

This book was produced in EPUB format by the Internet Archive.

The book pages were scanned and converted to EPUB format automatically. This process relies on optical character recognition, and is somewhat susceptible to errors. The book may not offer the correct reading sequence, and there may be weird characters, non-words, and incorrect guesses at structure. Some page numbers and headers or footers may remain from the scanned page. The process which identifies images might have found stray marks on the page which are not actually images from the book. The hidden page numbering which may be available to your ereader corresponds to the numbered pages in the print edition, but is not an exact match; page numbers will increment at the same rate as the corresponding print edition, but we may have started numbering before the print book's visible page numbers. The Internet Archive is working to improve the scanning process and resulting books, but in the meantime, we hope that this book will be useful to you.

The Internet Archive was founded in 1996 to build an Internet library and to promote universal access to all knowledge. The Archive's purposes include offering permanent access for researchers, historians, scholars, people with disabilities, and the general public to historical collections that exist in digital format. The Internet Archive includes texts, audio, moving images, and software as well as archived web pages, and provides specialized services for information access for the blind and other persons with disabilities.

Created with hocr-to-epub (v.1.0.0)

Google This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online. It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover. Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you. Usage guidelines Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying. We also ask that you: + Make non-commercial use of the files We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for Personal, non-commercial purposes. + Refrain from automated querying Do not send automated queries of any sort to Google's System: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help. + Maintain attribution The Google's "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it. + Keep it legal Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe. About Google

Book Search Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>

Google A propos de ce livre Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne. Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public. Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains. Consignes d'utilisation Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées. Nous vous demandons également de: + Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial. + Ne pas procéder à des requêtes automatisées N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter Nous encourageons pour la réalisation de ce type de

travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile. + Ne pas supprimer l'attribution Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas. + Rester dans la légalité Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère. A propos du service Google Recherche de Livres En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse <http://books.google.co.il>







The text on this page is estimated to be only 17.63% accurate

ÊLÉMENTS D'ALGÈBRE, PAR LÉONARD EULER,
TRADUITS DE L'ALLEMAND, AVEC DES NOTES ET DES
ADDITIONS. NOUVELLE ÉDITION, REVUE ET CORRIGÉE. TOME
SECOND. «MM* t*^Êt^i^mm^m ANALYSE INDÉTERMINÉE. A PARIS,
COURCIER , Imprimeur^Libraire pour les MathémaChez ^ tiques^ quai
des Augustins , n*^ 67 ; Maire ^ Libraire^ rue Mercière, à Lyon.
SEPTEMBRE 1807.

The text on this page is estimated to be only 5.31% accurate

• ' I ' » I . - • • • • • S : • • • • • . • • • • • ; • • • • • " \ • • • • • ■ • • • • • * • • • • • *

The text on this page is estimated to be only 16.00% accurate

I ■! ■ TABLE DES MATIERES, » la fêtolution des, ^aatùma dn prtmM» degré^ ^i renferment plus d'une inconnue, 1 •— ^ II. De la rè^le qn'on nomse regtUm, cceei, ùh il s*agîc dild^- . termiiMT, par deox ^qiMiiio«S| trois oh «a plus gaud Ronl^ d'inconniiM, aa ID.]>es iquadoM ipdéterminëos composais» dum feiquelles Fane des inconnues ne passe pas le pscmiet degré , 3r -^— V. Des cas où la formule a 4" hxi^cxx ne peat jamais devenir un carr^, 58 — • VI. Des cas en nombres entiers, oik la^nwule axx-^b devient un carré, 67 *— VU. D'une méthodepartîculière,parlaqueHcla formule a/ira -4-1 devient un carre en nombres entiers , 84 •**— VIS. De hi manière de rehdre radonneMe la fbnrale' inalioa• nclle y a A- ox\'rcxx^dx^^ loa — * IX. De la manière de rendre rationnelle la formule incoiU' mesurahle V^a -f- bx^QXx -♦- dx^ -♦- ex^^ ii5 — *- X. De la méthode de rendre rationnelle la formule irration3. nelle y a -f- bx-^ cxx ^ dx^ , 1 13 •— — XI. De la résolution de la formule axa -4- bxy + cyy en des facteurs, i43 -•— XII. De la transformation de la formule axx -f- cyy en des carrés et en des puissances plus élevées, i58 *— ^ Xm. De quelques expressions de la forme ax^-^bf^, qui ne sont pas des carrés, 175. «*^< XIV. Solutions de quelques questions qui appartiennent à cette partie de l'analyse, 189. •— ^ XV. Solutions de quelques questions où Ton demande des 'cubes, atStt. '/'

The text on this page is estimated to be only 19.64% accurate

/ I 3a3 376 383 ĨAËLfı. AbDiTioirs , I. Sur les fractions continues
, II. Solutions de quelques probl  mei curieux et nouveaux d'Arithmétique ^
m.' &at la résolution des ^qnaſionii du premier d^grtf    .deux inconnues en
nombres entiers, IV. Me'thode générale pour résoudre en nombres entiers
les équations    deux inconnues^ dont Tone ne passe pas le ~ premier degré,
y. Méthode directe et générale pour résoudre les équations du second degré
h deux inconnues^ en nombres raiionnels, 388 ' Resoluticm .de r  quatioB
j4p* '{^ Bq* zs z*   9 nombres . ^ entiers, ^ 390 VL Sus les doubles et
triples   galil  a» .4^^ VIL. Méthode directe et. générale pour résoudre en
;aombres entiers les équations du second degré    deux inconnues, ^iles de
P  quation Cjr* — ^Jijfz := Bz* = i , Jorsqn^on en connaît une seule, Pe la
man  re de trouver toutes les solutions possibles en nombres entiers
deav  quationa du second degré    deux inconnues, VIQt Remarques sur les
  quations de la forme ;?*=:^f + 1, et sur la man  re ordinaire de les tt^udre
en nombres entiers , IX. De la man  re de trouver des fonctions algébriques
de tons les degrés, qui, étant multiplia entenibley produisent to   jonn des
fonctions semblables. 418 .416 436 459 4^

The text on this page is estimated to be only 23.67% accurate

■aaaBMBaBBag— 8a^^^!^^'■.1 laaa ÉLÉMENTS * .» D'A L G
È BRE. SECONDE PARTIE. ANALYSE INDÉTERMINÉE. CHAPITRE
PREMIER. 'De là résolution des Équations du premier degré, qui
renferment plus d'une inconnue. I. v/n a vu, dans les Éléments d'Algèbre ,
comment une quantité inconnue se détermine par une seule équation , et
comment on peut déterminer deux inconnues au moyen de deux équations,
trois inconnues au moyen de trois équations , et ainsi de suite ; ensorte qu'il
faut toujours autant d'équations qu'il y a d'inconnues à déterminer , du
moins quand la question elle-même est déterminée. Lors donc que la
question ne fournit pas autant d'équation» qu'on est obligé d'admettre
d'inconnues ; il y en a qui restent l A

indéterminée» et qui dépendent de notre volonté; et cela fait qu'on nomme ces sortes de questions des problèmes indéterminés. Ils font le sujet d'une branche particulière de l'Analyse, et on appelle cette partie V Analyse indéterminée. 1. Comme dans ces cas on peut prendre pour une, ou pour plusieurs inconnues, tels nombres qu'on veut, ils admettent aussi plusieurs solutions. Cependant, comme d'un autre côté on ajoute ordinairement la condition que les nombres cherchés doivent être entiers et même positifs ou du moins rationnels, le nombre de toutes les solutions possibles de ces questions se trouve fort borné par là; desorte que souvent il n'y en a que très-peu de possibles; que d'autres fois il y en a une infinité mais qui ne se présentent pas à l'esprit facilement; que quelquefois enfin il n'y en a aucune de possible. On peut donc pressentir que cette partie de l'Analyse demande souvent des artifices tout-à-fait particuliers et qu'elle sert beaucoup à aiguïser l'esprit des commençans » et à leur donner de l'adresse dans le calcul.

3. Nous commencerons par une des questions les plus faciles, en cherchant deux nombres dont la somme fasse 10. Il sera superflu d'ajouter que ces nombres doivent être entiers et positifs. Indiquons-les par x et y , ensorte qu'il faut que $x+y=10$, d'où $x=10-y$, où y n'est déterminé qu'en tant que cette lettre signifie un nombre entier et positif. On pourrait par conséquent lui substituer tous les nombres entiers depuis 1 jusqu'à l'infini; mais remarquons que x doit pareillement être un nombre positif et il suit de là que y ne peut être plus grand que 10, puisqu'autrement x deviendrait négatif, et «i on rejette aussi la valeur négative, on ne peut même faire y plus grand que 3. Ainsi «e ne sont que les solutions suivantes qui ont lieu.

The text on this page is estimated to be only 23.64% accurate

D*ALGiBAE: S Si $y=i, a, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, on a $a; = 9, 8, 7, 6, 5, 4, 5, a, 1$, Or les quatre dernières de ces neuf solutions étant les mêmes que les quatre premières, il est clair que la question n'admet au fond que cinq solutions différentes. Que si Ton demandait trois nombres dont la somme fût 10, on n'aurait qu'à partager en deux parties l'un des nombres que nous venons de trouver, et on obtiendrait de cette manière un plus grand nombre de solutions. 4. Comme nous n'apercevons aucune difficulté, nous passerons à des questions un peu moins faciles. Question première. Il s'agit de partager a^5 en deux parties, dont l'une soit divisible par a , et dont l'autre soit divisible par 3. Soit l'une des parties cherchées $= ax$, et l'autre $= 3y$, il faudra que $ax + 3y = a^5$, d'où l'on tire $ax = a^5 - 3y$. Si Ton divise par a , on a $a^4 - \frac{3y}{a}$ d'où nous concluons en premier lieu que $3y$ doit être moindre que a^5 et par conséquent y plus petit que $\frac{a^5}{3}$. Qu'on tire de cette valeur de x autant d'entiers qu'il est possible, c'est-à-dire qu'on divise par le dénominateur a » on aura $\frac{a^5 - 3y}{a}$ si on a il mit que $x = \frac{a^5 - 3y}{a}$, ou bien $J' - 1$ » doit être divisible par a

The text on this page is estimated to be only 19.83% accurate

4 ÎLÉMEN» par a: Ainsi nous ferons et nous aurons desorte que '
 $y - 1 = 32$, $y = 2Z+i$, $X = 12 - 22 - 1 - 2 = 11 - 32$. Or puisque y ne
saurait être plus grand que 8, l'on ne peut non plus prendre pour z des
nombres qui rendraient $22+1$ plus grands que 8. Parconséquent il faut que 2
soit plus petit que 4 > c'est-à-dire que 2 ne peut être pris plus grand que 3, et
de là résultent les solutions qui suivent : Si on fait . on a et $2 = 0$ $2 - 1$ 2 2
 $y = 1$ $a = 11$ $j. = 3$ y^X 5 2 y^X $-3 = 7 > = 2$. Donc les deux parties de 25
qu'on cherchait y sont : $1^{22} + 3$, $2^{16} + 9$, $3^{10} + 5$, $4^4 + 21$; ' ■ . * 5.
Question seconde. Partager 100 en deux parties tellei que l'une soit divisible
. par $7^{\wedge}$ et l'autre par 11. Soit donc yx la première partie, et 1 i-y la seconde
, i] faudra que $\bullet jx - f. iiy = 100$; et parconséquent que $i \# \blacksquare$ oa qu» loo— *
 $ii3^{\wedge}$ *oi* divisible par f Ov ii f on peut «aviser $4y - ?$ a !par $7^{\wedge}$ on pourra
ans9i divif^

The text on this page is estimated to be only 21.07% accurate

d'algèbre; par 7 sa moitié sy — i ; qu'on fasse donc $2y - 1 = 72$, ou
 $!iy = yz + ii$ on aura

The text on this page is estimated to be only 25.50% accurate

6 ÉLÉMENT semblable, nous ferons la seconde partie, $7^4 - 4$.
 Nous avons par conséquent $5^4 + 7y + 6 = 100$, ou $Sx r = 94 - 7y = 90 + 4 - 5y - 32y$; d'où nous tirons $a = i8 - y - \sim^>$. Il suit de là que $4 \sim^>$ ou $ay - 4 >$ ou bien la moitié $y - a$, doit être divisible par 5. Faisons, par cette considération, $jf - 2 = 52$, ou $y = Sz'^a$, nous aurons $j = iG - 7a$; d'où nous concluons que jz doit être plus petit que 16, et s plus petit que $\wedge$, c'est-à-dire que z ne peut surpasser a . La question proposée admet par conséquent trois solutions : 1*. $\ll = G$ donne $a = iG$ et $y = 3$, d'où résultent les deux parties de 100 qu'on cherchait, $8a - f - i8$. a*. $\ll = 1$ donne $x = 9$ et $\wedge = 7$, et les deux parties en question sont $47 + 53$. 3®. $2 = a$ donne $x = a$, et $y = la$, et on a les deux parties $la - f - 88$. 7. Question quatrième. Deux paysannes ont ensemble 100 œufs ; l'une dit à l'autre : Quand je compte mes œufs par huitaines, il y a un surplus de 7. La seconde répond : Si je compte les miens par dixainés, je trouve le même sur" plus de 7. On demande combien chacune avait d'œufs? Comme le nombre des œufs de la première paysanne, divisé par 8, laisse le résidu 7, et que le nombre des œufs de la se-' conde, divisé par 10, donne le même résidu 7, on exprimera ■ le premier nombre par $8x - 7$, et le second par $10y - f - 7$ de cette façon. $8x - f - 10y + i4 = 100$, ou $8a = 86 - 10y$ on $4a = 343 - 5y = 40 + 3 - \wedge - j'$. $\wedge 5$

The text on this page is estimated to be only 18.40% accurate

D' ALGEBRE. 7 Par conséquent si l'on fait $4x - 3 = 4^*$, desorte que $4x = 4^* + 3$ on aura $a = 10 - 4^* - 3 = 7 - 4^*$; d'où il suit que $5z$ doit être plus petit que 7, et z plus petit que a c'est-à-dire qu'on n'aura que les deux solutions suivantes : 1°. $z = 0$ donne $a = 7$, et $y = 3$, ainsi la première paysanne avait 63 œufs et la seconde en avait 37. 2°. $a = 1$ donne $x = 4$ et $y = 7$; donc la première paysanne avait 3 œufs et la seconde en avait 77. 8. Question cinquième. Une troupe d'hommes et de femmes a dépensé dans une auberge 1000 sous Les hommes ont payé 19 sous chacun et les femmes 13. Combien y avait-il d'hommes et de femmes ? Soit le nombre des hommes = x et celui des femmes = y On aura l'équation $19x + 13y = 1000$. Donc $13y = 1000 - 19x = 988 - 13x - 6x$, la $13y$ et $76 - 6x$: H $13y = 76 - 6x$; d'où il suit que $13y - 6x$, ou $6x - 13y$, ou aussi $13y - 6x$, la dixième partie de ce nombre, doit être divisible par 13. Qu'on fasse donc $x - a = 13$ on aura $x = 13a + a$, d'où $y = 76 - 13a - a = 76 - 14a$, ou $y = 74 - 14a$; ce qui fait voir que z doit être moindre que a , et par conséquent 4

The text on this page is estimated to be only 29.00% accurate

8 ELÉMENTS séquent moindre que 4 \ desorte que les quatre solutions suivantes peuvent avoir lieu. 1[^] z = 0 donne a; = 3 et ^' = 74. Dans ce cas, il y avait â hommes et 74 femmes; ceux-là ont payé 38 sous, et celles-ci 962 sous. a®. z= 1 donne le nombre des hommes x= i5, et celui des femmes j^ = 55; ceux-là ont dépensé a85 sous, et celles-ci 71 5 sous. Z**. z=:q donne le nombre des hommes x := aS , et celui âes 'femmes ^ = 3G -, donc ceux-là ont dépensé 532 sous, et celles-ci 468 sous. 4*. 2i=3 donne a;==4i et j^'=i7; ainsi les hommes ont dépensé 77g sous, et les femmes ont dépensé 221 sous. 3. Question sixième* Un fermier achète à-la-fois des chevaux et des bœufs pour la somme de 1770 écus ; il paye 3i écus pour chaque cheval, et 21 écus pour chaque bœuf. Combien a-t-il acheté de chevaux et de bœufs ? Soit le nombre des chevaux = a: , et celui des bœufs :=ry ; il faudra que ou que 2iy= 1770 — 3ix= 17G4 + 6 — 21j:— 10a;, c'est-à-dire que ^ = 84 — a; + 6 — 10a: 21 Donc il faut qu'on puisse diviser lox — G, et aussi la moitié 5a; — 3, par 21. Qu'on suppose donc 5a; -^ 3==2i2i^ on aura 5a; = 21a ■+; 3, ^'=84— ^— ^-s; Or, puisque

d'algèbre. s $212 + 3z + 3^u = 5^m = 2^v + 1$ il faudra faire encore $a + 3 = 51^*$; cette supposition donne $z = 5m - 3$, $0^u = 21^v - 12$, et $12^u = 84 - 21m + 12 - 10u + S = 103 - 31u$, et il suit de là que u doit être plus grand que 0 , et cependant plus petit que 4 y ce qui fournit les trois solutions qui suivent : 1°. $u = 1$ donne le nombre des chevaux $07 = 9$, et celui des bœufs 71 ; donc les premiers ont coûté 279 écus, et les derniers 1491 écus; en tout 1770 écus. 2°. $u = 2$ donne $a = 30$ et $j = 40$; ainsi les chevaux ont coûté 930 écus, et les bœufs ont coûté 840 écus, ce qui fait ensemble 1770 écus. 3°. $u = 3$ donne le nombre des chevaux $x = 51$, et celui des bœufs $y = 9$; ceux-là ont coûté 1581 écus, et ceux-ci 189 écus; cela fait-ensemble 1770 écus. 10. Les questions que nous avons considérées jusqu'à présent, conduisent toutes à une équation de la forme où a , b et c signifient des nombres entiers et positifs, et où l'on demande pour a : et j pareillement des nombres entiers positifs. Or si h est négatif, et que l'équation ait la forme $ax = by + c$. on a des questions d'une toute autre espèce, Et qui admettent une infinité de solutions : nous allons en traiter aussi, avant que de finir ce chapitre. Les plus simples de ces questions sont de la nature de celle

10 ÉLÉMENTS ci : on cherche deux nombres dont la différence soit 6. Si Ton fait ici le plus petit nombre $=x$ et le plus grand $=y$, il faudra que $y - x = 6$, et que $y = G - f - a$. Or rien n'empêche maintenant de substituer au lieu de x tout les nombres entiers possibles et quelque nombre que l'on adopte, y le surpassera toujours de 6. Qu'on fasse, par exemple $a = 100$, on aura $y = 106$; il est donc clair qu'une infinité de solutions peuvent avoir lieu. 11. Viennent ensuite les questions où $c = 0$, c'est-à-dire où ax doit équivaloir à by . Qu'on cherche, par exemple > un nombre qui soit divisible tant par 5 que par 7; si on écrit N pour ce nombre, on aura d'abord $A = 5a7$, puisqu'il faut pouvoir diviser A par 5; ensuite on aura aussi $A = 7y$ parceque le même nombre doit être divisible par 7; on aura par conséquent $5j = A$ et $a = y$. Or comme 7 ne peut se diviser par 5, il faut que y soit divisible par 5; qu'on fasse donc $A = 5*$, on aura $a = 72$; desorte que le nombre cherché $A = 352$; et comme on peut prendre pour z un nombre entier quelconque, on voit qu'on peut assigner pour N un nombre infini de valeurs; telles sont : 35, 70, 105, 140, 175, 190, etc. Si on voulait jouter la condition supposée, que le nombre N fût aussi divisible par g , on aurait d'abord $N = 2ZSz$ et on aurait de plus $N = gu$. De cette manière, $55z = gu$, et $m = z$; et il est clair qu'il faut que z soit divisible par g . Soit donc $z = gr$, on aura $N = 35r$ et le nombre cherché $N = 35r$

The text on this page is estimated to be only 23.42% accurate

D'ALGÈBRE. 11 la. La difficulté est plus grande lorsque c n'est pas 0; par exemple, lorsqu'il faut que $5afz = 7^4 - 3$ équation à laquelle on parvient en cherchant un nombre N tel qu'on puisse le diviser par 5, et que si on le divise par 7 on obtienne le résidu 3; car il faut alors que $iV = 5x$, et aussi que $iV = 7^4 - 3$, d'où résulte l'équation $5x = 7y + 5$, et par conséquent $7y + 5 = 5x$, $7y = 5x - 5$, $y = \frac{5x - 5}{7}$, y entier, $5x - 5$ divisible par 7, $5x \equiv 5 \pmod{7}$, $x \equiv 1 \pmod{7}$, $x = 7s + 1$, $y = \frac{5(7s + 1) - 5}{7} = 5s$, $iV = 5x = 5(7s + 1) = 35s + 5$, $iV = 7^4 - 3 = 2401 - 3 = 2400$, $35s + 5 = 2400$, $35s = 2395$, $s = \frac{2395}{35} = 68 \frac{15}{7}$, s entier, 15 divisible par 7, impossible. On aura $x = 7f + 1$, $y = 5f$; or à cause de $7y + 3 = 5z$, ou de $3y = 5z - 3$, en $5s - 3$, $a - 3$ $J^4 = \frac{1}{5}$ ou $jr = 2a - \frac{1}{5}$, Qu'on suppose donc encore $a - 3 = au$, $J^4 = \frac{1}{5}$ on aura $z = 2u - 3$, $5u + 6$ et $j = J^4 + 6 = 7u + 9$. Donc le nombre cherché $iV = 35a - 4$ où on peut substituer au lieu de u non seulement tous les nombres entiers positifs, mais aussi des nombres négatifs; car, comme il suffit que N devienne positif, on peut faire u $rz - 1$, te qui rend $iV = io$. On obtient les autres valeurs, en ajoutant continuellement 35, c'est-à-dire que les nombres cherchés sont : 10, 45, 80, 115, 150, 185, 220, etc. 13. Les solutions de ces sortes de questions dépendent du rapport des deux nombres par lesquels il s'agit de diviser > c'est-à-dire qu'elles deviennent plus ou moins longues, sui

The text on this page is estimated to be only 27.61% accurate

lâ ÉLÉMENTS yant la nature de ces diviseurs. La question suivante^ pai' exemple^ admet une solution très-courte : On cherche un nombre qui , divisé par 6 , laisse le résidu $\hat{a}$ et qui y divisé par iZ , donne 3 de résidu. Soit N ce nombre : il faut i^n . que $iV = Gx + a$, et 2^* . qu'» $A^{\wedge} = 1 \ 3y + \bullet \ 3$; parconséquent $6x + a = i3j^{\wedge} + 3$, $\hat{x} = \backslash Zy + i$ et $a := i^{\wedge} ti = ay + -2^{\wedge}$: Qu'on fasse $y -^{\wedge} i \ z =^{\wedge} 6z$, on aura $jr = 6z - 1$ et $a := 2y -$)- $z = i3z - 2$; d'où il suit que le nombre cherché $N_{zzijiz} - 10$. Donc la question admet les valeurs suivantes: 68, $i4^{\wedge}$, ' 5224» 3o2 , 38o, etc. qui forment une progression arithmétique , dont la différence est $78 = 6.13$. Il suffit, parconséquent, de connaître une seule de ces valeurs pour trouver facilement toutes les autres.

14. La question suivante fournit un exemple d'une solution plus longue et plus pénible. Question huitième* Trouver un nombre N qui, étant divisé par 39 , donne le résidu iG , et tel aussi que si on le divise par 56, on trouve le résidu 27. Il faut en premier lieu que $iN^{\wedge} = 39p + 16$, et en second lieu que $iV := S^{\wedge} q + 27 \backslash$ ainsi $S_{gp} + 1 \ S = 56(5f + 27$, ou $3gip = 56\varsigma + 11$, «t •n exprimant par r la fraction ' , , ■ . Ainsi

The text on this page is estimated to be only 10.29% accurate

$t > 'A L O \dot{E} B R E. l_3 -, \bullet ^ 3 q r - 11, 5r - 11, 59r = i79 + ii$ et
 $\zeta = -2_ - ^{rsarH} - ^{++ + ^{'}}$ de façon que $5r - Ti jr z 5$. ou $i7^ = : 5r - 11$,
 d'où provient de manière que $e = - ^ -$, ou $5^ = : aj + ii^$ d'où l'on tire $5^ -$
 $ii_ , , t - 11 . , j = - - - = n \ll H ^ - Q t + u$, «n fusant $f - 11 u =$ et $t = 52U$
 + lia . Or n'y ayant maintenant plus de fractions , on peut prendre u à
 volonté, et on n'aura plus qu'à passer, en rétrogradant^ par les
 déterminations suivantes : ■ $f = att + 1 1$, $j = b = at - f - u = 5u ^ aa$; $r = \pm = 3^$
 $+ ^ = 17a + 77$, $t] = z ar + s = z Sgu + 17G$, $p z = \zeta + r = 5Su + a53$, et enfin
 $7^ = 59.5614 - 1 - 9883$. On trouvera la plus petite valeur possible de JV, en
 faisant $u = - 4 5 ^ ^ \circ s$ cette supposition on a $A'^{nr} 1147$. $Q^{*\textcircled{R}} * ^ 1 * ^ ^$
 $^ " ^ ^ uii = x - - 4 >$ on trouve $iV = ai84r - - 8736 + 9883$, ou $iV = ai84x + 1147$.
 Ce^ uomtres forment par conséquent une progression arith

The text on this page is estimated to be only 24.53% accurate

1[^] é L é M E N s métique[^] dont le premier terme est ii47 , ^{^^ ^^^^}
[^] diffe[^] rence est âi84; en voici quelques termes r ii47> 333i, 55i5, 7699,
 9883, etc, 1 5. Ajoutons encore quelques autres questions sur lesquelles on
 puisse s'exercer. Question neuvième. Une compagnie d'hommes et de
 femmes se trouvent à un pique-nique ; chaque homme dépense aS liv. et
 chaque fenune dépense 1 6 liv. , et il se trouve que toutes les femmes
 ensemble ont payé 1 liv. de plus que les hommes. Combien y avait-il
 d'hommes et de femmes ? Soit le nombre des femmes =p, celui des hommes
 =ç; les femmes auront dépensé i6p , et les hommes â5f ; ainsi et 35[^]+1 ,
 9<7+i , îNous venons de faire r = SÏÏÎli ainsi 16 Sg==iSr-[^]i et [^]=
 iË:=i5=r+Zî[^]=i = r.f.*: 9 9 Puis donc que jr—i [^]=[^]— , ou 9[^] = 7r— 1,
 nous avons 7 7 c'est-à-dire que t=: ., ou 7t=:flf-|->>> amsi en faisant t—i

The text on this page is estimated to be only 20.24% accurate

D* A L C £ B R £. 15. desorte que , $t = 3tf - 1$. Nous aurons parconséquent en rétrogradant : $f r = 3M - f - 1$, $j = .3^{\wedge} - f - w = 7'^{\wedge} + 3$, $9 = r - f - 5 = i6a + 7$, $p = \zeta - f - r = 25i^{\wedge} + II$; ainsi le nombre des femmes était $aSu + 11$, et celui des hommes était $i6u + 7 \hat{1}$ et on peut substituer dans ces formules , au lieu de $x£^{\wedge}$ tels nombres entiers qu'on veut. Les résultats les plus petits sont parconséquent ceux qui suivent : $-\wedge u f^{\wedge} \textcircled{R} \textcircled{R}$ femmes : $= 11$, 36 , Gi , 86 , 111 , etc. 1 des hommes : $= 37$, a3, Sg, 55, 71 , etc. Suivant la première solution > ou celle qui renferme les plua petits nombres , les femmes ont dépensé 176 liv. et les hommes 175 livres, c'est-à-dire une livre de moins que les femmes. 16. Question dixième. Quelqu'un achète des chevaux et des bœufs ; il paye 3i écus par cheval , et 220 écus pour chaque bœuf $^{\wedge}$ et il se trouve que les bœufs lui ont coûté sept écus de plus que ne lui ont coûté les chevaux : combien cet homme a»t-il acheté de bœufs et de chevaux ? Supposons que p soit le nombre des bœufs et q celui des chevaux , il faudra que $flop = 3i^{\wedge} + 7$, $ft'^{\wedge} ao^{\wedge} ao_{-}$ de cette manière nous avons $2or - 7$ or $- 7 \hat{u} cr = s = iig - f - 7$, et $0 = L^{\wedge} = zr + ^{\wedge} \blacksquare' = r + j$;

The text on this page is estimated to be only 21.32% accurate

if? È L £ ME N S ainsi 115-1-7 ,25 + 7 ■ . nx=:9r-7, et r=: — 11-
1 = 5 + — ^ = 5 + ^7f 9^> i29> ^^o, 191, 2at; 253, etc. ^rCvIuxt'} ^ = ^' ^3,
43, 63, 83, 103, 123, i43, i63, etc,^ 17. Si on considère comment, dans cet
exemple , les lettres p et 9 se déterminent par les lettres suivantes , on
remarquer» facilement que cette détermination dépend du rapport def
nombres 3 1 et 20, et en particuUer du rapport qu'on découvre en cherchant
le plus grand commun diviseur de ces deux nombres. En eifet , si qn fait
cette opération

The text on this page is estimated to be only 23.63% accurate

D'ÀLGÈBRE. » 7 3i 9i f ao ulT" ao 9 ail 9 / _a 1 1 4 2 O B 3
est clair que les quotiens qu'on obtient se retrouvent dans la détermination successive des lettres p , q , r^s, etc., et qu'ils sont liés avec la première lettre à droite , pendant que la dernière reste toujours isolée ; on voit de plus que ce n'est que dans la cinquième et dernière équation que se présente le nombre 7, et qu'il est affecté du signe +, parceque le rang de cette équation est impair; car si ce nombre avait été pair, on aurait trouvé — 7. Ce que nous disons deviendra encore plus clair dans la table suivante , dans laquelle on verra d'abord la décomposition des nombres 3i et ao , et puis la détermination des lettres p, q , r.^ etc. $3i = 1 \cdot 20 + 11$ p—i*q+r 20 = 1 . 1 1 -f- 9 q r=z i.r -f- f 11 =1. 9 + a r — i,s +t 9=4. fl-f- 1 s =4.t +u 22 — 3. 1 -f- 0 t = a.tt -f- 7 18. On pent représenter de. la même manière l'exemple précédent de l'article i4* 2»i;

The text on this page is estimated to be only 22.57% accurate

$tS \acute{E} t i u E i \$ 5G = i.Sg + 17 \ 39 = a. \ 17 + 5 \ 17 = 3. \ 5 + a \ 5 = a. \ a -$
 $f - i \ 2 = a. \ 1 \ 4 - P^{\wedge} = a.r - f - * \ r = 3.^{\wedge} + e \ tf = a.t + u \ 19.$ Nous sommes donc en
 état de résoudre de la même manière toutes les questions de cette espèce.
 En effet, soit donnée l'équation $bp = aq + n$, où a , i et 71 signifient des
 nombres connus. Il ne s'agira ici que de procéder comme si on cherchait le
 plus grand commun diviseur des nombres a et b , on pourra aussitôt
 déterminer p et q par les lettres suivantes, comme on va voir : $bz; zBC^{\backslash} rdi$
 $1 \ y = ; : ^{\wedge} r + ^{\wedge} ^{\wedge} .^{\wedge} .C^{\wedge} Cd + A \ Jr := Cs + t \ fF = S'g + oJ \ {uz = Fy \pm, n.}$ On fera
 seulement attention encore, qu'il faut dans la dernière équation il faut donner à n
 le signe $-f$, quand le nombre des équations est impair ; et qu'au contraire il
 faut prendre $+n$, lorsque ce nombre est pair. Voilà donc comment on peut
 résoudre avec assez de promptitude les questions dont nous nous occupons
 dans ce chapitre : nous en donnerons quelques exemples. 10. Question
 onzième. On cherche un nombre qui, étant divisé par 11 , donne le résidu
 3 , et qui étant divisé par 19 donne le résidu 5 . Soit N ce nombre cherché
 : il faudra d'abord que $N : 5 = 1 \ i/i \ rH^*$ et en second lieu que $n = 19(/ + 5$.
 Donc $11p = 199 + a$.

The text on this page is estimated to be only 16.24% accurate

D'ALGÈBRE* iqaation qui fournit la Ubie suivante : $9 \cdot 19 = 171$; $11 + 8 = 19$; $8 + 3 = 11$; $3 + a = 11$; $1 + t = a$; où « l'on peut donner à u telle valeur qu'on veut, et déter- » miner par là successivement en rétrogradât les lettre.s pr⁴ cédeutes. On aura $I = 19 + a$; $19 + a = 3a - f - d$; $r = a - f - * = 8a + 6$; $r = 4 - J = p + 8$ de là résulte le nombre cherché $A = 309a + 157$; donc le plus petit nombre qui puisse exprimer N , ou satisfaire à la question , est 167. fli. Question douzième. Trouver un nombre tel qu'en le divisant par u , il reste 3, et qu'en le divisant par ig, il reste 5 ; et de plus , que û on divise ce nombre par ag j on obtienne le résidu 10. < La dernière condition exige que $iV = i^{gp} - \{ - 10$; ^t comme on a déjà ^aît le calcul pour les deu^ autres^ il fautj (çn cpn« séquence de ce qu'on a trouvé , quç $iV = aoga - iSj$. Ainsi $agjp - i035 = ao97 + i57$, ou $agp = ao99 + 147$ » d'où résulte le type qui suit : $309 = 7 \cdot 39 + 6$; $ag = 4 - 6 + 5 \cdot 6 = 1 \cdot 5 + 1 \cdot 5 = 5 \cdot 1 + 0$; donc / ^ s+t, a

The text on this page is estimated to be only 29.71% accurate

ao ÉLÉMENTS Et si nous revenons maintenant sur nos pas , nous auront $J = r5t - 147$, $r = s + t = 6t - 147$ • $q = 4r + s = 29 - 735$, $p' = j'q' - r = 108t - 147$ Saga. Donc $iv = 6061 - 153458$. Le plus petit nombre se trouve en faisant $t = 26$, et cette supposition donne $A' = 4128$. u a. Une remarque cependant qu'il faut faire , c'est que pour qu'une telle équation $bp = aq - n$ soit résoluble , il faut que les deux nombres a et b n'aient d'autre commun diviseur que 1 ; car sans cela la question serait impossible > à moins que le nombre n n'eût le même commun diviseur. Si l'on demandait , par exemple , que $9p = 157 + 2$; comme 9 et 15 ont le commun diviseur 3 , lequel n'est pas un diviseur de 2 , il est impossible de résoudre la question > parceque $gp - 15q$ pouvant toujours être divisé par 3 , ne peut en aucun, cas devenir $= a$. Mais si dans cet exemple n était $= 3$, ou $n = 6$, etc. , la question serait possible : il suffirait de diviser auparavant par 3 ; car on aurait $3p = 5q - 1$, équation qui serait facilement résoluble par la règle donnée ci-dessus. On voit donc clairement que les nombres g et h ne doivent avoir d'autre commun diviseur que l'unité, et que que notre règle ne peut avoir lieu dans d'autres cas. a3. Pour le prouver encore plus évidemment, nous traiterons l'équation $gp = 15t + a$, suivant } a > VQit ordinaire: ^ . 'Nous trouvons

The text on this page is estimated to be only 15.95% accurate

d'aloêbre* 9k desorte que $\text{grs}G\zeta\text{-f-a}$, ou $Gqfss\text{gr} \text{---} a$; ainsi or ---
a , $3r \text{---} a$, de façon que $3r \text{---} a = G5$, ou $3r = 6j + a$, Par conséquent $Gj + a$,
, $r = \text{---} g \text{---} = aj + f$; or fl est bien clair que le second membre ne peut
jamais de

i(i t t i M t \$1 ê Sm^Si SSCBS CHAPITRE li. De la règle qu'on
 nomme régula cœci, qui sert à déterminer par deux équations ^ trois ou un
 plus grand nombre d'inconnues. d4. JJl ous avons vu dans le chapitre
 précédent , comment où ^eût déterminer au moyen d'une seule équation
 deux quantités inconnues, au point de les exprimer en nombret entiers et
 positifs. ^ Si donc on avait deux équations , il faudrait , pour que la question
 fut indéterminée , que ces équations renfermassent plus de deux inconnues.
 Or il se présente de ces questions dans les livres d'Arithmétique ; on les
 résout par la règle dite régula cœci : nous ferons voir les fondemens de cette
 règle* â5. Nous commencerons par un exemple. Question première. Trente
 personnes, hommes, femmes et enfàns dépensent 50 écus dans une auberge;
 l'écot d*iui homme est 3 écus, celui d'une femme est a écus, et celui d'un
 enfant est un écu -, combien y avait-il de personnes de chaque classe? Soit
 le nombre des hommes = p > celui des femmes = ^ f et celui des enfans =r,
 nous aurons les deux équations «uivantes : Et il s'agit d'en tirer les trois
 lettre! pi g et r en nombree

The text on this page is estimated to be only 22.04% accurate

d'à l g è b r e. sS entiers et positifs. La première équation donne $r=30 - p - 7$, d'où nous concluons d'abord que $p + q$ doit être moindre que 30; et substituant cette valeur de r dans la seconde équation nous ayons $p + q + 30 = 50$, desorte que $q = 20 - p$ et $p + q = 20 - p$; ce qui est évidemment aussi moindre que 30. Or comme on peut, en vertu de cette équation, prendre pour p tous les nombres qui ne passent pas 10 on aura les onze solutions suivantes : Nombre des hommes, $P = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$, Nombre des femmes, $Q = 17, 16, 15, 14, 13, 12, 11, 10, 9, 8, 7$, Nombre des enfans, $R = 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0$. Question seconde. Quelqu'un achète 100 pièces de bétail des porcs, des chèvres et des moutons, pour 100 écus : les porcs lui coûtent 3 écus la pièce ; les chèvres, 1 écu, et les moutons, 2 écus : combien y avait-il d'animaux de chaque espèce ? Soit le nombre des porcs p , celui des chèvres q et celui des moutons r , on aura les deux équations suivantes : $p + q + r = 100$, $3p + q + 2r = 100$; et cette dernière étant multipliée par 6, afin de chasser les fractions se transforme en celle-ci : $6p + 6q + 12r = 600$. 4

The text on this page is estimated to be only 26.97% accurate

S4 £ L É M £ N s Or la première donne $r = 100 - p - q$ et si
 Ton substitue cette valeur pour r dans la seconde $\wedge$ on a $i8p + 5(3f = 300$, ou
 $5qf = 300 - i8p$ et $qf = 60 - \frac{4p}{5}$. Par conséquent il faut que $i8p$ soit divisible
 par 5, et renferme 5 comme facteur. Qu'on fasse donc $p = 5s$, on aura $\wedge =$
 $60 - 18s$ et $r = i3j + 4s$, où l'on peut prendre pour s un nombre entier
 quelconque, pourvu qu'il soit tel que q ne devienne pas négatif. Mais cette
 condition limite la valeur de $\wedge$ à 3, desorte que si on exclut aussi 0, il ne
 peut y avoir que trois solutions du problème ; ce sont les suivantes :
 Lorsque $s = 1, 2, 3$, on a $p = 5, 10, 15$, $q = 42, 24, 16$, $r = 53, 66, 70$.
 Lorsqu'on veut soi-même se proposer de tels exemples, il faut faire
 attention surtout qu'ils soient possibles ; et pour pouvoir en juger, voici ce
 qu'il faut observer: Soient les deux équations auxquelles nous parvenions
 jusqu'à présent, représentées par où j, g et h y ainsi que a et b , sont des
 nombres donnés : «i nous supposons qu'entre les nombres j, g et A , le
 premier y soit le plus grand, et h le plus petit comme à cause de

The text on this page is estimated to be only 26.15% accurate

D*A L G £ B R E. StS BOUS Avomfx +j5'+^=yîi> il est clair que $x^{+} + \hat{a}$ est plus grand que $fx^{gy} + hz$; par conséquent il faut que fa soit plus grand que b , ou que b soit plus petit que $\hat{a}$; et puisque de plus $hx^{hy} - \hat{h}z = ha$, et que $Ax + 'iy + hz$ est certainement plus petit que $\hat{a} + gy + Az$, il faut aussi que ha soit plus petit que b , ou b plus grand que ha . Il suit donc de là que si b n'est pas plus petit que fa , et en même temps plus grand que ha , la question sera impossible. On exprime cette condition aussi en disant que b doit être contenu entre les limites fa et ha ; et il faut de plus faire attention que ce nombre n'approche pas trop de l'une ou de l'autre limite, parceque cela ferait qu'on ne pourrait pas déterminer les autres lettres. Dans l'exemple précédent, où $a=100$, $\hat{a}=3i$ et $h=i$, les limites étaient 350 et 50; or si on voulait supposer $b=5i$ au lieu de 100, les équations deviendraient $a: + j^{\hat{a}} + 2i=100$ et $3ia: + 1^{\hat{j}} + \sim z = 5i$, ou, en chassant les fractions, $Qix - f - 8y + 3a = 30G$; qu'on multiplie la première par 3, desorte que $3x + 3j + 3z = 300$; si Ton soustrait cette équation de l'autre, il reste $iSx + 5y = G$, ce qu'on voit sur-le-champ être impossible, parceque a : et j doivent être de? nombres entiers et positifs.

fl6 t t i M ¥, s s a8. L^6 orféVfes et les monnâjreors tirent grand
 parti â« cette règle, quand iU se proposent de faire de trois ou de plusieurs
 sortes d'argent , un alliage d'un prix donné, ainsi, que l'exemple suivant le
 fera voir. Question troisième. Un monnayeur a trois sortes d'argent ; la
 première à 7 onces d'argent fin par marc , la seconde à 5 j onces, la
 troisième à 4i onces; il a à faire un alliage de 30 marcs pesant, à 6 onces;
 combien de marcs doit- il. prendre de chaque sorte ? Qu'il prenne x marcs
 de la première sorte, y marcs de la seconde et z marcs de la troisième , il
 aura et c'est la première équation. Ensuite, puisqu'un marc de la première
 sorte contient 7 onces d'argent fin , les x marcs de cette -sorte contiendront
 •jx onces de tel argent ; de même les y marcs de la seconde sorte
 contiendront 5 ^y onces , et les z marcs de la troisième sorte contiendront
 4i^ onces d'argent fin; desorte que toute la masse contiendra 70? + 5^^ -
 + -41^ onces d'argent fin. Or puisque cet alliage pèse 30 marcs, et que
 chacun de ce* marcs contient 6 onces d'argent fin , il s'ensuit que la masse
 entière contiendra 1 80 onces d'argent fin ; et de là résulte la seconde
 équation 70? -+- Sij' + ^iarrsijBo, ou i4x + iiy + ^zr=i56o. Si l'on soustrait
 maintenant de cette équation la première prise neuf fois, ou il reste 5x 4- 2y
 = 90 , équation qui doit donner en nombres entiers les valeurs de x etde^.
 Quanta la valeur de z, on la tirera ensuite de l'équatioa 2j=r:30 — a: — y.

