ayant pour centre le point  $o$ ,  $ab$  une corde moindre qu'un diamètre,  $oh$  la perpendiculaire abaissée du centre sur la corde, et  $at$  la tangente à l'une des extrémités de la corde : on peut toujours mener un rayon  $ocr$  tel, que la portion  $cr$  de ce rayon, interceptée entre la corde et la circonférence, soit au segment  $at$  que ce rayon intercepte sur la tangente issue du point  $a$ , dans un rapport donné, pourvu que ce rapport soit moindre que celui de  $ah$  à  $oh$ .

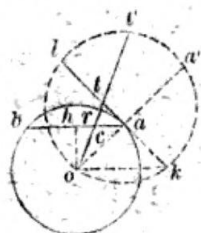
Démonstration. — On doit avoir

$$(A) \quad \frac{cr}{at} = \frac{m}{n} \quad \text{et} \quad \frac{m}{n} < \frac{ah}{oh} \quad \text{ou} \quad \frac{m}{n} < \frac{oa}{ak},$$

$ok$  étant la parallèle à la corde  $ab$  menée par le centre  $o$  et terminée au prolongement de la tangente; ou, comme  $cr = oa - oc$ , on doit avoir

$$(a) \quad oc = oa - \frac{m}{n} at.$$

Prenons sur la tangente une longueur  $al$  telle, que l'on ait



$$(B) \quad \frac{oa}{al} = \frac{m}{n}, \quad \text{d'où} \quad \frac{oa}{al} < \frac{oa}{ak}, \quad \text{d'où} \quad al > ak.$$

En remplaçant  $oa$  par cette valeur dans (a), on devra avoir

$$(b) \quad oc = \frac{m}{n} (al - at) = \frac{m}{n} tl.$$

Or, le triangle  $otk$  et la ligne  $ca$  parallèle à sa base donnent

$$oc = ot \cdot \frac{ak}{tk};$$

d'ailleurs

$$\frac{m}{n} = \frac{oa}{al};$$

donc, en substituant dans (b), on aura à satisfaire à cette relation,

$$(c) \quad ot = \frac{oa}{al \cdot ak} \cdot tk \cdot tl, \quad \text{ou} \quad \frac{ot}{tk \cdot tl} = \frac{oa}{al \cdot ak}.$$

Or, si l'on construit le cercle déterminé par les trois points  $o$ ,  $k$ ,  $l$ , et que  $oa$  et  $ot$  prolongées coupent ce cercle en  $a'$  et  $t'$ , on aura ces deux égalités,

$$\frac{oa}{aa'} = \frac{ot}{tt'}, \quad \frac{ot}{tk \cdot tl} = \frac{oa}{al \cdot ak}.$$



**The text on this page is estimated to be only 28.46% accurate**

/ V ■ , ' ■ Sr.COXI>E PAKTIK., 4? Pai' suite, on subsütiiianl  
 lUins la relation (i j, on aurtt à déterminur le' rayon ocrtt' (>ar la condition  
 (il) it'—iiit. Or, on pourra toujours mener par le centre o et dans la région  
 supposée un rajon ntt' tel, tpie le segment tt' soit égal à tut', |jour\ u (|ue nk  
 soit moindre que al. Sous celte restriction, on voit tiré-iiien (pie si le rayon  
 mobile orr, coïncidant d'aliord avec s'éloigne de oa en se rapprochant de le  
 segment interceiité n' est d'abord supérieur à an', et va constamment en  
 augmentant jusqu'à ce que le rayon mobile passe par le centre du cercle nkl.  
 A partir de col instant, le segment «'allant toujours en diminuant et tendant  
 vers zéro, il est clair (pie le rayon mobile atteindra une position  
 intermédiaire pour laquelle le segment tt' sera précisément égal à «' ; c'est-  
 à-dire jjour laquelle le rapport ^ sera égal à ~ • D'ailleurs la restriction  
 entraîne celle-ci : nu , nu al ak ou m ah a nh c. O. F. 1). 4. Jh'-fiiitinn.i. —  
 On appelle hain-f, ou spirale, la courbe engendrée par 'un mobile qui  
 parcourt une droite avec une \ illesse constante , pea(lanl ipie eelle-ci tourne  
 d'un mouu'menl unifonne et dans un (ilaii invariable, autour d'un point fixe  
 n qui coïncide avec la position initiale du mobile. Le jjoinl oest ruri^iac de  
 l'hélice; la droite qui joint le point « à un point de la courbe est le ravnu de  
 ce point, et la position initiato ny. de- la droite mobile est lé rayon-origindr.  
 — Si l'on mène le rayon oa du point a de la courbe, et (lue du point n  
 comme centre, avec na comme rayon, on décrive une circonférencp, nous  
 enlendrons toujours, dans eu (pii suit, (pie l'arc (h? celle circonférence  
 compris entre le rayon-origine O y et le rayon na, est celui qui serait décrit  
 par Lextrémilé \* du. premier rayon, tournant autour de l'origine dans le  
 s(>ns du inou\ement ipii adonné naissance à la courbe, et \enanf coïncider  
 avec le rayon na. Kniin, un rayon «pielconque na sépare le plan de la  
 courbe en deux jégmns, cc//c tirs i:nnséi/ia;ats qui l'enferme la portion de  
 spirale déjà décrite par le mobile, et celle des a/tfrcih nts. Nous ne  
 considérerons d'ailleurs dans ce ipii suit que la première spire de l'hélice,  
 décrite pendant la première révolntion de la droite mobile. l'ada jKisé, la  
 définition de la courbe conduit immédiatement aux consoiuiences suivantes  
 ; . 5. Les mynus ipii abniitis.scnt à ileu.c points de Fhélhc sont entre eu.t:  
 rnmme les an s interceptés entre le rayonn-nrigine et ehacun de ers rayons,  
 sur une cirennférence ayant pour rentre le point-origine. ( Des héliecs ,  
 prop. 14. '1 6. .Si Pnii rnnsidère dans fhélire tmis rayons séparés par des

angles l'giui.r, le rayon intermédiaire est égal à ht deini-snmme des rayons  
 ejc«•c/«(v. (Prop. l'i.) ■ . < J 1 Di^itized by Google

Par suite, en substituant dans la relation (c), on aura à déterminer le rayon  $\overline{ocrt'}$  par la condition

$$(d) \quad tt' = aa'.$$

Or, on pourra toujours mener par le centre  $o$  et dans la région supposée un rayon  $ott'$  tel, que le segment  $tt'$  soit égal à  $aa'$ , pourvu que  $ak$  soit moindre que  $al$ . Sous cette restriction, on voit très-bien que si le rayon mobile  $ocr$ , coïncidant d'abord avec  $oa$ , s'éloigne de  $oa$  en se rapprochant de  $ol$ , le segment intercepté  $tt'$  est d'abord supérieur à  $aa'$ , et va constamment en augmentant jusqu'à ce que le rayon mobile passe par le centre du cercle  $okl$ . A partir de cet instant, le segment  $tt'$  allant toujours en diminuant et tendant vers zéro, il est clair que le rayon mobile atteindra une position intermédiaire pour laquelle le segment  $tt'$  sera précisément égal à  $aa'$ ; c'est-à-dire pour laquelle le rapport  $\frac{cr}{at}$  sera égal à  $\frac{m}{n}$ .

D'ailleurs la restriction  $al > ak$  entraîne celle-ci :

$$\frac{oa}{al} < \frac{oa}{ak} \quad \text{ou} \quad \frac{m}{n} < \frac{ah}{oh}.$$

G. Q. F. D.

4. *Définitions.* — On appelle *hélice*, ou *spirale*, la courbe engendrée par un mobile qui parcourt une droite avec une vitesse constante, pendant que celle-ci tourne d'un mouvement uniforme et dans un plan invariable, autour d'un point fixe  $o$  qui coïncide avec la position initiale du mobile. Le point  $o$  est l'*origine* de l'hélice; la droite qui joint le point  $o$  à un point de la courbe est le *rayon* de ce point, et la position initiale  $oz$  de la droite mobile est le *rayon-origine*. — Si l'on mène le rayon  $oa$  du point  $a$  de la courbe, et que du point  $o$  comme centre, avec  $oa$  comme rayon, on décrive une circonférence, nous entendrons toujours, dans ce qui suit, que l'arc de cette circonférence compris entre le rayon-origine  $oz$  et le rayon  $oa$ , est celui qui serait décrit par l'extrémité  $z$  du premier rayon, tournant autour de l'origine dans le sens du mouvement qui a donné naissance à la courbe, et venant coïncider avec le rayon  $oa$ .

Enfin, un rayon quelconque  $oa$  sépare le plan de la courbe en deux régions, celle des *conséquents* qui renferme la portion de spirale déjà décrite par le mobile, et celle des *antécédents*. Nous ne considérerons d'ailleurs dans ce qui suit que la première spire de l'hélice, décrite pendant la première révolution de la droite mobile.

Cela posé, la définition de la courbe conduit immédiatement aux conséquences suivantes :

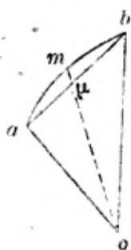
5. *Les rayons qui aboutissent à deux points de l'hélice sont entre eux comme les arcs interceptés entre le rayon-origine et chacun de ces rayons, sur une circonférence ayant pour centre le point-origine.* (Des hélices, prop. 14.)

6. *Si l'on considère dans l'hélice trois rayons séparés par des angles égaux, le rayon intermédiaire est égal à la demi-somme des rayons ex-*

#### 4S DES MÉRUEDES E\ GÉOMÉTRIE. CunoLi.AinR I h 0 . —

Un arc quelconque de la courbe (lui correspondant à un angle inférieur à  $\pi$  droits, ayant son sommet à l'origine, est tout entier situé, par rapport à sa corde, du côté opposé à l'origine. Car, si l'on mène la bissectrice de l'angle  $W$ , coupant l'arc et sa corde en  $A$  et  $F$ , on aura  $OA < OF$  — — 1 2 et par suite, d'après le Lemme I,  $OA > 0$  2. En répétant la même construction pour les angles partiels  $nom$ ,  $bom$ ,..., on obtiendra de nouveaux points de la courbe, tous plus éloignés de l'origine que les points correspondants de la corde  $ah$ . CoRoI-LAIRE II. — rayon qui aboutit en un point quelconque  $m$  de l'hélice, est moindre que le rayon correspondant et terminé à la tangente en un point  $a$  de cette courbe. Car si l'on avait  $om \geq ot$ , on verrait, en joignant la corde  $nm$ , que l'on pourrait mener par le point  $a$  une infinité de droites comprises entre l'arc  $am$  et la tangente supposée  $qt$ . Corollaire III. — Toute tangente à l'hélice ne rencontre elle-même qu'un point. (Prop. i3.) y. Théorème 1. — Le rayon  $oa$  qui aboutit en un point  $a$  de l'hélice, fait un angle obtus avec la tangente en ce point qui est dirigée du côté des antécédents. (Prop. i6.) Démonstration. — Du point  $o$  comme centre, avec  $oa$  pour rayon, décrivons une circonférence, la portion de la courbe située du côté des antécédents tombera nécessairement hors de cette circonférence : il en sera donc de même (6, Coroll. II), à fortiori, de la portion de la tangente à la courbe en  $a$ , dirigée vers les antécédents. Il résulte de là que l'angle Considéré,  $oat$ , est droit ou obtus, et ne saurait être aigu. Pour écarter la première hypothèse, supposons un moment que l'angle  $oat$  soit droit, or étant alors une tangente commune à l'hélice et à la circonférence  $ou$ . On établit facilement que par le centre  $o$  de la circonférence on peut mener une droite indéfinie  $ort$  telle, que le rapport au rayon  $on$ , du segment  $ri$  intercepté sur cette droite entre la circonférence et la tangente  $at$ , soit moindre que le rapport à l'arc  $an$  (compris entre le rayon-origine  $oa$  et le rayon  $on$ ), de l'arc  $ar$  intercepté entre le rayon  $on$  et la tangente  $at$ . (Prop. i. 5.) On aurait donc pour ce rayon  $oy$ , que nous supposons d'ailleurs dirigé

COROLLAIRE I. — Un arc quelconque de la courbe qui correspond à un angle inférieur à 2 droits, ayant son sommet à l'origine, est tout entier situé, par rapport à sa corde, du côté opposé à l'origine.



Car, si l'on mène la bissectrice de l'angle  $aob$ , coupant l'arc et sa corde en  $m$  et  $\mu$ , on aura

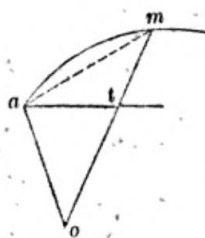
$$om = \frac{oa + ob}{2},$$

et par suite, d'après le Lemme I,

$$om > o\mu.$$

En répétant la même construction pour les angles partiels  $aom$ ,  $bom$ , ..., on obtiendra de nouveaux points de la courbe, tous plus éloignés de l'origine que les points correspondants de la corde  $ab$ .

COROLLAIRE II. — Le rayon qui aboutit en un point quelconque  $m$  de l'hélice, est moindre que le rayon correspondant  $ot$  terminé à la tangente en un point  $a$  de cette courbe.



Car si l'on avait  $om \geq ot$ , on verrait, en joignant la corde  $am$ , que l'on pourrait mener par le point  $a$  une infinité de droites comprises entre l'arc  $am$  et la tangente supposée  $at$ .

COROLLAIRE III. — Toute tangente à l'hélice ne rencontre celle-ci qu'en un point. (Prop. 13.)

7. THÉOREME I. — Le rayon  $oa$  qui aboutit en un point  $a$  de la courbe, fait un angle obtus avec la portion de la tangente en ce point qui est dirigée du côté des antécédents. (Prop. 16.)

Démonstration. — Du point  $o$  comme centre, avec  $oa$  pour rayon, décrivons une circonférence. La portion de la courbe située du côté des antécédents tombera nécessairement hors de cette circonférence : il en sera donc de même (6, Coroll. II), à fortiori, de la portion  $at$  de la tangente à la courbe en  $a$ , dirigée vers les antécédents. Il résulte de là que l'angle considéré,  $oat$ , est droit ou obtus, et ne saurait être aigu.

Pour écarter la première hypothèse, supposons un moment que l'angle  $oat$  soit droit,  $at$  étant alors une tangente commune à l'hélice et à la circonférence  $oa$ . On établit facilement que par le centre  $o$  de la circonférence on peut mener une droite indéfinie  $ort$  telle, que le rapport au rayon  $oa$ , du segment  $rt$  intercepté sur cette droite entre la circonférence et la tangente  $at$ , soit moindre que le rapport à l'arc  $aa$  (compris entre le rayon-origine  $oz$  et le rayon  $oa$ ), de l'arc  $ar$  intercepté entre le rayon  $oa$  et le rayon  $ort$ . (Prop. 5.)

On aurait donc pour ce rayon  $ort$  que nous supposons d'ailleurs dirigé

vers les nntreédents , d'où (0 . SECONDE PARTIE. rt or 49 ■ (ire  
y.n ot ^ ^ arc K /• or on arCKrt Mais, si l'on désigne par m le point de la  
courbe situé sur le rayon ort , on aura ( 5) , , OUI arc « ;■ (a) = ' on arc y.ii  
On aurait donc, en comparant l'i) cl {•/), ■ Ol ■ < OUI , • ce (pii montre ,  
d'après le corollaire II du.numéro précédent , i]ue la droite ru ne saurait être  
tangente à l'hélice. Donc l'angle otit ne saurait être droit; donc il est  
nécessairement obtus. c. q. f. d. 8. Théorème II. — Lu tnnornt en un point  
quelconque, n de ühélice intercepte sur la droite menée par l'origine,  
perpe.ndieulairement au rayon oa qui abmait au ]>oint de contact, un  
segment cT une longueur égale à l'arc intercepté sur la circonférence  
décrite du puiint o comme centre , avec oa comme rayon, peu- le rayon-  
origine o-x et le rayon oa. (Prop. 20.) Démonstration. — En désignant par t  
le point d'intersection de la tangente en a et de la peqiendiculaire au rayon  
oet menée par le point o,#l s'agit d'établir la relation (I) - o/ = arc«^«. Pr-  
e/nièrr partie. — Supposons d'abord que l'on ait ■; ( . \ ) • «t > arc a f fl , ,  
on pourra alors troiuer une longueur ob satisfaisant à la double inégalité (a)  
arc x5n <C.o9 <Cot. Par suite , en abaissant oh perpendiculaire sur at , on  
aura ou encore {bj . . tdi on ^oa oh ot oO\* oa . ah O 9^ oh On pourra donc  
toujours, d'après le leinijiB H, mener dans la circonférence un rayon nrc tel,  
que l'on ait • ' \* \_ arc ar rc ar oa " o9' rr \_ ar ^ oa O 9 'arcaéfl Digitized by  
Google

vers les antécédents,

$$\frac{rt}{or} < \frac{\text{arc } ar}{\text{arc } za},$$

d'où

$$(1) \quad \frac{ot}{or} = \frac{ot}{oa} < \frac{\text{arc } ar}{\text{arc } za}.$$

Mais, si l'on désigne par  $m$  le point de la courbe situé sur le rayon  $ort$ , on aura (5)

$$(2) \quad \frac{om}{oa} = \frac{\text{arc } ar}{\text{arc } za}.$$

On aurait donc, en comparant (1) et (2),

$$ot < om,$$

ce qui montre, d'après le corollaire II du numéro précédent, que la droite  $at$  ne saurait être tangente à l'hélice. Donc l'angle  $oat$  ne saurait être droit; donc il est nécessairement obtus.

C. Q. F. D.

8. THÉORÈME II. — La tangente en un point quelconque  $a$  de l'hélice intercepte sur la droite menée par l'origine, perpendiculairement au rayon  $oa$  qui aboutit au point de contact, un segment d'une longueur égale à l'arc intercepté sur la circonférence décrite du point  $o$  comme centre, avec  $oa$  comme rayon, par le rayon-origine  $oz$  et le rayon  $oa$ . (Prop. 20.)

Démonstration. — En désignant par  $t$  le point d'intersection de la tangente en  $a$  et de la perpendiculaire au rayon  $oa$  menée par le point  $o$ , il s'agit d'établir la relation

$$(I) \quad ot = \text{arc } za.$$

Première partie. — Supposons d'abord que l'en ait

$$(A) \quad ot > \text{arc } za,$$

on pourra alors trouver une longueur  $o\theta$  satisfaisant à la double inégalité

$$(a) \quad \text{arc } za < o\theta < ot.$$

Par suite, en abaissant  $oh$  perpendiculaire sur  $at$ , on aura

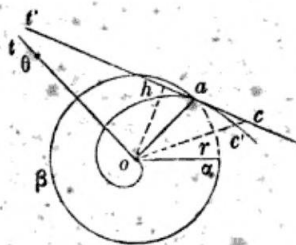
$$\frac{ah}{oh} = \frac{oa}{ot} < \frac{oa}{o\theta},$$

ou encore

$$(b) \quad \frac{oa}{o\theta} > \frac{ah}{oh}.$$

On pourra donc toujours, d'après le lemme II, mener dans la circonférence  $zaa$  un rayon  $orc$  tel, que l'on ait

$$\frac{rc}{ar} = \frac{oa}{o\theta}, \quad \text{ou} \quad \frac{rc}{oa} = \frac{ar}{o\theta} < \frac{\text{arc } ar}{\text{arc } za},$$



5u DES MITIIOUES EX CÉOMÉTIUE. ' OU, on ;ij(mlant l  
 unilt'aux deux membres, on pourra mener un rayon o/o tel , (juc l'on ait . •  
 .> , , • <»• - , are\*[; w ' ' ^ ou'^ areaf:« Or, en désignant par r' le point de la  
 eourlMj situé sur le rayon orr , on a , ' d'après le n" 5 , , . . ■'■'é «Sor . fw •  
 are afc« On aurait donc par eom|>araisün • ( 3 ) <?<■ < <◇r\ ee <[ui est  
 ineomtwtible avec l'hypotbési^ que la droite tm: i-st lanf,'ente à  
 l'liélire'(w«r le n" 3, eoroll. III; on ne Sioirait donc avoir or > arc3;|3«.'  
 Driuiithir — Snp|K)Sons, (m second lie\i, que l'on ait ( A' ) . . ot <iaTC ùAa.  
 • On j'jourra alors trouver une lon;;ueur oO satisfaisant à la do\d)lc  
 condition (//) ■ ■■ ^ et < <arcali« . J'ar suite, en menant encore o/r  
 ])erpendiculaire\*sur nt , on aura - • itll nu n . nh on l\*) nu ^ nh vO^' nh  
 Donc, si I t)n mène la droite tanpenle en n an-cerelé on pourratoujours,  
 d'apri-8 le lemme III, meiiéé mi rayon ocri' l'ol, que l'on ail la relation .-t cr  
 on cr ni' ou enfin“ë — “n ' l'U — “■ -7 1 (U O 0 t)(4 O 0 ar(v//^ — ^ — Â“  
 î 04i iHv xr n piijsiiuc fit' > arcrt/- et qup < are y.f.n. V. Si l'on retram'he de  
 l'unité les deux mein-\* ' bn-s de l'inégalité précédente, on trouve {>') or \_  
 are a&r on 'arcxC^n D'ailleurs, si l'on désigne par à' le point de la •' rourbe  
 située sur le rayon or/-, on a, d'après 'la |)roiK)sitiün 5 , ' . or' areaS/' —T—  
 ; , on are x 'jn Digilized by 'Google





SECONDE PAKTIE. Si' ou aurait <lpnc, par la comparaison des relations |i') et (->'), (3 ) oc<oc', . . ce (jui est incompatible avec l'hypothèse que la droite «r/ est tangente à ' l'hélice. Donc on,^e peut supposer (r<arc=t^rt. Mais'il est déjà démontré que l'on ne peut suppo.ser of>arcaljn; donc on a , or = arcjtSo. c.. o- r. d. 29. De la tangente à la courbe tlécfitc par un j/joint dont on connaît la loi lies distances à deux foyers.

PnoBLÈME. - Construire la tangente de la courbe représentée en coordontaù's hijrolaires par l'équation ■ . • ■ • ■ ■ ' c.) -l-c'.V==: L, dans laquelle X , X' désignent des nombres positifs et L une longueur donnée.

Construction. — Que l'on joigne l» jjoint décrivant a aux deux foyers/, /' et que du point a comme rentre, avec un rayon quelconque, on décrive . l'arc mm' terminé aux rayons vecteurs/«, fa '. si l'on mène la corde mm', et si on la divise au point n en deux parties récipro(iuement proportionnelles aux nombres X , X', . ' . mu X; t ' m' ns' 0 ^ . ' la droite un sera norriiate en a à la courbe considérée. , ■ • Démonstration. — Menons tat' perpendiculaire à an -, pour démontrer, que^Ctte ligne est tangente à là courbe, il suHira d'établir r i". Que la droite «r n'a que le i)oint a commun avec la courber ;j". Que la droite at laisse d'un même côté tous les points de la courbe.

.Première partie. — Soit b un point quelconque de la droite at\ joignons bffb et abaissons ôy.», iyj' respectivement perpendiculaires sur,,, ' jj/' prolongées au besoin ; menons également mq , m' //' perpendiculaires sui la droite an. Les triangles semblables bap, amq\ lùq)', ///«''' donnent les relations • • ■ ' ap mq ap' mq , ' ah am ah atn' ' « et delà, en divisant membre à membre et en observant que i, et \* . . am ' V ([lie mq in' q' mn m' y il vient ap \_ X' . /y/' X' ou ' ti) s.ap,— 'l.">qp'=o. D'ailleurs le point a appartenant à la coirbe, on a (•a) ■ )..af+V.af L 4. ly Dig'iiized by Google

on aurait donc, par la comparaison des relations (1') et (2'),

$$(3') \quad oc < oc',$$

ce qui est incompatible avec l'hypothèse que la droite  $act$  est tangente à l'hélice. Donc on ne peut supposer  $ot < \text{arc } \alpha\beta a$ . Mais il est déjà démontré que l'on ne peut supposer  $ot > \text{arc } \alpha\beta a$ ; donc on a

$$ot = \text{arc } \alpha\beta a. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

29. *De la tangente à la courbe décrite par un point dont on connaît la loi des distances à deux foyers.*

PROBLÈME. — Construire la tangente de la courbe représentée en coordonnées bipolaires par l'équation

$$r.\lambda + r'.\lambda' = L,$$

dans laquelle  $\lambda, \lambda'$  désignent des nombres positifs et  $L$  une longueur donnée.

Construction. — Que l'on joigne le point décrivant  $a$  aux deux foyers  $f, f'$  et que du point  $a$  comme centre, avec un rayon quelconque, on décrive l'arc  $mm'$  terminé aux rayons vecteurs  $fa, f'a$ ; si l'on mène la corde  $mm'$ , et si on la divise au point  $n$  en deux parties réciproquement proportionnelles aux nombres  $\lambda, \lambda'$ ,

$$\frac{mn}{m'n} = \frac{\lambda'}{\lambda},$$

la droite  $\overline{an}$  sera normale en  $a$  à la courbe considérée.

Démonstration. — Menons  $\overline{at'}$  perpendiculaire à  $\overline{an}$ ; pour démontrer que cette ligne est tangente à la courbe, il suffira d'établir :

1°. Que la droite  $at$  n'a que le point  $a$  commun avec la courbe;

2°. Que la droite  $at$  laisse d'un même côté tous les points de la courbe.

Première partie. — Soit  $b$  un point quelconque de la droite  $at$ ; joignons  $bf, bf'$  et abaissons  $bp, bp'$  respectivement perpendiculaires sur  $fa, f'a$  prolongées au besoin; menons également  $mq, m'q'$  perpendiculaires sur la droite  $an$ . Les triangles semblables  $bap, amq; bap', am'q'$  donnent les relations

$$\frac{ap}{ab} = \frac{mq}{am}, \quad \frac{ap'}{ab} = \frac{m'q'}{am'};$$

et de là, en divisant membre à membre et en observant que  $\frac{am'}{am} = 1$ , et

que  $\frac{mq}{m'q'} = \frac{mn}{m'n} = \frac{\lambda'}{\lambda}$ , il vient

$$\frac{ap}{ap'} = \frac{\lambda'}{\lambda},$$

ou

$$(1) \quad \lambda.ap - \lambda'.ap' = 0.$$

D'ailleurs le point  $a$  appartenant à la courbe, on a

5u DRS MKTIIODES r.V r.KOMfrrRIK. • ■ 11 vient donc, en  
 retranelianl (i) de (a) membre à inembiv, - ' (3) Il en résulte immédiatement  
 . • ■ ■ t4) 'i.fh + y.f'hyu \* ' et cette relation montre que le pôle; ne s'aurait  
 ii|i|>arlenir a là courbe. (fh.\rrii7/io/i. — Il pourrait arriver, pour une  
 position du joint h suflisam\* ^ ment éloi>;née, de ü dans la partie /•//, ^ ipie  
 le point -p bit situé sur le proh/ / \ ' v; ' \ / \ \ reiranciant (i) de (2) et  
 observant h /V \ . <|ue est plus grand ipie n/, il ' .K' A V 1 i / ' \ " \ \ ieni \* \* A'  
 A ' \ '4ii— -ivA :>Air r 1 • » (3') V.f'p' — ' } ..fp=:L, qui entraîne encore la  
 relation (4). Dru.ricmr pnrlic, — Soit A un joint situé d'une manière  
 quelconque au delà de la droite tat', par t > d'où , O forihri , rapport aux  
 foyers/, / ^ : joignons f' , J'k cpil couihuil tat' en A, A'; et joij;nons/A', /"  
 A.- ' » 1°. Supposons ) >>.'. On a , dans le triangle AA/' , hk + kf>hj', ^ . • .  
 . - X. AA' et de là, en ajoutant À ./A au.v deux membres, • ■ ' , ' À. /A -  
 t-./'.J\*"A > /..'/A /'A. \* Et comme, le (Htint A étant sittiésur la droite lui', on  
 a ^ 7../A4-../'A>I.; . ' « I le signe inférieur ayant lieu dans le cas unique où  
 le point A coïnciderait avec le joint », il vient, dans tous les cas, , (5)  
 ■/..'/A+X'./'A > L, ce qui montre que le joint A ne saurait appartenir à la  
 combe. ■2". Un traiterait d'une manière .tr/ncrr/'i/i/c le cas où l'on aurait  
 Ramirtpir. — La construction et la démonstration ciui précédent ont été  
 données par Eatio de Duillier (Bibttnthi-<pie un-m-mctlp et /listo/irpte ,  
 tome V, 1687, page 25). On voit que ItT tangente y est considérée comme  
 une droite n'ayant qu'un point commun avec la courbe, et laissant d'un  
 même côté tous les points de iflle-ci. , Digilizeil by Google

Il vient donc, en retranchant (1) de (2) membre à membre,

$$(3) \quad \lambda \cdot fp + \lambda' \cdot f'p' = L.$$

Il en résulte immédiatement

$$(4) \quad \lambda \cdot fb + \lambda' \cdot f'b > L;$$

et cette relation montre que le point  $b$  ne saurait appartenir à la courbe.

*Observation.* — Il pourrait arriver, pour une position du point  $b$  suffisamment éloignée de  $a$  dans la partie  $at$ ,

que le point  $p$  fût situé sur le prolongement de  $\overline{af}$ . Dans ce cas, en retranchant (1) de (2) et observant que  $\overline{ap}$  est plus grand que  $\overline{af}$ , il vient

$$(3') \quad \lambda' \cdot f'p' - \lambda \cdot fp = L,$$

qui entraîne encore la relation (4).

*Deuxième partie.* — Soit  $k$  un point situé d'une manière quelconque au delà de la droite  $tat'$ , par

rapport aux foyers  $f, f'$  : joignons  $fk, f'k$  qui coupent  $tat'$  en  $h, h'$ ; et joignons  $fh, f'h'$ .

1°. Supposons  $\lambda > \lambda'$ . On a, dans le triangle  $hkf'$ ,

$$hk + kf' > hf',$$

d'où, à fortiori,

$$\lambda \cdot hk + \lambda' \cdot kf' > \lambda' \cdot hf',$$

et de là, en ajoutant  $\lambda \cdot fh$  aux deux membres,

$$\lambda \cdot fk + \lambda' \cdot f'k > \lambda \cdot fh + \lambda' \cdot f'h.$$

Et comme, le point  $h$  étant situé sur la droite  $tat'$ , on a

$$\lambda \cdot fh + \lambda' \cdot f'h \geq L;$$

le signe inférieur ayant lieu dans le cas unique où le point  $h$  coïnciderait avec le point  $a$ , il vient, dans tous les cas,

$$(5) \quad \lambda \cdot fk + \lambda' \cdot f'k > L,$$

ce qui montre que le point  $k$  ne saurait appartenir à la courbe.

2°. On traiterait d'une manière symétrique le cas où l'on aurait  $\lambda' > \lambda$ .

*Remarque.* — La construction et la démonstration qui précèdent ont été données par Fatio de Duillier (*Bibliothèque universelle et historique*, tome V, 1687, page 25). On voit que la tangente  $y$  est considérée comme une droite n'ayant qu'un point commun avec la courbe, et laissant d'un même côté tous les points de celle-ci.

**The text on this page is estimated to be only 26.52% accurate**

SE<:0.\DK PAIII'IK. 53 § U. - méthode de Hoberval. 30. Conci-  
plion générah; de Riiheivat sur lu desriiptUm des courbes p/ir le  
hwiivriUéUil iPuii jxtinl ; su solution du problème des tangentes pur lu  
eonif/osition des différentes vitesses qui animent lejm'nt décrivant. — Dans  
son Traité dos mouvoriu'nls conrjosés (\*), RolK\*rval énonce, ainsi qu'il  
suit, le principe qui s(!rt do l)aso à sa métliode et la manière générale d'ap-  
' pliquer ce principe è la solution du prohlèmo des tangentes ; Axiome ou  
principe d invention. . /m direction du mouvement d'un {«tint qui décrit une  
ligne cotnbe , est la touchante de la ligne courbe en chaque qjosition de ce  
jniint. Rè^le générale pour l'application de ce principe. Par les p/vpriétés  
sptnifiques de la ligne combe {^qui vous seront données ) , e.xaminez les  
divers mouvements ipéirle point .qui lu déej-it à P endroit où inuts voulez  
mener lu toucheanle : de tous ces mouvements composes en un seul, tirez la  
ligne île direction du mouvement comjmsé , vous aurei lu tom hante de Ut  
ligne combe. 31 . d ppplication aux crcloïtles et aux roulettes. — Soit M un  
point de la fourbe engendrée )«ir le mouvement d'un point invariablement  
lié à un cercle a'nmm' qui loUle sur une base quelconipie .rv, droite ou  
courbi'. Considérons le mouvement de la circonférence niobile par lequel  
l'arc iiti•ninient petit ««"de cette circonférence s'enroule sur la base xr. Ce  
mouvement aura pour ufl'et ; i" de comnnmiquer à cbiKpie point M invaria,  
. . • blenient lié au cercle un mouvement de translav; , tion parallèle à  
rélénient actuel /w/' de la base, et dont la vitesse MV sera proportionnelle à  
l'arc aa'\ a" d'inijirimer'an même point M un ' inouvement de rotation autour  
du centre o , par lequel il tournerait autour du jKtinfo d'un angle Mw' =  
mom' = aOu\ la vitesse de ce sf'cond mouvement étant J)roi)orlionnello à  
l'arc inliniment petit .Mc' et dirigée suivant une droite pcrpendiculaïroàM;  
soilMV' celte seconde vitesse composante. Si donc sur les deux lignes MV,  
MV' on construit un parallélogramme, la dia-, gonale MU de ce  
parallélogramme sera la tangente chercliée. Or joignons «M. On a, dans le  
triangle MVI),  $MV \_ MV' \arct// \_ ^rcnwi' \_ om \_ on ' . ' VU MV' arcMf»'$   
 $\sim arcM^{*} (*)$  Tii\>rrs ouvroftpi de Mathf'maliques et de Physique, par SI.M.  
de l'Academie des Sciences , pa{je 8a. l>c Traité des Mouvementi  
composés fut rédigé par un c«ntilhomme bordelais, 'd'ftprcs les leçons qu'il  
avait reçues de Roberval sur celte matière. Celui-ci revit d'aiUeurs ce traité  
avant que de le lire devant r.\cadémie des Sciences, et écrivit en marge

quelques observations critiques, qui ont été conservées dans l'ouvrage dont nous extrayons ces détails, et qui portent d'ailleurs sur la forme et iiob sur le fond mémo des démonslralions. Digitized by Google

## § II. — MÉTHODE DE ROBerval.

30. *Conception générale de Roberval sur la description des courbes par le mouvement d'un point; sa solution du problème des tangentes par la composition des différentes vitesses qui animent le point décrivant.* — Dans son *Traité des mouvements composés* (\*), Roberval énonce, ainsi qu'il suit, le principe qui sert de base à sa méthode et la manière générale d'appliquer ce principe à la solution du problème des tangentes :

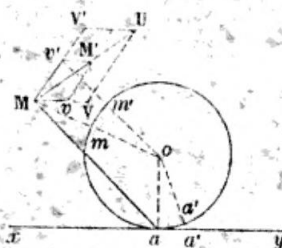
**Axiome ou principe d'invention.**

*La direction du mouvement d'un point qui décrit une ligne courbe, est la touchante de la ligne courbe en chaque position de ce point.*

**Règle générale pour l'application de ce principe.**

*Par les propriétés spécifiques de la ligne courbe (qui vous seront données), examinez les divers mouvements qu'a le point qui la décrit à l'endroit où vous voulez mener la touchante : de tous ces mouvements composés en un seul, tirez la ligne de direction du mouvement composé, vous aurez la touchante de la ligne courbe.*

31. *Application aux cycloïdes et aux roulettes.* — Soit  $M$  un point de la courbe engendrée par le mouvement d'un point invariablement lié à un cercle  $a'amm'$  qui roule sur une base quelconque  $xy$ , droite ou courbe. Considérons le mouvement de la circonférence mobile par lequel l'arc infiniment petit  $aa'$  de cette circonférence s'enroule sur la base  $xy$ . Ce mouvement aura pour effet : 1° de communiquer à chaque point  $M$  invariablement lié au cercle un mouvement de translation parallèle à l'élément actuel  $aa'$  de la base,



et dont la vitesse  $MV$  sera proportionnelle à l'arc  $aa'$ ; 2° d'imprimer au même point  $M$  un mouvement de rotation autour du centre  $O$ , par lequel il tournerait autour du point  $O$  d'un angle  $MOv' = mom' = aOa'$ , la vitesse de ce second mouvement étant proportionnelle à l'arc infiniment petit  $Mv'$  et dirigée suivant une

droite perpendiculaire à  $OM$ ; soit  $MV'$  cette seconde vitesse composante. Si donc sur les deux lignes  $MV$ ,  $MV'$  on construit un parallélogramme, la diagonale  $MU$  de ce parallélogramme sera la tangente cherchée.

Or joignons  $aM$ . On a, dans le triangle  $MVU$ ,

$$\frac{MV}{VU} = \frac{MV}{MV'} = \frac{\text{arc } aa'}{\text{arc } Mv'} = \frac{\text{arc } mm'}{\text{arc } Mo'} = \frac{om}{oM} = \frac{oa}{oM}$$

(\*) *Divers ouvrages de Mathématiques et de Physique, par MM. de l'Académie des Sciences*, page 80. Le *Traité des Mouvements composés* fut rédigé par un gentilhomme bordelais, d'après les leçons qu'il avait reçues de Roberval sur cette matière. Celui-ci revit d'ailleurs ce traité avant que de le lire devant l'Académie des Sciences, et écrivit en marge quelques observations critiques, qui ont été conservées dans l'ouvrage dont nous extrayons ces détails, et qui portent d'ail-



5 'j ■ DES MÉTHODES EX ÉÉOMÉTRIE. , ' \* ' Lo6 doux triangles  $SLV\ddot{u}$  et «oM sont donc semblables, comme ayant un angle égal ( $V-3, o$ ), compris entre des côtés proportionnels. Donc, puisq'uc les premiers côtés  $MV$ ,  $VU$  du prenier triangle sont respectivement perpendiculaires aux côtés  $flf$ ), oM du deuxième côté,, le troisiènuî côté  $MU$  du jtemier est pareillement perpendiculaire au troîsicmo côté «M du lienxième. Donc la fnngcntv en un /xiint iijnflcimqtw d'uné muhttc rtr ]M-rj»'mriculairr à la tûviCi; qui joint le jioint rlécifivant au point de contact cofrespondant tic la ligne mobile sur Id ligne fi-re. . 32. Insujiîsartre de la métluule précédente. — Applications tûeieuses qui en ont été faites, quoique sans erreur définitive, h des exemples auxquels elle doit, rester étrangère. — QucUpie élégant que soit le principe précédimt, on . reconnaît cependant que les applications delà méthode qui on résulte se bornent à quelques cas spéciaux Jels cpie celui que nous venons d'examiner; la détermination des différentes vitesses animant le mobile qui est supimsé décrire la courbo, offrant en\*général de grandes difliciltés. Notre sujet présente même cette particularité curieuse, que sur les quatorze exemples auxquels Rpberval applique sa méthode, les seuls exemples de la roulette et des lignes spirales^ (spirale d'Archimède, conchoi'de) .«ont bien choisis : ils sont du moins les ^euls dans lesrpielson puisse apercevoir d'une manière bien claire que Rolierval a exactement appliipaé le jirincipe dont il était pourtant l'inventeur. Danstouÿ les autres cas, il paraît confondre les vitesses composantes du mobile, suivant deux directions, avec'les projections dé la vitesse tptalo sur cesdirections; et ce n'est que j>ar une sorte d'accident géoméli-itpie, ai nettement mis en lumière par M. Duhamel dans son Cours de Géométrie infinitésimale à la Sorbonne, que cette confusion n'entraï)ic am;nne inexactitude dans la construction définitive ries tangentes aux courbes qu'il considère. Il arrive, en effet, pour toutes res courbes, <pie les vitesses composantes du j)oinl décrivant smit égales,- et, dans ce cas, la direction du mouvement résultant n'est pas changéo par la suUstiiutmnx'rronée des projections do la vitesse toUde aux vitesses composantes elles-môtni's. . , , Rapportons, afin de légitimer ccts assertions, la construction de la Umgente à l'hy|HTbole donnée |»ar Roberval à la page 82 de l'ouvrage indi(Jué : A et B étant les .foyers de la eourhe et fie point qui décrit l'hypcAtole, eh quelque lieu ypte^se prenne le point /, il a deux mouvements : Puq par., lequel il s'éloigne de A le long de la ligne .AU ,

Paulre j>nr lequel • il s'éloigne de B le long de la' ligne BD. Puis donc  
 qu'H s'éloigne également de A et de R et que les deu.v directions- sont f h,  
 ./D, ayant fait un rhombe duquel Fangle soit Df\., c'est ii savoir avant divisé  
 Pangle D/L en deu.r parties égales..', la bisseetrite de l'angle D/L -s'ern la  
 tangente cUerrhée. Mais, coïnment Roberval aperçoit-il l'égallilc des  
 vitesses <-oni|)o.sanU'S suivaq^A./, B,/ ' Très-probablement en i-  
 mifondant les chemins ôlémen

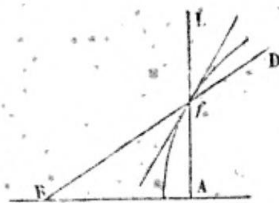
Les deux triangles MVU et  $aoM$  sont donc semblables, comme ayant un angle égal ( $\widehat{V} = \widehat{o}$ ), compris entre des côtés proportionnels. Donc, puisque les premiers côtés MV, VU du premier triangle sont respectivement perpendiculaires aux côtés  $ao$ ,  $oM$  du deuxième côté, le troisième côté MU du premier est pareillement perpendiculaire au troisième côté  $aM$  du deuxième. Donc la tangente en un point quelconque d'une roulette est perpendiculaire à la droite qui joint le point décrivant au point de contact correspondant de la ligne mobile sur la ligne fixe.

32. *Insuffisance de la méthode précédente. — Applications vicieuses qui en ont été faites, quoique sans erreur définitive, à des exemples auxquels elle doit rester étrangère.* — Quelque élégant que soit le principe précédent, on reconnaît cependant que les applications de la méthode qui en résulte se bornent à quelques cas spéciaux tels que celui que nous venons d'examiner; la détermination des différentes vitesses animant le mobile qui est supposé décrire la courbe, offrant en général de grandes difficultés. Notre sujet présente même cette particularité curieuse, que sur les quatorze exemples auxquels Roberval applique sa méthode, les seuls exemples de la roulette et des lignes spirales (spirale d'Archimède, conchoïde) sont bien choisis : ils sont du moins les seuls dans lesquels on puisse apercevoir d'une manière bien claire que Roberval a exactement appliqué le principe dont il était pourtant l'inventeur. Dans tous les autres cas, il paraît confondre les vitesses composantes du mobile, suivant deux directions, avec les projections de la vitesse totale sur ces directions; et ce n'est que par une sorte d'accident géométrique, si nettement mis en lumière par M. Duhamel dans son Cours de Géométrie infinitésimale à la Sorbonne, que cette confusion n'entraîne aucune inexactitude dans la construction définitive des tangentes aux courbes qu'il considère. Il arrive, en effet, pour toutes ces courbes, que les vitesses composantes du point décrivant sont égales; et, dans ce cas, la direction du mouvement résultant n'est pas changée par la substitution erronée des projections de la vitesse totale aux vitesses composantes elles-mêmes.

Rapportons, afin de légitimer ces assertions, la construction de la tangente à l'hyperbole donnée par Roberval à la page 82 de l'ouvrage indiqué :

A et B étant les foyers de la courbe et  $f$  le point qui décrit l'hyperbole, en quelque lieu que se prenne le point  $f$ , il a deux mouvements ; l'un par lequel il s'éloigne de A le long de la ligne AL, l'autre par lequel il s'éloigne de B le long de la ligne BD. Puis donc qu'il s'éloigne également de A et de B et que les deux directions sont  $fL$ ,  $fD$ , ayant fait un rhombe duquel l'angle soit  $DfL$ , c'est à savoir ayant divisé l'angle  $DfL$  en deux parties égales..., la bissectrice de l'angle  $DfL$  sera la tangente cherchée.

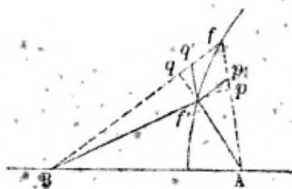
Mais, comment Roberval aperçoit-il l'égalité des vitesses composantes



SKCUNUE PAHI'IE. Ulires qui l'orregpondent à ces vitesses  
 coiri|>osantes, avec les projections-j)>-. fr/, sur leurs dire< tions, du tliemin  
 élémentaire //'' décrit dans le mouvement réel. Car si l'on voulait démontrer  
 rigoureusement l'égalité des vitesses composantes  $f/>'$ , fr/\ il faudrait, en  
 s'appuyant sur la propriété  $f_p = f</$ , qui résulte de la définition de la courbe  
 , établir d'abord que la direction-limite de l'élément de chemin// ', parcouru  
 par le point décrivant, divise d'angle A/B en deux parties égales ; ce qui  
 rendrait ensuite inutile la composition des vju>ss(>s. La direction de la  
 tangente aurait donc servi à déterminer le raiiportdes vitesses composantes,  
 Umdis que locontraire aurait dû avoir lieu. , 3 111. — Des tangentes ai:x  
 counBES dexhites p.vh les difeéhents points d'INE FKïUIVE PLANE  
 nONNÉE OIT SE MEUT DANS SO.N PL,VN. . Drfïni(i<m\*grncnilg des  
 mdettes. — Méthode de Desenrtes imtr la drseriptwn des tangentes h ees'  
 coitrhes, — jisepressinn de rélément rectiligne ou su]>erjïriel de ta courbe  
 qui rt'sulte de Peniploi de cette méthode, — La méthode dont nous allons  
 nous occuper a été imaginée par Descartes à l'occasion du problème des  
 tangentes à la cyclo'ide. Supposons qu'une courbe plane (C'), entraînant  
 dans son mouvement ' un point «/qui lui est lié d'une manière invariable,  
 roule" sur une courbe • fixe (C.) située dans le même plan ; dans ce  
 mouvemen^le point m engendre une ligne appelée roulette ; et la ligne fixe  
 (C) est ap[>elée la base de la roulette.: cela posé, il s'agit de construire la  
 tangente en un point quelconque de la roulette. , A cet effet, substituons  
 avec Descarte», aux deux courbes (C) et (C') Jlelix polygones (P)- et (P')  
 équilatéraux et d'un nombre très-considérable de côtés; la longueur  
 commune des côtés étant la même pour les deux polygones et d'ailloui's  
 inliniment petite. Soient abc. . .hil, a'b'c'. . .léi'l' ces deux [lolygones que  
 nous supiwserons Actuellement on contact suivant les côtés al, a'I' , et soit  
 en outre »/ la position cocr' resi)ondante du point décrivant, invariablement  
 lié ' au polygone // ' ô'c'. Le mouvement du polyr/ gène mobile (P'), qvii a  
 amené le côté l'a' en contact m continuant , a.ura pour effet d'amener le-  
 côté suivant a' b' en contact avec son égal ab, en faisant • . tourner la figure  
 (P') tout enliéro aulpurdu point a (ou //) d'un angle égal à l'inh'^. Le  
 mouvement élémentaire de la figure (P'), dans son |)assagé de la position  
 actuelle la position suivante, n'est donc ' ([u'un mouvement de rotation de  
 toute celte ligure autour du point //, tcvtrémité commune- des éléments la,  
 t'a' actuellement en contact. Ix " point /// pai'ticipe en particulier à ce

mouvement et décrit le petit arc de cercle  $//////'$  ayant pour centre le point  $///$ . La tangente à la courbe décrite par le point  $///$  est donc perpendiculaire à la droite qui le réunit au point  $///$ . \_ Digilired by Google

taires qui correspondent à ces vitesses composantes, avec les projections  $fp$ ,  $fq$ , sur leurs directions, du chemin élémentaire  $ff'$  décrit dans le



mouvement réel. Car si l'on voulait démontrer rigoureusement l'égalité des vitesses composantes  $fp'$ ,  $fq'$ , il faudrait, en s'appuyant sur la propriété  $fp = fq$ , qui résulte de la définition de la courbe, établir d'abord que la direction-limite de l'élément de chemin  $ff'$ , parcouru par le point décrivant, divise l'angle

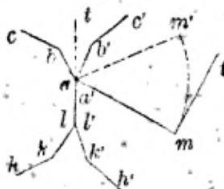
A/B en deux parties égales; ce qui rendrait ensuite inutile la composition des vitesses. La direction de la tangente aurait donc servi à déterminer le rapport des vitesses composantes, tandis que le contraire aurait dû avoir lieu.

§ III. — DES TANGENTES AUX COURBES DÉCRITES PAR LES DIFFÉRENTS POINTS  
D'UNE FIGURE PLANE DONNÉE QUI SE MEUT DANS SON PLAN.

33. *Définition générale des roulettes. — Méthode de Descartes pour la description des tangentes à ces courbes. — Expression de l'élément rectiligne ou superficiel de la courbe qui résulte de l'emploi de cette méthode. — La méthode dont nous allons nous occuper a été imaginée par Descartes à l'occasion du problème des tangentes à la cycloïde.*

Supposons qu'une courbe plane ( $C'$ ), entraînant dans son mouvement un point  $m$  qui lui est lié d'une manière invariable, roule sur une courbe fixe ( $C$ ) située dans le même plan ; dans ce mouvement, le point  $m$  engendre une ligne appelée *roulette* ; et la ligne fixe ( $C$ ) est appelée la *base* de la roulette : cela posé, il s'agit de construire la tangente en un point quelconque de la roulette.

A cet effet, substituons avec Descartes, aux deux courbes (C) et (C') deux polygones (P) et (P') équilatéraux et d'un nombre très-considérable de côtés; la longueur commune des côtés étant la même pour les deux polygones et d'ailleurs infiniment petite. Soient  $abc\dots hkl$ ,  $a'b'c'\dots h'k'l'$  ces deux polygones que nous supposons actuellement en contact suivant



les côtés  $al$ ,  $a'l'$ , et soit en outre  $m$  la position correspondante du point décrivant, invariablement lié au polygone  $a'b'c' \dots h'k'l'$ . Le mouvement du polygone mobile ( $P'$ ), qui a amené le côté  $l'a'$  en contact avec  $la$ , continuant, aura pour effet d'amener le côté suivant  $a'b'$  en contact avec son égal  $ab$ , en faisant tourner la figure ( $P'$ ) tout entière autour du point  $a$

(ou  $a'$ ) d'un angle égal à  $\hat{b}ab'$ . Le mouvement élémentaire de la figure ( $P'$ ), dans son passage de la position actuelle à la position suivante, n'est donc qu'un mouvement de rotation de toute cette figure autour du point  $a$ , extrémité commune des éléments  $la$ ,  $l'a'$  actuellement en contact. Le point  $m$  participe en particulier à ce mouvement et décrit le petit arc de cercle  $mm'$  avant pour centre le point  $a$ . La tangente à la courbe décrite par

56 DKS MÉTHODES ES UÉOMÉTRIE. La mène' ronstruclion ayant lieu ([uelque petits que soient les côtés des deux polygones que nous avons substitués aux lignes (C) et (C), aura lieu aussi à la limite , c'est-à-dire quand on considérera le roulement de la courbe (C') elle-même sur la courbe (G). Donc la normale en un fpoint quelconque iPiue roulefte ntmulil , à chaque instant , au point de contact corresjxiudant de la liane mobile sur la ligne Jixe, Seolie 1. — Les méthoil(\*s miKlcrnes |K)jir la description d<!S tñfngentes se séparent surtout en ceci de la métlio<le des géomètres anciiuis ; quelles premières conduisent to\ijours à l'expression , plus ou moins simple et plus ou moins ulile d'ailleurs, de l'arc élémentiire de la courbe dont on sait constriiin\* la Jangente; tandis que la marche même suivie par les an. ciens les écartait néci-ssaiifinent d'un pareirrésultat qui, tout secondaire (ju'il soit dans le problème actuel , a cependant en lui-même tine grande importance. Or la méthode précédente i>st piwisément l'une de celles qui conduisent à l'oxprossion la plus utile de l'arc élémentaire de Ui courbe. Désignons, en effet, par s et s' les angles de contingence en a et «'des deux polygones (P) et (P') qui ont été substitui^ aux courbes (C) et {C'^. c = bat , £'=r b'a't («f ou n't étant le prolongtuhent commun de la et - de l'a'). L'angle de rotation b a h' est égal à la valeur absolue de l'expies-, sion e ± i', le signe -H ou le signe — ayant lieu suivant que la ligne mo- ' bile roule sur la convexité ou surda concavité de la courbe üxo; et comme l'angle mam' est égal à on a d'abord, en désignant par Ha distance «w., J ~ ' ■ ' ai ciw«'=r ± ± d'où, en divisant par ab =: a' b', • • ' . ave mm' \_ / £ \*'> V ' ' ' ab ' \ab a' b' J El de là, en passant aux limites et observant que et ont pour limites - et A (p et p' désignant les ravons de courbure en « de la courbe P r ' . ' \* mobile et de la courbe fixe), on a, en appi'lant ds et do les dilférentielleÆ correspondantes des arcs de la courbe mobile èt de la roulette, . Scolic //. — La 'méiho méthode fournit encore l'expression de faire élémentaire de la roulette, celte aire étant l'espace compris. entre l'arc mm' de la roulette, l'arc correspondant ab de la courbe lixe et les droites am , bm'. ' Car cette aire se compose : i° du secteur" circulaire amm' qui a polir ■ Digitizefl by

La même construction ayant lieu quelque petits que soient les côtés des deux polygones que nous avons substitués aux lignes (C) et (C'), aura lieu aussi à la limite, c'est-à-dire quand on considérera le roulement de la courbe (C') elle-même sur la courbe (C). Donc *la normale en un point quelconque d'une roulette aboutit, à chaque instant, au point de contact correspondant de la ligne mobile sur la ligne fixe.*

*Scolie L.* — Les méthodes modernes pour la description des tangentes se séparent surtout en ceci de la méthode des géomètres anciens : que les premières conduisent toujours à l'expression, plus ou moins simple et plus ou moins utile d'ailleurs, de l'arc élémentaire de la courbe dont on sait construire la tangente; tandis que la marche même suivie par les anciens les écartait nécessairement d'un pareil résultat qui, tout secondaire qu'il soit dans le problème actuel, a cependant en lui-même une grande importance.

Or la méthode précédente est précisément l'une de celles qui conduisent à l'expression la plus utile de l'arc élémentaire de la courbe.

Désignons, en effet, par  $\varepsilon$  et  $\varepsilon'$  les angles de contingence en  $a$  et  $a'$  des deux polygones (P) et (P') qui ont été substitués aux courbes (C) et (C').

$\varepsilon = \widehat{bat}$ ,  $\varepsilon' = \widehat{b'a't}$  ( $at$  ou  $a't$  étant le prolongement commun de  $la$  et de  $l'a'$ ). L'angle de rotation  $\widehat{bab'}$  est égal à la valeur absolue de l'expression  $\varepsilon \pm \varepsilon'$ , le signe + ou le signe - ayant lieu suivant que la ligne mobile roule sur la convexité ou sur la concavité de la courbe fixe; et comme l'angle  $\widehat{mam'}$  est égal à  $\widehat{bab'}$ , on a d'abord, en désignant par  $r$  la distance  $am$ ,

$$\text{arc } mm' = \pm r(\varepsilon \pm \varepsilon'),$$

d'où, en divisant par  $\overline{ab} = \overline{a'b'}$ ,

$$\frac{\text{arc } mm'}{ab} = \pm r \left( \frac{\varepsilon}{ab} \pm \frac{\varepsilon'}{a'b'} \right).$$

Et de là, en passant aux limites et observant que  $\frac{\varepsilon}{ab}$  et  $\frac{\varepsilon'}{a'b'}$  ont pour limites  $\frac{1}{\rho}$  et  $\frac{1}{\rho'}$  ( $\rho$  et  $\rho'$  désignant les rayons de courbure en  $a$  de la courbe mobile et de la courbe fixe), on a, en appelant  $ds$  et  $d\sigma$  les différentielles correspondantes des arcs de la courbe mobile et de la roulette,

$$(I) \quad \frac{d\sigma}{ds} = \pm r \left( \frac{1}{\rho} \pm \frac{1}{\rho'} \right).$$

*Scolie II.* — La même méthode fournit encore l'expression de l'aire élémentaire de la roulette, cette aire étant l'espace compris entre l'arc  $mm'$  de la roulette, l'arc correspondant  $ab$  de la courbe fixe et les droites  $am$ ,  $bm'$ .