The text on this page is estimated to be only 19.54% accurate

5x b'a l g i b r e. af Or réqnâtion précédente donne $ay=90 - 5x$ et $jf=!:45 - ^$; soit donc $x = 2u$, on aura $yt=:^5 - 5m$ et $z=3a - 15$; on voit donc que u doit être plus grand que $4i$ ^^ cependant plus petit que lo ; et parconséquent la question admet les solutions suivantes : $u \sim 5, 6, 7, 8, 9 > 1$ $X - 10, 13, >4, i6. i8. 1 y =: ao. i5, lO, 5. o. 1 s = 0, 3, 6, 9. \dots$ Éi§. n ée présente quelquefois des question^ qui renferment plus de trois inconnues , mais on les résout de la ménie manière , comme l'exemple suivant' le fera voir. Question quatrième. Quelqu'un achète lOo pièces de bétail pour lOO écus^ savoir, des bœufs à lo écus la pièce , des vaches à 5 écus, des veaux à a écus, et des moutons à l écu la pièce ; combien a-t-tl acheté de boeufs i de vaches, de veaux et de moutons ? Soient le nombre des bœufs $=p>$ celui des vaches $=:(/^$ celui des veaux $=r$, et celui des moutons $=^*$, la pre* mière équation est $p -i-q + r-i'S=z$ loo. et la seconde est $lo^ -J- 5q -f-ar-H \ddot{i}^ = ioo$, «n, en faisant disparaître lés fractions, $flop + io -|- 4r + ^ = aoo$;

The text on this page is estimated to be only 23.51% accurate

aS ÉLÉMEIfS soustrayant la première équation de celle-ci, il restt
 d'où Ton tire et $i9P + 9? + 3r = 100$, $3r = 100 - 99$, $1 - P. r = 33 + ^ - Gp$
 $- ^p - 3qf$, ou $r = 33 - 6p - S^H - ^i$ donc il faut que $i - p$ ou $p - i$
 soit divisible par 3. Qu'on fasse $p - i = 3f$: on aura $P - 5t + 1$, $9 1 > r - 27$
 $- igt - 3(7, s = 73 + aq - fiGf$; il suit de là que $igt + 3(7$ doit être moindre
 que 27, et que, pourvu .que cette condition s*observe, on peut au reste
 donner à q et à t telle valeur qu'on veut; cela posé, nous aurons à considérer
 les cas suivans : L Si $t = 0$ II. Si $^ = 1$ ' on a $p - 1 q \backslash = q r \blacksquare - 27 - 5q j$
 $= 72 - f - 29$. on a $p - 4 q = q r - 8 - 5q j = 88 + 27$. On ne peut faire $t = 2$
 , parceque r deviendrait négatif. Dans le premier cas, q ne doit pas surpasser
 9, et dans le second cas, ce nombre ne doit pas excéder 2 ', ainsi ces deux
 cas donnent les solutions qui suivent :

D* A L C È B II E. Le premier aonne les dix solutions que voici :
•25 I. II. III. 1 IV. 1 V. 1 VI. 1 VII. i VIII. 1 IX. I X. 1 p t 9 0 I a 3 4 5 G 7 8
9 r 27 24 ai 18 i5 12 .9 6 3 0 1 * 72 74 76 78 80 82 84 86 88 90 Le second
cas fournit les trois solutions suivantes : P r s I. 4 0 8 88 > II. III. 4 I 5 90 4
a a 92 Voilà donc en tout treize solutions, et elles se réduisent à dix, «.on
exclut celles qui renferment un zéro. 3o. La méthode ne laisserait pas d'être
la même , si ^ dans la première équation , les lettres étaient multipliées par
des nombres donnés , comme on le verra par Texemple suivant : Question
cinquième. Trouver trois nombres entiers, tels que si on multiplie le premier
par 3 , le second par 5 et le troisième par 7 , la somme des produits soit 56o
, et que si on multiplie le premier par 9 , le second par aS et le troiiième par
49 1 1^ somme des produits soit 3920. Soit le premier nombre = a:, le
second =j^, le troisième ?= s : on aura les deux équations , *•. 3a?-f-5y-{-7a
= 5So-, a°.9i'-f-a5y+492=fl9îiO.

The text on this page is estimated to be only 18.30% accurate

So ÉLÉMENTS Si on soustrait de la seconde la première prbe trois fois, ou $9a;+i5y+ai\ll= 1680$, il reste $loy + aSz^i 1240$; divisant par a , on a $5y + 14\gg = 6ao$, d'où Ton tire $/ i4\ll y\text{---}ia4 1-$. Ainsi % doit être divisible par 5 ; qu'on fasse donc $s r=c Su$, on aura $^=ia4\text{---} i4tt$. Ces valeurs étant substituées dans la première é

The text on this page is estimated to be only 21.80% accurate

D'A L G É B R £. Si su CHAPITRE III. Des équations indéterminées composées dans lesquelles l'une des inconnues ne passe pas le premier degré. 3i. Jji OU3 pa^.eroQ9 à présent aux épiations indéterminées dans lesquelles se trouvent deux quantités inconnues ^ et où l'une de ces inconnue^ est multipliée par l'autre , ou élevée à une puissance plus haute que la première , tandis que l'autre inconnue ne s'y trouve cependant encore qu'au premier degré. Il est évident que les équations de cette espèce peuvent se représenter par l'équation générale qi^i suit : fl -J- 6x + cy -f- dxx + exy -f- fj? + gxxxy + Ax< + kx?y --)* etc. ;= c. Comme daiis cette équation y ne passe pas le premier degré, cette lettre se détermine facilement; mais il faut au reste, comme auparavant , que les valeurs tant de x que Aty , soient assignées en nombres ^Qtiers. Nous alloQS considérer quelques-uci^ d^ ces cas , en com-^ mençant par ^e^ plus faciles. 5a. Qu^tion première. Trouver deux nombres tels que , À on ajoute leur produit à leur somme , on obtienne 79. Nommons x ety les deux nombres cherchés ; il faudra que

The text on this page is estimated to be only 9.58% accurate

Sa éléphant ainsi $x^2 + y = 79$ et $79 - j$: ■ 80 d'on résulte que $x + i$ doit être un diviseur de 80. Or 80 ayant beaucoup de diviseurs, on aura aussi plusieurs valeurs de X , comme on va voir : Les diviseurs de 80 sont. . . . N. 4 5 8 7 iG « 4o Soit donc $X =$; $9.94j57S1133$, i Mais comme les dernières solutions sont les mêmes que les premières, on n'a réellement que les cinq solutions suivantes : I. II. III. IV. V. $793934i57 \gg 9^{\wedge}$. De la même manière qu'on pourra résoudre aussi l'équation générale, $xy - i - ax - i - by = c$; car on aura $xy^by = c - ax, c + ax, ab -^ c$ c'est-à-dire que a doit être un diviseur du $aombr^ttb + c$; desorte que chaque diviseur de ce nombre doit avoir une valeur de x . Qu'on fasse donc

The text on this page is estimated to be only 14.99% accurate

D*A L G £ ' R L. 33 on aura et supposant $x + b = f$, ou $x = f - b$, il est clair que $y = F - \langle +\acute{e} : \rangle$ ou $j^m g - a$, et parconséquent qu'on aura même deux solutions pour $cb * 9u$ » manière de représenter le nombre $a^6 - f - c$ par un $pro^{^^}$ que fg . De ces deux solutions $^$ Tune est $x = f^b$ et $J^ = g - a$, et l'autre s'obtient en faisant $x - ^$ à $\bullet'^i Sf$. lions lequel cas Si donc on -« proposait Téquation ; $ry + ax + 3y = 4^$, $\bullet$ on aur^t $a = a$, $fc = 3$. et $c = :43$; parconséquent Or le nombre 48 peut se reptésenter de plusieurs manière» par deux facteurs , comme fg , «t dans chacun de ces ca» on «nra toi qoTi w, soit $x = / - 3$ et $y = g - a$, «qit ausn « = $ff - 3$ et $y = / - 3$.

The text on this page is estimated to be only 11.77% accurate

54 iLÉMKHt Voici le développement de cet exemple : Facteurs '■
ilIII, IV. Il V. 1 ,.48 i..!4 3. .6 4.,= S.8| I y X y X y X y\^ L timbres Us Ql o
0 i3 >-(1 9 10 3 Al 6 4 '^*" L'è^iation peut s'exprimer encore plus
généralement , en écnvanv $mxy = ox + fr^{\wedge} + ^{\wedge} >$ où û, i, c et m «rni , ^j
nombres donnés, et où Ton cherdi» pour x et _y des nombres vnxnx*- t-
^..oDaw, Qu'on dégage d'abord ji, on aura et multipliant par m de part et
d'autre , on aura $mor + n ah mx — b'$ On a maintenant une fraction dont le
numérateur est nn nombre connu , et dont le dénominateur doit être un
diviseur de ce nombre ; qu'on représente donc le numérateur par un produit
de deux facteurs , comme $y^{\wedge}$, ce qui peut souvent se faire de plusieurs
manières , et qu'on voye si un de ces facteurs peut se comparer avec $mx —$
6 , de façon que $mx ^ b ^{\wedge}=f$ ■Or il faut poot cet effet, puisque $x =-i^{\wedge}-$, que/+J
»oit

The text on this page is estimated to be only 20.85% accurate

$k > 0$ A L a £ B R e: 55 divisible par m ; et il suit de là que parmi les facteurs de $f(x) = ax^2 + 3y + 18$, on ne peut employer que ceux qui sont tels , qu'en y ajoutant b , les sommes soient divisibles par m . Nous allons éclaircir ceci par un exemple. Soit l'équation $5x^2 = ax + 3y + 18$, en aura $a = 18$, $g = 10x^4 - 90x^2 - 196$. $3 \cdot 8$ agit par conséquent de trouver ceux des diviseurs de 96 , qui ajoutés à 3 , donnent des sommes divisibles par 5. Or si Ton considère tous les diviseurs de 96 , qui sont 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 96 , on voit facilement qu'il n'y a que ces trois, 2 , 12, 32 , qui peuvent servir. 1°. $5x - 3 = 2$, on aura $5y = 50$, et par conséquent $X = 1$, et $jr = 10$. 2°. $5x - 3 = 12$, on aura $5y = 10$, et par conséquent $X = 1$, et $jr = 10$. 3°. $5x - 3 = 32$, on aura $5y = 5$, et par conséquent $a = 7$, et $jr = 1$. 35. Comme dans cette solution générale on a $my - a = r$ > il sera à propos d'observer que si un nombre compris dans la formule $me + af$ a un diviseur de la forme $mx - 6$, le quotient dans ce cas doit être nécessairement compris dans la formule $zny - a$, et qu'on peut alors représenter le nombre $me + af$ par un produit tel que $(mx - 6)(ny - a)$. Supposons, par exemple, $7n = 12$, $a = 5$, $bz = zj$ et $c = 15$, ou aura $215 \cdot 12 = 7M$

The text on this page is estimated to be only 16.32% accurate

3 & ÉLÉMENTS ou les diviseurs de a^5 «ont $i, 5, ip$ » 21 5; il faut choisir parmi ceux-là ci^x qui sont compris dans la formule $ax - 7^{\dots}$ ou qui sont tels qu' ey^j tant 7, la somme soit divisible par la; mais il y a, que 5 qui satisfasse à cette condition $J \cdot$ ainsi » ■.-: $i2x - 7 = 5$ et $i2y - 5 = 43$; r.te;iaat $^{>i}$ une équation de cette espèce, Elle nous donne / ainsi $X - 3$ doit être un diviseur de oS , et dans ce cas, la division étant faite le quotient sera $\blacksquare = y - i - x - \{-1\}$; or les diviseurs de aG étant 1, $a, i3, a6$, nous aurons donc les solutions suivantes : $i^{**}. x - 3 = 1$, ou $x = 4$ d'où $^{J^r+i} - ^{+5} = 26$, et $y = Qi$; $a^*. X - 3 = 2$, ou $x = 5$; ainsi $^{fx+i} = y - G = i3$, et $^{=7, 3@}. X - ^3 = 13$, ou $a = iG$; ainsi $j' + x + irz^{+iT^ria}$, et $yi = -15$. Cette dernière valeur étant négative doit être omise, et par la même raison on ne pourra tenir compte du dernier cas, $X - 3 = aG$. 37. Il ne sera pas nécessaire de développer ici un plus grand nombre de ces formules dans lesquelles on ne rencontre

The text on this page is estimated to be only 25.63% accurate

D-ALGÈBRE. 7^e la première puissance de y et la seconde de x car ces cas ne se présentent que rarement et peuvent d'ailleurs toujours se résoudre par la méthode que nous avons expliquée. J'ajoute que si y est élevé à la seconde puissance, ou à un degré encore plus haut et qu'on veut en déterminer la valeur par les règles données, on parvient à des radicaux qui comprennent des puissances secondes ou en outre plus hautes de a , et il s'agit alors de trouver pour ces valeurs telles

38 É L é M E N 9 ES CHAPITRE IV* ^JDe la manière de rendre rationnelles les quantités sourdes de la forme $ax^2 + bx + c$. S8. Il est donc question présentement de déterminer les valeurs qu'on peut adopter pour x , afin que la formule $ax^2 + bx + c$ devienne effectivement un carré, et par conséquent qu'on puisse en assigner une racine rationnelle. Or les lettres a , b et c signifient des nombres donnés; c'est de la nature de ces nombres que dépend principalement la détermination de l'inconnue x , et nous remarquerons d'avance que dans bien des cas la solution devient impossible. Mais lors même qu'elle est possible il faut du moins se contenter d'abord de pouvoir assigner pour la lettre x des valeurs rationnelles, sans exiger précisément que ces valeurs soient même des nombres entiers; cette condition entraîne des recherches tout-à-fait particulières. 39. Nous supposons ici, comme on voit, que la formule ne s'étend qu'aux secondes puissances de x) les degrés plus élevés exigent des méthodes différentes dont nous parlerons plus bas. Nous remarquerons d'abord que si la seconde puissance même ne s'y trouvait pas, et que c fût $=0$, la question n'aurait aucune difficulté; car si $ax^2 + bx = y^2$ était la formule proposée, et qu'il fallût déterminer x de manière que $ax^2 + bx$ fût un carré, on n'aurait qu'à faire $ax^2 + bx = y^2$

D* A L G i B R E. 5[^] fet Ton obtiendrait aussitôt $a; = \sqrt{2-7}$ — ; or, quelque nombre que Ton substituât ici au lieu de $\sqrt{}$, il en résulterait toujours pour x une valeur telle que $a - \sqrt{-bx}$ serait un carré $\sqrt{}$ «t par conséquent $\sqrt{a - \sqrt{-bx}}$ une quantité rationnelle. 4o. Nous commencerons donc par la formule $\sqrt{v/i+x}$; > c'est-à-dire que nous chercherons pour x des valeurs telles, qu'en ajoutant à leurs carrés l'unité, les sommes soient pareillement des carrés ; et comme il est clair que ces valeurs de X ne pourront être des nombres entiers, il faudra se contenter de trouver les nombres fractionnaires qui les expriment. 4i- Si on voulait, à cause que $i - \sqrt{-}$ doit être un carré $\sqrt{}$ supposer $i - \sqrt{xxzziiyy}$ on aurait $XX z = zyy - i$ et $x := \sqrt{yy - i}$ ainsi il faudrait, afin de trouver x , chercher pour $\sqrt{}$ des nombres tels que leurs carrés, diminués de l'unité, donnassent aussi des carrés ; et par conséquent on retomberait dans une question aussi difficile que la première, et on n'aurait pas fait un pas en avant. 11 est cependant certain qu'il y a réellement des fractions dont la substitution pour xx rend $i+j$: un carré ; on peut s'en convaincre par les cas suivans : 1^o. Si $a; = J$, on a $i + arx = ff$, par conséquent $|i+a;x = | : a^{**}$, $i+xx$ devient pareillement un carré ; si $x = |$, on trouve $\sqrt{i-f-a^7x} = \S. 3^{**}$. Si on fait $a; = .^{\wedge}$, on obtient $i + a;a; = |||$, dont la racine carrée est If . Mais il s'agit de faire voir comment on doit trouver ces valeurs de $a?$, et même tous les nombres possibles de cette espèce. 4

The text on this page is estimated to be only 19.41% accurate

4o ÉLTSMENS 42. n y a deux méthodes pour cela. La première demande qu'on fasse $V^i 4- \gg 3cx = a: + p$; on a dans cette supposition $1 + XX = XX + \hat{ip}X + pp$ y où le carré xx se détruit ; desorte qu'on peut exprimer x sans Hgne radical. Car effaçant de part et d'autre xx dans l'équation précédente y on trouve $opx + pp = zi$, dou $a: = '^ > \$$ quantité dans laquelle on peut substituer à p un ncibre qu iconque, et même des fractions. Qu'on suppose donc $p == \text{---}$, on aura $X \text{ mm } nn \text{ n } \bullet \}$ et si on multiplie les deux termes de cette fraction pai, [ir , on trouve ; >f. 7171— 77177t Qmn 43. Ainsi, pour que $1 -^ xx$ devienne 'n carré, on fT .; ^rendre pour 771 et 7t tous les^ nombres entiers possibles^ et trouver de cette manière pour x une infinité de valeurs'. Si l'on fait aussi en général 7171 — 771771 2mn on trouve . $n^{-} \wedge Qmmnn^m^ i+xxz=zi^ \text{---} -^ XJL.^ \wedge mmnn^$

The text on this page is estimated to be only 9.82% accurate

$D A^G E B f f E. n^4 + s m m n n - i - n . 4 + X X \text{ — } K^{\wedge}$ ction qui est
 effectivement un carré, et qui donne Nous indiquerons, d'après cette
 solution , quelques-unes de > moindres valeurs de x. et m=: I 1 S 4 4 3 5 5 a
 5 3 5 4 onai = î J.. $X \pm 1 i l \hat{A} H T T T 4^{\wedge}$. On Toit qu'on a engés^ral {nntA^f
 (amn)' et si on multiplie cette équation par (smn)', ob trou* (anj'j)'+(nn—
 mnt)"t=(n»+mm)*; ainsi nous connaissons d'une manière générale deux
 «fU-'i:s , dont la dommc doOBVua nonwau carré. Cette remarque condnit à
 la résolution de la question suivante : Trouver deux nofirh'Cs $c^{\wedge} m^{\wedge}$ dont
 l«i S(qnwe rscôt pareil-? lement im nombre carré. On veut que $pp + q(l =$
 Tr; on n'a donc qu'à faire ■p=:2nïn'ét $q^{\wedge} n n - r t J t a n'$,

The text on this page is estimated to be only 20.09% accurate

4[^] ÉLÉMENT De plus [^] comme on peut aussi résoudre la question qui suit : . Trouver deux carrés dont la différence soit de même nombre carré. Car si on veut que $p^2 - q^2 = r^2$, on n'a qu'à supposer $p = m^2 + n^2$ et $q = m^2 - n^2$ et on aura $T = mn$. On pourrait aussi faire $p = m^2 + n^2$ et $q = m^2 - n^2$ et on aurait $r = 2mn$. 45. Nous ayons parlé de deux manières de donner à formule 1 la forme d'un carré ; voici donc l'autre méthode : Qu'on suppose on aura $m^2 - n^2 = x^2$, $m^2 - n^2 = x^2$; si l'on soustrait de part et d'autre 1, on a $m^2 - n^2 - 1 = x^2 - 1$; si l'on divise par $x + 1$ et par conséquent on a $m^2 - n^2 - 1 = x^2 - 1$, ou $m^2 - n^2 = x^2$, $m^2 - n^2 = x^2$.

The text on this page is estimated to be only 21.75% accurate

D'ALGÈBRE. ³ fi OÙ l'on tire $X = \frac{a^2 + 4mn}{a^2 - 4mn}$. — — — Ayant trouvé cette valeur de x , on a $a^2 + 4mn = n^2 + 4mn$ «4- $m^2 = z^2 - f^2$ ■ $r = z = \frac{a^2 - 4mn}{2}$, $7i4$ $\frac{Qmmnn - j - m}{n^2} = \frac{ammnn - j - m}{n^2}$ ce qui est le carré de $\frac{a^2 - 4mn}{2}$. Or comme il résulte de là $7171 - 771771$ r équation $+ (277171 y (7171 - 4 - 771771))^2, (7171 - 771771)^2 (t/I 771771)^2$ nous aurons^ ainsi que ci ^ c est-à-dire les deux mêmes carrés dont la somme est pareillement un carré. 46. Le cas que nous venons de développer d'une manière détaillée, nous fournit deux méthodes pour transformer en un carré la formule générale $a^2 + x^2 + cxx$. La première de ces méthodes s'applique à tous les cas où c est un carré ; la seconde se rapporte à ceux où a est un carré ; nous nous arrêterons à Tune et à Tautre supposition. 1®. Supposons d'abord que c soit un carré, ou que la forme proposée soit $a^2 + bx + f^2x$; puisqu'elle doit être un carré, nous ferons m, n et nous aurons $\frac{a^2 + bx + f^2x}{n^2} = \frac{fx + \dots}{H^2}$ $771771 a + bx + f^2x = rz^2$ $H^2 = \dots + \dots$ où les termes affectés de xx se détruisent ; desorte que $+ , S^mfx . 771771 or = r^2 + \dots n^2$

The text on this page is estimated to be only 21.19% accurate

44 ÉLÉMENTS si nous multiplions par nn , nous ayons $nna + nnhx == afmnx + mm$; nous en concluons $mm \text{ --- } nna$ et en substituant à x cette valeur , nous trouvons $\bullet / \text{ --- } : \text{ --- } ; Tzp \text{ --- } mmf\text{-}^{nnaf}$, $m \text{ mnb } \bullet\text{-}\blacksquare^{\text{---}}$ $mmf^{\wedge\wedge} n \text{ ya-}^{\text{---}}rbx^{\text{---}}ffxx == \text{ --- } f f H = r > \bullet' nnb'\text{-}^{\text{---}}mnj n \text{ nnb } \text{ --- } amnj$ 47'

Comme nous avons eu pour x une fraction , nous rons $^{\text{---}}nsorte$ que $p = TUTTI \text{-}^{\text{---}} TiTta$, et $\zeta = TiTifc \text{ --- } 2mnf$: ainai la formtile $\hat{u} + \text{ --- } + S\text{f}S^{\text{---}}$ est un carré ; et comme $^{\text{---}}q \text{ } ^{\text{---}}qq$ est pareillement un carré , si on la multiplie par le carré il s'ensuit que la formule $\langle\langle^{\text{---}} \text{---} \text{---} bpq + ffpp \text{ ---} \rangle\rangle^{\text{---}}$ aussi un ci ci on suppose $p == TTiTTi \text{ --- } nna$ et $\zeta = nnb \text{ --- } ^{\text{---}}\text{---}^{\text{---}}f$ Il est clair qu'il résulte de là une infinité de solution nombres entiers , parceque les valeurs des lettres tti et n arbitraires. 2°. Le second cas que nous avons à considérer, est où a est un carré. Soit donc proposée la formule $ff\text{-}fcj^{\text{---}}r$. dont il s'agisse de faire un carré. Nous suppos pour cet effet $\text{---}^{\text{---}} \text{ --- } nix$

The text on this page is estimated to be only 13.50% accurate

d'algèbre: 45 tï nous aurons il nn où les Jf se détruisant , on peut
diviser les termes restans par x^4 desorte qu'on obtient , $\frac{2771}{x^4}$, $\frac{mmx}{x^4}$, $\frac{1}{x^4}$,
 $\hat{o}+cr=: \frac{1}{x^4} H :=: nno + nnc\hat{a} ? =: \hat{a}Tnnf 4- \frac{mmx}{x^4} n nn * j t^4 > ou n/icx \frac{1}{x^4}$ —
 $mmx = umnf' \frac{1}{x^4} nnb$, d'où l'on tire $Qmnf \frac{1}{x^4} nnb X *_{\sim r} \gg^4 TiHp \frac{1}{x^4} mm$
■<8.Si nous substituons maintenant cette valeur à la place de x^4 r.as

The text on this page is estimated to be only 27.13% accurate

46 ÉLÉMENTS Qu'on cherche, par exemple, tous les nombres triangulaires qui sont en même temps des carrés, il faudra que $\frac{m^2 - n^2}{2}$ et par conséquent aussi $\frac{m^2 + n^2}{2}$ soit un carré. Supposons $m = nx$, que n soit ce carré, nous aurons $n^2 > m^2$, donc $Q = nx^2 - m^2$ et $x = \frac{m}{n}$ — 2/171* on peut substituer dans cette valeur, au lieu de m et de n , tous les nombres possibles; mais on trouvera pour x ordinairement une fraction, quelquefois cependant on parviendra aussi à des nombres entiers. Par exemple, si $m = 3$ et $n = 5$, on trouve $a = 8$, dont le nombre triangulaire qui est 36, est en même temps un carré. On peut aussi faire $m = 7$ et $n = 5$; dans ce cas $a = 50$, dont le triangle 225 est en même temps celui de 49 le carré de 35. On aurait trouvé le même résultat en faisant $m = 7$ et $n = 10$; car, dans ce cas, on a pareillement $a = 49$. De même, si $m = 17$ et $n = 10$, on trouve $a = 288$, le 288 est en même temps un nombre triangulaire et un carré, car $144 = 12^2$. Nous remarquerons, à l'égard de ce dernier cas, que la formule $a^2 - c^2$ n'a pu être transformée en un carré par la raison qu'elle avait un facteur, savoir x ; cette observation nous conduit à de nouveaux cas dans lesquels la formule $a^2 + c^2$ peut pareillement devenir un carré, lorsque même que ni a ni c ne sont des carrés. Ces cas sont ceux où $a^2 - c^2$ peut se décomposer en deux facteurs, et cela arrive lorsque $a^2 - c^2$ est un carré. Pour le prouver, nous remarquerons que les facteurs dépendent toujours des racines d'une équation, et qu'ainsi il faut supposer $a^2 - c^2 = 0$;

The text on this page is estimated to be only 21.28% accurate

D*ALGÈBRE; 47 «ela posé, on a $r \cdot bx a^c cxxsaB$ — « $t^j c^$ —
a, et $wCx = \text{---} \text{---} \blacksquare \text{---} \text{---} \bullet \text{'}$ ' ce d'où l'on tire , $1/ ac'$ et il est clair que si bb
— - 4 cette quantité devient rationnelle. . Soit donc $bb \text{---} /^c := dd$, les
racines seront — c'est-à-dire que $b \pm d a; = ; ac$ et parconséquent les
diviseurs de la formule $a \text{---}^b x^c cxx$ «ont $X \text{---} f$ et $a? + \text{---} ' \text{---}$; et si on
multiplie ces facac $I ac' ^$ teurs l'un par l'autre , on retrouve la même
formule , à cela près qu'elle est divisée par c ; car le produit est $xo: \text{---} f \text{---} +$
 $\text{---} z \text{---} \text{---} -7 \text{---}$; et puisque $dd := bb^4 c$, on a , bx , $bb bb ^ \hat{A} ac$, bx , a Ce
qui étant multiplié par c , donne $cxx \text{---} f \text{---} ix \text{---} f \text{---} a$. On n'a donc qu'à multiplier
l'un des facteurs par c , et on aura la formule en question exprimée par le
produit $a / \backslash ac' ac/$ et on voit que cette solution ne peut manquer d'avoir
lieu toutes les fois que $bb ^ /^c ac$ est un carré. 5i. De là résulte le troisième
cas dans lequel la formule.

The text on this page is estimated to be only 24.66% accurate

$\leq 3 K L i M \text{ } \text{ } y s \hat{u}^{\text{fca:} + \wedge \wedge \wedge P^{\text{R}}^* s^{\text{R}}}$ transformer en un carré ,
 et que i allons traiter après les précédens. 4*. Ce cas^, ainsi que nous
 l'avons insinué^ a lieu lors notre formule peut se représenter par un produit
 tel (/f-ga:). (A + fer). Pour faire de cette quantité un cai supposons sa
 racine , ou nous, aurons et en divisant cette équation par^f-gx, on a nn c\jt'
 a-^dire hnn -f- knnx szfmm -f> gmmx y et parconséqnt frnjn — /f/i/i
 Pour éclaircir ce résultat, sok proposée la question s vante : Première
 question. Trouver tous les nombres x tels c » V double de leurs carrés on
 retranche a, le reste soit Puisque c'est qxx — 2 qui doit être un carré , il faut
 fa attention que cette formule s'exprime par les facteurs suivai 2 . (a? + 1) .
 (a;— 1). Si doue on en suppose la rac m . (x+i) z=si ""^-"^ i-, oa a nn divisi

The text on this page is estimated to be only 15.49% accurate

D* A L G È B R E. 4^i divisant par x^i et multiplié par nn , on aura $!innX'^{2nn}::=mmX'j'7nm$, «t de là $mm + 9/i/t \ xz=z \cdot . \ an/i— mm$ Si l'on fait $m=i$ et $7i=i$, on trouve $a:=3$, et $axa;*— 3=16=4^*$. Que si $7»=3$ et $71=a$, on a $x=— 17$; or comme x ne se rencontre qu'élevé au second degré, il est indifférent qu'on prenne $x=— 17$, ou $a:=-f-i7$; l'une et l'autre, sup\ position donnent également $SLXx — a \ 1= 57S = a4^{**} \ 53$. Seconde question. Soit proposée la formule $Q + i3a; + 6x0;$, pour être transformée en un carré : nous avons ici $u-=:^{\wedge}$, $i = i3$, $c = 6$, où ni a ni c n'est un carré. Qu'on voie donc si $W— 4^{\wedge}$ devient un carré, on trouve aS ; ainsi bn Bst sûr que la formule peut être représentée par deux facm $C^{\wedge} \cdot 3jrt$ teurs; ces facteurs sont $(. + 3.)$, $(3 + a^{\wedge})$. Que $\sim$

The text on this page is estimated to be only 28.39% accurate

mm nn Sa ELÈMENS Quant au dénominateur , s'il doit devenir positif, on voit que $3m$ doit surpasser $2n$, et par conséquent doit être plus grand que $|$. Si donc on veut trouver pour x des nombres positifs , il faut prendre pour m et n des nombres tels que m soit moindre que J , et cependant plus grand que f . Soit, par exemple, $m = 6$ et $n = 5$: on aura $\frac{m}{n} = \frac{6}{5} > 1$ ce qui est moindre que $|$ et évidemment plus grand que f ; c'est pourquoi on trouve $a; = + \sqrt{54-4}$ Ce troisième cas donne lieu d'en considérer encore un quatrième , qui est celui où la formule $a-j-bx-\sqrt{c}x$ se décompose en deux parties telles que la première soit un carré, et que la seconde soit le produit de deux facteurs ; c'est-à-dire que, dans ce cas, la formule doit être représentée par une quantité de la forme $pp + qr^2$ où les lettres p , q et r indiquent des quantités de la forme $f-j'gx$. Il est clair que la règle, pour ce cas , sera de faire $\sqrt{1Z} = i$? car on aura $\sqrt{pp+qr} = \sqrt{pp+2221+Tm}$, n où les termes pp s'en vont, après quoi l'on peut diviser par q , desorte qu'on obtient $\sqrt{TTip} . mma$, $r=s-i-f-i$, ou $nr^2=nmnp+i'mmq$, équation par laquelle x se détermine facilement. Voilà donc le quatrième cas dans lequel notre formule peut se transformer en un carré ; l'application en est aisée , et nous allons en faire sur quelques exemples.

The text on this page is estimated to be only 22.75% accurate

d'algèbre. 5x 55. Troisième question. On cherche des nombres x , tels que leurs carrés pris deux fois, soient de i plus grands que d'autres carrés[^] ou bien que si on retranche $)$ *unité d'un de ces doubles carrés, il reste un carré; ainsi que le cas a lieu pour le nombre 5, dont le carré aS, pris deux fois, donne le nombre 5o> qui est de i plus grand que le carré 49il faut, d'après cet énoncé, que $qxx - i$ soit un carré; et comme nous avons, suivant notre formule, $a = -i$, irr o et $c = a$, on voit que ni a ni c n'est un carré, et que de plus la quantité proposée ne peut être décomposée en deux facteurs, puisque $bb - ^ac = 8$ n'est pas non plus un carré; desorte qu'aucun des trois premiers cas n'a lieu. Mais, suivant le quatrième[^] cette formule peut être représentée par $xo: -f(a:r - i) = a;j? + (a7 - i) (^+ i)$. Si donc oi[^] en suppose la racme $= a? + >$, on aura $nxx + \{x+i\} \{X - i\} = a:xH$ 1 ; 71 nn cette équation, après avoir effacé les xx et divisé les autres ternies par $jc + i$, donne $nnx '■^nn' = ^nmnx + mmx + mm$, d'où l'on tire $mm - f - nnx :=$; $nn - fimn - mm$, et puisque dans notre formule $axjc - i$, le quarré xx se trouve seul, il est indifférent qu'on trouva pour x des valeurs positives ou négatives. On peut d'abord même écrire $-m$ au lieu de $+ Tii$, ann d avoir $x = . - . n/i - J - am/i - mm$ Sî on fait ici $tti - rr i$ et $ti = i$, on trouve $x = l$ et $axx - 1 z = 1$; que si on fait $th = i$ «t /i = a, on trouve $x = -i^$ «t $axx - ^1 = xg' 'i$ enfin, si on supposait $m - i tX n = -a$, on trouverait $x =: -5$, oux $=: -f-5$, et $axx - i$ se 4s* a

The text on this page is estimated to be only 20.66% accurate

5d ÉLiMENS 5S. Quatrième question. Trouver des nombres dont les carré* doublés et augmeatés de 2, soient pareillement des carrés. Un tel nombre, par exemple, est 7 , le double de son carré est 98^ et si on y ajoute a, on a le carré 100. Il faut donc que ar.r -f- 2' soit un carré, et comme a = 2, 6 = 0 et c =:= 2 ; desorte que ni a ni c , ni ii — / ^ac ou — • 16 , ne sont des carrés , il faudra recourir à la quatrième règle. Supposons la première partie =r: 4 > la seconde sera mçx — 2=:2(x+i)(j; — 1), ce qui donne à la quantité proposée la forme 4 + ^ C-^+i) (a?— 1). Que a -j i — î — ^ en soit la racme , nous aurons 1 équation -T.xi/v y-ri j^ * , nn OÙ les nombres 4 se détruisent , de façon qu'après avoir divisé les autres termes par a? -f* ^ > on a fànnx •— 2nn 1= / ^mn -f- Tnmx -f- ttith , et parconséquent 4771/1 -|- 771771 + 27İ7» . ann — mm Si on fait dans cette valeur tti = 1 et /i = 1 , on trouve x = 7 , et sixx + 2 ;== 100. Mais si m == o et /i = i , on a a; = 1 et 2a:x -|- 2 = 4« 67. Il arrive souvent aussi que, lorsqu'aucune des trois premières règles n'a Jieu , on ne peut trouver comment la formule peut se décomposer en deux parties telles que la quatrième règle les demande. Par exemple , s'il est question de la formule 7 -|- i5-* ^f- iZxx, la décomposition dont nous parlons est à la vérité^

The text on this page is estimated to be only 29.13% accurate

!>• A L 6 è B R E. 53 possible , maïs la façon de la faire ne se présente pas d*^abord à .J*esprit ; elle . exige qu on suppose la première partie = (1 — xy , ou 1 — Qx -{-OCX , de façon que Tautre est = S -f- 17X+ iQxx-, et on reconnaît que cette partie a des facteurs , parceque 17* — 4.6.12 étant = 1, est un carré. En effet les deux facteurs sont (2 + 3x) (S-f-^jc); desorte que la formule devient (1 — x)* + (2 + 3x) (3 + /(jc) , et qu'on peut maintenant la résoudre par la quatrième règle. Mais, ainsi que nous Tayons insinué, on ne doit pas prétendre que cette décomposition se trouve sur-le-cbamp ; c'est pourquoi nous indiquerons encore une voie générale pour reconnaître préalablement si la résolution d'une telle formule est possible ou non *, car il y en a une inSnité qui ne peuvent donner des carrés ; de ce nombre est , par exemple , la formule 3a?jc + 9. D'un autre côté, il suffit de connaître un seul cas où une formule est possible , pour en trouver ensuite facilement toutes les solutions ', c'est sur quoi nous allons entrer dans quelque détail. 58. On remarquera , d'après ce que nous venons de dire , que tout l'avantage qu'on peut se promettre dans ces occasions, c'est de déterminer ou de deviner, pour ainsi dire, quelque cas dans lequel une formule telle que a + ia:+ cxx, se transforme en un carré; et la voie qui se présente naturellement pour cela , est de supposer successivement pour x de petits nombres , jusqu'à ce qu'on xencontre un cas qui donne un carré. Or , comme x peut être un nombre rompu , qu'on commence par substituer en général à x une fraction --, et à la formule a -A 1 qui en résulte , est un carré . ell# u uur *• le àera pareillement après avoir été multipliée par vu ; desorta qu^il restera à chercher pour t et pour u des valeurs en nombres entiers , telles que la formule auu -j- btu -f^ ctU a V

The text on this page is estimated to be only 28.30% accurate

54 ÉLÉMENTS soit un carré. Il est évident qu'après cela la supposition de $x = -$ ne peut manquer de faire trouver la formule $a + bx - f' cxx$ égale à un carré. * Si enfin, quoi qu'on fasse, on ne parvient à aucun cas satisfaisant, on a tout lieu de soupçonner qu'il est tout-à-fait impossible de transformer la formule en un carré, ce qui arrive très-fréquemment. 59. Présentement nous ferons voir que, lorsqu'au contraire on a déterminé un cas satisfaisant, il est facile de trouver tous les autres cas qui donnent pareillement un carré; on remarquera en même temps que le nombre de ces solutions est toujours infiniment grand. Considérons d'abord la formule $3 + jxx$, où $a = 2$, $fi = 0$ et $0=7$: elle devient évidemment un carré, si l'on suppose $a:= 1$; qu'on fasse donc $x= 1 -j-y$, on aura $xx = 1 + lay + J'y > \textcircled{R}^*$ notre formule devient $9 -f- i4y -\}- yyy$, où le premier terme est un carré; ainsi nous supposerons, conformément à la seconde règle, la racine carrée de la nouvelle formule $=3 \wedge \text{---} \wedge$, et nous aurons l'équation $fi \text{ } fi fl)$ où nous pouvons effacer 9 de part et d'autre, et diviser par y ; cela fait, nous aurons $1 \text{ } 4nn \text{ } -f- j \text{ } nny \text{ } z=\wedge bmn \wedge mmy)$ donc $y =: \text{---} \wedge \text{---} jnn \text{---} mm$ et conséquemment $Gm/l \text{---} 77\hat{I}71 \text{---} jnn \text{---} \wedge mm \text{ } 7/1/1 \text{---} 771771$ où Ton peut adopter pour m et n telles valeurs qu'on veut. Si on fait $m= 1$ et $*i=i$, on a $n = \text{---} j^\wedge$ ou bien aussi.

The text on this page is estimated to be only 12.16% accurate

D' A L 6 É B R E. 55 puisque la seconde puissance de x est seule
 $\wedge$ ce = -f-f j done Si m = 3 et n= 1, on a x s— i, ou a:=:-f'i• Mais si m = 3
et n = *— i , on a a: = 17 ; ce qui donne 1 -f- jxx = 2oa5 , le carré de fl5.
Supposons aussi m = 8 et n = 3 $\wedge$ nous aurons de même 4P=— 17 ou 07= 4"
7 Mais en faisant m = 8 et n = — 3, on trouve a: = fl7i ; desorte que 2 -f-
73:x= 514089 = 717*. 60. Examinons à présent la formule 5xa:+3a:+7,
quideyient nn carré par la supposition de a: == — 1 . Si nous faisons par
cette raison x =:y ■— 1 , notre formule se change en cdle-ci i + 3y_5 4-7
dont nous supposerons la racine carrée = 3 *-i conséqaemment nous aurons
5yy-7y + 9=9 — T $\wedge$ ~l' OU 572ny — 7/1/1 =: — 6m7t + mmy ; d où nous
tirons 7/1/Ī — 6/n/i ^ n ^^^ — " ^"" "t" ""* V = ^= , et enfin x = p ii • $\wedge$
5/1/1 — mm onn-^^mm Soit m = 2 etn=:i,onax = — 6, et parconséquent
5x07 -f- 5x -f- 7 = 169 = i3V 4

The text on this page is estimated to be only 16.04% accurate

I 5S ' É L £ M E N 8 Mais si $m = \frac{1}{2}a$ et $n = i$, on trouve $a = i8$, et $5x^2 + 3a = 7 = i8 = 4i^2$. Considérons maintenant cette autre formule $fx^2 - i5x - i3$ où nous ne pouvons que commencer par la supposition de $X = -$; ayant substitué et multiplié par u , nous avons la formule $7W + i5fa + i3au$, qui doit être un carré. Essayons donc de prendre quelques petits nombres pour les valeurs de t et de u . Faisons $t = i$, $u = i$, la formule deviendra 35 , $i^2 = 2$, $li = 1$, 71 , $i^2 = 1$, $u = 1$, $i^2 = 3$, $u^2 = 1$, lai , Or 121 étant un carré, on est assuré que la valeur $07 = 3$ satisfait; supposons donc $x = iy - i^3$, et nous aurons, en substituant dans la formule, $jyy - i^2ly + 63 + 15y + 45my$ nous aurons $i^2 + i^3$, ou $jyy + byy + 121$. Soit la racine $= 11 - i^2$, $22 TIV TtITTiyy lyy + 57^2 + 121 = 121 + \frac{1}{2}iH - i^2$; ou $7n^2y + 57/1/1 = 22mn - mmy$; donc $67/1/1 = 227/171$ $3S/in = 22/n/i + 3/n7it y = -i^2$, et $x = \frac{1}{2}Tw/n = 7/1/1 /n./\gg = 7/1/1$ Soit, par exemple, $7n = 3$ et $i = i$, on trouve $0 = \frac{1}{2}f$, et la formule devient $7XX + i5x + i3 = i^2 = (i)^2$ Soit $m = i$ et $n = i$, on trouve $x = \frac{1}{2}x^2 - x^2 ni = 3$ et

d'algèbre: 57 it=— 1 , on a $a:=i|^{\wedge}$, et la formule $7X07 + i5a: +13=$
 $i^{\wedge/\wedge} = (^{\wedge})'$; 62. Mais souvent on perd son temps à chercher un cas où la
formule proposée puisse devenir un carré. Nous avons déjà dit que $3xx -f- 2$
est une de ces formula intraitables , et on verra $^{\wedge}$ en lui donnant $^{\wedge}$ d'après la
règle , la forme $3tf -\{-$ aim, $qn^{\wedge}$ en effet , quelques valeurs que Ton donne k t
et à. u , cette quantité ne devient jamais un nombre carré. Et comme les
formules de cette espèce sont en très -grand nombre $^{\wedge}$ il est important
d'assigner quelques caractères auxquels on puisse reconnaître leur
impossibilité , afin qu'on soit souvent dispensé par là d'un tâtonnement
inutile : ce sera la matière du chapitre suivant.

The text on this page is estimated to be only 26.56% accurate

58 ÉLÉMENTS CHAPITRE V. Des cas où la formule $a^2 - bx - cxx$ ne peut jamais devenir un carré. 63. VJOMME notre formule générale est de trois termes, nous observerons d'abord qu'elle peut toujours être transformée en une autre dans laquelle le terme moyen manque. Cela se fait en supposant $x = n^2$; cette substitution change notre formule $a^2 - bx - cxx$ en celle-ci $a^2 - bn^2 - cn^4$; et réciproquement, si $a^2 - bx - cxx$ est un carré, la proposée le sera de même. Par conséquent, si on écrit n^2 à la place de x dans $a^2 - bx - cxx$, tout se réduira à déterminer si une quantité de la forme $czz + t$ peut être un carré ou non. Et comme cette formule ne consiste qu'en deux termes, il est certainement beaucoup plus facile par là de juger si elle est possible ou si elle ne l'est pas ; c'est au reste la nature des nombres donnés c et a , qui doit nous guider dans cette recherche. 64. Il est clair que si $t = 0$, la formule czz ne peut devenir un carré que dans le cas où c est un carré ; car le quotient de la division d'un carré par un autre carré étant pareillement un

D A L G £ B R E. 69 carré y la quantité czz ne peut être un carré ,
 à moins que , ou c , n'en soit un. Ainsi quand c n'est pas un carré , la
 formule cza» ne peut en aucune manière devenir un carré ; et au contraire,
 si c est par soi-même un carré, czz sera de même carré ^ quelque nombre
 que l'on adopte pour z. 65. Si nous voulons porter un jugement sur d'autres
 cas , il nous faudra recourir à ce que nous avons dit plus haut au sujet des
 différentes espèces de nombres considérés relativement à leur division par
 d'autres nombres. Nous avons vu , par exemple , que le diviseur 3 donne
 lieu à trois espèces différentes de nombres : la première comprend les
 nombres qui sont divisibles par 3 , et qu'on peut exprimer par la formule Zn .
 La seconde espèce comprend les nombres qui, divisés par 3, laissent 1 de
 reste , et qui sont contenus dans la formule $3n - 1$. A la troisième espèce
 appartiennent les nombre» dont la division par 3 donne 2 pour reste, et qui
 se représentent par l'expression générale $3n + 1$. Or, puisque tous les
 nombres sont contenus dans ces trois formules , considérons-en les carrés.
 D'abord , s'il s'agit d'un nombre qui soit compris dans la formule $3n$, nous
 voyons que le carré de cette quantité étant $9n^2$, il est divisible non-
 seulement par 3, mais aussi par 9. Que si le nombre donné est compris dans
 la formule $3n + 1$, on a le carré $9n^2 + 6n + 1$, qui , divisé par 3 , donne $3n^2 + 2n + 1$
 avec le résidu 1 , et qui par conséquent appartient de même à la
 seconde espèce $3n + 1$. Enfin ^ si le nombre en question est compris dans
 la formule $3n + 2$, on a à considérer le carré $9n^2 + 12n + 4$ si on le divise par
 3 , on trouve $3n^2 + 4n + 1$ et 1 de reste ; dcsorte que ce carré appartient,
 ainsi que le précédent, à l'espèce $3n + 1$.

The text on this page is estimated to be only 27.55% accurate

9d iSlémens Il est clair par-là que les nombres carrés en général ne sont que de deux espèces relativement au diviseur 3; car, ou ill «ont divisibles par 3 , et dans ce cas ils sont nécessairement *j aussi divisibles par 9 ; ou bien ils ne sont point divisibles par 3, 1 et dans ce cas , il y aura toujours 1 de reste et îamais a. Par cette raison aucun nombre contenu dans la formule $3/t-|\"3> \blacksquare$ ne peut être un carré. ^ 6S. Il nous est facile , au moyen de ce que nous venons t de dire , de faire voir que la formule $3xx + 2$ ne peut jamais \"^ devenir un carré, quelque nombre entier ou frartiionn aire qu'on \"^ veuille substituer à x. Car si x est un nombre entier , et qu'on divise la formule $3.rx + 2$ par 3 , il reste q *, donc elle ne peut être un carré. Ensuite si or est ime fraction, nous rexprimet ^ rons par - , et nous supposerons qu'elle est déjà réduite à tes moindres termes, et que t et w n ont d'autre commun diviseur oit que 1 . Afin donc que f- 2 fût un carré , il faudrait , en ^ uu multipliant par uu , que 5tt -f- quu fût de même un carré ; or c'est ce qui ne se peut : car le nombre u est ou non divisible par 3 ; s'il l'est , t ne le sera pas , parceque t et u n'ont pas de commun diviseur ; c'est pourquoi , si on fait $11 = 3^$, comme la formule devient $= 3tt + iSff$, on voit bien qu'on ne peut la diviser par 3 qu'une fois et pas davantage , comme il faudrait pouvoir le faire si elle était un carré ; en effet . en dinsant d'abbrd par 3 , on a « + 6ff. Or si d'un côté 6ff est divisible par 3, de l'autre U étant divisé par 3, laisse 1 de reste (*). Supposons à présent que u ne soit pas divisible par 3 , et voyons ce qui reste. Puisque le premier terme est divisible par 3 , il s'agira uniquement de savoir quel résidu donne le second terme âuu. Or uu étant divisé par 3 ^ donne le reste 1 , c'est-à-dire ■ I — ^.^i^ I » — ^ — ^ — II 11 II I — — — .».^ — — ^« (*) Cela revient h dire que si, après avoir divise' par 3 la formule $3tt-^uu$, le reste est zéro ; ainsi qu'il arrive dans Thypotlièse présente, le nombre ne pcnt plus être que dans la formule $9/1/2$; il faut donc qu'il soA divisible dtuz fois par 3*

The text on this page is estimated to be only 29.68% accurate

D^{ATLiGiBRE}. 61 que c'est un nombre de l'espèce $3/t \cdot 4^1$; ainsi qu'un est un nombre de l'espèce $6/1 - \{ - a^1$ et en le divisant par 3 il laisse a de reste ; par conséquent notre formule $Stt + 2mu$, si on la divise par 3, donne le résidu $\hat{a}$, et n'est certainement pas un nombre carré. 67. On peut démontrer de la même manière , que pareillement la formule $5tt + 5uu$ ne peut jamais être un carré ^{1} ni même aucune des formules suivantes : ' $Stt - \{ - Suu , 3U^11 uu , 3W-f- ij^u$, où les nombres 5, 8 , 11, $i4$ » etc. divisés par 3, donnent a pour résidu. Car si Ton suppose que u soit divisible par 3 , et que par conséquent t ne le soit pas , /et qu'on fasse $u:=zZf^1$ on parviendra toujours à des formules divisibles par 3, mais non pas divisibles par g. Et si u n'est pas divisible par 3, et par conséquent que uu soit un nombre de l'espèce $3/i + i >$ on aurait le premier terme , $3tt$, divisible par 3 , tandis que les seconds , $5uu$, Suu , $iiuu$, etc. auraient les formes $1 \cdot 5n + 5$, $fl4^1 + 8$, $33/1+11$, etc., et laisseraient constamment 2 de reste , quand on les diviserait par 3. 68. Il est évident que cette remarque s'étend mêm¹ jusqu'à la formule générale $3/i + (3/1 -f- Q).r/u$, laquelle en effet ne peut jamais devenir un carré , et pas même en prenant pour n des nombres négatifs. Si on voulait , par exemple, faire $n^1=z - i$, |e dis qu'il est impossible que la formule $3U - uu$ puisse deTenir un carré -, la chose est claire , si u est divisible par 3 ; et si cela n'est pas , comme dans ce cas uu est un nombre de l'espèce $3n -4- 1$, notre formule devient $Stt-^Sn - 1$, ce qui, étant divisé par 3 , donne le résidu $- 1$ ou $+2$, en augmentant de 3- En général , que n soit = $- tti$, on aura la formula $(3/» - a)uu$, qui ne peut jamais devenir un carré. 69. Voila jusqu'où nous conduit la considération du diviseur 3 ; ni nous regardons maintenant aussi 4 comme un diviseur , nous voyons qu'un nombre quelconque est toujours compris d'bof une des quatre formules suivantes : $^1 \cdot 4$ »; $a^1 \cdot 4/1+1$; $3^{11}4^1 + a$; $4^{11}4n + ^1*$

The text on this page is estimated to be only 27.64% accurate

Sa ELEMENS Le carré de la première espèce de ces nombres ,
 eBt iSnn, et il est par conséquent divisible par 16. Celui de la seconde
 espèce $4^{n+1} + 1$ est 1 Bnn -f- 8n -f- 1 ; ainsi en le divisant par 8 , il donne
 1 de reste ; desorte qa*il * appartient à la formule $8/i -f- 1$. Le carré de la
 troisième espèce, $4^{n+1} - 22$ est i6n7t-f- i6*f4t si on divise par 16 , il
 restera 4> donc ce carré est compris dans la formule $i6/i + 4*^{Q\&n} 1^{n+1}$
 carré de la quatrième espèce $4^{n+1} + 3$, étant $16/171 + 24/1 + 9$, on voit qu'en
 divisant .[par 8 , il reste 1 . 70. Nous apprenons par-là , en premier lieu ,
 que tous le\$ nombres carrés pairs sont ou de la forme iG/i, ou de celle-à
 $16/1 + 4$; et conséquemment que toutes les ajitres formules : paires, savoir
 $1G71 + 2$, $16/1 + 6$, $16/1 + 8$, $i6n + io$, $i6*:j + 12$, $16/1 + 14$, ne peuvent
 jamais donner des nombres !;j carrés. . , Ensuite , que tous les carrés
 impairs sont contenus dans l\$A seule formule $8/1 + 1$; c'est-à-dire que si on
 les divise par SuA ils laissât le reste i. Et il suit de là que tous les autres
 nom'* j bres impairs, qui auront la forme ou de $8n + 3$, ou de $8/1+5)^{n+1}$. ou de
 $8/t + 7$, ne pourront jamais être des carrés. 71. Ces principes fournissent
 une nouvelle preuve qiit li formule $5tt + quu$ ne peut être un carré. Car, ou
 les dcBX nombres f et u sont impairs , ou l'un est pair et l'autre at^ impair.
 Ils ne peuvent être pairs l'un et l'autre , parceque si ■cela était, ils auraient
 au moins le commun diviseur 3. Damt^ le premier cas où H et uu sont
 compris dans la formule $8Af + 1$, le premier terme $5u$ étant divisé par 8 ,
 laisserait le réA sidu 3 , et l'autre terme , $2uu$, laisserait 2 ; ainsi le résidu
 total serait 5; ainsi la formule en question ne peut être urt carré.j Mais si le
 second cas a lieu , et que t soit pair et u impair^ le premier terme $3tt$ sera
 divisible par 4, et le second term^ QUU, si on le divise par 4^{n+1} laissera 2 de
 re^te; ainsi les deux termes ensemble , divisés par 4 / laissent d de reste , et
 ne

The text on this page is estimated to be only 24.57% accurate

d'algèbre. 63 peuvent par conséquent former un carré. Enfin, « on voulait proposer un nombre pair $= a$, et t impair, de sorte que $tt = 8n^2 + 1$, notre formule se changerait en celle-ci, $a^{2n-j} - S + 6ff$, qui, divisée par 8, laisse 3, et ne peut donc être un carré. Cette démonstration s'étend aussi à la formule $3 + (87i+2)u$, pareillement à celle-ci, $(8m - f^3)W + 21/u$, et même aussi à celle-ci, $(8m + 3) + (8/i + 2)uu$, où l'on peut substituer n et à A tous les nombres entiers tant positifs que négatifs. 7a. Mais allons plus loin, et considérons le diviseur 5, à regard duquel tous les nombres se rangent en cinq classes : $i \equiv 5/1$; $a^5 \equiv 1 + 1$; $3^6 \equiv 1 + 2$; $4^5 \equiv 3$, $5^6 \equiv 1 + 4$. Nous remarquerons d'abord que si un nombre est de la première espèce, son carré aura la forme $26/1/1$, et sera par conséquent divisible non-seulement par 5, mais aussi par 26. Tout nombre de la seconde classe aura un carré de la forme $26n + 10i + 1$; et comme la division par 5 donne le reste 1, ce carré sera compris dans la formule $6/1 + 1$. Les nombres de la troisième espèce auront le carré $26n + 10i + 4$ qui, divisé par 5, donne 4 de reste. Le carré d'un nombre de la quatrième espèce, est $26/21 + 10n + 9$; si on le divise par 6, il reste 4. Enfin le carré d'un nombre de la cinquième classe, est $5i + 40i + 16$; qu'on divise ce carré par 5, il restera 1. Lors donc qu'un nombre carré ne peut être divisé par 6, le reste de la division sera toujours 1 ou 4 et jamais 2 ou 3; et il s'ensuit qu'aucun carré ne peut être contenu dans les formules $5/t + 2$ et $6/; + 3$. 73. Nous partirons de là pour prouver que ni la formule $5U + 5uu$, ni celle-ci, $5U + 5uu$, ne peuvent être des carrés. Car, ou bien U est divisible par 6, ou il ne l'est pas : dans le premier cas, ces formules seront divisibles par 6, mais elles ne le seront pas par 5, donc elles ne pourront être des carrés.

64 é L]£ M E N s Si[^] au contraire[^] tt n'est pas divisible par 5 , uu sera ou $Sn - \frac{1}{l}$ ou $5n + 4 > \textcircled{R}^* \wedge \wedge \textcircled{R} J \textcircled{R}$ premier de ces cas , la première formule "se change en celle-ci , $5fi + i \text{oti} + a$, qui , divisés par 5 , laisse a de reste , et la seconde formule devient $St^{\wedge\wedge} - \{-i5n - 4 - 3$, ce qui étant divisé par 5 , donne 3 de reste , desorte que l'i Tune ni l'autre ne peuvent être un carré; quant: au cas de $u = \frac{5}{t} + 4 > \wedge$ première formule devient $5tt + io \gg -f- 8$, ce qui , divisé par 5 , laisse 3 ; et l'autre devient $5tt + 15 \gg -f- la$, ce qui , divisé par 5 , laisse a ; ainsi , dans ce cas , Ici deux formules ne peuvent plus être des carrés. On observera , par un raisonnement semblable , que ni U' formule $3tt + (Sn -f- a) uu$, ni cette autre , $5u + (\frac{5}{i} -f- 3) \ll tf$, ne peuvent devenir des carrés , puisqu'on parvient aux mêmes restes que nous venons de trouver. On pourrait même écrirodans le premier terme $5mU$ au lieu de $5tt$, pourvu que m nft fût pas divisible par 5. 74* De ce que tous les carrés pairs sont compris dans It formule $4" > \wedge \wedge$ ous les carrés impairs dans la formule $4^{\wedge\wedge} + 1 \gg$ et que parconséquent ni $\{n - \wedge Q$, ni $4^{\wedge\wedge} + 3$, ne peuvent de[^] venir des carrés, il s'ensuit que la formule générale $(\frac{4}{\gg} + 3)tf - J - (\frac{4}{1} + 3) uu$ ne peut jamais être un carré. Car supposons que t soit pair, tt pourra être divisé par 4, et l'autre terme étant divisé par 4 > donnera 3 de reste ; et si nous supposons les deux nombres f et u impairs , les restes de tt et de uu se[^] ront 1 , et parconséquent le reste de la formule entière sera s; or il n'est aucun nombre carré qui, divisé par 4> laisse add reste. Nous remarquerons aussi que tant m que n peuvent mênid être pris négativement , ou = o , et qu'il suit de là que les formules $Ztt -f- 3uu$ et $5tt - uu$ ne peuvent pas non plus se trans' former en des carrés. 75. De même que nous avons trouvé pour un petit nombrt de diviseurs , que quelques espèces de nombres ne peuvent jamais devenir des carrés , on pourrait déterminer de pareille: espèces de nombres pour tous les autres diviseurs* . tQui

The text on this page is estimated to be only 21.88% accurate

D*A L G E B R K. 65 Qa*3 s'agisse du diviseur $\wedge$, on aura à distinguer sept différentes espèces de nombres $\wedge$ dont nous examinerons aussi les carrés. Espèces des Nombres. Leurs carrés sont de 1* espèce 1*.

7/1 49n/i $\wedge n^2$. 7» + 1 49/1/1 + \fyt + 1 jn + 1 30. 7/1 + 3 49/2/1 -f' 28/1 + 4 7/1+4 4 $\wedge$ 7/1 + 3 49/1/1 + 4a/i + 9 7/1 + 2 50. 7/1 + 4 49/i/t + 5S/1 + i& 7n + 2 e**. 7» + 5 49/1/1 + 70/1 + 26 7 $\wedge$ * + 4 7*». 7/1 + 6 49/1/1 + 84/» + 3G 7/1 + 1

Puis donc que les carrés qui ne sont pas divisibles par 7/ Bont tous contenus dans les trois formules 7/1 + 1, 7/1 + a, 7« + 4* il est clair que les trois autres formules, 7/1 + 3> 7» + 5 et 7/1 + 6, ne s'accordent pas avec la nature des sombres carrés. 76. Pour entrer encore mieux dans le sens de cette conclusion, on- remarquera que la déf nière espèce, 7/1 -I- G, peut aussi s'exprimer par 7/1— 1; que pareillement la formule 7/1 + 5 est la même que 7/1 — 2, et 7/1 + 4, la même que 7/1 — 3. Car, il est évident que les carrés des deux espèces, 7/1 + 1 et 711— I, divisés par 7, donneront le même résidu 1; et que les carrés des deux espèces, 7/1 + 2 et 7/t — 2, doivent se ressembler de la même manière. 77. En général donc, quel que soit le diviseur, que nous mdiquerons par la lettre d, les différentes espèces de nombres qui en résultent, sont dn dn + i, rf/t + 2, d/x + 3, etc.

«//i— 1, diè" $\wedge$ Si, dif $\wedge$ Z, etc. a. E

The text on this page is estimated to be only 26.70% accurate

6S ÉLÉMENTS OÙ les carrés de $6t$ que dans la première de ces formules il reste ou 3, ou 6 j ou 5 ; dans la seconde , 5 , 3 et 6 , et dans la troisième , 6 1 ou 5 ou S ce qui ne peut avoir lieu dans des carrés. Lors donc qu'on rencontre de pareilles formules , on est sûr qu'on ferait des efforts inutiles en cherchant à deviner quelque cas où elles deviendraient des carrés, et c'est pourquoi les conditions dans lesquelles nous venons d'entrer ne laissent pas d'être importantes. Si , au contraire , une formule proposée n'est pas de cette nature, nous avons vu dans le chapitre précédent qu'il suffit de trouver un seul cas où elle devient un carré, pour être en état d'en déduire une infinité d'autres. La formule proposée était proprement $ax^2 + b$, et comme on trouve ordinairement pour x des fractions, nous avons supposé $a = -$, en sorte qu'il s'agissait de transformer en un carré la formule $at^2 + bu$. Mais il ne laisse pas d'y avoir souvent une infinité de cas où X peut même être assigné en nombres entiers, et c'est de la détermination de ces cas que nous nous occuperons dans le chapitre suivant*

d'algèbre. 67 CHAPITRE VI. Des cas en nombres entiers , où l'informulé $axx-f-b$ devient un carré. 7g. Il ou s'avons déjà fait voir plus haut comment on doit transformer des formules telles que $a+ix+cxx^k$ si on veut faire disparaître le second terme ; ainsi nous n'étendrons qu'à k formule $axx-^b$ les recherches présentes dont l'objet sera trouver pour x uniquement des nombres entiers qui puissent transformer cette formule en carré. Or il faut , avant toutes choses , qu'une telle formule soit possible ; car si elle ne l'est pas, on ne trouvera pas même pour x des valeurs fractionnaires, bien loin de pouvoir trouver des nombres entiers. 80. Qu'on suppose donc $axX'\backslash'b=iy$ où a et J sont des nombres entiers , et où x et j' doivent être de même des nombres entiers. Or il est absolument nécessaire ici qu'on sache, ou qu'on ait déjà trouvé un cas en nombres entiers , sans quoi ce serait une peine perdue de chercher d'autres cas semblables, puisqu'il se pourrait que la formule fût impossible. Ainsi nous supposerons que cette formule devienne un carré, si l'on fait $a:=y$, et nous indiquerons ce carré par gg , ensorte que

68 ÉLÉMENT 8 OÙ f et g sont des nombres connus. Tout se réduit donc à déduire de ce cas d'autres cas semblables ; et cette recherche est d'autant plus importante qu'elle est sujette à des difficultés considérables que nous viendrons cependant à bout de surmonter par les artifices que nous allons faire connaître. 81. Puisqu'on a déjà trouvé $x^2 + b = y^2$ que d'ailleurs il faut aussi que $ax + b = y^2$, construisons la première équation de la seconde, et nous en aurons une nouvelle, qui peut se représenter par des facteurs, de la manière suivante : $a(x + f)(x - f) = (y + g)(y - g)$, et qui si on multiplie de plus les deux membres par p , devient Si nous décomposons maintenant cette équation ; en faisant $p(x + f) = q(y + g)$ et $p(x - f) = q(y - g)$ nous pourrions tirer de ces deux équations des valeurs des deux lettres x et y . La première divisée par q , donne $apx + apf$ la seconde divisée par p , donne $qx - qf$

The text on this page is estimated to be only 29.86% accurate

d'algèbre; Kg soustrayant cette dernière égalité de Tautre ; on a ou
 donc $s_{pq}apqg = (opp - qq)r + (app + qq^{fi} \_ ^{gp} (opp+qq)f app^{qq}$
 $app - qq * \text{ et par-là on obtient } y-- \ll ^{gy} ? i$

The text on this page is estimated to be only 24.49% accurate

70 ÉLÉMENTS pour avoir $x - nzng$ — mf , et $yz = z$ mg — naf . Or nous ne pouvons pas prendre ici m et n à volonté, puisque ces lettres doivent se déterminer de façon à répondre aux déterminations précédentes ; ainsi nous considérerons pour cet effet leurs carrés, et nous verrons que $aap^{''}Qappcjq + q^4$. $4ppqq$ $Tnm =$; — - et $7l/l = r$; — T , et que par conséquent ,,,, $aap^{''} + ^{''}appqq + q^4$ — $4^{''}pqq$ mm — $ann =$; ; — • • $aap^{''}$ — $zappqq - i - q^4$ $aap^{''}$ — $zappqq - + - q^4$ $aap^{''}$ — $aappqq - \{-q^4$ 83. On voit par-là que les deux nombres m et n doivent être tels que $m^2 = a/i^2 + i$. Ainsi, comme a est un nombre connu, il faudra commencer par songer aux moyens de déterminer pour n un nombre entier, tel que $ann + i$ devienne un carré, car après cela m sera la racine de ce carré ; et quand on aura déterminé pareillement le nombre f , de manière que $off - \backslash' b$ devienne un carré, savoir g^2 , on aura pour j et pour j' les valeurs suivantes en nombres entiers, $a = Tig^2$ — mf et $y = > mg$ — naf , et enfin par-là $axx + b = yy'$ 64. Il est évident qu'ayant une fois trouvé m et n , on peut écrire à leur place — 771 et — n , parceque le carré nn ne laisse pas de rester le même. Mais nous avons fait entendre que pour trouver a ; et ^{2} en nombres entiers, de manière que $axx + bz = yy$, V

The text on this page is estimated to be only 19.31% accurate

D* A L G è B R E» ^1 11 fallait d*abord ccmnaîfrs un cas tel quo
lors donc qu*oo aura trouvé un semblable cas , il faudra tâoher encore de
connaître, outre le nombre a, des valeurs de m et de n f telles que $ann + i =$
 mm , et nous en donnerons la méthode dans la suite. Quand enBn , tout cela
sera fait , on aura un nouveau cas , savoir , et après cela, $axx + b = yy >$
Mettant ensuite ce nouveau cas à la place du précédent , qu'on avai^ regardé
comme connu ; c'est-à-dire , écrivant $ng + mf$ au lieu de * , et $ma; -f-$ naf an
Heu de $^$, on aura pour x et y de nouvelles valeurs , par lesquelles , si on les
substitue à X et à y j on en trouve ensuite d'autres, nouvelles , et ainsi de
suite aussi loin qu'on voudra ; desorte qu'au moyen d'un seul cas qu'on
connaissait d'abord, on en détermine après ceU une infinité d'autres. 85. La
manière dont nous sommes parvenus à cette solution était assez
embarrassée, et pai*ais^ait d'abord nous éloigner de notre Jbujt., puisqu'elle
nous avait conduits à des fractions compliquées qu'un hasard heureux a seul
pu réduire ; il sera donc à propos d'indiquer une voie plus courte , pour
arriver i la nit me solution. ' ^ 86. Puisqu'il faut que $\backslash axx -f- b := yy$, ,. «t
^ue Ton a déjà trouvé * ■ I V

The text on this page is estimated to be only 24.26% accurate

7^ ELEMENS la première équation nous donne m et la seconde donne par conséquent il faut aussi que $yy - axx = gs - aff$, et tout se réduit maintenant à déterminer les inconnues x et y par le moyen des quantités connues y^* et g . On voit que pour cet effet on pourrait faire simplement $x = r$ et $y = zg$ mais, on verrait aussi que cette supposition ne fournirait pas un cas autre que celui qu'on connaissait d'avance. , Ainsi nous supposerons qu'on ait déjà trouvé pour n un nombre tel que $ann - j - i$ soit un carré, ou bien qu' $ann + i = mm$; cela posé nous avons $m^2 - n^2 = i$; et en multipliant par cette équation la dernière que nous avons ci-dessus, nous trouvons aussi que $yy - axx = (gg - aff)(Tum - ann) =: ggnvm - qffmm - ag^{nn} - j - aaffnn$. Supposons à présent $y = gm + afn$, nous aurons, après les réductions, $I \cdot ggmm - f - aafgmn + aaffnn - axx = zggmm - affnm - SS^{^} + aaffnn$,

The text on this page is estimated to be only 26.30% accurate

d'algèbre. 73 iesorte qu*3 reste $axx = affmm - f - agn + ^ofgm$;
 tr cette formule est évidemment un carré , et donne $x = fm + gn$: ainsi nous
 avons trouvé pour a: et^ les mêmes formules que d-dessus. 87. Il sera
 nécessaire maintenant de rendre cette solution [rfns claire , en l'appliquant à
 quelques exemples. Première question. Trouver pour x toutes les valeurs en
 [nombres entiers , telles que $zxx - 1$ devienne un carré , ou qa'on ait $2XX$
 $- 1 = yy'$ Nous avons ici $a = \hat{a}$ et $i = - 1$, et il se présente aussitôt un cas
 satisfaisant , qui est celui où $x = i$ et $y = i$. Ce cas connu nous donne $y = 1$ et
 $g^* = 1$; or il s'agit de plus de déterminer une valeur de n , telle que $nn - f - 1$
 devienne un carré mm ; et on voit d* abord aussi que ce cas a lieu quand »
 $= a$, et parconséquent $m = 3$; ainsi chaque cas connu pour fetg nous
 donnant ces nouveaux cas $07 = 3/+ 2g, ^y - '5g + 4f >$ nous tirons de la
 première solution , fz=. 1 et $g = 1$, les nouTelles solutions suivantes : X f l
 5 7 2.9 4' 169, etc. 23q , etc. 88. Seconde question. Trouver tous les
 nombres trianguilûres qui sont en même temps des carrés. Soit z la racine
 triangulaire, ce sera le triangle qui fc^ra être en même temps un carré , et si
 nous nommon* .c

The text on this page is estimated to be only 11.40% accurate

74 É L É M E N s la racine de ce carré, il faudra que $zz^4 - z$
Multiplions par 8 , nous aurons $4zz - ^{zz} = Sxx$; et ajoutons encore i de
chaque côté, pour avoir $4zz + 4^{zz} + I = (22i + 1)^* = Sxx - \{-1$, Ainsi la
question e^t de faire ensorte que $Sxx - f' i$ dcyei] un carré ; car si Ton
trouve on aura $Sxx + i = yy$, $y = 2z + i$, et conséquemment la racine
triangulaire cherchée , Or nous avons $a = S$ et $6 = i$, et un cas satisfaisant
présente sur-le-champ , savoir $y = o$ et $g = i$, Otk voit plus que $Snn - f - 1 =$
 fnm , en faisant $7i = i$ et $m = 3$; donc $^ = -f + S$ et $j.^3^ + 8/$; $y - 1$ et puisque
nous aurons les solutions suivantes : -- / — C 1 6 o5 Qo4 ii7 9.9 577 3j63,
etc. __j— i — C 1 8 <9 «88 iGf^i , e^c. H r^ .. 1

The text on this page is estimated to be only 19.33% accurate

d'algèbre. 75 89. Troisième question. Trouver tous les nombres
penta}Qes, qui sont en même temps des carrés. Que la racine soit z , le
pentagone sera $= -$, que [sous égalérons au carré xx ; ainsi $5zz - a =: Qxx$;
multipliant par 13 et ajoutant l'unité, nous avons $362a - 12Z + 1 = a4xx^1$
 $= (6z - 1)''$;

The text on this page is estimated to be only 21.27% accurate

yi ÉLÉMENTS 90. Quatrième question. Trouver tous les carrés en nom entiers, qui, pris sept fois et augmentés de a^2 redevenent des carrés. On demande par conséquent que où $a = 7$ et $i = 2$; et le cas connu, savoir $x = i$ on perçoit aussitôt; desorte que $x = f = i$, et $e = g = 3$. Si Ton considère ensuite l'équation $y^2 - 1 = z^2$ on trouve facilement aussi que $7i = 3$ et $m = 8$; donc $e = 8/10$ et $y = 8g' + 2i$, et on aura les solutions qui suivent : $xz = f = i$ 17 45 271 717, etc. $yr = g = 5$ 91. Cinquième question. Trouver tous les nombres triangulaires, qui sont en même temps pentagones. Que la racine du triangle soit $= p$ et celle du pentagone $= 9$, il faudra que $p^2 - 3q^2 = -1$. — JL — JLL — l^2 ou $Zqq = q^2 - p^2$ qu'on cherche q , on aura d'abord et de là où $7^2 - 9^2 = i9 + 2L \pm 1$. $rh^2 = Q.p^2 + i2p - f - i$

The text on this page is estimated to be only 18.43% accurate

D' A L G È B R E. 77 Par conséquent il s'agit de faire ensorte que
1 app + 1 sp + 1 deidenne un carré, et même en nombres entiers. Or comm»
3 7 a ici un terme moyen i2p, on commencera par fair» p= , hypothèse qui
donnera i2pp = 3xa: — Gj:-f-3 et iap=:6x — G; par conséquent iQpp + 1 2/?
+ 1 = 5xx — 2 ; c'est cette dernière quantité présentement qu'il est question
de transformer en un carré. Si donc on fait on aura ainsi tout dépend de la
formule «t on a ici a^=z5 et&= — a; et de plus tm cas connu x=r/=i et
y=g=:i; enfin dans l'équation mm =: 3/171 + 1 , en a 71=1 et 77i=a; donc on
troive, tant pour x et j^ que pour p et qf , les yaleurs nivantes : D'abord .« =
a/+g', ety = a^ + 3/.