SK«:«»\UE PAUTIE. 57 expression  $\pm r'(\hat{i} \pm \hat{i}')$ ; 2" du secteur  
 m'ah, qui n'est autre chose que le SK'Cteur «;«7/ transporté dans une  
 position infiniment voisine. Donc, ' ^ en désignant par  $\angle$ ,  $r'^*$ ,  $r/.v$  les  
 diirérentiellos correspondimtf.s de faire de la roulette, du secteur avant pour  
 sommet le point décrivant et pour base l'arc enroulé de la courbe mobile, et  
 de l'arc enroulé de la courlie Jixe, on aura  $\wedge t! A = d't. \pm f - \pm \text{---} \backslash ds, \gg \backslash ?$ .  
 cJ le sigçe  $\pm$  qui est devant le dernier terme du second membre ayant pour  
 objet de rendre ce terme additif dans tous les cas. V' 3i. Théorie de.i centres  
 instimtanés de rotation. — Le mouvement .d'une figure plane, de forme et  
 de grandeur invariables, qui se déplacé dahs son plan,. et plus généralement  
 le mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe, ont été étudiés par  
 plusimirs géomètres, et notamment par Euler et par MM. Poinso et  
 Chasles. Leurs travaux ont produit CO (ju'on appellè aujourd'hui la théorie  
 des centres et axes instantanés do rotation, dont nous alténs exposer tes  
 principes. Tiikokkmk I. — ' I.e nmitvenient élémentaire iPiine figure plane  
 de forme l't de grandeur invariables, i/tii se déplace dans son planj est  
 toujours un mnuventenl injiniipent petit de rotation autour (Pua certain  
 jioinl fur du plan ^ ' Le mouvement élémentaire de la figure est à chaapte  
 instant te mouvement infiniment petit par le(|uel cotte ligure pa.sse de sa  
 position actuelle à la position, infiniment voisine qu'elle occupera dans  
 l'instant suivant. Démonstration. — Soient / et/' les positions occujiées par  
 la figure mobile F à deux époopies ^Hc/mwr/wc.v de son mouvement, mn,  
 m'n' • les deux positions occupées, dans / et/', par une mémo droite MN de  
 la ligure F ; et a le point d'intersection des droites mn, m' n'. ■ 1".  
 Considérons l<> point a comme nn pomt de la figime mobile F dans sa  
 première position /. (Inand F passo de / en /', la droite MN passe ellemême  
 do mn en /<'<'<', et le point a de mn vient quelque part en a, sur n'. ; 2". Si, au  
 contraire, nous considérons le point «comme un point de la figure mobile F  
 dans sa position /', nous ver- ■ rons que F revenant de,/' en-,/'", la droite MN  
 revient elle-même d(' m' n' en /<'<'<', et que le IHtint a de m' n' revient quelque  
 part en «,, "sur mn. - ., Un voit donc, d'après la définition des points «,, et  
 «I, que dans le jiassage de la figure mobile de la iioàition,/' à la position,/'",  
 lespointsw, et a de w« viennent respectivement co'incidCr avec les Joints a  
 et «, de /<'<'<'; et comme dans ce mouvement la ligure reste invariable de  
 forme • ■ Olgllized by Google

expression  $\pm \frac{1}{2} r^2 (\varepsilon \pm \varepsilon')$ ; 2° du secteur  $m'ab$ , qui n'est autre chose que le secteur  $ma'b'$  transporté dans une position infiniment voisine. Donc, en désignant par  $d\Lambda$ ,  $d\lambda$ ,  $ds$  les différentielles correspondantes de l'aire de la roulette, du secteur ayant pour sommet le point décrivant et pour base l'arc enroulé de la courbe mobile, et de l'arc enroulé de la courbe fixe, on aura

$$(II) \quad d\Lambda = d\lambda \pm \frac{1}{2} r^2 \left( \frac{1}{\rho} \pm \frac{1}{\rho'} \right) ds,$$

le signe  $\pm$  qui est devant le dernier terme du second membre ayant pour objet de rendre ce terme additif dans tous les cas.

34. *Théorie des centres instantanés de rotation.* — Le mouvement d'une figure plane, de forme et de grandeur invariables, qui se déplace dans son plan, et plus généralement le mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe, ont été étudiés par plusieurs géomètres, et notamment par Euler et par MM. Poinso et Chasles. Leurs travaux ont produit ce qu'on appelle aujourd'hui la théorie des centres et axes instantanés de rotation, dont nous allons exposer les principes.

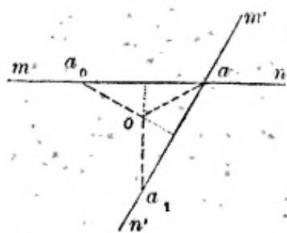
**THÉORÈME I.** — *Le mouvement élémentaire d'une figure plane de forme et de grandeur invariables, qui se déplace dans son plan, est toujours un mouvement infiniment petit de rotation autour d'un certain point fixe du plan.*

Le mouvement *élémentaire* de la figure est à chaque instant le mouvement infiniment petit par lequel cette figure passe de sa position actuelle à la position infiniment voisine qu'elle occupera dans l'instant suivant.

*Démonstration.* — Soient  $f$  et  $f'$  les positions occupées par la figure mobile  $F$  à deux époques *quelconques* de son mouvement,  $\overline{mn}$ ,  $\overline{m'n'}$  les deux positions occupées, dans  $f$  et  $f'$ , par une même droite  $MN$  de la figure  $F$ ; et  $a$  le point d'intersection des droites  $mn$ ,  $m'n'$ .

1°. Considérons le point  $a$  comme un point de la figure mobile  $F$  dans sa première position  $f$ . Quand  $F$  passe de  $f$  en  $f'$ , la droite  $MN$  passe elle-même de  $mn$  en  $m'n'$ , et le point  $a$  de  $mn$  vient quelque part en  $a_1$  sur  $m'n'$ .

2°. Si, au contraire, nous considérons le point  $a$  comme un point de la figure mobile  $F$  dans sa position  $f'$ , nous verrons que  $F$  revenant de  $f'$  en  $f$ , la droite  $MN$  revient elle-même de  $m'n'$  en  $mn$ , et que le point  $a$  de  $m'n'$  revient quelque part en  $a_0$  sur  $mn$ .



On voit donc, d'après la définition des points  $a_0$  et  $a_1$ , que dans le passage de la figure mobile de la position  $f$  à la position  $f'$ , les points  $a_0$  et  $a$  de  $mn$  viennent respectivement coïncider avec les points  $a$  et  $a_1$ .

58 • DES SIKTHIQUES EX UÉDMÉTIUE. . • \* » I • Cl de  
gramlcn-, 011 a l'égalilé • , ' • . n < i — du . . . . ■ . ■ - ^ - ► j \* Donc, si  
l'on mène par les milieux de «», des perpen4i('ulaircs respectives à ces  
droites, lesquelles se coupent en o, le point. w sera le centre d'un corde  
passant par a et et l'angle n^ou sera égal à l'angle rten,. 11 résulte do là que  
l'on jicut amener la droite A, A de la ligne F de la position //,«. à celle de  
w/, et piir suite lit figure F elle- ' mémo de la position /à la position /', par  
une rotation do toute la tiguro/ autour du centra o; l'angle décrit dans cette  
rotation étant n^i. • Donc • Si r (ni considère un déplacement fini  
(pielcompie d'une figure dans son plan , on peut toujours amener cette  
figure de la première position à In dernièiv f en faisant tourner cette figure ,  
prise dans la première posi- • tion, if un angle déterminé autour (Cnn point  
conventddement choisi dans son plan. • » , ' . Dans cetto suljstitution on n'a  
d'ailleurs égard qu'aux positions extrêmes et nullement aux positions  
intermédiaires de la figtiro mobile, qui ne sont pas reproduites, en général,  
dans le mouvement do rotation dont nous parlons. Le tliéorèmo précédent  
ayant lieu pour -un mouvement fini quelconque do la ligure F, aura encore  
lieu pour le mouvement élémentaire i|ui amène cette figure do la position /à  
la posilion-i/ncir/i/c/'; mais ' alors toute restriction au sujet des positions do  
la figure mobile, intermédiaires à / et à /', disparatt, et l'on trouve le  
Uiéorème énoncé. / \_ Définition, — Le centre autour duquel s'effectue la  
rotation infiniment péti'le (lui cojistituo, d'aitrès ce ipii précède, le  
mouvement élémentaire do la ligure, reçoit lo nom de c(7i(rf c/c \*  
TnÉouÈsiE 11. — Une figure F étant animée dans son plan (Pun  
nuiui'ement continu quclcomptc , ce mouvement pourra toujours être  
jimdiàj par le roulement sur une ligne fixe [n), d'une ligne ('>),  
invariahlemenl liée à la figiu'c F, ft l'entraînant dans son mouvement. . . \_ ■  
— Dconqiosons, en\* effet, le mouvement fini de la figure F dans scs  
mouvements élémentaires successits qui sont, comme nous l'avons vu, des  
mouvements do rotation mesurés par des angles inlinhnont petits r, fi , /•",. .  
. , s'effectuant autour des centres instantanés . suceexssifs O , </, o", . . . Ces  
points se succèdent d'une' manière (! continue , si le mouvement do la ligure  
est lui-même continu, ce que nous supposons' ' essentiellement, et forment-  
nne ligne polygonale à côtés infiniment petits qui so transformera à la limite  
en une courbe (o). Or, c(«i.sidérons cetto ligne polygonale pcTfi".-., et  
désignons par (■', c", fi", . . . ; ses angles do contingence en o', o", o"',.,. .

Par le point  $o$ ; autour duquel s'effectue la rotation initiale de la figure, menons une ligne polygonale  $ow'w''\dots$ , ou  $taw'w''m''\dots$ , dont les côtés successifs  $ww'$ ,  $m''w''$ , . . , soient respectivement égaux aux côtés  $on'$ ,  $n'o''$ ,  $fi'o'''$ , . . et telle, en outre,  $\dots$ . '  $r$ ,  $v\ll$ . ' .Digitized by Google

et de grandeur, on a l'égalité

$$a_0 a = a a_1.$$

Donc, si l'on mène par les milieux de  $\overline{a_0 a}$ ,  $\overline{a a_1}$ , des perpendiculaires respectives à ces droites, lesquelles se coupent en  $o$ , le point  $o$  sera le centre d'un cercle passant par  $a_0$ ,  $a$  et  $a_1$ , et l'angle  $a_0 o a$  sera égal à l'angle  $a o a_1$ . Il résulte de là que l'on peut amener la droite  $A_0 A$  de la ligne  $F$  de la position  $a_0 a$  à celle de  $a a_1$ , et par suite la figure  $F$  elle-même de la position  $f$  à la position  $f'$ , par une rotation de toute la figure  $f$  autour du centre  $o$ ; l'angle décrit dans cette rotation étant  $\widehat{a_0 o a}$ .  
Donc

*Si l'on considère un déplacement fini quelconque d'une figure dans son plan, on peut toujours amener cette figure de la première position à la dernière, en faisant tourner cette figure, prise dans la première position, d'un angle déterminé autour d'un point convenablement choisi dans son plan.*

Dans cette substitution on n'a d'ailleurs égard qu'aux positions extrêmes et nullement aux positions intermédiaires de la figure mobile, qui ne sont pas reproduites, en général, dans le mouvement de rotation dont nous parlons. Le théorème précédent ayant lieu pour un mouvement fini quelconque de la figure  $F$ , aura encore lieu pour le mouvement élémentaire qui amène cette figure de la position  $f$  à la position suivante  $f'$ ; mais alors toute restriction au sujet des positions de la figure mobile, intermédiaires à  $f$  et à  $f'$ , disparaît, et l'on trouve le théorème énoncé.

*Définition.* — Le centre autour duquel s'effectue la rotation infiniment petite qui constitue, d'après ce qui précède, le mouvement élémentaire de la figure, reçoit le nom de *centre instantané de rotation*.

**THÉORÈME II.** — *Une figure  $F$  étant animée dans son plan d'un mouvement continu quelconque, ce mouvement pourra toujours être produit par le roulement sur une ligne fixe ( $o$ ), d'une ligne ( $\omega$ ), invariablement liée à la figure  $F$ , et l'entraînant dans son mouvement.*

*Démonstration.* — Décomposons, en effet, le mouvement fini de la figure  $F$  dans ses mouvements élémentaires successifs qui sont, comme nous l'avons vu, des mouvements de rotation mesurés par des angles infiniment petits  $r, r', r'', \dots$ , s'effectuant autour des centres instantanés successifs  $o, o', o'', \dots$ . Ces points se succèdent d'une manière continue, si le mouvement de la figure est lui-même continu, ce que nous supposons essentiellement, et forment une ligne polygonale à côtés infiniment petits qui se transformera à la limite en une courbe ( $o$ ).

Or, considérons cette ligne polygonale  $oo'o'' \dots$ , et désignons par  $c', c'', c''', \dots$ , ses angles de contingence en  $o', o'', o''', \dots$ . Par le point  $o$ , autour duquel s'effectue la rotation initiale de la figure, menons une ligne polygonale  $o\omega'\omega''\omega''' \dots$ , ou  $\omega\omega'\omega''\omega''' \dots$ , dont les côtés successifs  $\omega\omega'$ ,  $\omega'\omega''$ ,  $\omega''\omega''' \dots$  soient respectivement égaux aux côtés  $oo'$ ,  $o'o''$ ,  $o'o''' \dots$ ,

SECONDE PARTIE. • 9. I. Que  $ww'$  ou  $ou$  fasse avec  $oo'$  un angle égal au premier angle de rotation  $7', a''$ . Que les angles de continence,  $\cdot, 7'', j''', \dots$ , en  $w', w'', \dots$ , soient définis par les équations  $\frac{\cdot}{\cdot} = (\cdot + \dots) - V = e''^4 - v'V - \dots$ . F. nous regardons la ligne  $\dots$ , ainsi définie, comme invariablement liée à la figure  $F$ , nous allons constater facilement que le mouvement de la figure  $F$  produira le roulement de la ligne  $ww'm''$ .  $\dots$  sur la ligne  $no'o''$ .  $\dots$  En effet, dans ses déplacements successifs, 1°. La figure  $F$  tourne d'abord autour du point  $o$  d'un angle égal à  $r$ ; cette rotation amène donc sur son égale  $no'$ , le point  $w'$  venant en l'angle qui fait alors  $o>'m''$  venu en avec  $o'o''$  est égal à la somme  $c'+y'$  des angles de contingence en  $\langle \rangle$ ,  $t, i'$ , c'est-à-dire est égal à  $r$ ;  $\cdot - \wedge^2$ . La figure  $F$  tourne ensuite autour du point  $o'$  (ou  $\langle \rangle$ ), d'un angle égal à  $V$ ; cette rotation amène donc  $w'$  sur son égale  $o'o''$ , le point  $w'$  venant en  $o''$ , et l'angle qui fait alors venue en  $w'' w''$ , avec  $o''o''$  est égal à la somme  $c'' - f - 7''$  des angles de contingence en  $o''$  et  $w''$ , c'est-à-dire égal à  $r$ ;  $\cdot 3^\circ$ . La figure  $F$  tournant ensuite autour de  $o''$  (ou  $w''$ ) d'un angle égal à cette rotation amènera encore le côté  $u'' w''$  sur son égale  $o''o'''$ , et ainsi  $\dots$  de suite. On voit donc que si l'on passe à la limite et que l'on désigne par  $\dots$  et (oi) les courbes limites des polygones  $no'o'' \dots, uu'u''$ . le mouvement considéré de la figure  $F$  produit le roulement, sur la courbe (o), de la ligne (w) invariablement liée à la figure  $F$ . Donc, réciproquement, le mouvement considéré de la figure  $F$  peut être produit par le roulement sur une ligne fixe (o), d'une ligne (w) invariablement liée à la figure  $F$  et entraînant (hina) son mouvement.  $\therefore$  g. F. D.  $\dots$ , H. maripic. — le mouvement de la figure  $F$  étant connu, on peut, comme nous le verrons, déterminer à chaque instant la position du centre instantané, de rotation, et déterminer ensuite, sur le plan immobile dans lequel se déplace la figure  $F$ , la courbe (o), lieu des centres instantanés de rotation. Quant à la détermination de la ligne (w) par rapport à la figure  $F$  à laquelle elle est invariablement liée, voici, d'après M. Chasles, la manière d'y parvenir : Considérant la figure  $F$  comme située dans un plan mobile, distinct du plan immobile de la ligne (o), et simplement superposé à celui-ci, on imaginera à chaque instant qu'un centre actuel de rotation [considéré comme appartenant spécialement au plan immobile de la ligne (o)] imprime sa trace sur le plan de la ligne mobile; le lieu de ces traces sera la courbe cherchée (1). Digitized by Google

1° Que  $\omega\omega'$  ou  $o\omega$  fasse avec  $oo'$  un angle égal au premier angle de rotation  $r$ ;

2° Que les angles de contingence  $\gamma', \gamma'', \gamma''', \dots$ , en  $\omega', \omega'', \omega''', \dots$ , soient définis par les équations

$$r' = c' + \gamma',$$

$$r'' = c'' + \gamma'',$$

$$\vdots$$

Enfin regardons la ligne  $\omega\omega'\omega''\dots$ , ainsi définie, comme invariablement liée à la figure F, nous allons constater facilement que le mouvement de la figure F produira le roulement de la ligne  $\omega\omega'\omega''\dots$  sur la ligne  $oo'o''\dots$ .

En effet, dans ses déplacements successifs,

1°. La figure F tourne d'abord autour du point  $o$  d'un angle égal à  $r$ ; cette rotation amène donc  $\omega\omega'$  sur son égale  $oo'$ , le point  $\omega'$  venant en  $o'$ ; l'angle que fait alors  $\omega'\omega''$  venue en  $\omega', \omega'_1$  avec  $o'o''$  est égal à la somme  $c' + \gamma'$  des angles de contingence en  $o', \omega'$ , c'est-à-dire est égal à  $r'$ ;

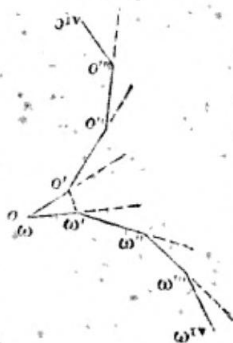
2°. La figure F tourne ensuite autour du point  $o'$  (ou  $\omega'_1$ ) d'un angle égal à  $r'$ ; cette rotation amène donc  $\omega'_1\omega''_1$  sur son égale  $o'o''$ , le point  $\omega''_1$  venant en  $o''$ , et l'angle que fait alors  $\omega''\omega'''$ , venue en  $\omega''_2\omega''_2$ , avec  $o''o'''$  est égal à la somme  $c'' + \gamma''$  des angles de contingence en  $o''$  et  $\omega''$ , c'est-à-dire égal à  $r''$ ;

3°. La figure F tournant ensuite autour de  $o''$  (ou  $\omega''_2$ ) d'un angle égal à  $r''$ , cette rotation amènera encore le côté  $\omega''_2\omega'''$  sur son égale  $o''o'''$ , et ainsi de suite.

On voit donc que si l'on passe à la limite et que l'on désigne par  $(o)$  et  $(\omega)$  les courbes limites des polygones  $oo'o''\dots$ ,  $\omega\omega'\omega''\dots$ , le mouvement considéré de la figure F produit le roulement, sur la courbe  $(o)$ , de la ligne  $(\omega)$  invariablement liée à la figure F. Donc, réciproquement, le mouvement considéré de la figure F peut être produit par le roulement sur une ligne fixe  $(o)$ , d'une ligne  $(\omega)$  invariablement liée à la figure F et l'entraînant dans son mouvement.

C. Q. F. D.

*Remarque.* — Le mouvement de la figure F étant connu, on peut, comme nous le verrons, déterminer à chaque instant la position du centre instantané de rotation, et déterminer par suite, sur le plan immobile dans lequel se déplace la figure F, la courbe  $(o)$ , lieu des centres instantanés de rotation. Quant à la détermination de la ligne  $(\omega)$  par rapport à la figure F à laquelle elle est invariablement liée, voici, d'après M. Chasles, la manière d'y parvenir : Regardant la figure F comme située dans un plan mobile, distinct du plan immobile de la ligne  $(o)$ , et simplement superposé à celui-ci, on imaginera à chaque instant que le centre actuel de rotation [considéré comme appartenant spécialement au plan immobile de la ligne  $(o)$ ] imprime sa trace sur le plan de la figure



Go • I>ES MÉTHODES EX UÉomÉTKIE. - Saide. — Ia'»  
théorènu's précédents et leurs démonstrations s'appli([uent, sans aucune  
modification, au mouvement d'une figure sphériiijuo quelconque qui se  
déplacerait sans sortir déjà sphère où elle est tracée : les nouveaux  
théorèmes ipii en résultent servant de hase, comme où sait, à l'étude du  
mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe. 35. U^fif;c.i lie lu  
théorie prècêilente dans le pruhlème des tiwge/ite.<' — Examen des trois  
eas ipii peuvent se' présenter,^ — A'ppHratinns. — “ ‘ - •. La théorie des  
tangentes et celles des courbes enveloppes, sè prêtant ici ’ • un nnituel  
appui, nous indiquerons simultanément, et par anticipation sur . ' ' le  
chapitre suivant, les applications de la théorie précédente aux deux  
problèmes des tangentes et <les courbes enveloppes. (.lu'une figure F, de  
forme et de grandeur invariables, se meuve dans ' ; .son plan et que l'on  
considère les courbes décrites dans ce mouvement |iar . [ plu-sieurs points  
M, M', M'', ... ,de cette figure. Süientw, H/', /H%. ..., lesposi- ' • tiens  
eorrcspimdimtes points décrivants, à une époque quelconque du  
mouvement. L(^ mouvement élémentaire suivant de la figure sera un mou-  
^ • .veinent infiniment petit de rotation autour d'un centre », en vertu diupiel  
< les points /««,«(' , «(", . . . , décriront de petits arcs de cercle ayant pour  
centre ‘ ' commun le point «; donc, . i“. Ia'S normales aux coirrhés décrites  
par les différents jminLs de ta fi- " giire mobile, menées en des points  
coriespondants ees courbés , t'ont toutes concourir en un même point o, epii  
est le centre instantané de iota- \ c tinn corresjjondant à ta position^  
considérée de la Ji^ure mobile. Dans ce même mouvement, la droite qui  
joint deux jaiints (pielconques de la figure mobile, demeure dans son  
déplacement infiniment petit, à la . ■■ même distance du centre... o ; elle  
denmure donc tangente à un cercle ayant ■ pour centre le point o, et, par  
suite, le point où cette droite touche scia . ' \_ ^ enveloppe est le pied de la  
perpendiculaire abaissée du point o, sur petto \* '• droite; donc, ■' ... a”. Les  
normales aux courbes enrlop/HU's j>ar les diverses droites de la . . ■  
fi"ure mobile , menées en des y.(o//iC.i' correspondants de ces courbes, vont  
toutes concourir en un même point o, centre instantané de rotation.  
CoiiioLL.AiHE. — Il résulte de ces deux projmsitions ipie si, dans le mou.- '  
. veulent trune figure donnée , on connaît h cluupie instant! I . -.ÇraC le  
mouvement dedeuxpointsdecetterigure,c't>st-à-direlesnormales aux lignes  
que décrivent ces points; ' ” . . a. Soit le mouvement d'un seul point de la



figure et le point où une droite  $\bullet$ , ' de cette figure touche son enveloppe;  $\bullet$ . ' ^ ' 3. Soit enfin les (loints où deux droites de la figure touchent leurs en- ■ , • veloppes respectives; On ])ourra, pour chaque position do la figure mobile, déterminer le centreinstantané do rotation qui sera fouihi par rintorsfction do deux droites connues; et ce point une fois déterminé, on sera en état do construire les tangentes aux lignes décri tes' par tous les autres jioints de la figure mo- ' . bigiiized by Google

*Scolie.* — Les théorèmes précédents et leurs démonstrations s'appliquent, sans aucune modification, au mouvement d'une figure sphérique quelconque qui se déplacerait sans sortir de la sphère où elle est tracée : les nouveaux théorèmes qui en résultent servant de base, comme on sait, à l'étude du mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe.

35. *Usages de la théorie précédente dans le problème des tangentes.* — *Examen des trois cas qui peuvent se présenter.* — *Applications.* — La théorie des tangentes et celles des courbes enveloppes, se prêtant ici un mutuel appui, nous indiquerons simultanément, et par anticipation sur le chapitre suivant, les applications de la théorie précédente aux deux problèmes des tangentes et des courbes enveloppes.

Qu'une figure  $F$ , de forme et de grandeur invariables, se meuve dans son plan et que l'on considère les courbes décrites dans ce mouvement par plusieurs points  $M, M', M'', \dots$ , de cette figure. Soient  $m, m', m'', \dots$ , les positions *correspondantes* des points décrivant, à une époque quelconque du mouvement. Le mouvement élémentaire suivant de la figure sera un mouvement infiniment petit de rotation autour d'un centre  $o$ , en vertu duquel les points  $m, m', m'', \dots$ , décriront de petits arcs de cercle ayant pour centre commun le point  $o$ ; donc,

1°. *Les normales aux courbes décrites par les différents points de la figure mobile, menées en des points correspondants de ces courbes, vont toutes concourir en un même point  $o$ , qui est le centre instantané de rotation correspondant à la position considérée de la figure mobile.*

Dans ce même mouvement, la droite qui joint deux points quelconques de la figure mobile, demeure dans son déplacement infiniment petit, à la même distance du centre...  $o$ ; elle demeure donc tangente à un cercle ayant pour centre le point  $o$ , et, par suite, le point où cette droite touche son enveloppe est le pied de la perpendiculaire abaissée du point  $o$  sur cette droite; donc,

2°. *Les normales aux courbes enveloppées par les diverses droites de la figure mobile, menées en des points correspondants de ces courbes, vont toutes concourir en un même point  $o$ , centre instantané de rotation.*

**COROLLAIRE.** — *Il résulte de ces deux propositions que si, dans le mouvement d'une figure donnée, on connaît à chaque instant :*

1. Soit le mouvement de deux points de cette figure, c'est-à-dire les normales aux lignes que décrivent ces points;
2. Soit le mouvement d'un seul point de la figure et le point où une droite de cette figure touche son enveloppe;
3. Soit enfin les points où deux droites de la figure touchent leurs enveloppes respectives;

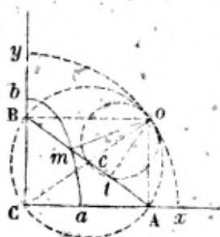
On pourra, pour chaque position de la figure mobile, déterminer le centre instantané de rotation qui sera fourni par l'intersection de deux droites connues; et ce point une fois déterminé, on sera en état de construire les

. , 'seconde partie. 61 ■ ' hile , ainsi que les points où les  
 diirécnles droites de cette liiître toiich(>nt leurs enveloppes respecti\es.  
 APPLICATIONS. i'. ('.onsiilérons, en premier lieu, le mouvement d'une  
 droite Alt, de lon^'uciir ronstanle, dont les extrémités A et 11 pdis' seul sur  
 deux axes rectangulaires Cî.c, Cr; on voit, , soit d'après la théorie  
 précédente, soit par des considérations géométriques directes ^ i" que  
 l'ellipso amh. décrite par un point ([uelconque /« de la droite AH, n'est  
 aide chos<\* ipi une épicycloïde raccourcie (ou allongée), engendrée par  
 un point m invariahlementliéà la circonférence oACll qui roule  
 intérieurement sur la circonférence roy de rayon double; et ce résultat nous  
 sera ) ^ utile dans la suite; 2" que la ligne enveloppe de la droite mobile AB  
 est une épicycloïde engendrée par le i)oint / de la circonférence, otc roulant  
 . ' intéri<urement sxir la circonférence xny de rayon quadnqile. a'. Si l'on  
 considère , en si'cond lieu, la courbe décrite par l'extrémité B • , d'une  
 droite AB, de longueur constante, (jui tourne autour d'un point fixe • ou  
 quidemcvïre tangente à une courbe donnée, et dont la seconde extré• . \*  
 mité décrit une ligne directrice dopnée, on rentrera dans le second des cas  
 énumérés plus haut; et l'on parviendra facilement à la construction connue  
 do la tangente à la ronchn'ülp décrite par le point B. 3'. Si l'on considère  
 enlin le mouvement d'un triangle donné .MM', dont deux côtés b et c  
 demeurent tangents à deux circonférences fixes de rayon ♦ • ^ et 7, on  
 établit facilement iiuo le troisième coté n demeure tangent à une troisième  
 circonférence déterminée, de rayon a; et que l'on a cette re-lation rt.5t-  
 1-./i.p-f-c.7= 2S, • ' S désignant la surface du triangle mobile. (Nouvelles  
 Annales de Mathéinatiijjies, 1 853, page 08.) g IV. — DÉFIMTtOX UF. I.,\  
 TA.XGEXTE d'aPRÈS J.ES GÉOMÈTRES MODER.NKS. — \* • ^  
 ApI'LICAÑIOXS. '■ , ' 36. Solutions du problème des tangentes iCnprès  
 Descartes , Fermât et ' ■ liarrtuv. — Dernière définition dé la tangente. ' ' 1.  
 Dans sa seconde solution du [irnhlème des tangentes, Descartes ima- • gimi  
 qir'une sécante tourne autour d'un point fixe pris sur le plan do la courbe,  
 ffe manière (pie les deux extrémités de l'une des coixles qu'elle détermine  
 dans la courbe se rapprochant <lo plus en plus l'une de l'autre. Viennent  
 enfin se confondre ; à cet instant, la droite mobile est tangente • ■ .à la  
 courbe, et De.scarles détermine son équation d'après cette condition ■ ■  
 que l'é((ualion \* • , f(e,ax + b) — o, ■ • dont les racines représentent les  
 absci.sses des fioinis communs à la couriie . '

bile, ainsi que les points où les différentes droites de cette figure touchent leurs enveloppes respectives.

APPLICATIONS.

1°. Considérons, en premier lieu, le mouvement d'une droite AB, de



longueur constante, dont les extrémités A et B glissent sur deux axes rectangulaires Cx, Cy; on voit, soit d'après la théorie précédente, soit par des considérations géométriques directes : 1° que l'ellipse amb, décrite par un point quelconque m de la droite AB, n'est autre chose qu'une épicycloïde raccourcie (ou allongée), engendrée par un point m invariablement lié à la circonférence oACB qui roule intérieure-

ment sur la circonférence xoy de rayon double; et ce résultat nous sera utile dans la suite; 2° que la ligne enveloppe de la droite mobile AB est une épicycloïde engendrée par le point t de la circonférence otc roulant intérieurement sur la circonférence xoy de rayon quadruple.

2°. Si l'on considère, en second lieu, la courbe décrite par l'extrémité B d'une droite AB, de longueur constante, qui tourne autour d'un point fixe ou qui demeure tangente à une courbe donnée, et dont la seconde extrémité décrit une ligne directrice donnée, on rentrera dans le second des cas énumérés plus haut; et l'on parviendra facilement à la construction connue de la tangente à la conchoïde décrite par le point B.

3°. Si l'on considère enfin le mouvement d'un triangle donné ABC, dont deux côtés b et c demeurent tangents à deux circonférences fixes de rayon  $\beta$  et  $\gamma$ , on établit facilement que le troisième côté a demeure tangent à une troisième circonférence déterminée, de rayon z; et que l'on a cette relation

$$a.z + b.\beta + c.\gamma = 2S,$$

S désignant la surface du triangle mobile. (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1853, page 68.)

§ IV. — DÉFINITION DE LA TANGENTE D'APRÈS LES GÉOMÈTRES MODERNES. — APPLICATIONS.

36. *Solutions du problème des tangentes d'après Descartes, Fermat et Barrow. — Dernière définition de la tangente.*

1. Dans sa seconde solution du problème des tangentes, Descartes imagine qu'une sécante tourne autour d'un point fixe pris sur le plan de la courbe, de manière que les deux extrémités de l'une des cordes qu'elle détermine dans la courbe se rapprochant de plus en plus l'une de l'autre, viennent enfin se confondre : à cet instant, la droite mobile est tangente à la courbe, et Descartes détermine son équation d'après cette condition que l'équation

$$f(x, ax + b) = 0,$$

dont les racines représentent les abscisses des points communs à la courbe

C)  $i \bullet$  «ES «ÉliiOUiS I \ <iÊ«METRIE. . . y ( .<•, O , et  $ii^{\wedge}ii$  laij;  
 ('iitt! iliwlii<sup>^</sup> K rr «.\*■ + A, ait deux racines égales. Celle éomlitiun  
 s'c'xprhne par une rulaliim entre « et h, et cette relation, jointe A telle  
 condition de discription (|u'on voudra imposer à la tangente cherchée,  
 permet de la délerininer c(Hn|>léU'menl. . . • Il résulte immédiatement do  
 cette règle analytique que la solution de Descartes n'est actuellement  
 "!(q)piicable qu'aux courbes algébriques. Elle exige en cfTet ipie l'on puisse  
 exprimer l'égalité de dmix des racines de l'csiuation /(r, «,r -1- //) = O, . • ve  
 qu'on ne sait faire encore que dans le cas où cotte é(|nation, et i>ar suite •  
 l'éipialion do la coiirbe/(r, i-) =- o, est algébrique. j.a solution de Doscartes,  
 ciinqiaréeà la solution actuelle par l'emploi des dérivées, présenté ■ donc  
 une infériorité notable. Elle a toutefois ses ac atdages jji-opres dérivant du  
 principe analyliipie (pii lui sert de base; ils n'ont pas été signalés, (pie je  
 sache , et consistent en ce que la tiéti rmination de tu tangente à ' line  
 première cmirbe jnnit eomliiire a la constriirtmn des tangentes de . plusieurs  
 autres courbes. Pour citer un exemple à l'a[])pii de cette asser-. tion,  
 considérons les deux équations ( I ) m.r -( m - p. ' ' (a) , «' -+- (// — tè iiè]x<sup>^</sup>  
 — lè [p<sup>^</sup> — te ne). On sait, par la résolution préalable du problème des  
 tangentes pour l'ollipse, (pie si x,r n'prés('ntent des coordonnées rectilignes  
 ,da droite représentée pat- la première équation est tangente à l'ollipSo ipye  
 représente la seconde; car l'équation ipii résulte de réliminalion doj.i'itire  
 les deux proposées, iKlmetdoux racines égales. Or, c(' fait nnalylkiiie étant  
 indépendant do la signiruMlion géoniétriquie altribuéi' aux variables .r et v,  
 subsis'tora encore sien les regarde, par exemplê, comme représentant des  
 coor■'données bipolaires. Dès lors, les nomt'lles courbes représtuitées dans  
 lonouV(''au système par les mêmes étpialions ( i ) et (•>.), auront encore  
 deux . points comniuns réunis en -un seul, et auront par suite même  
 tangente . en ce point. Par suite, si l'on sait construire la tangente de l'une  
 do ces ' courbes, on saura par cela mémo construire la tangente do l'autre.  
 Or, dans le système actuel, l'équation (js) roprésente un cercle. On saura •  
 donc construire la tafigente de la courbe à dètix foyers que représente  
 l'équation ( i ). On parvient en effet, en suivant cette voie, et par un , calcul  
 assez simple, à la construction déjà donnée i'r'layoge 5i. a. Fermât et  
 Barrow employèrent, pour résoudre le problème des tangentes, un même  
 princi|ve et des procédés analytiques à jieu près klentir(pios. Ainsi, Fermât  
 prend sur la tangente un point 'inlinimenl voisin du point de contact, et lo

regarde comme appartenant à la courbe. Cette supposition, qui détermine géométriquement la tangente, en assignant un second point par lequel elle doit passer, lui permet d'arriver à l'expression de la sous-tangente par des procédés analytiques qui sont précisément ceux du calcul différentiel. - ■

Digitized by Google

' ♦ SECOX0E PARTIE. ' . G3 ' niimitTC de D;l<sup>^</sup>o<sup>^</sup> , quoi(iue  
 rcvonnant |ionr le fmid à celle de Feihial , iMiraît plus lumineuse : il  
 considère le (rian} , 'le formé par une corde infiniment petite et par les  
 parallèles au. \ axes des .riît -dès, r menés ]iar • .les extiTinités de cette  
 corde; et il rejjarde ee Irianijle comme semblable à ri-bii (pie la tangente et  
 .l'ordonnée déterminent sur l'axe des r. Cette similitude lui fournit, pour le  
 rapport de la sous-tangente à rordonnée, une expression dont il calcule la -  
 valeur par des procédés analogues à ceux de Fermât. ' , . , On volt que, pour  
 ces deux géomètres, la tangente a deux points conw muns avec la courbe ^  
 ces points sont infiniment voisins l'un de l'autre, . mais ils ne sont pas  
 actuellement confondus en un seul , comme ils l'étaient , dans la solution do  
 Desrartes. 3. Ces modifie ations success'ives de la définition de la tangimle  
 ont enfin • conduità la définition actuelle d'après laquelle A/ en nu jxtitii  
 d'une eimrlip est lu limite vers laquelle tend la directinn d'une .iéennie que  
 l'on fuit tourner autour de ee point, de manière qu'un second point  
 d'inttYsection de la.sérunte avec larourbe se ruppro<he indéfiniment du  
 premier. ' Combinée avec, les princi]les du calcul dilTérènniel , elle conduit  
 immédiatement aux formules suivantes, les plus usitées : flv tanga = - =r '  
 d.r sm t sin i' ri r.) tang U. = r — , tir - 'Il ~ tir' l.a dernière suppose la  
 courbe rajiportée à un système do coordonnées bi|iolaii;es r et r', et donne la  
 relation qui existe entro les angles i et /' nue la normale fait avec les rayons  
 vecteurs r et /'• . Seolie. — La définition de la courbe fournit queUpiefois ,  
 pour une sé- • cante quelconque, une propriété géométrique simple (pti  
 conduit facile' ' iiuMit alors à la prop'riété caractéristique do la tangente. . .  
 Prenons iK)ur exem|le l'ellipse do Cassini; soient'-/,/' si's deux foyers et ma  
 une Sécante (pielconipte : joignons//w,/V«; /(,/'«. On a, d'après la  
 défiiùt'mn'de la courbe, f fl . ■ . y. . f fm.f'mè=fn.fn fin ou -.7.- =; >- lu f m  
 Si donc on construit, les bissectrices des angles intérieur et extérieur en / et  
 en /'-, à savoir. et fe , /' b' et/'.c', on aura cm <71 C 71 r' fil ' d OÙ (')■ Or  
 cette propriété d'une sécante ((uelconque conduit Irès-simplement ji •  
 bigitized by Google

La manière de Barrow, quoique revenant pour le fond à celle de Fermat, paraît plus lumineuse : il considère le triangle formé par une corde infiniment petite et par les parallèles aux axes des  $x$  et des  $y$  menés par les extrémités de cette corde ; et il regarde ce triangle comme semblable à celui que la tangente et l'ordonnée déterminent sur l'axe des  $x$ . Cette similitude lui fournit, pour le rapport de la sous-tangente à l'ordonnée, une expression dont il calcule la valeur par des procédés analogues à ceux de Fermat.

On voit que, pour ces deux géomètres, la tangente a deux points communs avec la courbe ; ces points sont infiniment voisins l'un de l'autre, mais ils ne sont pas actuellement confondus en un seul, comme ils l'étaient dans la solution de Descartes.

3. Ces modifications successives de la définition de la tangente ont enfin conduit à la définition actuelle d'après laquelle la tangente en un point d'une courbe est la limite vers laquelle tend la direction d'une sécante que l'on fait tourner autour de ce point, de manière qu'un second point d'intersection de la sécante avec la courbe se rapproche indéfiniment du premier.

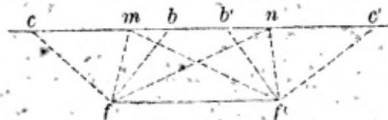
Combinée avec les principes du calcul différentiel, elle conduit immédiatement aux formules suivantes, les plus usitées :

$$\text{tang } \alpha = \frac{dy}{dx}, \quad \text{tang } \omega = r \frac{d\omega}{dr},$$

$$\frac{\sin i}{\sin i'} = \frac{dr}{dr'}.$$

La dernière suppose la courbe rapportée à un système de coordonnées bipolaires  $r$  et  $r'$ , et donne la relation qui existe entre les angles  $i$  et  $i'$  que la normale fait avec les rayons vecteurs  $r$  et  $r'$ .

*Scolie.* — La définition de la courbe fournit quelquefois, pour une sécante quelconque, une propriété géométrique simple qui conduit facilement alors à la propriété caractéristique de la tangente.



Prenons pour exemple l'ellipse de Cassini ; soient  $f, f'$  ses deux foyers et  $mn$  une sécante quelconque : joignons  $fm, f'm ; fn, f'n$ . On a, d'après la définition de la courbe,

$$fm \cdot f'm = fn \cdot f'n, \quad \text{ou} \quad \frac{fm}{fn} = \frac{f'n}{f'm}.$$

Si donc on construit les bissectrices des angles intérieur et extérieur en  $f$  et en  $f'$ , à savoir  $fb$  et  $fc, f'b'$  et  $f'c'$ , on aura

$$\frac{cm}{cn} = \frac{c'n}{c'm},$$

d'où

$$(1) \quad cm = c'n.$$

Or cette propriété d'une sécante quelconque conduit très-simplement à



Ü4 . nE-\*» METHODES EX GÉOMÉTRIE. . . . , la construction de la tanj'enle. Oir si l'on suppose ipie le point « sé rapproche indéliniment du point /», les hissectriiTS intMeurcs //<sup>^</sup>, /'À\*. Icndrontà se confondre respectivement avec les rayons vecteurs lesbissectricasextdrieiirs, qui sont jierjiendiculaires aux premières, tendront à cfl'i'ncider avec les droites //<sup>•</sup>, /'c' perpendiculaires aux rayons et, par suite, régalité(i) prise à la limite exprime que la portion (le la tanj'ente en w, comprise entre les droil('s/r ,y<- ' , est divis('e |wr le point de conlact en deux parties èjmles. (SrElNEn, Jnurmü <k Cretk.) , APPLICATIONS. § • • 37. Co/istmirr la tangente n la roiabe iléerite jmr an point dont on connaît la loi des distanees à plnsienrs foyers. Soient ■ ' • 1 (i) \_ = O. ' , ' et . ■ ■ ■ \* (st) fl, (//<sup>•</sup>, . . . = O, la relation donneie entre les distances du [atint mobile ni à des points fixes ou foyers situés dans le plan où il se déplace, et la ndation <|ui en résulte entre lesdiltférent'mllesdes coordonmVs focales du point /«. Soient nit et nin la lanpente et la normale chercbé(t ; nim" — - la corde qui joint le point •/« à un [wint voisin pris c - sur la courbe ; /«N la perptmdiculaire à cette corde. \ j ' Si l'on dàsigne (>n général par s' un infiniment petit \ / - du second ordre, et par A r , , A , les accroisse- t: ments (positifs où négatifs) des coordonnées foc'ales dans le passage du jjoint ni au point voisin //( ' de la courbe, on sait qu'il existe entre ces accroissements la relation (3) fl, A;- , -h fl, Ar, + . . . -I-s' = o. On trouve facilement d'ailleurs les expressions" . \_ df A r, = /«««/' . sin N /««./j.-l- , A i j = mm', sin N mj\ -(- ! j , •rpii fournissent, en grandeur et en signe, les valeurs de Ae^ , Ar, , [lourvu (pie l'on regarde les sinus qui entrent dans ees expressions enmine. positifs ou négatifs, suivant que lef angles corn:spondants tombent à gntiehe ou h droite de la perpendiculaire »/N. Substituant ces \aleurs dans la relation (3) et divisant tous les termes par mm', il vient . ( 4 ) . «, sin N ////, 4-, «,. sin N mf, + . . . • -t- ! ^ o". Or si l'on suppose maintenant ([ue le point m' se rapiiroche indéfiniment du [Kiint /«, la perpendiculaire »iN à la corde mm' se rapprochera indéfiniment de la normale cherchée /«//,- et -en même temps : tendra >

la construction de la tangente. Car si l'on suppose que le point  $n$  se rapproche indéfiniment du point  $m$ , les bissectrices intérieures  $fb$ ,  $f'b'$ , tendront à se confondre respectivement avec les rayons vecteurs  $fm$ ,  $f'm$ ; les bissectrices extérieures, qui sont perpendiculaires aux premières, tendront à coïncider avec les droites  $fc$ ,  $f'c'$  perpendiculaires aux rayons  $fm$ ,  $f'm$ ; et, par suite, l'égalité (1) prise à la limite exprime que la portion de la tangente en  $m$ , comprise entre les droites  $fc$ ,  $f'c'$ , est divisée par le point de contact en deux parties égales. (STEINER, *Journal de Crelle*.)

## APPLICATIONS.

37. Construire la tangente à la courbe décrite par un point dont on connaît la loi des distances à plusieurs foyers.

Soient

$$(1) \quad F(r_1, r_2, \dots) = 0,$$

et

$$(2) \quad a_1 dr_1 + a_2 dr_2 + \dots = 0,$$

la relation donnée entre les distances du point mobile  $m$  à des points fixes ou foyers  $f_1, f_2, \dots$  situés dans le plan où il se déplace, et la relation qui en résulte entre les différentielles des coordonnées focales du point  $m$ . Soient

$mt$  et  $mn$  la tangente et la normale cherchée;  $mm'$  la corde qui joint le point  $m$  à un point voisin pris sur la courbe;  $mN$  la perpendiculaire à cette corde. Si l'on désigne en général par  $\varepsilon^2$  un infiniment petit du second ordre, et par  $\Delta r_1, \Delta r_2, \dots$ , les accroissements (positifs ou négatifs) des coordonnées focales  $r_1, r_2, \dots$ , dans le passage du point  $m$  au point voisin  $m'$  de la courbe, on sait qu'il existe entre ces accroissements la relation

$$(3) \quad a_1 \Delta r_1 + a_2 \Delta r_2 + \dots + \varepsilon^2 = 0.$$

On trouve facilement d'ailleurs les expressions

$$\Delta r_1 = \overline{mm'} \cdot \sin Nmf_1 + \varepsilon_1^2,$$

$$\Delta r_2 = \overline{mm'} \cdot \sin Nmf_2 + \varepsilon_2^2,$$

$$\dots \dots \dots$$

qui fournissent, en grandeur et en signe, les valeurs de  $\Delta r_1, \Delta r_2, \dots$ , pourvu que l'on regarde les sinus qui entrent dans ces expressions comme positifs ou négatifs, suivant que les angles correspondants tombent à gauche ou à droite de la perpendiculaire  $mN$ . Substituant ces valeurs dans la relation (3) et divisant tous les termes par  $\overline{mm'}$ , il vient

$$(4) \quad a_1 \sin Nmf_1 + a_2 \sin Nmf_2 + \dots + \varepsilon = 0.$$

Or si l'on suppose maintenant que le point  $m'$  se rapproche indéfiniment du point  $m$ , la perpendiculaire  $mN$  à la corde  $mm'$  se rapprochera indéfiniment de la normale cherchée  $mn$ , et en même temps  $\varepsilon$  tendra

« SF.COXDE PARTIE. - . 65 vers zéro , on aura donc , en passant à la limite, ( 5) «,  $\sin \frac{m}{r}$ ,  $4- \sin \frac{z}{w}$ ,  $+ \dots = 0$ . Cette relation , dans laquelle sont des nombres connus, pouvant être {Positifs ou négatifs, conduit facilement à la construction de la normale, Car un terme quelconque du premier membre,  $\frac{m}{r}$ ,  $\sin \frac{z}{w}$ , , par exemple, représente, en grandeur et en signe, le moment par rapport à la normale  $mn$  d'un point  $i$  égal à la valeur absolue de  $m$ , situé à une distance égale à l'unité du point  $m$ , sur le rayon  $w$ , si  $m$  est positif, ou sur son prolongement, si  $m$  est négatif. La relation (5) exprime donc que la somme algébrique des moments, par rapport à la normale  $mn$ , de tous les poids situés comme nous venons de le dire, est égale à zéro; et par suite, que la normale  $mn$  passe par le centre de gravité de ces poids. On a donc cette construction : ' Joindre le point décrivant à chaque force tel que  $f$ , sur la droite résultante , si le nombre est positif, ou sur son prolongement s'il est négatif et à la même distance du point  $m$ , placer un poids égal à la valeur numérique de  $a$ ; chercher enfin le centre de gravité de ces poids et le joindre au point  $m$  par une droite qui est la normale cherchée'. (Analyse des infiniment petits du marquis de l'Hôpital, prop. 10.) Observation. — Il est facile de voir que , dans la construction précédente, les signes des différents termes de la relation (b) sont reproduits avec fidélité par les signes des moments, par rapport à la normale, des poids correspondants. Considérons , en effet , les termes  $o$ ,  $\sin \frac{mf}{r}$  et  $n$ ,  $\sin \frac{nf}{r}$ . Si les sinus sont de même signe, ainsi que les nombres  $a$  et  $b$ , les termes considérés auront le même signe dans la relation (5). Or les sinus ayant le même signe, les rayons  $mf$ ,  $nf$  sont , d'après une observation faite plus haut , situés du même côté de la normale  $mn$  et, les nombres  $a$ ,  $b$ , ayant le même signe, les poids  $a$ ,  $b$ , sont, d'après la construction, situés tous deux sur les rayons  $mf$ ,  $nf$  eux-mêmes • (si  $a$ , et  $b$  sont positifs), ou tous deux sur leurs • prolongements, /, »! , /, »! (si  $a$ , et  $b$  sont négatifs). Les poids  $a$ ,  $b$ , sont donc, dans tous les cas, situés du même côté de la normale  $mn$ , et leurs ' moments sont de même signe, ainsi que les termes correspondants de la relation (5). •  $a$ . De même , si les sinus sont de signes contraires et les nombres  $a$ ,  $b$ , de même signe , les termes considérés seront de signes , . contraires dans la relation (5). Or, les sinus étant de signes contraires, les rayons  $mf$ ,  $nf$  sont situés de part et d'autre de la normale  $mn$ , et les nombres  $a$ ,  $b$ , étant de même signe, les poids  $a$ ,  $b$ , sont situés en même temps sur les rayons eux-mêmes, ou sur leurs

prolongements. t>s poids sont donc, dans '5 ■ - ' m .1 iv: ! V. r: V, ■  
Digitized by Google

6H. DES MÉTHODES EX «ÉOMÉTRIE. \* tirtjs li's cas, siliés il( part et iraitre de la nurmule nui, et leurs moments, par rapport à cette droite, sont de signes contraires, ainsi quie. les tennis coiTes|iomlaid de la relation ( 5); etc., etc. ' ', (■.ORO.I.MHE 1. — La consiruction iiréc'tento est encore applicable au cas oit le inoiiviHnent du point décrivant m est défini par la relation qui existe entre les distances de ce point à plusieurs courbes fixes C, , C,..., ces distanci's étant comptées sur les normales à ces courbes menées par le point /». On démontre aisément , en eiret,.que la tangente en ni au lieu considéré est la mémo que la tangente à la courbe auxiliaire que décrirait mi second mobile parlant du point ni et se mouvant d'après celle condition , qu'entré les distances de Ce [Kiinl aux pieds actuels des normales abai.ssées du jMiint ni sur les coui bi's donpéos, consirU-rn.t coninie des points \_fij'< s, il existe une relation identique à la première relation donnée. r.onoi.i.,\iivE II. — La construction de la tangente d'un lieu géométrique déterminé, dont l'espèce est encore inconnue, permet quelquefois de découtrirla nature de ce lieu. Ce résultat l'st d'ailleurs un accident géomé- . tiique heureux, ne se produisant guère ipie dans le ras où la courbe inconnue est une circonférence. Supimsons, ]iar exemple, qu'il s'agisse de constrire In Inngenla à In coiirhc , lien des points ni , tels que In soninie des enriiis des tangentes menées de ehneiin d'eux à n eireonférenei's situées dans le niéiie plan, ait une valeur eonstante. Si l'on désigne par /• , , Cj,... , /■,, les distances de l'un des points du lieu ni, aux cenlr(>s e , , c^ des circonférences données , on aura, entre ces distances et leurs ilitTérentielles, les relations «î 4- c; -t- . . . -P r?, \_ = wonstanto r , . dr, 4 r , . de, + . . . r , . dr, = o. fl < ■ -.V / ■ - , •1 \ y» " t s n y c ( tn <le\ ra donc , pour construire la normale, joindre le jmint ni au centre • de gravité des ]Hiids /■ , , Cj , . appliipiés à 'la même distance du jioint ni sur les droites />c , , . . . , ;hc,. Or, !(■ moment, jHir rapport à une droite quelconque is.sue du -point ni, du poids Cj est égal au moment par rapjiort à la même droite d'un poids auxiliaire égal à runité et qui serait jilacé en c, (on sup|M)se nir, = nir, ■=...= i ). Il en rémlte que le.centre de gravité G des poids r , , /■,, et le centre de gravité des centres c , , r , ,..., c^ ednsiderés comme des points maté; ciels égaux, .sont situés sur une même droite passant par le [loint .«/. Dimc la normale à la courbe décrite par le iwint ni jwsse à chaque instant 'liar le centre des mdyennes distances des points c , , r,... , e', centres des circonférences données, lut courbe déciile iiar le iKiint ni est donc une

circonférence, et le centre de cette circonférence se trouve en même temps déterminé. — Le problème général que nous venons d'écarter est résolu. ■ Digitized by Google

tous les cas, situés de part et d'autre de la normale  $mn$ , et leurs moments, par rapport à cette droite, sont de signes contraires, ainsi que les termes correspondants de la relation (5); etc., etc.

**COROLLAIRE I.** — La construction précédente est encore applicable au cas où le mouvement du point décrivant  $m$  est défini par la relation qui existe entre les distances de ce point à plusieurs courbes fixes  $C_1, C_2, \dots$ , ces distances étant comptées sur les normales à ces courbes menées par le point  $m$ . On démontre aisément, en effet, que la tangente en  $m$  au lieu considéré est la même que la tangente à la courbe auxiliaire que décrirait un second mobile partant du point  $m$  et se mouvant d'après cette condition, qu'entre les distances de ce point aux pieds actuels des normales abaissées du point  $m$  sur les courbes données, considérées comme des points fixes, il existe une relation identique à la première relation donnée.

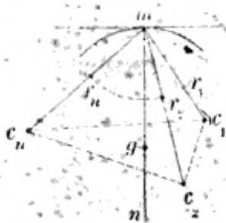
**COROLLAIRE II.** — La construction de la tangente d'un lieu géométrique déterminé, dont l'espèce est encore inconnue, permet quelquefois de découvrir la nature de ce lieu. Ce résultat est d'ailleurs un accident géométrique heureux, ne se produisant guère que dans le cas où la courbe inconnue est une circonférence. Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de construire la tangente à la courbe, lieu des points  $m$ , tels que la somme des carrés des tangentes menées de chacun d'eux à  $n$  circonférences situées dans le même plan, ait une valeur constante. Si l'on désigne par  $r_1, r_2, \dots, r_n$  les distances de l'un des points du lieu  $m$ , aux centres  $c_1, c_2, \dots, c_n$  des circonférences données, on aura, entre ces distances et leurs différentielles, les relations

$$r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_n^2 = \text{constante}$$

et

$$r_1 \cdot dr_1 + r_2 \cdot dr_2 + \dots + r_n \cdot dr_n = 0.$$

On devra donc, pour construire la normale, joindre le point  $m$  au centre



de gravité des poids  $r_1, r_2, \dots, r_n$  appliqués à la même distance du point  $m$  sur les droites  $mc_1, mc_2, \dots, mc_n$ . Or, le moment, par rapport à une droite quelconque issue du point  $m$ , du poids  $r_k$  est égal au moment par rapport à la même droite d'un poids auxiliaire égal à l'unité et qui serait placé en  $c_k$  (on suppose  $\overline{mr_1} = \overline{mr_2} = \dots = 1$ ). Il en résulte que le centre de gravité  $G$  des poids  $r_1, r_2, \dots, r_n$  et le centre de gravité  $g$  des centres  $c_1, c_2, \dots, c_n$  considérés comme des points matériels égaux, sont situés sur une même droite passant par le point  $m$ . Donc la normale à la courbe décrite par le point  $m$  passe à chaque instant par le centre des moyennes distances des points  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , centres des circonférences données. La courbe décrite par le point  $m$  est donc une circonférence, et le centre de cette circonférence se trouve en même temps déterminé.