The text on this page is estimated to be only 24.37% accurate

7? ensuite E L £ M E N s x-f- 1 — r 11 4^1 y—ë—" 5 1.9 7^1 p
 — o 1 5 ac| <7 = i I t o 12| ou a ô ^r— 3 a 92. Jusqu'à présent , quand la
 formule proposée conten second terme, nous étions obligés de le retrancher
 ; m; pendant il est possible d'appliquer la méthode que noi nons de donner,
 sans faire disparaître ce second terme; allons encore en expliquer la
 manière. Soit $axx - ^bx ^ c$ la formule proposée qui doit et carré , ou $^=^yy$,
 et qu'on connaisse déjà le cas Si on soustrait cette équation de la première,
 on au $a(xx—ff) + b ^X-^f=yy—gg$, ce qu'on peut exprimer par des facteurs
 comme il suit $ix^f) (^ax +af+ i) = (j — g) iy + g)$. Qu'on multiplie de part et
 d'autre par $j)q$, on aura et on décomposera cette équation en ces deux : jo.
 $p\{x—f) = q (y— g) ; 2^ q (\hat{u}x + af+ J) =:p (y$. Multipliant maintenant la
 première par p , et la seconde p et soustrayant le premier produit du second ,
 on obtieni $\{aqq—pp)x + \{aqq + pp)f+ bq q = agpq$,

The text on this page is estimated to be only 17.83% accurate

d'à L O £ B R £. 79 |lê qni donne bnq aqq — pp açqf — pp aqq —
pp Mais la première équation est bq 41081 .aqq^pp aqq-- pp aqq ^ ° GÇ^
— pp aqq — ^pp aqq — pp S!LJ\ . tt parconséquent fiQJpq (^^9 + PP\ , _
^m ^ ° \aqQ — ppj aqq — hpq aqq — ppy aqq — p/7 a^ — pp Il s'agit ici
de chasser les fractions ; faisons pour cet effet, comme ci-devant.
^!Sj±IP\^m,et aqq — ppl ^pq _ aqq — pp n et nous aurons m + 1 donc _
gg?

The text on this page is estimated to be only 23.46% accurate

80 ELÉMENTS des Hommes entiers qu'à la vérité on eût trouvés
beaucoup plus facilement par le moyen des nombres p et q qu'on nous a
introduits dès le commencement. En effet, qu'on prenne p et q , de façon que
 $ppz = aqq + 1$, on aura $aqz = ppz - 1$, et les fractions disparaîtront. Car
alors $x = \frac{ngpq + f(aqq + pp) + hqq}{g(aqq + pp) + 2afpq + bpq}$,
mais comme dans le cas connu on ne rencontre que la seconde puissance de
 g , il est intéressant quel signe Ton donne à cette lettre ; qu'on écrive $d = -g$
au lieu de $+g$ * on aura les formules $x = \frac{Qgpq + f(aqq + pp) + bqq}{g(aqq + pp) + 2afpq + bpq}$, et $y = g$

The text on this page is estimated to be only 23.00% accurate

D' A L G £ B R E. 81 25 35 841 ,etc. 1 1 83 , etc. j|4- Arrêtons-nous encore à notre première formule où le second terme manquait, et examinons les cas qui font de la formule $a^2 + b^2 = c^2$ un carré en nombres entiers. Soit donc $a^2 + b^2 = c^2$ et il s'agira de remplir deux conditions : 1°. Qu'on connaisse un cas où cette équation ait lieu, et nous supposerons ce cas exprimé par l'équation fl^* . Qu'on connaisse des valeurs de m et de n , telles que $mm = ann + 1$, Ce que nous enseignerons à trouver dans le chapitre suivant. De là résulte un nouveau cas, savoir, $x = ng \pm mf$, et $y = mg \pm nf$, qui conduit ensuite à d'autres cas pareils que nous représenterons de la manière suivante : $y = \pm A P B Q c R D \setminus E$, etc. $S I T$, etc. oU
 $A^{ng} \wedge^{mf} x S^n P - ifm A C = zn Q - \wedge^m B / \geq n/2 - f - m C$, etc. et
 $P = \pm T n g' \wedge^{anf} Q = 3 i m P' \wedge^n A R r \wedge^m Q - h a n B S \wedge^m R \wedge - a n C$, etc. et ces deux suites de nombres se continuent très-aisément aussi loin qu'on veut. 36. On remarquera cependant qu'il n'est pas possible ici de continuer la suite supérieure pour x , sans avoir l'inférieure* a. F

The text on this page is estimated to be only 22.79% accurate

82 JLÉMENTS 80U3 les yeux; mais il est facile de lever cet inconvénient et de donner une règle non-seulement pour trouver la suite supérieure, sans connaître l'inférieure, mais aussi pour déterminer celle-ci sans le secours de l'autre. Il faut observer que les nombres qu'on peut substituer à X suivent une certaine progression, telle que chaque terme comme, par exemple E y peut se déterminer par les deux termes précédents C et D y sans que l'on soit obligé de recourir aux termes inférieurs R et S. En effet, puisque $E = nS + mD = n(mR + aC) + m(nR + aC) = amnR + annC + nimC$, et que $nR = zD - mC$, on trouve $E = 2mzD - mmC - annC$, ou $jB = amD - (mm - ann)C$, ou enfin $E = 2mD - C$; à cause de $mm = ann + i$ et de $mm - ann = i$. On voit donc clairement comment chaque terme se détermine par les deux qui le précèdent. Il en est de même à l'égard de la suite inférieure; car puisque $T = mS + aD$, et $D = nR + mC$, on a $T = mS + annR + amnC$. De plus, $S = mR + aC$ ainsi $anC = S - mR$; Et si l'on substitue cette valeur de anC , il vient $r = amS - a/l$,

The text on this page is estimated to be only 26.56% accurate

D ' A . L G £ B R E. 83 ee qui prouve que la progression inférieure suit la même loi que la progression supérieure. Qu'on cherche , par exemple ^ tous les nombres entiers x , tels que $axx - 1 = y^2$ On aura d'abord $y = i^2$ et $\xi = i$; ensuite $Tilt_n = 2/17t - 1$ j si $71 = a$ et $m = 3$. Donc y puisque les deux premiers termes seront i et 5^2 et on trouvera tous les fuivans par la formule $\xi = GZ > - C$; c'est-à-dire que chaque terme pris six fois et diminué du terme précédent , donne le terme suivant. Il suit de là que . les nombres x que nous cherchons , formeront la suite qu'on voit ici ; 1, 5, ag, iGg, gSS, 6741, etc. On peut continuer cette progression aussi loin qu'on voudra, tt si Ton voulait y introduire aussi des termes fractionnaires , on en trouverait une infinité pa^ la méthode que nous avon« donnée plus haut.

The text on this page is estimated to be only 18.99% accurate

84 £ L É M e N s CHAPITRE VII D'une Méthode particulière
 par laquelle la formule $an^2 - f$ détermine un carré en nombres entiers m gG.
 vJE que nous avons enseigné dans le chapitre , précédent^ ne peut
 s'exécuter d'une manière complète , à moins qu'on ne soit en état d'assigner
 pour un nombre quelconque a un nombre n \ tel que $an^2 - f$ devienne un
 carré » ou qu'on ait $Tmn = an^2 - f$. Si on voulait se contenter de nombres
 fractionnaires., cette équation serait facile à résoudre, vu qu'on n'aur^t qu'à
 faire car, dans cette supposition, on a $mm = 1$ $H^{-4} = an + i$, ^ où Ton peut
 retrancher i de part et d'autre , et diviser ensuite les autres termes par n,
 desorte que multipliant de plus par^f , on obtient $Qpq -] - npp == onqq$, ~\ et
 cette équation donnant $zi = i^{-}$ — , fournirait une infaqq — pp

d'algèbre. 85 nité de valeurs de n . Mais comme n doit être un nombre entier, cette méthode n'est d'aucune utilité, et il faut en employer une autre pour arriver à ce but. 97. Nous devons commencer par remarquer que si on voulait que $ann + 1$ fût un carré en nombres entiers pour une valeur quelconque de a , on exigerait une chose qui n'est pas toujours possible. Car d'abord il faut exclure tous les cas où a serait un nombre négatif; ensuite il faut exclure aussi ceux où a serait lui-même un carré, parcequ'alors ann serait un carré, et qu'aucun carré augmenté de l'unité, ne peut redevenir un carré en nombres entiers. Nous sommes obligés par conséquent de restreindre notre formule aux cas où a n'est ni négatif ni un carré; mais au reste toutes les fois que a est un nombre positif sans être un carré, il sera possible de trouver pour i un nombre entier tel que $ann - i$ devienne un carré. Quand on aura trouvé une telle valeur, il sera aisé, d'après le chapitre précédent d'en déduire un nombre infini de semblables; mais il suit pour notre dessein d'en connaître une seule, et même la plus petite, et c'est ce qu'un savant anglais, nommé Pell nous a appris à trouver par une méthode ingénieuse que nous allons expliquer. 98. Cette méthode n'est pas de nature à pouvoir être employée généralement pour un nombre a quelconque; elle n'est applicable que dans un cas particulier. Ainsi nous commencerons par les cas les plus faciles, et nous chercherons d'abord pour n un nombre tel que $ann + i$ soit un carré, ou que $V^{\frac{an}{i-f-1}}$ devienne rationnel. On voit aussitôt que cette racine carrée devient plus grande que n , et cependant plus petite que a/i . Si donc nous extrayons cette racine par $n + p$, il est sûr que p est moindre que n . Et nous aurons $\frac{y}{ann + 1} = n - f - p$,

3

The text on this page is estimated to be only 17.85% accurate

SB É L É M.E N s ensuite $SL_{nn} + 1 = \tilde{f}_i/i + anp + pp$; donc*
 $nn^{\wedge}zQnp \text{ 'i-pp' }^{\wedge}i$, et $7iz=:p+ k \text{ }^{\wedge}PP \text{ — } **$ Tout se réduit parconséquent à ce
 que $zpp \text{ — } i$ soit un carré or ce cas a lieu si $p = i$, et il donne $n = 2$ et
 $1/2/1/1 + 1=3$. $^{\wedge}$ Si on n'avait pas fait cette remarque on serait allé ph loin ,
 et puisque $[/app \text{ — } 1 > p >$ et parconséquent $n^{\wedge} ap$ il aurait fallu supposer
 $n=:zpz \text{ — }^{\wedge} q-$, on aurait donc eu $2; ' + 9=P+ V^{\wedge\wedge}PP \text{ — } \hat{i} >$ ou $p + ^{\wedge} = V^{\wedge}app \text{ — }$
 $1^{\wedge}$ et en carrant, $^{\wedge} pp + ^{\wedge} pg + (i \text{ ce qui aurait donné } P = (I+ V^{\wedge}qq + 1 ;$
desorte qu'il eût fillu que $Q.qq + 1$ fût un carré ; et comn ce cas a lieu pour
 $^{\wedge} = 0$, on aurait eu $p =: 1$ et $/i = \hat{i}$ comme auparavant. Cet exemple svifût
 pour donner une id« de la méthode, mais cette idée deviendra encore plus
 net par ce qui va suivre. 99. Soit à présent $a = 3$, c'est-à-dire qu'il s'agisse (
 transformer en un carré la formule $Znn + i$. On fera $y'5nn \text{ -j- } 1 = /i \text{ -f- } p$,
 ce qui donne $5nn + i=:nn + 2np+pp$, et $2nnz=:z!inp \text{ — }^{\wedge}pp \text{ — } 1^{\wedge}$

The text on this page is estimated to be only 15.02% accurate

d'algèbre. 87 d'où Ton tir© $\sqrt[4]{5pp} - \sqrt[4]{n}$ Si Maintenant,
 puisque $\sqrt[3]{pp} - 22$ surpasse p , et que parcoa« re . «équent n est plus grand
 que $-\sqrt[4]{p}$ ou que p , qu'on suppose $n = p + q$, et on aura $\sqrt[4]{p} - \sqrt[4]{n} = \sqrt[4]{p} - \sqrt[4]{p+q}$
 ou $\sqrt[4]{p} - \sqrt[4]{n} = \sqrt[4]{p} - \sqrt[4]{p+q}$; ensuite en carrant, desorte que $\sqrt[4]{PP} = 4pq +$
 $\sqrt[4]{qq} + \sqrt[4]{p}$ ou $\sqrt[4]{pp} = \sqrt[4]{pq} +$ dont la racine est plus grande que $\sin \backslash$ on supposera
 $\sqrt[5]{nn} \sqrt[5]{i} z = an + p \sqrt[5]{p}$ ou $\sqrt[5]{i} \sqrt[5]{4} - 1 = 4^{**} + 4^9 + PP^*$. ainsi on aura $= 4np + PP$
 $- i >$ et $7i = 2p + \sqrt[5]{3p} - 1$ 7zn Or $\sqrt[5]{5ipp} - 1 > \sqrt[5]{p}$, d'où résulte $\sqrt[5]{i} > 4p$;
 c'est p(wrquoi 4

The text on this page is estimated to be only 11.37% accurate

88 ÉLÉMENT on fera $n.z=4p+q$, ce qui donne $L^{\wedge}$ d'où résulte $4pp + 4pg + qq = 5pp - i$ y et $pp - 4pq + qq + i^{\wedge}$ de manière que $p = 27 + \sqrt{5}qq + 1$; et. comme $c7 = 0$ satisfait à cette équation , on aura $p\hat{=}i$ et $n = 4'$, donc $y5nn - \}$ - $1 = g. 101$. Supposons à présent $a = S$, pour avoir à traiter U formule $6nn + i$ dont la ra et nous aurons $G7m-(\gg-i=4'^{\wedge}7i + 4'V^{\wedge}+PP>^{\wedge\wedge}$ $27i7ir=47ip+pp - 1>$ et de là , $V/6pp - a Qp + \sqrt{Gpp} - Q^{\wedge} n = p -f- ->$ ou fi $r = : ' \bullet ^{\wedge}2$ a ainsi $n^{\wedge}$ ap. Si, d'après cela, nous faisons $71 = 2/7 + (/$, nous avons $4p + 2 = 2p + v/6/7p - 2$, ou $2p + 27 = V^{\wedge}Gpp - a$; les carrés sont $4flp + 8p9 + 4fl7 = 6pp - \ll$; amsi $app - 8p9+47? + a$, et $pp=:4pq + fiqq + i$,

The text on this page is estimated to be only 10.12% accurate

D* ALGÈBRE. $89 \wedge w \text{fin } p=r \ 9 \ -+- \ V \ 0 \bullet \ 2;i$; qu'on fasse donc $m = 271 + p$, et on aura $jnn + i \wedge z^n - \wedge p - \wedge pp \wedge$ ou $Stiti = 4''P + PP \bullet'' \ddot{i}$ l' ce qui donne $\wedge \_ 2p + VI PP \text{ — } \wedge$ Présentement , puisque » $>\bullet |p$, et parconséquent plus grand que p , qu'on fasse on aura $p + Zq \wedge \vee jpp \text{ — } Z$, et passant aux carrés , $pp + 6pq - + - s99 = 7PP' - \wedge l$ ainsi $6pp = 6p7 + 977 + 3$, ou $2pp = ap7 + 377 + i$, d'où l'on tire $q + \vee 7qq + !i$

The text on this page is estimated to be only 15.81% accurate

j|0 É L é M E N s Or on a ici $p > \text{---}$, et par conséquent $p > ^$,
 ainii on ftíl ? = ?+'-> et 1 on aura $^ + ar == \text{ĩ}/t^{\text{THM}}$; de là les carrés ensuite
 $697 = 4$ ou $rr = 4'''y + 3j^{+} + 1$, et $r = 25 + V^{7J5} + i$. Or cette formule est pareille
 à la première ; ainsi en faisant $5 = G$, on obtiendra $r = i$, $q = . i, p = aet7i =$
 $3oum = 8$. Mais ce calcul peut s'abrégér considérablement de la manière qui
 suit , et qu'on peut employer aussi dans d*autres cas. De ce que jnn -j- i =
 mm , il suit que $m < 3$ ». Qu'on suppose donc 771 :z; on — p , ^ on aura
 $771/1 + 1 = 97171 \text{---} 6p; i + pp$, ou $a/\hat{i}Ti ; :=: Stij:^ \text{---} pp + * *$

The text on this page is estimated to be only 21.94% accurate

M D' A L G £ B R E. 9I i'ovL Ton tire $\sqrt{P+V} \sqrt{7PP+}$. ainsi » <
 $3p$; par cette raison on écrira $71 = 3p - a^2$, et, prenant les carrés, on aura
ou $zpp = i2pq - 4q^2Q$, et $pprzzGpq - aqq + 1$ d'où résulte $p = 3q + 1$?
+ 1 Or on peut d'abord faire ici $7 = 0$, et on trouvera $p = 1$; $71 = 3$ et $7n = 8$,
comme auparavant. io3. Que $a = 8$, ensorte que $8/1/1 - f - 1 = m/n$ et m^5n^5
il faudra faire $7/1 = \sqrt{U}^P y$ et on aura $8/1/1 + 1 = g/i/i - 6/1/? - i - pp i$ ou
 $Ti/t = G/q^2 - pp + 1 > d^*$ où résulte $ji = 3p^4$ [/ Spp - } - 1 ; et cette formule
étant déjà semblable à la proposée, on peut faire $p = 0$, ce qui donne $t = 1$
et $i = 3$. 104. On procédera toujours de la même manière pour tout autre
nombre a , pourvu qu'il soit positif et non un carré, et on arrivera toujours
à la fin à une quantité radicale, comme $\sqrt{att - 1}$, qui sera semblable à la
première ou à la proposée et on n'aura alors qu'à supposer $t = 0$; car
l'irrationalité disparaîtra, et en retournant sur ses pas, on trouvera pour n
nécessairement une valeur telle que $ann + 1$ soit un carré. On arrive
quelquefois assez vite au but, mais souvent aussi

The text on this page is estimated to be only 21.71% accurate

ÇS ÉLÉMENTS on est obligé de passer par un assez grand nombre d'opérations ', cela dépend de la nature du nombre a , mais sans qu'on ait des caractères d'après lesquels on puisse estimer le nombre des opérations à faire. Le procédé n'est jamais bien long! jusqu'à $i3$, mais lorsque $a = i3$, le calcul devient beaucoup $\blacktriangleright^{\wedge}$ plus prolix, et, par cette raison, il sera bon de développer j ici ce cas. io5. Soit donc $a=i3$, et qu'on doive trouver $i3n/i+1=7nm$. Comme $mm^{\wedge}gmn$, et par conséquent $m > 3/i$, on supposera $m = 3/1 + p$, et on aura $i3/i/i - \}$ - 1 = 97171 -f-G/ip+pp, ou $4^{71} = 6np$ -f- PP " $\wedge$ * * ce qui indique que $7t > |p$, et à plus forte raison plus grand que p . Qu'on fasse donc on aura $P + 4q = V^{\wedge}iSpp - 4$; en carrant, $. i3pp - 4 = PP + 8/x7 + iSi79$; ainsi $i2pp = 8/?^{\wedge} - f 1677 + 4$, ou $3pp = 2p7 + 477 + i$, et „ $l \pm l/J\%T^{\wedge}$ Ici $p > - = - i j$ OU $p > - 7$; on continuera donc par $P=f+r$, et on aura $aq + 3r = \{/i5qq + 5^{\wedge}$

The text on this page is estimated to be only 7.31% accurate

d'algèbre. g_3 ensuite $i_3qq + 3 = 4qq + if^{qr} + Qrj$: , ou $977 = la^r + grr$
 $\text{---} 3$, ou $3qq = 47'' + 5rr \text{---} 1$, ce qui donne $2r - fV^i3rr \text{---} 3$; $^ = 3 - \bullet$
 Présentement, puisque $\wp >> \text{---} ^^^ \text{---}$, ou $9 > r$, on fera $q = r + s$, et on aura '
 $r + 3f = \$/i_3n \text{---} 3$; «t ensuite $i_3iT \text{---} 3 = :rr + 6rj + g_5;f$, ou $i_2rr = 6w + 9J^* +$
 $5, Q$ » $4'^* = \hat{u}^{*^} + Sks^ + ^ >$ tfoù Ton tire $s - ^y/i^{ss} + A^ = 4 \bullet s - u_3s$ Mais
 $r > \text{---} 7 \text{---}$ et plus grand que s , soit don» 4 et nous aurons $Zs + 4t := aiy$ l'dss
 $+ 4^{^} i_3jj + 4 = 9^ + ^4^{^} + 16^{^}$; ainsi $4^{**} = ^4^{^} + iSf^ \text{---} 4 >$ et $5^ = 6t_5$
 $+ 4^{^} \text{---} 1$; fonce $s = z_3t + \sqrt{i_3u} \text{---} i$. Ici nous avons $^{^}S^ + Sf$, bu que St ; il
 faudra donc fair« ainsi $3^ + ii = V'i_3 \text{---} 1$, et $i_3tf \text{---} i = 9 \text{---} 6$ to 4.1^*11 ;

The text on this page is estimated to be only 10.16% accurate

⁴ ÉLÉMENTS après cela $t = \zeta tu + uu - f - 1$; enfin $t = \frac{\dots}{\dots}$ où $t > y$ et $>$ ». Si donc on fait on aura donc $v \mid -V^i 3i/v \text{ — } 3^{\wedge} 4^{*\wedge}$ enfin $u = =$, ou $u > -^{\wedge}$, ou $a > v$. Faisons en conséquence et nous aurons $^{\wedge}v - ^{\wedge}Zx^{\wedge}rz$ $\forall i 5vv \text{ — } 3$, et $i 5uu \text{ — } 3^{\wedge} =$: $4^{\wedge}v - j^{\wedge} i^{\wedge}vx^{\wedge} gxx$ ou $9Vi = 12VX + 9^{\wedge} + 3$, ou $3vi; = 4^{\wedge}x + 3a; x + i$, $Qx + \sqrt{5}xx + 5$ et v_g , desorte que $v^{\wedge} \mid x$ et $> \bullet$ ar. Supposons donc $v = zx + y$, et nous aurons $ac + Sy = V^{\wedge} i 3a; a; - f - 3$, et $i 3a; x + 3 = :xa; + 6:ry + gjy$; ou $laxo; = 6xy + gjy \text{ — } 3$, et $4^{\wedge}x = axy + 3yy \text{ — } i$;

The text on this page is estimated to be only 14.10% accurate

d'à L G Ê B R E. gS n tire de là t parconséquent JO^y- Ainsi nous ferons ce qui nous donne $3y+4z=V^{i3xy}-4$, et $1\% - 4=9)^{+} + a4\ll y + i6^{>}$ donc $jry = 6yz4-42i2i-f- 1$, et $^ = 5z+ V^{i3m} -f i$; et cette formule étant enfin semblable à la première ; oa peut prendre $z = o ^$ et remonter de la manière qui suit : $a = o a; == jf 4- 2 = 1 i. = X + ^ = s u = V + a; = 3 ^ = M -|- 1/ = 5 j = 6 ^ 4- u = 33 r = ^ + \ll = 38 \varsigma = r 4- ^ = 71 I p = 9 + r = 109 I n = p 4" 9 = 180 m = 3/1 4" P - ^ ^{49'} I II$ suit de là que 1 80 est après o le plus petit nombre qu'on [piiisse substituer à tz , si $\backslash Znn + 1$ doit devenir un carré. \ lûS. On voit suffisamment pat cet exemple, combien ces f wlculs peuvent devenir prolixes. Lorsqu'il s'agit de nombres P'us grands , on ebt souvent obligé de passer par dix fois plus V opérations que nous n en avons eu à faire pour le nombre i3;

The text on this page is estimated to be only 18.50% accurate

^6 E L É M E N s Comme on ne peut guère prévoir non plus pour quels nomt on doit s'attendre à tant de longueurs , il sera bon de proE de la peine que d'autres ont prise , et nous joindror.s , p« cet effet , à ce chapitre une table où se trouvent les vale de m et de n pour tous les nombres a depuis s jusqu'à i< afin que dans les cas qui peuvent se présenter, on puisse tirer les valeurs de m et de n , qui répondent à un norabr donné. 1 07. Nous rcrrmarqueron» cependant que , pour de certî nombres, on peut déterminer en général les lettres m et/r, cas sont ceux où a n'est que de 1 ou de i plus grand plus petit qu'un carré ; il vaudra la peine de les développj 108. Soit donc amee — 2; et puisque nous devons a^ (ce — a)n7i-f- 1 =m/n, il est clair que m et il est évident que si on fait p = 1 , cette quantité de\ rationnelle , et que nous aurons n=e et m=r:ee — 1. Soit , par exemple , a = ^3 , désorte que e= 5 , nous au: s!5nn -|- 1 tr:^ mm , fñ n = 5 et m= 24- La raison en est évidente d'ailleurs ; si dans le cas de a = ee — 2 , on fait /i = e , on a ^ ann + 1 = e* — aec -f- 1 , ae qui est le carré de ea-^ 1.

The text on this page is estimated to be only 15.03% accurate

to*À t G £ B R È. 5)7 log. Que $a = ce - 1$, ou d'une unité
 moindre qu'un carré $^{\wedge}$ il faudra que $(ec - 1) 71II. + 1 r = mm$. On aura,
 comme ci-dessus $^{\wedge} m \ll en$, et on fera $7?i = en - p$; tela posé, on a $(ee -$
 $i)nn + i = eenn' - 'Hkenp + pp$, ou $nn' = zsiemp - pp + i$; $n' = iep' - \sim \vee epp$
 $- pp - f - 1$. Or l'irrationalité disparaît dans la supposition de $p = i$, ainsi n
 $= 2e$ et $m = aee - i$. Aussi cela est-il facile à voir; car puisque $26 = n$, et
 $ce - i = a$, on trouve $ann + i = 4^{\wedge} - 4ee + i$, ou égal au carré $aee - i$.
 Soit, par exemple, $a = 24$, ou $e = 5j$ on aura $71 = 10$, et $24^{\wedge\wedge} 71 + 1 = 240^{\wedge} =$
 $(4.9)^* (*) \bullet \blacksquare 110$. Supposons à présent $rt = ee + 1$, ou que a soit de 1 plus
 grand qu'un carré, il faudra que $(ec + i)nn + 1 := zmm$, $\{*\}$ Le signe radical
 s'annule aussi dans ce cas, si Ton fait $p = 0$, et cette supposition donne
 incontestablement pour m et n les plus petits nombres possibles, savoir « $= i$
 et $m = cj$ c'est-à-dire que si $e = 5$, la formule $^{\wedge} inn H - I$ devient un carré en
 faisant $/z = j$; sera $m = e = 5$. fi. G

The text on this page is estimated to be only 12.80% accurate

98 É L É M E N s et m sera évidemment plus grand que en',
 écrivons donc $m = en^p$ et nous aurons $(ee-f-i)ii7i-f-i=ee»ii + «e7i/7-4-$
 ^{p} , ou $n/i=ae7ip+pj3i--i^$ d'où résulte $n = ep + yeepp - \{-pp - 1$. On peut
 ici faire $p = 1$ ^ â*où résulte $n = fie$; donc $m = see4*i$ C'est aussi ce qui
 devait arriver , par la raison que a étant = ee -{" 1 et $n = fie^$ on a $ann -|- 1$
 $= 4^ + 4^e -f- 1$, carré 'de ^ee^i. Soit^ par exemple^ $a = 17$, ensorte que e
 $= 4 > o^ \wedge \wedge \wedge 17/1 \gg -|- 1 := zmm$, tn faisant $n = 8$ et $m = 33$. 111. Soit enfin
 $a = ee -|- \hat{a}$, ou de 2 plus grand qu'un nombre carré , on aura $(ee + 2) iiTi + I$
 $= mm$, et, comme auparavant, $m - 1$, . - $ep + V^cepp -h aw - a$ ce qui
 donne $n = \blacksquare > \gg ' ^2: ^ ^$

The text on this page is estimated to be only 11.42% accurate

D' ALGÈBRE. ^ Qu'on fasse $p = i$, on trouvera $n = e$ et $jn = 6e - f - i$;
et, en effet ^ puisque $m \ddot{i} a c/w \gg + 1 = e^* - f - aee + i$, me qui est le carré de
ee -f- 1* doit^ par exemple, $a = 1$ 1 ^ desorte que $e = 3$, on trouvera.
11IM $\ddot{i}$ + 1 =z= mm, «n faisant $m = 3$ et $m = 310$. Veut -on supposer $a = 83^$
on aura $e z = g^$ et $837171^- 1 = m77l^$ dans le cas de $/i = 9$ et de $r?i = 8A$,

The text on this page is estimated to be only 29.85% accurate

100 ÉLÉMENT TABLE Qui indique pour chaque valeur de a les
plus petits no m et n, tels que $mm = ann + i$. y a s n TU a 26 n m a 3 10 5i 3 5
1 2 27 28 5 24 2G 127 4 9 6 2 5 29 1820 9801 7 3 8 3o 2 11 8 10 1 3 3i 32
273 3 1520 17 6 "9 11 3 10 33 4 23 la 2 7 34 6 35 i3 •4 180 4 649 i5 35 37 1
6 12 73 i5 17 1 4 38 39 6 4 37 25 8 33 18 4 17 40 3 »9 1.9 39 170 41 320
2049 20 2 9 42 a i3 21 12 55 43 53 1 3482 22 42 197 44 3o 199 23 5 24 45
24 161 24 I 5 46 3588 24555

The text on this page is estimated to be only 29.10% accurate

D ALGEBRE. 101 a 47 71 m a 74 n m 7 48 43o 3G99 48 5o 1 7
75 76 3 663o 36 57799 14 99 5i 7 5o 77 40 35 1 5a .90 649 78 6 53 53 9100
66349 79 9 80 54 55 66 la 485 89 80 8a 1 9 18 i63 56 a i5 83 9 83 5? 20 i5i
84 6 55 58 3574 19603 85 30996 385769 59 eg 53o 86 1133 io4o5 6o 4 3i
87 3 28 6i 236153980 17G6319049 88 31 197 Ga 8 63 89 53ooo Soooooi G3
65 1 8 90 9» 3 i65 »9 1574 16 129 66 8 65 93 120 ii5i 67 5967 4884a 93
1260 lQl5l 68 4 33 94 331064 û 143295 69 936 7775 95 4 39 7° 3c a5i 96 5
49 71 4i3 3480 97 6377352 62809633 72 a 17 98 10 99 73 267000 2381349
■» 99 I iO 3

10» E L E M E N s S atfl •u C H APITRE VII. De la manière de
 rendre-rationnelle la formelle $Va + bwc + cxx + dx'$. lia. J-
 iOUS passerons à présenter une formule où x monte à la troisième puissance
 , après quoi nous élèverons jusqu'à la quatrième puissance de x , quoique
 ces deux cas se traitent de la même manière. Qu'il s'agisse donc de
 transformer en un carré la formule $a + io: + c.r + doc?$, et de trouver pour x
 des valeurs en nombres rationnels qui remplissent cette condition. Comme
 cette recherche est sujette à de bien plus grandes difficultés que les
 précédentes, il faut aussi plus* d'art pour ne trouver même que des valeurs
 fractionnaires de a ; ^ et on est obligé de se contenter de telles valeurs sans
 prétendre en trouver en nombres entiers. Nous devons remarquer aussi
 d'avance qu'on ne peut ici donner une solution générale comme dans les cas
 précédents > Et que si que la méthode employée ci-dessus conduisait à un
 nombre infini de solutions à-la-fois , chaque opération maintenant ne nous
 fera connaître qu'une seule valeur de r ou x . Comme , en traitant de la
 formule $a + ^ + cxj$ Ci nous avons remarqué un nombre infini de cas où la
 solution est tout-à-fait impossible, on s'imagine bien que cela a lieu bien
 plus souvent encore pour la formule présente qui d'ailleurs exige
 constamment qu'on sache déjà , ou qu'on ait trouvé une solution. Aussi à
 l'égard de la formule proposée, ne peut-on donner des règles que pour les
 cas où l'on part d'une so-^

.D * A L G E B R E. lo3 lution connue pour en trouver une
nouveUe ; par le moyen de celle-ci, on peut en trouver une autre ^ et
continuer ensuitt de la même manière. Mais il n'arrive pas même toujours
qu'une solution connue fasse parvenir à une autre ; au contraire il y a bien
dés cas où il n y a qu'une seule solution possible , et cette circonstance |. est
d'autant plus remarquable , que dans ceux que nous avons développés
précédemment ^ une seule solution conduisait à une infinité d'autres. ii4.
Nous venons de dire que pour que la formule $a - \{ -bx^4 + cxx + da^ \}$ puisse
être transformée en un carré , il faut nécessairement présupposer un cas où
cette transformation est possible. Or un tel cas s'apperçoit très - clairement ,
quand le premier terme est lui-même déjà un carré , et que la formule est
exprimée ainsi : $j5^+ ix + cxx + dx^$; car elle devient évidemment un carré
^ si $a; = 0$. Ce sera donc par la considération de cette formule que nous
entrerons en matière; nous tâcherons de voir comment, en partant du cas
connu $a: = 0$, on peut parvenir à quelqu'autre valeur de x , et nous
emploierons pour cet effet deux méthode» différentes que nous
expliquerons successivement : il sera bon de commencer par des cas
particuliers. 11 5. Soit donc proposée la formule $i - f - \hat{u}x - xx^j^{\wedge}$?, quj
doiye devenir un carré. Comme ici le premier terme est un carré, on
adoptera pour la racine cherchée une quantité telle que les deux premiers
termes s'évanouissent. Soit , pour cet effet, $i - f - a?$ la racine dont le carré
doit équivaloir à notre formule : on aura $1 + 2X - xx + a: ^i - | - aa? - f'' ^{\wedge} * ^{\wedge} >$
où les deux premiers termes se détruisent, desorte que l'oA aj'équation $a:a;$
 $= - xx4 - ^ >$ ou $a?: = 2xx, 4$

The text on this page is estimated to be only 23.51% accurate

104 É L É M E N s qui , divisée par xx , donne a: = 2 ; ainsi la formule devient $1+4 - 4+8 = 9$. De même , pour faire un carré de la formule $4 + 6j$: — $\wedge X3 > + Zx^y$ on supposera d*abord sa racine =a + 7ix, et on déter-? minera n d*après la condition que les deux premiers termes dis» paraissent; or on aura $4 + 6j\hat{1} - Sxx + Sot' = 4 + 4''*^{\wedge} + nnxx \setminus *$ donc il faut que $4/1 = 6$, et $n = |$; de là résulte T équation — $5x07 + 3a:^{\wedge} = 1\ 070?$, ou $3x^{\wedge} = -^{\wedge}xo;$, qui donne $x \bullet = .$ —; et c'est cette valeur qui fera de la for-* mule proposée un carré dont la racine sera 116. La seconde méthode consiste à donner à la racine trois termes, comme $y+g-x + Axx$, tels que dans l'équation Ici trois premiers termes s'évanouissent. Soit proposée , par exemple , la formule $1 - 4^{\wedge} + 6o7jp - 5x^{\wedge}$, on en supposera la racine = $1 - 2x + hxx$, et on aura $1 - 4^{\wedge} + 6x07 - 5a7^{\wedge} = :i - 4^{\wedge} + 4^{\wedge}x^{\wedge} + Q.hxx - 4^{\wedge} - ^{\wedge} A^{\wedge} *$ • les deux premiers termes , comme on voit , se détruisent des deux côtés ; et pour chasser aussi le troisième , il faudra faire $6 = 2/r + 4$, et par conséquent $A = 1$; par ce moyen on obtient — $5x^{\wedge} = : - 4^{\wedge} + 37*$, OU — $5 = - 4 + ^5$ desorte que $x = - 1$.

d'algèbre. io5 117. C'est donc de ces deux méthodes qu'on peut faire usage, lorsque le premier terme a est un carré. La première se fonde sur ce qu'on exprime la racine par deux termes, comme $f + px$, où f est la racine carrée du premier terme, Et où p est pris de manière que le second terme doit pareillement disparaître, ensorte qu'il ne reste qu'à comparer ppx avec le troisième (t le quatrième terme de la formule, savoir, $cx + dx^2$; car cette équation alors, pouvant se diviser par x donne une nouvelle valeur de x, qui est $-\frac{f}{p}$. Dans la seconde on donne trois termes à la racine, c'est-à-dire que si le premier terme a est ff on exprime la racine par $f + px + qx^2$, après quoi on détermine p et q, de façon que les trois premiers termes de la formule s'évanouissent, ce qui se fait de la manière suivante : Puisque $ff + bx + cx^2 + dx^3 = (f + px + qx^2)^2$ il faut que $b = 2fp$, d'où $p = \frac{b}{2f}$; de plus que $c = p^2 + 2pq$ dou $q = \frac{c - p^2}{2p}$; après cela reste l'équation $dx^3 = -f^2 - 2fpqx - q^2x^2$; et comme elle est divisible par x^2 , on en tire $d = -\frac{f^2}{x^2} - \frac{2fpq}{x} - q^2$. 118. Il peut cependant arriver souvent que lors même que a $= ff$ aucune de ces deux méthodes ne donne une

The text on this page is estimated to be only 25.66% accurate

! loG , iÇlémens nouvelle valeur de cr. C*est ce qu'on peut voir, en çonsidé^ ; rant la formule $jf - dj^2$, où le second et le troisième termes i manquent. Car si^ d'après la première méthode^ on supposait la nr cine $= f + px$, ou bien $ff + éLx :: ff + 2fix + ppxx$, on aurait $o = 2i/p$ et $p = o$; ainsi on trouverait $dx^2 = o$, et par là $a; = o$ » ce qui n est point une nouvelle valeur de x. Que si , d'après la seconde méthodp , on voulait Êdre la racine $= f + px + çx$, ou $ff + dj^2 + ff - sfpx + afqxx + ppxx + Tpqs^2 + qqst^2$, on trouverait $o = afp$ et $p = o$; de plus $o = afq + pp$ et $ç = o$; et il en résulterait $dx^2 = o$, et pareillement $o: = (x . 119$. Il ne reste d'autre parti à prendre dans ces cas*Ià, que de tâcher de trouver quelque valeur de x, telle que la formule devienne un carré; si on y réussit ^ cette valeur fera trouver ensuite , par le secours de nos deux méthodes, de nouvelles valeurs ; et cette voie est bonne même pour les cas où le premier terme ne serait pas un carré. Que, par exemple, la formule $S + o:$ doive devenir ui carré , comme cela arrive quand $o; = 1$: on fera et on aura eu le premier terme est un carré. Qu'on en suppose doo.^

The text on this page is estimated to be only 19.20% accurate

d'algèbre. 107 miyant la première méthode, la racine $:=a-|;ry,oD$ amra et pour que le second tertne disparaisse , il faudra que $Zrrr^p^4p^{^^}$ $^=1$, et le quatrième I en faisant $Z=4q+pp$. ou $9 = ^{^^} = 6|î$ ainsi $1 :=:ixpq +$ qqy , d'où l'on tire $i — 2pq 353 1873 ^ qq ' -^ loai i5ai lao$. En général, si on a la formule $û + 6dî + cxx -f- rfr'$, et qu'on sache d'ailleurs qu'elle devient jxh carré quand $x z=:f^$ desorte que on fera $xzirif^y$, et on aura la nouvelle formule qui suit : t

The text on this page is estimated to be only 25.13% accurate

$tc8 \text{ É } L \text{ £ } M \text{ £ } N \text{ s } a - hbf + by \text{ 4- } \zeta^4 + 2g3^4 + cyy \text{ gg } + ib + icf +$
 $Zdff)y + ic^{-f})yy + df.$ Dans cette formule le premier terme est un carré;
 aind on peut y appliquer les deux méthodes précédentes , et elles fourniront
 de nouvelles valeurs de j^4 , et parconséquent aussi de or, puisque $x-z^4zf^4y$,
 121. Mais souvent d'une première valeur de j^4 on ne peut en conclure
 d'autres , c'est ce qui arrive à l'égard de la formule $i+o;^4$, qui devient un
 carré quand $x=\$i$. Car si, en conséquence de cela , on fait $a; = 2 - \{-y$ on
 trouvera la formule $i+or^4zzrg + I2jr + \&yy + 3^{44}$, qui devrait de même
 pouvoir devenir un carré. Or soit, d'après la première méthode^ la racine =
 $3-|-/jy$, on aura $9 + lay + 6xy + / = 9 + \% + ppyy$, où il faut que, $i2 = Gp$ et $p =$
 2 ; donc $6+^4=PP = 4$, et $jr=— 2$, ce qui donne xmo , c'est-à-dire une valeur
 qui ne conduit à rien de plus. Essayons aussi la seconde méthode ^ et
 faisons la racine = $3 + py + qyy^4$ nous aurons $^4 + \backslash^4y+^4yy+f=^4 + Bpy +$
 $\&qyy+ppyy+2pqf+qqyU$ où il faudra d'abord que $i2 = S/j$ et $p=a$.