*Remarque.* — Le problème général que nous venons de résoudre fut

SECONDE PARTIE. (iy , proposé par 'de Tsrliiriihausen  
 {^Medirinæ mentis ptirs secumla, p. 74) et généralisé par Falio de nmillior,  
 cpïi rectifia en mémo temps la solution erronée du premier [Jiihlioth. vniv^  
 et hist, , I. V, ifiS7, p. aS). 2. Soit un polygone funiculaire plan ABCI). . .  
 ndiant des points mntériels de masses respresetees a, b, c, d,..., placés aux  
 sommets successifs du jtolygone. tx: dernier sommet du polygone se meut  
 sous l'influence d'une certaine force et entraîne dans son mouvement le  
 judygone tout entier. Cela posé , on demande, pour chaipie position du  
 /lolygone mobile, les tangentes aux courbes décrites par ses Tlijférents  
 sommets. Stdution. — Soient ABt'I)..., ahed... deux positions infiniment  
 voisines du polygone mobile, et \a,\b. Ce,... l(>s eliemins élémentaires  
 décrits par ses dilférents sommets dans le passrtge de la première à la  
 deuxième position; le rhemin A« en particulier étant évidemment dirigé  
 suivant AB. Par chacun des sommets a, b,c, . . . , menons les droites «^, b~y  
 eS, . . . , égales et parallèles à AB, BT., CI), . . . , et égales par suite, à ah, bc,  
 t'd\_,...; et joignons bp, c-/ , d9,..., qui iront rencontrer, sous des an\ / gles  
 infiniment )eu diflérents d'un angle droit) les prolongi'ments des côtés AB,  
 BC, CD,... Nous désignerons par B, C, D, E,.., les angles du iwlygone  
 ABCDE..-; j»ar d, d' les angles aigus (lue forme le chemin élémentaire Dr/,  
 avec les côtés adjacents DC (i>our d) et DE (pour d^), et de même en  
 chacun des autres sommets. ■ ' Tout cela posé, si nous désignons d'abord  
 par/(n), f{h),f{c), .>. . les forces (provenant, par l'intermédiaire des côtés du  
 polygone, de la force qui sollicite le dernier sommet) qui font décrire aux  
 masses/?, b, e^ d,... les chemins élémentaiix"s .Ka, Kb, Ce,... dans le même  
 tempsO, nous aurons \_ cette première série d'égalités (■) , a,\a .fU>j h.üb  
 /Ici . \_ffl) c.Cc d.Dd ! (Car si l'on désignait parg'(. ,j,g^(4), . . . , l(>a  
 accélérations dues^au.x forces/(n), /( 61), ..., on aurait d'aboi'd d'où l'on  
 déduirait .AT/) a.ka 0' = etc.) Désignons en second lieu par F (.A), F(B),  
 F(C), F(D),... les forces agissant suivant AB, BC, CD, DE. . . . On voit  
 immédiatement tpie F (.\\)'= ./'(//); ' . ' 5. ' blgtized by Google



68 DES MÉTHODES ES GÉOMÉTRIE. que  $F(B)$  a pour composantes  $F(A)$  et  $f(b)$  que  $F(C)$  a pour composantes  $F(B)$  et  $f(c)$ , et ainsi de suite; on aura donc, en employant la notation indiquée plus haut, les relations suivantes, qui ont lieu en chacun des sommets A, B, C, D, (A)  $F(A) = f(a)$ ;  $f(b) \sin C' \sin B \sin A$ ;  $f(c) \sin B' \sin C \sin A$  (C)  $F(C) = f(c)$ ;  $f(a) \sin B' \sin C' \sin D$  (D)  $F(D) = f(d)$ ;  $f(a) \sin B' \sin C' \sin D$  en troisième Ucu, les triangles infinitésimaux Bip, Cey, D<sup>o</sup>, dans lesquels les côtés  $ip, c, f, \dots$ , font avec les lignes AU, BC, CD,  $\dots$ , des angles infiniment peu différents d'un angle droit, nous fournissent les relations suivantes : 1°. Le triangle Bip ;  $Bp \sin \angle Bip \cos \angle ABi - \cos \angle Bi Bi \sim \sin \angle ipB \sim \sin \angle i' a$ . Le triangle Ce- ;  $Ce \sin \angle Ce \cos \angle BCi - \cos \angle Bi BCi \sim \cos \angle (Bi, BCi) \cos \angle 6 UC$  et ainsi de suite ; et en réunissant toutes ces formules, on a  $\cos i (3) 1 \sin \angle Bi \setminus Bi \sim \cos \angle c' / Ce \cos \angle COB \sin \angle i D$  "cose' cose cosi"  $\cos \angle d \sim \cos \angle cose'$ . Le problème est actuellement résolu , car il ne reste plus qu'à combiner les relations (i), (a) et (3), pour obtenir les directions Bi, Ce, De/, On. trouve ainsi les formules cherchées :  $\sin i' a \dots, 1 \sin \angle - \dots T$  — "  $\sin B j, \cos b h \wedge r \setminus$  (,r) 3.  $\sin \angle cose \sin \angle rf' \cos \angle rf' i \sin \angle \sin C \cos \angle hosi' \llcorner in B' e \sin \angle \sin D' \cdot rf$  cose'  $\sin C \sin \angle \cdot$  bigitized by Gpogli

SECONDE PARTIE. 09 Remarque. — On trouve dans V  
 Analyse des infiniiml-imtits du marquis de l'idpital (section 2, prop. 16),  
 une solution de ce problème, moins générale que la précédente. CHAPITRE  
 II. \ , • !>«• oourbei enTeloppe\*. § I. — S9LUTION DU PROBLB.«E  
 GÉNÉRAL. . ■ ' . 38. Enoncé du prohlènie général. — Application de la  
 méthode par les .solides auxiliaire^ , à la rcchervhc de l'équation de la  
 courbe enveloppe. Problème général. — Soit donnée une famille de  
 courbes, renfermant une infinité de lignes qui se succèdent d'une manière  
 continue dans le même plan. Regardant l'une de ces lignes L comme fixe,  
 considérons une ligne L' très-voisine de Ja première; elle coupera on  
 général celle-ci en des points qui tendront vers certains points-limites  
 déterminés, à mesure que la ligne L' se rapprochera de plus en plus de la  
 ligne fixe L, en coïncidant successivement avec chacune des lignes  
 intermédiaires. Cela posé, on propose : 1° de ttouver les points-limites dont  
 il s'agit , pour l'une tjuelconque des courbes considérées ; 2° de trouver le  
 lieu g^métriquo formé par les points-limites de toutes ces courbes , ou \  
 enveloppe de ceS courbes. < , Solution. — Soit l'équation ' ' . (i) ' f{x,x,c) =  
 o, dans laquelle c représente ün paramètre arbitraire qüi , en variant d'une  
 manière continue dans l'équation (i), donne naissance à une série do  
 courbes se succédant d'une manière continue. Attribuons au paramètre c  
 une signification géométrkiue ; regardons-)e comme exprimant la troisième  
 coordonnée z , d'un point do la surface représentée [)ar l'équation \*(2) ' "  
 V- ■ Les courbes considérées (i) seront alors Jes projections, sur le plan ■  
 \*des XY, des diverses sections do la surface (2), parallèles à ce plan. Dès  
 lors , si deux do ces courbes , correspondant aux valeurs c et C A c du  
 paramètre , se coupent en un point /« , la parallèle à l'axe dos a menée par  
 CÆ point coupera la surface on deux points M, et M', situés dans les plans z  
 = cetz = c-(-Ac; la distance de ces, points étant très-petite , si Ac est lui-  
 même très-petit. Si donc oir\* suppose q'ie Ac tende vers zéro , le point m,  
 se rapi>ro-^ chera de plus en plus do l'un des points m de la courbe  
 enveloppe, et la \* parallèle à l'axe dis z, menée par le point variable m,,  
 tendra de plus en ' ' plus à devenir tangente à la surface {2 ). ' , Il en résulte  
 immédiatement que l'envelopiie cherchée n'est autre chose que la trace, sur  
 le (dan des a;»', du cylindre circonscrit à la surfav

*Remarque.* — On trouve dans l'*Analyse des infiniment petits* du marquis de l'Hôpital (section 2, prop. 16), une solution de ce problème, moins générale que la précédente.

## CHAPITRE II.

### Des courbes enveloppes.

#### § I. — SOLUTION DU PROBLÈME GÉNÉRAL.

38. *Énoncé du problème général.* — Application de la méthode par les solides auxiliaires, à la recherche de l'équation de la courbe enveloppe.

PROBLÈME GÉNÉRAL. — Soit donnée une famille de courbes, renfermant une infinité de lignes qui se succèdent d'une manière continue dans le même plan. Regardant l'une de ces lignes  $L$  comme fixe, considérons une ligne  $L'$  très-voisine de la première; elle coupera en général celle-ci en des points qui tendront vers certains points-limites déterminés, à mesure que la ligne  $L'$  se rapprochera de plus en plus de la ligne fixe  $L$ , en coïncidant successivement avec chacune des lignes intermédiaires. Cela posé, on propose : 1° de trouver les points-limites dont il s'agit, pour l'une quelconque des courbes considérées; 2° de trouver le lieu géométrique formé par les points-limites de toutes ces courbes, ou l'*enveloppe* de ces courbes.

*Solution.* — Soit l'équation

$$(1) \quad f(x, y, c) = 0,$$

dans laquelle  $c$  représente un paramètre arbitraire qui, en variant d'une manière continue dans l'équation (1), donne naissance à une série de courbes se succédant d'une manière continue. Attribuons au paramètre  $c$  une signification géométrique; regardons-le comme exprimant la troisième coordonnée  $z$ , d'un point de la surface représentée par l'équation

$$(2) \quad f(x, y, z) = 0.$$

Les courbes considérées (1) seront alors les projections, sur le plan des  $xy$ , des diverses sections de la surface (2), parallèles à ce plan.

Dès lors, si deux de ces courbes, correspondant aux valeurs  $c$  et  $c + \Delta c$  du paramètre, se coupent en un point  $m_0$ , la parallèle à l'axe des  $z$  menée par ce point coupera la surface en deux points  $M_0$  et  $M'_0$  situés dans les plans  $z = c$  et  $z = c + \Delta c$ ; la distance de ces points étant très-petite, si  $\Delta c$  est lui-même très-petit.

Si donc on suppose que  $\Delta c$  tende vers zéro, le point  $m_0$  se rapprochera de plus en plus de l'un des points  $m$  de la courbe enveloppe, et la parallèle à l'axe des  $z$ , menée par le point variable  $m_0$ , tendra de plus en plus à devenir tangente à la surface (2).

Il en résulte immédiatement que l'enveloppe cherchée n'est autre chose que la trace, sur le plan des  $xy$ , du cylindre circonscrit à la surface

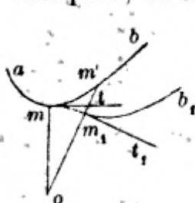
7^ DES MÉTHODES EN GÉOMÉTRIE. parallèlement à l'axe  
 des z. On en conclut, d'après la forme connue de l'équation du plan tangent  
 , que l'équation de la courbe enveloppe sera fournie par l'élimination de :  
 entre les deux équations  $r = 0$ , ou encore par l'élimination de  $r$  entre  
 celles-ci :  $(3) / (u, v, r) = 0, \quad \square = 0$ . //c D'ailleurs, les coordonnées du  
 point de l'enveloppe situé sur l'une des  $\square$  courbes proposées s'obtiendraient  
 en remplaçant dans les équations (3)  $c$  par la valeur particulière qui  
 caractérise cette courbe, et les résolvant par rapport à  $x$  et  $y$ . Remarque I.  
 — solution précédente dépend, comme on le voit, de la méthode par les  
 solides auxiliaires. Elle présente l'avantage de mettre très-simplement en  
 lumière cette importante propriété, d'après laquelle la courbe enveloppée  
 d'une série de lignes est tangente à chacune d'elles. • , • Soit en effet  $m$  un  
 point commun à l'enveloppe et à celle des lignes données,  $amh$ , qui  
 correspond à la valeur  $c$ , du paramètre. Menons par le point  $m$  une parallèle  
 à l'axe des  $z$  qui touche la surface en  $M$ ; par le point  $M$  menons le plan  $z =$   
 $c$ , qui coupe la surface ( $\square$ ) suivant la courbe  $AMhB$  dont la projection sur  
 le plan  $xy$  est la ligne  $amh$ . La tangente en  $M$  à la première ("située dans  
 le plan tangent en  $M$ , lequel est parallèle à l'axe des  $z$ . La projection de  
 cette tangente, c'est-à-dire la tangente en  $m$  à la ligne  $amh$ , sera donc la  
 trace du plan tangent sur le plan  $xy$ , c'est-à-dire la tangente en  $m$  à la  
 courbe enveloppe. Remarque II. — Il faut arriver à l'enveloppe  
 co'incide avec l'une des  $\square$  lignes enveloppées, c'est-à-dire que l'équation de  
 l'enveloppe puisse se déduire de l'équation générale des enveloppées, en  
 attribuant une valeur numérique convenable au paramètre  $c$  (\*). C'est ce qui  
 arrivera toutes les fois que la courbe de contact du cylindre parallèle à  $oz$   
 et circonscrit à  $\square$  la surface ( $\square$ ), sera plane et parallèle à  $xy$ ; et, dans ce  
 cas, la combinaison des deux équations du système (3)' devra conduire à  
 une valeur, numérique de  $c$ , indépendante de  $x$  et de  $y$ . 39. Enveloppe d'une  
 (igné la forme et de grandeur invariables) se meut dans son plan.  
 THÉORÈME. — Le point où une ligne, de forme et de grandeur  
 invariables se meut dans son plan suivant une loi déterminée, touche  
 son enveloppe, est le pied de la normale à cette ligne, menée par le centre  
 instantané de rotation correspondant à la position actuelle de la ligne  
 mobile. • , • (\*) Calcul infinitésimal de M. Courcier, tome I, p. 33u.  
 Digitized by Google

SEcÔjiDE PAKTUÛ. \ Dcmii/iitnitiun, — Observons d'abord  
 <iim> si l'on a deu\ eou>bes iimh, (t'iiih, iiifmiment voisines et se coupant,  
 par suite, sous un angle inrmimont petit en /« , la distance iw' de deux  
 points de ces courbes sera ou finie, ou infiniment petite du premier ordre, si  
 les points a et a' sont situés à des distances finies du point »i; la distance  
 ««'sera, au contraire, un infiniment petit du second ordre, si ces points sont  
 situés à des distances infiniment petites du point «/. C'est ce que montre la  
 considéralipn du triangle rectiligne «/««' : car, dans le premier cas, les côtés  
 /un, a' ni de ce triangle sont finis, et l'angle nnnĩ est fini ou infiniment petit;  
 et, dans le second cas, les côtés /nn, n'in sont infiniment petits, ainsi que  
 Vangic iwta'. / Cela posé, du centre instantané de rotation o, cofrespondant  
 à la posi- tion actuelle nmb de la ligne mobile, menons la nor- . . male ont à  
 cette ligne. Le mouvement élémentaire du la ligne mobile, par lequel elle  
 passe à la position'- - • infiniment voisine ti,in,h, , est un mouvement de  
 rotation autour du point o par le<iu6l le point ni , en particulier, décrit le  
 petit arc /««/, , ayant même tangente nu en tii, que la ligne /intb. Joignons  
 oin, qui , pro- • longée, coupe en t et en ni' la tangente ntt et la courbe nntb.  
 D'après le principe précédent, chacune des distances ntj, tin' est un -  
 infiniment , jÆtit du deuxième ordre, et leur somme, c'est-à-dire la distance  
 ni, ni', est du mémo ordre : les points in,, ni' sont donc, d'après le princi)e .  
 précédent, infiniment voisins du point d'intersection des de'jx lignes, /inib,  
 a, ni, b,. Il en est donc de inéme du point «i; ce qui veut dire que le point ni  
 (>st le point suivant leipiel la ligne mobili- touche son enve- , loppe. Jii-  
 ninr/jue. — Ce tliéorème trouve son application dans la théorie géométrique  
 des engrenages. ' ' , § II. — ÉTCOE nu ênOBI.ÈME DANS LE CAS  
 SPÉCIAL OU LES LIGNES DONT ÿ ON CIIF.HCIIE l'enveloppe SONT  
 DES LIGNES DIIOITES. 40. i). Le problème ayant pour objet dé  
 dcterminor l'enveloppe d'une série de droites se succédant d'une manière  
 continue a été posé et résolu , pour la première fois , par Iluyghens dans son  
 Homlo^iitni nsciU/itnriiini , IKiur le cas le plus imiKTtant où les droites  
 considérées sont les divorsi's normales d'une courbe donnée, l'enveloppé  
 recevant, dans ce cas spécial , le nom de /{(/octnpjiée de la courbe. Dans la  
 troisième partie de cet ouvrage, avant pOir titre Do linonnini ctiri'amm  
 evolntinn et dintensioHe, Iluyghens construit successivement les  
 développées de la cylo'ide , de la parabole et des coniques à centre  
 (propos.itions 5, 8, lo, pages OG, Gq , yq); il établit ce théorème im|K)rtant

que la développée d'une courbe géométrique est rectifiable ( prop. 1<sup>re</sup> , .  
page 8i ) et applique cette théorie naissante à plusieurs problèmes étrangers  
à notre sujet. Digitized by Google

*Démonstration.* — Observons d'abord que si l'on a deux courbes  $amb$ ,  $a'mb$ , infiniment voisines et se coupant, par suite, sous un angle infiniment petit en  $m$ , la distance  $aa'$  de deux points de ces courbes sera ou finie, ou infiniment petite du premier ordre, si les points  $a$  et  $a'$  sont situés à des distances finies du point  $m$ ; la distance  $aa'$  sera, au contraire, un infiniment petit du second ordre, si ces points sont situés à des distances infiniment petites du point  $m$ . C'est ce que montre la considération du triangle rectiligne  $ama'$  : car, dans le premier cas, les côtés  $am$ ,  $a'm$  de ce triangle sont finis, et l'angle  $ama'$  est fini ou infiniment petit; et, dans le second cas, les côtés  $am$ ,  $a'm$  sont infiniment petits, ainsi que l'angle  $ama'$ .

Cela posé, du centre instantané de rotation  $o$ , correspondant à la posi-



tion actuelle  $amb$  de la ligne mobile, menons la normale  $om$  à cette ligne. Le mouvement élémentaire de la ligne mobile, par lequel elle passe à la position infiniment voisine  $a_1m_1b_1$ , est un mouvement de rotation autour du point  $o$  par lequel le point  $m$ , en particulier, décrit le petit arc  $mm_1$ , ayant même tangente  $mt$  en  $m$ , que la ligne  $amb$ . Joignons  $om_1$  qui, pro-

longée, coupe en  $t$  et en  $m'$  la tangente  $mt$  et la courbe  $amb$ . D'après le principe précédent, chacune des distances  $m_1t$ ,  $tm'$  est un infiniment petit du deuxième ordre, et leur somme, c'est-à-dire la distance  $m_1m'$ , est du même ordre : les points  $m_1$ ,  $m'$  sont donc, d'après le principe précédent, infiniment voisins du point d'intersection des deux lignes,  $amb$ ,  $a_1m_1b_1$ . Il en est donc de même du point  $m$ ; ce qui veut dire que le point  $m$  est le point suivant lequel la ligne mobile touche son enveloppe.

*Remarque.* — Ce théorème trouve son application dans la théorie géométrique des engrenages.

## § II. — ÉTUDE DU PROBLÈME DANS LE CAS SPÉCIAL OU LES LIGNES DONT ON CHERCHE L'ENVELOPPE SONT DES LIGNES DROITES.

40. 1). Le problème ayant pour objet de déterminer l'enveloppe d'une série de droites se succédant d'une manière continue a été posé et résolu, pour la première fois, par Huyghens dans son *Horologium oscillatorium*, pour le cas le plus important où les droites considérées sont les diverses normales d'une courbe donnée, l'enveloppe recevant, dans ce cas spécial, le nom de *développée* de la courbe.

Dans la troisième partie de cet ouvrage, ayant pour titre *De linearum curvarum evolutione et dimensione*, Huyghens construit successivement les développées de la cycloïde, de la parabole et des coniques à centre (propositions 5, 8, 10, pages 66, 69, 79); il établit ce théorème important que la développée d'une courbe géométrique est rectifiable (prop. 11, page 81) et applique cette théorie naissante à plusieurs problèmes étrangers à notre sujet.

72 DES >IÉTHUDES ES (iÉOMETRIE. . ' Dans l'exposition de ces belles découvertes , Huygliens adopte la mar- , che synthétique des anciens : pour la cyclo'ide , par exemple, il démontre que si l'on construit une seconde courbe égale à la première et ayant avec elle cerlaines relations de jiosition, les tangentes de cette seconde cycloïde se trouveront normales à la première , dont elle est , par conséquent, la développiiée. Plus tard, Newton généralisa l'élégant théorème d'Huyghens, en établissant que la développée d'une épicycloïde est une seconde épicycloïde , semblable à la première. [Philosnphiæ naturalis principia..., prop. 5o.) De Tschirnhausen ouvrit ensuite la voie à de nouvelles. S[)éculation!ations géométriques en considérant la coürbe enveloppe, d'une série de rayons lumineux réfléchis par une ligne dirimante, et correspondant à des rayons incidents parallèles [Acta Lipsin-, novemb. i68-2% Ces nouvelles courbes r.pçurent le nom de eaustifjues par réflexion , et furent étudiées par \* ' Deladiire, Leibnitz [Acta L. , janv. 1889), et Jean Bernoulli (janv. 1692). Enfin, Jean Bernoulli, considérant les caustiques par réfraction, donna-ls construction géométrique du point où chaque rayon réfracté touche son enveloppe (juin 1G93), et le marquis de l'Hôpital {Amdr.ie des inf. petits , proposition i , sections 6 et 7 ) substitua à ces constructions deux formules qui ont été reproduites par Petit et ont conservé son nom, {Correspmatance sur PMeole Polytechnique, tome II, p<q;e354.') 2). Revenons au problème proposé. Il suffit évidemment, pour le résoudre , do déterminer le point où .chacune des droites données est rencontrée par la droite infiniment voisine ; car ce point d'intersection étant défini géométriquement , il ne restera plus qu'à trouver le lieu géomé- • trique de tous les points semblables, ce qui sera une pure question de géométrie ou d'analyse ordinaire, plus ou moins facile d'ailleurs. Or on trouve, dans le Traité des Fluxions de Maclaurin, l'indication d'une méthode qui s'adapte parfaitement au problème actuel, et qui présente d'as-sez intimes analogies avec celle de Roberval pour la description des tangentes. On peut lui donner le nom de méthtxle parla comparaison des vitesses angulaires, et elle s'applique avec une égale facilité aux deux . \* cas distincts que peut présenter le problème. • PnEtaïEn cas. — Le mouvement de la droite variable est défini; i" par le mouvement de Fuji de ses fjoins, a-, qui est donné; 2" parle mouvement angulaire correspondant de la droite , ce dernier mouvement étant rapporté à une droite fixe. Solutio/r. — Soient ah, a' b' les doux positions infiniment



voisines de la droite mobile et o leur point d'intersection ; aa' l'élément du chemin parcouru par le point directeur n , et w l'angle infiniment petit dont la direction de la droite a varié , dans le passage de sa première à sa seconde position. Désignons par  $\alpha$  l'angle sous lequel la droite ab coupe la ligne aa' ■ décrite par le point directeur. On connaît par hypothèse la limite du ■ rapport du mouvement angulaire de la droite ab au mouvement linéaire du .

Oigitized by Cooqlc

SECONDE PARTIE. 7<sup>e</sup> (Kiinl a , c'esl-à-dire liin. Or le triangle infiniment petit uua' nous fournit une seconde expression du mt'me rapport, à savoir ;  $\sin w \sin a' \sin n \sin a' = \sin a' \sin n \sin a' \sin n$  en passant à la limite, d'où (1)  $\lim. \sin a' \sin n = \sin a' \sin n$  — ; =  $\sin a' \sin n$  1 on . ^ an un =  $\sin a' \sin n$  lim. — • pn n'aui-a donc , dans chaque cas particulier, qu'à déterminer, d'apri'S . les données de la question, la limite du rapport du mouvement recli- • ligne du point a au mouvement angulaire de la droite «à, pour avoir résolu le problème. Second cas. — Le mouvement de la droite nb est déjînl par les motive- ■ , ments sinMltnnés de deujc de ses jmints a et b. Stdution. — Soient an', bh' les chemins simultanément décrits par lesdeux points directeurs; « etî^ les angles sous lesquels la di'oite ab coupe les lignes «n', bb', et o le point d'intersection des deux droites. Désignons . toujours par ol le mouvement angulaire do la droite, dans le passage do sa première à sa seconde position; appliquant la formule (1) à chacun des triangles oaa', obb', il vient . an oa — sm« lira. — w ob =  $\sin 41 \lim. ^ U$  d'où, en divisant membre à membre, ■ (11) . ^ oa sm<7,. aa smi ■il . Applications de la théorie précédente t I. TiiÉonÈME, — L'enveloppe du rayon du eérole générateur qui aboutit nu point décrivant d'une épicycloïde , est une seconde épicyeloïdc. Démonstration. — Soit o la limite du point d'intersection des deux positions infiniment voisines am et a' m' du rayon qui aboutit au point décrivant du cercle générateur, on aura, d'après la formule (I) du numéro précédent, . ■. , , • c. ., aa' an' (i) on =  $\sin/7 \lim. \cos on/ \lim. *$  D'ailleurs an' et w peuvent s'exprimer l'un et l'autre au moyen do Digilized by Google

DK8 MÉTHODES EK UÉOMÉTKIE. 74 l'angle  $\gamma = \text{tct}$  dont le cercle générateur a tourné autour du point c, en passant de n en a', (iar si r, /-' désignent les rayons du cercle fixe et du cercle mobile, on a d'abord, .

(2)  $W = (r + r') \gamma$ ; et si l'on joint sur le cercle mobile l'arc auxiliaire «'''',  $= n'''$ , que l'on joigne ''', on voit que l'angle  $w - ''''$ , se compose de deux parties; la première est l'angle am,  $n'''$ , = au, a'u' =  $\gamma$ ; La seconde est l'angle  $\angle n'''$ ; et comme l'arc '''' est égal en longueur à l'arc tt', on a  $ui, a'/t' = \gamma$ . On a donc, enfin (3)  $\cos w/r = \cos \gamma/r$ , et en substituant les valeurs (2) et (3) dans (i), il vient  $\cos w/r = \cos \gamma/r$ , ce qui montre que le point o est le pied de la perpendiculaire abaissée, du point t sur le rayon r. Cela posé, sur at, comme diamètre, décrivons une circonférence qui passe par o; et soit M le point du cercle générateur primitif, diamétralement opposé au point décrivant /. On aperçoit facilement que l'arc to, de la circonférence not, est de même longueur que l'arc /M de la circonférence U M /. Or, le point / décrivant une épicycloïde, le point M, qui lui est diamétralement opposé, décrit une seconde épicycloïde égale à la première, et ayant son origine quelconque part en A sur la circonférence fixe, de sorte que l'arc fM est équivalent à l'arc tX; par suite, l'arc to est équivalent à l'arc tX, et le point o décrit une épicycloïde ayant pour origine le point A. c. o - v - n. Remarque — Si nous n'avions voulu appliquer les méthodes du numéro précédent, nous aurions pu parvenir immédiatement à la connaissance du point o où chaque rayon am touche son enveloppe. Il suffirait en effet de remarquer que le point t est le centre instantané de rotation autour duquel s'effectue le mouvement élémentaire du cercle mobile umt, dans son passage à la position infiniment voisine u'm't'; et que par suite le point où le rayon am, invariablement lié au cercle mobile, touche son enveloppe, est précisément, d'après le théorème du n° 39, le pied de la perpendiculaire abaissée du point t sur ce rayon. » 2.

PROBLÈME. — Trouver la direction de l'épicycloïde. Solution. -

PREMIÈRE PARTIE — Choisissons d'abord le point où chaque

SECONDE PARTIE. 7\$ normale tm touche son envelop|io; et  
soit, en conservant la même figure et les mêmes notations que  
jtrécéilemment, i le point d'intersection des deux normales infiniment  
voisines mt , m't'. 1^ formule (1) du numéro piwedent nous donnera (■) , .  
II' Il = sin/rr lim. — CherehoiLs les expn'ssions res|H^ctives de tt' et de w  
en fonctions de y = (c< . On a d'abord , ' (a) \_ ■ = • » ■ Quant à M = mt,  
m't', on a, en jirenant toujours l'arc auxiliaire «'«/, == tun^ ■ — , I , I /■ ir'  
+ r U = ml m, t + m,t m = 7 + - /« , « /« = y 4- - y • p = V • — ' Ainsi (.3j y.  
j-i Portant les valeurs (u) et (3) dans la formule (i), il vient .il \_ are' eos/Zt /  
■+ir' Skc.oM)E l'.vnTIE. — Lieu géoniélrit/irc du jmint i, ou dèwloppèi- .  
Menons par le point/, l'e |ierpendieulaire à dm et rencontrant en e io Vayon  
et, on aura • ■il 2/r' /( ' = fos de /'H- 2 /•' Sur la droite tv comme diamètre,  
dérivons une circonférence qui passera par /, et qui sera tangente en e à la  
circonférence décrite du point c comme centre avec ci' pour rayon; le rayon  
ci' de celte dernière circonférenci'o a. |K)ur expri'ssion (\*).\* = . . • , . . \ r4-  
2/-/ / + 2/Des relations (//) et (i) on dwluit et f 2/r' •i\*-' ■ ou (<') Ci\* vt tïl'  
Cette formule montre que le système dos circonférences do rayons ci- et est  
semblable au système dos circonférences domiw's de rayons ;\* et r\  
Bigitized by Google

normale  $tm$  touche son enveloppe; et soit, en conservant la même figure et les mêmes notations que précédemment,  $i$  le point d'intersection des deux normales infiniment voisines  $mt$ ,  $m't'$ .

La formule (I) du numéro précédent nous donnera

$$(1) \quad it = \sin itt' \lim. \frac{tt'}{\omega}.$$

Cherchons les expressions respectives de  $tt'$  et de  $\omega$  en fonctions de

$\gamma = \widehat{tct'}$ . On a d'abord

$$(2) \quad tt' = r \cdot \gamma.$$

Quant à  $\omega = \widehat{mt, m't'}$ , on a, en prenant toujours l'arc auxiliaire  $u'm_1 = um$ ,

$$\omega = \widehat{mt, m't'} + m_1 \widehat{t'm'} = \gamma + \frac{1}{2} m_1 \widehat{am'} = \gamma + \frac{1}{2} \gamma \cdot \frac{r}{r'} = \gamma \cdot \frac{2r' + r}{2r'}.$$

Ainsi

$$(3) \quad \omega = \gamma \cdot \frac{2r' + r}{2r'}.$$

Portant les valeurs (2) et (3) dans la formule (1), il vient

$$\frac{it}{\cos itc} = \frac{2rr'}{r + 2r'}.$$

SECONDE PARTIE. — *Lieu géométrique du point i, ou développée.*

Menons par le point  $i$ ,  $iv$  perpendiculaire à  $itm$  et rencontrant en  $v$  le rayon  $ct$ , on aura

$$(a) \quad iv = \frac{it}{\cos itc} = \frac{2rr'}{r + 2r'}.$$

Sur la droite  $iv$  comme diamètre, décrivons une circonférence qui passera par  $i$ , et qui sera tangente en  $v$  à la circonférence décrite du point  $c$  comme centre avec  $cv$  pour rayon; le rayon  $cv$  de cette dernière circonférence a pour expression

$$(b) \quad cv = r - ct = r \left( 1 - \frac{2r'}{r + 2r'} \right) = \frac{r^2}{r + 2r'}.$$

Des relations (a) et (b) on déduit

$$\frac{cv}{ct} = \frac{r^2}{2rr'} = \frac{r}{2r'},$$

ou

$$(c) \quad \frac{cv}{ct} = \frac{ct}{tu}.$$

Cette formule montre que le système des circonférences de rayons  $cv$  et

$\frac{1}{2}ct$  est semblable au système des circonférences données de rayons  $r$  et  $r'$ .

7 <> > 'IU^S MÉTHODES EN CÉUMÉTHIE. . <t> Si donc nous doricé^hS^Tnée, i>ar le point v, liarallèle à la droite tm et terminée à la çtrcohfiitOdcc «V, le point n décrira une épicycloïde semblable ' à celle qui eéVâ^rile parilé; point m , et semblablement placée. Le point // j&jtoétraléiîiënt opposé au point» sur la même circonférence, décrira donc. 'j>ai¥^|eràent' une épicycloïde semblable à celle décrite par le point m , mais non 'semblablement placée. • , ' c.'o. f. t. /3. Problème des caustiques par réfraction. • Notation. — Soient ah la courbe dirimante qui sépare les deux milieux , 'et/ l'origine des rayons lumineux; fa, fl deux rayons incidents intiniment ■ voisins ic les normales aux points d'incidence», b, se coupant en c; »/', bf les. rayons jéfractés (réefs ou virtuels) se cx)upant on'/. Nous désignerons en outre par i, i-{di les angles aigus d'incidence en «, 'b\ par i', i'-hdi' les angles de réfractions corrosiiondanls et |>ar n l'indu'ede réfraction , de sorte que l'on aura ... • ' sin I = n . sin i', et , iwr suite , • \ • (il . cô8i.c//= ncost'.f/i', ■ ■ ■ - ■ , ' ' ' • ■ • . ' IF • I- . J 1 Nous désignerons ac par p ; af'af' par r, F', et nous replnlerons r, r' comme positifs ou négatifs f suivant ipte les droites^ af, af tomberont dans la concavité ou dans la convexité de la courbe. Enfin , en appelant c, /, /' les angles infiniment petits '«ci, afb, «/i (c'est-à-dire les arcs qui les mesurent dans la circonférence dont , le rayon est l'unité), nous aurons ' r ' ' • ah f , ab . r , . ah C= , f±=± COSI, /=:±— rCOSi;P '■ r . le signe ± ayant pour objet de rendre positifs , dans • tous les cas, les facteurs i et V - ■ Tout cela posé, il s'agit de déterminer le point/' suivant lequel chaque ■ rayon réfracté touche son enveloppe, ou, plus généralement, de trouver la relation qui existe entre p, r, d, i, i' et n-. Premier cas. — Le point / est situé dans la convexité do la courbe. ( Le nombre /• est alors négatif, et l'on doit écrire /= — ^ cos I.) Egalons d'abord à zéro la différence des angles des triangles />»c , /éc , il ■ vient on simplifiant (et supposant, ce qui est permis,, //<. /Zi ), Egalons de jnême à zèl>b,-la différencô désanglSsdes triangles f'ar,fb c ; i". Si le point/' est situé dans la concavité do la courbe comme dans la

Digiüzed by C^ooglq

Si donc nous concevons menée, par le point  $v$ ,  $vn$  parallèle à la droite  $tm$  et terminée à la circonférence  $tiv$ , le point  $n$  décrira une épicycloïde semblable à celle qui est décrite par le point  $m$ , et semblablement placée. Le point  $i$ , diamétralement opposé au point  $n$  sur la même circonférence, décrira donc pareillement une épicycloïde semblable à celle décrite par le point  $m$ , mais non semblablement placée.

C. Q. F. T.

### 3. Problème des caustiques par réfraction.

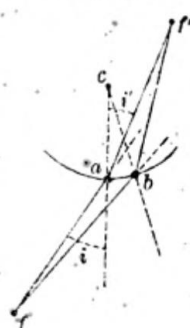
*Notation.* — Soient  $ab$  la courbe dirimante qui sépare les deux milieux, et  $f$  l'origine des rayons lumineux;  $fa, fb$  deux rayons incidents infiniment voisins;  $ac, bc$  les normales aux points d'incidence  $a, b$ , se coupant en  $c$ ;  $af', bf'$  les rayons réfractés (réels ou virtuels) se coupant en  $f'$ . Nous désignerons en outre par  $i, i + di$  les angles aigus d'incidence en  $a, b$ ; par  $i', i' + di'$  les angles de réfractions correspondants et par  $n$  l'indice de réfraction, de sorte que l'on aura

$$\sin i = n \cdot \sin i',$$

et, par suite,

$$(1) \quad \cos i \cdot di = n \cos i' \cdot di'.$$

Nous désignerons  $ac$  par  $\rho$ ;  $af, af'$  par  $r, r'$ , et nous regarderons  $r, r'$  comme positifs ou négatifs, suivant que les droites  $af, af'$  tomberont dans la concavité ou dans la convexité de la courbe. Enfin, en appelant  $c, f, f'$  les angles infiniment petits  $acb, afb, af'b$  (c'est-à-dire les arcs qui les mesurent dans la circonférence dont le rayon est l'unité), nous aurons



$$c = \frac{ab}{\rho}, \quad f = \pm \frac{ab}{r} \cos i, \quad f' = \pm \frac{ab}{r'} \cos i';$$

le signe  $\pm$  ayant pour objet de rendre positifs, dans tous les cas, les facteurs  $\frac{1}{r}$  et  $\frac{1}{r'}$ .

Tout cela posé, il s'agit de déterminer le point  $f'$  suivant lequel chaque rayon réfracté touche son enveloppe, ou, plus généralement, de trouver la relation qui existe entre  $\rho, r, r', i, i'$  et  $n$ .

*Premier cas.* — Le point  $f$  est situé dans la convexité de la courbe. (Le nombre  $r$  est alors négatif, et l'on doit écrire  $f = -\frac{ab}{r} \cos i$ .)

Egalons d'abord à zéro la différence des angles des triangles  $fac, fbc$ , il vient en simplifiant (et supposant, ce qui est permis,  $fa < fb$ ),

$$(2) \quad di = c + f = ab \left( \frac{1}{\rho} - \frac{\cos i}{r} \right).$$

Egalons de même à zéro la différence des angles des triangles  $f'ac, f'bc$ :  
1°. Si le point  $f'$  est situé dans la concavité de la courbe comme dans la

\* • • ' SECONDE PARTIE figure, on trouve facilement ' 77 (3) car, /- étant positif dans le ras actuel, on a  $r' = 4 - \cos^2 j$ . Si le point /' est situé dans la convexité de la courbe, - comme le point /, on a, comme pour ce point. car, r' étant négatif, on a  $r' = -y \cos i$ . L'expression définitive de  $\angle U$  est donc la même dans les deux cas; et si l'on substitue les valeurs de  $\angle \blacksquare$ , données par les formules (2) et (3) dans la relation (i), il vient, en divisant par  $\sin i$ , (I)  $(\cos A / 1 - \cos^2 i) = n \cos J \sin i - \sin \blacksquare \cdot P \sin J \sin P, \sin / \sin r$  et dans le 2<sup>e</sup> cas. — Le point f est situé dans la concavité de la courbe. Le  $\blacksquare$  nombre r est donc positif, et l'on a  $r' = -\cos i$ . On aura d'abord pour le point / ( en supposant toujours  $\angle a < \angle i$  ),  $\blacksquare$ ,  $\sin i = f - c$ , que l'on déduit de la formule (3)  $\sin i = c - f$ , en renversant l'ordre des soustractions (cette inversion étant due à ce que, le point /' auquel se rapportait la formule (3) étant situé dans la concavité comme le point actuel /, on avait pour ce point  $\angle a > \angle i$ , tandis qu'on suppose actuellement  $\angle a < \angle i$ ). On peut l'écrire (»)  $\sin i = -(c - f) = -ab (\sin i - \cos i \sin P \sim y)$  Quant au point /',  $\sin i$ . Si ce point est situé dans la convexité de la courbe, on aura d'abord  $\sin r' = -(c + i)$ , ' que, pour des raisons semblables, on déduit de la relation (2) en y changeant le signe de  $\sin f$ ; et enfin en remarquant que /- est négatif, (3')  $-\sin i : - \cos i > \sin i$  Digüized by Google



figure, on trouve facilement

$$(3) \quad di' = c - f' = ab \left( \frac{1}{\rho} - \frac{\cos i'}{r'} \right),$$

car,  $r'$  étant positif dans le cas actuel, on a

$$f' = + \frac{ab}{r'} \cos i'.$$

2°. Si le point  $f'$  est situé dans la convexité de la courbe, comme le point  $f$ , on a, comme pour ce point,

$$di' = c + f' = ab \left( \frac{1}{\rho} + \frac{\cos i'}{r'} \right),$$

car,  $r'$  étant négatif, on a

$$f' = - \frac{ab}{r'} \cos i'.$$

L'expression définitive de  $di'$  est donc la même dans les deux cas; et si l'on substitue les valeurs de  $di$ ,  $di'$  données par les formules (2) et (3) dans la relation (1), il vient, en divisant par  $ab$ ,

$$(1) \quad \cos i \left( \frac{1}{\rho} - \frac{\cos i}{r} \right) = n \cos i' \left( \frac{1}{\rho} - \frac{\cos i'}{r'} \right).$$

*Second cas.* — Le point  $f$  est situé dans la concavité de la courbe. Le nombre  $r$  est donc positif, et l'on a

$$f = \frac{ab}{r} \cos i.$$

On aura d'abord pour le point  $f$  (en supposant toujours  $fa < fb$ ),

$$di = f - c,$$

que l'on déduit de la formule (3)  $di' = c - f'$ , en renversant l'ordre des soustractions (cette inversion étant due à ce que, le point  $f'$  auquel se rapportait la formule (3) étant situé dans la concavité comme le point actuel  $f$ , on avait pour ce point  $f'a > f'b$ , tandis qu'on suppose actuellement  $fa < fb$ ). On peut l'écrire

$$(2') \quad di = - (c - f) = - ab \left( \frac{1}{\rho} - \frac{\cos i}{r} \right).$$

Quant au point  $f'$ ,

1°. Si ce point est situé dans la convexité de la courbe, on aura d'abord

$$di' = - (c + f'),$$

que, pour des raisons semblables, on déduit de la relation (2) en y changeant le signe de  $di$ ; et enfin en remarquant que  $r'$  est négatif,

$$(3') \quad di' = - (c + f') = - ab \left( \frac{1}{\rho} - \frac{\cos i'}{r'} \right).$$

78 DES MÉTHODES EN GÉOMÉTRIE.\* 2°. Si le point/' est au contraire dans la concavité de la courbe, il sera placé de la même manière que le point / auquel se rapporte la formule (2'); et, on remarquant que /' est devenu positif, on retrouvera encore la formule (3'). \* Enfin, si l'on substitue dans la relation (i) les valeurs de  $c/i$ ,  $i/i$  données par les formules (2'), (3'), on retrouve évidemment la formule (I) (qui s'applique, par conséquent, à tous les cas. Il résulte immédiatement d'ailleurs des conventions déjà faites sur les signes de  $r'$ , que, si la résolution de l'équation (I) fournit pour  $r'$  une valeur positive ou négative, le point cherché /' sera situé sur la portion du rayon réfracté qui tombe dans la concavité de la courbe, ou, au contraire, sur son prolongement. »

COROLLAIRE. — Si l'on remplace dans la formule (I) « par —  $i$ , et  $f$  par /, on obtient la formule analogue [K]ur les caustiques (la relation  $(,,,\bullet - . l = \cos(i + 7!r);$  et l'on pourra, au moyen de cette formule, déterminer  $r'$ , si  $0$  et  $r$  sont connus; ou, suivant une observation de Jean Bernoulli, p lui-même, si  $r, r'$  sont connus, ainsi que cela arrive pour les caustiques de ses foyers. 4. Définition et détermination des caustiques des courbes de M. Quetelet. — Des ovales de Descartes. La détermination de la caustique par réfraction, c'est-à-dire du lieu géométrique des points d'intersection de deux rayons réfractés successifs, qui sont définis isolément par la formule précédente, présente en général de grandes difficultés. Or on évite fréquemment les éviter d'une manière très-heureuse, en substituant à la recherche de la caustique la recherche de l'une de ses développantes, puisqu'il est évident d'ailleurs que la connaissance de celle-ci suffit à la détermination géométrique de la caustique elle-même. L'auteur de cette ingénieuse substitution, M. Quetelet, a donné à la développante de la caustique principale le nom de caustique secondaire, et voici, d'après ce géomètre, la construction générale de cette dernière. 1° Que du point lumineux  $f$  comme centre, on décrive une circonférence de rayon arbitraire, et que de ce point  $a$  de la ligne directrice comme centre on décrive un cercle dont le rayon soit, à la distance de ce point  $f$  à la circonférence  $f$ , dans le rapport constant de  $\lambda$  à  $n$  [ $n$  désignant l'indice de réfraction]; l'enveloppe de tous les cercles ainsi obtenus sera la caustique secondaire. •

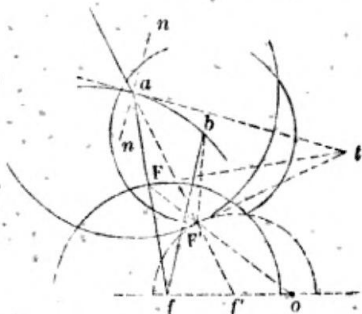
Démonstration. — Il faut, pour établir cette construction, faire voir (que les rayons réfractés sont normaux à l'enveloppe dont il s'agit, ou montrer, inversement, que les normales de l'enveloppe coïncident avec les rayons

réfractés. Donc , si l'on observe qu'en général les normales à l'enveloppe ,  
 les normales aux lignes enveloppées , il suffira d'établir  
 que pour chacun des cercles considérés, a par exemple, le rayon de ce  
 cercle" . Digilized by Google

- SECONUE PARTIE. 79 • lui aboutit au joint où il louclu; son enveloppe  $H$ , est précisément le rayon réfracté correspondant au rayon incident en  $n$ . Soient, à cet effet, « et  $h$  les centres inliniment voisins de deux des cercles considérés,  $F'$  un (le leurs points d'intersection; joignons  $F'r$ ,  $V'h \backslash f(i, fh \backslash$  posons  $\angle = \angle$ ,  $F'a = R$ . et désignons par  $\angle$ ,  $i'$  les angles d'incidence et de réfraction en  $a$ , et par  $I$  la limite de l'angle que  $a F'$  fait avec la normale à la courbe dirimante on  $a$ . Les triangles  $\angle a$ ;  $V nh$  donnent  $c < M$  relations, • . . ■ d'où, ('Il passant à la limite. et, de mi'nie. fit —  $fh = Sr !=: ni) \cos fn \backslash nh$ , ilr ( $/R ds - \sin i$ ; —  $\sin 1$ . De là, en divisant membre à membre, et observant (|u'en vertu de la ('(instruction  $R\_2^{\wedge} dr n$  il vient  $\sin (= a.\sin 1$ , • et par suite  $I = il$ , ce qui sutRl à la démonstration. CoiioujiiKE. — Le théorème précédent conduit très-simplement à l'une d(« définitions géométriques des (iyales do Di'scartes, c'est-à-dire des lignes qui nnl la pnipriélc de réfracter vers un foyer donné  $f$  les rayons lutnineu.r émanant d'un point donné. Car, si la ligne  $ab$  possède cette propriété, la caustique secondaire, (|ui est coupée à angles droits par les rayons réfractés, lesquels vont concourir enfl, ne peut être qu'une circonférence ayant pour centre le point/'. Dès lors, le rayon de chacune des circonférences ayant pour centre, l'un des points  $n$  de la ligne dirimante cherchée, est égal à la distance du joint  $u$  à la circonférence  $'$ . Mais, d'après la construction générale, ce même  $ra^{\wedge}n$  est à la distance du même  $|K)$ int  $a$  à une circonférence ayant pour centre le foyer  $/$  dans le rapport de  $I$  à  $n$ . Donc Tovale cherchée est le lieu géométrique des points dont les distances à deux circonférences ayant pour centres le point lumineux/ et le foyer/', sont dans la raison constante des nombres «et 1. Obsenntion. — Les droites  $\angle$ ,  $'\angle$  coupant eh  $F, F'$  les circonférences $\angle$ ,  $'$ , si l'on mène les droites indéfinies  $FF', ff'$  ((ui se coupent en  $o$ , le théorème de Ptolémée (l'" l\*arlie, page i5), appliqué au triangle  $fa /' * coupé ]iar la transversale  $FF'o$ , montre que le rapport  $^{\wedge}$  est constant, et$

qui aboutit au point où il touche son enveloppe, est précisément le rayon réfracté correspondant au rayon incident en  $a$ .

Soient, à cet effet,  $a$  et  $b$  les centres infiniment voisins de deux des cercles considérés,  $F$  un de leurs points d'intersection; joignons  $F'a$ ,  $F'b$ ;  $fa$ ,  $fb$ ; posons  $fa = r$ ,  $F'a = R$ , et désignons par  $i$ ,  $i'$  les angles d'incidence et de réfraction en  $a$ , et par  $I$  la limite de l'angle que  $\overline{aF'}$  fait avec la normale à la courbe dirimante en  $a$ .



Les triangles  $fab$ ,  $F'ab$  donnent ces relations,

$$fa - fb = \Delta r = \overline{ab} \cos \widehat{fab},$$

d'où, en passant à la limite,

$$\frac{dr}{ds} = \sin i;$$

et, de même,

$$\frac{dR}{ds} = \sin I.$$

De là, en divisant membre à membre, et observant qu'en vertu de la construction

$$\frac{dR}{dr} = \frac{1}{n},$$

il vient

$$\sin i = n \cdot \sin I,$$

et par suite  $I = i'$ , ce qui suffit à la démonstration.

**COROLLAIRE.** — Le théorème précédent conduit très-simplement à l'une des définitions géométriques des ovales de Descartes, c'est-à-dire *des lignes qui ont la propriété de réfracter vers un foyer donné  $f'$  les rayons lumineux émanant d'un point donné*. Car, si la ligne  $ab$  possède cette propriété, la caustique secondaire, qui est coupée à angles droits par les rayons-réfractés, lesquels vont concourir en  $f'$ , ne peut être qu'une circonférence ayant pour centre le point  $f'$ . Dès lors, le rayon de chacune des circonférences ayant pour centre l'un des points  $a$  de la ligne dirimante cherchée, est égal à la distance du point  $a$  à la circonférence  $f'$ . Mais, d'après la construction générale, ce même rayon est à la distance du même point  $a$  à une circonférence ayant pour centre le foyer  $f$  dans le rapport de 1 à  $n$ . Donc l'ovale cherchée est le lieu géométrique des points dont les distances à deux circonférences ayant pour centres le point lumineux  $f$  et le foyer  $f'$ , sont dans la raison constante des nombres  $n$  et 1.

*Observation.* — Les droites  $fa$ ,  $f'a$  coupant en  $F$ ,  $F'$  les circonférences  $f$ ,  $f'$ , si l'on mène les droites indéfinies  $FF'$ ,  $ff'$  qui se coupent en  $o$ , le théorème de Ptolémée (I<sup>re</sup> Partie, page 15), appliqué au triangle  $faf'$  coupé par la transversale  $FF'o$ , montre que le rapport  $\frac{of}{of'}$  est constant, et

80 DES MÉTHODES EN «ÉOMÉTHIE. par suite que o est un point fixe. Cette remarque permet de construire très-simplement la tangente de l'ovale ah. Car si l'on conçoit que les points a, F, F' se déplaçant sur leurs courbes respectives, viennent occuper les positions «, , F, , F, , on verra que les triangles a FF', a, F, F, sont tellement situés, que leurs côtés de mêmes noms concourent en trois points /, /', O situés en ligne droite. Donc , d'après un théorème connu , les droites joignant les sommets de mêmes noms des deux triangles concourent en un ' même point. Il en résulte enfin , en supposant que les points a, , F, F, se rapprochent indéfiniment des points a, F', que les tangentes en a, F, F' à l'ovale et aux deux circonférences, concourent en un même point. (On peut consulter sur ces courbes la Géométrie de Descartes; Paris, 1705, page 86; les Opuscles de Newton, tome II, page 172, et enfin l'^/^rça historique de M. Chasles, note 21 (\*), d'où nous avons extrait la plupart des détails précédents. ) . ■ . • . . b.

E.rpression du rayon de courbure d'une roidette. Considérons la roulette engendrée par le point M , invariablement lié à la ligne A,Aa qui roule sur la ligne fixe A, AA'. Le point de contact actuel des deux lignes éfant A, la droite .4M est normale à la roulette au point M. Dans l'instant suivant , l'arc très-petit A n de la ligne mobile s'enroulera sur l'arc égal .4A' de' la ligne fixe ; le point M, décrivant l'arc MM', viendra en M', et la droite M'A' sera normale à la courbe en M'. Les deux normales infiniment voisines , MA , M' A' se coupant en un point C, la limite du point C, quand la seconde normale se rapproche indéfiniment de la première , coïncide avec le point qu'on appelle le centre de courbure de la roulette au^ point M, et la droite MC est le rayon de courbure ..de la roulette en ce point, dont nous nous proposons de calculer l'expression. Notation. — Nous appellerons H, R' les rayons de courbure en A de la ligne fixe et de la ligne mobile ; «&, du, les différentielles des arcs corros(\*) Au Heu de renvoyer à la note 21, il serait sans doute préférable d'indiquer le numéro de la page correspondante ; malheureusement cela m'est impossible, et eu voici la raison. L'ouvrage dont il s'agit, qui a paru en iSSy, n'a été tiré qii'h un très-petit nombreal'exemplaires. Il est devenu depuis excessivement cher et beaucoup plus rare encore; et l'on peut dire que l'un des plus beaux monuments scientifiques qui aient été élevés à la gloire du passé, sert bien moins aujourd'hui à l'instruction des savants qu'aux spéculations des commissionnaires en librairie. Il résulte de là cette conséquence étrange,

j'allais dire absurde , que celui qui veut lire Y Aperçu historique . ouvrage écrit en français et publié il y a moins de vingt ans , doit préalablement apprendre l'allemand et se procurer ensuite la traduction, en cette langue, de M. le professeur Sohncke (Halle, 1889; librairie de Gebauer)'. C'est ce que j'ai fait personnellement, et cela explique qu'ayant sous les yeux ce dernier ouvrage , j'éprouve cependant quelque difficulté à deviner la pagination du premier. Digitized by Google

SECONDE PARTIE. ' , SECONDE PARTIE. ' ' 81 pondants ( tels que A.\' et .MM') rte lu ligne fixe et rte la roulette; r, la distance MA du point décrivant M au, point de contact actuel rte la ligne mobile sur la ligne fixe, rt mm s rrgnn/rmns r romme r.ixrntif'llcmr/it /yisitif; i, l'angle que fait la direction AM avec la portion rte la normale en A à la ligne fi.xe qui est rtirigéo rtan.s la concavité rte-, celle-ci , rte sorte que cosr '.HTrt positif ou négfUiJ suivant que. le i>oiit drrrivuut M sera, pur rup]X>rt 'h la tangente en A, dis même côté que tu ligne Ji.te , ou du côté opposé. Enfin, nous désignerons par p le rayon de courbure M(1 rte la roulette, et notes regarderons P romme positif ou négatif , suivant que .MC sera dirigée de M vers A , im dans le sens opjxi.sé. - Cela posé, pour déterminer la position du point-linvitc C sur la droite AM, ' conforniéraeiit au second cas de la niétluxe générale indiquée à la |iage 76,, nous regarderons le mouvement de la droite .A.M comme défini fiar les mouN eraents simultanés des [loints A et M ; et les' deux triangles C.K.\ C.MM' nous donneront ' . . . ' d'où T«)  $\sin C - \sin CA'A = \sin C.M'M$ ; I..A, CM • • CM \_ siM; ^ ^ CA ■“  $\sin CA A$  ■ A.V' Si l'on passe à la limite, et si l'on observe qu'à. cet instant les angles CM'M et C.A'A ont pour valeurs i\*' et l'''— que d'ailleurs il viendra (A) ■os/ VR «7 CM cr' Toutefois, comme, d'après les conventions déjà faiti“S, ros/ peut être négatif; qu'il en e.sl de même du facteur ^ ^ dans le cas où la ligne triobile roule sùr la concavité de la ligne fixe , il faudra , dans les appliCOSf rations de la relation (.A), faire précéder du signe — les facteurs et ± quand ils se trouveront négatifs. . ' U'après cela, et en considérant iFabord le ras des roulettes extérieures , • si l'on suppose le jKiint décrivant M situé, par rapi>ort à l'élément de contact A,,A, du côté opposé à la ligne fi.\e, et le. point G situé comme dans la figure précédente, p sera (lositif, CM et GA- auront pour valeurs p et 'p — r, et cos/ étant négatif, on devra écrire ainsi la formule (A) ; . . -. • ^ ^ ' ( ' i ' \ i ■ p-^r. ' ■ ' ~ eosi \K R' 7 ■ 1 . .Oigitized by Google



pondants (tels que  $AA'$  et  $MM'$ ) de la ligne fixe et de la roulette;  $r$ , la distance  $MA$  du point décrivant  $M$  au point de contact actuel de la ligne mobile sur la ligne fixe, et nous regarderons  $r$  comme essentiellement positif;  $i$ , l'angle que fait la direction  $AM$  avec la portion de la normale en  $A$  à la ligne fixe qui est dirigée dans la concavité de celle-ci, de sorte que  $\cos i$  sera positif ou négatif suivant que le point décrivant  $M$  sera, par rapport à la tangente en  $A$ , du même côté que la ligne fixe, ou du côté opposé. Enfin, nous désignerons par  $\rho$  le rayon de courbure  $MC$  de la roulette, et nous regarderons  $\rho$  comme positif ou négatif, suivant que  $MC$  sera dirigée de  $M$  vers  $A$ , ou dans le sens opposé.