The text on this page is estimated to be only 26.93% accurate

• . * ^ A D ALGEBRE. I09 ensuite que $S=6q + pp = 6q + 4$, et $9 = J$; on aura donc $i=iipq + qqy=z^{\wedge} + y'$, de la et parconséquent $a: = \text{---} 1$, et $i+or'rzro$; d'où l'on ne peut rien conclure de plus , parceque si on roulait faire $x= \text{---} i +25$, on trouverait la formule où le premier terme s'en va; desorte qu'on ne pourrait faire usage ni de Tune ni de l'autre méthode. On est assez fondé à soupçonner, après ce que nous venons dédire, que la formule $i+x^{\wedge}$ ne peut devenir un carré que dans les trois cas que voici : (1°) $a: = 2$, (2* >) $07 = 0$, (3**) $x = \text{---} 1$. Mais c'est de quoi on peut se convaincre aussi par d'autres raisons. 122. Considérons encore, pour nous exercer, la formule $1 - \}$ - $3x^{\wedge}$, qui devient un carré dans les cas suivans : (1°) $07 = 0$, (2°) $o7 = i$, (3°) $o:=2$. et voyons si nous parviendrons à trouver d'autres valeurs qui jouissent de cette propriété. Puis donc que $07= 1$ est une des valeurs qui satisfont , supposons $0; =: 1 +^{\wedge} >$ et nous aurons $i+3o;3=4+9j^{\wedge} + 3jy+3y$.

The text on this page is estimated to be only 17.40% accurate

lie i L E M K N 8 Que la racine de cette nouvelle formule soit
 $a \ll 4^*/y \ll$ sorte que il faudra que $95=4P$ et $p = \hat{i}$, et les autres termes
donneront $9+^y=pp=H$ «t $-y=-^{\wedge}$; parconséquent $a: = \text{---} -^{\wedge}j$ et $i + 3a: ^{\wedge}$
devient un carré dont I la racine est $\text{---} -|^{\wedge}$, ou bien aussi $+f4^* \text{ } ^{\wedge} \text{ } ^{\circ} 1$ BOUS
ne manquerions pas de trouver de nouvelles valeurs, i Appliquons aussi à la
même formule la seconde métfaqde;. et supposons la racine $=:2-f-py+ qyy \backslash$
cette suppodtiofi . donne $4'i^y+\$yy+^y^{\wedge}==^{\wedge}+4py+4qyy+pm+y^9f+s^y^{\wedge}\}$
donc il faudra que $9 = ^{\wedge}$ ou $p = |$, et $9=4g+PP=4^{\wedge}+H$, ou $<7=:M$ et les autres
termes donneront $\bullet a > 567+1^{\wedge}87^{\wedge} = 384$, ou $ifl89^{\wedge} = \text{---} 185$; c'est-à-dire I
ia6. $|fj^{\wedge}=\text{---} 1 \ll 3$, ou $4fl.g^{\wedge}r = \text{---} 6u '^{\wedge} i 7 i$

The text on this page is estimated to be only 27.78% accurate

D* A L e £ B R E. lit Ainfir $13^3 > ^\bullet \langle \rangle$ — $13A3$ » ; et ces valeurs en fourniront de nouvelles[^] en suivant les voies que nous avons indiquées. laS. n faut remarquer cependant que, si on voulait se L donner la peine de tirer de nouvelles valeurs des deux qu*a fourni le cas connu $0? = 1$, on parviendrait à des fractions ' extrêmement prolixes ; et on a lieu de s'étonner que ce cas , ' ar=:i[^] n'ait pas conduit plutôt à cet autre, x=:q, qui ne ; tombe pas moins évidemment sous les yeux. Et c'est là une imperfection de la méthode dont il est question , et qui est jusqu'à présent la seule qu'on connaisse. On peut partir de la même manière du cas xzzzu, aCa de trouver d'autres valeurs. Qu'on fasse, pour cet effet » et il 8*agira de faire un carré de la formule $aS + 36y + i8jry + j^{\wedge}$; supposons-en la racine, d'après la première méthode, $= 5 + /y$, nous aurons $a5 + 36y + iSjy + 3y = a5 + lopy + pfyr$ » •t parconséquent $36 = iop$, ou $p = i - ^{\wedge}$; effaçant i présent les ternes qui se détruisent, et divisant les autres par [^] , il en résulte «t parconséquent d'où il suit que $1 - f - Sx^{\wedge}$ est un carré dont la racine est $5 + py = ^{\wedge}l^{\wedge}$ ou $+ \backslash U$.

The text on this page is estimated to be only 20.83% accurate

Il faut L é M N s Dans la seconde méthode, il faudrait supposer la racine $x^2 = 5 + 7y + 11y^2$ et on aurait $25 + 3Gy - 11Sjy + 3y^2 = 2d + 11opj4 - 11o^2X)^2 + 99y^2$ les second et troisième termes disparaîtraient en faisant $3G = iop$, ou $przz^2$, et $iS = iog - i^2pp$, ou $xo9 = i8 - 11^2S$ d'où $= -i^2ik$; et alors les deux autres termes, divisés par y^2 , donneraient $5 = 2pq + qqy$, ou $qqy = 3 - Qpq = 11^2$, c'est-à-dire, $V^2 A2LJ1$ et $:r = 11j^3 124 - 11^6$ calcul ne devient pas moins long et difficile, même dans des cas où, en partant d'un autre principe, il est facile de donner une solution générale; comme, par exemple, quand la formule proposée est $x^2 - x - xx - j - x^2$, où l'on peut faire généralement $x = nn - 1(*)$, en donnant à n telle valeur qu'on veut. En effet, soit $n = 2$, on aura $x = Z$, et la formule devient $= 1 - 3 - 94 - 27 = 1 G$. Soit $n = 3$, on aura $x = 8$, et la formule devient $= 1 - 8 - 64 + 512 = 441$, et ainsi de suite. Mais remarquons que c'est à une circonstance tout-à-fait particulière que nous devons une solution si facile, et cette (*) En effet, par cette hypothèse, la formule devient $n^2 (n^2 - 4) q^2$ est le produit de deux carrés, et qui conséquemment donne un carré quel que nombre qu'on prenne pour i . circonstance

D'ALGÈBRE. Il5 circonstance s'apperçoit aisément , si on décompose notre formule en facteurs -, car on voit aussitôt qu'elle est divisible par $1 - x$, que le quotient sera $i - xx$, qu'il est composé de[^] facteurs $(i + a:)(i - x)$, et qu'enfin notre formule $1 - X - XX - f 3c^z (i - x)(i+x)(i - x) = (i - xy(i+x))$; or, puisqu'elle doit être un cane , et ,qu'un [^]arré divisé par un carré , donne un carré pour quotient , il faut aussi que $i+x =$ un carré ; et réciproquement, si $i + ^$ est un carré , il faut que $(i - xy(i - x))$ soit un carré ; on n'a donc qu'à faire et on aura sur-le-champ Si cette circonstance nous eût échappé , il aurait été difficile de déterminer même seulement cinq ou six valeurs de x par les méthodes précédentes. ia5. Il suit donc de là qu'il est bon pour chaque -formule proposée , de la résoudre en facteurs , quand cela est possible. Or nous avons fait voir plus haut comment on s'y prend ; nous avons dit qu'il faut égaler la formule donnée à zéro , et chercher ensuite les racines de cette équation ; chacune d'elles , comme $x=f$, donne un faoteur $f - x$; et cette recherche est d'autant plus aisée , qu'on n'a besoin ici que des racines rationnelles qui sont toujours des diviseurs du terme connu , ou du terme qui ne renferme point x . 126. Cette circonstance a lieu aussi dans notre formule générale $a + Ax + ex^* -j- dj?$, quand les deux premiers termes disparaissent , auquel cas la formule qui doit devenir un carré , se réduit à $cxx -f- cb?$ \ car il est clair alors (fu'en divisant par le carré xx , il faudra pareillement que $c-^dx$ soit un carré \ on n*a donc qu'à supposer $c -f- dx = /i/i$, TITl $\sim\sim^$ ce pour avoir $x = -^$, valeur qui renferme un nombre infini de solutions , et même toutes les solutions possibles. a. H

The text on this page is estimated to be only 24.75% accurate

1X4 É L é M E K 8 137. Si dans l'application de la première des deux méthodes précédentes , on ne voulait pas déterminer la lettre p d*[^]rèt f la condition que le second terme disparût, 00 parviendrait à une autre formule irrationnelle qu'il s'agirait de rendre ra[^] tionnelle. Soit , par exemple ,J[^]-f' ^{^^} + ^{^^^} + ^{^^} '* formule proposée , et qu'on en fasse la racine =:f+px[^] on aura Jf+ bx + cxx + da? =:j5[^]+ vfpx -j'ppxx, où les premiers termes se détruisent ; divisant donc les autres par Xy on obtient b - f-cx + dira: [^]=Sffp -[^]ppxx, ce qui est une équation du second degré , qui donne PP — c+.√p[^] — ![^]c^{pp} + Mfp + cc — /fo2 ad Ainsi TalFaire se réduit maintenant i trouver pour p des var leurs telles que la formule p[^] — î[^]c^{pp} + Mfp + cc-[^]JiJbd devienne un carré* Or comme c'est la quatrième puissance du nombre cherché p qui se présente ici , ce cas appartient au chapitre suivant.

The text on this page is estimated to be only 25.40% accurate

I D* A L G £ B A E. Il5 ■r I I ■ ■ •■ ■ ■ ■ . ' . ' ••' ■ — ?■

CHAPITRE IX. De la manière de rendre rationnelle la formula,
incommensurable $Va + bx + cxx + dx^{\wedge} + ex^{\wedge}$, 128. il OUS voici parvenus à
des formules où le nombre indéterminé X monte à la quatrième puissance ,
et rVst par là que nous terminerons nos recherches sur les quantités
allectée!! du signe ide la racine carrée $^{\wedge}$ vu qu*onn'a pas été assez loin
encore pour pouvoit transformer en carrés des formules coin-' pliquées de
puissances plus hautes de x. Notre nouvelle formule fournit trois cas à
considérer : i» le premier terme , a, est un carré ; 12*', le dernier terme , $ea^{\wedge}$
est un carré ; 3** et 4° > le premier terme et le dernier sont lun et l'autre des
carrés. Nous traiterons chacun de ces cas iéflarément. lag. !**• Résolution
de la $\hat{o}xmxUey^{\wedge}ff-^{\wedge}bx'^{\wedge}cxx^{\wedge}x'^{\wedge}+^{\wedge}ex^{\wedge}$. Comme le premier terme ici est un
carré , on pourrait, par la première méthode , supposer la racine $:=f^{\wedge}px$, et
déterminer p de manière que les deux premiers termes disparussent , et que
les autres fussent divisibles par xx ; mais on ne laisserait pas alors de
rencontrer encore un terine xx dans l'équation , et la détermination de x
dépendrait d'un nouveau si^ne radical. Ce sera donc à la seconde méthode
que nous aurons recours; nous ferons la racine $^{\wedge}zf-j- px + qxx\backslash$ nous
déterminerons p et ç de façon à faire dispar^tre les trois premier termes; et
divisant ensuite les autres par a? $^{\wedge}$ nous fi

The text on this page is estimated to be only 24.38% accurate

Il 6 É L é M £ N s parviendrons à une simple équation du premier degré, qui, donnera x dégagé de signes radicaux. 130. Si donc la racine =/+ px -|- et qu'ainsi ff+bx+cxx+djc^j'ex^=ff+Qfpx + Sifq^^ les premiers termes disparaissent d'eux-mêmes; quant aux seconds, on les chassera en faisant, et il faut U y pour l'évanouissement des troisièmes^ qu« m' c = 2f9+PP, ou^ = --^^; cela posé, les autres termes seront divisibles par x^, et doix^ neront l'équation d -}- ex = fnpq 4- qqx^ m de laquelle on tire x=z i-L ou a: = -^2 — — -, qq—e' e— 7^ i3i. Or il est facile de voir que cette méthode ne mène à rien> quand le second et le troisième terme manquent dans notre" formule, c'est-à-dire, lorsque J = c = o^ car alors p = G et fl = o, par conséquent x =, d'où l'on ne peut ordinairement rien conclure, parceque ce cas donne évidemment dx^ + ex* = o, et qu'ainsi notre formule devient égale au carré jf. Mais c'est surtout pour les formules telles que jf-j^ex^ que cette méthode n'est d'aucun usage, puisque, dans ce cas, d étant aussi =0, on trouve pareillement x;=: 0, valeur qui ne conduit à rien de plus. Il en est de même, lorsque è =0 et (i= o, et qu'ainsi la formule est jQ^-J-cxx +^;

The text on this page is estimated to be only 20.88% accurate

D* A L G i; B R E. 1>7 car dans ce cas $p=0$ et $\zeta=-7$; d'où
résulte $x=0$, comme on le voit aussitôt. Résolution de la formule y
a 4- $6x-f-cxx + \epsilon Lx? + gg'x^{\wedge}$. On pourrait réduire cette formule au cas
précédent, en supposant $x=-$; car comme il faudrait alors que la formula
 $\hat{u}^1 Y TJ \text{ ""}^4 \text{ ""}^{\wedge} \text{ ""}^{\wedge} \text{ carré}$, et que dans celle-ci se trouve en facteur le
carré $j^{\wedge}$, lorsqu'on la multiplie par jr^* , la question se réduirait à faire un
carré de la formule $oy^{\wedge} \setminus by^{\wedge} \blacksquare^{\wedge} Oy + 4y + \hat{e}\hat{e}^{\wedge} > \text{ ""}^{\wedge} \text{ ""}^{\wedge} \text{ ""}^{\wedge}$ tout-à-fait
semblable à la précédente écrite en sens inverse. Mais on n'a pas besoin de
passer par ce procédé; on n'a qu'à supposer la racine $= gxx + pa > + \zeta$, ou
dans l'ordre inverse, $\zeta -$ par $+ S^{\wedge} t^{\wedge} o^{\wedge} \text{ ""}^{\wedge} a 4^{\wedge} \text{ ""}^{\wedge} + \text{ ""}^{\wedge} + d^{\wedge} + gg^{\wedge} =$
 $77 + \hat{u}\zeta x + agqxx'^{\wedge} rppxjc^{\wedge} \setminus - \% gpc^{\wedge} + ggo^{\wedge} \text{ ""}^{\wedge} \text{ ""}^{\wedge}$ or les cinquièmes termes
se détruisant ici deux-mêmes on déterminera d'abord p , de manière que
les quatrièmes termes se détruisent pareillement, ce qui arrive pour d
 $= 2gp, onp = \text{""}$; $\blacksquare \cdot ^{\wedge}$ ensuite on déterminera aussi q , afin de chasser les
troisième» termes et on fera pour cet effet $C^{\wedge} pp c = 2gi/+pp, ouq = \text{""}^{\wedge} J$
cela fait, les deux premiers termes fourniront l'équation

The text on this page is estimated to be only 26.76% accurate

n8 ELÉMENT d'où Ton tire $a - qq - aX = \sqrt{a}$, ou $a; = -r^2$;
 $2p - b - apq$ i33. Nous retrouverons ici rinconvénient que nous avons
 remarqué ci-dessus , dans le cas où le second et le quatrième terme
 manquent, c'est-à-dire lorsque $fc=0$ et $cfc=0$; en effet, on trouve alors $p = 0$
 et $a = -r^2$, donc $x = \sqrt{a}$: or cette valeur étant infinie , ne donne rien de plus
 que la valeur $a = 0$, dans le premier cas ; d'où il suit que cette méthode ne
 peut être employée pour les expressions de la forme $a - \sqrt{ax^2 - f}$ SS^* 134.
 3**. Résolution de la formule $\sqrt{9x^2 - bx^4 - cxx + otr^4} g'g'^n$ est clair
 qu'on peut employer pour cette formule Tun* et l'autre des deux méthodes
 dont on vient de faire usage ; car d'abord , parceque le premier terme est un
 carré , on peut prendre pour là racine $\sqrt{+ px^2 - f - qxx}$, et faire évanouir les
 trois premiers termes; ensuite, comme le dernier terme est pareillement un
 carré, on peut aussi faire la racine $\sqrt{+ px^2 - f - qxx}$ et chasser les trois
 derniers termes , au moyen de quoi on trouvera même deux valeurs de x .
 Mais on peut traiter aussi cette formule par deux autres méthodes qui leur
 appartiennent particulièrement. Dans la première , on suppose la racine $\sqrt{+ px^2 - f - qxx}$, et on détermine p de façon que les seconds termes se détruisent
 ; c'est-à-dire que , comme il faut que $ff + 6x + cxx + dx^2 + ggxx - ff + f'j^2 +$
 $f'gxx + ppxx + zgpa^2 + ggxx^2$, on fait $b = 2fp$ ou $p = -\frac{b}{2f}$;

The text on this page is estimated to be only 24.68% accurate

d'à t G é B R E. 119 et puisque de cette manière tant les seconds termes que les premiers et les derniers termes se détruisent , on pourra diviser les autres par $xx^{\wedge}$ et on aura]*équatioxi $c + dx = Qfg + pp + \hat{u}gpx >$ de laquelle on tirera Et on doit surtout remarquer ici que comme[^] dans la formule[^] on ne trouve g qu'à la seconde puissance > la racine de ce carré , on g [^] peut être prisé sous les signes + et — , et qu'il résulte de là encore une autre valeur de x , savoir : $:r — l \pm^{\wedge} kz : FP onrr — EPlZ^{\wedge} knf X — * i >$ ou $X — — — - — - — , i35$. Il existe > ainsi que nous l'avons dit y une autre manière de résoudre cette formule : elle consiste à supposer d'abord, comme ci - dessus, la racine $zizf^{\wedge} px - f - gxx$, et à déterminer ensuite p de manière que ce soient les quatrièmes termes qui se détruisent; cela se fait en supposant dans Téqua[^] tion fondamentale $d = ^{\wedge} SP >$ ou $p = —$; car puisque les premiers et les derniers termes disparaissent pareillement, on pourra diviser les autres par x, et il ea. résultera l'équation $b^{\wedge} cx^{\wedge} Qfp + zfgx - ^{\wedge} ppx$, adonne $x = /" ^{-} ^{\wedge} ^{\wedge}$. De plus, nous avons à remarquer que comme dans la formule» 4

136. Mais ici il arrive encore que b et d étant $= 0$, on ne peut trouver pour x aucune valeur qui conduise au but; desorte qu'on ne peut parvenir à résoudre la formule $ax^5 + cxx + g^2x^4$, Éa $eiFet^4$ si $e=0$ et $c^2=0$, on a par Tune et Tautre voie, $p=0$; et la première donnant $x = \sqrt[5]{i}$, et l'autre $a=0$, on ne peut être conduit à des conclusions ultérieures. 137. Voilà donc les trois formules auxquelles on peut appliquer les méthodes que nous avons détaillées jusqu'ici; et si, dans la proposée, ni Tun ni Tautre terme n'est un carré, il n'y a aucun succès à espérer avant qu'on ait trouvé une valeur de x , telle que la formule devienne un carré. Supposons donc que nous ayons découvert que notre formule devient un carré dans le cas de $x=h$ ou que $a + bh + ch^2 + dh^3 + eh^4 = k^2$. Si nous faisons $xz = zh - j - y$, nous aurons une nouvelle formule dans laquelle le premier terme sera kk^2 c'est à dire un carré, et qui par conséquent retombera dans le premier cas. On peut aussi faire usage de cette transformation, après avoir déterminé par les méthodes précédentes une des valeurs de a ; par exemple $x = A$; on n'a qu'à faire alors $a = A - f - y$, et on parvient à une nouvelle équation sur laquelle on peut opérer de la même manière. Les valeurs de x , qu'on aura trouvées de cette façon, en fourniront de nouvelles j celles-ci encore d'autres, et ainsi de suite.

The text on this page is estimated to be only 23.94% accurate

;c4 1 ?rrJ •4| d'algèbre. lai i38. Mais il est surtout à remarquer qu'on ne peut en aucune manière espérer de résoudre les formules où le second et le quatrième terme manquent, ayant lieu d'avoir, pour ainsi dire, trouvé une solution. Nous allons faire connaître le procédé à employer dans ce cas sur la formule $a^2 - ex^2 + y$ qui est une de celles qui se présentent le plus souvent. Supposons donc qu'on ait trouvé une valeur $xz = h$, et qu'on lit $a^2 - eh^2 = kk$; à l'on veut trouver par là d'autres valeurs de a : , on fera et il faudra que la formule suivante, $a^2 + eh^2 - 4h^2y + 6ehhy + 4h^2y^2 - 12O^2 >$ soit un carré; or cette formule revenant à celle-ci $a^2 + 4h^2y + 6ehhy - 4h^2y^2 - ey^2$, appartient à la première de nos trois espèces; ainsi nous ferons sa racine carrée $= A + py - qj^2$, et la formule elle-même par conséquent égale au carré $kk - k^2py + k^2qyy - p^2yy^2 + P^2 + (jy^2 >$ d'où il faudra d'abord chasser le second terme en déterminant p et q en conséquence, c'est-à-dire en faisant $h^2 = nkp$, ou $p = \frac{h^2}{n}$, et $6eAA = *ikq + pp^2$ on a $6ehh - pp^2 = Zehhkk - neeh^2 = 5kk - Cie^2$. $9 - h^2 -]^2 - [3 > oa$ enfin $9 = \frac{h^2}{3} - ' à cause de eh^2sikk - a'$, après cela les termes restants, divisés

The text on this page is estimated to be only 12.10% accurate

119 £ L é M E N S par jf, donneront .. , , . 4eh + ey = Qpq + qqy
, d ou 1 on tire •^ qq — e ' le numérateur de cette fraction peut se mettre
sous la forme Âehià — Aeeh^Ckk + aa) , j ?>« » r -î- , ^ , ou, a cause de
6A* = «« — a^ «ous celle-ci, 4eh¥ — 4eh(kk — a) (fefe + flg) 4eh (— cfefe
+ Qo')^4 — A4 Quant au dénominateur ^(/ — e, il devient _ ejkk — a) (kk
+ Qay — efe^ _ e (Sdt^ — 4g^ > ainsi la valeur cherchée sera atah (ag —
kk) k^ 4f^kk{^a — M} " ^ ¥ 06(3/14 — 4afl)' ° ^ '* ~ Zlé^^aa * et
parconséquent _ft(8aAfe — fe4 — 4flfl) _A(fe4 — 8flftft + 4gfl) ^ —
3M _4S^ > oua: _ ^^ _3^4 • Si donc on substitue cette valeur de x dans la
formule a + cx4 • elle devient un carré ; et sa racine que nous avions
supposé ft + p^ + ^yy > aura cette forme , Sk(Jih — a){Qa — kk) i6k(kk — à)
(kk+aa)("I W^: ^4aa " * ■ (3fc4 — 4aa)» :>

The text on this page is estimated to be only 17.45% accurate

D* A L G È B R e. laS I parceque , comme nous avons vu , _ QeP
 _ eh $\{kk + Q\}$ à) _ 4hkk(M — kk) iSg. Continuons de considérer la formule
 a -f- eoc[^] ; et puisque le cas a -f- $\sim^{^^} == ^{^^}$ «st connu , regardons-le
 comme four[maHmt deux cas differens, à cause dea:= + Aetdea:= — A;
 BOUS pourrons, par cette raison, transformer notre formule en une autre de
 la troisième espèce , dans laquelle le premier et le dernier terme sont des
 carrés. Cette transformation se fait, par un artifice qui est souvent d'une
 grande utilité y et qui consiste à faire $\sim^y$ ' on a donc $\wedge(I -yy\_kk + 4(kk -$
 $aa)y + Gkky + 4(kk — aa)f -^ khy^* \sim \sim ii-yY$ Qu'on suppose la racine de
 cette formule , conformément ... ft + py — $\wedge yy i$, au troisième cas , = —
 $rr^{-\wedge} — r^{-*^}$, ensorte que le numera* ($\wedge i — yY$ teur de notre formule devra
 être égal au carré kk -f- sJ[^]py [— zkky -f- ppyy'[^]sikpy[^] 4* $\wedge \wedge J^{\wedge} > 9^{\wedge \textcircled{R}} \wedge^*$

The text on this page is estimated to be only 18.09% accurate

1^4 É L É M E N s ainsi $j^{(8ft\&-i6a)} = \text{--- } 32^{\wedge} \text{--- } Z: ,'$ et Si nous voulons trouver maintenant x, nous ayons $d^{*ab}(\gg d^{*} \text{""}\cdot y" ftA(2ftA \text{--- } 4a)$ " et en second lieu $\_ Sfe^{\wedge} \text{--- } 4^{\wedge\wedge\wedge} \bullet \sim ftA(2ftfe \text{--- } 4a)^{*}$ ainsi $1 + j^{\wedge} k^{\wedge} \text{--- } 8afe^{\wedge} -f- 4gg . i^{\wedge}y \sim 3A^{\wedge} \text{--- } 4aa^{*}$ et parconséquent valeur qui est la même que celle que nous ayons déjà trouvé^ ' ci-dessus. i4o. Soit , pour appliquer ce résultat à un exemple , la formule $\hat{a}o^{\wedge}-^{\wedge}i$ qui doit devenir un carré. Nous avons idl $a = \text{--- } 1$ et $e = 2$; et le cas connu où la formule est im carré» est celui où $a; = i$; ainsi $A = i$ et $kk:=z i$. Donc nous au- , rons la nouvelle valeur pafceque la quatrième puissance de x se trouve seule ^ et de là résulte $ao;^{*}\text{--- } 1 := 67121 = (sSg)^{*}$.

The text on this page is estimated to be only 20.52% accurate

D* A t G A B A E. 195 Si nous regardons à présent ceci comme le cas connu , BOUS avons $t = i3$ et $ft = sSq$, et nous obtenons une nouvelle Valeur de x , qui est $\frac{5fl6Q8o8S4i + 456968 + 4^g}{5a65aS56i5 j}$ " " " " " "[9788435926 — 4 9788435²³ * 42422452969 " " " " 978842592a' 141 • Nous allons considérer de la même manière la formule [' un peu plus générale , $a + cxx - (-ex^*$, et nous prendrons pour le cas connu où elle devient un carré, $x = zki$ déporte que $a + chh - f - eA^* = kk$. Supposons donc , afin de trouver par là d'autres valeurs , que $xz = zh - j - y$, et notre formule prendra la forme suivante : $chh - Qchy + c_jy \text{ è } h^{\wedge} + 4^{\wedge} h^{\wedge} y + \text{ }^{\wedge} f^{\wedge} y y + 4^{\wedge} y^{\wedge} + \text{ }^{\wedge} kk + (2cA + 4^{\wedge} \text{ }^{\wedge}) y + (\text{ }^{\wedge} + \text{Séhh}) y y + 4^{\wedge} \text{ }^{\wedge} \text{ }^{\wedge} \text{ }^{\wedge} + ey^{\wedge}$. Le premier terme étant un carré , nous supposerons que la racine carrée de cette formule , est $k^{\wedge} + 'py + qyy'y$ et la formule elle-même devra être égale au carré $kk - f - akpy + \text{ }^{\wedge} \text{ }^{\wedge} i_j y$ " ^ PRXy "f" ^P^y^ ^ ^9y^ > déterminons à présent p etq, afin de faire évanouir les seconds et les troisièmes termes, nous aurons pour cet effet $acA - f - 4^{\wedge} A' = 2^{\wedge}$, cti $4 - aeh^{\wedge}$ ou $p = \text{---} -^7$, et $c 4 - 6ehh = zkq + pp$. $c + 6ehh \text{---} pp$ on $9 =]j$, ' jnaiateaant les termes suivans étant divisés par '^ , se réduisent

The text on this page is estimated to be only 24.92% accurate

126 £ L i M E N • à réquation qui donne enfin 4eh—Qpq J qq —
e ' et parconséquent aussi la valeur xznh-^y, qui fait i racine carrée de notre
formule , est A -f- py + (fyy* Si cela nous regardons ce nouveau cas comme
le cas d(nous pourrons trouver un autre nouveaif cas^ et contini; la même
nlanière autant. 142. Rendons l'article précédent plus clair, en Tappli à la
formule 1 — xx + a:* : on voit aussitôt que le cas • est x = 1 et k=± 1, Si
nous faisons donc x = 1 + J', racine carrée de notre formule =1 -j-py -+■
qyy , il l d'abord que p z=s 1 et ensuite qzzzQ-, et ces valeurs do ^ = o et a;
= 1 ; or voilà le cas connu , et on n'en a pas 1 un nouveau ; mais on peut
prouver autrement que la fc proposée ne peut devenir un carré que dans les
cas de . et de x = ifc 1. 143. Soit donnée aussi pour exemple la formule. . . .
2 — Zxx + Qx^ , où a = 2 , c = — o et c = 2. Le cas se trouve aisément ; il
est x = 1 ; ainsi A = 1 et ft = donc on fait x = 1 +^, et la racine = 1 + pj' +
qyy p = i et qz=z4, et de là résultent y :=o et x= 1', ce qui n'apprend que ce
qu'on savait déjà. i44- -^utre exemple. Sôit la formule 1 -f-Sarx+a «1=1, c =
8 ete=i. Une légère considération suffit remarquer le cas satisfaisant a; = 2 ;
car , en supposant h on trouve ft = 7 ; ainsi faisant a? = a -f-^ , et la racin< +
fiy +ÎXy> o^ aura P — 7 * 9 — 34i>

The text on this page is estimated to be only 22.98% accurate

D*ÀLG£BR£. !*où l'on conclut laj $V = \frac{1}{2} \sqrt{X^2 - 4Y}$ et $X = \frac{1}{2} \sqrt{X^2 - 4Y}$ •
on peut omettre dans ces valeurs le signe moins. Mais olv>ns de plus dans
cet exemple , qu,e puisque le dernier terme [est déjà un carré, et qu'il doit
rester tel dans la nouyeUe iule , on peut également appliquer ici le procédé
indiqué Ipour les cas de la troisième espèce. Soit donc ^ comme aup a*
nraat, ft nous aurons $3a^2 + 5ay + 4y^2 = 16 + 5ay + 4y^2$ 7 "f" ^y^ " ^y^ I
expression qu'on peut maintenant transformer en un carré de plusieurs
manières. Car d'abord un peut supposer la racine ^7+/îy "t-J!y> ®^
parconséquent la formule égale au carré $49 + 4py + 4yy + PPyy + 4py^2 -$
hy^ > f-aire évanouir les pénultièmes termes par la supposition aj5=:8,
doùp=4; diyiser les autres termes par jr, et tirer de Téquation $64 + 52yz =$
 $i4p + i4y + ppy = 56 + 5oy$, la valeur jf=z= — 4etx== — a,oua; = + a; ce
qui n'est , à la vérité , que le cas déjà connu. Mab si Ton cherche à
déterminer p de façon que les seconds termes disparaissent , on aura $i4p =$
 $e4^{\wedge} etp=^{\wedge}$;

The text on this page is estimated to be only 24.25% accurate

laS É L é M K N s et les autres termes , divisés par yy , formeront
réqoatîoii j $i^4 + PP + a/y = 3^4 + 8y \gg \langle \rangle^H \ddot{r}^4 + \forall y = 3^4 + 8y$, cl*où l'on tire
et parconsequent et cette valeur transforme notre formule en un carré dtnd
la racine est- ^{4} . De plus, comme yy n'est pas moins II racine du dernier
terme que ne Test -{-yy, on peut aufl supposer la racine de la formule =7 -(-
 $py - yy$, ou la firrmule même = $49 + ^4py - ^4yy + ppyy$ ' ^4pf+J on fera
évanouir les termes pénultièmes , en supposant $18 = 2p$, ou $p = 4i$ et
divisant les autres par y , on trouvera $64 + Say = i^4p - i^4y + ppyz=z - 56$
 $+ ay$, ce qui donna $y = 4$, c'est-à-dire de nouveau le cas connu. Que si
l'on Tonhi chasser les seconds termes, on aurait $64 = i^4p$, et $p = 4$;
parconsequent , en divisant les autres termes par yy , on ob tiendrait $32 +$
 $8y = -i^4 + pp - 2py$, ou $32 + 8y = ^4 - ^4j^4$, d'où l'on tirerait c'est-à-dire les
mêmes valeurs que nous avons trouvées ci dessus.

d'algèbre. lag 145. On peut procéder de la même manière à l'égard da la formule générale $a + \sqrt{-1} + \sqrt{-1}^2 + \sqrt{-1}^3 + \sqrt{-1}^4$ quand on coBiiait un cas comme $x = z h$, dans lequel elle devient un carré kk , la méthode est toujours de supposer ensuite $a := A + y$; on obtient par là une formule d'autant de termes qu'en contient l'autre, dont le premier est kk ; si après cela on exprime la ra-dne par $k - i^{\sqrt{-1}} p y - q y y$, et qu'on détermine p et q de manière que les seconds et les troisièmes termes disparaissent aussi, les deux derniers pouvant être divisés par y^2 , se réduisent à Qne simple équation du premier degré, de laquelle on tire facilement y , et parconséquent aussi la valeur de x . Mais on sera cependant, comme auparavant, obligé d'exclure un grand nombre de cas que donne cette méthode; savoir ceux où la valeur qu'on trouve pour x , n'est autre que celle $f = .h y$ qui était donnée; ces sortes de cas indiquent ou que la formule est impossible en elle-même, ou qu'il faudrait trouver encore pour x une valeur qui la rendît un carré. 146. Et voilà jusqu'où on est parvenu jusqu'à présent dans la résolution des formules qui sont affectées du signe de la racine carrée. On n'a fait encore aucune découverte pour celles où les quantités qui sont sous le signe, passent le quatrième degré y et lorsqu'il se présente des formules qui renferment la cinquième puissance, ou une poissance plus haute de X , les artifices que nous avons développés ne sufRsent pas pour les résoudre, quand même on aurait un cas donné. Pour qu'on puisse mieux se convaincre de la vérité de ce que nous disons, nous considérerons la formule $kk - \sqrt{-1} b x + \sqrt{-1}^2 c x x + d x^2 + e x^3 - \sqrt{-1}^4 f$ dont le premier terme est déjà un carré. Si on foulait, ainsi qu'auparavant, supposer la racina de cette formule, $-n z^{\sqrt{-1} k} p x - \sqrt{-1} q x x$, et déterminer p et q de manière à faire disparaître les seconds et les troisièmes termes, il resterait cependant toujours encore trois termes. I

The text on this page is estimated to be only 28.80% accurate

Les racines carrées divisées par $\sqrt{2}$, donneraient une équation du second degré et on ne pourrait évidemment exprimer x que par une nouvelle quantité irrationnelle. Mais voulût-on supposer la racine $\sqrt{2} + px + 9x^2 + x^3$ son carré monterait à la sixième puissance ; et quand même on déterminerait p , q et r de façon à faire disparaître les seconds, troisièmes et quatrièmes termes, il n'en resterait pas moins la quatrième, la cinquième et la sixième puissance ; et en divisant par $\sqrt{2}$, on ne laisserait pas d'avoir une équation du second degré, qu'on ne pourrait résoudre sans le secours d'un signe radical. Or ! voit par là qu'en effet nous avons épuisé ce qu'il y avait à dire sur les formules qui doivent être transformées en carrés, et il ne nous reste qu'à passer aux quantités affectées du signe de la racine cubique. 4