Cela posé, pour déterminer la position du point-limite  $C$  sur la droite  $AM$ , conformément au second cas de la méthode générale indiquée à la page 76, nous regarderons le mouvement de la droite  $AM$  comme défini par les mouvements simultanés des points  $A$  et  $M$ ; et les deux triangles  $CAA'$ ,  $CMM'$  nous donneront

$$\sin C = \frac{AA'}{CA} \sin CA'A = \frac{MM'}{CM} \sin CM'M;$$

d'où

$$(a) \quad \frac{CM}{CA} = \frac{\sin CM'M}{\sin CA'A} \cdot \frac{MM'}{AA'}.$$

Si l'on passe à la limite, et si l'on observe qu'à cet instant les angles  $CM'M$  et  $CA'A$  ont pour valeurs  $i^{dr}$  et  $i^{dr} - i$ ; que d'ailleurs

$$\lim. \frac{MM'}{AA'} = \frac{d\sigma}{ds} = r \left( \frac{1}{R} \pm \frac{1}{R'} \right) \quad (\text{page 56}),$$

il viendra

$$(A) \quad \lim. \frac{CM}{CA} = r \frac{1}{\cos i} \cdot \left( \frac{1}{R} \pm \frac{1}{R'} \right).$$

Toutefois, comme, d'après les conventions déjà faites,  $\cos i$  peut être négatif; qu'il en est de même du facteur  $\frac{1}{R} \pm \frac{1}{R'}$  dans le cas où la ligne mobile roule sur la concavité de la ligne fixe, il faudra, dans les applications de la relation (A), faire précéder du signe  $-$  les facteurs  $\frac{1}{\cos i}$  et  $\frac{1}{R} \pm \frac{1}{R'}$  quand ils se trouveront négatifs.

D'après cela, et en considérant d'abord le cas des roulettes extérieures, si l'on suppose le point décrivant  $M$  situé, par rapport à l'élément de contact  $A_0A$ , du côté opposé à la ligne fixe, et le point  $C$  situé comme dans la figure précédente,  $\rho$  sera positif,  $CM$  et  $CA$  auront pour valeurs  $\rho$  et  $\rho - r$ , et  $\cos i$  étant négatif, on devra écrire ainsi la formule (A):

$$\frac{\rho}{\rho - r} = r \cdot \frac{1}{-\cos i} \cdot \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right),$$

8a DES MÉTHODES EN GÉOMÉTRIE. OU, en reliant les signes des deux membres, (1)  $0 = r^p \cos J$ . Si, au contraire, comme dans la figure à côté, on suppose le point décrivant M. situé du même côté que la ligne fixe;  $\cos J$  est toujours positif, CM et CA ont pour valeurs  $p$  et  $c - p$ , et  $\cos f$  étant positif, on doit écrire la formule (A),  $-P = R' \cos f$  ce qui est encore la formule (I). Si, passant au cas où le point décrivant est intérieur, nous supposons  $f > 90^\circ$ ; le point décrivant du côté opposé à la courbe fixe et le point C situé comme dans la figure à côté;  $p$  sera négatif, CAI et CA auront pour valeurs  $-p$  et  $c - p$ , et  $\cos f$  étant négatif, on devra écrire  $-P = R' \cos f$  ou, en changeant les signes des deux membres,  $P = -R' \cos f$ . Si, au contraire, le point décrivant étant du même côté que la ligne fixe, on suppose le point C situé comme dans la figure et  $f < 90^\circ$ ;  $p$  est négatif, CM et CV ont pour valeurs  $-p$  et  $c - p$ ; et  $\cos f$  étant positif,  $-P = R' \cos f$  négatif, on doit écrire ainsi la formule (A):  $-P = R' \cos f$ . Si, en changeant les signes des deux membres, on retrouve encore la formule (1'). Les autres cas que l'on pourrait encore examiner conduiraient aux mêmes formules (I) ou (T); et comme celle dernière ne diffère de la première que par le changement du signe de  $R'$ , on voit que ;



r SECONDE PARTIE. 83 • La formule (I) confient à tous les cas, jmurx'u qu'aux conventions initiales, sur les signes de  $p$  et de  $\cos$ , on ajoute celle-ci : que le rayon de courbure  $R$  de la ligne mobile sera regardé comme positif ou négatif suivant que cette ligne roulera sur la convexité ou sur la concavité de la ligne fixe. Enfin la formule (I) étant générale, la suivante, ' que l'on obtient en résolvant la première par rapport à  $p$  est paiement ■. • ' générale. ' • , Scolie. — La formule (I) s'applique encore au problème 'qui a pour objet . ■ de déterminer le rayon de courbure de l'enveloppe d'une courbe donnée , invariablement liée à la ligne mobile et participant à son mouvement. . ' Concevons , en effet , que du point de contact actuel  $A$  on mène une normale  $AM$  à la courbe donnée, dont la position correspondante est connue : soit  $m$  le pied de cette normale et  $M$  le centre de courbure pour le point  $m$ . On sait, d'après le théorème de la page 70, que la droite  $MA$  est une normale de la courbe-enveloppe. Dans l'instant suivant, l'arc  $Am$  de la ligne mobile s'enroulant sur l'arc égal  $AA'$  de la ligne fixe, ' le point  $M$  vient en  $M'$  en décrivant le petit arc  $MM'$  d'une roulette particulière; et l'on voit facilement que la droite  $A'M'$  peut être considérée comme normale à la courbe mobile dans sa nouvelle position ; cette droite - '  $A'M'$  représente donc une seconde normale de la courbe-enveloppe. Il résulte de là que le centre de courbure de l'enveloppe , en un point  $m$  de cette ligne , coïncide avec le centre de courbure en  $M$  de la roulette qui serait engendrée par le point  $M$  , centre de courbure en  $m$  de la courbe dont on considère l'enveloppe. • . . ' ■ Observation. — On trouve des formules- équivalentes à celles qui précèdent dans YAnalyse des infiniment petits ( section 9, prop. 4 )■ On peut ' aussi consulter sur le même sujet des articles de MM. Abel Transon et . Chasles (Journal de Mathématiques , tome X, p. 148 et 204). • • 6. Construire par points la développée de l'ellipse plane , en prenant la , . propriété principale des foyers pour définition de la courbe. De l'un des foyers  $F$ , comme centre, et avec un rayon égal à l'axe focal , décrivons une circonférence sur laquelle nous prendrons deux points trèsvoisins  $K$  et  $K'$  que nous joindrons par des droites au foyer  $F$  et au foyer  $F'$ . Les droites  $FK$  et  $FK'$  rencontrant l'ellipse en  $M$  ,  $M'$ , si nous menons par '■ ces points des parallèles  $MC$ ,  $M'C$  aux droites  $F'K$ ,  $F'K'$ , ces parallèles seront normales à la courbe en  $M$  ,  $M'$ , et la limite de leur point d'intersection  $C$  sera le point de la développée que

nous nous proposons de construire. . / , A cet effet nous remarquerons iiuc  
la, formule (I) dun"40, appliquée. G. Digitized by Google

La formule (I) convient à tous les cas, pourvu qu'aux conventions initiales, sur les signes de  $\rho$  et de  $\cos i$ , on ajoute celle-ci : que le rayon de courbure  $R'$  de la ligne mobile sera regardé comme positif ou négatif, suivant que cette ligne roulera sur la convexité ou sur la concavité de la ligne fixe.

Enfin la formule (I) étant générale, la suivante,

$$(II) \quad \rho = r \frac{\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}}{\frac{\cos i}{r} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R'}}$$

que l'on obtient en résolvant la première par rapport à  $\rho$ , est également générale.

*Scolie.* — La formule (I) s'applique encore au problème qui a pour objet de déterminer le rayon de courbure de l'enveloppe d'une courbe donnée, invariablement liée à la ligne mobile et participant à son mouvement.

Concevons, en effet, que du point de contact actuel  $A$  on mène une normale  $AMm$  à la courbe donnée, dont la position correspondante est connue : soit  $m$  le pied de cette normale et  $M$  le centre de courbure pour le point  $m$ . On sait, d'après le théorème de la page 70, que la droite  $mMA$  est une première normale de la courbe-enveloppe. Dans l'instant suivant, l'arc  $Aa$  de la ligne mobile s'enroulant sur l'arc égal  $AA'$  de la ligne fixe, le point  $M$  vient en  $M'$  en décrivant le petit arc  $MM'$  d'une roulette particulière; et l'on voit facilement que la droite  $A'M'$  peut être considérée comme normale à la courbe mobile dans sa nouvelle position; cette droite  $A'M'$  représente donc une seconde normale de la courbe-enveloppe. Il résulte de là que le centre de courbure de l'enveloppe, en un point  $m$  de cette ligne, coïncide avec le centre de courbure en  $M$  de la roulette qui serait engendrée par le point  $M$ , centre de courbure en  $m$  de la courbe dont on considère l'enveloppe.

*Observation.* — On trouve des formules équivalentes à celles qui précèdent dans l'Analyse des infiniment petits (section 9, prop. 4). On peut aussi consulter sur le même sujet des articles de MM. Abel Transon et Chasles (*Journal de Mathématiques*, tome X, p. 148 et 204).

6. Construire par points la développée de l'ellipse plane, en prenant la propriété principale des foyers pour définition de la courbe.

De l'un des foyers  $F$ , comme centre, et avec un rayon égal à l'axe focal, décrivons une circonférence sur laquelle nous prendrons deux points très-voisins  $K$  et  $K'$  que nous joindrons par des droites au foyer  $F$  et au foyer  $F'$ . Les droites  $FK$  et  $FK'$  rencontrant l'ellipse en  $M$ ,  $M'$ , si nous menons par ces points des parallèles  $MC$ ,  $M'C$  aux droites  $FK$ ,  $FK'$ , ces parallèles seront normales à la courbe en  $M$ ,  $M'$ , et la limite de leur point d'intersection  $C$  sera le point de la développée que nous nous proposons de construire.

A cet effet nous remarquerons que la formule (I) du n° 40, appliquée

84 U.F.S MÉTHODKS F:> UKO.MKTKIE. au triangle QQI', donne l'expression de  $p^{\lim}$ . MC, par le rapport du mouvement linéaire du point M au mouvement angulaire de la droite MC. Or la formule (II) du même numéro, appliquée; aux deux triangles T-MM', FKK', fournit le, rapport du mouvement linéaire du point M à celui du point K; tandis que la, formule (I), appliquée au triangle F'KK', donne le rapport du mouvement angulaire de la droite F'K et, par suite, de sa parallèle. Mti, au mouvement linéaire du point K. Il ne reste plus dès lors qu'à relier ces rapports pour obtenir la formule Buiéante :  $\bullet \bullet' > p = \lim.MC = F'K$ . ni FK I ros' / ' ( /  $\bullet$  -h r y ro.s I dan.s laquelle i désigne l'angle de la normale au point M avec l'un ou l'autre des deux rayons vecteurs dont r désignent les longueurs. Enfin la normale au point M coupant l'axe focal en 1, on trouve, sur la figure. M1 F K.  $\text{TM}$  1 kpj.. En substituant cette valeur dans la formule précédente, il vient  $'' = AL - '' \bullet \text{ros}'i' \bullet '' \bullet$  et cette formule conduit à la construction suivante : Par le point 1, où la normale MC coupe l'axe focal, mener, parallèlement à la tangente en M, une droite l1' terminée au rayon vecteur F.M. par le point P mener au rayon  $\gamma > rr / < ? \ll -$  F1M la perpendiculaire PC. Cette droite va rencontrer la normale MC en un point t/ni appartient à l'ellipse S]hérique,  $\bullet' <$  Observation. ^ Nous sommes entré dans quelques détails sur la manière de [parvenir à cette construction, afin d'écarter la route que nous suivrons dans la solution du problème sirivanl, qui représente plus de difficulté et qui nous conduira à une analogie nouvelle et remarquable entre les ellipses plane et sphérique. 7. Construire les points la élévation/rpée <U: C ellipse sphérique. Nous entendons par là (p.e par, chaque point de l'ellipse S]hérique on mène un arc de grand cercle normal à la courbe, et que l'on propose de construire le point où cet arc de grand cercle touche son enveloppe, celle-ci pouvant être appelée la développée sphérique de l'ellipse. Lkmmk 1. T- Soient, dans un triangle sphérique  $// \ll /$ ,  $\mu$  et  $\mu$  les arcs de grand cercle bissecteurs des angles intérieur et extérieur en m, et soit abaissé l'arc de grand cercle /A perpendiculaire sur l'arc bissecteur mw,. Digitized by Google





sKco.M)!'. PAitrii-: 85 un aura ta rulation (j ) laiîî iiii ~ isiny 'A •  
 . siii /'/// Dvmoisiration. — en ptiet, ^ le |>oinl irinteiwliuiulesan s ,/w el /7i  
 4)rolongcs; on aura, à eause de l'égalito lies , , î angles en //> , ■\* m ■ ; ■ ■  
 - 'nh — et, [)ar suite, • . " “ D'ailleurs l'égalité /'X-fe a/Vi , la eonsidératiou  
 du triangle /■/«/( coupé |>ar le grand cerclo./y'«, et les deux triangles  
 rectangl(>s h'//, Kim fournissent ces relations : '■ sin/'X = 2§in/7'.cos\_ /7(  
 sin WM . sin/7< . sin/X = sin /iH . sin/" X- . sin./w , sm / ' h sin hii . lang (/   
 = tang,/ h — eus f h ■. \_\_ < • . tang/W^sin/Mo.tangrt. . , ■ . l »\*. ■ • ' ' • Or,  
 ai l'on uuilli)li<; ces égalités membre à membre et ipie l'on simplilie, on  
 obtient précisément la relation énoncée. Lemme II. — Dans F ellipse  
 sp/iéii(ue , F tue de ÿriiïid ce nie normal à , la courbe en F un de scs points,  
 divise en deux jurties égales F angle des arcs de grand cercle <pd joignent  
 ce point aux deux foyers. • Omettant la démonstration de ce lemme qui  
 n'offre aivcune diflicidté, occuiwns-nous, en premier lieu, de construire  
 deux arcs de grand cercle .normaux à la courbe. Nous devons, à cet effet,  
 substiluer à lu propriété de l'arc normal que l'on vient de rappeler une  
 construction géométrique équivalente; or, on aperçoit aisément que la  
 suivante satisfait à cette condition ; du point/comme pôle, avec un rayon  
 sphérique égal afmy-f'in, décrire un arc de |)otit cercle, sur lequel on prend  
 deux points voisins X, X'; joindre (par des arcs de grand cercle) fk.fk' qui  
 coupent l'ellipse en w, w'; joindre de même kf, k'f et iTrendre sur leurs  
 prolongements les' arcs f'n,f'n' complémentaires des moitiés des arcs/'X,  
 /'X'; et mener eniin les arcs de grand cercle w«, m'n' qui seront normaux à la  
 rourln' en w, w'. Les arcs normaux' w«, w'«' se coupent en qn point c, dont  
 nous avons, en second lieu , à déterminer la position limiU\*. Nous  
 mènerons, à cet effet, les arcs de grand cercle ««', XX', mm' , et ' l'arc  
 tangent mit qui est perpendiculaire à l'arc /'X en son milieu h. Si nous  
 supposons établi (coipie nous démontrerons'rigoureuSi'montàla lin), que  
 Fnrr nn' est , à la liniite , perpendiculaire à Farrmn, nous en di'xluirons (le  
 point'» étant lé polo do l'arc w/il, ipio la limite de l'angle./'//«'est Digitized  
 by Google

on aura la relation

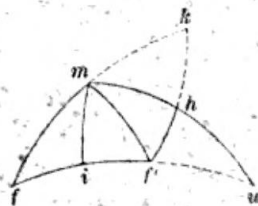
$$(J) \quad \text{tang } mi = 2 \sin f'h \cdot \frac{\sin fm}{\sin (fm + f'm)}.$$

*Démonstration.* — Soit, en effet,  $k$  le point d'intersection des arcs  $fm$  et  $f'h$  prolongés; on aura, à cause de l'égalité des angles en  $m$ ,

$$mk = mf',$$

et, par suite,

$$fk = fm + f'm.$$



D'ailleurs l'égalité  $f'k = 2f'h$ , la considération du triangle  $kmh$  coupé par le grand cercle  $ff'u$ , et les deux triangles rectangles  $uf'h$ ,  $uim$  fournissent ces relations :

$$\begin{aligned} \sin f'k &= 2 \sin f'h \cdot \cos f'h, \\ \sin mu \cdot \sin f'h \cdot \sin fk &= \sin hu \cdot \sin f'k \cdot \sin fm, \end{aligned}$$

$$\sin hu \cdot \text{tang } \hat{u} = \text{tang } f'h = \frac{\sin f'h}{\cos f'h},$$

$$\text{tang } mi = \sin mu \cdot \text{tang } \hat{u}.$$

Or, si l'on multiplie ces égalités membre à membre et que l'on simplifie, on obtient précisément la relation énoncée.

**LEMME II.** — *Dans l'ellipse sphérique, l'arc de grand cercle normal à la courbe en l'un de ses points, divise en deux parties égales l'angle des arcs de grand cercle qui joignent ce point aux deux foyers.*

Omettant la démonstration de ce lemme qui n'offre aucune difficulté; occupons-nous, en premier lieu, de construire deux arcs de grand cercle normaux à la courbe. Nous devons, à cet effet, substituer à la propriété de l'arc normal que l'on vient de rappeler une construction géométrique équivalente; or, on aperçoit aisément que la suivante satisfait à cette condition : du point  $f$  comme pôle, avec un rayon sphérique égal à  $fm + f'm$ , décrire un arc de petit cercle, sur lequel on prend deux points voisins  $k$ ,  $k'$ ; joindre (par des arcs de grand cercle)  $fk$ ,  $fk'$  qui coupent l'ellipse en  $m$ ,  $m'$ ; joindre de même  $kf$ ,  $k'f$  et prendre sur leurs prolongements les arcs  $f'n$ ,  $f'n'$  complémentaires des moitiés des arcs  $f'k$ ,  $f'k'$ ; et mener enfin les arcs de grand cercle  $mn$ ,  $m'n'$  qui seront normaux à la courbe en  $m$ ,  $m'$ .

Les arcs normaux  $mn$ ,  $m'n'$  se coupent en un point  $c$ , dont nous avons, en second lieu, à déterminer la position limite.

Nous mènerons, à cet effet, les arcs de grand cercle  $nn'$ ,  $kk'$ ,  $mm'$ , et l'arc tangent  $mh$  qui est perpendiculaire à l'arc  $f'k$  en son milieu  $h$ . Si nous supposons établi (ce que nous démontrerons rigoureusement à la fin), que l'arc  $nn'$  est, à la limite, perpendiculaire à l'arc  $mn$ , nous en déduirons

86 DES MÉTHODES ES GÉOMÉTRIE. mesuré par un quadrant augmenté du l'arc nm. On a dune, en supprimant le mot limite, pour abréger, - (a) ,  $\sin' \langle n' = \cos wA. , . - . i$  D'ailleurs, en désignant par i l'angle/zw = f'mi, on a (P) ■' \*  $\sin' / * / = \cos \rangle i / A, '(7) \sin / \langle \rangle / \langle ' = \cos \rangle , (^) . \bullet$  .  $\sin / XX' = \sin (Vi \langle ' = \sin c / \langle \langle ' = I . \bullet ' .$  Tout cela posé , si l'on désigne par p, r, r' les arcs me, mf, mf, la ewn- • [«raison des deux triangles emm', c/iii' donne <t abord, en remanpianit que les arcs . cm et en sont complémentaires , et On [«s- \_ sant à la limite, . • . . sm mm  $\sin c = \frac{1}{2} : \sin c / \langle . \sin \sin \sin c / i$  d'où (>) langp: En senmd lieu, la comparaison des triangles f'nn', /XX'; l'égalité /X = -i/Vi , jointe à pette remarque que les arcs /'» ot/'« sont complémentaires; et la considération du triangle rectangle /' /«A, fournissent. ces trois relations ' . :  $\sin f'n \cos / \langle ' / \rangle ' . \sin / \rangle \langle \langle ' \bullet isir, Eü- \cos mh \sim \sin XX' ' ' \sin X'X . , , \cos mli . s'mf'mb \text{ ou } \cos mit. \cos i - \cos mf h.$  Multipliant ces égalités membre à membre, il vient, après simplification, • ■ (2)  $\cos i \sin nn \sin /' / i \sim \sin XX'$  En troisième lieu, on trouve, par la comparaison deg triangles /XX', ; ' $\sin XX' \sin w / u' . , . \sin / - 1 - 7 = 7 - = -7 - . = -7 \sin fmm , \bullet \sin / X \sin y \rangle \langle \langle ' \bullet ' \text{ et de là , en passant à ' la limite , (3) } \sin fk \sin XX' \bullet - ' - \cos \rangle 7 = \sin / ni ' \sin mm' Knfm,$  si l'on multiplie membre à membre les égalités (1), (a) et [3), on

SECONDE PARTIE. 87 trouve définitivement (II) . I • . , sin fin  
 $\tan p \cdot \cos i = \sin f h = \tan g' > <$  , en ayant égard à la formule (i) du lemme  
1. Or cette formule conduit à cette construction : Par la point de rencontre de  
taxe focal ff' avec Parc normal m\, mener à cc dernier un arc  
perpendiculaire terminé à /'rtn-'fm; par le point p, et perpendiculairement à  
Parc fm^ mener Parc \tciiui ira rencontrer Parc normal xni prolongé  
appointe suivant lequel cet arc touche la développée sphérique de Pellipse.  
Remarque. — La construction que nous venons de démontrer, com- ■ parée  
à celle de l'exemple précédent, établit une nouvelle et intime analogie entre  
les deux ellipses plane et sphérique. Il serait intéressant de rechercher si la  
même construction s'appliquerait aussi, dans l'ellipse géodésique tracée sur  
une surface quelconque , à la détermination du point où chaque normale  
géodésique touche son enveloppe. . Observation. — Il reste à établir que  
l'arc de grand cercle ««'est, à la , \_limite>|)perpendiculaire sur l'arc «/« . Nous  
remarquerons pour cela que les angles en m, ni' du triangle emm! étant  
infinitement petits d'un droit, la différence entre les arcs r/«,  
c«/'est un infinitement petit du second ordre ; la différence entre les arcs  
complémentaires en, en' est donc du même ordre, et par suite les angles en  
«, «' du triangle cmm' sont infinitement peu différents l'un de l'autre, et  
chacun d'eux enfin diffère infinitement peu d'un angle droit. 8. Construire  
les points P de l'enveloppe du côté ' libre (Un polygone de périmètre constant.  
Soit le point d'intersection de deux positions infinitement voisines ab et a' b'  
du côté libre. Les deux polygones abrd.. .L, a' b'ed. . .l étant isopérimètres,  
il vient, en négligeant les parties communes, • ia' -> r ib' aa' — in ib ^ bb' ,  
ou . • , V / (i) {ia' — ia)' - \ - an' = (ib — ib') - \ - bb'. v Supposons, comme cela  
arrive dans la figure, que les angles intérieurs du polygone soient  
aigus. Il résulte de cette hypothèse et de la position de a' b' par rapport à ab,  
que les , différences ia' — ia, ib - r - ib' sont positives ; par suite , si l'on  
néglige les infinitement petits du second ordre, ces différences seront  
représentées, en grandeur et en signe, par na'.cos a et par bb'.cos h, et la  
relation (i) deviendra (•) an' ( I - P cos a)' = z bb' ( I - t- cosé ). . . jigitized by  
Google

trouve définitivement

$$(II) \quad \text{tang } \rho \cdot \cos^2 i = 2 \sin f' h \cdot \frac{\sin fm}{\sin fk} = \text{tang } mi,$$

en ayant égard à la formule (1) du lemme I. Or cette formule conduit à cette construction : Par le point de rencontre de l'axe focal  $ff'$  avec l'arc normal  $mi$ , mener à ce dernier un arc perpendiculaire  $ip$  terminé à l'arc  $fm$ , par le point  $p$ , et perpendiculairement à l'arc  $fm$ , mener l'arc  $pc$  qui ira rencontrer l'arc normal  $mi$  prolongé au point  $c$  suivant lequel cet arc touche la développée sphérique de l'ellipse.

*Remarque.* — La construction que nous venons de démontrer, comparée à celle de l'exemple précédent, établit une nouvelle et intime analogie entre les deux ellipses plane et sphérique. Il serait intéressant de rechercher si la même construction s'appliquerait aussi, dans l'ellipse géodésique tracée sur une surface quelconque, à la détermination du point où chaque normale géodésique touche son enveloppe.

*Observation.* — Il reste à établir que l'arc de grand cercle  $nn'$  est, à la limite, perpendiculaire sur l'arc  $mn$ . Nous remarquerons pour cela que les angles en  $m, m'$  du triangle  $cmn'$  étant infiniment peu différents d'un droit, la différence entre les arcs  $cm, cm'$  est un infiniment petit du second ordre : la différence entre les arcs complémentaires  $cn, cn'$  est donc du même ordre, et par suite les angles en  $n, n'$  du triangle  $cnn'$  sont infiniment peu différents l'un de l'autre, et chacun d'eux enfin diffère infiniment peu d'un angle droit.

8. Construire par points l'enveloppe du côté libre d'un polygone de périmètre constant.

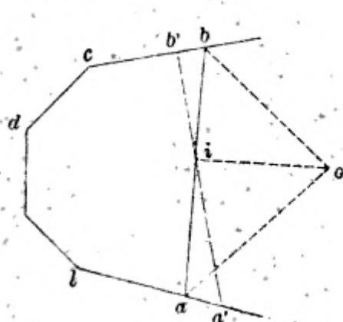
Soit  $i$  le point d'intersection de deux positions infiniment voisines  $ab$  et  $a'b'$  du côté libre. Les deux polygones  $abcd...l, a'b'cd...l$  étant isopérimétriques, il vient, en négligeant les parties communes,

$$ia' + ib' + aa' = ia + ib + bb',$$

ou

$$(1) \quad (ia' - ia) + aa' = (ib - ib') + bb'.$$

Supposons, comme cela arrive dans la figure, que les angles intérieurs



$\hat{a}$  et  $\hat{b}$  du polygone soient aigus. Il résulte de cette hypothèse et de la position de  $a'b'$  par rapport à  $ab$ , que les différences  $ia' - ia, ib - ib'$  sont positives ; par suite, si l'on néglige les infiniment petits du second ordre, ces différences seront représentées, en grandeur et en signe, par  $aa' \cdot \cos a$  et par  $bb' \cdot \cos b$ , et la relation (1) deviendra

$$(1') \quad aa' (1 + \cos a) = bb' (1 + \cos b).$$

88 - DES NÉTHUDES EN ÉEUMÉTRIE. D'ailleurs, la comparaison des triangles  $ibb'$ ,  $i/m'$  fournit cette relation :  $'^{\wedge} . , . 'hh'$ ,  $(lu'$ ,  $\bullet \cdot (2) -rr.- sn// \cdot sina. > .$  lit tu  $\blacksquare$  Multipliant membre à membre les égalités  $\{i'\}$ , (2) et passant à la li-  $. * mite$ , il vient  $\bullet \bullet \bullet$  ou (!)  $\bullet i + \cos n i4 - \cos/i tu. ^ = tb. ^ — , sm\ll ' sin\ll ib tang \bullet b' t ng$  et cette formule se traduit géométriquement par cette construction  $\bullet$ . Mener les bissectrices en îles (tangentes c. c. tangentes du jxdrgone en a et h lesquelles  $\blacksquare$  se coupent au jmint o; et du point o abaisser, une perpendiculaire sur le côté ub; le pied de cette (Ku perpendiculaire est le point suivant lequel le côté .. ah touche son enveloppe. Les autres hypothèses que l'on aurait pu faire sur la nature des angles en' et b dirpolygone'/'v/. conduiraient d'ailleurs à la même construction. Remarque. — Il résulte de cette construction (que le côté libre-«é louche, en un -même point, et son enveloppe et la circonférence exinscrite au triangle qui serait formé par le côté libre ab et par les deux côtés adjacents du polygone. On voit facilement, d'ailleurs, et par de simples considérations de géométrie élémentaire, que , le périmètre du polygone étant donné, la position de la circonférence est déterminée : cette circonférence est donc l'enveloppe même du côté libre (d>. - • CHAPITRE III.  $\blacksquare$  Ici cercle OMulateur.. ' s r. ' 12.\* Nous empruntons les principaux matériaux de ce chapitre au Traité (U's Fluxions de Maclaurin : dans son grand ouvrage,, que les immenses richesses géométriques qu'il renferme placent à côté du Livre des Principes, l'auteur donne sur le sujet (qui va nous occuper un théorème général qu'il ' applique ensuite, d'une manière spéciale, à la détermination du cercle osculateur dans les sections coniques , quelles que soient d'ailleurs les données par lesquelles ces courbes se trouvent définies. Comme résultat, il n'y avait rien à ajouter au chapitre de Maclaurin dont nous allons donner l'analyse : toutefois M. Ch. Dupin, revenant la même question au commencement de ses Géométries, l'a résolue par une méthode nouvelle et entièrement géométrique ; nous reproduisons avec (quelque détail Vélégant transformé tout qu'il a empruntée à cet ouvrage par Goo^

SIXIÈME PARTIE. 89 effet, et j'ai permis de passer successivement de la courbure du cercle à celle de l'ellipse en l'un de ses sommets, et de cette dernière à la courbure de l'ellipse en l'un quelconque de ses points. Nous donnerons enfin un théorème de Mac-Cullagh sur la comparaison des cercles osculateurs de deux lignes qui, construites sur la même axe, ont leurs ordonnées dans un rapport constant; et nous terminerons par une construction géométrique fournissant, pour chaque point d'une courbe, la valeur du rapport  $\frac{y}{x^2}$ ; rapport que Newton appelle la qualité de la courbure en ce point. 43. Définition. — Considérons une courbe rapportée à sa tangente en un point O, prise pour axe des  $x$ , et à une droite quelconque passant par ce point, prise pour axe des  $y$ ; de sorte que pour le point de contact O l'abscisse et l'ordonnée de la courbe sont nulles simultanément. Soient  $x$  et  $y$  l'abscisse et l'ordonnée d'un point quelconque M de la courbe : si  $x$  tend vers zéro, le rapport de  $y$  à  $x^2$  tend vers zéro, ainsi (comme le montre le triangle MOP (voyez la figure suivante), dans lequel on a  $\frac{MP}{OP} \sim \frac{y}{x}$  et  $\frac{MP}{OP} \sim \sin \angle OMP$ ) il résulte que l'ordonnée de la courbe correspondant à une abscisse infiniment petite du premier ordre est elle-même un infiniment petit du second ordre. Cela posé, si l'on considère un cercle de rayon quelconque, passant par le point O, ayant en ce point même tangente que la courbe proposée, et situé du même côté que cette courbe par rapport à la tangente, on verra que les ordonnées du cercle et de la courbe correspondant à une même abscisse infiniment petite seront deux infiniment petits du second ordre, dont le rapport pourra être un nombre fini quelconque; la différence de ces ordonnées sera donc dans le cas général un infiniment petit du second ordre. Toutefois, si le cercle est convenablement choisi et s'il a avec la courbe le contact le plus intime possible, la différence des ordonnées correspondantes du cercle et de la courbe sera un infiniment petit du troisième ordre, et la limite du rapport de ces ordonnées sera l'unité : le cercle défini par cette propriété est l'osculateur de la courbe au point considéré O. Corollaire. — Il résulte immédiatement de cette définition et des principes relatifs à la comparaison des infiniment petits de divers ordres [voir le Traité d'analyse de W. Duhamel] que, dans la comparaison de l'ordonnée d'une courbe à un infiniment petit quelconque du deuxième ordre, à  $x^2$  par exemple, on pourra substituer à l'ordonnée  $y$  de la courbe l'ordonnée correspondante du cercle osculateur; et  $x$  tendant vers zéro les

deux rapports  $\frac{p}{l}$  et  $\frac{p}{r}$  tendront vers la même limite. On voit d'ailleurs que la substitution de l'ordonnée du cercle à l'ordonnée correspondante de la courbe revient à regarder le cercle osculateur d'une courbe en l'un de ses points.

Digitized by Google



effet, et qui permet de passer successivement de la courbure du cercle à celle de l'ellipse en l'un de ses sommets, et de cette dernière à la courbure de l'ellipse en l'un quelconque de ses points.

Nous donnerons enfin un théorème de Mac-Cullagh sur la comparaison des cercles osculateurs de deux lignes qui, construites sur le même axe, ont leurs ordonnées dans un rapport constant; et nous terminerons par une construction géométrique fournissant, pour chaque point d'une courbe, la valeur du rapport  $\frac{d\phi}{ds}$ , rapport que Newton appelle *la qualité de la courbure* en ce point.

43. *Définition.* — Considérons une courbe rapportée à sa tangente en un point O, prise pour axe des  $x$ , et à une droite quelconque passant par ce point, prise pour axe des  $y$ ; de sorte que pour le point de contact O l'abscisse et l'ordonnée de la courbe sont nulles simultanément.

Soient  $x$  et  $y$  l'abscisse et l'ordonnée d'un point quelconque M de la courbe: si  $x$  tend vers zéro, le rapport de  $y$  à  $x$  tend vers zéro, ainsi que le montre le triangle MOP (voyez la figure suivante), dans lequel on a

$$\frac{MP}{OP} = \frac{y}{x} = \frac{\sin MOP}{\sin OMP}.$$

Il en résulte que l'ordonnée de la courbe correspondant à une abscisse infiniment petite du premier ordre est elle-même un infiniment petit du second ordre.

Cela posé, si l'on considère un cercle de rayon quelconque, passant par le point O, ayant en ce point même tangente que la courbe proposée, et situé du même côté que cette courbe par rapport à la tangente, on verra que les ordonnées du cercle et de la courbe correspondant à une même abscisse infiniment petite seront deux infiniment petits du second ordre, dont le rapport pourra être un nombre fini quelconque; la différence de ces ordonnées sera donc dans le cas général un infiniment petit du second ordre. Toutefois, si le cercle est convenablement choisi et s'il a avec la courbe le contact le plus intime possible, la différence des ordonnées correspondantes du cercle et de la courbe sera un infiniment petit du troisième ordre, et la limite du rapport de ces ordonnées sera l'unité: le cercle défini par cette propriété est dit *osculateur* de la courbe au point considéré O.

COROLLAIRE. — Il résulte immédiatement de cette définition et des principes relatifs à la comparaison des infiniment petits de divers ordres (voir le *Traité d'analyse* de M. Duhamel) que, dans la comparaison de l'ordonnée  $y$  de la courbe à un infiniment petit quelconque du deuxième ordre, à  $x^2$  par exemple, on pourra substituer à l'ordonnée  $y$  de la courbe l'ordonnée correspondante  $y'$  du cercle osculateur; et  $x$  tendant vers zéro, les deux rapports  $\frac{y}{x^2}$  et  $\frac{y'}{x^2}$  tendront vers la même limite. On voit d'ailleurs que la substitution de l'ordonnée du cercle à l'ordonnée correspondante de la

9° DES MÉTHODES EN GÉOMÉTRIE. points, comme la limite d'un cercle variable tangent en ce point à la courbe et la rencontrant on obtient un second point qui se rapproche indéfiniment du premier.

Observation. — On sait que le rayon du cercle osculateur d'une ligne en un de ses points est égal à la limite du segment intercepté sur la normale en ce point par la ligne elle-même et par la normale infiniment voisine. Il résulte de là, en général, que toutes les fois que, par la nature de la question, on saura construire immédiatement la tangente et par suite la normale à la courbe considérée, on sera en état de fixer soit par une construction, soit par une formule, la position-limite du point de rencontre de deux normales infiniment voisines, et de déterminer par conséquent le rayon du cercle osculateur. Or cette circonstance se présente, en général, dans les courbes représentées (par des équations différentielles du premier ordre et dans les courbes transcendentes, dont on ramène le plus souvent les équations à cette forme : la recherche du cercle osculateur pour de pareilles courbes peut donc être considérée comme une application du problème des enveloppes, résolu dans le chapitre précédent. Pour cette raison, nous nous bornerons dans celui-ci à l'étude du cercle osculateur dans les courbes algébriques.

THÉORÈME GÉNÉRAL. — Que sur l'ordonnée PM de la courbe on prenne, à partir du pied de P ordonnée sur la tangente, une longueur PN telle, que le produit de PM par PN soit égal au carré de la perpendiculaire OP, (i),  $PM \cdot PN = OP^2$ ; la courbe auxiliaire, lieu géométrique des points N ainsi obtenus, coupe l'axe Ox en un point qui est le centre du cercle osculateur de la courbe primitive au point O. Démonstration. — Faisons en effet, pour le cercle osculateur au point O, la même construction que pour la courbe elle-même; c'est-à-dire prenons sur chaque ordonnée PM' du cercle une longueur PN' telle, que l'on ait (a)  $PM' \cdot PN' = OP'^2$ ; le point N' ainsi déterminé appartiendra évidemment au cercle osculateur, et OP tendant vers zéro, la limite de PN' sera la corde déterminée dans ce cercle par l'axe Ox. Or les relations (i) et (a), divisées membre à membre, donnent  $\frac{PN}{PM} = \frac{PN'}{PM'}$  et, par suite,  $\frac{PN}{PM} = \frac{PN'}{PM'}$ .

Digitized by Google

points, comme la limite d'un cercle variable tangent en ce point à la courbe et la rencontrant en outre en un second point qui se rapproche indéfiniment du premier.

*Observation.* — On sait que le rayon du cercle osculateur d'une ligne en un de ses points est égal à la limite du segment intercepté sur la normale en ce point par la ligne elle-même et par la normale infiniment voisine. Il résulte de là, en général, que toutes les fois que, par la nature de la question, on saura construire immédiatement la tangente et par suite la normale à la courbe considérée, on sera en état de fixer soit par une construction, soit par une formule, la position-limite du point de rencontre de deux normales infiniment voisines; et de déterminer par conséquent le rayon du cercle osculateur. Or cette circonstance se présente, en général, dans les courbes représentées par des équations différentielles du premier ordre et dans les courbes transcendantes, dont on ramène le plus souvent les équations à cette forme : la recherche du cercle osculateur pour de pareilles courbes peut donc être considérée comme une application du problème des enveloppes, résolu dans le chapitre précédent. Pour cette raison, nous nous bornerons dans celui-ci à l'étude du cercle osculateur dans les courbes algébriques.

**44. THÉORÈME GÉNÉRAL.** — *Que sur chaque ordonnée PM de la courbe on prenne, à partir du pied de l'ordonnée sur la tangente, une longueur PN telle, que le produit de PM par PN soit égal au carré de l'abscisse correspondante OP,*

$$(1) \quad PM \cdot PN = \overline{OP}^2;$$

*la courbe auxiliaire, lieu géométrique des points N ainsi obtenus, coupera l'axe Oy en un point appartenant au cercle osculateur de la courbe primitive au point O.*

*Démonstration.* — Faisons en effet, pour le cercle osculateur au point O, la même construction que pour la courbe elle-même; c'est-à-dire prenons sur chaque ordonnée PM' du cercle une longueur PN' telle, que l'on ait

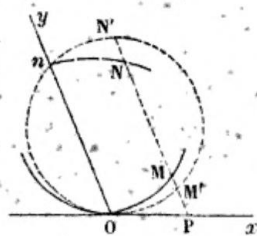
$$(2) \quad PM' \cdot PN' = \overline{OP}^2;$$

le point N' ainsi déterminé appartiendra évidemment au cercle osculateur, et OP tendant vers zéro, la limite de PN' sera la corde déterminée dans ce cercle par l'axe Oy. Or les relations (1) et (2), divisées membre à membre, donnent

$$\frac{PN}{PN'} = \frac{PM'}{PM},$$

et, par suite,

$$\lim \frac{PN}{PN'} = \lim \frac{PM'}{PM} = 1.$$



SECONDE PARTIE. 9° Donc ( 3 ) ' ' lim.  $PN = \lim. PN'$ , ce qui démontre que le point où la courbe auxiliaire, lieu des points N, rencontre l'axe O.v, est précisément l'extrémité de la corde déterminée par cet axe dans le cercle osculateur de la courbe primitive en O. Corollaire. — Si l'axe Oj est choisi perpendiculaire à la tangente Ox, l'application du théorème précédent fournira le diamètre même du cercle, osculateur. ..

Scolie. — On sait, d'après Newton, que, si par un point quelconque o, pris sur le plan d'une courbe algébrique de degré n, on mène deux droites ox, oy et que l'on forme, pour chacune de ces droites, le produit des segments compris entre le point o, et chacun des n. points réels ou imaginaires suivant lesquels elle rencontre la courbe; le rapport de ces produits sera indépendant de la position particulière du point n, la valeur de ce rapport dépendant uniquement des directions- des droites ox, oy. Ce principe, combiné avec le théorème précédent, fournit l'expression géométrique de la corde du cercle osculateur d'une courbe algébrique en un point quelconque de cette courbe.

43. Du cercle osculateur dans la parabole. Soient ox une tangente à la parabole, or le diamètre passant par le point de contact et ip' le paramètre correspondant. Prenons sur l'ordonnée PM le point N tel, que l'on ait,  $PM \cdot PN = d^2$  où  $PN = PM$ . Le lieu des points N ainsi obtenus est ici une ligne droite parallèle à la tangente, car, en vertu de l'équation de la courbe,  $y^2 = 4px$ ,  $PM = \sqrt{4px}$ ; Il en résulte que dans la parabole la corde du cercle osculateur, dirigée suivant le diamètre du point d'osculation, est égale au paramètre relatif à ce diamètre, et par suite au quadruple, de la distance du point d'osculation au foyer; et la corde du cercle osculateur dirigée suivant le foyer a la même valeur. On déduit facilement de là la construction du centre du cercle osculateur, analogue à celle déjà donnée pour l'ellipse dans le chapitre précédent (page 84).

40. Du cercle osculateur dans les coniques à centre. Soient o' la tangente au point o de la conique considérée, et on, on', Digitized by Google

Donc

$$(3) \quad \lim. PN = \lim. PN',$$

ce qui démontre que le point où la courbe auxiliaire, lieu des points N, rencontre l'axe Oy, est précisément l'extrémité de la corde déterminée par cet axe dans le cercle osculateur de la courbe primitive en O.

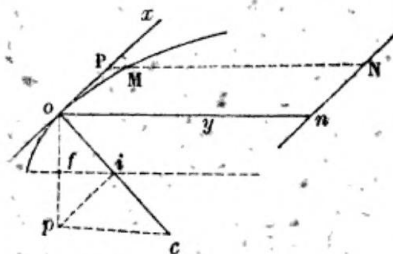
**COROLLAIRE.** — Si l'axe Oy est choisi perpendiculaire à la tangente Ox, l'application du théorème précédent fournira le diamètre même du cercle osculateur.

**Scolie.** — On sait, d'après Newton, que, si par un point quelconque o, pris sur le plan d'une courbe algébrique de degré n, on mène deux droites ox, oy et que l'on forme, pour chacune de ces droites, le produit des segments compris entre le point o, et chacun des n points réels ou imaginaires suivant lesquels elle rencontre la courbe; le rapport de ces produits sera indépendant de la position particulière du point o, la valeur de ce rapport dépendant uniquement des directions des droites ox, oy.

Ce principe, combiné avec le théorème précédent, fournit l'expression géométrique de la corde du cercle osculateur d'une courbe algébrique en un point quelconque de cette courbe.

#### 45. Du cercle osculateur dans la parabole.

Soient ox une tangente à la parabole, oy le diamètre passant par le point de contact et 2p' le paramètre correspondant. Prenons sur l'ordonnée PM le point N tel, que l'on ait



$$PM \cdot PN = \overline{OP}^2, \text{ d'où } PN = \frac{\overline{OP}^2}{PM}.$$

Le lieu des points N ainsi obtenus est ici une ligne droite parallèle à la tangente, car, en vertu de l'équation de la courbe,

$$\frac{\overline{OP}^2}{PM} = 2p'.$$

Il en résulte que dans la parabole la corde du cercle osculateur, dirigée suivant le diamètre du point d'osculation, est égale au paramètre relatif à ce diamètre, et par suite au quadruple de la distance du point d'osculation au foyer; et la corde du cercle osculateur dirigée suivant le foyer a la même valeur.

On déduit facilement de là la construction du centre du cercle osculateur, analogue à celle déjà donnée pour l'ellipse dans le chapitre précédent (page 84).

#### 46. Du cercle osculateur dans les coniques à centre.

Soient ox la tangente en un point o de la courbe primitive, oy le diamètre

( )-2 UKS METHODES E.\ «EOMETHIE. les cordes (lUc la droite or détermine dans le cercle osculeur en n et dans b» conique elle-même, on aura . ' ' ' o« = liin. PN . ' ■ . , PN étant définie conjme précédemment jiar la relation (i) p.m.pn = pT!, \* Or, si l'on apiiclle N' le second point d'intersection de l'ordonnée 'PM avec la courbe, et si l'on désigne par •i.t et ar les diamètres de. la courbe parallèles à la tangente «or efà l'axe oj-, on aura, d'après le théorème do N'evv ton, ^ (a) PM.PN'= P^'- ~ Comparant ( i ) et ( a ) , on trouve ' - ^ .•N-l'V.i par suite c'est-à-dire, ,(X1 lim. PN = -, lim. PN'i , on = on . c On a donc ce théorème général : La corde du cercle osculateur est à la . cortlc correspondante de la conupie eoniue le carré dit diainèlre parallèle à la tangente au point <P osculation est au carré du diamètre fuirallèlc « la direction commune des deux cordes. ' CoKOLLAIN E I. — Que la ligne' or, au lieu d'être quelcompie, eo'i'ncide avec le diamidre oc du ]>oint de contact ; la corde on' do la conique sera égale à ic, et la formule précédente deviendra . • (I) o.r c b ailleurs^, si l'on mène la normale indéfinie ollK, coupant en II le diamètre parallèle à la tangimte et rencontrée en K par la pr'pendiculaire à la corde on menée par, l'extrémité do cette corde, la similitude des triangles ' oHC, on K , dans l'un desquels oK est évidemment le diamètre 20 du cercle osculateur, donne la relation ,, oC 2/' c - 2/' . 20= oK = on. = -YT = -Yj) ' • . oll c ou O H

Digilized by Google

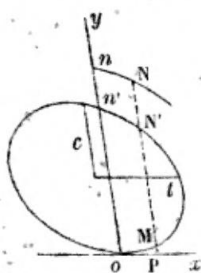
les cordes que la droite  $oy$  détermine dans le cercle osculateur en  $o$  et dans la conique elle-même, on aura

$$on = \lim. PN,$$

PN étant définie comme précédemment par la relation

$$(1) \quad PM \cdot PN = \overline{Po}^2.$$

Or, si l'on appelle  $N'$  le second point d'intersection de l'ordonnée  $PM$  avec la courbe, et si l'on désigne par  $2t$  et  $2c$  les diamètres de la courbe parallèles à la tangente  $ox$  et à l'axe  $oy$ , on aura, d'après le théorème de Newton,



$$(2) \quad PM \cdot PN' = \overline{Po}^2 \cdot \frac{c^2}{t^2}.$$

Comparant (1) et (2), on trouve

$$PN = PN' \cdot \frac{t^2}{c^2};$$

par suite,

$$\lim. PN = \frac{t^2}{c^2} \lim. PN',$$

c'est-à-dire,

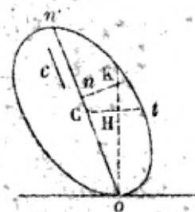
$$(X) \quad on = on' \cdot \frac{t^2}{c^2}.$$

On a donc ce théorème général : *La corde du cercle osculateur est à la corde correspondante de la conique comme le carré du diamètre parallèle à la tangente au point d'osculation est au carré du diamètre parallèle à la direction commune des deux cordes.*

COROLLAIRE I. — Que la ligne  $oy$ , au lieu d'être quelconque, coïncide avec le diamètre  $oc$  du point de contact; la corde  $on'$  de la conique sera égale à  $2c$ , et la formule précédente deviendra

$$(I) \quad on = \frac{2t^2}{c}.$$

D'ailleurs, si l'on mène la normale indéfinie  $oHK$ , coupant en  $H$  le diamètre  $2t$  parallèle à la tangente et rencontrée en  $K$  par la perpendiculaire à la corde  $on$  menée par l'extrémité de cette corde, la similitude des triangles  $oHC$ ,  $onK$ , dans l'un desquels  $oK$  est évidemment le diamètre  $2\rho$  du cercle osculateur, donne la relation



$$2\rho = oK = on \cdot \frac{oC}{oH} = \frac{2t^2}{c} \cdot \frac{c}{oH} = \frac{2t^2}{oH},$$

d'où

$$(II) \quad \rho = \frac{t^2}{oH}.$$

SECONDE PARTIE. ' 93 Donc, le cercle osculateur en un point (F une conique récterniinc sur le diamètre qui passe par le point de contact, une corde égale au paramètre relatif à ce diamètre ( I ) ; c? le rayon du cercle osculateur est égal au carré du demi-diamètre parallèle à la tangente au point d'osculation, divisé par la distance du centre à la tangente (II). C'est l'expression du rayon de courbure, généralement attribuée à M. Clavius. . CoRou.AinK II. — Si la direction de ry est tellement choisie, que les diamètres  $2r$  et  $\rho$ , parallèles à oy et à la tangente. soient égaux, la formule générale deviendra ' (111)  $on = on'$ . Donc si par un point d'une conique on mène une corde symétrique de la tangente par rapport à une parallèle à F un des axes de la courbe, cette corde se partagera en même temps à la conique et au cercle osculateur au point considéré.

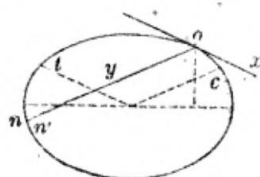
.ConoLL.ÀiHE III. — Que la droite oy soit dirigée suivant l'un des foyers / de la courbe; nous aurons toujours  $\rho^2 = F \cdot r$  ( I )  $on = on'$ . Or on sait : 1°. Que le carré d'un diamètre est équivalent au produit par le grand axe de la corde menée par l'un des foyers parallèlement au diamètre; a". Que le carré d'un diamètre est égal à quatre fois le rectangle des rayons vecteurs qui joignent les deux foyers à l'une des extrémités du diamètre conjugué précédent. ' On aura donc ' . . . '  $4e = on' \cdot iA$ , on'  $2'(3) 4t' = 4rr'$ ,  $F = rr'$ ,  $r, r'$  désignant les rayons vecteurs joignant les deux foyers au point d'osculation o. l'ar suite, en substituant dans (i), on aura pour la corde du cercle osculateur dirigée suivant l'un des foyers, (IV)  $ord 4e = r + r'$  et l'on parviendrait facilement, au moyen, de cette formule, à la construction du centre du cercle osculateur, telle qu'elle a été donnée dans le chapitre précédent (page 84'. . . Digitized by Google



Donc, le cercle osculateur en un point d'une conique détermine sur le diamètre qui passe par le point de contact, une corde égale au paramètre relatif à ce diamètre (I); et le rayon du cercle osculateur est égal au carré du demi-diamètre parallèle à la tangente au point d'osculation, divisé par la distance du centre à la tangente (II).

C'est l'expression du rayon de courbure généralement attribuée à M. Ch. Dupin.

COROLLAIRE II. — Si la direction de  $oy$  est tellement choisie, que les diamètres  $2c$  et  $2t$ , parallèles à  $oy$  et à la tangente, soient égaux, la formule générale deviendra



$$(III) \quad on = on'.$$

Donc si par un point d'une conique on mène une corde symétrique de la tangente par rapport à une parallèle à l'un des axes de la courbe, cette corde appartiendra en même temps à la conique et au cercle osculateur au point considéré.

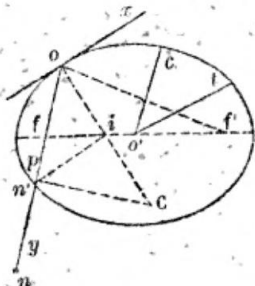
COROLLAIRE III. — Que la droite  $oy$  soit dirigée suivant l'un des foyers  $f$  de la courbe; nous aurons toujours

$$(I) \quad on = on' \cdot \frac{t^2}{c^2}.$$

Or on sait : 1°. Que le carré d'un diamètre est équivalent au produit par le grand axe de la corde menée par l'un des foyers parallèlement au diamètre;

2°. Que le carré d'un diamètre est égal à quatre fois le rectangle des rayons vecteurs qui joignent les deux foyers à l'une des extrémités du diamètre conjugué au premier.

On aura donc



$$(2)$$

$$4c^2 = on' \cdot 2A,$$

$$\frac{on'}{c^2} = \frac{2}{A};$$

$$4t^2 = 4rr',$$

$$(3)$$

$$t^2 = rr',$$

$r, r'$  désignant les rayons vecteurs joignant les deux foyers au point d'osculation  $o$ . Par suite, en substituant dans (1), on aura pour la corde du cercle osculateur dirigée suivant l'un des foyers,

$$(IV) \quad on = \frac{2rr'}{A} = \frac{4rr'}{r+r'},$$

et l'on parviendrait facilement, au moyen de cette formule, à la construction du centre du cercle osculateur, telle qu'elle a été donnée dans le chapitre précédent (page 84).

q4 DES MÉTHODES EN VÉOMÉTRIE. Observation. — Nous ne suivrons pas Maclaurin dans les nombreuses applications qu'il ajoute à celles que nous venons de rapporter et dont l'utilité ne saurait être qu'accidentelle : dans chaque cas particulier, le théorème de Newton et le principe général qui précède permettent, en se servant convenablement des données qui définissent la conique considérée, d'arriver à la détermination du cercle osculateur la plus conforme au but que l'on peut avoir en vue. . . .

8 n. VI. La méthode de transformation de M. Dupin, dont nous avons parlé au commencement de ce chapitre, est fondée sur deux lemmes que nous allons d'abord établir ; dans la démonstration du premier, nous nous appuierons, pour éviter des redites, sur le théorème général du § précédent.