D* A L G £ B R £. 13i CHAPITRE X De la méthode de rendre
 rationnelle la formule irrationnelle $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$. 147. V-/N
 cherche donc à présent des valeurs de a , telles que la formule $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$
 devienne un cube, et qu'on en puisse extraire la racine cubique.
 Nous préviendrons aussitôt qu'on ne pourrait espérer aucune solution de
 cette espèce si la formule passait le troisième degré; et nous ajouterons
 copie si elle n'était que du second degré, c'est-à-dire que le terme doit
 disparaître la solution n'en deviendrait cependant pas plus facile. Quant au
 cas où les deux derniers termes disparaîtraient, et dans lequel ce serait la
 formule $y^2 = ax^3$ qu'il s'agirait de réduire en cube on voit assez qu'il ne
 souffre aucune difficulté, et qu'on n'a qu'à faire $a = p^3$, pour trouver sur-
 le-champ $y = p x$. 148. Nous devons remarquer de nouveau, avant que
 d'aller plus loin que lorsque ni le premier ni le dernier terme ne sont des
 cubes, on ne doit pas penser à résoudre la formule, à moins qu'on ne
 connaisse déjà un cas où elle devient un cube, soit que ce cas se présente
 naturellement, soit qu'on ait été obligé de le chercher par le tâtonnement.
 Ainsi nous avons d'abord trois espèces de formules à considérer: l'une a lieu
 quand le premier terme est un cube; et comme alors la formule s'exprime
 par $y^2 = a^3 + bx^2 + cx + d$, on s'aperçoit immédiatement que le cas connu est
 celui de /

The text on this page is estimated to be only 25.39% accurate

$a^3 + bx^2 - cx + d = 0$. La seconde espèce comprend la forme $a^3 + bx^2 - cx + d = 0$, c'est-à-dire le cas où le dernier terme est un cube, j
 La troisième espèce est composée des deux premières, c'est-à-dire que
 I. « premier et le dernier terme sont des cubes. » 149. Premier cas. Soit $a^3 + bx^2 - cx + d = 0$
 la formule proposée qu'il s'agit de transformer en un cube.
 Supposons que sa racine soit $a + px$ et par conséquent que la formule soit
 égale au cube $(a + px)^3$; comme les premiers termes
 disparaissent d'eux-mêmes, nous déterminerons p de façon à faire
 disparaître aussi les seconds termes, savoir en faisant présentement les
 termes restants étant divisés par x ; donnent $c + dx = 3a^2p + 3ap^2x + p^3x^2$, et $a =$
 $-\frac{3}{2} \sqrt[3]{J}, \sqrt[3]{p} \sim \sqrt[3]{\zeta} \cdot \sqrt[3]{*} < *$ Si le dernier terme dx^2 ne s'était pas trouvé dans la
 formule, on aurait pu supposer simplement la racine cubique $a + px$, et on
 aurait eu $P = P + bx + cxx$, où $64 - ca^7 = 0$ et $xz =$; c mais cette valeur
 n'aurait pu servir à en faire trouver d'autres, 150. Deuxième cas. Si, en
 second lieu, l'expression proposée est de cette forme, $a^3 - bx^2 - cx + d = 0$, on indiquera sa
 racine cubique par $a + px$, dont le cube est $a^3 + 3a^2px + 3ap^2x^2 + p^3x^3$,
 desorte que les derniers termes se détruisent, maintenant qu'on détermine p de façon qu'aussi le
 pénultième
 disparaissent : cela se fera en supposant $3a^2p + 3ap^2x + p^3x^2 = 0$

The text on this page is estimated to be only 25.38% accurate

D* A L G É B R E. et les autres termes donneront ensuite |55 d'où
 Ton tire $a + ia? = p' + 5gp^{*\wedge} X a - p3gpp--b$ Si le premier terme a atait
 manqué , on aurait pu se Gon« tenter d'xprimer la racine cubique par gx , et
 on aurait eu $a?'zzzbx'j^{cxx}\sim\backslash^{oc^{^^}}$ ou $o=6-f-cT$, donc $a: = -$; niais cette
 Taleui: ordinairement çnt nç peut en faire comi«atra d'autres. i5i. Troisième
 cas. Soit enfin la formule $\wedge + ix + cxx - f - g^{o^{\wedge}}$, iàas laquelle le premier et le
 dernier terme sont des cubes ; il est clair qu'on pourra la traiter comme Tune
 et comme äaujtre dçs deux espèces précédentes , et que parconséquent [on
 pourra obtenir deux valeurs de x . Mais outre cela, on peut aussi faire la
 racine $= / " \bullet + \bullet ^x \gg$ [puis égaliser la formule au cube $^{\wedge} \wedge ^{\wedge} ffg^{\wedge} + S/gr^{\wedge} f - ^{\wedge} +$
 $g^{\wedge} >$ jetparceque les premiers et les derniers termes se détruisent, et que les
 autres sont divisibles par x , on parviendrez 4 Té* cation $b'^{cx} = Zffg +$
 $5fggx,^l^$ donn0^ i5a. Lorsqu'au contr^re la formule proposée n'appartient
 â aucune des trois espèces ci-dessus , on n'a d'autre ressource [foe de
 chercher une valeur qui change cette formule en un [cube; ensuite ayant
 trouvé une telle valeur, par exemple $^s=:i^$ desorte que $^{\wedge}bh'^{\wedge} çjih + rfA3 =$
 $h\}^5$

The text on this page is estimated to be only 25.58% accurate

134 fi L É M E N s on suppose $x = \sqrt[n]{y}$ substituant on trouyé
a chh -f- tichy + cyy dh[^] •[^]Zdhhy+ Zdhyy+df •- — - - _ - ^ — , l[^] + {b +
:kch-\-Zdhh)y + {c+Zdh)yy+df. Cette nouvelle formule appartenant à la
première espèce, on sait comment on doit déterminer J' > et on trouvera pai
là une nouvelle valeur de x, qu'on pourra faire servir ensuite à en trouver
d'autres. i53. Eclaircissons cette méthode par quelques exemples, e
supposons d'abord qu'on demande que la formule $i \cdot \{ \cdot x + xx$ qui appartient
à la première espèce , devienne, un cube Nous pourrions faire aussitôt la
racine cubique $= i^{\wedge}$ et nom trouverions $x + xx = Oj$ ou $x(i + \wedge) =$
et par conséquent $a: = o$ ou $07 = 2 — i$; mais nous ne pourrions rien conclure
de là. Ecrivons don pour la racine cubique i-f-px, et comme le cube en ef 1
 $+ 3p^{\wedge} + 3/?px^* - f - p'^{\wedge}x^{\wedge}$, nous aurons $i = 3/>^{\wedge}$ ou $p = 3$ moyennant quoi les
autres termes étant divisés par xx donnent $i^{\wedge}Zpp + p^{\wedge}x$, ou $x = — -3^{\wedge}$; r or
 $p = ^{\wedge}$; absi $xz = z - ^{\wedge}z = . 18$, et notre formule est $1 + ^{\wedge} a? + 324 = 343$, et la
racine cubique , $1 \bullet + -px - = zj$. Si nous con tinuons à présent, en faisant $x =$
 $18 + ^{\wedge}$, notre formule pren dra la forme $343 + 37y + ^{\wedge}j'$, et il faudra par la
premièi

The text on this page is estimated to be only 19.71% accurate

d'algèbre. i35 règle, en supposer la racine cubique $=7+\sqrt[3]{}$; en la comparant après cela avec le cube $S43+i47Py + \sqrt[3]{ff!})!y4-py > \circ''^*$ voyons qu'U faut faire $37 = 147/?$, ou $p=\sqrt[3]{}$; les autrei termes donnent en ce cas Téquation $i=zQipp+py$, a ou nous tu'ons $1 - aipp\ 33o. 121. 1^7\ 1049580$
 $\sim \wedge ''^{\wedge} Zf \sim 5o'653 >$ valeur qui peut de la même manière en fournir d'autres. 154. Soit proposé d'égalier à un cube cette autre formule a -f- 370?. Comme on trouve assez aisément le cas $a:= 5$, nous ferons aussitôt $xz=z5 + \sqrt[3]{}$, et nous aurons $27 -f- loy -|\sqrt[3]{} y$; nous en supposerons la racine cubique $=3 + pjr$, ainsi la formule même $z=zuj + Q,jpy + \sqrt[3]{ppyy} + J^{\wedge}y^{\wedge}$, et nous auront à faire $10 = 27/7$, ou $p = i\sim$; donc $i:=qpp + p'y$, $y= 2LC = \sqrt[3]{} \sqrt[3]{} = \sqrt[3]{}$ - $\sqrt[3]{}$, et $0:= 383\ 1000$ par là notre formule devient $2146680 . a + j?x = \sqrt[3]{} - \sqrt[3]{}$, 1000000 dont la racine cubique ne peut manquer d'être $3 + /y = \sqrt[3]{}$ H9 00' i55. Voyons aussi si cette formule $i+x^*$, peut d'avenir un cube hors des cas évidens $ar=o$, et $a:\sqrt[3]{} = \sqrt[3]{} - i \gg'$ Nous remarquerons d*abord que , quoique cette formule apr 4

The text on this page is estimated to be only 26.80% accurate

15S £ L é M E N s partienne à la troisièmQ espèce , la racine i -f- x ne nons. est ^ cependant d'aucun usage ^ parceque son cube $i+5x+3x^3i$ " ^a^, étant égalé à la formule ^ donne $Sx -f- 3a:i = o$, on cr(^+^)=o, c'est-à-dire de nouveau $a:=:o$, ou $a;==— i$. Que si nous voulions faire nous aurions à transformer en cube la formule $3y — ^yy^hy^i$ ■ qui appartient à la seconde espèce ; ainsi supposant sa racine cubique $=^p'j-y$, ou la formule même égale au cube $p^ + ^PPy + ^Py + J^ > ^^^us$ aurions $— i^3=3p$ ou $p==:— ^i$, et de là l'équation $Sy=p^3 + 3p/>y=— i+3y$, qui donne $yrrr. - y$ ou infini ; desorte qu'on ne tire encore aucun parti de cette seconde supposition. Il ne faut p.^ s'en étonner, et c'est en vain qu'on chercherait d'autres valeurs pour x'y car il est démontré que la somme de deux cubes, comme $i^ - ^a^y$ ne peut jamais devenir un cube; ainsi, en faisant $= i$, il est clair que la formule, $i + ^>$ ne peut devenir un cube que dans les cas que nous avons examinés. i5S. On trouvera pareillement que la formule , $2 4-^>$ ne peut devenir un cube que dans le cas $a; = — 1$. Cette formule appartient à la seconde espèce *, mais on ne peut y appliquer la règle donnée pour ce cas, parceque les termes moyens manquent. C'est en supposant $a: = — 1 -^y$, ce qui donne $1 -\{-'^y — ^j^ -fj'^\}$ qu'on peut traiter la formule suivant les trois cas , et qu'on peut se convaincre de la vérité de ce que nous avançons. En effet, si, dans le premier cas , on fait la racine $= 1 +y$, dont le cube est $1 + 3y + 3xy+J^>$ on a $— 3^ = 3)^$, ce qui ne peut être vrai

The text on this page is estimated to be only 23.31% accurate

D'ALGÈBRE I. iSy m lorsque $J^{\wedge} = 0$. Qu'on suppose^ d'après le second ca^i U racine $= -i - f - J^{\wedge}$ ou la formule $= -i + 3y - Sjry + j^{\wedge}$, imaura $i + 3y = -i + 3y$, et $j = -$, ou une valeur infinie. Le troisième cas enfin exigerait qu'on supposât la racine $i - j - y$, ce qu'on a déjà fait pour le premier. 167. Soit proposée aussi la formule $3^4 3j^{\wedge}$ qui doit devenir un cube : ce cas a lieu premièrement, si $J' = -1 >$ mais on n'en peut rien conclure ; il a pareillement lieu pour $a :: \hat{a}$. Qu'on suppose, à cause de ce second cas, $x = a - \{-y$, on aura la formule $27 + 36y + 1 Syy + 3y^{*\wedge}$; et comme elle est de la première espèce, on fera sa racine $= 3 - fRy >$ dont le cube est $^{77} + ^{77}py - h QPPyy - hp^y^f$ comparant maintenant, on trouve $3G = 27/?$ ou $p = \S$, et de là résulte l'équation $ii + Zy = spp + p^y = i6 + ^y$, qui donne $-54^{\wedge} - 20y = -$, et $x =$. Donc notre formule et sa racine cubique et cette solution fournira de nouvelles valeurs, si l'on en désire. i58. Considérons encore la formule $4 + ^{\wedge}$ qui devient un cube dans les deux cas $x = aeta = ii$. Si nom faisons d'abord $x = 2 - y$ y ce sera la formule $8 + 4y + Jjy$ qui devra être un cube dont la racine soit $a + \hat{i} J' >$ et ce cube étant $8 + ^{\wedge} + ^yy - ^y^{\wedge}$ nous trouvent

The text on this page is estimated to be only 19.45% accurate

ce)38 < L é M E N S donc >=9 et a:=ii, c*e8t-^-dire le second cas donné. Si nous supposons à présent $x = ii + J^{\wedge} \text{ns ayi } 125 + 22y + jy$, ce qui étant égalé au cube de $5 + y$, à $i25 + 75/y + i5;D';j)[y+py$, donne $p=y$, et par là $\bullet i = i5pp + p3^{\wedge}$, ou $p3^{\wedge} = i - i5/7i = |f|$; et par conséquent $J^{\wedge} 10\ 048 > \bullet \blacksquare \bullet \bullet - 10648$. Puisque X peut également être négatif et positif^ suppo! $X = T^{\wedge}$, et notre formule deviendra $7^{\wedge}$, doit être un cube ; multiplions donc les deux termes par $1aCn$ que le dénominateur devienne un cube, et nous au . $V^{\wedge} T^{\wedge} yyr^{\wedge} \ll X$. et ce ne sera plus que le numéra $8 - 8y^4 - yy - 8)^{\wedge}$, ou, en divisant par 8, que la fon $1 - y^{\wedge} yy - y^{\wedge}$ qu'il s'agira de transformer en un c Cette formule se rapportant à toutes les trois espèces, con mons-nous d*abord à la première, en prenant pour $1 - y^{\wedge}$ le cube en est $1 - y - x^{\wedge} yy - rrj^{\wedge} i$ ainsi avons $1 - j' - \hat{i} - r7j' >$ ou $27 - 27y = 9 - y$; donc $y = -^{\wedge}$ donc $i + y = ^{\wedge}$ et $1 - j^{\wedge} = ^{\wedge}$; donc $0? = 1\ 1$, comme auparavant. On trouverait le même résultat, en regardant la fon f^omme de la seconde espèce.

lions D*ALGÈBRE. $13 = !$, et il en résulte $8 + 60y = p3-f.i5p/jy$, ou $£94^-$, ■ $iPfi^i^i - i96ai laôy i56a5 > ^ J - 3t > 7175 *$ d'où l'on pourrait tirer une valeur de a ?. 22 **f- 1 IV Mais on peut supposer aussi $x = ^$, et dans ce cas notre formule devient $4 + ^ ± ^ ± l^m = ^ ± ^ y ± ^$; desorte qu'en multipliant les deux termes par $i - y$, on a $8 + aSy + Sgj'y - laSy^$ à transformer en un cube. Si donc

The text on this page is estimated to be only 26.90% accurate

140 É L É M E N s nous supposons[^] conformément au premier cas, la racîQt 3=a -f- Jy, dont le cube est $8 + flSy + ^yy + ^y^$, bobi avons $89-i25y=^ + Wj^$, ou STli-, 169 «* — — liai . _ . ^ . -1 Vi\ -r — I 1 c*est-à-dire une des valeurs déjà connues. Mais considérons plutôt notre formule relativement au troi[^]* sième cas , et supposons-en la racine =2 — 5y; le cube dft.ce binôme étant $8 — 6oy + iSoj^y — laSy'$, nous aurons $a8 + 8c[y = — 60 + i5oyj$ dono $88 \ll 4. ^ i_o9o . j^ = .5f$, et :ç = — a;"[^]» desorte que notre formule devient = $^i|^$, ou égale au cube 160. Voilà donc les méthodes dont on est en possession[^] quant à présent[^] pour réduire des formules telles que celles que nous avons considérées[^] soit à un carrée soit à un cube,[^] pourvu que la plus haute puissance de Tinconnue ne passe pas le quatrième degré dans le premier cas , ui le troisième àflUA le second cas. On pourrait ajouter encore la question de transformer une formule proposée en un carré-carré, dans le cas où Imconnue ne passerait pas le second degré. Mais on observera que si une formule, telle que $a-^{\wedge}bx + cxx^{\wedge}$ doit être un carré-* carré, il faut premièrement qu'elle soit un carré, après quoi, il ne restera qu'à faire de la racine de ce carré un nouveau carrç , par les règles que nous avons données; pour cela. Que xj; + 7 , par exemple , doive être un bi-carré , on fera d'abord un carré j en prenant apq zpq q

The text on this page is estimated to be only 29.66% accurate

B* A t O è B R I. i^l U formule alors devient égale au carré 7
 $\sqrt{4PPn-ASr} = \sqrt{S \pm 2^m L \pm M}$ dont il faut transformer la racine — i- 22
 pareillement en un carré; qu'on multiplie dans ce dessein les deux termes
 par $\hat{p}^2$ afin que le dénominateur devenant un carré, on n'ait à traiter que
 le numérateur $spq(jpp-\backslash-qq)$. On ne peut faire un carré de cette formule ,
 qu'après avoir déjà trouvé un cas satisfaisant ; ainsi supposant $9=pz$ y il
 faudra que la formule $fppz(7PP+ppzz)=2Qp^z(7+zz)$, et par conséquent
 aussi , en divisant par p^2 , que la formule $2z(7-f-2i2)$ devienne un carré. Le
 cas connu est ici $2=1$, c'est pourquoi on fera $z=i+y$, et on aura
 dont on suppose $4+|^\wedge$, le carré $i6+aoj-(-5ijy)$ étant élevé à la
 formule, donne $6+2y=^\wedge$; donc $J=f$ et $zzxf$. Or $2=^\wedge$; donc $9=9$, $p=8$ et $a;=$
 $||J$, çt la formule Si enfin on extrait la racine carrée de cette fraction , on
 trouve $7j|$, et tirant encore de celle-ci la racine carrée, on trouve $7I$; donc
 c'est de ff que la formule proposée est le carré-carré. 161. Enfin nous avons
 à remarquer encore dans ce chapitre, qu'il est des formules dont on peut
 faire des cubes d'une manière tout-à-fait générale ; car si , par exemple , cxx
 doit être un cube 4 on n'a qu'à faire sa racine $=px$, et on trouve

The text on this page is estimated to be only 22.55% accurate

14sⁱ L É M E N s c cxx'=zfpj?[^] ou cz^px, c'est-à-dire ap=-rj, ou x=-scq^g On écrivant - au lieu de p. 9 La raison en est évidemment que la formule contient un carré ; c'est pourquoi toutes les formules , comme a (i + ex)^{*}, ou ai⁶ + 2aⁱc^x + Gc^a7x, peuvent très- facilement se transformer en cubes. En effet , qu'on en suppose la racine cubique b'+CX ,w î=: , on aura l'équation qui, divisée par (i-f-cx)^{*}, donne i q[^] ^ c valeur dans laquelle q est arbitraire. ^ On voit clairement par là combien il est utile de résoudre les formules proposées en leurs facteurs toutes les fois que cela est possible ; c'est donc une manière que nous croyons de-[^] ; voir traiter avec beaucoup d'étendue dans le chapitre suivant.

d'à L G £ B R E. IJ^ CHAPITRE III. De la résolution de la
 formule $axx + bxj - f - cyj$ en ses facteurs. i6s. J-JE s lettres x et ^ ne
 signifieront ici que des nombres entiers ; et nous avons vu suffisamment
 dans ce qui a précédé ^ et même lorsqu'il fallait se contenter de résultats
 fractionnaires^ que la question peut toujours être ramenée à des nombres
 entiers. En effet si^ par exemple^ le nombre cherchée est une fraction^ on
 n*a qu'à faire $x = -$, et on pourra toujours assigner i et u en nombres entiers ;
 et comme cette fraction peut se réduire à ses moindres termes^ on regardera
 les nombres < et u comme n'ayant aucun commun /diviseur. Supposons
 donc que, dans la formule présente, x et^ ne soient que des nombres entiers,
 et tâchons de déterminer les valeurs à donner à ces lettres, pour que la -
 formule obtienne deux ou plusieurs facteurs ; c'est une recherche
 préliminaire très-nécessaire , avant que nous puissions faire voir comment
 cette formule se transforma en un carré, un cube ou une ^)uissance plus
 élevée. iG3. Trois cas se présentent à considérer ici. Le premier aMieu
 lorsque la formule se décompose réellement en deux facteurs rationnels, ce
 qui arrive , comme nous l'avons déjà vu plus haut, lorsque $hb - \frac{f^2}{4c}$
 devient un carré. Le second cas est celui où ces deux facteurs sont égaux ^
 et où par conséquent la formule est un carré.

The text on this page is estimated to be only 29.23% accurate

1⁴ B L £ M E N s EnCn le troisième cas se rapporte à la décomposition de h formule en facteurs irrationnels et même imaginaires. Ils seront simplement irrationnels, lorsque $bb - j^2$ sera un nombre positif sans être un carré; ils seront imaginaires, si $bb - 4$ est négatif. iS4- Si, pour commencer par le premier cas, nous supposons que la formule soit résoluble en deux facteurs rationnels ^ on pourra lui donner cette forme $(fx + g)(hx + ky)$, qcj renferme donc naturellement déjà deux facteurs. Voudra-t-on ensuite qu'elle contienne d'une manière générale un plus grand nombre de facteurs, on n'aura qu'à faire $-j-gy = W$ et $hx + ky = zrs$, notre formule deviendra, dans ce cas, égale au produit p^2 ; elle contiendra par conséquent quatre facteurs, et on pourra augmenter ce nombre à volonté. Or de ces deux équations résulte pour x une double valeur savoir, ce qui donne $hpq - hgy = ifrs^2fky$; et par conséquent $y - fk - hg^2fk - hg^2$ or si Ton veut que ^ et ^ soient exprimés en nombres entiers il faudra donner aux lettres p, q, r et s des valeurs telles que le numérateur soit réellement divisible par le dénominateur; ce qui arrive lorsque soit p et r, soit ^ et ^ sont divisibles par ce dénominateur. iG5. Pour rendre tout cela plus clair, soit donnée la formule $XX - yy$, qui est composée des facteurs $(j^2 + y)(p^2 - Jf)$ Si cette formule doit être résolue en un plus grand nombre w facteurs, on fera $X^2 - y^2 = j^2$, et $x - y = zii.rs y$ et on aura $pq + rs$ $pq - rs$ il

D'A L G É B A E. 145 3 faudra donc[^] pour que ces valeurs deviennent des nombres entiers, que les deux nombres pq et rs soient ou tous deux pairs ou tous deux impairs. * \ Soient par exemple $P = 7 > 9 = 5$, $r=3$, $^{\wedge}=i$: $^{\wedge}$ on aura $pa = 35$, $rj=3$: donc et de là résulte $,xx—^{\wedge}=io5$. lequel nombre est composé en effet des facteurs 7.5.5. i, desorte que ce cas ne souffre aucuie difficulté. i66. Le second en souffre encore moins $^{\wedge}$ savoir celui où la formule renfermant deux facteurs égaux, peut se représenter de cette manière , $(Jx -j- gy)^*$, c'est-à-dire par un carré , 'qui ne peut avoir d'autres facteurs que ceux qui proviennent de la racine $fjc \bullet \{ \blacksquare gy \}$ car si Vein fait $f^{\wedge} + gy — PV'y$ la formule devient $= ppqrr$, et peut avoir par conséquent autant de facteurs que Von veut. Il faut remarquer de plus quo l'un seulement des deux nombres x et y est déterminé , et que Tautre peut se prendre à volonté ; car $X — -;^{\wedge} j \ll-$, et il est facile de donner à y une valeur telle que la fraction disparaisse. La formule de cette espèce là plus aisée à traiter[^] est xx ; d l'on fait $x =^{\wedge}pqr^{\wedge}$ le carré xx renfermera trois facteurs carrés, savoir pp , qq et rr . 167. On rencontre bîeti plus de[^] difficultés en traitant le troisième cas, qui est celui dans lequel notre formule ne peut se décomposer en deux facteur*i*. rationnels ; et il faut ici recourir a. [^]

The text on this page is estimated to be only 28.28% accurate

1 i46 é L é M B N s à des artifices particuliers^ à Feifet de trouver pour xtXy desta« leurs telles que la formule renferme deux ou plusieurs JEactéun. Nous rendrons cependant cette recherche moins difficile, en observant que notre formule se transforme facilement en une autre dans laquelle le terme moyen manque ; car en effet on n*a qu'à supposer a?=s ^^ pour avoir la forip^ suivante : $zz^{\text{fibyz}} + bbyy \text{byz}^{\text{bbyy}} \wedge^{\text{ao-bb}} \backslash yy \text{4a} * \text{ao} * -^{\wedge} 4ja$ Ainsi nous omettrons le terme moyen , c'est«à-dir« que nous considérerons la formule $axx-j^{\text{cyy}}$, et nous chercherons quelles valeurs on doit donner à, x et k y, pour qu'elle se décompose en facteurs. On jugera facilement que cela dépend de la nature des nombres a et c; aussi comçiencerons-nous par quelques formules déterminées de cette espèce.

168. Soit donc proposée d'abord la formule $xx-^{\text{yy}}$, qui comprend tous les nonibres qui sont la somme de deux carrés^ et dont nous allons mettre les plus petits sous les yeux ; savoir^ ceux qui sont compris entre 1 et 50 : 1, a, 4, 5, 8, 9, 10, i3, iS, 17, 18, ûQ, fl5, aff, ag. Sa, 34, 36, 37, 40, 4i, 45, 49, 50. On voit qu'il se trouve parmi ces nombres quelques nombres premiers qui n'ont point de diviseurs j ce sont ceux-ci : a, 5, i3, 17, ag, 37, 41 • L®s autres ont des diviseurs, et ils rendent plus claire la question : Quelles valeurs doit-on ^op^er pour a: et j^, afin que la formule $xx - \{-yy$ ait des divisei^s ou des facteurs, et qu'elle ait même autant de ces facteurs que l'on VQU^a? Nous remarquerons de plus qu'on peut faire ^straction des cas où xety ont un commun diviseur , p^c^ ^'ajiors $XX - \{-yy$ serait divisible par le même divjl^eur, e| i&êjO^ P^ spn carré : par exemple, si

The text on this page is estimated to be only 19.35% accurate

$D^A t a \dot{E} B \ddot{t} E. 147 U$, somme des carrés[^] ou $49PP + 4d^g = 49ipp + n$) il sera divisible non-seulement par a , mais aussi par 49 . C'est pour quoi nous étendrons la question la formule $xx - y^2$ devient un nombre pair et par conséquent divisible par a il est souvent assez difficile de reconnaître si la formule a des diviseurs ou si elle n'en a pas 1 lorsque de l'autre côté un des nombres x et y étant pair et l'autre impair, la formule elle-même devient impaire. Nous ne parlons pas du cas où x et y seraient premiers entre eux parce que nous avons déjà fait sentir que ces nombres ne peuvent point avoir de commun diviseur. 169. Que les nombres x et y soient donc premiers entre eux, et que cependant la formule $xx - y^2$ doive contenir deux ou plusieurs facteurs. La méthode précédente ne peut s'appliquer ici, parce que la formule n'est pas résoluble en deux facteurs rationnels; mais les facteurs irrationnels qui composent la formule, et qu'on peut représenter par le produit $(x + y\sqrt{a})(x - y\sqrt{a})$, nous rendront le même service. En effet, on sent bien que si la formule $xx - y^2$ a des facteurs réels il faut que ces facteurs irrationnels soient composés d'autres facteurs; parce que s'ils n'avaient pas aussi des diviseurs, leur produit ne pourrait pas non plus en avoir. Or comme ces facteurs sont irrationnels et même imaginaires, et que de plus les nombres x et y n'ont point de commun diviseur, ils ne peuvent renfermer des facteurs rationnels, et il faut qu'ils soient pareillement irrationnels. A même imaginaires. 170. Si l'on veut donc que la formule $xx - y^2$ ait des diviseurs rationnels, il faudra décomposer les facteurs irrationnels en deux autres facteurs; c'est pourquoi

The text on this page is estimated to be only 19.86% accurate

148 É L é M £ N s supposons d'abord $\frac{a}{w} = \frac{p + q\sqrt{d}}{r + s\sqrt{d}}$; et puisque $\frac{a}{w}$ peut se prendre aussi bien en moins qu'en plus, nous aurons en même temps $\frac{a}{w} = \frac{p - q\sqrt{d}}{r - s\sqrt{d}}$; prenons maintenant le produit de ces deux quantités ; et nous verrons que notre formule « $xx + yy = (p + q\sqrt{d})(r + s\sqrt{d})$ », c'est-à-dire qu'elle contient les deux facteurs rationnels $pp - f^2$ et $rr + w$. Il nous reste à présent à déterminer les valeurs de x et de y , qui doivent de même être rationnelles ; or la supposition que nous avons faite, donne $\frac{a}{w} = \frac{p + q\sqrt{d}}{r + s\sqrt{d}}$; et $x = \frac{p + q\sqrt{d}}{r + s\sqrt{d}}$; si nous joignons ces formules, nous avons $x = \frac{p + q\sqrt{d}}{r + s\sqrt{d}}$; si nous les soustrayons l'une de l'autre, nous trouvons $\frac{1}{w} = \frac{a}{w} = \frac{p + q\sqrt{d}}{r + s\sqrt{d}}$; d'où il résulte par conséquent de là ; qu'en faisant $x = \frac{p + q\sqrt{d}}{r + s\sqrt{d}}$ et $y = \frac{ps - qr}{r + s\sqrt{d}}$, notre formule $xx + yy = (p + q\sqrt{d})(r + s\sqrt{d})$ ne peut manquer d'obtenir deux facteurs rationnels $pp + qq$ et $rr + ss$. Qu'il si Ton demandait après cela un plus grand nombre de $\sqrt{d}$,

The text on this page is estimated to be only 24.94% accurate

B' A t' G i B R E. l^q teurs, on n^{*}aurait qu^{*}à donner de la même manière à pet à q des valeurs telles que $pp + ^jq$ eût denx facteurs; on aurait alors trois facteurs en tout , et ce nombre pourrait être aug[^] mente par la méthode autant qu'on voudrait. 171. Comme nous n'avons rencontré dans cette solution qae les secondes puissances de p, q , r et s , on peut prendre aussi ces lettres en moins ; que q, par exemple, soit négatif , on aora xzrzpr-[^]qs et $y=ps^{^}qr'y$ mais la somme des carrés sera la même qu'auparavant, ce qui nous fait voir que quand un nombre est égal à un produit tel que $(pp + 99) (n^{*} + w)$, on peut de deux façons le décom[^] poser en deux carrés ; car nous avons trouvé d'abord $ar=pr-95$ et $y=ps + qr^{^}$

The text on this page is estimated to be only 25.73% accurate

150 £ L ^ M E n s 17a. Panai les nombres qui sont contenus dans la formule $x^2 - y^2$ et tronyent donc premièrement ceux qui sont, par la multiplication, le produit de deux ou de plusieurs nombres en second lieu y ceux qui sont formés différemment. Nous nommerons ces derniers facteurs simples de la formule $x^2 - y^2$ et les premiers facteurs composés. D'après cela, les facteurs simples seront des nombres tels que les suivants : 1, 5, 9, 13, 17, 37, 41, 49, etc. et on distinguera dans cette suite deux espèces de nombres ; les uns sont les nombres premiers $2, 5, 13, 17, 37, 41$ qui n'ont aucun diviseur, et qui tous, excepté le nombre 5, sont tels que si l'on en ôte 1, le reste se trouve divisible par 4 ; desorte que tous ces nombres sont contenus dans l'expression $4n + 1$, La seconde espèce comprend les nombres carrés 9, 49 > etc., et on remarquera que les racines de ces carrés, savoir 3, 7, etc. ne se trouvent pas dans la suite, et que ces racines sont contenues dans la formule $4n - 1$. Il est clair d'ailleurs qu'aucun nombre de la forme $4n - 1$ ne peut être la somme de deux carrés ; car puisque ces nombres sont impairs, il faudrait que l'un des deux carrés fut pair et que l'autre fut impair ; or nous avons vu plus haut que tous les carrés pairs sont divisibles par 4 et que les carrés impairs sont contenus dans l'expression $4n + 1$; si donc on ajoute un carré pair et un carré impair la somme aura toujours la forme $4n + 1$, et jamais celle-ci $4n - 1$. Que tout nombre premier au reste qui appartient à la formule $4n + 1$, est la somme de deux carrés ; c'est une vérité indubitable mais qu'il n'est pas très-facile de démontrer. 173. Allons plus loin, et considérons la formule $x^2 - jy^2$ à l'effet de voir quelles valeurs il faut donner à x et à y , afin qu'elle ait des facteurs. Comme cette formule s'exprime par les facteurs imaginaires $(a + jy \sqrt{-a}) (a - jy \sqrt{-a})$, on voit, ainsi qu'auparavant, que si elle a des diviseurs, ces facteurs imaginaires doivent pareillement en avoir. Qu'on suppose

The text on this page is estimated to be only 13.01% accurate

D*À L 6 Ê B R E. 151 donc d*oà résulte tt on aura ainn cette fontiuile a deux facteurs qui ont la même forme. Mais H reste à déterminier les i/akurs de x et dey, qui pro-* duieent cette transformation ; on conceiâérera , pour j partear[^] [^]e I puisque et que a? — j[^] [^]/ — fl =:pr — 2175 — çr V/ — a — fij V[^] -[^] a, on a la somme et parconséquent x'z[^]pr — aqs [^] et qa*on a de plus la différence ay v/ — a = açr v/ — 2 + [^]ps V/ — a ; desorte que yzznqr+ps. Lors donc que notre formule xx -)- fiyy doit avoir des facteurs , ils seront toujours des nombres de la même espèce que la for[^] mule y c'est-à-dire que Tun aura la forme pp -f- fiqq[^] et Tautro la forme tr + aw , mais xety pouri[^]ont encore se déterminer de deux manières différentes, parceque q peut être egàlemea négatif et positif. Ainsi on aura[^] 1[^]. x=pr'[^]Qqs, y=:ps + qr, et a[^] a? = pr+a5, y-zrips-[^]qr. 4

The text on this page is estimated to be only 26.95% accurate

iSâ £ L é M £ N s 174. Cette formule $xx - (-aj)^y$ renferme donc tous les nombres qui résultent de l'addition d'un carré et du double d'un autre carré ; et voici l'énumération de ces nombres poussée jusqu'au nombre 50. • 1, a, 3, 4, 6, 8, 9, M, la, iS, 17, 18, 19, aa, a^2 , a5, a7, 5a, 33, 34, 36, 38, 41, 43, 44, 49, 50. Nous diviserons, comme auparavant, ces nombres en simples et composés ; les simples, ou ceux qui ne sont pas composés des nombres précédents, sont ceux-ci : 1, a, 3, 11, 17, 19, a5, 41, 43, 49. Tous, excepté les carrés a5 et 49, sont des nombres premiers ; et il faut remarquer qu'en général, si un nombre, est premier et ne se trouve pas dans cette suite, on est sûr d'y rencontrer son carré. On peut observer aussi que tous les nombres premiers qui sont contenus dans notre formule, appartiennent soit à l'expression $8/1 + i$, soit à $8n-4-3$, tandis que tous les autres nombres premiers, savoir ceux qui sont compris dans les formules $8/1 + 5$ et $8/1 + 7$ ne peuvent jamais former la somme d'un carré et d'un double carré ; il est de plus très-certain que tous les nombres premiers qui sont contenus dans une des premières formules, $8/1 + 4$, $8/1 - 3$, sont toujours résolubles en un carré joint au double d'un carré. 175. Passons à l'examen de la formule générale $xx - f - cjy$, et voyons moyennant quelles valeurs de x et de y peuvent la transformer en un produit de facteurs. Nous procéderons comme ci-dessus ; nous représenterons la formule par le produit $CpCfrhy^2 -$

The text on this page is estimated to be only 29.93% accurate

d'algèbre. i53 de là résulte . $xx + cyy = (\sqrt{pp} + cqq) (rr + css)$, et
 Ton remarque encore que les facteurs sont de la même espèce que la
 formule. Quant aux valeurs de x et de $\sqrt{c}$ on trouvera facilement % $xz = pr +$
 cqs y $yz = ps - \sqrt{c}qr$, on bien aussi $x = pr - cqs$, $y = ps + qr$, et il est aisé
 d'imaginer comment la formule peut se résoudre en un plus grand nombre
 de facteurs. 17S. n sera facile maintenant de procurer aussi des facteurs à la
 formule $xx = cyy$; car d'abord on n'a qu'à écrire $-c$ au lieu de $+c$; mais
 de plus on peut les trouver immédiatement de la manière suivante : comme
 notre formule équivaut au produit $(x+y\sqrt{c})(x-y\sqrt{c})$, qu'on fasse $x-y\sqrt{c} =$
 $(\sqrt{p}+q\sqrt{c})(r+s\sqrt{c})$, et $x-y\sqrt{c} = \{\sqrt{p}-q\sqrt{c}\}(r-s\sqrt{c})$, et on aura sur-le-
 champ $xx^{\wedge\wedge}$

The text on this page is estimated to be only 19.83% accurate

154 é L l£ M E N s le produit qa'on a trouvé , on aurait , en
essayant les première Valeurs , ly $XX = ppr + \grave{u}cpqrs + ccqqss$, et $yy = PP^{\wedge} + ^{\wedge}P$

The text on this page is estimated to be only 26.64% accurate

d\4 l g è b r e. i55 l[^]. Mais on éludera cette dii&ulté[^] en faisant
xv/a+[^]V[^]— c=(pV/fl+[^]i/— c)Cr + *V'— oc) et cette supposition donnera
pour x et y les valeurs rationnelles suivantes : x = pr[^]r[^]cqsy y[^]=tir + aps\ et
notre formule , axx + fyy» aura les facteurs (app -f*

The text on this page is estimated to be only 27.04% accurate

f * 15S ë L É M E N 9 €ixx + ç)y r itant multipMés l'un par Tautre^ , donnent pour produit un nombre de la seconde espèce. Si nous indiquons les nombres de la première espèce par I^ et ceux de la seconde par II , nous pouvons noter les conclusions auxquelles nous Tenons d'arriver ^ par I. .1 donne II ; I. II donne I ; II. II donne II. Et on voit bien clairement ce qui doit résulter de I4 multiplication de plus de deux de ces nombres ; savoir que 1. 1. I fait I ; que 1. 1. II fait II ; que I. IL II fait I. Enfin que II. II. II fait II. i8o. Soit, pour éclaircir l'article précédant, a =r a et c = 5 , il en résultera deux espèces de nombres , Tune contenue dans la formule 2xx -j- ^yy > l'autre comprise dans la formule æx -f- ^yy. Or les nombres de la première poussés jusqu'à 5o, sont 1°. a, 3, 5, 8, 11 , 13, 14, i8, 20, 31, 37,39, 3o, 3a, 35, ■44,45,48,50. j Et les nombres de la seconde espèce, poussés de même jusqu'au nombre 5o, sont a^ 1, 4> 6, 7, 9, 10, i5, iG, sa, 24, i?5, 28, 3i, 33, 3ff, 40, 4a, 49. Si donc nous multiplions maintenant un nombre de Ta première espèce, par exemple 35, par un nombre de la seconde » .«supposons [far 3i , le produit io85 sera sûrement compris dans la formule axx + 3y^; ou bien on peut trouver pour y un nombre tel que io85 — 3jjy soit le do.uble d*uu carré, on r=ftjca.; or cela arrive d'abord quandjrz=3, dans lequel cas» x = 23; en second lieu, quand ^=ii|, ensorte que x= 19; en troisième lieu, lorsque^ = i3 , ce qui donne a:= 17; et enfin, en quatrième lieu , quand j' = ^9 * d'où résulte a? = 1 .