Lemme 1. — Soit une courbe (c) rapportée à deux axes Ox et Oy prises pour axes des X et des y ; que sur chaque ordonnée PM de la courbe on prenne une nouvelle ordonnée PM', qui soit à la première dans le rapport constant de b à a, et soit (c'), la nouvelle courbe qui résulte de cette construction ; le rapport des rayons des cercles osculateurs des deux courbes au point O, sera égal à l'inverse du rapport  $\sim \frac{1}{b}$  constant de leurs ordonnées. Démonstration. — Désignons par  $2p$  et  $2p'$  les diamètres des cercles osculateurs des deux courbes en O ; et sur l'ordonnée commune PMM', prenons les points N et N' tels, que l'on ait  $\frac{PM}{PN} = \frac{PO}{PN'}$  . . . .  $PM \cdot PN = PO^2$  . . .  $PM' \cdot PN' = PO^2$  L'abscisse commune OP tendant vers zéro, on a  $\frac{2p}{2p'} = \lim \frac{PN}{PN'}$  et  $\frac{a}{b} = \lim \frac{PN}{PN'}$  ; P.N  
D'ailleurs les relations (n) et (n'), divisées membre à membre, donnent  $\frac{PN'}{PM' PM} = \frac{b}{a}$  On a donc  $\frac{p}{PM} = \frac{p'}{PM'} \sim \frac{PM}{a}$  C. Q. F. D. Lemme n. — Soit une courbe (c) rapportée à deux axes Ox et Oy dont le premier est tangent à la courbe au point O. Par le pied P de chaque ordonnée MP de la courbe, et sois une direction donnée, menons une . . . Digitized by Google

F SECONDE PARTIE. 95. f/r-oitc PM' sur Im/iwllr nous  
 prvnrons un fHÜnt M' situé h la même tiistahcc tle la tangente 0 .c que le  
 fwint M , et suit ( r ' ) la courbe, lieu géométrique des points M' ainsi  
 obtenus : les deux courbes (c) et (c') auront même cercle osculateur au point  
 0. Démonstration. — Il résulte immédiatement de la définition du cercle '  
 osculateur qu'U. suffira, j>our la démonstration du théorème actuel,  
 d'établir que la différence entre les ordonnées des deux courbes (c) et (c')  
 est un infiniment petit du troisième ordre, quand l'abscisse commune est du  
 [jccmior. Or, soient M , M' deux points corresjiondants des deux courbes ;  
 joignons MM' qui est parallèle à Oa: » d'après la constructiou ; menons  
 parallèlement à MP ou à l'ordonnée M'P' de la courbe (c'), (jui rencontre en  
 m la courbe (c), et joignons M/«. Si l'on désigne par a et a' les angles  
 constants et finis que MP et M'P forment avec P-r, le triangle Ml'M' donne  
 d'abord AIM'  $\sin(a-g')$   $MP \sim \sin a'$  ' il en ré.sultc que M.M' est, comme MP,  
 un infiniment petit du second ordre. U? triangle M/«M' donne ensuite ' wM'  
 $\sin mMM'' \cdot MM' \sim \sin M/»M' .$  ■ Mais le rapport des sinus , qui forme le  
 second membre , fend vers zéro , (luand P tend vers le point 0 ; le rapport de  
 mil' à MM' est donc un infiniment petit; et MM' éUmt lui-même du  
 deuxième ordre, il en résulte que mil', c'est-à-dire la différence des  
 ordonnées correspondanU\*s des deux courbes (c) et (c'), est un infiniment  
 petit du troisième ordre, c. 0. F. d. 48. Appliquons le mode de  
 transformation auquel se rapporte le lemme I à un cercle (C) de rayon a, en  
 employant des, ordonnées perj)endiculaires à la tangente Ox; et A \* , ' soit -  
 le rainwrl constant dos ordonnées corres-. « • , pondantes de la courbe  
 dérivée (C') et du cercle (C). Le rapport ^,des rayons des cercles  
 osculateurs en 0 du cercle et de la courbe (C')\_ sera égal à d'ailleurs  $p = n$ ;  
 on aura donc P -J pour le rayon du cercle osculateur en 0 de la courbe ( G').  
 D'ailleurs la. courbe dérivée (C') est évidemment une ellipse dont le point O  
 est l'un des

<)6 . DES MÉTHODES EN GÉOMÉTRIE. Soient, le flori-axe aboutissant en O étant égal à  $t$ , et le demi-axe parallèle à la tangente en O étant égal à  $a$ . Donc l'axe du rayon  $t$  est osculateur à l'ellipse en l'un de ses sommets est égal au carré du demi-axe étranger au sommet, divisé par le demi-axe qui aboutit à ce sommet. 4!). Appliquons maintenant le mode de transformation auquel se rapporte le lemme à l'ellipse (C), ayant pour demi-axes  $CM = n$ ,  $CO = h$ ; les ordonnées MP de l'ellipse étant perpendiculaires à la tangente O.r en l'un de ses sommets, et les ordonnées PM' de la courbe dérivée (C'), ayant une direction quelconque. Les deux courbes ayant même cercle osculateur au point O, on aura, (é. pour le rayon du cercle osculateur en O de la courbe (C')). Or cette courbe est une ellipse dont le point I est l'extrémité d'un diamètre quelconque.  $a = CM = C'M'$  est le demi-diamètre de cette ellipse parallèle à la tangente en O, et  $A = OC = C'I$  est la distance du centre C' de cette ellipse à la tangente en O.

• Donc le rayon du cercle osculateur d'une ellipse en l'un quelconque de ses points est égal au carré du demi-diamètre parallèle à la tangente en ce point, divisé par la distance du centre à la tangente. § 111. y- iO.

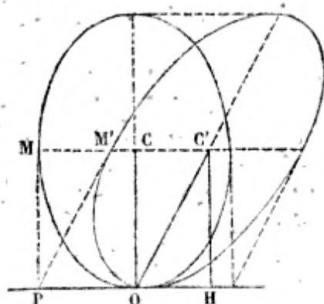
Comparaison des rayons des cercles osculateurs de deux lignes courbes sur le même arc et dont les ordonnées correspondantes sont dans un rapport constant. Théorème de Mac-Cullagh. .. Il résulte de la remarque faite au § I, n° 13, page 8g, que l'on peut regarder le cercle osculateur en un point d'une courbe comme la limite des cercles passant par ce point et par deux autres points de la courbe infiniment voisins du premier. . ■ .

Nous plaçant à ce point de vue, considérons deux courbes (r) et (c') qui, construites sur le même axe o.r, ont leurs ordonnées correspondantes dans un rapport constant : soient A, B, C trois points de la première et B', C' les points correspondants de la seconde, et désignons par  $a, h, c, a', h', r'$  les côtés des triangles ABC, A'B'C, et par  $r, r'$  les rayons des cercles circonscrits à ces triangles. Si, recourant à la méthode par les aires auxiliaires (!" Partie, page 14), nous désignons par S, S' les surf. des triangles ABC, A'B'C nous aurons . ■ ' • ' ■ , .  $V' * n.h. c. l'ety .e' .$

sommets, le demi-axe aboutissant en O étant égal à  $b$ , et le demi-axe parallèle à la tangente en O étant égal à  $a$ .

Donc le rayon du cercle osculateur d'une ellipse en l'un de ses sommets est égal au carré du demi-axe étranger au sommet, divisé par le demi-axe qui aboutit à ce sommet.

49. Appliquons maintenant le mode de transformation auquel se rapporte



le lemme II à l'ellipse (C), ayant pour demi-axes  $CM = a$ ,  $CO = b$ ; les ordonnées MP de l'ellipse étant perpendiculaires à la tangente  $Ox$  en l'un de ses sommets, et les ordonnées  $PM'$  de la courbe dérivée ( $C'$ ), ayant une direction quelconque. Les deux courbes ayant même cercle osculateur au point O, on aura

$$r' = \frac{a^2}{b}$$

pour le rayon du cercle osculateur en O de la courbe ( $C'$ ). Or cette courbe est une ellipse dont le point O est l'extrémité d'un diamètre quelconque;  $a = CM = C'M'$  est le demi-diamètre de cette ellipse parallèle à la tangente en O, et  $b = OC = C'H$  est la distance du centre  $C'$  de cette ellipse à la tangente en O.

Donc le rayon du cercle osculateur d'une ellipse en l'un quelconque de ses points est égal au carré du demi-diamètre parallèle à la tangente en ce point, divisé par la distance du centre à la tangente.

### § III.

50. Comparaison des rayons des cercles osculateurs de deux lignes construites sur le même axe et dont les ordonnées correspondantes sont dans un rapport constant. *Théorème de Mac-Cullagh.*

Il résulte de la remarque faite au § I, n° 43, page 89, que l'on peut regarder le cercle osculateur en un point d'une courbe comme la limite des cercles passant par ce point et par deux autres points de la courbe infiniment voisins du premier.

Nous plaçant à ce point de vue, considérons deux courbes ( $c$ ) et ( $c'$ ) qui, construites sur le même axe  $ox$ , ont leurs ordonnées correspondantes dans un rapport constant : soient A, B, C trois points de la première et A', B', C' les points correspondants de la seconde, et désignons par  $a, b, c, a', b', c'$  les côtés des triangles ABC, A'B'C', et par  $r, r'$  les rayons des cercles circonscrits à ces triangles. Si, recourant à la méthode par les aires auxiliaires (I<sup>re</sup> Partie, page 14), nous désignons par S, S' les surfaces des triangles ABC, A'B'C', nous aurons

$$r = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S}, \quad r' = \frac{a' \cdot b' \cdot c'}{4S'}$$

SrOKVOK PARTIE. 91 iDou n h c n' h\* r' Mai.« le rap))ort des  
 aire.s S' et S est égal au rapport des ordonnées correspondantes des deux  
 courbes r'et.v; on peut donc écrire a h <• )■' n' !>' c' t D'ailleurs les côtés a  
 et «' ayant même projection sur l'axe <'omun des deux courbes, on a n cos  
 ( n\ nx ) u' coat^/, <>x ) ' h r et l'on a des expressions analogues pour et p- Il  
 en résulte (pie, si les points B, C et B', C' tendent à se confondre  
 resf>ectivement avec A et A'j en même tem|is que /■ et r' tendent vers leurs  
 linütes respectives p et p', rayons des cercles osculateurs des deux courbes  
 en A et A', les trois rap. ports p,j p,i -, tendent vers une limite commune qui  
 est égale au rapport inverse des cosinus des angles que font, avec Taxe  
 commun oj; les tangentes aux deux courbes en A et en A'. On a donc , en  
 passant à la limite et désignant ces angles par a et a'. P \_ cos -X y p' ~ cos' \*  
 y ' ou (x) ' p.j. cos y. = p , cos a . Enfin , si l'on désigne par t et t' les portions  
 des tangentes aux deux courbes comprises entre les points de contact .A , A'  
 et l'axe commun ox, on aura cos y \_ t • . i cos y'~ t ' ■. et la formule  
 précédente (pourra être remplacée (par celle-ci : ' ' t-c I fil. Si l'on applique  
 la formule précédente à l'ellipse 'et au cercle décrit jjur le grand axe comme  
 diajnctre , on trouvera (jue /c rayait du cerrte oxKulalvur, en un Juif ni  
 i(UiUoniue de Fellijise , est l'-ÿid au euhe ilu de midiamètre jutrallèle à la.  
 tangente en ce point , divisé par le rectangle des demi-axes ; et cette  
 expression, qui équivaut à l'une de celles déjà données, aura été obtenue en  
 suivant une voie entièrement élémentaire. De plus,' ■ dans'lgcas, S|iécial où  
 nous nous plaçons, la relation (i)d'où les formules {.r) et (A;) ont  
 élédéduibps ; d'onnele théorème .suivant, dû à Mac-Cullipgh Dpgitiaêd by  
 Google

d'où

$$\frac{r}{r'} = \frac{a}{a'} \cdot \frac{b}{b'} \cdot \frac{c}{c'} \cdot \frac{S'}{S}.$$

Mais le rapport des aires  $S'$  et  $S$  est égal au rapport des ordonnées correspondantes des deux courbes  $y'$  et  $y$ ; on peut donc écrire

$$(1) \quad \frac{r}{r'} = \frac{a}{a'} \cdot \frac{b}{b'} \cdot \frac{c}{c'} \cdot \frac{y'}{y}.$$

D'ailleurs les côtés  $a$  et  $a'$  ayant même projection sur l'axe commun des deux courbes, on a

$$\frac{a}{a'} = \frac{\cos(a', ox)}{\cos(a, ox)},$$

et l'on a des expressions analogues pour  $\frac{b}{b'}$  et  $\frac{c}{c'}$ . Il en résulte que, si les points  $B, C$  et  $B', C'$  tendent à se confondre respectivement avec  $A$  et  $A'$ , en même temps que  $r$  et  $r'$  tendent vers leurs limites respectives  $\rho$  et  $\rho'$ , rayons des cercles osculateurs des deux courbes en  $A$  et  $A'$ , les trois rapports  $\frac{a}{a'}$ ,  $\frac{b}{b'}$ ,  $\frac{c}{c'}$  tendent vers une limite commune qui est égale au rapport inverse des cosinus des angles que font, avec l'axe commun  $ox$ , les tangentes aux deux courbes en  $A$  et en  $A'$ . On a donc, en passant à la limite et désignant ces angles par  $\alpha$  et  $\alpha'$ ,

$$\frac{\rho}{\rho'} = \frac{\cos^3 \alpha'}{\cos^3 \alpha} \cdot \frac{y'}{y},$$

ou

$$(x) \quad \rho \cdot y \cdot \cos^3 \alpha = \rho' \cdot y' \cdot \cos^3 \alpha'.$$

Enfin, si l'on désigne par  $t$  et  $t'$  les portions des tangentes aux deux courbes comprises entre les points de contact  $A, A'$  et l'axe commun  $ox$ , on aura

$$\frac{\cos \alpha}{\cos \alpha'} = \frac{t'}{t},$$

et la formule précédente pourra être remplacée par celle-ci :

$$(x') \quad \frac{\rho \cdot y}{t^3} = \frac{\rho' \cdot y'}{t'^3}.$$

51. Si l'on applique la formule précédente à l'ellipse et au cercle décrit sur le grand axe comme diamètre, on trouvera que le rayon du cercle osculateur, en un point quelconque de l'ellipse, est égal au cube du demi-diamètre parallèle à la tangente en ce point, divisé par le rectangle des demi-axes; et cette expression, qui équivaut à l'une de celles déjà données, aura été obtenue en suivant une voie entièrement élémentaire. De plus, dans le cas spécial où nous nous plaçons, la relation (1) d'où les formules (x) et (x') ont été déduites, donne le théorème suivant, dû à Mac-Cullagh

(8) ES MÉTHODES E\ fiÉOMETRIE. ' { }>oir lo3 Noui'flles Annules, 18.10, pagi; 29C) ; Un Irinn^le étntt inscrit iltins line ellipse , le, niron Au rrvte cirrtmsvrit nu frinngle est i'gnl nu prmluit Aes Aenii-Aiiimètres parallèles aux côtés Au triange, Aicisë par , le pruAuit Aes Aemi-nxes. ■ . î? IV' ri^.^Nowliin a doniu" lo nom de ipialité Ae la aturimrr d'une lii^ne en l'nn de s<'s points an rapport ^ 1 e'esl-à-dirc à lu liinîle du rapiHirt de l'accroissement du rayon dn cercle ostmlaleiir à raccroissement de l'arc, (piand on passe du point considéré sur la li^ne à un point inlinimwit voisin. Maclaurin, dans son Traité sur les Propriétés générales Aes courhes algé-, ■ é/vi/«c.ï.( théorème 111) et daivs son Traité Aes Fluxions, trouva rex(ir<«sion et la construction j;éométrique de ce rap|M>rt ; mais cette construction • pré^sentc l'inconvénient .de nécessiter l'emploi d'une courbe auxiliaire. Or le tJiéorème suivant nous fournira , en même temps (lue la solution d'un problème proïKisé |iai Cai-nol (Céométrie Ae j'osition, |)roblème "5, \ page .<77 une coiislmcion géomélrique très-simple du rapport .“iîî. TiiéoiîKME. — Que l'on désigne par ^ la ipialité Ae la courbure'<r une ligne en b tut Ae ses points , et (pic F on appelle a F angle formé par la. nornutle en ce point avec la droite ipii passe par le iiiilicu Ae la eorde luirallèle à la tangente en ce fmint et infini ment iioisine île celle-ci , on aura \_ ' . ■.( ) . I (/o tanga = - 4-. i As Démonstration. — lai nature ilc la question conduit à remplacer la ligne donné\*, qui est quelconque, par une ellipse ayant avec la proposé\*; un contact il\*i ln)isième ordre; il suffira donc d'établir la formule (i) pcHir l'ellipst! osculatrice. - ' ' Pour y parv\*‘iîir par la voie la plus rapide, regardons cette courbe c\*)rame la trajectoire d'un mobile soumis à l'action d'une force émanant du centre \*lc la courbe, et observons que la droite qui fait , avec la normale en a, l'angle a. est pr\*k'.isément le diamètre de l'ellipse \*|ui aboutit en ce point. Cette droite est donc dirigée snitant lo centre attirant, e.t l'on a, par conséquent , (h 'T At tanga = T. N désignant l\*'s \*'omposant\*'s tangentielle et normale de la hirce accéDigt zed by.Google



SECONDE PARTIE. — C) C) l'élatrico,  $v$  désignant la vitesse, du mobile en «, et  $o$  le rayon du cercle osculateur de l'ellipse au même point. . Si l'on observe (pie l"\* formule («) pourra s'écrire  $\text{tang}^* = a \cdot di' i'$  . lis Cela posé, si l'on désigne par  $n$  et  $b$  les demi-axes de l'ellipse, par  $r$  un paramètre constant et par  $p$  la distance du centre à la tangente en «, on sait que l'on a  $\frac{dv}{v} = \frac{dr}{r}$  où  $\frac{dr}{r} = \frac{dp}{p} - \frac{r}{p^2} dp$  . e ah 3 Et de là., en substituant dans («'), il vient la formule cherchée  $\text{O) tang}^* = \frac{a^2}{p^2} \left( \frac{r}{p} - 1 \right)$  'il. ds ('.onof.LViRE. — ün déduit facilement de cette formule la construction du cercle osculateur de la développée de l'ellipse en l'un (pielconque de ses points. 'ît, Problème. — Que. Pan mène parallèlement à la tangente en un point B d'une courbe une droite AC, dont la distance h la tangente soit un infiniment petit du 2<sup>e</sup> ordre, et que l'on joigne le milieu p de cette corde au point de contact par la droite Bp. On propose de déterminer la direction - limite de la tangente Ba, ou la limite de l'angle u. qu'elle forme avec la normale à B. ( Géométrie de position, probl. 76, page 477.) ' Solution.-^Ce problème se trouve implicitement résolu par la démonstration du théorème précédent; mais ce n'est là qu'une solution détournée et reposant d'ailleurs sur un nombre considérable de positions antérieures, ün pourrait, à la vérité, modifier la démonstration de manière à se servir seulement de l'expression du rayon de courbure de l'ellipse osculatrice, ainsi que l'a fait M. Abel (Journal de Mathématiques, 1841, p. 101); mais il y a encore dans cet emploi quelque chose d'infligent que l'on peut éviter (aux dépens de la brièveté, il est vrai) par l'emploi des considérations suivantes. ' Observons d'abord que, BA mesurant la distance de la tangente à la corde AC, dont p est le milieu, on a,  $\frac{BA}{p} = \frac{a^2}{p^2} \left( \frac{r}{p} - 1 \right)$  tang a. V'. BA' et comme B h est du second ordre que tang\* est, en général, un nombre  $\frac{1}{p^2}$ . 7'Digitized by Google

lératrice,  $v$  désignant la vitesse du mobile en  $a$ , et  $\rho$  le rayon du cercle osculateur de l'ellipse au même point.

Si l'on observe que  $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{v dv}{ds}$ , la formule (a) pourra s'écrire

$$(a') \quad \tan z = \frac{\rho \cdot dv}{v \cdot ds}.$$

Cela posé, si l'on désigne par  $a$  et  $b$  les demi-axes de l'ellipse, par  $\lambda$  un paramètre constant et par  $p$  la distance du centre à la tangente en  $a$ , on sait que l'on a

$$\rho = \frac{p^3}{ab}, \quad dv = \frac{\lambda dp}{p^2}, \quad v = \frac{\lambda}{p};$$

d'où

$$(b) \quad \frac{\rho dv}{v} = \frac{p^2 dp}{ab} = \frac{1}{3} d\rho.$$

Et de là, en substituant dans (a'), il vient la formule cherchée

$$(1) \quad \tan z = \frac{1}{3} \cdot \frac{d\rho}{ds}.$$

**COROLLAIRE.** — On déduit facilement de cette formule la construction du cercle osculateur de la développée de l'ellipse en l'un quelconque de ses points.

**54. PROBLÈME.** — Que l'on mène parallèlement à la tangente en un point B d'une courbe une corde AC, dont la distance à la tangente soit un infiniment petit du second ordre, et que l'on joigne le milieu  $\mu$  de cette corde au point de contact par la droite B $\mu$ . On propose de déterminer la direction-limite de la droite B $\mu$ , ou la limite de l'angle  $\alpha$  qu'elle forme avec la normale en B. (Géométrie de position, probl. 76, page 477.)

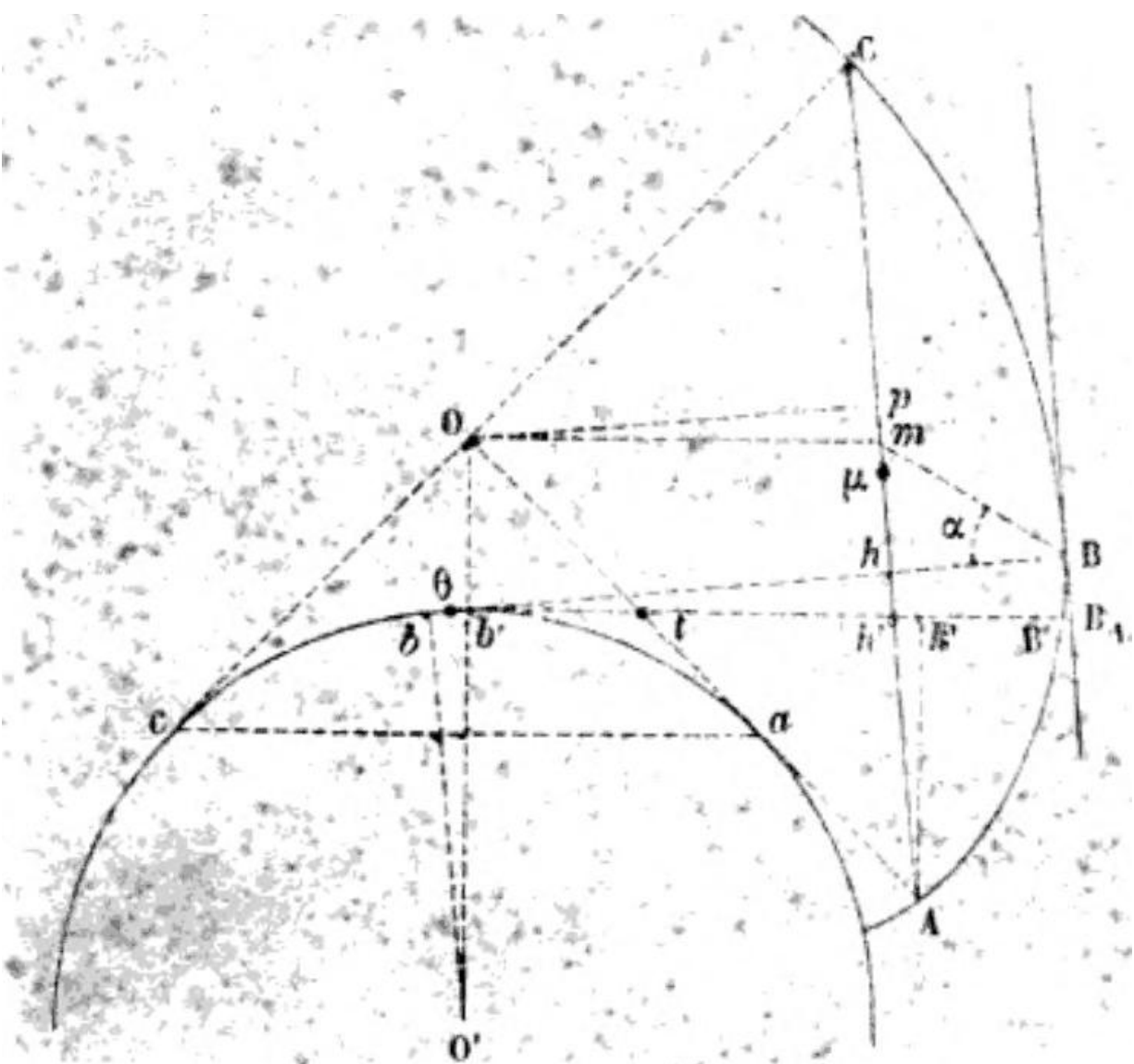
*Solution.* — Ce problème se trouve implicitement résolu par la démonstration du théorème précédent; mais ce n'est là qu'une solution détournée et reposant d'ailleurs sur un nombre considérable de propositions antérieures. On pourrait, à la vérité, modifier la démonstration de manière à se servir seulement de l'expression du rayon de courbure de l'ellipse osculatrice, ainsi que l'a fait M. Abel Transon (*Journal de Mathématiques*, 1841, p. 191); mais il y a encore dans cet emploi quelque chose d'indirect que l'on peut éviter (aux dépens de la brièveté, il est vrai) par l'emploi des considérations suivantes.

Observons d'abord que, B $h$  mesurant la distance de la tangente à la corde AC, dont  $\mu$  est le milieu, on a

$$\tan \alpha = \frac{\mu h}{Bh};$$

et comme B $h$  est du second ordre, que  $\tan \alpha$  est, en général, un nombre

K>0 ' DES METHODES EX GEOMETRIE. fini, on voit que p/i  
 est du même ordre, et qu' par suite, on doit fixer la position approchée /«  
 du milieu pt de la corde AC, de manière à ne commettre qu'une erreur d'i  
 troisième ordre, ce qui exige que l'on évalue la corde AC avec la même  
 approximation. Or, si deux courbes ont un contact de l'ordre «, la  
 différence des ordonnées, comptées à partir de la tangente commune,  
 est, tant, par définition, un infiniment petit de l'ordre « - P 1, on en déduit  
 aisément que la différence des cordes telles que AC, 'A'C' de ces courbes  
 est seulement de l'ordre «. Nous pourrions donc, pour l'objet actuel,  
 remplacer la ligne donnée par une autre ABC, ayant avec elle un contact du  
 troisième ordre en B; et si nous prenons pour cette ligne ABC xma  
 développée de rrrle, le rayon O' é = p' de ce cercle sera précisément le  
 rayon de courbure de la développée de la courbe primitive, au (K)int b où  
 cette développée est touchée par la normale en B. • Cela posé, soient n, é  
 , c les points de contact sur le cercle O' des normales en A, B, C; O  
 l'intersection de An prolongée avec Ce. Soient menées la droite O'O  
 coupant le cercle en /»'; et la normale A'B' coupant en t et //', les droites A«0  
 et AC. Menons enfin la bissectrice O /« de l'angle COA et la  
 [perpendiculaire à CA; imons 07; = O'b' — p' = i, jV a = P, arc nb' = arc  
 cb' = Ÿ, et désignons en général par e" un infini<sup>ment</sup> petit d'ordre n. I.  
 Je dis d'abord que le point III, extrémité de la bissectrice de l'angle AOC,  
 peut être pris pour le milieu p de la corde AC. On a, (à effet, AO ^ CO .  
 • A III — Cm = ( A/h -t- Cm (AO -CO) AÔ-t-CO' AC. AO 4- CO Or, AO  
 4- CO est une grandeur finie, AC est du premier ordre et AO — CO c.sU  
 du troisième ordre. Car V AO — CO = i (A17-4-/70) — (Cr,— Oc) = 2  
 (tang y -y (f) = ^ ou, en négligeant les infinnmt petits d'ordre supérieur au  
 troisième,, (.) . . . AÜ-CO=|v- . Digilized by GoOgle



SE«:ONI>R PAIiriE. toi Donc A /;< Cm =; ■j.mix est i!u  
 quatrième ordre, et l'on peut substituer le point /« au point u. •i. (»/> étant  
 perpendiculaire sur AC, évaluons />/// ou /j,u. On trouve A /J ~Cp AO CO  
 Ap~Cp = >.^p = imp = Or, on a déjà trouvé AO — C.O - - ÿ', et le triangle  
 AOC donne, en n(^'ligeant s',' d oji • V = 4 AO. CO. si n'?, AC = sin^ . a  
 p'AO.CO = a y'Ati.CO. î Il vient donc, on substituant ces valeurs dans  
 l'expression de imp , — V y 2 mp = Y siny -2 e AO -CO AO -i- CO a , ~  
 AO + CO Siny 2 y/ AO. CO et, comme le premier facteur est du second  
 ordre, on peut remplacer' chacun des deux autres facteurs par sa limite qui  
 est l'unité; il vient donc ■ . ■ . ■ t'-^ ) "'C = 3 Ÿ, 11 résulte d'ailleurs de cette  
 expression do que l'angle />t.D«, son égal (iQl)' et l'arc AZi' qui le mesure,  
 sont des infiniment iwlits du .second , ordre; donc, en appelant Ô le point  
 d'intersection des tangentes hh, h'h\ . on voit que les triangles ^ ///(' , Ojmi  
 sont semblables et que la diférence dos côtés finis de ces triangles est du  
 second ordre; donc la différence dos côtés infiniment petits h' h , mp est du  
 quatrième, et l'on peut écrire (a'). 3. On déduit aisément de là l'expression  
 de hm , qui nous sera nécessaire pour calculer tang a = Car ,hm = h' m —  
 hh' \ ou , a cause t.' des parallèles, hm gr Oô'— hh' -, d'ailleurs Oh' = sec y  
 — i = -j -t- s' il vient donc, en substituant . ' \_ (1) = .. Z'. Digitiaed by  
 Google

10a WES MÉTHODES EN OÉOMÉTRIE. 4. Pouï' calculer B// , on observera tl'iibonl que la différence entre B/i et B' A' est du quatrième ordre. Car h , i“. OA' — OA = OA'(i — cosO) = OA'.asiu' - i\*,. puisque 1 angle 0 = p(hn est du second ordre ; ■2“. 0 B' — 0 B (différence positive comme la différence analogue OA — OB) est moindre que 0 B, — 0 B , qui est du quatrième ordre pour la même raison. Donc la différence B' A' — B A étant du quatrième ordre, nous pourrons substituer B' A' à B A. En second lieu, si l'on abaisse AA' perpendiculaire sür B' A' A', on verra que A' A' = .\A'sin A'AA' = AA'sin 0 = s", et I on pourra écrire , par conséquent , ^3) BA = B' A' = B' A'. Enfin, on trouve successivement sur la ligure ' A'B' = A'B' — A'r — rA' = ( P + V 1 - tang ^ | ) ‘‘“® 'i' ' et l'on en déduit successivement ^ • A'B' = P (i — cos») + '1' — (1 -b Cüsy ) = p.'^ -t-C-l-iy— siiiî'), ■ ■ • ' A'B' = 'î-\p + r\ ■ ■ -■ Donc enfin . ' • ' ■ . (II) ' . BA = V'.p. ^ f ^ 5. Si l'on divise membre à\* membre les relations (1) et (II), il vient d'abord et si l'on observe iiue, le rayon O'A = p' du cercle osculateur de la développée ayant été pris pour unité de longueur, cette formule équivaut , en rétablissant l'indétermination de cette unité, à celle-ci , tanga 1 p' il vient définitivement . 1 p' ■ \* ' . . ■ tanga ==5. J-, au moyen de laquelle on passe aisément à, la formule (1) du numéro précédent. Obscrention. — Carnot avait pté l onduit accidentellement à se poser le

SKr.ONUK l'AltTII':. io3 proli“nu> que nous venoii!? de  
 n^yo\i(li'c , dans le but de parvenir à une définiliun {jénérale des courbes  
 planes , indéiiendante de (oui systènu' de coordonnées aHntrairex ; ci'^  
 coordonnées ne devant être considérées, • d'aljirès lui , que comme des  
 auxiliaires utiles , mais étrangers en réalité à la courbe considérée, et qu'il  
 serait ]>ar conséquent plus élégant de supprimer. On voit que cette  
 conception est diamétralement opposée à celle (le Descartes, et autant cotte  
 dernière parait lumineuse, autant elle est utile et féconde, à cause même de  
 l'indétermination qu'elle comporte; autant , il faut l'avouer, la conception  
 rie Carnot parait ol)scur et semble devoir demeurer stérile, précisément  
 parce qu'elle veut atteindre l'al'solir. Quoi qu'il en soit d'ailleurs de la  
 valeur de cette conception, Carnot fait remarquer qu'une courbe plane  
 quelconque peut être délinie par la relation / (p, . a) =r O qui existe entre le  
 rayon de courbure de cette ligne, .. en l'un (le scs points, et l'angle  
 corrcs[)ondanl x , dont nous venons do délerininer la tangente, o et a  
 formant évidemment un système de coordonnées-rt/Mo/uc.s satisfaisant aux  
 conditions qu'il s'élail iuqiosées. Or, c'était afin de pouvoir n'venir de  
 l'é<piatiou /(p j a) = o à l'é(piatiou ' en coorrioniues rectilignes ordinaires ,  
 qu'il s'élail proposé de trouver l'expression de bing a. CHAPITRE IV. Be<  
 nuaima et minima absolut. § F- -4 De l\ ghandeik maximum ou .vummu.m  
 paiimi DES GIUXÜECnS ÜETEBMINÉBS. ■ 51>. Kepler ^larait avoir  
 observé le premier la propriété remaniuable dont jouit une grandeur  
 variable dans le voisinage de son état de maximum ou de minimum. L'un do  
 ses ouvrages, Nrmt sterrotrnetrui rlolinnii/i rùiin- • rhnuti..., i6i5, renferme,  
 en effet, outre les premiers germes de la géométrie infinitésimale bientôt  
 développés par Cavallori {Gromriria imlmsUiilibus..., iü35), cette  
 impartante observation ipie flans la voi.\i~ ■ naga (le Sfi i>his grande sm  
 pliLs petite valeur, une graiueur ne varie ipw ' ^ par degrés insensibles; et  
 l'on voit (lue celte observation n'esf guère sé- ■ parée du principe qui sert  
 de base à la théorie aualylii|ue actuelle dos \_ ' maxima e( minima que par  
 l'intervalle d'une définition. • Un poupins tard, vers i03G, Fermât, précisant  
 ce premier aperçu, prit l)Our base de sa méthode des maxima et minima ce  
 principe que , si Fon pieml une gr/aidèir variable dans son état de max  
 imum ou de minimuni et dans un second état inji aiment volsi/i du premier,  
 les valeurs correspondantes de ecUe grandeur sont égales. Cxi principe,  
 dont nous modifierons un peu l'énoncé afin de demeurer exact dans la

Digitized by Google



problème que nous venons de résoudre, dans le but de parvenir à une définition générale des courbes planes, indépendante de tout système de coordonnées *arbitraires*; ces coordonnées ne devant être considérées, d'après lui, que comme des auxiliaires utiles, mais étrangers en réalité à la courbe considérée, et qu'il serait par conséquent plus élégant de supprimer. On voit que cette conception est diamétralement opposée à celle de Descartes, et autant cette dernière paraît lumineuse, autant elle est utile et féconde, à cause même de l'indétermination qu'elle comporte; autant, il faut l'avouer, la conception de Carnot paraît obscure et semble devoir demeurer stérile, précisément parce qu'elle veut atteindre l'absolu. Quoi qu'il en soit d'ailleurs de la valeur de cette conception, Carnot fait remarquer qu'une courbe plane quelconque peut être définie par la relation  $f(\rho, \alpha) = 0$  qui existe entre le rayon de courbure de cette ligne, en l'un de ses points, et l'angle correspondant  $\alpha$ , dont nous venons de déterminer la tangente,  $\rho$  et  $\alpha$  formant évidemment un système de coordonnées *absolues* satisfaisant aux conditions qu'il s'était imposées. Or, c'était afin de pouvoir revenir de l'équation  $f(\rho, \alpha) = 0$  à l'équation en coordonnées rectilignes ordinaires, qu'il s'était proposé de trouver l'expression de  $\tan \alpha$ .

## CHAPITRE IV.

### Des maxima et minima absolus.

#### § I<sup>er</sup>. — DE LA GRANDEUR MAXIMUM OU MINIMUM PARMİ DES GRANDEURS DÉTERMINÉES.

55. Kepler paraît avoir observé le premier la propriété remarquable dont jouit une grandeur variable dans le voisinage de son état de maximum ou de minimum. L'un de ses ouvrages, *Novâ stereometria doliorum vinariorum...*, 1615, renferme, en effet, outre les premiers germes de la géométrie infinitésimale bientôt développés par Cavalleri (*Geometria indivisibilibus...*, 1635), cette importante observation que *dans le voisinage de sa plus grande ou plus petite valeur, une grandeur ne varie que par degrés insensibles*; et l'on voit que cette observation n'est guère séparée du principe qui sert de base à la théorie analytique actuelle des maxima et minima que par l'intervalle d'une définition.

Un peu plus tard, vers 1636, Fermat, précisant ce premier aperçu, prit pour base de sa méthode des maxima et minima ce principe que, *si l'on prend une grandeur variable dans son état de maximum ou de minimum et dans un second état infiniment voisin du premier, les valeurs correspondantes de cette grandeur sont égales*.

Ce principe, dont nous modifierons un peu l'énoncé afin de demeurer exact dans la forme comme dans le fond, sert de base à la méthode géométrique des maxima et minima : méthode qui a son importance propre à côté de la théorie analytique correspondante, et qui supplée très-heureusement

104 L'ÉLÉMENTS MÉTHODES E. «KOMÉTRIE. ■ • ^ à celle-ci dans un grand nombre de questions où elle paraît être en défaut. ■ Principe fondamental. — Soient  $a, b$ , deux valeurs infiniment voisines (Prenant l'arbitraire  $k$ , entre lesquelles se trouve la valeur maximum ou minimum a de cette grandeur. Les valeurs extrêmes  $a, b$  peuvent être considérées comme rigoureusement égales entre elles. Démonstration. — Supposons, pour fixer les idées, (que  $a$  soit la valeur maximum de  $A$ , et que  $b$ , soit une valeur infiniment voisine de  $a$ , inférieure à  $a$ , puis que celle-ci est maximum, et précédant  $a$  dans l'ordre de formation des valeurs successives de la grandeur  $A$ . Celle-ci, continuant à varier au delà de la valeur  $a$ , ira nécessairement en décroissant pendant ; un certain temps, depuis la valeur maximum « jusqu'à une valeur critique,  $a, b$  étant un nombre fini ; et comme nous supposons essentiellement que la grandeur  $A$  varie d'une manière continue entre « et- » —  $a$ , elle passera nécessairement par une valeur  $c$ , précisément égale à  $b$ , et qui sera, comme celle-ci, infiniment voisine de la valeur maximum  $a$ . CoRoLLAIRE. — La méthode à suivre dans la recherche du maximum ou minimum d'une grandeur variable, résulte immédiatement du principe, précédent : Prenant la grandeur considérée dans deux états successifs, c'est-à-dire infiniment voisins, on cherchera laquelle a la même valeur dans ces deux états ; l'égalité résultante, convenablement interprétée et prise à l'infini où les deux états successifs se confondent, fournit une propriété qui caractérise la grandeur par laquelle elle atteint son maximum ou minimum. ■ 7 ■ p. 106. PROBLÈME 1. — Par un point donné, mener une droite telle, que le segment déterminé sur cette limite, par les côtés d'un angle donné, soit minimum. [Opuscules de Newton, tome I, page 87, propositions 2 et 3.] Solution. — Soient  $ah, a'b'$ , deux droites passant par le point donné, infiniment voisines de la droite à laquelle correspond le segment minimum, et telles, que les segments  $ah, a'b'$  soient égaux, les segments  $ah, a'h'$  étant égaux, et les droites  $ah, a'b'$  étant, infiniment voisines l'une de l'autre, leur point d'intersection est infiniment voisin du point suivant lequel la droite  $ah$  toucherait son enveloppe, si elle se mouvait, sous cette condition que le segment de cette droite, intercepté dans l'angle donné, conservât une longueur constante. Donc (d'après la construction de la page (il), pour la droite  $ah$  infiniment voisine de la droite cherchée, le point donné est infiniment voisin du pied

de la perpendiculaire abaissée  $h$  sur cette droite du point de concours des perpendiculaires, aux côtés de  $\angle A$ ; l'angle donné, menées par les points  $a$  et  $b$ . On conclut que la droite minimum, menée par un point donné dans un angle donné, est définie : par cette condition, que la perpendiculaire  $h$  cette droite, menée par le point donné, et les perpendiculaires aux côtés de l'angle menées jusqu'aux extrémités de cette droite concourent en un même point.

Digitized by Google

à celle-ci dans un grand nombre de questions où elle paraît être en défaut.

**PRINCIPE FONDAMENTAL.** — Soient  $a_0, a_1$ , deux valeurs infiniment voisines d'une grandeur variable  $A$ , entre lesquelles se trouve comprise la valeur maximum ou minimum  $a$  de cette grandeur. Les valeurs extrêmes  $a_0, a_1$  peuvent être considérées comme rigoureusement égales entre elles.

**Démonstration.** — Supposons, pour fixer les idées, que  $a$  soit la valeur maximum de  $A$ , et que  $a_0$  soit une valeur infiniment voisine de  $a$ , inférieure à  $a$ , puisque celle-ci est maximum, et précédant  $a$  dans l'ordre de formation des valeurs successives de la grandeur  $A$ . Celle-ci, continuant à varier au delà de la valeur  $a$ , ira nécessairement en décroissant pendant un certain temps, depuis la valeur maximum  $a$  jusqu'à une valeur  $a - \alpha$ ,  $\alpha$  étant un nombre fini; et comme nous supposons essentiellement que la grandeur  $A$  varie d'une manière continue entre  $a$  et  $a - \alpha$ , elle passera nécessairement par une valeur  $a_1$ , précisément égale à  $a_0$ , et qui sera, comme celle-ci, infiniment voisine de la valeur maximum  $a$ .

**COROLLAIRE.** — La méthode à suivre dans la recherche du maximum ou minimum d'une grandeur variable, résulte immédiatement du principe précédent : Prenant la grandeur considérée dans deux états successifs, c'est-à-dire infiniment voisins, on exprimera qu'elle a la même valeur dans ces deux états; l'égalité résultante, convenablement interprétée et prise à l'instant-limite où les deux états successifs se confondent, fournit une propriété qui caractérise la grandeur variable à l'instant où elle atteint sa valeur maximum ou minimum.

#### APPLICATIONS.

56. **PROBLÈME I.** — Par un point donné, mener une droite telle, que le segment déterminé sur cette droite, par les côtés d'un angle donné, soit minimum. (*Opusculs de Newton*, tome I, page 87, questions 2 et 3.)

**Solution.** — Soient  $aib, a'ib'$ , deux droites passant par le point donné  $i$ , infiniment voisines de la droite à laquelle correspond le segment minimum, et telles, que les segments  $ab, a'b'$  soient égaux. Les segments  $ab, a'b'$  étant égaux, et les droites  $aib, a'ib'$  étant infiniment voisines l'une de l'autre, leur point d'intersection  $i$  est infiniment voisin du point suivant lequel la droite  $ab$  toucherait son enveloppe, si elle se mouvait, sous cette condition que le segment de cette droite, intercepté dans l'angle donné, conservât une longueur constante. Donc (d'après la construction de la page 61), pour la droite  $aib$  infiniment voisine de la droite cherchée, le point donné  $i$  est infiniment voisin du pied de la perpendiculaire abaissée sur cette droite du point de concours des perpendiculaires aux côtés de l'angle donné, menées par les points  $a$  et  $b$ . On en conclut que la droite minimum, menée par un point donné dans un angle donné, est définie par cette condition, que la perpendiculaire à cette droite menée par le point donné, et les perpendiculaires aux côtés de l'angle menées par les extrémités de la droite concourent en un même point.

■ ' SUI:ONI>l<: l'ARTIK. io5 Scolic. — Ou arriverait à une  
 üélinilion toute semblaile de la droite à se.Sment minimum, en remplaçant  
 les côtés de l'angle par deux courbes quelconques, et en substituant aux  
 droites issues d'un point fixe du problème précédent des droites tangentes à  
 une courbe lixe. Problkme h. — Mener tangenlieUrmrnt a une. courbe  
 donnée une ilroile qui intercepte dans un angle donné , circonscrit à lu  
 même courbe , un triangle de surface maimum ou minimum. .Solution. —  
 Soit / le point d'intersection de deux tangentes infiniment voisines et  
 interceptant dans l'angle ynjc des triangles uob , a'ob' équivalents. Les  
 triangles infiniment petits aia\ bib' étant eux-mêmes équivalents et le point i  
 étant inlinimont voisin du point de contact t de la tangente . «/>, on voit que  
 pour une tangente, <-<6, infiniment voisine de la tangente 'cherchée le point  
 de contact\* est intiniment voisin du milieu du segment ab. Ijqpc l<i  
 tangente, cherchée est définie, par cette condition, que son point de contact  
 coïncide avec le milieu du. segment déterminé par cette tangente dans C  
 angle donné. . Remarque. — Il y a maximum.'ou minimum, suivant que  
 l'on considère la portion de. la courbe tournant sa convexité ou sa concavité  
 vers le sommet de l'angle. . . Corollaire. — Parmi tous les /mlrgones (Pan  
 même^ nombre de côtés , ■ circonscrits à une courbe fermée, le polygone,  
 dont la surface est minimum, est défila par cette condition, que le point de  
 contact <le' elmque côté coïncide m>ec le point-milieu de ce côté.  
 PROBLEME 111. — Dans un segment donné tPune courbe quelconque ,  
 'inscrire un rectangle cPaire ma.cimiim. {Opuscles de Neivton, tome 1,  
 page 87, question i.) - ' ' Solution. — Soient rdi, a' b' les côtés, parallèles à  
 la base ,ry du seg, ment, do deux rectangles infiniment voisins, comprenant  
 entre eux le rectangle maximum et équivalents. Menons les droites  
 indéfinies aa', bb' qu\ \* foi-ment avec ap' un triangle mnp, et substituons '  
 aux rectangles ayant pour Côtés ah, a' b' les parallélogrammes épiivalents  
 «ôcH, n'b'e'n. Soit X l'intersection de ab et . de b'ç. La comparaison des  
 parallélogrammes aben, n'b'e'n, équivalents et ayant une iiartie commune ,  
 montre ,que les parallélogrammes a'b'ka et bed h sont équivalents, on a  
 donc l égalité (>) a'b' . b'h bk . bc , ou b'k bc bk a' b' K'aillcui's, les triangles  
 semblables 6'X/>, ma' b' donnent cette relation b'k a' m ~bk~ TéTr''' ' ■ :  
 (2). Digilized b/ Coogle

*Scolie.* — On arriverait à une définition toute semblable de la droite à segment minimum, en remplaçant les côtés de l'angle par deux courbes quelconques, et en substituant aux droites issues d'un point fixe du problème précédent des droites tangentes à une courbe fixe.

PROBLÈME II. — *Mener tangentiellement à une courbe donnée une droite qui intercepte dans un angle donné, circonscrit à la même courbe, un triangle de surface maximum ou minimum.*

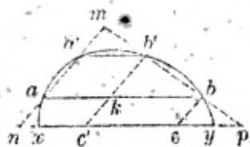
*Solution.* — Soit  $i$  le point d'intersection de deux tangentes infiniment voisines et interceptant dans l'angle  $yo\alpha$  des triangles  $aob$ ,  $a'ob'$  équivalents. Les triangles infiniment petits  $aia'$ ,  $bib'$  étant eux-mêmes équivalents et le point  $i$  étant infiniment voisin du point de contact  $t$  de la tangente  $ab$ , on voit que pour une tangente,  $ab$ , infiniment voisine de la tangente cherchée  $AB$ , le point de contact  $t$  est infiniment voisin du milieu du segment  $ab$ . Donc la tangente cherchée est définie par cette condition, que son point de contact coïncide avec le milieu du segment déterminé par cette tangente dans l'angle donné.

*Remarque.* — Il y a maximum ou minimum, suivant que l'on considère la portion de la courbe tournant sa convexité ou sa concavité vers le sommet de l'angle.

**COROLLAIRE.** — Parmi tous les polygones d'un même nombre de côtés, circonscrits à une courbe fermée, le polygone, dont la surface est minimum, est défini par cette condition, que le point de contact de chaque côté coïncide avec le point-milieu de ce côté.

PROBLEME III. — Dans un segment donné d'une courbe quelconque, inscrire un rectangle d'aire maximum. (Opusculs de Newton, tome I, page 87, question 1.)

*Solution.* — Soient  $ab$ ,  $a'b'$  les côtés, parallèles à la base  $xy$  du segment, de deux rectangles infiniment voisins, com-




 prenant entre eux le rectangle maximum et équivalents. Menons les droites indéfinies  $aa'$ ,  $bb'$  qui forment avec  $xy$  un triangle  $mnp$ , et substituons aux rectangles ayant pour côtés  $ab$ ,  $a'b'$  les parallélogrammes équivalents  $abcn$ ,  $a'b'c'n$ . Soit  $k$  l'intersection de  $ab$  et de  $b'c'$ . La comparaison des parallélogrammes  $abcn$ ,  $a'b'c'n$ , équivalents et ayant une partie commune, montre que les parallélogrammes  $a'b'ka$  et  $bcc'k$  sont équivalents, on a donc l'égalité

$$(I) \quad a'b', b'k = bk, bc, \quad \text{ou} \quad \frac{b'k}{bk} = \frac{bc}{a'b'}.$$

D'ailleurs, les triangles semblables  $b'kb$ ,  $ma'b'$  donnent cette relation

$$(2) \quad \frac{b'k}{bk} = \frac{a'm}{a'b'}$$

106 DES MÉTHODES EN GÉOMÉTRIE. C'est la comparaison des relations (i) et (a) donne  $\sin \alpha = \frac{a}{m}$ , (3)  $\sin z = \frac{a}{n}$ . Si donc, passant à la limite, on suppose que  $\alpha$  et  $\alpha'$  se confondent avec le côté  $CA$  du rectangle maximum, on verra (pour le rectangle maximum, inscrit dans un segment de courbe, est  $CH$  dont le côté est également éloigné de la base du segment et du point de contact des tangentes menées à la courbe par les extrémités de ce côté. Problème IV. — Trouver, pour un lieu donné, le jour du plus petit crépuscule. Ce problème a eu une certaine célébrité, et par les discussions qu'il présente et par les noms des géomètres qui s'en sont occupés; il a été résolu pour la première fois par Nonius, géomètre portugais [De Crepusculis, Coimbra, 1073]. Plus tard, Jean Bernoulli reprit la même question, et voici ce qu'on lit à ce sujet dans ses œuvres {Opéra omnia, tome 1, page 444} : j'ai résolu le problème de trouver géométriquement le jour du plus petit crépuscule, ce qui a occupé mon frère, professeur de mathématiques à Bâle, et moi depuis plus de cinq ans, sans en pouvoir venir à bout. Ce problème est d'autant plus curieux que je demeure, par ma méthode de maxima et minima (qui est maintenant une des plus courtes), dans une simplicité et embarrassé, qui se laisse enfin réduire en une petite équation carrée qui se transforme en cette simple équation géométrique  $\tan H \sin D = \sin \theta$  (Janvier 1733.) Dans la Correspondance de l'École Polytechnique (tome I, page 158), Hachette ajoute aux détails précédents que Monge résolut, la même question en menant un plan tangent commun à deux cônes ayant même sommet : il ne paraît pas d'ailleurs que Monge ait publié sa solution, la construction à laquelle il est parvenu ayant été seule reproduite par Hachette qui se borne à démontrer qu'elle conduit à la formule de Bernoulli. Nous reproduirons, avec quelques modifications, la solution du marquis de l'Hôpital (cinqième des infinitésimales, section III, exemple 13),\* fondée précisément sur le principe de Fermat qui conduit par la voie la plus courte à la formule cherchée. Prenons pour plan de la figure le plan méridien du lieu  $PHH'$ . Soient  $PP'$  l'axe du monde,  $HH'$  la méridienne;  $HAH'$  le grand cercle de l'horizon du lieu et  $O$  son centre;  $AaBb'$  le petit (cercle de la sphère céleste, parallèle à l'horizon et auquel se terminent les arcs crépusculaires. • Soient  $DABD'$ ,  $ff'$  deux parallèles infiniment voisins décrits par

et la comparaison des relations (1) et (2) donne l'égalité

$$bc = a'm,$$

ou

$$(3) \quad an = a'm.$$

Si donc, passant à la limite, on suppose que  $ab$  et  $a'b'$  se confondent avec le côté  $\alpha\beta$  du rectangle maximum, on verra que le rectangle maximum, inscrit dans un segment de courbe, est celui dont le côté est également éloigné de la base du segment et du point de concours des tangentes menées à la courbe par les extrémités de ce côté.

**PROBLÈME IV.** — Trouver, pour un lieu donné, le jour du plus petit crépuscule.

Ce problème a eu une certaine célébrité, et par les difficultés qu'il présente et par les noms des géomètres qui s'en sont occupés : il a été résolu pour la première fois par Nonius, géomètre portugais (*De Crepusculis*, Coïmbre, 1573). Plus tard, Jean Bernoulli reprit la même question, et voici ce qu'on lit à ce sujet dans ses œuvres (*Opera omnia*, tome I, page 64) : *J'ai résolu le problème de trouver géométriquement le jour du plus petit crépuscule, ce qui a occupé mon frère, professeur de mathématiques à Bâle, et moi depuis plus de cinq ans, sans en pouvoir venir à bout. Ce problème est d'autant plus curieux que je demeure, par ma méthode de maximis et minimis (qui est pourtant une des plus courtes), dans un calcul prolix et embarrassé, qui se laisse enfin réduire en une petite équation carrée qui se transforme en cette simple proportion géométrique*

$$\frac{1}{\tan \frac{H}{2}} = \frac{\sin \lambda}{\sin D}. \quad (\text{Janvier 1693.})$$

Dans la *Correspondance sur l'École Polytechnique* (tome I, page 159), Hachette ajoute aux détails précédents que Monge résolut la même question en menant un plan tangent commun à deux cônes ayant même sommet : il ne paraît pas d'ailleurs que Monge ait publié sa solution, la construction à laquelle il est parvenu ayant été seule reproduite par Hachette qui se borne à démontrer qu'elle conduit à la formule de Bernoulli.

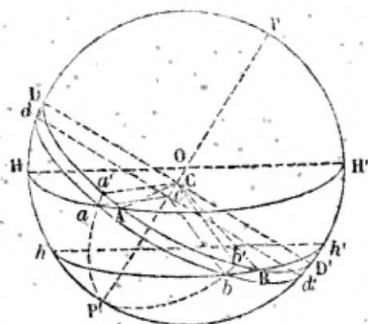
Nous reproduirons, avec quelques modifications, la solution du marquis de l'Hôpital (*Analyse des infiniment petits*, section III, exemple 13), fondée précisément sur le principe de Fermat qui conduit par la voie la plus courte à la formule cherchée.

Prenons pour plan de la figure le plan méridien du lieu PHP'H'. Soient PP' l'axe du monde, HH' la méridienne; HaAH' le grand cercle de l'horizon du lieu et O son centre; hbBh' le petit cercle de la sphère céleste, parallèle à l'horizon et auquel se terminent les arcs crépusculaires.