The text on this page is estimated to be only 28.04% accurate

D*A L G K B'R E. iS/ On peut partager ces deux espèces de nombres, comme les autres ^ en nombres simples et en nombres composés ; on donne ce dernier nom à ceux qui sont composés de ^eux ou de plusieurs des nombres plus petits de Tune ou de Vautre espèce ; ainsi les nombres simples de la première espèce seront ceux-ci : a, 5 j 5, 1 1 ,23 , et les nombres composés de la même espèce^ seront 8, la, i4, 18, ao, ai , 37, 3o, 3a, 35, 44> 45 > 48, 5o, etc. Les nombres simples de la seconde espèce seront 1 , 7 , 3i , et tous les autres de cette espèce seront des nombres composés; savoir, 4> 6, 9, 10, i5, 16, aa, 04, a5^ a8^ 33, 36, '4d, 4a,48. '^*<

The text on this page is estimated to be only 26.78% accurate

158 ILÉMENTS I CHAPITRE XII. De la Transformation de la formule à $xx-l-cyy$ en des carrés et en des puissances plus élevées[^] Si. N V ous atons déjà vu qu'il est souvent impossible de réduire à des carrés des nombres de la forme $aacx^{\epsilon}yy$ mais toutes les fois que cela est possible, on peut transformer cette formule en une autre, dans laquelle $a = i$. Par exemple, la formule $pp - qq$ peut devenir un carré, et comme elle peut aussi se représenter par $(p+q)^2 - 4pq$ on n'a qu'à faire et on parvient à la formule $xx - yy$ dans laquelle $a = i$ et c'est une semblable transformation qui a lieu toutes les fois que de telles formules peuvent devenir des carrés. Ainsi quand il s'agit de transformer la formule $ixx^{\epsilon}yy$ en un carré[^] ou en une puissance plus haute, mais paire, on peut sans balancer, supposer $a = 1$ et regarder les autres cas comme impossibles. 182. Soit donc proposée la formule $xx - f - (yyt$ et qu'on s'efforce d'en faire un carré. Comme elle est composée des facteurs $(x + J'V/ - ^) (- ^ - J'i^{**})$, il faut que ces facteurs soient ou des carrés ou des carrés multipliés par un même nombre « Car si le produit de deux nombres > par exemple pq , doit être un carré il faut que $p = rr$, $q = ss$; c'est à dire, que chaque facteur soit de soi-même un carré,

The text on this page is estimated to be only 15.06% accurate

d'à L G É B R £. iSj Hi bien que p^{mnrr} , q^{rzmss} , et qa^* ainsi ces facteurs soient des carrés multipliés Tun etTautri par un même nombre. C'est pourquoi nous ferons il s'ensuivra et noua aurons $XX + \zeta jy = mm$ (^pp -f- cg^Yi ce qui est tm carré. Nous ayons de plus , pour déterminer xety, lès équations $X + y \vee - c = mpp + \ll mp^{\wedge} / - c - mcqq$, et $X - y^{\wedge} - c = smpp$ $^{\wedge} \text{ampq}^{\wedge\wedge} C^{\wedge} mcqq$, dans lesquelles naturellement x équivaut à la partie rationnelle, et $^{\wedge} (/ - c$ à la partie irrationnelle -, ainsi i $x := mpp - ^{\wedge} mcqq$, $j^{\wedge} / - c = \text{ampq}^{\wedge} - c$, ouyzzz ampq , j et ce sont ces valeurs de x et de $^{\wedge}$ qui transforment Texpression $xx'^{\wedge} cyy$ en un carré mm $ipp'i^{\wedge} cqqy^{\wedge}$ dont la racine est $mpp - f^* mcqq$. i83. Si les nombres a; et $^{\wedge}$ ne doivent point avoir de diviseur commun, i) faut supposer $7np = i$. Alors , pour faire que fuc -J|- $q^{\wedge}$ devienne un carré i on se contente çk pre9

iSo éLÉMEN8< supposer vu qae le carré xx ne laisse pas être
 le même. Les mêmes formules , au reste , ayant été trouvées plus 1 par des
 voies tout-à-fait différentes , il ne peut y avoir doute sur la rigueur de la
 méthode que nous venons d'emplo. En effets si on veut que $xx + cy$
 devienne un carré , par méthode précédente , on suppose la racine = $x - f - ^\wedge$,
 et trouve » on efface les xx ^ on divise les autres termes par $j^\wedge$ on multiplie par
 qq , et on a $cqqyz^\wedge apqx-jrppy$, ou divisant enfin par $\&pq$ et par $y^\wedge$ il en
 résulte $X cqq^\wedge - ^\wedge pp y \sim ap?$. Or xety devant, ainsi que p et q , n'avoir point de
 divi commun , il faut égaier x au numérateur et y au dénominal et on obtient
 par là les mêmes résultats que nous venon trouver; savoir, $x^\wedge cqq - pp$, $y =$
 Qpq . i84« Cette solution est bonne, que le nombre c soit p (ou qu'il soit
 négatif ; mais si de plus ce nombre a lui-même des facteurs, comme si c'était,
 par exemple, la forme $XX - f - acyy$ qui dût devenir un carré , on aurait non-
 seulei la solution précédente , qui donne $x := zacqq^\wedge pp$ et $y = Qpq$;

The text on this page is estimated to be only 22.96% accurate

s' A L G È B II i: iSt Miais encore celle-ci x = cqq — app ,y = Qpq: car dans ce dernier cas on a ^ de même que dans Tautre ^ XX -j- acyy = ccq^ -f- aacppqq + aap^ = (c^^ -f- appYi ce qui a lieu aussi quand on prend xz=zapp^^cqq ^ parceque le carré xx reste le même. Cette nouvelle solution se trouve aussi par la denuère mé« thode y de la façon suivante : Qu'on fasse x+y}/—acz=z{p i/a + qi/—c)\ et x^y{/^ac = (p x/a-^qS/^cy, on aura XX + acyy = (app + cqq)>% et parconséquent -=. un carré ; de plus, à cause de X +y 1/'— ac = app -f- ^pq V^^ ^^ " ^ ^97 > et de x^-y ^^acT=.app — ûpq ^^.^ac-^cqq , on trouve x-=siapp^-^cqq y yzmQpq* Il est clair aussi que si le nombre ac est résoluble en dettt facteurs d'un plus grand nombre de manières, on pourra trouver aussi un plus grand nombre de solution s < i85. Éclaircissons tout cela au moyen de quelques formules déterminées; et d'abord , si c'est la formule xx -j-y y qui doit devenir un carré , nous avons ac = i ; ainsi x^pp--qq,ety=iQpq, ffoù résulte xx+yy — ipp + qqy. Si on veut que ^x — *jy ^=wi carré ; a. L

The text on this page is estimated to be only 12.96% accurate

|8j| é L tu E N t on a ac = — 1 ; ainsi on prendra «t il résultera de là $xx'^{\wedge}yy=(^{\wedge}pp—qqy$. Veut-on que la formule $a7X-|-fl)y$ =un carré; on a ac = a ; qu'on prenne donc $X^{\wedge}scpp — açç$, ou $x = tipp^{\wedge}-qq$ et $y = a/19$, et on aura $xx + Qyy= \{pp + aqf(7)\%$ ou $xx + ayy=:(^{\wedge}Qpp+qqy$. Si, en quatrième lieu , on veut que $XX — ajjy ==$ un carré , où $€ic = — a^{\wedge}$ on aura $^{\wedge} = PP + ^9^> y — ^P^{\wedge}f$ donc a:» — fl)y = (pp — aqfç)•. Qu on veuille enGn que $XX + Gjy =$ un carré , on aura ac = 6 , et parconséquent aî= 1, c=6, oua=:ay c:=iZ\ dans le premier cas $X =pp — Çqq$, et jf» $a^{\wedge}pç$.

The text on this page is estimated to be only 22.44% accurate

D'À t 6 i fi A e: i63 desorte que $XX + 6yy := iz (^{pp} + 6qq y \setminus$
dans le second cas $x=zapp - 5qq >$ et $V = zpq$: ou resuite $XX + 6yy = ($
 $zpp + 5qq y. i8G$. Mais si c'est maintenant la formule $axx - ^{cyy}$ qu'on doit
transformer en un carré ; comme nous avons prévenu que cela n'est possible
que lorsqu'on connaît déjà un cas dans lequel cette formule devient
réellement un carré, nous supposerons que ce cas donné ait lieu pour
desorte qu'alors et nous remarquerons que cette formule peut se transforiner
en une autre de la forme $tt + acuu$, si l'on fait $afx + cgy \quad gx - fy^!$ car en
effet, si ; « $_ flQj^{xjg} 4- aacfgjoy + ccggyy$ on à $* hh\_ axx (^{qff} + cgg) +$
 $cyy (^{aff} + cgg) - hh \hat{u}insi$, puisque on a $tt -f- acuu z=: axx + çjy$;

iS4 i L li M E ir s Or nous avons donné* des règles faciles pour transformer en on carré l'expression $tt -| - acuu$, à laquelle nous venons de rédiûie la formule proposée $axx -f- cyy$. 187. Allons à présent plus loin, et voyons comment la for[^] mule $axx -t^* ÇXy> ^{^}$ uis laquelle x et y sont supposés n'avoir aucun diviseur commun $>$ peut se réduire à un cube. Les règles ' données plus haut ne suffisent plus, tandis que la méthode que nous avons indiquée en dernier lieu, s'applique ici avec le plus grand succès; et ce qui est surtout digne de remarque, G[^]est que la formule peut toujours être transformée en un cube, [quels que soient les nombres a et c ; ce qui n'avait point lien [^] pour les carrés, à moins qu'on n'eût déjà un cas connu; et 1 ce qui n'a également pas lieu pour aucune des autres puis- | «ances paires; la solution au contraire est toujours possible pour [^] les puissances impaires, telles que la troisième, la cinquième, [^] la septième, etc. 188. Lors donc qu'il s'agira de réduire en cube la formule $axx 4- cyy$, on supposera d*une manière analogue à celle qu'on \ a employée et $xi/a \sim y \vee \text{---} c := z(^p | /a \text{---} q [/ \text{---} c)^$; le produit $(app + cqq)'$, qui est un cube, sera égal i la formule $axx -f- cyy$. Mais on cherche aussi à déterminer pour a ; et [^] des valeurs rationnelles, et heureusement on y réussit. En effet, si Ton prend réellement les deux cubes indiqués, on a les deux équations $xy/a + y \vee \text{---} c = ap'' i/a + oappq^ \text{---} c \text{---} Scppq \{ /a \text{---} cfl^$ et $X l/a \text{---} :y V^ \text{---} czrzapp y/^a \text{---} Zappq j/\text{---} e \text{---} Zcppq v/a + cç'j/$ desquelles il suit évidemment que $xz =, af^{^} Zcpqq, y := i5^q^cq \backslash I$

The text on this page is estimated to be only 7.80% accurate

D* A L a £ B R e; i65 a'on dicrche, par exemple, deux carria xx
ttyy, dont U ne XX -\-yy fasee un cube. Puigqa'ici nra iii donne iteoant
rouye $xx+yy=(\_pp + q(ty. P \text{ — } a, q = i, x = a, \wedge = : \hat{iii} ; xx+yy \text{ — } ia5 = S'. ig.$
CoDudérons aussi la fonaule $xx + 5yy$ dans le dessein a faire égale à un
cnbe : comme nous avons poui cet résulte e formule se présente assez
souvent ^ c'est une raison pour onner ici du moins les cas les pins faciles. ' X
y , 1 8 o 64 = 4> s i lo tt 343= 7" 1 a 35 i8 SI97 = ,3' 3 1 0 M ,7=8 = .»■ i 3
8o Ta aigSa r= a8' ■i a 8. 3o 9261 = 3t* a 3 ,S4 45 119791 = 3i^

The text on this page is estimated to be only 29.85% accurate

166^ ÉLÂMENS 190. Sans la condition que les deux nombres x et y ne doivent point avoir de commun diviseur, la question ne serait sujette à aucune difficulté; car si $axx + (yy$ devait être un cube, on n'aurait qu'à faire $x = tzz, yz = nuz$, et la formule deviendrait $attz - f - cuuzz$ on l'égalerait au cube -3 , et on trouverait aussitôt $2 = z^{1/3} (a^2 - f - cuu)$; par conséquent les valeurs cherchées de a : et de z seraient $x = t^2 (a^2 - f - cuu)$, $y = u^2 (a^2 - f - cuu)$, lesquelles ont, outre le cube v^3 , aussi la quantité $att - f - cuu$ pour commun diviseur; desorte donc que cette solution donne sur-le-champ $axx - f - (yy = v^3 (att - f - cuu)$ $y^2 (att - f - cuu) = 1/v^3 (a^2 - f - cuu)$, ce qui est évidemment le cube de $v (att - f - cuu)$, 191. La méthode dont nous avons fait usage en dernier lieu, est d'autant plus remarquable, que c'est par le moyen de quantités irrationnelles et même imaginaires que nous sommes parvenus à des solutions qui demandaient absolument des nombres rationnels et même entiers. Mais ce qui est encore plus digne d'attention, c'est que, dans le cas où l'irrationalité s'évanouit, notre méthode ne peut plus avoir lieu. En effet, lorsque, par exemple, la formule $xx + cyy$ doit être un cube, on ne peut qu'en inférer que ses deux facteurs irrationnels, $X - \sqrt{y}$ et $X + \sqrt{y}$, doivent pareillement être des cubes, vu que x et y n'ayant point de diviseur commun, ces facteurs ne peuvent pas non plus en avoir. Mais si les radicaux disparaissaient comme, par exemple, dans le

The text on this page is estimated to be only 27.85% accurate

D*A L G È B R E; 16/ le cas de $>$ ce principe n'aurait plus lieu ;
 parcequ'il se pourrait très-bien que les deux facteurs, qui seraient alors $x + j^{\wedge}$ et $a^{\wedge}$ — $j^{\wedge}$, eussent des diviseurs communs , quand même x et y n'en
 auraient pas ; ce qui arriverait, par exemple, si ces deux lettres exprimaient
 des nombres impairs. Ainsi, lorsque $xx - yy$ doit devenir un cube, il n'est
 pa» nécessaire que tant $x - y$ que $x^{\wedge}y$ soient d'eux-mêmes des cubes ;
 mais on pourra supposer $x+y = Qp^{\wedge}$, $x^{\wedge}y=4q^{\wedge}$ et la formule $xx - yy$ sera
 incontestablement un cube , ' puisqu'on la trouvera $= Sp^{\wedge}q^{\wedge}$, dont la racine
 cubique est $2pq$, On aura de plus $x = p^3 - aq^{\wedge}$, $y = p^{\wedge} - 2^{\wedge}$. Lorsqu'au
 contraire la formule $axx - cyy$ n'est pas résoluble en deux facteurs
 rationnels , on ne pourra trouver d'autres solutions que celles qui ont été
 données. 19a. Nous éclaircirons les recherches qui précèdent par'quel-
 ques questions curieuses. Question première. On demande un carré xx en
 nombres entiers , et tel qu'en y ajoutant 4 , la somme soit un cube j I» cas a
 lieu pour $xx=z^2$, mais on veut savoir s'il y a d'autres cas semblables ?
 Comme $4^{\wedge}$ st un carré, on cherchera d'abord les cas 014 $XX + yy$ devient un
 cube ; or nous en avons trouvé un qui \ lieu ^ si $x:=zp^{\wedge}3pqq$, $y=i5ppq^{\wedge}q$
 Puis donc que $j^{\wedge} = 4$, on a $j^{\wedge} = dba$ et par conséquent $5ppq^{\wedge}q^{\wedge}z=z - a^{\wedge}$ ou
 $Sppt$; — $\zeta' =$ — a :

The text on this page is estimated to be only 24.62% accurate

168 t L i M E v \$ dans le premier cas on a donc * ainsi q est un diviseur de a. Cela posé , supposons premièrement $q=i$ nous aurons $5pp - 1 = a$; donc $p = i$, d'où dérivent Si nous supposons , en second lieu , $9 = \pm a$, nous avons $6/ip - 8 = \pm a$; que si nous admettons le signe $4 - 1$ nous trouvons d'où résulterait une valeur de p irrationnelle , et qui ne peut avoir lieu ici; mais si nous considérons le signe $-^$, nous avons $6pp^3 = 6$, $p = 1$; donc a: nie 1 1 . Voilà les seuls cas possibles y et on en conclut queles'deux carrés 4 et 121 sont les seuls qui ^ ajoutés à 4> donnent des cubes. 193, Question deuxième. On cherche en nombres entiers d'autres carrés que q^5 , qui, ajoutés à 2 , donnent des cubes. Puis donc que $xx + a$ doit devenir un cube , et puisque a est le double d'un carré ^ déterminons d'abord les cas où la formule $xx + oyy$ devient un cube • nous avons pour cet effet, par Tarticle 1 88 , où $a = 1$ et $c = a$; nous avons , dis-je , $X = p^4 - 6pqq$ et $y = 5ppq - a^{^}$; il faut donc , à cause de $jr = \pm 1$, que $Sppqf - ag^5 = 5^9 (3/7p - a^?) = \pm 1$,

The text on this page is estimated to be only 26.91% accurate

D* A L G è B R E. 169 et par conséquent que q soit un diviseur de 1. Soit donc $9 = 1 >$ et nous aurons $5pp - 2 = \pm 1$; si nous prenons le signe supérieur^ nous trouvons, $5pp = 3$, donc $p = 1$, et $a = 5$; et si nous adoptons l'autre signe, nous parvenons à une valeur de p , qui étant irrationnelle, ne nous est d'aucun usage; il s'ensuit donc qu'il n'y a pas de carré, hors 226^2 qui ait la propriété désirée. 194. Question troisième. On cherche des carrés qui, multipliés par 5 et ajoutés à j , produisent des cubes; ou bien on demande que $5xx + 7$ soit un cube. Qu'on cherche premièrement les cas où $5xx + jyy$ devient un cube; on trouvera par l'article 188, où $a = 5$ et $c = 7$, qu'il faut, pour cela^ que $X = 5p^2 - 14pq$, $y = 7p^2 - 9q^2$; si^ comme dans notre exemple, $a = 5$, on a $5pp^2 - 773 = 9$ ($5/3p^2 - 797$) $= \pm 1$, il faut donc que q soit un diviseur de 1; c'est-à-dire, que $9 = 1$; on aura par conséquent $5pp^2 - 7 = \pm 1$, d'où résultent^ dans l'un et l'autre cas, des valeurs de p qui sont irrationnelles; mais il ne faut cependant pas se presser de conclure que la question est impossible, vu que p et q pourraient être des fractions telles que $y = \frac{1}{p}$, et que x devînt un nombre^ tier; et c'est ce qui arrive réellement; car si $\frac{1}{p} \ll \frac{1}{q} > 1$

The text on this page is estimated to be only 24.22% accurate

179 É L é M E N s on trouve mais il est vrai qu'il n'y a pas d'autres fractions qui rendent la solution possible. 195. Question quatrième. On demande en nombres entiers des carrés dont le double, diminué de 5, soit un cube; ou bien on veut que $2xx - 5$ soit un cube. Si nous commençons par chercher les cas qui conviennent à la formule $2xx - 5yy$, nous avons dans le 1.88^e article $a = 2$, et $c = -5$, ainsi $x = 2p^2 + 5pq$, $y = 6pq + 5q^2$. { Or que $a = db + 1$, et conséquemment $6pq + 5q^2 = q \{Spp + 5qq'\} = \pm i$; | et comme cette condition est impossible en nombres entiers et même en fractions, ce cas devient très-remarquable, puisqu'il existe cependant une valeur de x qui satisfait; savoir $X = 4 > Q$ effet, dans ce cas $2xx - 5 = 37$, ou égal au cube de 3. Il est important de rechercher la raison, de cette singularité. * 196. Non-seulement il est possible, comme nous l'avons reconnu, que la formule $2xx - 5yy$ soit un cube; mais de plus, la racine de ce cube a la forme $app - 5qq$, comme on peut s'en convaincre en faisant $a = 4 > y = 1 >$ et $p = a$, $qf = 1$; ainsi nous connaissons un cas où $2xx - 5xy = (2/77 - 5q'qf)^2$ quoique les deux facteurs de $2xx - 5yy$, savoir $x^2/a + y$ et $x^2/a - y$

The text on this page is estimated to be only 18.50% accurate

D'ALGÈBRE. 171 et o: $a - a^5$, qui, suivant notre méthode, devraient être les cubes $\sqrt[3]{a+a^5}$, et $\sqrt[3]{a - a^5}$, ne soient pas des cubes \ car dans notre cas $a:\sqrt[3]{2+j^5} = 4v^2 + V/5$, au lieu que $\sqrt[3]{(pV/2 + (7\sqrt{5})^3) = (2\sqrt{a+V^5})^3 = 4Gy^2 + 29\sqrt{5}}$; ce qui n'est nullement identique avec $4\sqrt[3]{a + a^5}$. Mais il faut remarquer que la formule $rr - \sqrt{oss}$ peut devenir 1 ou -1 d'une infinité de manières; par exemple, si $r = 3et5=i$, $sir=i9etj = G$; et cette formule multipliée par $2/7/7 - \sqrt{Sqq}$ reproduit un nombre de cette dernière forme. Soit donc $ff - iogg=i$, et au lieu de supposer, comme nous avons fait ci-dessus, $Qxx - 5yy = (\sqrt{app - 5qq} y$, nous pourrions poser, plus généralement, $axx - 5yy = (\sqrt{-\log-g-}) i!^{pp} - 5qqy$; desorte que prenant les facteurs, nous aurons $x\sqrt{2\pm}:y\sqrt{5}=z(J:tf;i/io)ipi/2\pm:q)/5y$. Or $\{p\sqrt{i\pm:q}\sqrt{5y}=i(\sqrt{2p^2 + i5pqq})\sqrt{2\pm L(\sqrt{6ppq} + 5q^2)}\sqrt{5}$; et si, pour abréger, nous écrivons $j4\sqrt{a - a^5}$ klsi place de cette quantité, et que nous multiplions par $f^{-g} l/10$, nous aurons $Af^2 + I^fV^2 + a^5S V^5 + SBg\sqrt{a}$ à égaley à $a; \sqrt{2 - J-y V^5}$, d'où résulte $0? = 3\sqrt{+55g}, \sqrt{+} = \sqrt{+2^g}$;

173 É L é M E N s or , puisqu'il faut que $jr = \pm 1$, il n'est pas absolument nécessaire que $6ppq + 5(7^* = 1$; au contraire , il suffit que la formule $Bf + iAg$, c'est-à-dire $q \ll e / (6pp < 7 + 5 < 73) + ag(ap^3 + i5p^{\wedge},) = \pm 1$; desorte que f et g peuvent avoir plusieurs valeurs. Soit, par exemple , $\blacksquare = 5$ et $g = 1$, il faudra qu'on ait $iiSppq + iSq' + 4p^{\wedge} - hZopqq) = \pm i$, ou bien que $4p^{\wedge} + iSppq + Zopqq + \backslash Sq^{\wedge} = \pm 1$. $^1 1^7$. Cette difficulté de déterminer tous les cas possibles de | cette espèce , n'a lieu cependant que lorsque dans la formule » $axx - cyy$ le nombre c est négatif \ et la raison en est qu'alors \ cette formule , ou bien cette autre $xx - acyy$ qui en dépend, $^{\wedge}$ peut devenir $= 1$; ce qui n'arrive jamais quand c est un f nombre positif , parceque $\epsilon ixx - f - cyy$, ou $xx + \hat{u}^{\wedge} cyy^*$ donne ; toujours des résultats d'autant plus grands que les valeurs de x et y sont elles-mêmes plus grandes. C'est pourquoi la méthode que | nous venons d'expliquer, ne peut s'employer avec avantage que dans les cas où les deux nombres a et c ont des valeurs positives. 198. Passons maintenant au quatrième degré, et commençons par observer que , si la formule $axx + cyy$ doit devenir un bicarré , il faut que $a = 1$; car si ce nombre n'était pas un carré , il ne serait pas même possible de transformer la formule en un carré ; et si cela était possible , on pourrait aussi lui donner la forme $tt + acuu$; c'est pourquoi nous n'étendrons la question qu'à cette dernière formule , qui revient à la précédente $xx + (yy$, dans la supposition de $a = 1$. Cela posé, il s'agit de voir quelle doit être la nature des valeurs de a ; et de $^{\wedge}$, pour que la formule $xx + cyy$ devienne un carré-carré. Or comme elle est composée des deux facteurs. $(X -^{\wedge}y \vee - c) (a; - j' \vee - c)$, il faut que chacun de ces facteurs soit aussi un carré-carré de la même espèce; et oa

The text on this page is estimated to be only 22.14% accurate

D'ALGÈBRE. l[^]S doit faire d'où il résulte que la formule proposée devient égale au bicarré ($p^2 + c^2 y$). Quant aux valeurs de x et y , elles se déterminent facilement par le développement qui suit : $\sqrt{p^2 + c^2 y} = p + \frac{c^2 y}{2p} - \frac{c^4 y^2}{8p^3} + \dots$; $x^2 y = c^2 p^2 + 4p^2 q - 6cpq^2 + c^3 q^3 - 4c^2 p q^4 + \dots$; donc $X = p^4 - 6cpq^2 + c^3 q^3$, $y = 4p^2 q - 4^2 p q^2$, 199. Ainsi, lorsque $xx + yy$ doit être un bi-carré, comme actuellement $c = 1$, nous avons $x = \sqrt{p^4 - 6p^2 q^2 + 9q^4}$, $y = 4p^3 q - 4^2 p q^2$; cnsorte que Supposons, par exemple, $p = 10$ et $q = 1$ et nous trouverons d'où résulte $XX - yy = 826 = 28^2$. Si $p = 3$ et $9 = a$, nous obtenons $a = 9$, $y = 120$, ce qui donne $XX - yy = 134$. aoo. Quelle que soit la puissance paire dans laquelle il Bagisse de transformer la formule $axx - f$

The text on this page is estimated to be only 27.20% accurate

174 é L É M È H s forme $tt'^{acuu}y$ dans laquelle le premier terme tt'^{ii} est multiplié que par i ; desorte qu'on peut la regarder comme étant; contenue dans l'expression $xx - f - (yy \setminus$ et c^* est d'une manière toujours semblable qu'on peut donner à cette dernière expression la forme d'une sixième puissance ou d'une puissance païe plus haute quelconque. SOI. Cette condition n'est pas requise pour les puissances impaires ; et quels que soient les nombres a et c , on pourra toujours transformer la formule $axx - f -$

d'algèbre. 176 CHAPITRE XIII. De quelques expressions de la forme $ax^2 + by^2$, qui ne sont pas réductibles à des carrés. §102. Fermat s'est donné beaucoup de peine pour trouver deux bi-carrés, dont la somme ou la différence fût un carré; mais inutilement. En effet on est parvenu à la fin à démontrer que ni la formule $ax^2 + y^2 = z^2$ ni la formule $a^2 - y^2 = z^2$, ne peuvent devenir des carrés, si ce n'est dans les cas évidens où, dans la première, $ax^2 = 0$, et où, dans la seconde, $y = 0$ ou $y^2 = x^2$. La chose est d'autant plus remarquable, qu'on peut trouver, comme on Ta vu, une infinité de solutions, lorsqu'il ne s'agit que de simples carrés. §103. Nous allons donner la démonstration dont nous venons de parler, et afin de procéder par ordre, nous remarquerons avant toutes choses que les deux nombres x et y peuvent être regardés comme premiers entre eux. En effet, si ces nombres avaient un commun diviseur, comme on pourrait faire $x = dp$ et $y = dq$ nos formules deviendraient $d^2p^2 + d^2q^2 = z^2$ et $d^2p^2 - d^2q^2 = z^2$, ces formules, si elles étaient des carrés, resteraient des carrés étant divisées par d^2 ; donc aussi les formules $p^2 + q^2 = z'^2$ et $p^2 - q^2 = z'^2$, dans lesquelles p et

176 É L é M E N s 304. Nous commencerons donc par la somme de deux carrés, savoir par la formule $x^2 + y^2$, et en considérant x et y comme des nombres qui sont premiers entre eux. Il s'agit de prouver que cette formule ne peut devenir un carré que dans les cas mentionnés ci-dessus : or voici les raisonnemens que cette démonstration exige. Nier la proposition, ce serait prétendre qu'il peut y avoir des valeurs de a ; et de j , telles que $j^2 + a^2$ fut un carré, quelque grandes qu'elles fussent ; puisqu'il n'y en a pas de petites. Or on peut faire voir clairement que si x et y avaient des valeurs satisfaisantes, on pourrait, quelque grandes que fussent ces valeurs, en déduire de moindres pareillement satisfaisantes, tirer de celles-ci des valeurs encore plus petites, et ainsi de suite. Puis donc qu'on ne connaît aucune valeur en petits nombres, excepté les deux cas ci-dessus qui ne mènent pas plus loin, on peut aussi conclure avec assurance qu'il n'existe point de valeurs de x et de y de la nature de celles qu'on cherche, et pas même dans les plus grands nombres. La proposition avancée à l'égard de la différence de deux carrés, $x^2 - y^2$, se démontrera par le même principe, comme on le verra plus bas.

205. Ce sont les points suivans qu'il faut considérer maintenant, si on veut se convaincre que xy ne peut devenir un carré que dans les cas évidens dont nous avons parlé. 1^o. Puisque nous supposons que x et y sont des nombres premiers entre eux, c'est-à-dire, qui n'ont point de commun diviseur, il faut qu'ils soient ou impairs tous les deux, ou que l'un soit pair et que l'autre soit impair. 2^o. Mais ils ne pourraient être impairs tous deux, parceque la somme de deux carrés impairs ne peut jamais être un carré ; car un carré impair est toujours contenu dans la formule $4k + 1$, et par conséquent la somme de deux carrés impairs aura la forme $4k + 1$; $4k + 1$ divisible par 4, mais

The text on this page is estimated to be only 25.88% accurate

D'A L G É B R C. I77 non par 4 > ne peut être un carré (70). Or ce que nous venons de dire doit s'entendre aussi de deux bi-carrés impairs. 3®. Si donc $x^2 + y^2$ doit être un carré ^ il faut qu'un des termes soit pair^ et que l'autre soit impair. Or nous avons vu plus haut que , pour que la somme de deux carrés soit un carré ^ 2 faut que la racine de l'un puisse être exprimée par $pp - 99$ ^ et celle de l'autre par sq ; donc il faudrait que $xx' = zpp - qq$ et $yy - ^pq >$ et on aurait $cc^{+f}\{pp + qqy. 4^$. Ici par conséquent^ serait pair et xx serait impair ; m^dt puisque $XX =: pp - . qq$, il faut aussi que des deux nombres $petq$, Tun soit pair et Vautre impair. Or le premier p ne peut être pair , parceque s'il l'était 9 $pp^{^} qq$ serait un nombre de la forme $4^{*} + 3 >$ «t ne pourrait devenir un carré. Donc il faudrait que p fût impair y et que q fût pair, et, en ce cas, il est clair que ces nombres seront premiers entre eux. 5**. Pour que $pp - qq$ devienne un carré ou $= xx$, il faut, comme nous avons vu plus haut, que $p = rr + w$ et $7 = arj$; car, en ce cas, $XX r^{(^{rr-^{ssy}}$ et $x=rr - w.'$ 6^. Or il faut qjneyy soit pareillement un carré; et puisque nous avions ftous aurons à présent $yy=:z/^{^s(rr + ssy$, desorte que cette formule doit être un carré ; donc it hut ». M ■

The text on this page is estimated to be only 28.28% accurate

1⁸ É L É M E N s aussi que $r^2 + s^2$ soit un carré : et remarquons que r et s sont des nombres premiers entre eux de façon que les trois facteurs de cette formule, savoir r , i , et $r^2 + s^2$ n'ont point de commun diviseur. 7⁸. Or, quand un produit de plusieurs facteurs qui n'ont point de diviseur commun, doit être un carré, il faut que chaque facteur soit de lui-même un carré ; ainsi on fera $r = t^2$ et $i = uv$, et il faudra que $t^2 + u^2 = v^2$ soit un carré. Si donc $t^2 + u^2$ était un carré, notre formule $i^2 - f^2 u^2$, qui est pareillement la somme de deux bi-carrés, serait de même un carré : Et il est bon d'observer ici que puisque les nombres t et u seront évidemment bien plus petits que 4 et j^2 , vu que x et j^2 se déterminent même par les quatrième puissances de t et de u , et ne peuvent par conséquent que devenir bien plus grands que ces nombres. 8⁸ Il suit de là que si on pouvait assigner, quand même et serait en nombres très-grands, deux bi-carrés, comme x^2 et y^2 , dont la somme fût un carré, on pourrait en déduire une somme de deux bi-carrés beaucoup plus petits, qui serait pareillement un carré ; cette nouvelle somme en, feroit trouver ensuite une autre de la même nature et encore plus petite, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on parvînt à des nombres très-petits. Or une telle somme, en nombres très-petits, n'étant pas possible, il s'ensuit évidemment qu'il n'y en a aucune qui puisse exprimer par des nombres très-grands. 9⁸. On pourrait objecter, à la vérité, qu'il existe quelquefois de l'espèce dont nous parlons, en nombres très-petits, savoir dans le cas dont nous avons fait mention, où l'un des deux bi-carrés devient zéro ; mais nous répondons qu'on n'arrivera certainement pas à ce cas, en revenant des nombres très-grands

The text on this page is estimated to be only 22.67% accurate

D' A L ($\wedge$ £ B R £. 179 9asx plus petits, stiiyant la métllode. indiquée; car si dans la petite somme ou dans la somme réduite $t^* - ii4$, on avait trio ou $u = o$, on aurait nécessairement $yy r = .o$ dans la grande somme ; or c^* est un cas qui n'entre point ici en consi- * dération. flo6. Passons à la seconde proposition, et prouvons aussi que la différence de deux bi-carrés , ou $x^* - y^1$ ne peut jamais devenir un carré que dans les cas où $jf = o$ et $ysi x^1$. On peut regarder les nombre? oc tty comme premiers entre eux, et parconséquent comme étant ou impairs tous les deux , ou l'un pair et l'autre impair. Or comme dans l'un et l'autre cas, la différence de deux carrés peut redevenir un carré , il faudra considérer ces deux cas séparément. 2 $^$. Supposons d'abord les deux nombres a; et $^$ impairs $^$ et que il faudra nécessairement que l'un des deux nombres p tt q •oit impair, et que l'autre soit pair. Or nous avons doDC notre formule $3^ - ^y ^ 4pg (spp + aqq)$; et le second membre devant être un carré , il faut aussi què pq (app - {- nqq) ou skpq (pp -f qq) soit un carré; et puisque les facteurs de cette formule n'ont point d« coaotoim divi*« •eur, parcequè «ip est pair , q eet impair , chacun de ces fâc $^$ teurs , Qptqetpp $^$ qq, doit être de soi-même im carré. Afin donc de faire ensorte que les deux premiers deviennent des carrés , qu'on suppose $ap = 4^1$ ou p ;= arr, etqis=:ss,s étant impair, et il faudra que le troisièae facteur $1 4f^{^s^}$, soit pareillemeiit un carré. 3 $^$ Or, puisque $^ - f - 4'^ett)a$ somme de deux tmi9, dont

lio ÉLÉMENTS le premier s^2 est impair, et dont l'autre $4t^2$,
 est pair⁴ q'a'on fasse la racine du premier où t soit impair et u pair; et la
 racine du second, $flrr = afu$, ou rr^2u où t et u sont premiers entre eux. 4®.
 Puis donc que $tu = rr$ doit être un carré, il faut que tant t que u soient des
 carrés. Qu'on suppose donc $t = mm$ y $u = nn$, en entendant par m un
 nombre impair, et par n un nombre pair, on aura $\ll = m^2 - n^2$; desorte
 qu'il faudrait de nouveau qu'une différence de deux bi-carrésy savoir
 $m^2 - n^2$ fût un carré. Or il est clair que ces nombres seraient bien plus petits
 que x et y^2 puisqu'ils sont moindres que r et t^2 , qui sont eux-mêmes
 évidemment plus petits que jc et j^2 . Si donc une solution était possible dans
 de grands nombres, et que $a^2 - t^2$ fût un carré, il faudrait qu'il y en eût une
 aussi qui fût possible pour des nombres beaucoup plus petits; celle-ci
 devrait faire parvenir à une autre pour des nombres encore plus petits, et
 ainsi de suite. 5*. Or les nombres les plus petits, pour lesquels un tel carré
 peut se trouver, ont lieu dans le cas où un des bi-carrés est $= 0$, ou égal à
 l'autre bi-carré. Dans le premier cas, il faudrait qu'on eût $n = 0$, donc $u = 0$,
 et de même $r = 0$ y $p = 0^2$ et enfin $ce^2 - t^2 = 0$, ou $x^2 = r^2$. Ci qui est un cas
 duquel il n'est pas question ici; que si $n = t^2m$, on trouverait $t = 9u$, ensuite
 $j = 0$,

D'ALGÈBRE: 181 207. On pourrait faire ici l'objection que, si la première différence est impaire et que la dernière différence n'est plus semblable à la première, et qu'ainsi on ne peut en tirer des conclusions analogues pour des nombres plus petits. Mais il suffit que la première différence nous ait fait arriver à la seconde, et nous allons faire voir que $x^2 - y^2$ ne peut non plus devenir un carré quand l'un des bi-carrés est pair et que l'autre est impair. i^{**} . D'abord, si le premier x^2 était pair, et que y^2 fût impair, la chose serait claire d'elle-même, puisqu'on aurait un nombre de la forme $4^2 + 5$, qui ne peut être un carré. Soit donc X impair et y pair, il faudra que $x^2 = pp + qq$, et $y^2 = rr - ss$, d'où résulte que des deux nombres p et q l'un doit être pair et l'autre impair. Or $pp - qq = XX$ devant être un carré, on a $p = rr + ss$ et $q = rr - ss$; ainsi donc $X = rr + ss$. Mais de là résulte $yy = 2(rr - ss)$, ou $yy = 2(rs - ss)$, ce qui ne peut être un carré, à moins que rs ($rr - ss$), dont les facteurs sont premiers entre eux, ne soit pareillement un carré. 5^2 , Qu'on fasse donc $r = tu$, $s = uv$, on aura le troisième facteur qv à devra de même être un carré; or comme ce facteur est 5

18a i L é M E N s vaut & la différence de deux bi-carrés, qui sont
 beaucoup mdiiiodret qne les premiers, la démonstration précédente est
 pleinement confirmée ; et il est évident que si la différence de deux bi-
 carrés pouvait devenir égale au carré d'un nombre ; quelque grand qu'on
 veuille le supposer , on pourrait, mojrenliant ce cas connu , parvenir à des
 différences de plus en plus petites, qui seraient de même réductibles à des
 carrés, sans cependant retomber dans les deux cas évidens dont nous avons
 parlé au commencement ; donc il est impossible que la chose puisse avoir
 lieu même pour les plus grands nombres. 208. La première partie de la
 démonstration précédente i Relative au cas de a:, j^, nombres impairs, peut
 s*abrèger de la manière suivante : si $x^2 - y^2$ était un carré , il faudrait qu
 on eût $scx := pp + qq$ et $yyz = zpp^2qq$, en entendant par p etq des nombres
 dont Tun soit pair et l'autre impair ; moyennant cela on aurait $xxyy = jA -$
 q^2 , Et il faudrait parconséqueot que $p^2 - q^2$ fût un carré ; or c'est là une
 différence de deux bi-carrés dont l'un est pair et dont l'autre est impair ; et il
 a été prouvé dans la seconde partie de la démonstration , qu'une différence
 de cette nature ne peut devenir un carré. 209. Nous avons donc prouvé ces
 deux propositions capitales , que ni la somme ni la différence de deux bi-
 carrés ne peut devenir un nombre carré, si ce n'est dans un petit nombre de
 cas tout-à-fait évidens. Quelques formules donc qu'on veuille transformer
 en des carrés, si ces formules demandent qu'on réduise à un carré la somme
 ou la différence de deux bi-carrés, on peut prononcer que ces formules
 proposées sont pareillement impossibles. C'est ce qui arrive à Tégard de
 celles que nous allons indiquer.