Soient DABD', dabd' deux parallèles infiniment voisins décrits par le



SECOXBE PARTIE. - IO7 soleil; AU et ah les arcs crépusculaires correspomlants , compris entre ^ les cercles HABH', hahh'\ C et c les contres de ces parallèles; joignons CA, CD, en, ch. Si nous supposons que ces parallèles comprennent entre eux le parallèle décrit par le soleil au jour du plus petit crépuscule, los arcs AB et «i, évalués en degrés, seront égaux, et l'on aura -ACB - ach. Uc là, en projetant l'angle ach en n'Cfe', sur le plan parallèle DABD', par les arcs de grand cercle P'nn', V'hh', et joignant Cn', C 6', on aura ach = n'C^', et par suite, ACB = a'Ch'. D'où, par la soustraction d'une partie commune, ACrt' = éc^, et par suite, (A) On a aussi (B) arcAn' = arc B à'. aren' = arc/.ii'. puis(|ue ces arcs mesurent l'un et l'autre la distance sphérique des'deux cercles parallèles h.\D\ ilad'. Il résulte des égalités (A) et (B) que les triangles recti/igaes inliniment petits nn'A, hh'ti, équiangles en a' et b', sont rigoureusement égaux; et que par suite, sur la sphère, les angles aKa', hBb' sont infiniment peu différents l'un et l'autre. On voit donc, en passant à la limite et supposant que les parallèles DD', tld' se confondent, ([uo le jmrallèic décrit [tarie .soleil an jour du plu, s petit crépuscule, coupe sous des angle.S égaux le grand eerch' de Plwriznn HAIi', et le parallèle h üh' natpiel se terminent les arcs crépusculaires. Cela posé , soit DABD' le parallèle cherché coupant sous des angles égaux le grand cercle HAIi' et son parallèle A B/C; soit OV la verticale du lieu considéré, déterminant sur la sphère ■|o point V, pôle commun de IIAH' et de 4 B A; menons les arcs de grand cercle PA, VA; PB, VB ; et posons ()H=:i; Å = latitude du lieu = i'" — PV; 114 = II'; D = la déclinaison cherchée du soleil = — Digitized by Google



soleil; AB et  $ab$  les arcs crépusculaires correspondants, compris entre les cercles  $HABH'$ ,  $habh'$ ; C et  $c$  les centres de ces parallèles; joignons CA, CB,  $ca$ ,  $cb$ .

Si nous supposons que ces parallèles comprennent entre eux le parallèle décrit par le soleil au jour du plus petit crépuscule, les arcs AB et  $ab$ , évalués en degrés, seront égaux, et l'on aura

$$\widehat{ACB} = \widehat{acb}.$$

De là, en projetant l'angle  $acb$  en  $a'Cb'$ , sur le plan parallèle DABD', par les arcs de grand cercle  $P'aa'$ ,  $P'bb'$ , et joignant  $Ca'$ ,  $Cb'$ , on aura

$$\widehat{acb} = \widehat{a'Cb'}, \text{ et par suite, } \widehat{ACB} = \widehat{a'Cb'}.$$

D'où, par la soustraction d'une partie commune,

$$\widehat{ACa'} = \widehat{BCb'},$$

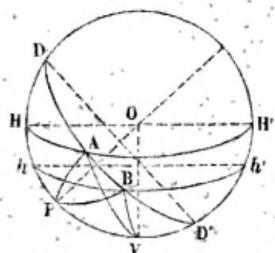
et par suite,

$$(A) \quad \text{arc } Aa' = \text{arc } Bb'.$$

On a aussi

$$(B) \quad \text{arc } aa' = \text{arc } bb',$$

puisque ces arcs mesurent l'un et l'autre la distance sphérique des deux cercles parallèles DAD',  $dad'$ . Il résulte des égalités (A) et (B) que les triangles rectilignes infiniment petits  $aa'A$ ,  $bb'B$ , équiangles en  $a'$  et  $b'$ , sont rigoureusement égaux; et que par suite, sur la sphère, les angles  $aAa'$ ,  $bBb'$  sont infiniment peu différents l'un et l'autre. On voit donc, en passant à la limite et supposant que les parallèles DD',  $dd'$  se confondent, que le parallèle décrit par le soleil au jour du plus petit crépuscule, coupe sous des angles égaux le grand cercle de l'horizon  $HABH'$ , et le parallèle  $hBH'$  auquel se terminent les arcs crépusculaires.



Cela posé, soit DABD' le parallèle cherché coupant sous des angles égaux le grand cercle  $HABH'$  et son parallèle  $hBH'$ ; soit OV la verticale du lieu considéré, déterminant sur la sphère le point V, pôle commun de  $HABH'$  et de  $hBH'$ ; menons les arcs de grand cercle PA, VA; PB, VB; et posons

$$OH = 1; \quad \lambda = \text{latitude du lieu} = 1^{\text{re}} - \widehat{PV}; \quad \widehat{Hh} = H;$$

$$\mu = \text{la déclinaison cherchée du soleil} = 1^{\text{re}} - \widehat{PA}$$

**The text on this page is estimated to be only 29.99% accurate**

io8 DES HÉTIIOOES ES Cil<sup>^</sup>UMÉTKIE. angles en A et B des triangles sphériques l'AV, IW sont égaux, comme égaux respectivement aux angles 11 AD, /;BD; on a donc  $\cos l'AV = \cos l'BV$ , ' ' ■ ' d'où, en remplaçant les cosinus par leurs valeurs et simplifiant. . . siuA  $\frac{\sin}{\sin D} \sin 11 I I$  ou enfin,  $\cos H \sin D = \sin \hat{A} \tan II$  O. Q. F. T. PiiOBi. ÛMB V; -- Trom'rr ht (UfinitUm gricrnlf des /oltgotws li /lérít/ièlre tiifuimiiii inscrls thins une courbe donnée. SoUainn. — Soit nhe. . ./ un polygone à périmètre maximum inscrit dans la courbe donnée. Regunhint tiulf les sommets du jtohgom! comme fixes, sauf le sommet h, il est clair (pie le chemin ub-\-ch doit être un maximum parmi tous ceux ipii lelienl aux points n et e mi jioint quelcompiede l'arc iibr. Or, soient «Bc, «B'c deux chemins égaux infmiment voisins et comprenant entre eux le clienin maximum «/«■; l'égalité «B -l-cB =y/B'+cB' peut s'écrire ' ■ ' (i) ' rtB' — «B = cD — cB'. \* ' " Or, en joignant BB', on trouve facilement les expressions oB' — oB = BB'cos/iB'B + e% cB^cB'. = BB'coscBB' + e'', . . t' et e'' désignant des infiniment jietils du second ordre. De ces expressions et de l'égalité fondamentale (i), il résulte que la dilférence entre BB'cosoB'B et BB'coscBB' est du second ordre, et par suite . . . que les angles «B'B et cBB' sont infiniment peu différents l'un do l'autre. De là, en passant à la limite et supposant que les chemins «Bc, «B'c se confontJant avec le chemin maximum nhe, on déduit cette conclusion ' (jue deiÉc côtés eonséiitifs t/itelcon/iucs d'un jtolygnne n périmètre maximum inscrit dans une courbe donnée, sont également inclinés surlutan■gentc à ta courbe circonscrite, menée par Pe.rtrémité commune à ces côtés. PnEMiÈnE APPLICATION. — Si la rourbe donnée e.st un cercle, on verra que les côtés consécutifs ah, eb étant également inclinés sur la tangente en h, le iminl b ast le milieu do l'arc ac, et ipie par suite deux côtés consécutifs quelconques ab et bc sont égaux. Donc./>«rw( les polygones /Fun meme nombre de côtés inscrits dans un cercle, le polygone régulier n un IM'rimèttT maximum. ■ Seconue application. — Si la courbe donnée est une ellipse (E) àyani f, f pour foyers, on verra, en appliquant la même condition, que deux côtés consécutifs ab et bc, du polygone à périmètre maximum, élanl égaigitized by GcJogle

Les angles en A et B des triangles sphériques PAV, PBV sont égaux, comme égaux respectivement aux angles HAD, hBD; on a donc

$$\cos PAV = \cos PBV,$$

d'où, en remplaçant les cosinus par leurs valeurs et simplifiant,

$$\frac{\sin \lambda}{1} = \frac{\sin \lambda - \sin D \sin H}{\cos H},$$

ou enfin,

$$\sin D = \sin \lambda \tan \frac{H}{2}.$$

C. Q. F. T.

**PROBLÈME V.** — *Trouver la définition générale des polygones à périmètre maximum inscrits dans une courbe donnée.*

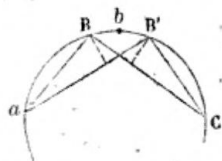
*Solution.* — Soit  $abc \dots kl$  un polygone à périmètre maximum inscrit dans la courbe donnée. Regardant tous les sommets du polygone comme fixes, sauf le sommet  $b$ , il est clair que le chemin  $ab + cb$  doit être un maximum parmi tous ceux qui relient aux points  $a$  et  $c$  un point quelconque de l'arc  $abc$ . Or, soient  $aBc$ ,  $aB'c$  deux chemins égaux infiniment voisins et comprenant entre eux le chemin maximum  $abc$  : l'égalité  $aB + cB = aB' + cB'$  peut s'écrire

$$(1) \quad aB' - aB = cB - cB'.$$

Or, en joignant  $BB'$ , on trouve facilement les expressions

$$aB' - aB = BB' \cos aB'B + \varepsilon^2, \quad cB - cB' = BB' \cos cBB' + \varepsilon'^2,$$

$\varepsilon^2$  et  $\varepsilon'^2$  désignant des infiniment petits du second ordre. De ces expressions et de l'égalité fondamentale (1), il résulte que la différence entre  $BB' \cos aB'B$  et  $BB' \cos cBB'$  est du second ordre, et par suite



que les angles  $aB'B$  et  $cBB'$  sont infiniment peu différents l'un de l'autre. De là, en passant à la limite et supposant que les chemins  $aBc$ ,  $aB'c$

se confondant avec le chemin maximum  $abc$ , on déduit cette conclusion que deux côtés consécutifs quelconques d'un polygone à périmètre maximum inscrit dans une courbe donnée, sont également inclinés sur la tangente à la courbe circonscrite, menée par l'extrémité commune à ces côtés.

**PREMIÈRE APPLICATION.** — Si la courbe donnée est un cercle, on verra que les côtés consécutifs  $ab$ ,  $cb$  étant également inclinés sur la tangente en  $b$ , le point  $b$  est le milieu de l'arc  $ac$ , et que par suite deux côtés consécutifs quelconques  $ab$  et  $bc$  sont égaux. Donc, parmi les polygones d'un même nombre de côtés inscrits dans un cercle, le polygone régulier a un périmètre maximum.

**SECONDE APPLICATION.** — Si la courbe donnée est une ellipse (E) ayant  $f$ ,  $f'$  pour foyers, on verra, en appliquant la même condition, que deux côtés consécutifs  $ab$  et  $bc$ , du polygone à périmètre maximum, étant éga-

SECONDE PARTIE. ■ 109 lément inclinés sur la lancette on 4 à l'ellipse (E), sont tangents à une même ellipse (E') homofocale à la proposée ; pour la même raison , les ■ . côtés suivants 4r et of/ seraient tangents à une autre ellipse homofocale ' aux précédentes; mais cette nouvelle ellipse est identique à la précé. dente (E'), puisqu'elle a en commun avec celle-ci les foyers /,/' et la. tangente 40. ... Donc, huit h périnukri; tmiximitm inscrit dans une ellipse donnée (E), se trouve en même temps circonscrit à une certaine ellipse {E')^ homofm idc à la proposée. Remarque 1. — D'après un théorème de M. Poncelet , tous les jolygones iju'on essayera de former de la même manière que le précédent, se fermeront d'eux-mêmes et auront le même nombre de côtés : et ces polygones, en nombre infini , satisfaisant aux mêmes conditions que le précédent, seront encore à périmètre maximum. Remarque II. — Les polygones ainsi formés sont isopérimétrcs. Il suffit, pour le démontrer, de recourir au principe fondamental de la ..théorie analytique des maximum. Désignons , en effet , par p, //, y/, . . . , /j,, les i>érimètres d'une série de polygones formés d'après les conditions précédentes et infiniment voisins les uns des autres; les polygones extrêmes P et y,, étant toutefois séparés par un intervalle fini, . . Le [périmètre p étant maximum, la variation du périmètre, quand on • passe de p à y/, est, ou rigoureusement nulle; ou seulement infiniment petite du second ordre.' ■ . ■ ■ ' - Ainsi ■ • • - = 0, ou y/-y/<r,(.c'-i); de même ' //— y/ = 0, ou y' — y/ ( .r' — ,r' ) ; p'—pO' = 0, ou —y/' — e, étant des infiniment petits du premier ordre et -r, .r', x", . . ,it") désignant, par exemple, les abscisses des [premiers sommets a,a\ a", ... , «t"l des [polygones dont les périmètres 'sefnt p,p', yjt'>. Soit £, le i)lus grand des nombres s, , e,, . . . , e,, ; 'ajoutant membre à membre les égalités et inégalités précédentes, et remplaçant les s par e,, on aura ' p — yjC') = 0, ou p — yjt"l < 5, ( .r("> — ,r ). S Et l'on en conclut que la différence p -r est rigoureusement nulle , puisipie l'on peut établir qu'elle est moindre que toute ligne donnée. Observation. — La démonstration précédente n'a eu d'autre effet (pie ' d'établir, dans un cas particulier, ce principe général , qu'une fonction dont ' la dérivée est constamment nulle, se réduit à une constante. PAON LÈME VI. — Trouver la définition générale des polygones minimum, circonscrits à une courbe donnée. a jiertOigiiized by Google

lement inclinés sur la tangente en  $b$  à l'ellipse  $(E)$ , sont tangents à une même ellipse  $(E')$  homofocale à la proposée; pour la même raison, les côtés suivants  $bc$  et  $cd$  seraient tangents à une autre ellipse homofocale aux précédentes; mais cette nouvelle ellipse est identique à la précédente  $(E')$ , puisqu'elle a en commun avec celle-ci les foyers  $f, f'$  et la tangente  $bc$ . . . . Donc, *tout polygone à périmètre maximum inscrit dans une ellipse donnée  $(E)$ , se trouve en même temps circonscrit à une seconde ellipse  $(E')$ , homofocale à la proposée.*

*Remarque I.* — D'après un théorème de M. Poncelet, tous les polygones qu'on essayera de former de la même manière que le précédent, se fermeront d'eux-mêmes et auront le même nombre de côtés: et ces polygones, en nombre infini, satisfaisant aux mêmes conditions que le précédent, *seront encore à périmètre maximum.*

*Remarque II.* — *Les polygones ainsi formés sont isopérimètres.*

Il suffit, pour le démontrer, de recourir au principe fondamental de la théorie analytique des maximum. Désignons, en effet, par  $p, p', p'', \dots, p_n$ , les périmètres d'une série de polygones formés d'après les conditions précédentes et infiniment voisins les uns des autres; les polygones extrêmes  $p$  et  $p_n$  étant toutefois séparés par un intervalle fini.

Le périmètre  $p$  étant maximum, la variation du périmètre, quand on passe de  $p$  à  $p'$ , est, ou rigoureusement nulle, ou seulement infiniment petite du second ordre.

Ainsi

$$p - p' = 0, \quad \text{ou} \quad p - p' < \varepsilon_1 (x' - x);$$

de même

$$p' - p'' = 0, \quad \text{ou} \quad p' - p'' < \varepsilon_2 (x'' - x'); \\ \dots\dots\dots$$

$$p^{(n-1)} - p^{(n)} = 0, \quad \text{ou} \quad p^{(n-1)} - p^{(n)} < \varepsilon_n (x^{(n)} - x^{(n-1)}).$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  étant des infiniment petits du premier ordre et  $x, x', x'', \dots, x^{(n)}$  désignant, *par exemple*, les abscisses des premiers sommets  $a, a', a'', \dots, a^{(n)}$  des polygones dont les périmètres sont  $p, p', p'', \dots, p^{(n)}$ . Soit  $\varepsilon_k$  le plus grand des nombres  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ ; ajoutant membre à membre les égalités et inégalités précédentes; et remplaçant les  $\varepsilon$  par  $\varepsilon_k$ , on aura

$$p - p^{(n)} = 0, \quad \text{ou} \quad p - p^{(n)} < \varepsilon_k (x^{(n)} - x).$$

Et l'on en conclut que la différence  $p - p^{(n)}$  est rigoureusement nulle, puisque l'on peut établir qu'elle est moindre que toute ligne donnée.

*Observation.* — La démonstration précédente n'a eu d'autre effet que d'établir, dans un cas particulier, ce principe général, qu'une fonction dont la dérivée est constamment nulle, se réduit à une constante.

**PROBLÈME VI.** — *Trouver la définition générale des polygones à périmètre minimum, circonscrits à une courbe donnée.*

1 I O DES M#.THODF,S EN ũÉOMÉTRIE. , Solution. — Soit  
 ahc...Ua un polygone circonscrit à périmètre mi-  $\_ \wedge$  , niiiim. Rruniilant  
 toux tex côtés du jxilygone comme ■ cifler avec cette des tangentes é la  
 courbe fixe qui forme le poljl^one ouvert  $X' l / > \dots cW$ , en délermi- • ' ■ liant  
 un périmètre total minimum. Or, soient AB et A' B' deux tangentes  
 infiniment voisines , comprenant entre elles la tangente cher- j ,  $\wedge$  chéeofi,  
 et fermant te polygone ouvert par des péri-' mètres'égaux; et soit I le (loint  
 d'inmrsection de AB, A'B', leipiel est • infiniment voisin des iioints de  
 contact F et F . D'après le problème 8 du chapitre H (page 87), on pourra  
 construire le Mint l en menant te,v bissectrices des angles exteneurs en A,  
 B ' . du nolvme ABc...«A. et abaissant do leur imint d intersection une .  
 per lendlculaire sur AB. Si donc , passait à la limite, on suppose que AB . et  
 A' B' se confondent avec «A, et si I on observe qu en même temps les ,  
 points T T', l se confondent avec le point de contact t de ub sur la courbe,  
 on verra que dux tout /Wvfro«c ù ,u=rimètre minimum circonscrit u une ..  
 courbe, ta normale l, fa courbe menée pur le point de contact de chaque .  
 cjôlé, et les bissectrices des angtes c.rtérieurs du polygone adjarents a ce ,  $\wedge$   
 , côté, concourent en un iinwic jxiint.  $\_ \blacksquare \bullet$  PnEMiÈBF. APPUCATioX. - Jri  
 courbc donnée est un cercle. . ' Soit o- le point de concours des bissectrices  
 des Angles extérieurs or $\wedge$  a,  $\wedge \wedge$  ' Pt sera normale au cercle et passera par le  
 centre o ; menons lui , ob cpil seront bissectrices des aneles intérieurs en a  
 et h. les triangles reetarrglos oao' obo' sont égaux, parce qu'ils -ont l'hypo-  
 ■ témise-commune 00', et que les f)er(iendicnlaires aliaissées dos sommets  
 de l'angle droit sur l bypolénuse coupent celle-ci au même, point. ll en.  
 résulte que les'angles tao et tbo sont égaux, ainsi que. les angles « et A  $\wedge$  .lu  
 polvs^one. Donc , >arnu les ,tolygoncs d'un meme nombre décotes cr- ,  
 $\wedge n^{\wedge} riU$  à un cerc le , le jmlrgone régulier a un penmetre nuramum. Seconde  
 appucatioN. - J^ eourbe donnée est une ellipse. Lemme 1. - Étant données  
 deujc ellipses homofocales, si . ' de r ellipse intérieure on mène une  
 tangente qui coupe l eH.pse extérieure aux points a et b, la normale en t a  
 l'ellipse mteneine et hs tan, .rentes en a et b à l'ellipse extérieure,  
 concourront en un meme point. " I P«MF II - Cn point ne saurait avoir  
 même jmlaire par rapjmlrl « . deuv ellipses homofocales, à moins que ces  
 ellipses ne ,se confondent. , • Ces lemmes étant supposés établis, soient abc.  
 . .A/iii iioilygone a pôn., ma $\wedge \wedge$  imurn circonLrit à une ellipse ( E' i ayant / , /  
 pour foyers 'ne point de contact du cùur«A sur l'ellipse, et o le point de

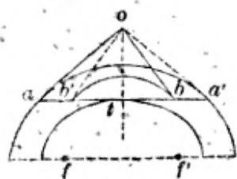
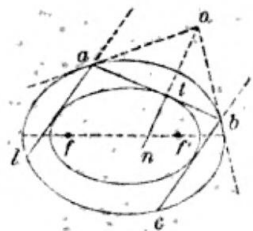
concours ,L bissectrices des angles extérieurs du polygone en a et b ; daprt.  
Digilized by Google



• SKCOXDE P.vnXIE. Il I' \_1p lliéiivmo jît'ni'ral (|iii précMo^ la droite nt sera normale à l'ellipse ' \ 'f) de ce (pie les côtés la, nh, hc sont ■ ■ / tangents à l'ellipse (lî'), et de la définition des droites no et ho. il résulte que l'on peut construire deux ellipses ausiliaires que nous désigne- ' rons|)ar (a) et (j'5), passant, rune [wr le point», l'autre par le point ô, ayant pour tangentfjs respectives en ces points les droites an et ho, et homotbcales à la proposée (E'). Mais ces deux ellipses t-/l et ( ) co'incident en une seule. Su|)posons, en eflét, qu'il en soit autrc• , meut, désignons par et ôA' les cordes (-//.i/f/wte que la droite nth détermine dans ces ellipses, et joignons on', oh'. D'après le leramc l, on' oloh'seraient resjectivement tangentes aux ellipses ( a ) et (fi), et par suite le point o aurait même iiolaire nh'hn' (lar rapport aux deux ellipses homofoc' ■ . • cales ( i ) et (f), ce qui est contraire au lemme II. .Donc les dcAix ellipses (a) et (f y coïncident, et par suite deux sommets consécutifs quelconques du polygone à périmètre minimum appartiennent à une mémo ellipse liomofocalç à la |iroposée. Donc tout iMlrgone a prri- , mètre minimum , rircomerit ti une ellipse ilnnnée (E') , se trouve en mèmè ' temjis inscrit à une seconde ellipse ( E ) , homofncalc à lu pro/msée. Corollaire. — Ou verrait, comme dans le problème (irécédent, que l'on peut former une infinité de (xilygones à périmètre minimum, cir- ' conscrits à l'ellipse (E') èt inscrits à l'ellipse (E), et que tous ces polygones sont isopérimètres. .Scolie. — Si l'on observe que chaque polygone à |)érimètre minimum circonscrit à l'ellipse (E') est inscrit à l'ellipse (E) et satisfait, en outre, aux conditions imposées aux polygones à périmètre maximum inscrit dans cette' elliiise , on pourra renfermer tous les résultats précédents dans cet. énoncé ; .Si l'on n sur le même, jdan dai.v ellip.ses hnmofncnlcs ( E) et (E') telles, ipi'un premier polygone de n côtés puisse être inscrit dans l'une et • circonscrit n l ' autre ' i". On jHuirm former d'après les mêmes ronditiowi une infinité de /mlygones nnint le même nomhre de côtés cl le même /u-rimètre ; 2°. Chacun de ces /xilrgones sera de périmètre maximum jxirmi tous les /tolrgnncs d'un même nomhre de côtés tpte l'on peut inscrire dnim l'ellij>se c.vtéricure , et de périmètre minimum jmrmi tous ceux tpte l'on peut circonscrire à l'ellipse intérieure. ' . Observation. — Ces beaux théorèmes ont été découverts par M. Chasles: leur démonstration analytique, par l'emploi dos coordonnées elliptiques, a fait eu i85x le sujet de quelques leçons de M. Liouville au Collège de France. ( y.tir aussi le célèbre Mémoire de .M. Steiner : Journal de

Mathématiques, 1841. page 104. )' " ■ I ' • • ■ • .-à t ' ' ' ■ » , • - ■ ' ' . • v : - . P  
• Digitized by Google

le théorème général qui précède, la droite  $ot$  sera normale à l'ellipse en  $t$ . Or, de ce que les côtés  $la$ ,  $ab$ ,  $bc$  sont tangents à l'ellipse ( $E'$ ), et de la définition des droites  $ao$  et  $bo$ , il résulte que l'on peut construire deux ellipses auxiliaires que nous désignerons par ( $\alpha$ ) et ( $\beta$ ), passant, l'une par le point  $a$ , l'autre par le point  $b$ , ayant pour tangentes respectives en ces points les droites  $ao$  et  $bo$ , et homofocales à la proposée ( $E'$ ). Mais ces deux ellipses ( $\alpha$ ) et ( $\beta$ ) coïncident en une seule. Supposons, en effet, qu'il en soit autrement,



désignons par  $aa'$  et  $bb'$  les cordes distinctes que la droite  $atb$  détermine dans ces ellipses, et joignons  $oa'$ ,  $ob'$ . D'après le lemme I,  $oa'$  et  $ob'$  seraient respectivement tangentes aux ellipses ( $\alpha$ ) et ( $\beta$ ), et par suite le point  $o$  aurait même polaire  $ab'ba'$  par rapport aux deux ellipses homofocales ( $\alpha$ ) et ( $\beta$ ), ce qui est contraire au lemme II.

Donc les deux ellipses ( $\alpha$ ) et ( $\beta$ ) coïncident, et par suite deux sommets consécutifs quelconques du polygone à périmètre minimum appartiennent à une même ellipse homofocale à la proposée. Donc *tout polygone à périmètre minimum, circonscrit à une ellipse donnée ( $E'$ ), se trouve en même temps inscrit à une seconde ellipse ( $E$ ), homofocale à la proposée.*

**COROLLAIRE.** — On verrait, comme dans le problème précédent, que l'on peut former une infinité de polygones à périmètre minimum, circonscrits à l'ellipse ( $E'$ ) et inscrits à l'ellipse ( $E$ ), et que tous ces polygones sont isopérimètres.

**Scolie.** — Si l'on observe que chaque polygone à périmètre minimum circonscrit à l'ellipse ( $E'$ ) est inscrit à l'ellipse ( $E$ ) et satisfait, en outre, aux conditions imposées aux polygones à périmètre maximum inscrit dans cette ellipse, on pourra renfermer tous les résultats précédents dans cet énoncé : *Si l'on a sur le même plan deux ellipses homofocales ( $E$ ) et ( $E'$ ) telles, qu'un premier polygone de  $n$  côtés puisse être inscrit dans l'une et circonscrit à l'autre :*

1°. *On pourra former d'après les mêmes conditions une infinité de polygones ayant le même nombre de côtés et le même périmètre ;*

2°. *Chacun de ces polygones sera de périmètre maximum parmi tous les polygones d'un même nombre de côtés que l'on peut inscrire dans l'ellipse extérieure, et de périmètre minimum parmi tous ceux que l'on peut circonscrire à l'ellipse intérieure.*

**Observation.** — Ces beaux théorèmes ont été découverts par M. Chasles : leur démonstration analytique, par l'emploi des coordonnées elliptiques, a fait en 1852 le sujet de quelques leçons de M. Lionville au Collège de France. (Voir aussi le célèbre Mémoire de M. Steiner : *Journal de Mathématiques*, 1841, page 169.)

111 . D)KS MÉTHODI'VS EX «ilvOMKTKIE. ! . - • \* § H. —  
 11e I-A UnAMIEIII JIAMAIIiM OV .MINIMUM DE.< OnANDEUIIS  
 INDÉTERMINÉES. .57. Lus prolilènius uniilogues à cens qui ont été  
 résolus' dans le panifraplie précédent, reviumiunl , en dernière analyse, à  
 déterminer sur une ligne, donnée iminédialoment par l'énoncé, ou sur une  
 ligne aiijcilmirr construite au moyen des données de laifuestion, le  
 i>oint\* pour lequel une grandeur, dont la t aleur varie avec la (wsition du  
 point sur la courbe, devient maximum ou minimum. Il existe une autre  
 classe importante de problèmes dans lesr|uels orf vhcrrhe jxirmi toutes les  
 ligues , dont les ej-frè mités sont nssujetties à certaines conditions  
 communes, mais qui dajts rintercuUecles jxnnts extrêmes 'demeure.nl  
 entièrement indéterminées , celle /xiur Inqmille une grandeur, tlont la valeur  
 dépend de la ligne tout entiènt , devient maximum ou minimum {Mii.t'.n ,  
 Arthodus inveniendi lineas emvas mnjimi minimiue proprietate gaudentes  
 , I744i pages 2 et 3) : la grandeur dont il s'agit étant en général une  
 grandeur géométrique, telle qu'une longueur, une aire. ou. un volume, dont  
 les éléments se forment, d'après une loi donnée, ear chacun des joints do  
 l'une des courbes que l'on considère. Ia> premier et' le plus célèbre est le  
 problème de la hraeldstm-hrone , qui fut projKisé par Jean Bernoulli en  
 i6gG. Dans les Actes de l.erpsick de l'année suivante (mai, page 206)^  
 avant d'en exposer la solntionl il fait observer que les méthodes données  
 jusqu'à ce jour par Fermât , DescarteS et les a{ttres ^ pour la détermination  
 des maxima et mininui, sont renfermées dans (l'étrrHtés limites , puis  
 qu'elles éappliijuent seulement au.r cas où l'on doit chercher, parmi une  
 infinité de grandeurs données, la grandeur ma.rimum ou minimum ; et que  
 les difficultés que l'on rencontre deviennent autrement sérieuses, dès que  
 les grandeurs parmi lesquelles se trouve le maximum et le minimum  
 demeurent aussi indtacrminées que te ma.zimum ' ou le minimum que l'on  
 cherche. ■En publiant les proeéilés particuliers qui lui avaient réussi dans la  
 solution de ce problème, et qui, selon lui, pouvaient s'appliquer avec le  
 même succès à d'autres sujets semblables, Bernoulli ajoutait qu'il ne croyait  
 pas à la possibilité de trouver ime méthode générale applicable à toutes les  
 questions du môme geiu-e. Euler et Lagrange,- comme on le sait, ont donné  
 un démenti formel à çc doute d'un grand géomètre; et le calcul des  
 variations demeure l'un des plus beaux monuments de l'analyse, et dans  
 leipicl apparaissent av.éc le plus d'éclat tes qualités de certitude et

d'universalité qui sont propres à . cette dernière. Le rôle de la géométrie pure, dans l'étude de ces nouveaux problèmes, paraissait devoir être fort restreint, sinon complètement nul ; mais le génie de Maclaurin surmonta toutes les difficultés de la matière, et le Traité des Fluxions renferme une méthode générale, fort belle et peu connue, qui conduit par une voie entièrement élémentaire à la solution d'un grand nombre de ces questions et que nous allons maintenant exposer.\*

SECONDE PARTIE. I 13. ' 58. Principe kondaental. — Qur l'on dési<sup>rw</sup> en général par  $G$  le.t grandeurs varinhls et indéterminées parmi lesquelles se tmiiee le minimum (ou h: majcimum) que ton eherehc , et soit  $V$  une gramltmr consUmia de même espece que les grandeurs considérées : si fon retranche l' de chacune des projiosécs  $G$ ,, on obtient une nouvelle suite de grandeurs .i  $G' = G - r$  qui correspondent aux premières et telles évidemment , qu'à la grandeur minimum  $G$ , de la prennent série ^corn-spondra la gmndeur ' minimum  $G'$ , de la seconde; or on exprimera que  $G \setminus = G$ , —  $P$  est le minimum cherclui , en déconqmsant  $G$ , et  $P$  en un même nombre -d'éléments mrres/mndants  $AG$ ,/ $V$   $Al'$ , et en exprimant que chacune des différences élémentaires  $AG$ , —  $AP$  est minimum. On aura défini par là chacun des éléments de la grandettr minimum  $G$ ,, et jutr suite la grandeur minimum elle-même. Remarque I. — Si Ira "randeuVs  $G$  se rapportent à des lignas indéterminées parmi losfjuelles on cherche celle qui jouit de certaine propriété de minimdm ou de maximum, la méthode précédente devra conduire à l'équation différentielle du premier ordre de la ligne ciierchée, puisqu'elle doit fournir la définition de chaque élément de cette ligne. Remarqué II. — L'emploi général de la grandeur auxiliaire  $P$  étant défini comme précédemment, il faut encore obsiirver que cette grandeur  $P$  .doit toujours renfermer quelque élément arbitraire, dont on fixe à po.steriori la valeur de manière que la grandeur minimum  $G$ , =  $G'$ , 4-  $P$  satisfasse aux conditions qui lui sont imposées par l'énoncé du problème. .Au point ^de vue analytique, cela revient à dire que l'emploi de Isf méthode actuelle équivaut à l'intégration d'une équation différentielle du second ordre, intégration qui a dû introduire dans l'équation diffl'érentielle du premier ordre qui en résulte une constante arbitraire. -Cette constante doit donc naître iwreillement do la méthode que nou.« venons ffe définir; et bien loin que ce qu'il paraît y avoir d'indéterminé dans celte méthode soit une objection contre la certitude des résultats que l'on en peut tirer, cette indétermination nécessaire, comparée aflf résultats que fournit l'analyse, pourrait, s'il en était besoin, servir de confirmation à la méthwje. APPLICATIONS. 59. O. Lemme c.énérae. — Problème. — Étant donnés tin /mint et une droite, aller du /miat à la. droite par un chemin tellement choisi, que le ' temps employé à le parcourir twee une vite.tse  $v$  , diminué du temjts employé à' /mrcourir sa projection avec la vitesse  $e_j > è$ , fournis.se une différence minimum. (Traité des fluxions, tome

11, n° 5712.) Solution. — Il s'agit de rendre minimum la différence  $MM'$  «/M' ou celle-ci ;  $MM' = iM' - V$ , Or, on vertu de la restriction  $e < e_0$ , on peut représenter le rapport

Digilized by Google

58. PRINCIPLE FONDAMENTAL. — Que l'on désigne en général par  $G$  les grandeurs variables et indéterminées parmi lesquelles se trouve le minimum (ou le maximum) que l'on cherche, et soit  $\Gamma$  une grandeur constante de même espèce que les grandeurs considérées : si l'on retranche  $\Gamma$  de chacune des proposées  $G$ , on obtient une nouvelle suite de grandeurs  $G' = G - \Gamma$  qui correspondent aux premières et telles évidemment, qu'à la grandeur minimum  $G_1$  de la première série correspondra la grandeur minimum  $G'_1$  de la seconde ; or on exprimera que  $G'_1 = G_1 - \Gamma$  est le minimum cherché, en décomposant  $G_1$  et  $\Gamma$  en un même nombre d'éléments correspondants  $\Delta G_1$  et  $\Delta \Gamma$ , et en exprimant que chacune des différences élémentaires  $\Delta G_1 - \Delta \Gamma$  est minimum. On aura défini par là chacun des éléments de la grandeur minimum  $G_1$ , et par suite la grandeur minimum elle-même.

Remarque I. — Si les grandeurs  $G$  se rapportent à des lignes indéterminées parmi lesquelles on cherche celle qui jouit de certaine propriété de minimum ou de maximum, la méthode précédente devra conduire à l'équation différentielle du premier ordre de la ligne cherchée, puisqu'elle doit fournir la définition de chaque élément de cette ligne.

Remarque II. — L'emploi général de la grandeur auxiliaire  $\Gamma$  étant défini comme précédemment, il faut encore observer que cette grandeur  $\Gamma$  doit toujours renfermer quelque élément arbitraire, dont on fixe *a posteriori* la valeur de manière que la grandeur minimum  $G_1 = G'_1 + \Gamma$  satisfasse aux conditions qui lui sont imposées par l'énoncé du problème. Au point de vue analytique, cela revient à dire que l'emploi de la méthode actuelle équivaut à l'intégration d'une équation différentielle du second ordre, intégration qui a dû introduire dans l'équation différentielle du premier ordre qui en résulte une constante arbitraire. Cette constante doit donc naître pareillement de la méthode que nous venons de décrire ; et bien loin que ce qu'il paraît y avoir d'indéterminé dans cette méthode soit une objection contre la certitude des résultats que l'on en peut tirer, cette indétermination nécessaire, comparée aux résultats que fournit l'analyse, pourrait, s'il en était besoin, servir de confirmation à la méthode.

#### APPLICATIONS.

59. O. LEMME GÉNÉRAL. — PROBLÈME. — Étant donné un point et une droite, aller du point à la droite par un chemin tellement choisi, que le temps employé à le parcourir avec une vitesse  $v$ , diminué du temps employé à parcourir sa projection avec la vitesse  $v_1 > v$ , fournisse une différence minimum. (*Traité des Fluxions*, tome II, n° 572.)

Solution. — Il s'agit de rendre minimum la différence

$$\frac{MM'}{v} - \frac{mM'}{v_1}, \quad \text{ou celle-ci :} \quad MM' - mM' \frac{v}{v_1}.$$

Or, en vertu de la restriction  $v < v_1$ , on peut représenter le rapport  $\frac{v}{v_1}$



Il 4 DES MÉTHODES E\ (GÉOMÉTRIE. ' par un cosinus ; cū  
 sera , pai- c\cnn)lc , le eusins lie l'angle' que forme ' «<M' avec une droite  
 MX menée par le |M)int M, et la position de la droite MX sera déleniné\*'  
 |>ar cotte relation (i)  $\cos(7\langle M', MX) = \sin wMX = \text{---} 5$  et l'expression que  
 l'on doit rendre minimum devient alors  $MM' \text{---} O/ M' \cos (07 M', MX)$ , on  
 $MM' \text{---} 77N'$ ; //N' étant la projection de /7/M' sur la droite MX. Or, si du  
 point M comme centre on déerit l'arc M'M' lermine à la droite MX  
 prolongée, on aura r ' \_ ' M.M'-/7N'= MM"- 77N'= M/7 + N'M"; ' ' et  
 comme M 77 est constante, on voit tpie le minimum clierc.lié a lieu quand  
 N'.M" est nulle, c'est-iedire qttand la droite MM' co'incide avec la droite  
 MX. • Ainsi h' sinns tir irimiitfiicv tir la tlroiw i lifrilivc sut: lu ilroilr . ^ , ,  
 V • , • ' (Ii)itwc, est i f'ifl 7/7/ rtjtj/jori — tirs rilrssf tUmners, ' . Brmariiiiir.  
 — Ui solution analytiqite du même problème dépendrait seulement de lu  
 théorie élémentaire des maxitna pour les fonelions du second degré. \_ ■ ' '  
 I. Piiolii.kMR l')É Fkhmat. — Étant ihm né s- tira. te /toints A rt B situés •  
 7/7/77,7 ilruj- milirii.r tliffi-rrnls i/iic séparr Ut iln/itr rt r, 0' tlésig/uint lrs  
 vitessés ilc'jirojttagatiun tir ht lumirrr ilaiis lrs deux milirux , on drmandu !r  
 rhrmin AIB 7///C doit suivre une niolérulr lumineuse, pi-iir aller • > du  
 premirr jjoint au sero/ut dans un temps minimum. .Solution. — Ahais.sons  
 Kn, B//, |>t'rpendi(ülaire3 sur .r» ; il s'agit de trouver un point l sur x)-, tel  
 que (■) AI BI • . : 1 — r = mtnimn. D'ailleurs le cliemin à temps  
 minimitm ne doit être cherché évidemment <}ue parmi ceux qui rencontrent  
 la droite sn- entre les points 7/ et //', et (jui ont par con.sé(picnt même  
 projection td> sur ,rr. Si donc on désigne par V une vitesst» siq/érieure à v  
 et à /•', le temps employé à ]>arcourir ab avec la vitesst» V sera une  
 quantité con.stantc; et nous aurons satisfait à la condition (1), si nous  
 satisfai.sons à celle-ci ■ ' ,\I B1 77// - . . ' ' - ' — I — r — îT= minimum r V  
 f V Y Digilized by Google



SIXIÈME PARTIE. I f 5 Ou, en décomposant «A on «I+AI, si nous satisfaisons à cette dernière,  $\frac{AI}{BI} = \frac{a}{b}$ ,  $\frac{BI}{AI} = \frac{b}{a}$ . yj + (-7" y; = Enfin, cette dernière relation sera satisfaite, si l'on peut satisfaire simultanément à chacune de celles-ci  $\frac{AI}{BI} = \frac{a}{b}$  et  $\frac{BI}{AI} = \frac{b}{a}$  (\*). BI hi ~ V = minimum, = minimum. Or, d'après le lemme précédent, si l'on désigne par i et r les angles d'incidence et de réfraction AIN, BIN', chacune des conditions ( /?) et ( /< ) sera remplie, si l'on a  $\sin i = \frac{a}{b} \sin r$ ; V \ d'où, en divisant membre à membre. Ainsi le chemin que doit suivre une molécule lumineuse pour aller d'un premier à un second milieu dans un temps minimum, est tel, que le rapport des sinus des angles d'incidence et de réfraction, dans le passage du premier au second milieu, soit égal au rapport des vitesses de propagation de la lumière dans le premier et dans le second milieu. Scolie. — La solution directe de ce problème dépendrait évidemment de la méthode pour la recherche des maxima et minima absolus, exposée dans le chapitre précédent. L'emploi de cette méthode conduit d'ailleurs à une généralisation du théorème précédent qui peut être utile pour des applications ultérieures. Il suffit, pour y parvenir, de remplacer le plan de la figure précédente par une surface quelconque; on verra alors que le chemin AIB, défini par la même condition de minimum, est formé par deux lignes géodésiques AI et IB (Je la surface, et que les angles i\* — i, i\* — r, sous lesquels ces lignes géodésiques coupent la courbe de séparation sr, sont encore liés par la relation' On aura d'ailleurs à s'appuyer sur ce principe, que la courbe qui intercepte des arcs équivalents sur les lignes géodésiques d'une surface, issues du même point, coupe orthogonalement toutes ces lignes géodésiques. ) a. PnOBLÈRE. — Trouver la ligne sur laquelle doit se mouvoir un point matériel soumis à l'action de sa pesanteur, pour aller d'un point donné O à une verticale donnée vv', dans un temps minimum. ( Traité des Filtrions, tome 11, n° 574.) ' . Solution. — Soient OMM'H la brachistochrone cherchée et H le point inconnu où elle coupe la verticale donnée VV'. Menons les horizontales OV- 8. . Digitized by Google

116 DES MÉTHODES EN GÉOMÉTRIE. et 1111' des points de départ et d'arrivée, ainsi que la verticale OH' du point de départ. Il est facile de reconnaître, à priori, que la courbe cherchée ne saurait avoir aucun de ses points à gauche de la verticale OH' ou au-dessous de l'horizontale HH', et que, par suite, on ne doit chercher la brachistochrone que parmi les courbes en nombre infini qui joignent le point O au point H, et qui sont en outre comprises dans le rectangle OVHH'; or toutes ces courbes ont même projection HH' sur l'horizon, et la vitesse acquise en H', par chute sur l'une d'elles, est la même pour toutes; désignons par  $v$ , cette vitesse qui demeure indéterminée comme le point H lui-même. Conformément à la méthode générale, nous dirons: Si le temps par OMM'H, parcouru avec une vitesse constante  $v$ , est minimum, le temps diminué du temps par HH', parcouru avec la vitesse constante  $v$ , sera encore minimum; et si nous décomposons la courbe et la droite en un même nombre d'éléments correspondants MM', m.M', la différence des temps que l'on vient d'énoncer sera minimum, si l'on rend minimum cette différence élémentaire:  $\Delta t = \frac{MM'}{v} - \frac{m.M'}{v}$ . Or, d'après le lemme, pour que celle dernière différence soit minimum, il suffit, en regardant l'élément MM' de la courbe comme rectiligne, que l'on ait  $\sin \theta = \frac{v}{v'}$ ,  $\theta$  désignant la vitesse acquise par le mobile à son arrivée en M, et les ordonnées  $r$  de la courbe étant parallèles à l'horizontale OV.

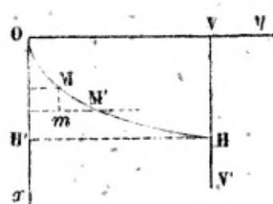
Corollaire I. — La formule (i) fournit, comme on le voit, l'équation différentielle du premier ordre de la brachistochrone pour le cas où la pesanteur agit sur le mobile par des droites parallèles, l'intensité de la pesanteur étant ou constante, ou variable suivant une loi quelconque: cette formule conduit, en outre, à cette conséquence importante, que la brachistochrone est tangente à la verticale du point de départ, et normale à la verticale W' à laquelle elle se termine; car, si l'on fait  $\theta = 0$  et  $z = 0$  dans la formule, elle donne  $ds = \frac{W}{g} dz$ .

Dans le cas d'une pesanteur constante, on a  $g = g_0$ , et la brachistochrone est une cycloïde.

et  $HH'$  des points de départ et d'arrivée, ainsi que la verticale  $OH'$  du point de départ.

Il est facile de reconnaître, à priori, que la courbe cherchée ne saurait avoir aucun de ses points à gauche de la verticale  $OH'$  ou au-dessous de l'horizontale  $HH'$ , et que, par suite, on ne doit chercher la brachistochrone que parmi les courbes en nombre infini qui joignent le point  $O$  au point (indéterminé)  $H$ , et qui sont en outre comprises dans le rectangle  $OVHH'$  : or toutes ces courbes ont même projection  $HH'$  sur l'horizon, et la vitesse acquise en  $H$ , par la chute sur l'une d'elles, est la même pour toutes; désignons par  $v_1$  cette vitesse qui demeure indéterminée comme le point  $H$  lui-même.

Conformément à la méthode générale, nous dirons : Si le temps par



$OMM'H$ , parcouru avec une vitesse variable  $v$ , est minimum, ce même temps diminué du temps par  $HH'$ , parcouru avec la vitesse constante  $v_1$ , sera encore minimum; et si nous décomposons la courbe et la droite en un même nombre d'éléments correspondants  $MM'$ ,  $mM'$ , la différence des temps que l'on vient d'énoncer sera minimum, si l'on rend minimum cette différence élémentaire :

Temps par  $MM'$  parcouru avec la vitesse  $v$ , moins temps par  $mM'$  parcouru avec la vitesse  $v_1$ . Or, d'après le lemme, pour que cette dernière différence soit minimum, il suffit, en regardant l'élément  $MM'$  de la courbe comme rectiligne, que l'on ait

$$\sin mMM' = \frac{v}{v_1},$$

ou

$$(I) \quad \frac{dy}{ds} = \frac{v}{v_1},$$

$v$  désignant la vitesse acquise par le mobile à son arrivée en  $M$ , et les ordonnées  $y$  de la courbe étant parallèles à l'horizontale  $OV$ .

**COROLLAIRE I.** — La formule (1) fournit, comme on le voit, l'équation différentielle du premier ordre de la brachistochrone pour le cas où la pesanteur agit sur le mobile par des droites parallèles, l'intensité de la pesanteur étant ou constante, ou variable suivant une loi quelconque : cette formule conduit, en outre, à cette conséquence importante, que la brachistochrone est tangente à la verticale du point de départ, et normale à la verticale  $VV'$  à laquelle elle se termine; car, si l'on fait alternativement  $v = 0$  et  $v = v_1$  dans la formule, elle donne

$$\frac{dy}{ds} = 0, \quad \text{et} \quad \frac{dy}{ds} = 1.$$

**COROLLAIRE II.** Dans le cas d'une pesanteur constante, on a

$$v = \sqrt{2gx},$$

et la brachistochrone est une cycloïde.

SECONDE PARTIE. I 1 Rf/nii/yiic. — La formilu (i) a 616  
donnée pour la première fois par Jean Bernoulli {yteta de Leipsivk, iCgC,  
mai, page 208) : co goomclrc l'avait ohtenue en j^énéralisant le problème  
de Fermât, et pn assimilant la bracliistochrone à la trajectoire d'une  
molécide'luraineuse traversant, dans un temps minimum, une suite de  
milieux de densités différentes, d'épaisseurs infiniment petites, séiwrés les  
uns des autres par dos surfaces liorizonUdes. ' • 3. Problème. — Trouver Ut  
ligne que doit décrire un point matériel soumis à F action d'une force  
émanant d'un centre fixe Q., pour aller, dans un temps minimum, d'un jwint  
donné à une droite donnée, jMtssant par le centre attirant. ( Traité des  
FluxJons, tome II, n° 578. ) SoUaion. — Soit AMB la brachistochrono  
cherchée, et B le point inconnu où elle atteint la droite donnée CB<>. Du  
point O, comme centre, décrivons les arcs du cercle kb et B« interceptés  
dans l'angle donné ACB. Il est facile de démontrer, à priori, que la ligne  
cherché^ est tout entière comprise dans le trairèze mixtiligne AiB«. Nous la  
chercherons donc parmi les lignes qui satisfont à cette condition et qui  
joignent le point A au point indéterminé B. Or toutes ces ligni's, projetées  
centralement suivant le point C sur la circonférence Bd, ont même  
projection, à savoir l'arc ÿa; et la vitesse awiuisç en B par la chute sur l'une  
d'elles est la' mêmejrour toutes; soit c, cette vitesse. Dès lors, si le temps  
par A.MB parcouru avec la vitesse variable est minimum, on aura aussi G.  
(AMB, c) — 5. (arc «B, e,) = 3 minimum; et si l'on décompose la courlie et  
l'arc en un même nombre d'éléments ^ correspondants MM', NN', la  
différence précédente sera minimum, si l'on rend minimum chacune des  
différences élémentaires, telles que, ' J\* V I {" ) 6. (.MM', c) -6.(NN', ç, ).  
Or, désignons par r, r\ r, les distances au centre attirant C des piiints M, M',  
B, et décrivons du centre C le petit arc M'rn semblable à l'arc NN'; on a et,  
par suite. G..(NN', NN' = M'/'« . ^, ^ ^ \_ Mj» r, r ( . /■' M'//( On voit donc  
que le temps employé à parcourir NN' avec la vitesse est égal .au temps  
employé A parcourir M'm avec une vitesse égale A c, • - • Donc, en  
substituant dans la. différence {a), on aura A rendre miDigitized by Google

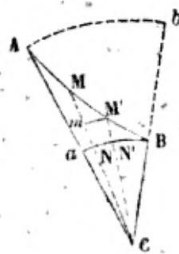
*Remarque.* — La formule (1) a été donnée pour la première fois par Jean Bernoulli (*Actes de Leipsick*, 1696, mai, page 208) : ce géomètre l'avait obtenue en généralisant le problème de Fermat, et en assimilant la brachistochrone à la trajectoire d'une molécule lumineuse traversant, dans un temps minimum, une suite de milieux de densités différentes, d'épaisseurs infiniment petites, séparés les uns des autres par des surfaces horizontales.

3. PROBLÈME. — Trouver la ligne que doit décrire un point matériel soumis à l'action d'une force émanant d'un centre fixe C, pour aller, dans un temps minimum, d'un point donné à une droite donnée, passant par le centre attirant. (*Traité des Fluxions*, tome II, n° 578.)

*Solution.* — Soit AMB la brachistochrone cherchée, et B le point inconnu où elle atteint la droite donnée CBb. Du point C, comme centre, décrivons les arcs du cercle Ab et Ba interceptés dans l'angle donné ACB. Il est facile de démontrer, à priori, que la ligne cherchée est tout entière comprise dans le trapèze mixtiligne AbBa. Nous la chercherons donc parmi les lignes qui satisfont à cette condition et qui joignent le point A au point indéterminé B. Or toutes ces lignes, projetées centralement suivant le point C sur la circonférence Ba, ont même projection, à savoir l'arc Ba; et la vitesse acquise en B par la chute sur l'une d'elles est la même pour toutes; soit  $v_1$  cette vitesse. Dès lors, si le temps par AMB parcouru avec la vitesse variable  $v$ , est minimum, on aura aussi

$$\mathcal{E}(\text{AMB}, v) - \mathcal{E}(\text{arc aB}, v_1) = \text{minimum};$$

et si l'on décompose la courbe et l'arc en un même nombre d'éléments correspondants MM', NN', la différence précédente sera minimum, si l'on rend minimum chacune des différences élémentaires, telles que



$$(a) \quad \mathcal{E}(\text{MM}', v) - \mathcal{E}(\text{NN}', v_1).$$

Or, désignons par  $r$ ,  $r'$ ,  $r_1$  les distances au centre attirant C des points M, M', B, et décrivons du centre C le petit arc M'm semblable à l'arc NN'; on a

$$\text{NN}' = \text{M}'m \cdot \frac{r_1}{r'},$$

et, par suite,

$$\mathcal{E}(\text{NN}', v_1) = \frac{\text{NN}'}{v_1} = \frac{\text{M}'m}{v_1} \cdot \frac{r_1}{r'} = \frac{\text{M}'m}{v_1 \cdot \frac{r'}{r_1}}.$$

On voit donc que le temps employé à parcourir NN' avec la vitesse  $v_1$  est égal au temps employé à parcourir M'm avec une vitesse égale à  $v_1 \cdot \frac{r'}{r_1}$ .  
Donc, en substituant dans la différence  $\mathcal{E}$ , on aura à rendre mi-

# II 8 DES MÉTHODES EN GÉOMÉTRIE, nimum t . ^ ■ E.

(MM', v) — G- ^ Or, d'après le lemme, pour que cette dernière différence soit minimum , il suffit , on regardant les éléments MM' et m iM' comme rectilignes , que l'on ait  $\ddot{m}MM' = t > : i \setminus - ; -, * r, * *$  donc, en ap|)clant MT la tangente en M, remplaçant r' par r, sinCMM' par sin CMT = r-^, il vient (1)  $^{\wedge} \sin CMT = /-^{\wedge}' = -.^{\wedge}' , ' * -$  ds V, r pour l'équation différentielle de la courbe cherchée. ^ CoROLLMAE 1. — Ces formules conduisent encore à cette conséquence , que la hrachistochnme est tangente au rayon d-V , qui passe par l'origine, et normale au rayon CB , auquel elle se termine.

Corollaire II. — La formule (1), que l'on écrirait  $f * \blacksquare . r \sin CMT = ij..^{\wedge}' , V$ , démontre ce théorème dû à Euler, que la. vitesse en chaque point est proportionnelle à la distance du centre d'attraction à la tangente en ce point.

Corollaire III. — SupiMSons que l'attraction exercée par le centn: C soit projMitienne A la distance. Le principe des forces vives donne , dans ce cas^ en désignant par r, la distance initiale CA, pour laquelle  $i < = o$ , et l'équation (I) devient alors  $(\bullet) f/0 J^{\wedge} — P r \sin CMT = r^{\wedge} . = ^{\wedge} \bullet -- . ds^{\wedge} r \setminus - r \setminus$  c qui représente , comme on le sait , uno éi«cycloïdo engendrée par un point d'une circonférence ayant pour diamètre /•, — /•, = Ka , qui roulerait intérieurement sur la circonférence A b. On pourrait d'ailleurs établir ce dernier fait directement, et sans beaucoup de peine, en s'appuyant sur la construction de la tangente à l'épicycloïde et sur le lemme que voici : Que l'on prenne utt point qiwlconque C sur le prolongement de l'hypoténuse iB d'un triangle rectangle 4MB et que l'on joigne CM, on aura  $\sin CMB = y/rltvj; \bullet$  en posant  $CM — r, C 4 = ; /$ , et C,B . DigilEed by Coogle



nimum

$$\mathfrak{C}(\text{MM}', \nu) - \mathfrak{C}\left(m\text{M}', \nu_1 \cdot \frac{r'}{r_1}\right).$$

Or, d'après le lemme, pour que cette dernière différence soit minimum, il suffit, en regardant les éléments  $\text{MM}'$  et  $m\text{M}'$  comme rectilignes, que l'on ait

$$\sin m\text{MM}' = \nu : \nu_1 \frac{r'}{r_1};$$

donc, en appelant  $\text{MT}$  la tangente en  $\text{M}$ , remplaçant  $r'$  par  $r$ ,  $\sin \text{CMM}'$  par  $\sin \text{CMT} = r \frac{d\theta}{ds}$ , il vient

$$(1) \quad \sin \text{CMT} = r \frac{d\theta}{ds} = \frac{\nu}{\nu_1} \cdot \frac{r_1}{r},$$

pour l'équation différentielle de la courbe cherchée.

COROLLAIRE I. — Ces formules conduisent encore à cette conséquence, que *la brachistochrone est tangente au rayon CA, qui passe par l'origine, et normale au rayon CB, auquel elle se termine.*

COROLLAIRE II. — La formule (1), que l'on écrirait

$$r \sin \text{CMT} = \frac{r_1}{\nu_1} \cdot \nu,$$

démontre ce théorème dû à Euler, que *la vitesse en chaque point est proportionnelle à la distance du centre d'attraction à la tangente en ce point.*

COROLLAIRE III. — Supposons que l'attraction exercée par le centre C soit proportionnelle à la distance. Le principe des forces vives donne, dans ce cas,

$$\nu^2 = (r_0^2 - r^2) K^2;$$

en désignant par  $r_0$  la distance initiale CA, pour laquelle  $\nu = 0$ , et l'équation (1) devient alors

$$(1) \quad \sin \text{CMT} = r \frac{d\theta}{ds} = \frac{\sqrt{r_0^2 - r^2}}{\sqrt{r_0^2 - r_1^2}} \cdot \frac{r_1}{r},$$

qui représente, comme on le sait, une épicycloïde engendrée par un point d'une circonférence ayant pour diamètre  $r_0 - r_1 = \text{Aa}$ , qui roulerait intérieurement sur la circonférence  $\text{Ab}$ . On pourrait d'ailleurs établir ce dernier fait directement, et sans beaucoup de peine, en s'appuyant sur la construction de la tangente à l'épicycloïde et sur le lemme que voici : *Que l'on prenne un point quelconque C sur le prolongement de l'hypoténuse  $\text{bB}$  d'un triangle rectangle  $\text{bMB}$  et que l'on joigne  $\text{CM}$ , on aura*

$$\sin \text{CMB} = \frac{\sqrt{r_0^2 - r^2}}{\sqrt{r_0^2 - r_1^2}} \cdot \frac{r_1}{r};$$

SECONDE PARTIE. 9. ( . PBUBL.èMK.. — TntifCr la courbi'  
plane passant par lieux fMiints donnés ■ A et II, et cn"emlrant une aire  
minimum par sa rotation autour d'un axe 0.C situé dans son plan. Solution.  
— ACMU la courbe clicrchée pour laquelle l'intégrale / yds, étendue à tous  
les points de la courbe compris entre A et B, est minimum'. Pour toutes les  
courbes joignant le point A au point B, l'intégrale / d.c, et par suite celle-ci,  
\ f dæ prise entre les mêmes limites est une grandeur constante, y. désignant  
une constante arbitraire. Il sulliru donc, conformément à la méthode  
générale, de trouver la courbe pour latpielle / [yds — Xr/.r ) est un  
minimum , et celte somme sera minimum si chacun de ses éléments , . , ds  
(Le • YtIs — Sdx = . • "Il est minimum. Or, si l'on regarde - et -r comme  
représentant des vitesses , et si l'on regarde comme donné l'accroissement  
dr de l'ordonnée dans le passage d'un [K]int M do la courbe au point  
infinitement voisin M' , le minimum aura lieu, d'après le lemme, si l'on a ^  
sin MM'/«' dx \_\_\_ Y ds ~ i On a donc [HD . de ■ ' ds = pour l'équation  
dilTérentielle de la courbe cherchée qui est , par consé quent, une chaînette  
dont l'axe est perpendiculaire à la droite 0.1'. Scolie. — Dans lo problème  
précédent, l'usage que l'on a fait du ' lemme de la page ii3, exigeait que  
l'on pût regarder comme donné l'ac- i croissement dr de l'ordonnée, dans le  
passage du point M au point infinitement voisin M' de la courbe cherchée. Or,  
on peut faire voir que cela est permis, au moyen du raisonnement suivant :  
Soit ACMB la courbe cherchée et G son point le plus bas. D'après la  
définition du point C, et quoique cé point demeure inconnu , on peut dire  
que l'on ne doit chercher la courbe demandée que parmi celles qui joignent  
A à B , en passant par le point C et ayafit en ce point leur tangente parallèle  
à Ox. . Or, pour toutes ces courbes les variations totales de l'ordonnée y  
sont les mêmes de A en C et de C en B , et l'on peut , par conséquent ,  
partager les différences Y,,j — Y(,j , Y^jj — Y^^ , , communes à toutes ces  
•ourbes, en un- certain nombre de parties très-polites , égales ou inégales.

4. PROBLÈME. — Trouver la courbe plane passant par deux points donnés A et B, et engendrant une aire minimum par sa rotation autour d'un axe Ox situé dans son plan.

*Solution.* — Soit ACMB la courbe cherchée pour laquelle l'intégrale  $\int y ds$ , étendue à tous les points de la courbe compris entre A et B, est *minimum*. Pour toutes les courbes joignant le point A au point B, l'intégrale  $\int f dx$ , et par suite celle-ci,  $\lambda \int f dx$  prise entre les mêmes limites est une grandeur *constante*,  $\lambda$  désignant une constante arbitraire. Il suffira donc, conformément à la méthode générale, de trouver la courbe pour laquelle  $\int (y ds - \lambda dx)$  est un minimum, et cette somme sera minimum

si chacun de ses éléments

$$y ds - \lambda dx = \frac{ds}{\frac{1}{y}} - \frac{dx}{\frac{1}{\lambda}}$$

est minimum.

Or, si l'on regarde  $\frac{1}{y}$  et  $\frac{1}{\lambda}$  comme représentant des vitesses, et si l'on regarde comme donné l'accroissement  $dy$  de l'ordonnée dans le passage d'un point M de la courbe au point infiniment voisin M', le minimum aura lieu, d'après le lemme, si l'on a

$$\sin \angle MM'm' = \frac{dx}{ds} = \frac{\frac{1}{y}}{\frac{1}{\lambda}} = \frac{\lambda}{y}.$$

On a donc

$$(III) \quad y \frac{dx}{ds} = \lambda,$$

pour l'équation différentielle de la courbe cherchée qui est, par conséquent, une chaînette dont l'axe est perpendiculaire à la droite Ox.

*Scolie.* — Dans le problème précédent, l'usage que l'on a fait du lemme de la page 113, exigeait que l'on pût regarder comme *donné* l'accroissement  $dy$  de l'ordonnée, dans le passage du point M au point infiniment voisin M' de la courbe cherchée. Or, on peut faire voir que cela est permis, au moyen du raisonnement suivant : Soit ACMB la courbe cherchée et C son point le plus bas. D'après la définition du point C, et quoique ce point demeure inconnu, on peut dire que l'on ne doit chercher la courbe demandée que parmi celles qui joignent A à B, en passant par le point C et ayant en ce point leur tangente parallèle à Ox. Or, pour toutes ces courbes les variations totales de l'ordonnée  $y$  sont les mêmes de A en C et de C en B, et l'on peut, par conséquent, partager les différences  $Y_{(a)} - Y_{(c)}$ ,  $Y_{(b)} - Y_{(c)}$ , communes à toutes ces

I 20 DES MÉTHODES EN GÉOMÉTRIE. qui seront les mêmes pour toutes ces courbes; ce qui revient à dire que l'on peut regarder comme donné l'accroissement de l'ordonnée de la courbe cherchée; Ijsi même remarque, s'applique aux problèmes des n<sup>o</sup> 1 et 3 et à ceux qu'il y a mais reste à étudier dans le chapitre suivant. CHAPITRE V. Des maxima et minima relatifs. CO. Principe général. — Parmi toutes les courbes en nombre infini, dont les extrémités sont assujetties à certaines conditions communes, et pour chacune desquelles une certaine fonction K, fonction de la courbe, tout entière, a une même valeur, déterminer celle pour laquelle une autre fonction  $\phi$  de la courbe a une valeur maximum ou minimum. Dans cet énoncé on désigne par fonction d'une courbe une grandeur soit géométrique, telle qu'une longueur, une aire ou un volume dont les éléments se forment, d'après une loi donnée, en chacun des points de cette courbe; soit numérique, et la fonction est alors représentée par une intégrale définie s'étendant à tous les points de la courbe qui se trouvent compris entre des limites données. Le problème actuel se ramène très-simplement au problème des maxima et minima absolus qui a été résolu à la fin du dernier chapitre au moyen du principe suivant qui a été employé d'abord par Maclaurin [Traité des Fluxions, 1741] et par Euler (1744, page 188), et qui est d'un continuel usage dans le calcul des variations : Principe fondamental. — La ligne cherchée L, pour laquelle la fonction  $\phi$  est maximum ou minimum, parmi toutes les lignes pour lesquelles la fonction  $\phi$  a une même valeur, est aussi la ligne pour laquelle la fonction  $F + \phi$  est un maximum ou un minimum absolu,  $\lambda$  étant un nombre indéterminé. Ce principe est évident en lui-même. Quant à la manière de l'appliquer à la solution de chaque problème, d'après la méthode générale énoncée à la page 113, on devra se servir de la fonction  $K - \lambda \phi$  une fonction ou grandeur auxiliaire P, ayant la même valeur pour toutes les courbes que l'on considère, cette valeur dépendant d'ailleurs d'un paramètre indéterminé; et les fonctions  $F, \phi, P$  étant décomposées en éléments correspondants, on exprimera que l'un des éléments — A. P de la fonction totale  $F - \lambda \phi$  — P est maximum ou minimum, ce qui fournira la définition de chacun des éléments de la courbe cherchée; c'est-à-dire l'équation différentielle de cette courbe. L'équation différentielle obtenue contenant d'ailleurs deux paramètres indéterminés, ou constantes arbitraires, l'équation qui résultera de son intégration en contiendra trois

dont on déterminera les valeurs sous cette double condition ; que les  
extrémités de la courbe satisfassent aux conditions données, et que la  
fonction  $F$  de la courbe acquière, la valeur donnée. Digitized by Google

qui seront les mêmes pour toutes ces courbes; ce qui revient à dire que l'on peut regarder comme donné l'accroissement  $dy$  de l'ordonnée de la courbe cherchée. La même remarque s'applique aux problèmes des n<sup>os</sup> 2 et 3 et à ceux qu'il nous reste à étudier dans le chapitre suivant.

## CHAPITRE V.

### Des maxima et minima relatifs.

60. PROBLÈME GÉNÉRAL. — Parmi toutes les courbes en nombre infini, dont les extrémités sont assujetties à certaines conditions communes, et pour chacune desquelles une certaine fonction  $F$ , qui dépend de la courbe tout entière, a une même valeur, déterminer celle pour laquelle une autre fonction  $\Phi$  de la courbe a une valeur maximum ou minimum.

Dans cet énoncé on désigne par fonction d'une courbe une grandeur soit géométrique, telle qu'une longueur, une aire ou un volume dont les éléments se forment, d'après une loi donnée, en chacun des points de cette courbe; soit numérique, et la fonction est alors représentée par une intégrale définie s'étendant à tous les points de la courbe qui se trouvent compris entre des limites données.

Le problème actuel se ramène très-simplement au problème des maxima et minima absolus qui a été résolu à la fin du dernier chapitre au moyen du principe suivant qui a été employé d'abord par Maclaurin (*Traité des Fluxions*, 1742) et par Euler (*Methodus inveniendi*, 1744, page 188), et qui est d'un continuel usage dans le calcul des variations :

PRINCIPE FONDAMENTAL. — La ligne cherchée  $L$ , pour laquelle la fonction  $\Phi$  est maximum ou minimum, parmi toutes les lignes pour lesquelles la fonction  $F$  a une même valeur, est aussi la ligne pour laquelle la fonction  $F + \lambda\Phi$  est un maximum ou un minimum absolu,  $\lambda$  étant un nombre indéterminé.

61. Ce principe est évident en lui-même. Quant à la manière de l'appliquer à la solution de chaque problème, d'après la méthode générale énoncée à la page 113, on devra retrancher de la fonction  $F + \lambda\Phi$  une fonction ou grandeur auxiliaire  $\Gamma$ , ayant la même valeur pour toutes les courbes que l'on considère, cette valeur dépendant d'ailleurs d'un paramètre indéterminé; et les fonctions  $F$ ,  $\Phi$ ,  $\Gamma$  étant décomposées en éléments correspondants, on exprimera que chacun des éléments  $\Delta.F + \lambda\Delta.\Phi - \Delta.\Gamma$  de la fonction totale  $F + \lambda\Phi - \Gamma$  est maximum ou minimum, ce qui fournira la définition de chacun des éléments de la courbe cherchée; c'est-à-dire l'équation différentielle de cette courbe. L'équation différentielle obtenue contenant d'ailleurs deux paramètres indéterminés, ou constantes arbitraires, l'équation qui résultera de son intégration en contiendra trois dont on déterminera les valeurs sous cette double condition : que les extrémités de la courbe satisfassent aux conditions données, et que la fonction  $F$  de la courbe acquière la valeur donnée.

## SECONDE PARTIE. I a I APPLICATIONS. . • ' IC2. I.

Problème. — Trouver la ligne de la plus vite descente parmi toutes les lignes d'une longueur donnée qui réunissent deux points donnés, dans le cas où les forces qui sollicitent le mobile aux différents points de sa course ont la même intensité, [ Traité des Fluxions, tome II, n° 188.) Solution. — Soit AMD la courbe cherchée telle, que l'arc AMB ait une longueur donnée, et que le temps employé à parcourir AMB avec la vitesse variable que nous désignerons par  $v$ , soit un minimum. D'après la méthode précédente nous devons chercher la courbe AMB pour laquelle l'expression  $\int \frac{ds}{v}$  soit un minimum absolu; et si nous regardons  $v$  comme représentant une vitesse il suffira de rendre minimum la somme  $E(AMB, v) - H G(AMB, X)$ . Enfin, étant la projection horizontale de la courbe AMB, et désignant une nouvelle vitesse constante et indéterminée comme  $X$ , nous cherchons la courbe pour laquelle l'expression  $G(AMB, v) - H G(AMB, X) - G(OB, X)$  est un minimum. Enfin, si nous décomposons ces trois grandeurs en un même nombre d'éléments correspondants, et que nous appelions  $ds$  et  $dr$  l'élément  $MX$  de la courbe et sa projection  $m-M'$  sur l'horizon, il suffira de rendre minimum chacun des éléments  $\frac{ds}{v} - \frac{dr}{X}$ , ou,  $Qr'^2$  désignant une nouvelle vitesse, le minimum aura lieu, d'après le lemme de la page 113, quand on aura  $\frac{M'M'}{sm} = \frac{M'M}{I} = -T = -\frac{ds}{U} \frac{1}{X}$  ou enfin  $dr = C - P C c fji (*4" A) (I)$ .  $C$  et  $C'$  étant deux constantes arbitraires.

Digitized by Google

## APPLICATIONS.

62. I. PROBLÈME. — Trouver la ligne de la plus vite descente parmi toutes les lignes d'une longueur donnée qui réunissent deux points donnés, dans le cas où les forces qui sollicitent le mobile aux différents points de sa course ont la même direction. (*Traité des Fluxions*, tome II, n° 588.)

Solution. — Soit  $AMB$  la courbe cherchée telle, que l'arc  $AMB$  ait une longueur donnée, et que le temps employé à parcourir  $AMB$  avec la vitesse variable  $v$ , que nous désignerons par  $\mathfrak{C}.AMB$ ,  $v$ , soit un minimum.

D'après la méthode précédente nous devons chercher la courbe  $AMB$  pour laquelle l'expression  $\text{arc } AMB + \lambda \cdot \mathfrak{C}.(AMB, v)$ , ou celle-ci,

$$\frac{\text{arc } AMB}{\lambda} + \mathfrak{C}.(AMB, v),$$

est un minimum absolu; et si nous regardons  $\lambda$  comme représentant une vitesse, il suffira de rendre minimum la somme  $\mathfrak{C}.(AMB, v) + \mathfrak{C}.(AMB, \lambda)$ .

Enfin,  $\overline{BO}$  étant la projection horizontale de la courbe  $AMB$ , et  $\mu$  désignant une nouvelle vitesse constante et indéterminée comme  $\lambda$ , nous chercherons la courbe pour laquelle l'expression

$$\mathfrak{C}.(AMB, v) + \mathfrak{C}.(AMB, \lambda) - \mathfrak{C}.(OB, \mu)$$

est un minimum.

Enfin, si nous décomposons ces trois grandeurs en un même nombre d'éléments correspondants, et que nous appelions  $ds$  et  $dy$  l'élément  $MM'$  de la courbe et sa projection  $mM'$  sur l'horizon, il suffira de rendre minimum chacun des éléments

$$\frac{ds}{v} + \frac{ds}{\lambda} - \frac{dy}{\mu},$$

ou

$$\frac{\frac{ds}{v} + \frac{ds}{\lambda}}{\frac{v}{v + \lambda}} - \frac{dy}{\mu}.$$

Or  $\frac{v\lambda}{v + \lambda}$  désignant une nouvelle vitesse  $V$ , le minimum aura lieu, d'après le lemme de la page 113, quand on aura

$$\sin M'Mm = \frac{dy}{ds} = \frac{V}{\mu} = \frac{v\lambda}{\mu(v + \lambda)},$$

ou enfin

$$\frac{dy}{ds} = \frac{v}{C + C'v} \quad (I),$$

$C$  et  $C'$  étant deux constantes arbitraires.



I aa DES MÉTHODES EK GÉOMÉTRIE. B. emarqiw. — La relation { I ) est l'équation différentielle de la brachistochrone cherchée, pour le cas où la pesanteur agit sur le mobile par des droites parallèles et avec une intensité constante ou variable suivant une loi quelconque ; elle est telle que la brachistochrone est tangente à la verticale du point de départ, car, en faisant  $v = 0$  dans l'équation, on a  $\frac{dr}{dt} = 0$  ; a. PROBLÈME. — Parmi toutes les lignes d'égale longueur qui joignent deux points donnés A et B, trouver celle qui est parcourue dans un temps minimum par un mobile soumis à l'action d'une force émanant d'un centre fixe. ( Traité des Fluxions, tome II, n° 591.) Solution. — Soit AMB la courbe cherchée pour laquelle, en recourant à la notation abrégée que nous avons employée plusieurs fois, la grandeur  $G(AMB, v)$  est minimum. Comme toutes les courbes, parmi lesquelles se trouve celle que nous cherchons, ont la même longueur, on désignant par  $v$  une vitesse indéterminée, la grandeur  $G(AMB, v)$  sera constante pour toutes ces courbes, et par suite la somme  $G(AMB, v) - G(AMB, v)$  doit être un minimum absolu pour la courbe cherchée. Enfin, pour toutes les courbes qui joignent le point A au point B, l'arc AB, décrit du point C comme centre avec CB pour rayon et terminé aux rayons CA, CB, est constant, et le temps employé à parcourir cet arc avec une vitesse constante  $v$  est constant. Donc la courbe cherchée satisfera à cette condition  $G(AMB, v) - G(AMB, v) = 0$ . —  $G(AMB, v) = \text{minimum}$ . Enfin, cette condition sera satisfaite si l'on rend minimum  $MM' - NN'$  ;  $NN' = \frac{1}{v} MM'$  ; VA  $\frac{1}{v}$  CB Or  $\frac{1}{v} CM$  et désignant de nouvelles vitesses, cette dernière expression sera minimum si l'on a en chaque point de la courbe cherchée  $\sin CMM' = \frac{VA}{CM} \cdot \frac{1}{v}$  ou, en prenant le point C pour origine des coordonnées polaires, et posant  $CM = r$ ,  $CB = r_0$ ,  $\angle C = \theta$ ,  $\frac{dr}{dt} = \dot{r}$  ; ds Digitized by Google

*Remarque.* — La relation (1) est l'équation différentielle de la brachistochrone cherchée, pour le cas où la pesanteur agit sur le mobile par des droites parallèles et avec une intensité constante ou variable suivant une loi quelconque : elle montre que la brachistochrone est tangente à la verticale du point de départ, car, en faisant  $v = 0$  dans l'équation, on a

$$\frac{dy}{ds} = 0.$$

2. PROBLÈME. — Parmi toutes les lignes d'égale longueur qui joignent deux points donnés A et B, trouver celle qui est parcourue dans un temps minimum par un mobile soumis à l'action d'une force émanant d'un centre fixe. (*Traité des Fluxions*, tome II, n° 591.)

*Solution.* — Soit AMB la courbe cherchée pour laquelle, en recourant à la notation abrégée que nous avons employée plusieurs fois, la grandeur  $\mathfrak{C}(AMB, v)$  est minimum.

Comme toutes les courbes, parmi lesquelles se trouve celle que nous cherchons, ont la même longueur, en désignant par  $\lambda$  une vitesse indéterminée, la grandeur  $\mathfrak{C}(AMB, \lambda)$  sera constante pour toutes ces courbes, et par suite la somme  $\mathfrak{C}(AMB, v) + \mathfrak{C}(AMB, \lambda)$  doit être un minimum absolu pour la courbe cherchée. Enfin, pour toutes les courbes qui joignent le point A au point B, l'arc  $aB$ , décrit du point C comme centre avec CB pour rayon et terminé aux rayons CA, CB, est constant, et le temps employé à parcourir cet arc avec une vitesse constante  $\mu$  est constant. Donc la courbe cherchée satisfera à cette condition

$$\mathfrak{C}(AMB, v) + \mathfrak{C}(AMB, \lambda) - \mathfrak{C}(aB, \mu) = \text{minimum}.$$

Enfin, cette condition sera satisfaite si l'on rend minimum

$$\frac{MM'}{v} + \frac{MM'}{\lambda} - \frac{NN'}{\mu} = \frac{MM'}{v + \lambda} - \frac{Mm'}{\mu \cdot \frac{CM}{CB}}.$$

Or  $\frac{v\lambda}{v + \lambda}$  et  $\mu \cdot \frac{CM}{CB}$  désignant de nouvelles vitesses, cette dernière expression sera minimum si l'on a en chaque point de la courbe cherchée

$$\sin CMM' = \frac{\frac{v\lambda}{v + \lambda}}{\mu \cdot \frac{CM}{CB}},$$

ou, en prenant le point C pour origine des coordonnées polaires, et posant  $CM = r$ ,  $CB = r_0$ ,

$$r \frac{d\theta}{dr} = \frac{r_0}{r} \cdot \frac{v\lambda}{v + \lambda}.$$

SECONDE PARTIE la: ou enfin  $cTc'T\llcorner C, C'$  désignant deux constantes arbitraires. ' Telle est l'équation différentielle de la courbe cherchée ; elle montre que la courbe est tangente au rayon  $C.\backslash$  qui aboutit au point de départ. 3. Problème.— Parmi toutes les lignes planes d'une longueur donnée qui réunissent deux points donnés  $k$  et  $B$ , trouver celle qui, par sa rotation autour de l'axe  $Ox$  situé dans le même plan, engendre la surface minimum » Solution. — Soit  $AMB$  la courbe cherchée pour laquelle les intégrales  $\int ds, \int \sqrt{1 + p^2}$  étendues à tous les éléments de la courbe compris entre  $A$  et  $B$  ont, la première une valeur donnée, la seconde une valeur minimum ; pour cette courbe, l'intégrale  $\int ds \sqrt{1 - f}$  sera un minimum absolu,  $\backslash$  étant un paramètre indéterminé. D'ailleurs, pour toutes les courbes qui joignent le point  $A$  au point  $B$ , l'intégrale  $\int dx$  ou  $\int y dx$ , prise entre les mêmes limites (que la précédente), et dans laquelle  $u$  désigne un nouveau paramètre indéterminé, a une valeur constante. Nous définirons donc la courbe cherchée par cette condition que l'intégrale  $\int \sqrt{1 + p^2}$  soit un minimum ; et cette condition sera satisfaite si nous rendons minimum chacun de ses éléments  $(i - t - \Delta j) ds = \int y dx$ , ou  $\int \sqrt{1 - f} ds$  — et — comme représentant des vitesses et que  $\sqrt{1 - f} = U'$ , l'on regarde comme donné l'accroissement  $dy$  de l'ordonnée, dans le passage d'un point  $M$  de la courbe au point infiniment voisin  $M'$ , le minimum aura lieu si l'on a  $\frac{d}{ds} \left( \frac{y}{U'} \right) = 0$  ou  $\frac{d}{ds} \left( \frac{y}{\sqrt{1 - f}} \right) = 0$  — qui est l'équation différentielle de la courbe cherchée, et celle-ci est encore une chaînette ( voir le problème 4, page 119 ). 4. Problème. — Parmi toutes les lignes planes d'une longueur donnée

ou enfin

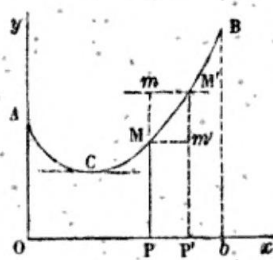
$$(II) \quad r^2 \frac{d\theta}{ds} = r_0 \cdot \frac{v}{C + C'v},$$

$C, C'$  désignant deux constantes arbitraires.

Telle est l'équation différentielle de la courbe cherchée : elle montre que la courbe est tangente au rayon  $CA$  qui aboutit au point de départ.

**3. PROBLÈME.** — Parmi toutes les lignes planes d'une longueur donnée qui réunissent deux points donnés  $A$  et  $B$ , trouver celle qui, par sa rotation autour de l'axe  $Ox$  situé dans le même plan, engendre la surface minimum.

*Solution.* — Soit  $AMB$  la courbe cherchée pour laquelle les intégrales



$\int ds$ ,  $\int y ds$ , étendues à tous les éléments de la courbe compris entre  $A$  et  $B$  ont, la première une valeur donnée, la seconde une valeur minimum : pour cette courbe, l'intégrale

$$\int ds + \lambda \int y ds = \int ds (1 + \lambda y)$$

sera un minimum absolu,  $\lambda$  étant un paramètre indéterminé.

D'ailleurs, pour toutes les courbes qui joignent le point  $A$  au point  $B$ , l'intégrale  $\int dx$  ou  $\mu \int dx$ , prise entre les mêmes limites que la précédente, et dans laquelle  $\mu$  désigne un nouveau paramètre indéterminé, a une valeur constante. Nous définirons donc la courbe cherchée par cette condition que l'intégrale

$$\int [(1 + \lambda y) ds - \mu dx]$$

soit un minimum ; et cette condition sera satisfaite si nous rendons minimum chacun de ses éléments  $(1 + \lambda y) ds - \mu dx$ , ou

$$\frac{ds}{1 + \lambda y} - \frac{dx}{\mu}.$$

Or, si l'on regarde  $\frac{1}{1 + \lambda y}$  et  $\frac{1}{\mu}$  comme représentant des vitesses et que l'on regarde comme *donné* l'accroissement  $dy$  de l'ordonnée, dans le passage d'un point  $M$  de la courbe au point infiniment voisin  $M'$ , le minimum aura lieu si l'on a

$$\sin MM'm' = \frac{dx}{ds} = \frac{\frac{1}{1 + \lambda y}}{\frac{1}{\mu}} = \frac{\mu}{1 + \lambda y},$$

ou

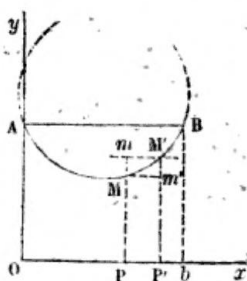
$$(III) \quad (y + C) \frac{dx}{ds} = C'$$

qui est l'équation différentielle de la courbe cherchée, et celle-ci est encore une chaînette (*voir* le problème 4, page 119).

44 DES en géométrie\* - ' qui réunissent les extrémités iT  
 une limite ihinée AB , tmeC^><ù{e dont Caire {eonqmsv entre la courbe  
 et la droite AB) est nmimum. Solution. — Soit prise pour axes des a; une  
 droite 0;r qui laisse au-dessus I d'elle tous les points de la courbe cherchée  
 AMB. L'aire AMBA étant maximum, l'intégrale prise par ra|)jiort à l'axe O  
 x, sera , au contraire , minimum, et comme les intégrales Jf/.v et /^/.r ont  
 une valeur constante pqr toutes les courbes que nous considérons, la  
 Courbe cherchée sera définie par cette condition que l'intégrale ■ / [ (& -4-  
 ( \ y — li ) d.i-y /b bT.'-r P' h ou / étendue à tous les points de la courbe  
 conipris entre Ael B, soit un mininuim , et cette condition sera satisfaite si  
 l'on rend minimum l'élément . ' lis — ( ti — >. r ) dx = — — " 1 dx c'est-à-  
 dire si l'on a ■c ■ sin MM'hi' = ^ — ■ = U- — >, ) • ( I ds I • ■ . ' ' u: — Ar  
 On en déduit \* . • \* . ■(IV) • . • (^\_C) = C'J jour l'équation différcntiello de  
 la courbe cherchéq ; cette courl)o est donc un are de cercle. Observation. —  
 On voit, jiar la série des applications contenues dans le chapitre actuel et  
 dans le § II du précé<lcnt , que la méthode de Maclaurin , qui a d'ailleurs  
 ses limites comme toutes les méthodes purement géométriques, no lo cède  
 guère en élégance, en rapidité et en uniformité même, à la méthode  
 analyticjue des variations, à laquelle elle jrarait sujérieure. Si l'on  
 considère la simplicité élémentaire des moyens qu'cllo emploie jwur  
 atteindre son but. On jajut observer aussi qu'en cette matière encore la  
 géométrie a devancé l'anal puiſejue la belle conception dé' Maclaurin a  
 précédé de deux et de vingt ans les travaux analytiques d'Euler et de  
 Lagrange sur le même sujet. • CTHAPITRE VI. Se la méthode par  
 décomposition en éléments correspondants. 63. La méthode par  
 décomposition'en éléments corre.sj)ondants , considérée au point de vue de  
 ses rapjiorts avec l'analyse, est l'une des plus importantes do la géométrie.  
 Elle s'applique aux deiLX \>roblèmes Digitized

qui réunissent les extrémités d'une droite donnée AB, trouver celle dont l'aire (comprise entre la courbe et la droite AB) est maximum.

*Solution.* — Soit prise pour axes des  $x$  une droite  $Ox$  qui laisse au-dessus d'elle tous les points de la courbe cherchée AMB. L'aire AMBA étant maximum, l'intégrale  $\int y dx$ , prise par rapport à l'axe  $Ox$ , sera, au contraire, minimum, et comme les intégrales  $\int ds$  et  $\int dx$  ont une valeur constante pour toutes les courbes que nous considérons, la courbe cherchée sera définie par cette condition que l'intégrale



$$\int [ds + (\lambda y - \mu) dx]$$

$$\text{ou} \quad \int [ds - (\mu - \lambda y) dx],$$

étendue à tous les points de la courbe compris entre A et B, soit un minimum, et cette condition sera satisfaite si l'on rend minimum l'élément

$$ds - (\mu - \lambda y) dx = \frac{ds}{1} - \frac{dx}{\frac{1}{\mu - \lambda y}};$$

c'est-à-dire si l'on a

$$\sin MM'm' = \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\frac{1}{\mu - \lambda y}} = \mu - \lambda y = -\lambda \left( y - \frac{\mu}{\lambda} \right).$$

On en déduit

$$(IV) \quad (y - C) = C' \frac{dx}{ds}$$

pour l'équation différentielle de la courbe cherchée : cette courbe est donc un arc de cercle.

*Observation.* — On voit, par la série des applications contenues dans le chapitre actuel et dans le § II du précédent, que la méthode de Maclaurin, qui a d'ailleurs ses limites comme toutes les méthodes purement géométriques, ne le cède guère en élégance, en rapidité et en uniformité même, à la méthode analytique des variations, à laquelle elle paraît supérieure, si l'on considère la simplicité élémentaire des moyens qu'elle emploie pour atteindre son but. On peut observer aussi qu'en cette matière encore la géométrie a devancé l'analyse, puisque la belle conception de Maclaurin a précédé de deux et de vingt ans les travaux analytiques d'Euler et de Lagrange sur le même sujet.

## CHAPITRE VI.

### De la méthode par décomposition en éléments correspondants.

63. La méthode par décomposition en éléments correspondants, considérée au point de vue de ses rapports avec l'analyse, est l'une des plus importantes de la géométrie. Elle s'applique aux deux problèmes

SECONDE PARTIE. LaS généraux ayant pour objet d'évaluer une grandeur principalement décomposée en ses éléments, ou de comparer deux grandeurs déjà décomposées en un même nombre d'éléments correspondants. Le premier problème se ramène le plus souvent au second ; nous verrons un exemple de réduction dans le problème de l'attraction d'une sphère sur un point extérieur. Si cette réduction paraît impossible ou inutile, on devra, ou chercher une nouvelle signification géométrique des éléments de la grandeur que l'on veut évaluer, ou bien combiner deux à deux des éléments de cette grandeur qui se trouvent séparés par un intervalle fini, les éléments résultants pouvant présenter une signification géométrique se prêtant mieux à l'évaluation de leur somme; ou, d'autres fois enfin, décomposer chaque élément en deux éléments partiels, dont on pourra obtenir plus facilement les sommes respectives. Le problème de la quadrature des épicycloïdes présente une application de ce dernier procédé. Nous donnerons des exemples des deux premiers dans le problème de la rectification des épicycloïdes et dans celui de l'attraction d'un cylindre sur un point extérieur. Dans le second problème, il peut arriver d'abord que la nature de la question permette de décomposer les deux grandeurs considérées en un même nombre d'éléments correspondants qui soient deux à deux dans un rapport constant, et l'on en conclura que ces grandeurs sont entre elles dans le même rapport que leurs éléments; d'autres fois, on pourra évaluer la différence entre les éléments correspondants des deux grandeurs et trouver la somme de ces différences élémentaires (qui représentera la différence entre les grandeurs considérées, etc. Nous verrons des exemples de ces différents cas dans la théorie des courbes autochrones et dans la démonstration du théorème de Fagnano. On voit que la méthode actuelle remplit en géométrie le même rôle que dans l'analyse le calcul intégral, qu'elle a précédé dans l'ordre historique, et qu'elle peut quelquefois remplacer avec avantage; elle a été l'unique instrument des créateurs de la géométrie infinitésimale, Kepler, Galvée, Pascal, Fermat, Wallis et Newton; et si son importance actuelle paraît moindre, on doit reconnaître cependant qu'elle a encore un rôle considérable à remplir en éclairant la marche de l'analyse, en la dirigeant dans le choix si important des variables qui conviennent le mieux à chaque question, et lui fournissant ainsi le principe de ses transformations. Applications. 4. I. Attraction d'une sphère sur un point extérieur. • a.

L'attraction qu'une couche sphérique homogène exerce sur un point extérieur  $O$  étant, à cause de la symétrie, dirigée suivant le diamètre  $OC$  qui aboutit au centre, nous n'aurons, pour la déterminer, qu'à considérer les composantes suivant  $OC$  des attractions élémentaires, et à évaluer leur somme. Soit donc  $NS$  la circonférence qui, par sa rotation autour de  $OC$ , engendre la sphère qui forme la surface extérieure de la



généraux ayant pour objet d'évaluer une grandeur préalablement décomposée en ses éléments, ou de comparer deux grandeurs déjà décomposées en un même nombre d'éléments correspondants.

Le premier problème se ramène le plus souvent au second; nous verrons un exemple de cette réduction dans le problème de l'attraction d'une sphère sur un point extérieur. Si cette réduction paraît impossible ou inutile, on devra, ou chercher une nouvelle signification géométrique des éléments de la grandeur que l'on veut évaluer, ou bien combiner deux à deux des éléments de cette grandeur qui se trouvent séparés par un intervalle fini, les éléments résultants pouvant présenter une signification géométrique se prêtant mieux à l'évaluation de leur somme; ou, d'autres fois enfin, décomposer chaque élément en deux éléments partiels, dont on pourra obtenir plus facilement les sommes respectives. Le problème de la quadrature des épicycloïdes présente une application de ce dernier procédé. Nous donnerons des exemples des deux premiers dans le problème de la rectification des épicycloïdes et dans celui de l'attraction d'un cylindre sur un point extérieur.

Dans le second problème, il peut arriver d'abord que la nature de la question permette de décomposer les deux grandeurs considérées en un même nombre d'éléments correspondants qui soient deux à deux dans un rapport constant, et l'on en conclura que ces grandeurs sont entre elles dans le même rapport que leurs éléments; d'autres fois, on pourra évaluer la différence entre les éléments correspondants des deux grandeurs et trouver la somme de ces différences élémentaires qui représentera la différence entre les grandeurs considérées, etc. Nous verrons des exemples de ces différents cas dans la théorie des courbes tautochrones et dans la démonstration du théorème de Fagnano.

On voit que la méthode actuelle remplit en géométrie le rôle réservé dans l'analyse au calcul intégral, qu'elle a précédé dans l'ordre historique, et qu'elle peut quelquefois remplacer avec avantage; elle a été l'unique instrument des créateurs de la géométrie infinitésimale, Kepler, Cavalieri, Pascal, Fermat, Wallis et Newton; et si son importance actuelle paraît moindre, on doit reconnaître cependant qu'elle a encore un rôle considérable à remplir en éclairant la marche de l'analyse, en la dirigeant dans le choix si important des variables qui conviennent le mieux à chaque question, et lui fournissant ainsi le principe de ses transformations.

#### APPLICATIONS.

##### 64. 1. *Attraction d'une sphère sur un point extérieur.*

a. L'attraction qu'une couche sphérique homogène exerce sur un point extérieur  $O$  étant, à cause de la symétrie, dirigée suivant le diamètre  $OC$  qui aboutit au point attiré, nous n'aurons, pour la déterminer, qu'à considérer les composantes suivant  $OC$  des attractions élémentaires, et à évaluer leur somme. Soit donc  $aABb$  la circonférence qui, par sa rotation autour de  $OC$ , engendre la sphère qui forme la surface extérieure de la

16 DES MÉTHODES EN GÉOMÉTRIE. . ! • courho. Menons  
 par le point attiré O deux cordes infiniment voisines UAB, () « des points A  
 et B menons AP, BQ perpendiculaires sur OC, et par le centre C, ( ' ..M  
 perpendiculaire sur OAB. Prenons pour élément de volume de la couche  
 sphérique au point A le cylindre ayant pour hauteur t, épaisseur de la  
 couche', et pour base la surface élémentaire engendrée j^ar Art tournant  
 d'un angle infiniment petit rfij» autour de OC ; si p désigne la densité de la  
 couche que nous supposons constante, pt . . Art . AP ' représentera  
 l'élément matériel de la couche on A, et < pt . . Art . AP cos AOC — P . t .  
 (1!^ An . AP . OM OA OC = rfX OA sera la coraiiosanto, suivant OC, de  
 l'attraction exercée par cet élément sur le point matériel O , dont nous  
 prenons la masse pour unité. Mais on a, dans les triangles semblables OAP  
 et OCM, OAn et OAB, ^ \_ 01 Am OA - OC ' OA BA OB A rt + B A A rt +  
 B A UA + OB V. ( )M On en déduit A rt . Aj;^ tu' OM \_ {Art + BA}j CM. ■ '  
 donc, en substituant dans l'expression de cAX, il vient («) rfX = ° • . °:lf ^ . (   
 Art f BA) . CM. 9. (x; • ' A. Celci posé , proposons-nous de comparer les  
 attractions exercées par la couche sur les deux points O et O'. Les  
 comiwsantos élémentaires de ces attractions seront dans un rapport constant  
 si , nissant par O' {que nous supposons quelque part sur le diamètre CO)  
 des cordes O'A' B', n'a' b\ qui déterminent dans la circonférence (C) des  
 cordes égales aux précé- . dentes, à savoir : A^B' = AB et a' b' rtA, nous  
 comparons les comimsantes des attractions exercées respectivement sur O  
 et O' par les éléments de la couche adjacents aux /mints A et A' car on, aura  
 pour la nouvelle composante • . . • <•') ,/k' = £4^-(A'rt'. ■2 0'C •B7/).CM';  
 «t il résulte de la construction des éléments corréspdrulants A et A' : i" que  
 CM = CM'; a" que les arcs AB et àb étant respectivement égaux aux arcs A'  
 B' et à' A', la différence des premiers , c'est-à-dire 'Aa -f îTÀ est Digîîizad  
 by Google

SECONDE PARTIE. 127 (•iale à la différence des sections X'»'  
 -h Wh'. On aura donc et, par suite,  $\frac{1}{2} \left( \frac{r}{X} \right) \frac{dX}{dt}$  (Newton,  
 Livre des Principes, proposition 71.) c. On peut aller plus loin et é-  
 valuer l'expression l'expression même de X. , Observons d'abord  
 que si, dans l'application de la formule (i), on veut n'avoir à considérer  
 qu'un seul système de cordes issues du point O et dont les longueurs  
 croissent de zéro à  $2R$ , il faudra doubler l'expression (le  $r/X$ , afin qu'elle  
 représente la somme des composantes suivant OC des attractions exercées  
 sur le point O par les éléments de la couche adjacente aux points A et B à  
 la fois. On aura donc, à la nouvelle signification de  $r/X$ ,  $(1) \frac{f}{X} = -r \left( \frac{A}{B} - \frac{B}{A} \right) \frac{1}{CM}$ ; ' OC . » 'et si l'on fait la somme des composantes des  
 attractions exercées sur O par les deux portions de la couche qui  
 correspondent aux zones totales engendrées par A et B, on aura  $\frac{1}{2} \left( \frac{r}{X} \right) \frac{dX}{dt}$ ,  
 (Arriver à la CAf' t x, . . . ' ■ pour cette somme, et l'attraction totale sera,  
 par suite,  $X = r \int \frac{A+B}{X^2} dX$  CM. ÜC' . Or, si par l'une des extrémités du  
 diamètre CO on mène les cordes DB' et l'autre j' respectivement égales à AB et  
 l'autre, et - qu'on abaisse CM' perpendiculaire sur DB', on aura  $A \ll -I - iiO =$   
 $Wb \backslash CM = CM'$ , et, par suite,  $\frac{1}{2} \left( \frac{r}{X} \right) \frac{dX}{dt} CM = \frac{1}{2} \left( \frac{r}{X} \right) \frac{dX}{dt} CM' = B.2R \frac{dX}{dt}$ ,  
 Digitized by Google

égale à la différence des seconds  $\widehat{A'a'} + \widehat{B'b'}$ . On aura donc

$$\frac{dX}{aX'} = \frac{\frac{1}{OC^2}}{\frac{1}{O'C^2}},$$

et, par suite,

$$(2) \quad \frac{X}{X'} = \frac{\frac{1}{OC^2}}{\frac{1}{O'C^2}}$$

(NEWTON, *Livre des Principes*, proposition 71.)

c. On peut aller plus loin et déterminer géométriquement l'expression même de  $X$ .

Observons d'abord que si, dans l'application de la formule (1), on veut n'avoir à considérer qu'un seul système de cordes issues du point O et dont les longueurs croissent de zéro à  $2R$ , il faudra doubler l'expression de  $dX$ , afin qu'elle représente la somme des composantes suivant OC des attractions exercées sur le point O par les éléments de la couche adjacente aux points A et B à la fois. On aura donc, vu la nouvelle signification de  $dX$ ,

$$(1) \quad dX = \frac{\rho \cdot \varepsilon \cdot d\psi}{OC^2} \cdot (Aa + Bb) CM;$$

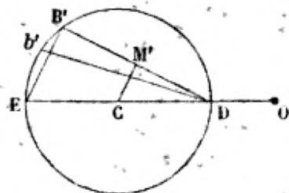
et si l'on fait la somme des composantes des attractions exercées sur O par les deux portions de la couche qui correspondent aux zones totales engendrées par  $Aa$  et  $Bb$ , on aura

$$\frac{2\pi\rho \cdot \varepsilon}{OC^2} (Aa + Bb) CM$$

pour cette somme, et l'attraction totale sera, par suite,

$$X = \frac{2\pi\rho \cdot \varepsilon}{OC} f(Aa + Bb) CM.$$

Or, si par l'une des extrémités du diamètre CO on mène les cordes DB' et Db' respectivement égales à AB et ab, et qu'on abaisse CM' perpendiculaire sur DB', on aura



$$\widehat{Aa} + \widehat{Bb} = \widehat{B'b'}, CM = CM',$$

et, par suite,

$$f(Aa + Bb) CM = fB'b' \cdot CM' = R \cdot 2R = 2R^2,$$

ISB . DES MÉTHODES EN GÉOMÉTRIE. car l'élément  
 B'ft'.CM' de cette dernière somme représente le produit par le rayon R de  
 l'accroissement Dh' — 1)B' de la corde DB'. ■ On a donc enfin ' • , ' - ' (I)  
 UC ü. Attraction ^ttn cylindre homogène et indéfini mtr un point extérieur,  
 , . a. Évaluons d'abord ^attraction exercée sur un imnt extérieur o ixir jtn  
 prisme homogène, indéfini ^ et dont la section droite^ t est infiniment jn-  
 tite. Soient t! = op la distancce du point attiré o à la droite pâb qui représente  
 l'axe du prisme; ^e.nb l'élément matériel du prisme adjacent • à fih. On  
 aura, pour la composante suivant np de l'attraction exercée par cet élément  
 sur le point <y, \* tt.i. ab 5— • COSrtw/J , <1\ ■ en posant oa = r. Or, si l'on  
 construit la circonférence np'a'b', réciproque de la droite pnh , le point o  
 étant pris pour origine et la puissnnee op .op' z=.on ,oa' = nb.ob' étant égale  
 à I, à cliaipie élément ab de la droite corresjiondra un éléraniit «7/ de la  
 circonférence, et l'on aura, en posant o«' =5/, o ah a' b' ah a' b rr' " ,,, = — T  
 a h ' <IX. Il viendra donc, en substituant dans d\ , : pï . a' b' cos a'op', \ = oej  
 a' b', ccsa'op'. Mais, si l'on joint //é"qui coupe oa' en h' sous un angle très-  
 peu différent d'un droit, on voit, en négligeant les infiniment petits du  
 second ordre , que a7/. cos a'op' = h' h', et que d'ailleurs h'k' est  
 l'accroissement de la corde p'a' quand on passe de a' en // sur la  
 circonférence p'n'b'ô. Il en résulte que la somme /«'i'. cos a'O//, étendue à  
 tous les points de \* ü 2 • \* \* la circonférence, est égale èe-xop' = — = et  
 que, par.suite. (0 . ; '> Ainsi, Cattmetion est jnnjxirtinnelle à la section du  
 prisme et en raison inverse de sa distance au point attiré. b. Revenons au  
 problème proposé, et menons par le point O un plan perpendiculaire aux  
 génératrices du cylindie-et déterminant dans celui-ci une section circulaire  
 dont le centre est C. Si l'on prend pour élément de volume du cylindre iin  
 prisme droit indéfini^, ayant jaïur base, sur le plan Digitized by Google

SECONDE PARTIE. <sup>1</sup> 29 du cercle C, l'un des éléments superficiels de ce dernier; on verra que l'attraction de chaque prisme élémentaire sur le point O est proportionnelle à l'aire de sa base, (pVelle est en raison inverse de la distance du point O à cette base et dirigée suivant la droite qui mesure cette distance. Le problème proposé est donc- ramené à celui-ci : Déterminer l'attraction exercée par un cercle sur un point extérieur, la loi de l'attraction étant celle de la raison inverse de la distance. Pour le résoudre, il nous suffira d'évaluer l'attraction exercée sur le point O par une couronne circulaire d'épaisseur R. Menons, à cet effet, les cordes infiniment voisines OAB, Qkth, et désignons par d la somme des composantes suivant OC, des attractions exercées sur le point O par les éléments superficiels adjacents aux points A et B à la fois on aura, en abaissant CM perpendiculaire sur AB {voir la figure de la page lafig, , , v '\* ntt I B/A OM 2pf/R/Aa Bé\,, Or les triangles semblables OA n, OB/i donnent . Aa ÔÂ' on en déduit U)B^ Ad ÔA' Art-f Bé \_ Afl-f-Bft OA-t-OBT 2OM ' W OB' -An -f- Bé ~ÜM Il vient donc, en substituant dans l'expression de f/Y, B/.), • et, par suite, I t O) ■ p.4wRf/R. ' tJc Scolie. — , On démontre aisément pour le cas actuel, comme pour celui, d'une couche sphérique, qu'un point situé dans l'intérieur du solide est en équilibre sous l'action des forces opposées auxquelles il est soumis. 3. Théorie géométrique des courbes tautochrones. a. Un arc de courbe AaO est à l'autochrone lorsqu'il est tel, qu'un mobile abandonné sans vitesse initiale en l'un des points de cet arc, et soumis dans tous les cas à l'action des mêmes forces, emploie le même temps à parvenir à l'extrémité O de cet arc, quel que soit son point de départ! ' . \* » • • . \* 6. PniNcirE

PO.XDAMEN'TAL. Si un point matériel, soumis à l'action d'une force constante ou variable suivant une loi donnée, décrit une courbe AaO telle que la composante tangentielle de la force accélératrice soit à chaque instant proportionnelle, à l'aire comprise entre la position actuelle du mobile et un point fixe O de la courbe qu'il décrit, cette courbe sera tautochrone, et le mobile parviendra au point O après un ■ . . 9 ' Oig'itized by Google

du cercle C, l'un des éléments superficiels de ce dernier; on verra que l'attraction de chaque prisme élémentaire sur le point O est proportionnelle à l'aire de sa base, qu'elle est en raison inverse de la distance du point O à cette base et dirigée suivant la droite qui mesure cette distance. Le problème proposé est donc ramené à celui-ci : *Déterminer l'attraction exercée par un cercle sur un point extérieur, la loi de l'attraction étant celle de la raison inverse de la distance.* Pour le résoudre, il nous suffira d'évaluer l'attraction exercée sur le point O par une couronne circulaire d'épaisseur  $dR$ . Menons, à cet effet, les cordes infiniment voisines OAB, Oab, et désignons par  $dY$  la somme des composantes suivant OC, des attractions exercées sur le point O par les éléments superficiels adjacents aux points A et B à la fois; on aura, en abaissant CM perpendiculaire sur AB (voir la figure de la page 126),

$$dY = 2\rho dR \left( \frac{Aa}{OA} + \frac{Bb}{OB} \right) \frac{OM}{OC} = \frac{2\rho dR}{OC} \left( \frac{Aa}{OA} + \frac{Bb}{OB} \right) OM.$$

Or les triangles semblables OAa, OBb donnent

$$\frac{Aa}{OA} = \frac{Bb}{OB} = \frac{Aa + Bb}{OA + OB} = \frac{Aa + Bb}{2OM},$$

on en déduit

$$\frac{Aa}{OA} + \frac{Bb}{OB} = \frac{Aa + Bb}{OM}.$$

Il vient donc, en substituant dans l'expression de  $dY$ ,

$$dY = \frac{2\rho dR}{OC} (Aa + Bb),$$

et, par suite,

$$(2) \quad Y = \frac{\rho \cdot 4\pi R dR}{OC}.$$

*Scolie.* — On démontre aisément pour le cas actuel, comme pour celui d'une couche sphérique, qu'un point situé dans l'intérieur du solide est en équilibre sous l'action des forces opposées auxquelles il est soumis.

### 3. Théorie géométrique des courbes tautochrones.

a. Un arc de courbe AaO est dit *tautochrone* lorsqu'il est tel, qu'un mobile abandonné sans vitesse initiale en l'un des points de cet arc, et soumis dans tous les cas à l'action des mêmes forces, emploie le même temps à parvenir à l'extrémité O de cet arc, quel que soit son point de départ.

b. PRINCIPE FONDAMENTAL. — Si un point matériel, soumis à l'action d'une force constante ou variable suivant une loi donnée, décrit une courbe AaO telle, que la composante tangentielle de la force accélératrice soit à chaque instant proportionnelle à l'arc compris entre la position actuelle du mobile et un point fixe O de la courbe qu'il décrit, cette courbe sera tautochrone et le mobile parviendra au point O après un

130 - DES MÉTHODES EN GÉOMÉTRIE. Icmjis lonsteint ,  
indépendant île la jiositian partieuHère du point de depart . Deniou.stiatifin.  
— Imaginons qiip doux mobilos partoni l'n inômo temps dos points A ol a  
do l'arc A «O; lums appollorona ares résidas à l'épocio t les arcs Compris  
entre les positions occupées par les deux mobiles à celte éptHjue et le point  
O extrémité do l'arc, efnous désignerons par le rajport des arcs primitifs' /  
Af), «O. ' Cela posé , à la fin du premier instant les deux / "j ^ mobileg  
auront parcouru les arcs très-petits AA,, , «rt, , Jiroporlionnels aux  
composantes tangentiello \* des forces qui les sollicitent , co mposanles  
que l'on l>eut regarder comme constantes pendant le temps livs-court dont  
nous [larlons; cos arcs .AA,, , ««, seront donc, en vertu de l'lypothèse ,  
proportfonnols aux arcs. primitifs AO, oO, et l'on aura \* ) . f. et, (>ar suite ,  
(>)■ aa^ a() » A, O \_ «,o'-' I/O\*' /. , Ainsi , les arrf résidus a la fh du  
premier instant sont /i/ripnrlio/inels aux ans primitifs, l.es vitesses V,, e,  
actpiises par les deux mobiles à la même époqiKj sont également  
proportioniM'lles aux composantes tdngenlielles, ol par suite aux arcs  
primitifs oii.^mx arcs résidus; on a donc (ly e, 17. 0 /. ^ Dans le si'cond  
instant les deux mobiles serigit sollicités pai de nouvelles ^ (orccs qui  
seront dans le' rapport des arcs .A, 0, \_rt, O, et animés en outre des vitesses  
acquises 'pii sont dans le mémo rap]iort; donc, si A, A,, a, n., désignent les  
arcs parcounis dans ce second instant, un aura - - la, w. «,() et , par suite ,  
(^) A,0 \* Aü ' , ft.,0 V ^ et les vitesses ti4ales A',, l'j, acquises à la i même  
rapjiort , . (H) A , O «J O = k. Ainsi , tes arcs résidus à ta fin du seeo/ul  
in.sta'nt sont encore 'dans le même rajport que les ans primitifs; fcl ainsi de  
suite. Digilized by.Coogle



SECONDE PARTIE. 131 Le rapt de arcs résidus à une époque quelconque du mouvement simultané des deux mobiles demeure donc constamment égal au rapport des arcs primitifs. Il en résulte que ces arcs s'évanouissent en même temps, et que les deux mobiles parviennent au même instant à l'extrémité de l'arc  $NO$ , dont le tautochronisme se trouve par là établi. Scolie. — Les courbes isochrones, pour lesquelles le mobile qui les parcourt n'éprouve, aucune résistance, ont encore la même propriété que la résistance éprouvée par le mobile est proportionnelle à sa vitesse. Une démonstration entièrement semblable à la précédente suffit pour établir ce théorème, dans le cas de tautochronisme que nous venons d'examiner. COROLLAIRE I. — Tautochronisme dans le cas d'un mobile soumis à l'action de la pesanteur. En rapportant la courbe cherchée  $A$  à l'horizontale  $OR$  et à la verticale  $ON$  du point  $O$ , on trouve immédiatement pour son équation différentielle. Si l'intensité de la pesanteur est constante,  $g$  est un nombre invariable, et la courbe cherchée est une cycloïde. Si l'intensité de la pesanteur est variable avec la distance du mobile à un plan horizontal quelconque,  $g$  est une fonction de  $s$ , et l'équation (I) conduit à l'équation de la courbe exprimée par une relation entre  $y$  et  $s$ . Dans les deux cas, et en supposant, pour le second que  $g$  ne devienne pas infini pour  $s = 0$ , on voit qu'à l'origine des arcs parcourus en temps égaux la tautochrone est normale à la direction de la pesanteur. COROLLAIRE II. — Tautochrone dans le cas d'un mobile attiré par un centre fixe. Le centre attirant étant pris pour origine des coordonnées polaires, et le point  $O$  étant pris pour origine des arcs  $s$ , on a, pour l'équation différentielle de la courbe cherchée, (II)  $r^2 \cos \theta = f(r)$  ou  $r^2 \cos \theta = f(r)$ .  $\theta$  étant l'angle de la tangente en un point de la courbe avec le rayon vecteur de ce point, et  $f(r)$  désignant la force, émanant du centre  $C$ , qui sollicite le mobile arrivé en ce point. Examinons, en particulier, le cas où la force est proportionnelle à la distance. On a alors  $f(r) = r$ ; et en désignant par  $r$ , le rayon vecteur qui aboutit à l'origine des arcs, on trouve d'abord  $r^2 - \frac{1}{2}v^2 = c$ ; tirant de là la valeur de  $s$  pour la relation (11), élevant au carré l'équation résultante, et remplaçant  $ds$  par  $r^2 - \frac{1}{2}v^2$  il vient en résolvant par rapport à  $r$ ,  $r = \frac{1}{2}v^2 + c$ . Digitized by Google

I 32 DKS MÉTHODES E.\ UÉOMKTKIE. Les variéu<sup>^</sup> lrs plus remarquables îles courbes représentées par celte équation sont fournies par les hypothèses suivantes ; i; la courbe est alors une épicycloïde ; <sup>^</sup> = I ; la courlx' se réduit à une droite située à une distance /•, du 1 elr, = o; la courbe est une spirale iQgarithiniiuc ayant le point centre attirant; t ] JC pour origine. , • Rrmtirqiw, — L'équation primitive /( c) Cüs a = At, dans laquelle on supiHise s = O, montre que ait jxiial origiar itex ans Jxircourus ni temps cgatt.c , la taiitncliriiiif est rtoriiiulf au rayait tpi'i ahoiitit aii centre attirant, pourvu que la valeur correspondante de/(/) ne soit pas nulle. ( rnir sur le même sujet un article de M. Puiseux ; Journal de Mathn. ma tapies, i844 i page 409.) ^ Ohservati. — Le tautochroni.«me de la cycloïde a été , comme oir lé sait, découvert par lluyghens {Hom/of<sup>^</sup>. oseil/at., prop. a5, page, 57). Newton généralisa ensuite le théorème d iluyghens\* et c'est la démonstration même qu'il a donnée de la propriété semldafile de rcpicyrloïdç ( Livre des Prmeipes, prop. 5i), que nous ayéns reproduite, en élabli.ssaht le théorème que nous avons pris jieur point do dé)art dans la recherche des courbes tautochrones. L'ouvrage d'Huyghens, déjà cité', cpntienl sur le môme sujet une dernière proposition remarquable tprop-page 58), dans laquelle il donne rex])ression du rap]iort des temps emjiloyés , par le même, mobile<sup>^</sup> dans le même mùiivemcnt, à parcourir une partie .\A' de l'arc AO de la cycloïdo et la partie restante A' O. Ce théorème particularisé conduit à cette consikjuence curieuse, que l'on retrouve également par l'analyse, que si dans le mouvement d'un jioint sur la ercloïdc on mène P horizontale du point de départ, relie du point le plus hits ou sommet de la eyeloïtPe, et Fhorizontalc équidistante , le temps cmjdoyé par le mobile dans son passage de la première h la troisième sera égal h celui qu'il emploiera à passer de la troisième à la seconde. ' Il ne serait peut-étro ni sans intérêt, ni sans difficulté, de rechercher • quelles sont toutes les courbes que l'on pourrait , pour abrégér, apj>eler courbes mesorhrones, qui jouissent do la même propriété. " , 4. Problème de Viviani. — En 1692, Viviani proposa aux analystes de . son temps sous ce titre: Ænigma geometricum de mim opijicin testiiudinis qitadrabilis lientisphericeæ, le problème suivant : ' ^ • Percer une voûte hémisphérique, de. quatre fenêtres égales, .sous 'cette condition que le reste de la voûte soit exactement carrable. Nous allons rapporter le principe de la solution de Leibnitz qui résolut le problème le jour même où il lui fut commimiqué ( -

<fcM Lipsiœ, juin. 1792, Jiage '274). Quoique celte solution dépende de  
l'analyse, elle n'est pas cependant étrangère à notre sujet , et nous fournira  
un nouvel exemple Digiiiized by Google

SECONDE PARTIE. 133 ■ de rim|>ortance que i)résente, dans les problèmes de ce genre, le choix des • éléments de la grandeur que l'on veut évaluer. Appelons r le grand cercle qui limite l'hémisphère donné, et soit P le pôle. Soit AA' une courbe quelconque tracée sur la surface de l'hémisphère. Nous regarderons chaque point A de cette courbe comme défini par sa latitude  $\phi = \angle PAA'$  et sa longitude  $\lambda = \angle PRA$  désignant le rayon de la sphère. •. Cela posé, supposons qu'il s'agisse d'évaluer l'aire sphérique comprise entre un arc, de la courbe donnée, les méridiens qui passent par les extrémités de cet arc, et l'arc que ces méridiens interceptent sur l'équateur. Alors, prenons pour élément de la surface que nous avons à évaluer l'aire élémentaire  $dA$ , comprise entre deux méridiens infiniment voisins, et les arcs qu'ils interceptent sur la courbe donnée et sur l'équateur. D'après la formule de la zone sphérique, et en négligeant un infiniment petit du second ordre, l'aire élémentaire ainsi définie a pour mesure  $R^2 \sin \phi \, d\lambda$ ,  $\phi$  désignant la latitude du point de la courbe AA', et  $d\lambda$  désignant la différence des longitudes des points A, A' de cette courbe; par suite l'aire finie considérée aura pour expression  $\int R^2 \sin \phi \, d\lambda$ ,  $\phi$  et  $\lambda$  désignant les longitudes des extrémités de l'arc AB, et  $\lambda$  étant compris entre  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , \* gardée comme une fonction de  $\phi$ . L'aire sphérique considérée sera donc exactement calculable, si l'on établit entre  $\phi$  et longitude et latitude d'un même point A de la courbe cherchée, une relation telle, que l'intégrale  $\int \sin \phi \, d\lambda$ , prise entre certaines limites, ait une valeur algébrique; et c'est ce qu'on peut réaliser d'une infinité de manières. Prenons pour exemple la première et la plus simple des relations données par Jean Bernoulli (pour résoudre ce problème {Art/r II § 13, août 169a, page 370); c'est-à-dire prenons, pour définition de la courbe AA', la relation  $\phi = \lambda$ , •. Cette courbe passe alors par le pôle P, par le point E de l'équateur qui est l'origine des longitudes, et ne s'étend que sur le quart de l'hémisphère TT considéré; en outre, l'intégrale  $\int \sin \phi \, d\lambda$ , prise entre les limites 0 et  $\pi/2$  et étant égale à 1, on voit qu'après avoir enlevé la partie du quart du

de l'importance que présente, dans les problèmes de ce genre, le choix des éléments de la grandeur que l'on veut évaluer.

Appelons *équateur* le grand cercle  $Ea'aE'$  qui limite l'hémisphère donné, et soit  $P$  le *pôle*. Soit  $AA'$  une courbe quelconque tracée sur la surface de l'hémisphère. Nous regarderons chaque point  $A$  de cette courbe

comme défini par sa latitude  $\lambda = \frac{\text{arc } Aa}{R}$ , et sa longitude  $L = \frac{\text{arc } Ea}{R}$ ,

$R$  désignant le rayon de la sphère.

Cela posé, supposons qu'il s'agisse d'évaluer l'aire sphérique comprise entre un arc de la courbe donnée, les méridiens qui passent par les extrémités de cet arc, et l'arc que ces méridiens interceptent sur l'équateur. A cet effet, prenons pour *élément* de la surface que nous avons à évaluer l'aire élémentaire  $AA'a'a'$ , comprise entre deux méridiens infiniment voisins, et les arcs qu'ils interceptent sur la courbe donnée et sur l'équateur. D'après la mesure de la zone sphérique, et en négligeant un infiniment petit du second ordre, l'aire élémentaire ainsi définie a pour mesure

$$R^2 \sin \lambda dL,$$

$\lambda$  désignant la latitude du point  $A$  de la courbe  $AA'$ , et  $dL$  désignant la différence des longitudes des points  $A, A'$  de cette courbe; par suite l'aire finie considérée aura pour expression

$$R^2 \int_{L_0}^{L_1} \sin \lambda dL,$$

$L_0, L_1$  désignant les longitudes des extrémités de l'arc  $AB$ , et  $\lambda$  étant regardée comme une fonction de  $L$ . L'aire sphérique considérée sera donc exactement calculable, si l'on établit entre  $L$  et  $\lambda$ , longitude et latitude d'un même point  $A$  de la courbe cherchée, une relation telle, que l'intégrale

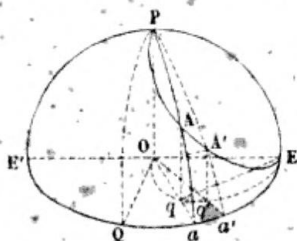
$$\int \sin \lambda dL,$$

prise entre certaines limites, ait une valeur algébrique; et c'est ce que l'on peut réaliser d'une infinité de manières.

Prenons pour exemple la première et la plus simple des *cinq* constructions données par Jean Bernoulli pour résoudre ce problème (*Acta Lipsie*, août 1692, page 370); c'est-à-dire prenons, pour définition de la courbe  $AA'$ , la relation

$$\lambda = L;$$

cette courbe passe alors par le pôle  $P$ , par le point  $E$  de l'équateur qui est l'origine des longitudes, et ne s'étend que sur le quart de l'hémisphère considéré; en outre, l'intégrale  $\int \sin \lambda d\lambda$  prise entre les limites 0 et  $\frac{\pi}{2}$  étant égale à 1, on voit qu'après avoir enlevé la partie du quart de l'hé-



134 DES MIB'HODES EN U<sup>^</sup>OMÉTRIE: misphère limitée inférieurement par la courbe PAE, la portion restante est exactement carrable et a pour valeur le carré du rayon. Remarque I. — Cette première construction de Bernoulli revient identiquement, au fond, à celle qui fut publiée plus tard par Viviani lui-même. ■ Car si l'on abaisse d'un point quelconque A de la courbe PAE que l'on vient de définir, la perpendiculaire AA' sur le plan qui sert de base à l'hémisphère, que l'on mène le rayon O on a  $V' = I \cdot AA' = R \sin L / \sin L$ , ■ et, par suite,  $OA' = R \cos L = R \cos EO \ll R \cos EO$ ; et, \*1» donc, si l'on joint EA', l'angle OEA' est droit, et le point A' appartient à la demi-circonférence décrite sur le rayon OE comme diamètre. Il résulte immédiatement de là cette construction; Que l'on prenne un diamètre du grand cercle qui sert de base à l'hémisphère, et que sur chacune de ses moitiés, considérée comme diamètre, et dans le plan, de la base, on décrive une circonférence; les cylindres droits ayant pour bases ces deux circonférences détacheront de la voûte hémisphérique quatre fenêtres simples ou deux fenêtres doubles, et l'aire de la partie restante sera équivalente au carré construit sur le diamètre de la sphère (Viviani). ■ Remarque II. — Vers la fin de son Traité de calcul intégral, tome II, page 546, Bossut fait cette remarque curieuse, que la construction de Viviani fournit aussi une Solution de cette autre question proposée par Euler; • Construire sur la base d'un hémisphère une courbe telle, que le volume du cylindre élevé perpendiculairement sur son aire et terminé à la surface hémisphérique, ait une expression algébrique. • Il est facile de démontrer, en effet, que si l'on prend pour base du cylindre le triangle formé par le rayon OQ perpendiculaire à OE, le quadrant EQ et la demi-circonférence OQ'E (qui sert de base au cylindre de Viviani), le volume correspondant a pour valeur les deux neuvièmes du cube du rayon. Prenons, en effet, comme élément de la grandeur que nous voulons évaluer le volume élémentaire. Cet élément est la différence entre la pyramide sphérique OAA' et la pyramide OAA'V, dont les volumes ont respectivement pour expression  $\frac{1}{3} \pi R^3 \sin^2 L \cos L$  et  $\frac{1}{3} R^3 \sin^2 L \cos L$ . • On a donc  $\frac{1}{3} R^3 \sin^2 L \cos L$  pour expression du volume élémentaire et  $\frac{1}{3} R^3 \sin^2 L \cos L$  pour expression du volume total. ■

#### 4 SECONDE PARTIE. épicycloïdes dl/n/igée ou } 1 35

ritccourcies d'ijj?rè.'i 5. Rcctifi'Otion tifs Pusrnl. On a vu, dans lo chapitre premier (page 50), tpi'un arcf/i de roulette, produit par le roulement de l'arc tils de la courbe mobile sur un arc égal- de la courbe fixe, a pour expression  $= \wedge(\hat{il} * f)nts 1 R, R'$  désignant les rayons do courbure en leur point de cdntact actuel des deux lignes fixe et mobile, et  $r$  désignant la distance à ce point de contact du point qui décrit la roulette. Pla^ons-nous dans le cas particulier où les lignes fixe et mobile sont des circonférences de cercle ; »

\* JJ  $\pm$  — est alors un facteur constant, et l'évaluation d'un arc quelconque d'épicydoïde allongée ou raccourcie dépend du problème suivant ; Trouver la somme des produits des arcs élémentaires tjid composent'Un • I arc fini du cercle mobile, multipliés respectivement par les distances de tune de leurs e.rtrémités à un /ioint fixe ( le ijoint décrivant ). Voici, d'après Pascal {OEiivres.,. 1779, '5 pa?®\* 4o2 et suiv.) , la solution de ce problème, solution qui fournit une nouvelle application de la méthode par les solides auxiliaires (première partie, page 17). Soient OACB le diamètre de la circonférence donnée qui passe par le point donné O,. C étant le centre de celle circonférence ; mn un arc infiniment petit et 0/« la distance de l'ime de scs extrémités au point O : joignons Bot et désignons par ly l'angle OBot.' Posons  $OB=f/-t-R.$  .  $OC^rf$ ,  $CA = U$ , \ Le triangle OBot donne ' ,  $\hat{I}ot' = + )? -b 4 R' \cos' 4-R (</ -t-R) \cos' \gg$ , où . ' ■\* ' (j) ■ . .  $\hat{Oot}'^ ((/-b R)'$  —  $4 '/R \cos'y.$  , Cela posé , prenons sur CO le point 11 tel , que l'on ail  $(a)' ^ = 4'^/R, J$  , et par le point H ainsi.obtcnu , élevons sur le plan du cercle une perpendiculaire indéfinie IIC' sur laquelle nous prendrons le point C' tel, que l'on ait ' » ( è ) ■ ,  $CC' = -b R$  ; et joignons ÇC'. Enfin , menant par le point C , CP, parallèle à Bot , abaissons du point -C' la perpendiculaire C' P\_ sur CP ; il suffira pour cela d'abaisser CH perpendiculaire sur le plan de la base ( ce qui est déjà fait). Digitized by Google





I 36 • ' DES MÉTHODES E. \ GEOMETRIE. (le mener HP perpendiculaire sur CP et do joindre C'P. Le triangle C'PC, rectangle on P, donnera alors, en obseirant que  $CP = CH \cos$  ,  $CT = Txi' — cp' = ix' —$  ürrcÆs' Ÿ , ou, d'après les relations {a) et (b), (1)  $CP = + 4/R \cos \hat{i}$ .; on a donc \* ' -, (A)  $0/i = C'P$ . D'ailleurs, si l'on mène les rayons CM, CJl constamment. perpendiculaires aux cordes B//i, Bn, on aura (B) arc mil =' a arc MN. Or, si l'on considère le cylindre oblique ayant pour base le cercle A/nB, et dont les génératrices .sont égal(» et parallèles à CC', on voit, en menant la génératrice MM', que C'P mesure la distance du point M' à la tangente MT de la base du cylindre; que, par suite, C'P. arc MN est l'élément de la surface latérale du cylindre. 11 en résulte, à cause des relations ( A ) et (B), que la somme des produits » ' , ' , /arc/n« . 0/« , » ' SR prise entre certaines limites, Teprésente le doublé de l'aire d'une portion de surface cylindrique et j)eut, par conséquent, s'exprimer par le double ■'de la génératrice CC' multipliée par un arc doTellipso, section droite du • cylindre ; on trouve d'ailleurs, pour les demi-axes A et B de cette ellipse. Aï=B, p = Il rf-R (/f-R" le petit axe devenant nul et Uellipso se réduisant à une droite quand rf = R , c'est-à-dire quand le. ppint décrivant O est Situé sur la circonfé- \_ rence mobile. '■ • Enfin , si l'on revient au problème primitif, on conclura facilement de ce qui précède qu'un arc quelconque d'épicycloïde, allongée ou raccourcie, est équivalent en longueur ^ un certain arc d'une ellipse semblable à, la précédente et dont les axes sont par suite proportionntds aux distances maximum et minimum du point décrivant à la circonférence mobile. \* • 6. Autre solution tlu même problème. n. Que la courbe mobile roule sans glisser d'abord sur la convexité, puis sur la concavité d'une courbi^ fixe, de manière que .dans cès deux mouvements les mêmes points de la amrbe mobile soient successivement en contact avec les mêmes points do la courbe fixe ; un point m invariablement lié à la courbe mobile décrira deux arcs de roulettes, l'une extérieure, l'autre intérieure, dont nous désignerons les lonjiueurs par S et «r, Digitized by Google

de mener HP perpendiculaire sur CP et de joindre C'P. Le triangle C'PC, rectangle en P, donnera alors, en observant que  $CP = CH \cos \varphi$ ,

$$\overline{C'P}^2 = \overline{CC'}^2 - \overline{CP}^2 = \overline{CC'}^2 - \overline{CH}^2 \cos^2 \varphi,$$

ou, d'après les relations (a) et (b),

$$(I) \quad \overline{C'P}^2 = (d + R)^2 - 4dR \cos^2 \varphi;$$

on a donc

$$(A) \quad Om = C'P.$$

D'ailleurs, si l'on mène les rayons CM, CN constamment perpendiculaires aux cordes Bm, Bn, on aura

$$(B) \quad \text{arc } mn = 2 \text{ arc } MN.$$

Or, si l'on considère le cylindre oblique ayant pour base le cercle AmB, et dont les génératrices sont égales et parallèles à CC', on voit, en menant la génératrice MM', que C'P mesure la distance du point M' à la tangente MT de la base du cylindre; que, par suite, C'P. arc MN est l'élément de la surface latérale du cylindre. Il en résulte, à cause des relations (A) et (B), que la somme des produits

$$\int \text{arc } mn. \overline{Om},$$

prise entre certaines limites, représente le double de l'aire d'une portion de surface cylindrique et peut, par conséquent, s'exprimer par le double de la génératrice CC' multipliée par un arc de l'ellipse, section droite du cylindre : on trouve d'ailleurs, pour les demi-axes A et B de cette ellipse,

$$A = R, \quad B = R \cdot \frac{d - R}{d + R},$$

le petit axe devenant nul et l'ellipse se réduisant à une droite quand  $d = R$ , c'est-à-dire quand le point décrivant O est situé sur la circonférence mobile.

Enfin, si l'on revient au problème primitif, on conclura facilement de ce qui précède qu'un arc quelconque d'épicycloïde, allongée ou raccourcie, est équivalent en longueur à un certain arc d'une ellipse semblable à la précédente et dont les axes sont par suite proportionnels aux distances maximum et minimum du point décrivant à la circonférence mobile.

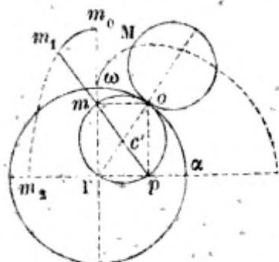
#### 6. Autre solution du même problème.

a. Que la courbe mobile roule sans glisser d'abord sur la convexité, puis sur la concavité d'une courbe fixe, de manière que dans ces deux mouvements les mêmes points de la courbe mobile soient successivement en contact avec les mêmes points de la courbe fixe : un point m invariablement lié à la courbe mobile décrira deux arcs de roulettes, l'une extérieure, l'autre intérieure, dont nous désignerons les longueurs par  $\Sigma$  et  $\sigma$ ,

SECONDE PARTIE. 137 en appelant  $s$  la longueur de l'arc de la courbe mobile qui s'est enroulé sur un arc égal de la courbe fixe. On aura donc, en conservant les mêmes notations que précédemment, et, par suite, (A)  $l + \alpha = n\pi$ , l'arc  $\alpha$  étant regardé comme positif ou négatif, suivant que l'on aura  $\alpha < 0$ ,  $\alpha > 0$  ou  $\alpha = 0$  et, par suite,  $l + \alpha$  étant, dans les mêmes circonstances, une somme ou une différence. Il résulte de là que la somme algébrique des arcs de roulette extérieure ou intérieure est indépendante de la nature de la courbe fixe. ■. Supposons que l'on ait  $R =$  constante et  $R' =$  constante, c'est-à-dire que les roulettes deviennent des épicycloïdes allongées ou raccourcies; on aura alors  $\alpha = \{h + 0 \sim s\}$  et, par suite, (B)  $2L + F + R + R' - H - R' - R'$ . Les formules (A) et (B) conduisent à cette conséquence importante que si l'on sait rectifier un arc quelconque de t'épicycloïde, allongée ou raccourcie, produite par le mouvement d'un point m invariablement lié à une circonférence [C] qui roule, intérieurement par exemple, sur une circonférence (C), 1° on connaîtra, par application de la formule (B), l'arc (t'épicycloïde extérieure engendré par le même point m dans le roulement extérieur de la circonférence (G') sur la même circonférence (C); 2° si l'on forme la somme des arcs ainsi obtenus, on aura la valeur générale de la somme algébrique des deux arcs de roulette intérieure et extérieure engendrés par le mouvement du point m pendant que la circonférence (C') roule intérieurement et extérieurement sur une autre circonférence quelconque (F), de rayon p; 3° la somme des arcs étant ainsi déterminée, la formule (B) dans laquelle on remplace  $R$  par 0, permettra de déterminer respectivement  $l$  et  $\alpha$ , c'est-à-dire les arcs de roulette extérieure et intérieure engendrés par le mouvement du point m dans le roulement de la circonférence (C') sur la circonférence (T). h. Application de ces principes à la rectification des épicycloïdes simples, . , Biquitized by Google

138 DES MÉTHODES EN GÉOMÉTRIE. On connaît ce  
 théorème, dû à Cardan, qu'un point  $m$  d'une circonférence ( $c'$ ) roulant  
 intérieurement sur une circonférence ( $r$ ) de rayon double  $p = aR'$ , engendre  
 un diamètre du cercle ( $T$ ). Désignons par  $i$ , et  $r$ , les arcs de roulotte  
 extérieure et intérieure décrites par le point  $i$ , pendant que l'arc  $\angle m =$   
 « de la circonférence ( $c'$ ) s'enroule sur l'arc égal  $wo$  de la circonférence ( $r$ )  
 : la figure donne immédiatement  $\frac{r}{i} = \frac{p}{aR'} (1 - \cos \frac{r}{aR'})$  : on  
 aura donc, d'après la formule (B),  $\frac{r}{i} = \frac{p}{aR'} (1 - \cos \frac{r}{aR'})$  ;  
 ou  $\frac{r}{i} = \frac{p}{aR'} (1 - \cos \frac{r}{aR'})$  ; puisque dans le cas actuel  $p = aR'$ . Et si l'on  
 remarque que étant ici plus grand que  $r$  on doit faire la somme  
 arithmétique de  $S$ , et  $-r$ , pour avoir, la valeur générale de la somme  
 algébrique  $\sim + i$ , on aura  $(A') \frac{1}{2} = \frac{8R'}{a} \sin \frac{r}{4aR'}$  Enfin, la combinaison  
 des relations (A') et (B) donne pour le cas général, (IX)  $(x) \frac{1}{2} = \frac{4U}{aR'} (1 - \cos \frac{r}{aR'})$ .  
 qui coïncident avec les formules  
 données par Newton {Juvr < U's Principes, propositions 48 et 49).  
 \* . - \* r. Rectification des épicycloïdes allongées ou raccourcies. On déduit  
 immédiatement du théorème de Cardan que l'épicycloïde allongée ou  
 raccourcie, décrite par un point  $i$ , invariablement lié à une circonférence  
 ( $c'$ ) qui roule intérieurement sur une circonférence  $f$  de rayon double,  
 peut être engendrée par le mouvement d'un point  $m$ , d'une droite  $mp$  dont  
 les extrémités  $m$ ,  $p$  décrivent deux droites rectangulaires  $Fm$  et  $Fa$ ; cette  
 épicycloïde intérieure est donc une ellipse, et l'arc  $i$  ( $T = m$ ,  $i$ ), de cette  
 épicycloïde n'est autre chose qu'un arc d'ellipse que nous désignerons par  $i$ .  
 On a donc successivement, en suivant la même marche et adoptant la -  
 Digilized by Google

On connaît ce théorème, dû à Cardan, qu'un point  $m$  d'une circonférence ( $c'$ ) roulant intérieurement sur une circonférence ( $\Gamma$ ) de rayon double  $\rho = 2R'$ , engendre un diamètre du cercle ( $\Gamma$ ). Désignons par  $\Sigma_1$  et  $\sigma_1$  les arcs de roulette extérieure et intérieure décrites par le point  $m$ , pendant que l'arc  $om = s$  de la circonférence ( $c'$ ) s'enroule sur l'arc égal  $\omega o$  de la circonférence ( $\Gamma$ ): la figure donne immédiatement



$$\sigma_1 = \omega m = 2R' \left( 1 - \cos \frac{s}{2} \right) :$$

on aura donc, d'après la formule (B),

$$\Sigma_1 = \sigma \frac{\rho + R'}{\rho - R'} = \sigma \cdot \frac{3R'}{R'} = 3\sigma,$$

ou

$$\Sigma_1 = 6R' \left( 1 - \cos \frac{s}{2} \right);$$

puisque dans le cas actuel  $\rho = 2R'$ . Et si l'on remarque que  $\frac{1}{R'}$  étant ici plus grand que  $\frac{1}{\rho}$ , on doit faire la somme arithmétique de  $\Sigma_1$  et  $\sigma_1$  pour avoir la valeur générale de la somme algébrique  $\Sigma + \sigma$ , on aura

$$(A') \quad \Sigma + \sigma = 8R' \left( 1 - \cos \frac{s}{2} \right).$$

Enfin, la combinaison des relations (A') et (B) donne pour le cas général,

$$(X) \quad \Sigma = 4R' \left( 1 - \cos \frac{s}{2} \right) \cdot \frac{R + R'}{R},$$

$$(x) \quad \sigma = 4R' \left( 1 - \cos \frac{s}{2} \right) \cdot \frac{R - R'}{R},$$

qui coïncident avec les formules données par Newton (*Livre des Principes*, propositions 48 et 49):

c. *Rectification des épicycloïdes allongées ou raccourcies.*

On déduit immédiatement du théorème de Cardan que l'épicycloïde allongée ou raccourcie, décrite par un point  $m_1$  invariablement lié à une circonférence ( $c'$ ) qui roule intérieurement sur une circonférence ( $\Gamma$ ) de rayon double, peut être engendrée par le mouvement d'un point  $m_1$  d'une droite  $mp$  dont les extrémités  $m, p$  décrivent deux droites rectangulaires  $\Gamma\omega$  et  $\Gamma\alpha$ ; cette épicycloïde intérieure est donc une ellipse, et l'arc  $\sigma_1 = m_0 m_1$  de cette épicycloïde n'est autre chose qu'un arc d'ellipse que nous désignerons par  $\varepsilon$ .

On a donc successivement, en suivant la même marche et adoptant la

SECONDE PARTIE. Srtit/r. — La quadrature des épicycloïdes peut s'obtenir avec la même facilité par une méthode toute semblable ; nous renvoyons pour ce sujet à l'article des Nouvelles Annales, duquel nous avons extrait ce qui précède {1845, tome IV, page 83). 7. Théorème de Fagnano. La différence de deux arcs elliptiques  $AA'$ , dont les extrémités  $A$  et  $a$ .  $A'$  et  $a'$  forment deux foyers de l'ellipse associée, est égale à la différence des distances du centre à la courbe aux normales passant par les extrémités de  $P$  un des deux arcs. Démonstration. — On appelle points associés d'une ellipse deux points tels, que les normales menées à la courbe par ces points soient également éloignées du centre, les distances du centre à ces points étant d'ailleurs inégales. Cela posé, regardons l'ellipse comme décrite par un point  $A$  d'une droite  $MN$  dont les extrémités glissent sur deux axes rectangulaires  $Ox$ ,  $Oy$  ; cette ellipse peut être considérée comme une épicycloïde raccourcie décrite par le point  $A$  invariablement lié à la circonférence  $OBIC$  qui roulerait intérieurement sur la circonférence de rayon double  $0I = aR$ , ayant pour centre le point  $O$ . D'ailleurs, le point fixe  $O$  et le centre instantané de rotation  $I$  sont toujours deux points diamétralement opposés de la circonférence mobile ; et, pour chaque position du point décrivant  $A$ , la distance du centre de la courbe à la normale en ce point n'est autre chose que la distance du point  $O$  à la droite  $AI$  qui joint le point considéré  $A$  au centre instantané de rotation correspondant  $I$  ; ou encore la distance à la droite  $AI$  du point de la circonférence mobile diamétralement opposé au point  $I$ . Cela posé. Première partie. — Que  $LA$  prolongée coupe en un second point  $i$  la circonférence mobile  $OBI.A$ . Quand le mouvement de la circonférence mobile l'aura amenée en contact avec la circonférence fixe suivant le point  $1$ , la distance du centre  $O$  de l'ellipse à la normale menée par la nouvelle position  $A$ , qu'aura prise le point décrivant  $A$ , sera égale à la distance

même notation que précédemment,

$$\sigma_1 = \varepsilon, \quad \Sigma_1 = \sigma_1 \cdot \frac{\rho + R'}{\rho - R'} = \varepsilon \cdot \frac{3R'}{R'} = 3\varepsilon; \quad \Sigma_1 + \sigma_1 = 4\varepsilon.$$

Et, en passant au cas général,

$$\Sigma + \sigma = 4\varepsilon, \quad \frac{\Sigma}{\sigma} = \frac{R + R'}{R - R'}.$$

D'où l'on déduit enfin

$$(Y) \quad \Sigma = 2\varepsilon \cdot \frac{R + R'}{R},$$

$$(Y) \quad \sigma = 2\varepsilon \cdot \frac{R - R'}{R}.$$

*Scolie.* — La quadrature des épicycloïdes peut s'obtenir avec la même facilité par une méthode toute semblable : nous renvoyons pour ce sujet à l'article des *Nouvelles Annales*, duquel nous avons extrait ce qui précède (1845, tome IV, page 83).

#### 7. THÉORÈME DE FAGNANO.

*La différence de deux arcs elliptiques AA', aa' dont les extrémités A et a, A' et a' forment deux couples de points associés, est égale à la différence des distances du centre de la courbe aux normales passant par les extrémités de l'un des deux arcs.*

*Démonstration.* — On appelle *points associés* d'une ellipse deux points tels, que les normales menées à la courbe par ces points soient également éloignées du centre, les distances du centre à ces points étant d'ailleurs inégales.

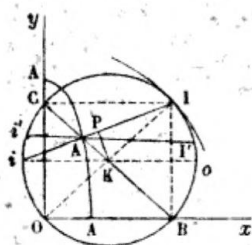
Cela posé, regardons l'ellipse comme décrite par un point A d'une droite MN dont les extrémités glissent sur deux axes rectangulaires Ox, Oy : cette ellipse peut être considérée comme une épicycloïde raccourcie décrite par le point A invariablement lié à la circonférence OBIC qui roulerait intérieurement sur la circonférence de rayon double  $OI = 2R$ , ayant pour centre le point O. D'ailleurs, le point fixe O et le centre instantané de rotation I sont toujours deux points diamétralement opposés de la circonférence mobile; et, pour chaque position du point décrivant A, la distance du centre de la courbe à la normale en ce point n'est autre chose que la distance du point O à la droite AI qui joint le point considéré A au centre instantané de rotation correspondant I; ou encore la distance à la droite AI du point de la circonférence mobile diamétralement opposé au point I. Cela posé,

*Première partie.* — Que IA prolongée coupe en un second point i la circonférence mobile OBIA. Quand le mouvement de la circonférence mobile l'aura amenée en contact avec la circonférence fixe suivant le point i, la distance du centre O de l'ellipse à la normale menée par la nouvelle position A, qu'aura prise le point décrivant A, sera égale à la distance

■ 40 DES MÉTHODES EN GÉOMÉTRIE. la droite ki du \x)int o diamétralement opposé au point i, distance évidemment égale elle-même k celle du centre O à la première normale Al. D'ailleurs, les distances du centre O aux deux points A et A, sont inégales; car la première est OA, la seconde est égale à oA, et ces dernières lignes sont inégales, à moins que AI ne soit perpendiculaire au diamètre BAC. -Donc : 1° h chaque jmint de VelUpse correspond un second //oint associé au premier, suivant les deux conditions de la déjinitinn. Seconde partie. — Menons par le point -A une nouvelle corde l'Ai' infiniment voisine de la première. Les deux arcs d'ellipse, dS et ds, produits' [Mir l'enroulement sur la circonférence fixe des arcs l 1' et W de la circonférence mobile, seront, d'après ce qui précède, des arcs associés. Or ces arcs ont pour expressions ,c AI/' ^ n\LAi.ii' ds=: Ai. a' D'ailleurs, si l'on abaisse KP perpendiculaire sur lAi, K étant le milieu de la droite B.VC, on trouve facilement ces relations . H ir' Ai il''' Al - Ai It' - h" 2 AP 'H'-ii' il en résulte ■ ' i/S ■ ■ ds aAP (İİ" - a') \_ AP (İİ'-I- il\*) 2R(İİ'-fi') " R Or, si l'on pose AK = a, lAB = 9, l'angle lAl' = dq a pdtir exj'ressiou İİ'-t- ii' 2 R 2rtCOSf c/y; Il vient donc, en substituant , f/S ds = 'lAP.c/y i et de là , en désignant par p la distance du centre O à la normale Al et observant (pie' // = 2KP = 2 CI sin y , d'où dp = 2«cosyc/y, , i 1 vient enfin (^r) f/S — ds = dp, ce qui démontre le théorème énoncé. Observation. — On trouve facilement dans la figure précédente les relations qui existent entre les abscisses de deux points associés , et de cette relation on déduit par le calcul que le lieu géométrique du point de concours des tangentes menées h l'ellipse par deux points associés est Diç-i^ed by Googlg



la droite  $Ai$  du point  $o$  diamétralement opposé au point  $i$ , distance évidemment égale elle-même à celle du centre  $O$  à la première normale  $AI$ . D'ailleurs, les distances du centre  $O$  aux deux points  $A$  et  $A_1$  sont inégales; car la première est  $OA$ , la seconde est égale à  $oA$ , et ces dernières lignes sont inégales, à moins que  $AI$  ne soit perpendiculaire au diamètre  $BAC$ . Donc : 1° à chaque point de l'ellipse correspond un second point associé au premier, suivant les deux conditions de la définition.



Seconde partie. — Menons par le point  $A$  une nouvelle corde  $Ai''$  infiniment voisine de la première. Les deux arcs d'ellipse,  $dS$  et  $ds$ , produits par l'enroulement sur la circonférence fixe des arcs  $II'$  et  $ii'$  de la circonférence mobile, seront, d'après ce qui précède, des arcs associés. Or ces arcs ont pour expressions

$$dS = AI(\varepsilon' - \varepsilon) = AI \left( \frac{II'}{R} - \frac{II'}{2R} \right) = \frac{AI \cdot II'}{2R},$$

$$ds = \frac{Ai \cdot ii'}{2R}.$$

D'ailleurs, si l'on abaisse  $KP$  perpendiculaire sur  $\widehat{IAi}$ ,  $K$  étant le milieu de la droite  $BAC$ , on trouve facilement ces relations

$$\frac{AI}{II'} = \frac{Ai}{ii'} = \frac{AI - Ai}{II' - ii'} = \frac{2AP}{II' - ii'}$$

il en résulte

$$dS - ds = \frac{2AP(\overline{II'}^2 - \overline{ii'}^2)}{2R(II' - ii')} = \frac{AP(II' + ii')}{R}.$$

Or, si l'on pose  $AK = a$ ,  $\widehat{IAB} = \varphi$ , l'angle  $IAI' = d\varphi$  a pour expression  $\frac{II' + ii'}{2R}$ . Il vient donc, en substituant,

$$dS - ds = 2AP \cdot d\varphi = 2a \cos \varphi d\varphi;$$

et de là, en désignant par  $p$  la distance du centre  $O$  à la normale  $AI$  et observant que

$$p = 2KP = 2a \sin \varphi,$$

d'où

$$dp = 2a \cos \varphi d\varphi,$$

il vient enfin

$$(x) \quad dS - ds = dp,$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

Observation. — On trouve facilement dans la figure précédente les relations qui existent entre les abscisses de deux points associés, et de cette relation on déduit par le calcul que le lieu géométrique du point de concours des tangentes menées à l'ellipse par deux points associés est

SECONDE PARTIE. 141 une conique homofocale à ta proposée. Il en résulte que le théorème de Fajjano est compris, comme cas particulier, dans les belles propositions découvertes par M. Chasles et relatives à la construction géométrique des arcs d'ellipse à différence rectifiable. C'est par ces propositions que nous allons terminer cette dernière série d'applications. 8. Théorème I. — Soit  $i$  l'un des points d'intersection d'une ellipse et d'une hyperbole homofocales. Si par un point de l'une de ces courbes on mène deux tangentes à l'autre, la différence des arcs de cette dernière compris entre le point  $i$  et chacun des points de contact sera égale à la différence des tangentes correspondantes. Démonstration. — Par deux points infiniment voisins  $m$  et  $n$  de l'hyperbole, menons à l'ellipse homofocale les tangentes  $ma$ ,  $ma'$  et  $nb$ ,  $nb'$ ; et soient  $o$ ,  $o'$  les points d'intersection de  $ma$  et de  $nb$ , de  $ma'$  et de  $nb'$ . Des points  $o$  et  $o'$  comme centres, avec  $om$  et  $o'm$  pour rayons, décrivons les arcs de cercle  $mp$  et  $mp'$  terminés respectivement aux rayons  $on$  et  $o'n$ . Les segments  $np$ ,  $np'$  pourront être considérés, en négligeant les infiniment petits du second ordre, comme les projections sur les tangentes  $nb$ ,  $nb'$  de l'arc élémentaire  $nm$  de l'hyperbole; et comme la tangente en  $n$  à cette courbe fait des angles égaux avec  $nb$  et  $nb'$ , on aura, à un infiniment petit du second ordre près, l'égalité  $np = np'$ . Or, si l'on désigne par  $s$  et  $s'$  les longueurs des tangentes  $am$  et  $an$ , par  $t$  et  $t'$  les longueurs des tangentes  $ma$  et  $na'$ ; et si l'on observe que  $ds$ ,  $ds'$ ,  $dt$  et  $dt'$  sont des nombres positifs dans la figure, on pourra d'abord, en négligeant les infiniment petits du troisième ordre, écrire les égalités  $is = ao - bo$ ,  $is' = a'o' - b'o'$ . La construction qui a défini les points  $p$  et  $p'$  nous donnera ensuite  $np = on - om = (bn - bo) - (on - om) = (bn - am) - (ao - bo) = dt - ds$ ,  $np' = dt' - ds'$ , et si l'on porte ces valeurs dans la relation (1), il vient enfin  $(1) \frac{ds}{ds'} = \frac{dt}{dt'}$ . Ainsi les variations correspondantes des différences entre  $ai$  — arc  $ai$ ,  $am$  —  $a'm$ , demeurent toujours égales quand le point  $m$  se déplace sur l'hyperbole. Digilized by Google

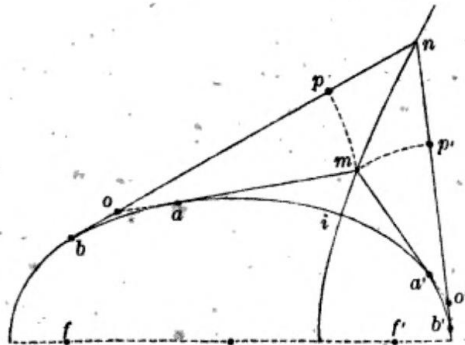
une conique homofocale à la proposée. Il en résulte que le théorème de Fagnano est compris, comme cas particulier, dans les belles propositions découvertes par M. Chasles et relatives à la construction géométrique des arcs d'ellipse à différence rectifiable. C'est par ces propositions que nous allons terminer cette dernière série d'applications.

8. THÉORÈME I. — Soit  $i$  l'un des points d'intersection d'une ellipse et d'une hyperbole homofocales. Si par un point de l'une de ces courbes on mène deux tangentes à l'autre, la différence des arcs de cette dernière compris entre le point  $i$  et chacun des points de contact sera égale à la différence des tangentes correspondantes.

Démonstration. — Par deux points infiniment voisins  $m$  et  $n$  de l'hyperbole, menons à l'ellipse homofocale les tangentes  $ma$ ,  $ma'$  et  $nb$ ,  $nb'$ ; et soient  $o$ ,  $o'$  les points d'intersection de  $ma$  et de  $nb$ , de  $ma'$  et de  $nb'$ . Des points  $o$  et  $o'$  comme centres, avec  $om$  et  $o'm$  pour rayons, décrivons les arcs de cercle  $mp$  et  $mp'$ , terminés respectivement aux rayons  $on$  et  $o'n$ . Les segments  $np$ ,  $np'$  pourront être considérés, en négligeant les infiniment petits du second ordre, comme les projections sur les tangentes  $nb$ ,  $nb'$  de l'arc élémentaire  $nm$  de l'hyperbole; et comme la tangente en  $n$  à cette courbe fait des angles égaux avec  $nb$  et  $nb'$ , on aura, à un infiniment petit du second ordre près, l'égalité

$$(1) \quad np = np'.$$

Or, si l'on désigne par  $s$  et  $s + ds$ , par  $s'$  et  $s' + ds'$ , les arcs  $ia$  et  $ib$ ,  $ia'$  et  $ib'$ ; par  $t$  et  $t + dt$ , par  $t'$  et  $t' + dt'$  les longueurs des tangentes  $am$  et  $bn$ ,  $a'm$  et  $b'n$ ; et si l'on observe que



$ds$ ,  $ds'$ ,  $dt$  et  $dt'$  sont des nombres positifs dans la figure, on pourra d'abord, en négligeant les infiniment petits du troisième ordre, écrire les égalités

$$\begin{aligned} ds &= ao + bo, \\ ds' &= a'o + b'o. \end{aligned}$$

La construction qui a défini les points  $p$  et  $p'$  nous donnera ensuite

$$\begin{aligned} np &= on - om = (bn - bo) - (oa + am) = (bn - am) - (ao + bo) = dt - ds, \\ np' &= dt' - ds'; \end{aligned}$$

et si l'on porte ces valeurs dans la relation (1), il vient enfin

$$(I) \quad d(s - s') = d(t - t').$$

Ainsi les variations correspondantes des différences  $\text{arc } ai - \text{arc } a'i$ ,  $\overline{am} - \overline{a'm}$ , demeurent toujours égales quand le point  $m$  se déplace sur

12. DES MÉTHODES EN GÉOMÉTRIE. hyperbole nmi ,  
 homofocale à l'ellipse proposée. Ces différences elles-mêmes sont donc  
 égales si leurs valeurs initiales sont les mêmes. Or c'est ce qui a lieu en  
 effet; car si l'on considère le point  $m$  comme la position initiale du point  $m$  ,  
 ou  $a$  , eu ce point , COROLLAIRE. — On déduit aisément de ce théorème  
 les solutions des problèmes suivants. I . Diviser géométriquement un arc  
 d'ellipse ( ou d'hyperbole ) en deux arcs arbitrairement à différence rectifiable. a.  
 Étant donné un arc d'ellipse ( ou d'hyperbole ), construire  
 géométriquement un second arc ayant pour l'une de ses extrémités un  
 point donné de la courbe, et ayant avec le premier une différence rectifiable.  
 Ce dernier problème ayant deux solutions, les deux arcs répondant à la  
 question présentent eux-mêmes une différence rectifiable, et cette  
 observation conduit à un théorème de géométrie. \* 3. Trouver l'expression  
 géométrique finie de la différence entre les longueurs infinies des  
 asymptotes et des deux branches d'une hyperbole. On peut consulter sur ce  
 sujet un article de M. Terquem, auquel nous avons emprunté la  
 démonstration précédente ( Nouvelles Annales de Mathématiques, 1844,  
 page 506). ■ THÉORÈME II. — Etant données deux ellipses [ou deux  
 hyperboles) homofocales, si par un point quelconque de la courbe  
 extérieure on mène deux tangentes à la courbe intérieure , la différence  
 entre la somme de ces deux tangentes et l'arc de la courbe intérieure intercepté  
 entre leurs points de contact , conserve une valeur constante. La  
 démonstration ne diffère de la précédente que par les modifications qui  
 résultent dans la figure de ce que le point  $m$  se déplace sur une courbe de  
 même espèce que la proposée ; et l'on parvient , en ayant égard à ces  
 modifications, à la relation  $d(t - y t') = \frac{1}{2} dV = d \cdot \text{arc} \cdot na'$  . Ainsi les  
 variations correspondantes de la somme des tangentes et de l'arc, intercepté  
 demeurent égales quand le point  $m$  se déplace sur une courbe homofocale à  
 la proposée et de même espèce qu'elle; donc la différence entre la somme  
 des tangentes et l'arc intercepté demeure constante. COROLLAIRE. — Ce  
 théorème fournit un second moyen de construire des arcs d'ellipse à  
 différence rectifiable, et la comparaison de cette seconde solution avec celle  
 qui résulte de l'emploi du théorème 1 , conduit aisément à cette  
 conséquence : Dans une ellipse, ou dans une hyperbole , si par les quatre  
 extrémités de deux arcs à différence rectifiable on mène les tangentes à la  
 courbe, ces tangentes forment un quadrilatère qui est circonscriptible à un

cercle. g. Limites inférieure et supérieure du périmètre de l'ellipse entière, ou d'un arc quelconque de l'ellipse. — Construction géométrique analogue à celle de Bernoulli [Jean]. • .. ■ Digitized by Google

l'hyperbole *nmi*, homofocale à l'ellipse proposée. Ces différences elles-mêmes seront donc égales si leurs valeurs initiales sont les mêmes. Or c'est ce qui a lieu en effet; car si l'on considère le point *i* comme la position initiale du point *m*, on a, en ce point,

$$0 = s_0 - s'_0 = t_0 - t'_0.$$

**COROLLAIRE.** — On déduit aisément de ce théorème les solutions des problèmes suivants.

1. *Diviser géométriquement un arc d'ellipse (ou d'hyperbole) en deux arcs partiels à différence rectifiable.*

2. *Étant donné un arc d'ellipse (ou d'hyperbole), construire géométriquement un second arc ayant pour l'une de ses extrémités un point donné de la courbe, et ayant avec le premier une différence rectifiable.* Ce dernier problème ayant deux solutions, les deux arcs répondant à la question présentent eux-mêmes une différence rectifiable, et cette observation conduit à un théorème de géométrie.

3. *Trouver l'expression géométrique finie de la différence entre les longueurs infinies des asymptotes et des deux branches d'une hyperbole.* On peut consulter sur ce sujet un article de M. Terquem, auquel nous avons emprunté la démonstration précédente (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1844, page 506).

**THÉORÈME II.** — *Étant données deux ellipses (ou deux hyperboles) homofocales, si par un point quelconque de la courbe extérieure on mène deux tangentes à la courbe intérieure, la différence entre la somme de ces tangentes et l'arc de la courbe intérieure intercepté entre leurs points de contact, conserve une valeur constante.*

La démonstration ne diffère de la précédente que par les modifications qui résultent dans la figure de ce que le point *m* se déplace sur une courbe de même espèce que la proposée; et l'on parvient, en ayant égard à ces modifications, à la relation

$$d(t + t') = d(s + s') = d \cdot \text{arc } aa'.$$

Ainsi les variations correspondantes de la somme des tangentes et de l'arc intercepté demeurent égales quand le point *m* se déplace sur une courbe homofocale à la proposée et de même espèce qu'elle; donc la différence entre la somme des tangentes et l'arc intercepté demeure constante.

**COROLLAIRE.** — Ce théorème fournit un second moyen de construire des arcs d'ellipse à différence rectifiable, et la comparaison de cette seconde solution avec celle qui résulte de l'emploi du théorème I, conduit aisément à cette conséquence: *Dans une ellipse, ou dans une hyperbole, si par les quatre extrémités de deux arcs à différence rectifiable on mène les tangentes à la courbe, ces tangentes forment un quadrilatère qui est circonscriptible à un cercle.*

9. *Limites inférieure et supérieure du périmètre de l'ellipse entière, ou d'un arc quelconque d'ellipse. — Construction géométrique analogue à celle de Bernoulli (Jean).*

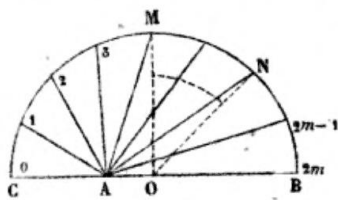
SECONDE PARTIE. 1/3 Il résulte des considérations  
 employées dans la question 7, que si l'on (wte sur une même droite, et à la  
 suite l'une de l'autre, deux longueurs CA et AB égales aux demi-axes  
 d'une ellipse, et que sur la droite résultante ; CB a U , comme diamètre, on  
 décrive une demi-circonférence , la somme / des produits obtenus en  
 multipliant chacun des éléments de cette demicirconférence par la distance  
 de l'une de ses extrémités au point de division A du diamètre CB, divisée  
 par 2 R, sera égale au périmètre d'un quart de l'ellipse dont CA et AB sont  
 les demi-axes, périmètre que nous désignerons par y 4 Cela posé,  
 divisons la demi-circonférence CB en un nombre pair 2m parties égales ;  
 soient o, i, a, 3 . . . 2 /« — i, 2//1 les 21// + 1 points de division, dont les  
 extrêmes coïncident respectivement avec les points C et B, et désignons par  
 f/, , !■/, , r/^ . . les distances de ces (wints au point de division A du diamètre  
 CB. Si l'on suppose ; comme cela arrive dans rf. < r/, <</,...< , et d'ailleurs  
 chacun des arcs o 1 , i a, 2 3 ... aura pour valeur Or, on aperçoit  
 immédiatement que la partie de la somme /qui se rapporte à l'arc 12, par  
 exemple, est moindre que le produit de cet arc par la distance t/, , et  
 supérieure à son produit par la distance r/, . On a donc cette double inégalité  

$$\wedge(r/, - |f/| - t-r/, - l- . . - t- ) < / < - ( r/, 4- r/, - f- rf, - k \cdot . \cdot + '/, , , ) , . M$$
 et de là, en  
 divisant par 2 R , remplaçant / ; 2 R par - et multipliant par 4, 4 (i) , , < E <  

$$2 TT - 4-r/, + r/, - | - \dots - | - r/ ' ) \cdot$$
 On peut donc construire géométriquement les  
 rayons de deux circonférences dont les périmètres comprennent le périmètre  
 de l'ellipse donnée , et la différence entre ces rayons étant égale à la  
 différence des demi-axes de l'ellipse, divisée par 2 ru, l'erreur commise, en  
 substituant au périmètre de l'ellipse donnée le périmètre de l'une de ces  
 circonférences , pourra être aussi petite qu'on le voudra. La même méthode  
 s'applique encore à l'évaluation approchée d'un arc quelconque d'ellipse,  
 moindre qu'un quadrant. Il suffit, en effet, de construire préalablement  
 l'arc MN de la circonférence CB qui , en s'enroulant intérieurement sur la  
 circonférence du rayon double, engendre l'arc d'ellipse considéré, e; de  
 diviser cet arc MN en 2/« parties égales, et de Digitized by

Il résulte des considérations employées dans la question 7, que si l'on porte sur une même droite, et à la suite l'une de l'autre, deux longueurs CA et AB égales aux demi-axes d'une ellipse, et que sur la droite résultante CB = 2R, comme diamètre, on décrive une demi-circonférence, la somme  $f$  des produits obtenus en multipliant chacun des éléments de cette demi-circonférence par la distance de l'une de ses extrémités au point de division A du diamètre CB, divisée par 2R, sera égale au périmètre du quart de l'ellipse dont CA et AB sont les demi-axes, périmètre que nous désignerons par  $\frac{E}{4}$ .

Cela posé, divisons la demi-circonférence CB en un nombre pair  $2m$  parties égales; soient 0, 1, 2, 3...  $2m-1$ ,  $2m$  les  $2m+1$  points de division, dont les extrêmes coïncident respectivement avec les points C et B, et désignons par  $d_0, d_1, d_2, \dots, d_{2m}$  les distances de ces points au point de division A du diamètre CB. Si l'on suppose, comme cela arrive dans



la figure,  $CA < AB$ , on aura

$$d_0 < d_1 < d_2 < \dots < d_{2m-1} < d_{2m},$$

et d'ailleurs chacun des arcs 0 1, 1 2, 2 3... aura pour valeur  $\frac{\pi R}{2m}$ .

Or, on aperçoit immédiatement que la partie de la somme  $f$  qui se rapporte à l'arc 1 2, par exemple, est moindre que le produit de cet arc par la distance  $d_2$ , et supérieure à son produit par la distance  $d_1$ . On a donc cette double inégalité

$$\frac{\pi R}{2m} (d_0 + d_1 + d_2 + \dots + d_{2m-1}) < f < \frac{\pi R}{2m} (d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_{2m}),$$

et de là, en divisant par 2R, remplaçant  $f : 2R$  par  $\frac{E}{4}$  et multipliant par 4,

$$(I) \quad 2\pi \left( \frac{d_0 + d_1 + d_2 + \dots + d_{2m-1}}{2m} \right) < E < 2\pi \left( \frac{d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_{2m}}{2m} \right).$$

On peut donc construire géométriquement les rayons de deux circonférences dont les périmètres comprennent le périmètre de l'ellipse donnée, et la différence entre ces rayons étant égale à la différence des demi-axes de l'ellipse, divisée par  $2m$ , l'erreur commise, en substituant au périmètre de l'ellipse donnée le périmètre de l'une de ces circonférences, pourra être aussi petite qu'on le voudra.

La même méthode s'applique encore à l'évaluation approchée d'un arc quelconque d'ellipse, moindre qu'un quadrant. Il suffit, en effet, de construire préalablement l'arc MN de la circonférence CB qui, en s'enroulant intérieurement sur la circonférence du rayon double, engendre l'arc d'ellipse considéré.  $e$ : de diviser cet arc MN en  $2m$  parties égales. et de



144 MÉTHODES EN GÉOMÉTRIE. joindre les points de division au point A. On trouve alors, en employant les mêmes notations, arc MN arc .MN / d, +d, +. . . +dj\ '' ait V %m 2R V /' Or, en désignant par O l'angle au centre qui correspond à l'arc MN, on a arc MN a B io et en substituant cette valeur dans les inégalités précédentes, on voit que l'arc d'ellipse se trouve compris entre deux arcs de cercle semblables, correspondant à des angles au centre égaux à et dont la différence des rayons peut être aussi -petite qu'on le veut. Remarque. — En appliquant au système de deux ellipses égales sa théorie générale du mouvement de campement d'une courbe sur une autre, Jean Bernoulli par\ int aux deux inégalités suivantes : (ni) aTT.— -- <E<aîr. — im désignant actuellement, non plus un nombre pair quelconque, mais une puissance de a [Opéra omnia, tome 1, page 448] Les formules de Bernoulli fournissent des limites plus resserrées que les précédentes, mais elles ne s'appliquent pas comme celles-là (du moins sans une démonstration spéciale), à la rectification approchée d'un arc quelconque d'ellipse. Il serait toutefois intéressant de les obtenir directement par l'emploi des considérations précédentes : elles nous paraissent • l'auxiliaire le plus naturel que l'on puisse employer dans cette recherche, car elles conduisent presque nécessairement à la construction géométrique des différentes lignes que l'on a à considérer, construction que l'on ne fait intervenir qu'avec effort par l'emploi du mouvement de campement. Les formules ( III ), qui avaient été données sans démonstration par Bernoulli, ont été établies pour la première fois par M. Prouhet, dans une intéressante étude sur les reptaires, insérée dans les Nouvelles Annales de Mathématiques, 1854, pages 74 et 35. 1. Digitized by Google 56N 6J12::2

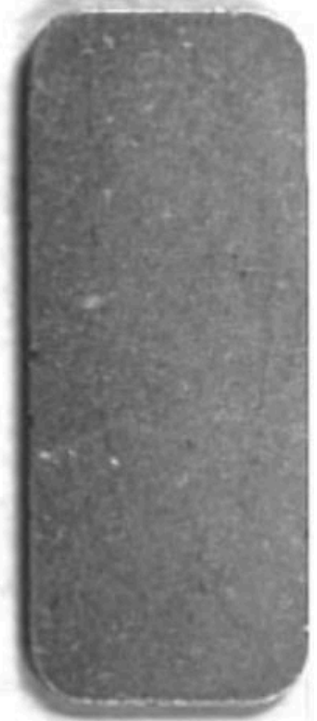
**The text on this page is estimated to be only 26.00% accurate**

Digitized by Google

**The text on this page is estimated to be only 18.00% accurate**

Digitized by Googl^





Digitized by Google