The text on this page is estimated to be only 24.53% accurate

D' A L G è B R B« l85 1*. Il rCest pas pos&ible que la fori]]iule
 $o^{\wedge} -f^* 4)^{\wedge}$ deienne un carré ; car puisque cette formule est la somme de
deux . carrés 9 il faudrait que $xx = pp'^{\wedge}qq$, ayy — Qpq on $yy=,pq\backslash$ orpet $^{\wedge}$
étant des nombres premiers entre eux, il faudrait qu» l'un et l'autre fût un
carré. Si donc on fait $p=:rr$, et $q=:ss$, on aura $XX = H — j<$; c*est-à-dire
qu'il faudrait que la différence de deux bi-carrés fût un carré , ce qui est
impossible. a*. H n'est pas possible non plus que la formule $x^{\wedge} — \bullet /^{\wedge}$
devienne un carré ; car il faudrait dans ce cas que $xx = pp + qq$, et
ayyrziQpq, afin qu'on eût or pour que $yy:=ipq^{\wedge}$ il faut que p et q soient
séparément de» carrés ; et si on fait en conséquence on a $a? a; = r^* - | -^{\wedge}$; c'est-
à-dire qu'il faudrait que la somme de deux bi-carrés pût devenir un carré $^{\wedge}$
ce qui est impossible. 3**. Il est impossible aussi que la formule $4^{\wedge} — y^*$
devienne un carré , parcequ'il faudrait en ce cas nécessairement qney fût un
nombre pair; or si l'on fait $^{\wedge} = 32$, on trouve, quç $4x4 — 1 6^*4$, et
parconséquent aussi la quatrième partie $x^{\wedge} — 4^{*^{\wedge}}$. devrait pouvoir se
réduire à un carré; ce que nous venons d^ voir n'être pas possible. 4*. La
formule $ax^* -f- jy^*$ ne peut pas non plus se trans4

The text on this page is estimated to be only 27.17% accurate

184 J£ 1 É M E M s former en un carsé ; car, puisqu'il faudrait que ce carré fût pair, et par conséquent $ax^2 - y^2 = z^2$ on aurait $a : z^2 = y^2 : x^2$ ou $az^2 = xy^2$ ou pareillement $a^2 = x^2y^2$ — $ax^2 = 0:4$ — $ax^2 + y^2 =$ un carré. Ainsi, comme $az^2 = d^2 - x^2$ deviendraient se» parement des carrés, il faudrait que leur produit $4x^2y^2 = 4r^2$, aussi bien que le quart de ce produit, ou $z^2 = 2r^2$ fût un carré. Mais ce quart est la différence de deux bi-carrés, donc, etc. 5°. Enfin je dis aussi que la formule $ax^2 = a^2 - y^2$ ne peut être un carré ; car les deux nombres x et y ne peuvent être pairs tous deux, puisque s'ils l'étaient, ils auraient un diviseur commun ; ils ne peuvent être non plus Tun pair et l'autre impair, puisqu'autrement une partie de la formule serait divisible par 4, et l'autre seulement par deux, et qu'ainsi la formule entière ne serait divisible que par 2 ; donc il faut que ces nombres x et y soient impairs tous les deux. Or si l'on fait à présent $x = p + q$, et $y = p - q$, un des nombres p et q sera pair, et l'autre sera impair; et puisque $ax^2 = 2y^2 = a(x^2 + y^2) - (x^2 - y^2)$ et que $x^2 + y^2 = p^2 + q^2 = 2(pp + qq)$, et que $x^2 - y^2 = 4pq$

i I D* A L G È B R E. 185 la seizième partie, ou pq ($pp -$) (jq),
 devra être pareillement un carré. Mais ces facteurs sont premiers entre eux;
 ainsi chacun doit de son côté être un carré. Qu'on fasse donc les deux pre[^]
 miers $p = zrretq = w$, et le troisième devenant $z = r^* + ^4 ^$ ce qui ne peut
 être un carré ^ prouvera que la formule proposée ne peut pas non plus
 devenir un carré. aïo. On peut démontrer de même que la formule $x^ + ^$ ne
 devient jamais un carré ; voici l'ordre de cette démonstration : 1[^]. Le
 nombre x ne peut être palr[^] parcequ'il faudrait en ce cas que j fût impair; et
 la formule ne serait divisible que par 2 et non par 4 ; donc x doit être impair.
 2°. Qu'on suppose donc la racine carrée de notre formule = $XX + -ij22$. ^
 afin qu'elle devienne impaire , on aura $q qq$ où les $x^$ se détruisent; ensorte
 qu'en divisant les autres termes par yy et multipliant par qq , on trouve
 $4pq^{oc} + 4pfyy = 2qqyy$, ou $Jfiqxx = aqqyy ^ ^ppyy$ y d'où l'on tire $XX qq$
 — $fljpp^ yy \sim \gg P9$ ' c'est-à-dire $XX = qq-^{pp}$, $yy = apq$, qui sont les
 mêmes formules que nous avons déjà données plus haut. 3**, Ainsi qq —
 zpp devrait être un carré , et c'est ce qui ne peut arriver , à moins qu'on ne
 fasse $\zeta = rr-f- 2^{^}$ et $p == ar^$, afin d'avoir

The text on this page is estimated to be only 26.21% accurate

186 É L é M E N s or on aurait alors et il faudrait qu'aussi le quart
rs {rr-i- Qss) fût un carré, parconséquent que r et 5 fussent chacun en
particulier carrés. Si donc on suppose $r=tt$ et $s=uu$, on trouvera kl troisième
facteur $rr - f - 2W = i^* - | - 2u^$, qui devrait être un carré. $4^$. Parconséquent si
 $x^ - f' ^ y^ ^ ^ ^ ^ ^ ^$ carré, il faudrait ^ aussi que $t^ - f' slu^$ fût un carré ; et
comme les nombres ^ et u seraient beaucoup moindres que $xety^$ on
pourrait parvenir de la même manière à des nombres toujours plus petits. Or
il est facile de se convaincre , par quelques essais , que la formule proposée
n'est pas un carré de quelque petit nombre ; l donc elle ne l'est pas non plus
d'un nombre même très-, j grand. I fli 1 . Pour ce qui regarde au contraire la
formule $x^ — ay^*$, il n'est pas possible de prouver qu'elle ne peut devenir
un carré ^J et on trouve même par un raisonnement semblable au précé-< l
dent , qu'il y a une infinité de cas où cette formule devient | réellement un
carré* J En elFet , que $jc^ — 2y^*$ doive être un earré , nou9 venons dtij voir
qu'en faisant i $xx=pp + 2qg$ et $yy = spq$, on trouve $x^—2y^z=(^pp —$
 $Qqqy$. Or $pp 4- ^gq$ doit donc devenir pareillement un carré , et c'est ce qui
arrive , lorsque $p = rr — 2SS$ et $q=zars$, vu qu'on a dans ce cas

The text on this page is estimated to be only 22.37% accurate

D'ALGEBRE. 187 plus il est à remarquer qu'on pourrait encore prendre $p = QsS'^{rr}$ et $q = z^0rs$. examinerons[^] en particulier , l'un et l'autre de ces deux cas. 1[^] Soit d'abosd $p = sTr'^{ass}$, $9 = srr^{\wedge}$ aura i cause de $j^{\wedge} = upq$, on aura maintenant $yy = z4rsirr - !iss$); >rte que r et « doivent être des carrés. Qu*on fasse donc 'zszUetszs: uu, on trouvera linn $y = atu^{\wedge}t^{\wedge} - au^{\wedge}$ et $a := s$

The text on this page is estimated to be only 22.29% accurate

188 lî L É M E N 8 parconséquent $y = \sqrt{u}$, $v/\sqrt{u} = t +$ et $x = t^* + \sqrt{u}$ moyennant quoi il est clair que notre formule $x^* = \sqrt{u} + t^4$ p devenir aussi un carré, quand la formule $\sqrt{u} = t^*$ devient carré. Or ce cas a lieu évidemment, quand $\sqrt{u} = i$ et $u = 1$ et nous obtenons par là $oc = 3$ et $jr := a$, et enfin $x^4 - ay^4 = 81 - a \cdot 16 = 49 \cdot 3$. Nous avons aussi vu plus haut que $\sqrt{u} = t^*$ devient carré, lorsque $u = i^3$ et $t = i$, puisqu'alors $\sqrt{u} = a^5$. Si nous substituons donc ces valeurs au lieu de u nous trouvons un nouveau cas pour notre formule $x^4 - ay^4 = 57ia^3$, $\%Xy = a \cdot i^3 \cdot a^39 = 6ai^4 \cdot 4^4$. De plus y dès qu'on a trouvé des valeurs de x et y on peut les substituer à $\sqrt{u}$ et à u dans les formules du n° 1 on obtiendra par ce moyen de nouvelles valeurs de x et de y . Or nous venons de trouver $x = 3$ et $y = a$; faisons de dans les formules n° 1, $i = 3$ et $u = a$, desorte que $\sqrt{u} = 7$ et nous aurons les nouvelles valeurs suivantes, $x = 8i - a \cdot i^6 = ii^3$ et $j = a \cdot 3 \cdot a \cdot 7 = 84$; ainsi $XX = i\hat{U}7S9$, et $X^* = i63o4736i$; de plus donc $yy = 7o56$, et $y = 49787136$; $X^* - ay = 63473089$: la racine carrée de ce nombre est 7967, et elle s'accorde] faitement avec la formule adoptée au commencement, $\sqrt{P} + \sqrt{u}$ car puisque $f = 3$ et $u = a$, $onar = 9$ et $\sqrt{u} = 4$; donc $p = -3a - 43$ et $\sqrt{u} = 73$, d'où Ton déduit $pp + \sqrt{u}qq = fl + lo368 = x^* = 12769$, $yy = L^{\wedge}pqz = z^{\wedge}Qi^{\wedge}$.

The text on this page is estimated to be only 24.49% accurate

d'algèbre. 289 CHAPITRE XIV Solutions de quelques questions
 qui appartiennent à cette partie de l'analyse. \ ns. i. l o us ayons expliqué
 jusqu'ici les artifices qui se pré* jettent dans cette partie de l'analyse, et
 qui peuvent être nécessaires pour résoudre quelque question que ce soit qui
 ^ dépende; il nous reste à les mettre dans un plus grand l^r, en joignant ici
 quelques-unes de ces questions avec leurs idntions. fliS. Première question.
 Trouver un nombre tel que si on f ajoute ou qu'on en reti:anche l'unité y on
 obtienne dans l'un it l'autre cas un nombre carré. Soit le nombre cherché =
 x , il faut que $x - j - i$ et $x \bullet — i$ leviennent séparément des carrés. Supposons
 pour le premier cas $ar + i = pp$, Hons aurons $X' = ipp — 1$ et $or — inrpp — fl$,
 ce qui devra pareillement être un carré. Que la racine en soit ^nc $p' — 9 >$
 nous aurons $pp^a =: pp \sim apg + qq$, «tpar conséquent ikq

The text on this page is estimated to be only 22.28% accurate

» I âg» £ L É M E 11 • au moyen de quoi on obtient OÙ Ton peut donner à q une valeur quelconque même lionnaire. Si nous &isons donc ensorte que $X r \_ ^r M f^* 4 r r s s '$ ftous aurons pour quelques petits nombre9, les valeurs q vent: 'm âi4- Seconde question. Trouver un nombre rc tel que y ajoute deux nombres quelconques, par exemple $^4 \textcircled{R}$ obtienne dans Tun et i^antre cas un carré. n faut, d'après cet énoncé^ que les deux formules, $x \bullet ^ + 7 >$ deviennent des carrés. Qu'on suppose donc la pi on aura $x + 4 = p p$, $x = p p - 4$. \ et la seconde deviendra or, cette formule devant aussi être un carré , soit sa :53a p + ç , et on aura

The text on this page is estimated to be only 12.10% accurate

D A !• 6 £ B R E. igi à'où l'on tirera : «t par conséquent 9— 83?»
+ 9* [Si de plus oa prend pour q luie firaèticm - « on trourepoitr xla valeur
2- -^ — , dans laquelle on peut substituer à r et à 5 tous les nombres entiers
qu*on veut. Si Ton fait t r=i, tf=i, Ipn trouve Mono [Que si Ton demandait
que x fût un sombre positif, on pour.rait faire m on aurait d'après quoi p l'on
fait pona * = 3, r=i. x=i|a. 4 OÙ résultent ces deux nombres î [Yeut«<◇n
que le dernier tenae de la formule

The text on this page is estimated to be only 27.29% accurate

Ils ont L É M E N s et par conséquent ai 5. Troisième question. On cherche une valeur fractionnaire de x , telle qu'ajoutée à i ou soustraite de i^2 elle donne dans l'un et l'autre cas un carré. Puisque ce sont les deux formules $i + \sqrt[4]{x}$ et $i - \sqrt[4]{x}$ doivent devenir des carrés, qu'on suppose la première on aura et la seconde formule $1 - \sqrt[4]{a} = 3 - \sqrt[4]{p}$. Or, comme cette formule-ci doit devenir un carré, et que le premier terme ni le dernier n'est un carré, il faudra tâcher de trouver un cas où la formule devienne un carré; on ne peut pas à en apercevoir un, c'est celui de $p=i$. Qu'on fasse donc $p = i - q$, de sorte que $xz = 2qq - Qq$, et on aura $\sqrt[4]{p} = \sqrt[4]{1 - q}$; et en supposant la racine $= i - qr$, on aura $i + 2q - qq = \sqrt[4]{1 - q} = \sqrt[4]{a}r + \sqrt[4]{a}r^3$ ainsi $a - 9 = -4r + 4r^3$; et $9 = 4r^3 - 4r$; de là résulte $4r^3 - 4r = 9$

The text on this page is estimated to be only 29.31% accurate

d'à L G £ B R E. 193 et puisque r est une fraction , qu'on fasse 2
on aura t et il est clair que u doit être plus grand que L Soit donc $\frac{1}{2}$ par
exemple , on trouvera $xr - \frac{1}{2}$ soit oa aura et les formules seront toutes deux
des carrés. 6. Quatrième question. Trouver des nombres x tels que, soit
qu'on les ajoute à $10^{\frac{1}{2}}$ soit qu'on les soustraie de 10, U en résulte des carrés.
n s'agit donc de transformer en carrés les formules $10 + \frac{1}{2}$ et $10 - X$, et on
pourrait le faire par la méthode qu'on vient d'employer ; mais nous
indiquerons une autre voie pour y parvenir. On remarquera d'abord que le
produit de ces deux formules, ou $100 - xx$, doit pareillement devenir un
carré; or son premier terme étant déjà un carré y il faut en supposer U racine
 $= 10 - px$, d'après quoi on aura $100 - xj: == 100 r - 2opx - f- ppxx; 2. N$

The text on this page is estimated to be only 13.18% accurate

194' 4i t É M E N s donc ior«e n*68t encore que le produit des deux formuks qui devient un carré, et n&n pas chacune en particulier. Mais pourvu que iSiûé devienne un carré, i*autte sera nécessairement aussi tm carré ; or $^{0^1} \_iopp + \hat{a}op + io \_\_\_ loipp + ^P + 0 pp + i PP + ^' ttft$ puisque $pp + f^p \wedge i$ est déjà un tcarré, tout se réduit •à ce que la fraction ■ ■ > ou bien ceDe-ci ,'^ , — r-*i $pp + ^ ipp + ^y$ soit un can^é. li faut pour cela seulement que $lo^4 \sim ^o$ soit lin carré, et on a de nouveau besoin ici de troivver un cas fti €éla ait lieu. On remarquera qu'un tel cas est €'«^ pourquoi on fera €t on aura $loo - f^* ^oq - f- loqq$. Que la racine de ce carre ibft iLO-^^, on ntaià l'équation fiaâla " . •■ ^m âotine ^ w — 10 * d*ràré»iMfat)M:tSa v^eliiai» de p et dé x Soit $f = \pounds$: S, on trouvera J

The text on this page is estimated to be only 23.31% accurate

D* À L G £ B H E. 195 donc et nos formules $10 + a = 16$, $10 - a = 4$ Mais si $a = 1$ on a ainsi or il est indifférent de faire aussi donc $10 - a = 4$ et $10 - a = 4$ quantités qui «ont toutes deux des carrés» 317. Remarque. Si on voulait généraliser cette question, en demandant pour un nombre quelconque a des nombres x , tels que $a+x$ et $a-x$ fussent séparément des carrés, la solution deviendrait souvent impossible, savoir dans tous les cas où a ne serait pas la somme des deux carrés. Or, nous avons déjà vu plus haut que depuis 1 jusqu'à 50, ce ne sont que les nombres suivans qui sont les sommes de deux carrés, ou qui sont contenus dans la formule $x^2 + y^2$: 1, 2, 5, 8, 10, 13, 17, 18, 25, 26, 29, 34, 36, 41, 45, 50, 52, 57, 61, 65, 73, 78, 82, 85, 91, 95, 100, 101, 106, 110, 113, 117, 122, 125, 129, 136, 140, 145, 149, 154, 157, 161, 169, 173, 178, 182, 185, 190, 193, 196, 199, 205, 209, 213, 217, 221, 225, 229, 233, 236, 241, 245, 250, 253, 257, 260, 264, 269, 273, 276, 281, 285, 289, 293, 296, 301, 305, 309, 313, 317, 321, 325, 329, 333, 337, 341, 345, 349, 353, 357, 361, 365, 369, 373, 377, 381, 385, 389, 393, 397, 401, 405, 409, 413, 417, 421, 425, 429, 433, 437, 441, 445, 449, 453, 457, 461, 465, 469, 473, 477, 481, 485, 489, 493, 497, 501, 505, 509, 513, 517, 521, 525, 529, 533, 537, 541, 545, 549, 553, 557, 561, 565, 569, 573, 577, 581, 585, 589, 593, 597, 601, 605, 609, 613, 617, 621, 625, 629, 633, 637, 641, 645, 649, 653, 657, 661, 665, 669, 673, 677, 681, 685, 689, 693, 697, 701, 705, 709, 713, 717, 721, 725, 729, 733, 737, 741, 745, 749, 753, 757, 761, 765, 769, 773, 777, 781, 785, 789, 793, 797, 801, 805, 809, 813, 817, 821, 825, 829, 833, 837, 841, 845, 849, 853, 857, 861, 865, 869, 873, 877, 881, 885, 889, 893, 897, 901, 905, 909, 913, 917, 921, 925, 929, 933, 937, 941, 945, 949, 953, 957, 961, 965, 969, 973, 977, 981, 985, 989, 993, 997, 1000, 1001, 1005, 1009, 1013, 1017, 1021, 1025, 1029, 1033, 1037, 1041, 1045, 1049, 1053, 1057, 1061, 1065, 1069, 1073, 1077, 1081, 1085, 1089, 1093, 1097, 1101, 1105, 1109, 1113, 1117, 1121, 1125, 1129, 1133, 1137, 1141, 1145, 1149, 1153, 1157, 1161, 1165, 1169, 1173, 1177, 1181, 1185, 1189, 1193, 1197, 1201, 1205, 1209, 1213, 1217, 1221, 1225, 1229, 1233, 1237, 1241, 1245, 1249, 1253, 1257, 1261, 1265, 1269, 1273, 1277, 1281, 1285, 1289, 1293, 1297, 1301, 1305, 1309, 1313, 1317, 1321, 1325, 1329, 1333, 1337, 1341, 1345, 1349, 1353, 1357, 1361, 1365, 1369, 1373, 1377, 1381, 1385, 1389, 1393, 1397, 1401, 1405, 1409, 1413, 1417, 1421, 1425, 1429, 1433, 1437, 1441, 1445, 1449, 1453, 1457, 1461, 1465, 1469, 1473, 1477, 1481, 1485, 1489, 1493, 1497, 1501, 1505, 1509, 1513, 1517, 1521, 1525, 1529, 1533, 1537, 1541, 1545, 1549, 1553, 1557, 1561, 1565, 1569, 1573, 1577, 1581, 1585, 1589, 1593, 1597, 1601, 1605, 1609, 1613, 1617, 1621, 1625, 1629, 1633, 1637, 1641, 1645, 1649, 1653, 1657, 1661, 1665, 1669, 1673, 1677, 1681, 1685, 1689, 1693, 1697, 1701, 1705, 1709, 1713, 1717, 1721, 1725, 1729, 1733, 1737, 1741, 1745, 1749, 1753, 1757, 1761, 1765, 1769, 1773, 1777, 1781, 1785, 1789, 1793, 1797, 1801, 1805, 1809, 1813, 1817, 1821, 1825, 1829, 1833, 1837, 1841, 1845, 1849, 1853, 1857, 1861, 1865, 1869, 1873, 1877, 1881, 1885, 1889, 1893, 1897, 1901, 1905, 1909, 1913, 1917, 1921, 1925, 1929, 1933, 1937, 1941, 1945, 1949, 1953, 1957, 1961, 1965, 1969, 1973, 1977, 1981, 1985, 1989, 1993, 1997, 2000, 2001, 2005, 2009, 2013, 2017, 2021, 2025, 2029, 2033, 2037, 2041, 2045, 2049, 2053, 2057, 2061, 2065, 2069, 2073, 2077, 2081, 2085, 2089, 2093, 2097, 2101, 2105, 2109, 2113, 2117, 2121, 2125, 2129, 2133, 2137, 2141, 2145, 2149, 2153, 2157, 2161, 2165, 2169, 2173, 2177, 2181, 2185, 2189, 2193, 2197, 2201, 2205, 2209, 2213, 2217, 2221, 2225, 2229, 2233, 2237, 2241, 2245, 2249, 2253, 2257, 2261, 2265, 2269, 2273, 2277, 2281, 2285, 2289, 2293, 2297, 2301, 2305, 2309, 2313, 2317, 2321, 2325, 2329, 2333, 2337, 2341, 2345, 2349, 2353, 2357, 2361, 2365, 2369, 2373, 2377, 2381, 2385, 2389, 2393, 2397, 2401, 2405, 2409, 2413, 2417, 2421, 2425, 2429, 2433, 2437, 2441, 2445, 2449, 2453, 2457, 2461, 2465, 2469, 2473, 2477, 2481, 2485, 2489, 2493, 2497, 2500, 2501, 2505, 2509, 2513, 2517, 2521, 2525, 2529, 2533, 2537, 2541, 2545, 2549, 2553, 2557, 2561, 2565, 2569, 2573, 2577, 2581, 2585, 2589, 2593, 2597, 2601, 2605, 2609, 2613, 2617, 2621, 2625, 2629, 2633, 2637, 2641, 2645, 2649, 2653, 2657, 2661, 2665, 2669, 2673, 2677, 2681, 2685, 2689, 2693, 2697, 2701, 2705, 2709, 2713, 2717, 2721, 2725, 2729, 2733, 2737, 2741, 2745, 2749, 2753, 2757, 2761, 2765, 2769, 2773, 2777, 2781, 2785, 2789, 2793, 2797, 2801, 2805, 2809, 2813, 2817, 2821, 2825, 2829, 2833, 2837, 2841, 2845, 2849, 2853, 2857, 2861, 2865, 2869, 2873, 2877, 2881, 2885, 2889, 2893, 2897, 2901, 2905, 2909, 2913, 2917, 2921, 2925, 2929, 2933, 2937, 2941, 2945, 2949, 2953, 2957, 2961, 2965, 2969, 2973, 2977, 2981, 2985, 2989, 2993, 2997, 3000, 3001, 3005, 3009, 3013, 3017, 3021, 3025, 3029, 3033, 3037, 3041, 3045, 3049, 3053, 3057, 3061, 3065, 3069, 3073, 3077, 3081, 3085, 3089, 3093, 3097, 3101, 3105, 3109, 3113, 3117, 3121, 3125, 3129, 3133, 3137, 3141, 3145, 3149, 3153, 3157, 3161, 3165, 3169, 3173, 3177, 3181, 3185, 3189, 3193, 3197, 3201, 3205, 3209, 3213, 3217, 3221, 3225, 3229, 3233, 3237, 3241, 3245, 3249, 3253, 3257, 3261, 3265, 3269, 3273, 3277, 3281, 3285, 3289, 3293, 3297, 3301, 3305, 3309, 3313, 3317, 3321, 3325, 3329, 3333, 3337, 3341, 3345, 3349, 3353, 3357, 3361, 3365, 3369, 3373, 3377, 3381, 3385, 3389, 3393, 3397, 3401, 3405, 3409, 3413, 3417, 3421, 3425, 3429, 3433, 3437, 3441, 3445, 3449, 3453, 3457, 3461, 3465, 3469, 3473, 3477, 3481, 3485, 3489, 3493, 3497, 3500, 3501, 3505, 3509, 3513, 3517, 3521, 3525, 3529, 3533, 3537, 3541, 3545, 3549, 3553, 3557, 3561, 3565, 3569, 3573, 3577, 3581, 3585, 3589, 3593, 3597, 3601, 3605, 3609, 3613, 3617, 3621, 3625, 3629, 3633, 3637, 3641, 3645, 3649, 3653, 3657, 3661, 3665, 3669, 3673, 3677, 3681, 3685, 3689, 3693, 3697, 3701, 3705, 3709, 3713, 3717, 3721, 3725, 3729, 3733, 3737, 3741, 3745, 3749, 3753, 3757, 3761, 3765, 3769, 3773, 3777, 3781, 3785, 3789, 3793, 3797, 3801, 3805, 3809, 3813, 3817, 3821, 3825, 3829, 3833, 3837, 3841, 3845, 3849, 3853, 3857, 3861, 3865, 3869, 3873, 3877, 3881, 3885, 3889, 3893, 3897, 3901, 3905, 3909, 3913, 3917, 3921, 3925, 3929, 3933, 3937, 3941, 3945, 3949, 3953, 3957, 3961, 3965, 3969, 3973, 3977, 3981, 3985, 3989, 3993, 3997, 4000, 4001, 4005, 4009, 4013, 4017, 4021, 4025, 4029, 4033, 4037, 4041, 4045, 4049, 4053, 4057, 4061, 4065, 4069, 4073, 4077, 4081, 4085, 4089, 4093, 4097, 4101, 4105, 4109, 4113, 4117, 4121, 4125, 4129, 4133, 4137, 4141, 4145, 4149, 4153, 4157, 4161, 4165, 4169, 4173, 4177, 4181, 4185, 4189, 4193, 4197, 4201, 4205, 4209, 4213, 4217, 4221, 4225, 4229, 4233, 4237, 4241, 4245, 4249, 4253, 4257, 4261, 4265, 4269, 4273, 4277, 4281, 4285, 4289, 4293, 4297, 4301, 4305, 4309, 4313, 4317, 4321, 4325, 4329, 4333, 4337, 4341, 4345, 4349, 4353, 4357, 4361, 4365, 4369, 4373, 4377, 4381, 4385, 4389, 4393, 4397, 4401, 4405, 4409, 4413, 4417, 4421, 4425, 4429, 4433, 4437, 4441, 4445, 4449, 4453, 4457, 4461, 4465, 4469, 4473, 4477, 4481, 4485, 4489, 4493, 4497, 4500, 4501, 4505, 4509, 4513, 4517, 4521, 4525, 4529, 4533, 4537, 4541, 4545, 4549, 4553, 4557, 4561, 4565, 4569, 4573, 4577, 4581, 4585, 4589, 4593, 4597, 4601, 4605, 4609, 4613, 4617, 4621, 4625, 4629, 4633, 4637, 4641, 4645, 4649, 4653, 4657, 4661, 4665, 4669, 4673, 4677, 4681, 4685, 4689, 4693, 4697, 4701, 4705, 4709, 4713, 4717, 4721, 4725, 4729, 4733, 4737, 4741, 4745, 4749, 4753, 4757, 4761, 4765, 4769, 4773, 4777, 4781, 4785, 4789, 4793, 4797, 4801, 4805, 4809, 4813, 4817, 4821, 4825, 4829, 4833, 4837, 4841, 4845, 4849, 4853, 4857, 4861, 4865, 4869, 4873, 4877, 4881, 4885, 4889, 4893, 4897, 4901, 4905, 4909, 4913, 4917, 4921, 4925, 4929, 4933, 4937, 4941, 4945, 4949, 4953, 4957, 4961, 4965, 4969, 4973, 4977, 4981, 4985, 4989, 4993, 4997, 5000, 5001, 5005, 5009, 5013, 5017, 5021, 5025, 5029, 5033, 5037, 5041, 5045, 5049, 5053, 5057, 5061, 5065, 5069, 5073, 5077, 5081, 5085, 5089, 5093, 5097, 5101, 5105, 5109, 5113, 5117, 5121, 5125, 5129, 5133, 5137, 5141, 5145, 5149, 5153, 5157, 5161, 5165, 5169, 5173, 5177, 5181, 5185, 5189, 5193, 5197, 5201, 5205, 5209, 5213, 5217, 5221, 5225, 5229, 5233, 5237, 5241, 5245, 5249, 5253, 5257, 5261, 5265, 5269, 5273, 5277, 5281, 5285, 5289, 5293, 5297, 5301, 5305, 5309, 5313, 5317, 5321, 5325, 5329, 5333, 5337, 5341, 5345, 5349, 5353, 5357, 5361, 5365, 5369, 5373, 5377, 5381, 5385, 5389, 5393, 5397, 5401, 5405, 5409, 5413, 5417, 5421, 5425, 5429, 5433, 5437, 5441, 5445, 5449, 5453, 5457, 5461, 5465, 5469, 5473, 5477, 5481, 5485, 5489, 5493, 5497, 5500, 5501, 5505, 5509, 5513, 5517, 5521, 5525, 5529, 5533, 5537, 5541, 5545, 5549, 5553, 5557, 5561, 5565, 5569, 5573, 5577, 5581, 5585, 5589, 5593, 5597, 5601, 5605, 5609, 5613, 5617, 5621, 5625, 5629, 5633, 5637, 5641, 5645, 5649, 5653, 5657, 5661, 5665, 5669, 5673, 5677, 5681, 5685, 5689, 5693, 5697, 5701, 5705, 5709, 5713, 5717, 5721, 5725, 5729, 5733, 5737, 5741, 5745, 5749, 5753, 5757, 5761, 5765, 5769, 5773, 5777, 5781, 5785, 5789, 5793, 5797, 5801, 5805, 5809, 5813, 5817, 5821, 5825, 5829, 5833, 5837, 5841, 5845, 5849, 5853, 5857, 5861, 5865, 5869, 5873, 5877, 5881, 5885, 5889, 5893, 5897, 5901, 5905, 5909, 5913, 5917, 5921, 5925, 5929, 5933, 5937, 5941, 5945, 5949, 5953, 5957, 5961, 5965, 5969, 5973, 5977, 5981, 5985, 5989, 5993, 5997, 6000, 6001, 6005, 6009, 6013, 6017, 6021, 6025, 6029, 6033, 6037, 6041, 6045, 6049, 6053, 6057, 6061, 6065, 6069, 6073, 6077, 6081, 6085, 6089, 6093, 6097, 6101, 6105, 6109, 6113, 6117, 6121, 6125, 6129, 6133, 6137, 6141, 6145, 6149, 6153, 6157, 6161, 6165, 6169, 6173, 6177, 6181, 6185, 6189, 6193, 6197, 6201, 6205, 6209, 6213, 6217, 6221, 6225, 6229, 6233, 6237, 6241, 6245, 6249, 6253, 6257, 6261, 6265, 6269, 6273, 6277, 6281, 6285, 6289, 6293, 6297, 6301, 6305, 6309, 6313, 6317, 6321, 6325, 6329, 6333, 6337, 6341, 6345, 6349, 6353, 6357, 6361, 6365, 6369, 6373, 6377, 6381, 6385, 6389, 6393, 6397, 6401, 6405, 6409, 6413, 6417, 6421, 6425, 6429, 6433, 6437, 6441, 6445, 6449, 6453, 6457, 6461, 6465, 6469, 6473, 6477, 6481, 6485, 6489, 6493, 6497, 6500, 6501, 6505, 6509, 6513, 6517, 6521, 6525, 6529, 6533, 6537, 6541, 6545, 6549, 6553, 6557, 6561, 6565, 6569, 6573, 6577, 6581, 6585, 6589, 6593, 6597, 6601, 6605, 6609, 6613, 6617, 6621, 6625, 6629, 6633, 6637, 6641, 6645, 6649, 6653, 6657, 6661, 6665, 6669, 6673, 6677, 6681, 6685, 6689, 6693, 6697, 6701, 6705, 6709, 6713, 6717, 6721, 6725, 6729, 6733, 6737, 6741, 6745, 6749, 6753, 6757, 6761, 6765, 6769, 6773, 6777, 6781, 6785, 6789, 6793, 6797, 6801, 6805, 6809, 6813, 6817, 6821, 6825, 6829, 6833, 6837, 6841, 6845, 6849, 6853, 6857, 6861, 6865, 6869, 6873, 6877, 6881, 6885, 6889, 6893, 6897, 6901, 6905, 6909, 6913, 6917, 6921, 6925, 6929, 6933, 6937, 6941, 6945, 6949, 6953, 6957, 6961, 6965, 6969, 6973, 6977, 6981, 6985, 6989, 6993, 6997, 7000, 7001, 7005, 7009, 7013, 7017, 7021, 7025, 7029, 7033, 7037, 7041, 7045, 7049, 7053, 7057, 7061, 7065, 7069, 7073, 7077, 7081, 7085, 7089, 7093, 7097, 7101, 7105, 7109, 7113, 7117, 7121, 7125, 7129, 7133, 7137, 7141, 7145, 7149, 7153, 7157, 7161, 7165, 7169, 7173, 7177, 7181, 7185, 7189, 7193, 7197, 7201, 7205, 7209, 7213, 7217, 7221, 7225, 7229, 7233, 7237, 7241, 7245, 7249, 7253, 7257, 7261, 7265, 7269, 7273, 7277, 7281, 7285, 7289, 7293, 7297, 7301, 7305, 7309, 7313, 7317, 7321, 7325, 7329, 7333, 7337, 7341, 7345, 7349, 7353, 7357, 7361, 7365, 7369, 7373, 7377, 7381, 7385, 7389, 7393, 7397, 7401, 7405, 7409, 7413, 7417, 7421, 7425, 7429, 7433, 7437, 7441, 7445, 7449, 7453, 7457, 7461, 7465, 7469, 7473, 7477, 7481, 7485, 7489, 7493, 7497, 7500, 7501, 7505, 7509, 7513, 7517, 7521, 7525, 7529, 7533, 7537, 7541, 7545, 7549, 7553, 7557, 7561, 7565, 7569, 7573, 7577, 7581, 7585, 7589, 7593, 7597, 7601, 7605, 7609, 7613, 7617, 7621, 7625, 7629, 7633, 7637, 7641, 7645, 7649, 7653, 7657, 7661, 7665, 7669, 7673, 7677, 7681, 7685, 7689, 7693, 7697, 7701, 7705, 7709, 7713, 7717, 7721, 7725, 7729, 7733, 7737, 7741, 7745, 7749, 7753, 7757, 7761, 7765, 7769, 7773, 7777, 7781, 7785, 7789, 7793, 7797, 7801, 7805, 7809, 7813, 7817, 7821, 7825, 7829, 7833, 7837, 7841, 7845, 7849, 7853, 7857, 7861, 7865, 7869, 7873, 7877, 7881, 7885, 7889, 7893, 7897, 7901, 7905, 7909, 7913, 7917, 7921, 7925, 7929, 7933, 7937, 7941, 7945, 7949, 7953, 7957, 7961, 7965, 7969, 7973, 7977, 7981, 7985, 7989, 7993, 7997, 8000, 8001, 8005, 8009, 8013, 8017, 8021, 8025, 8029, 8033, 8037, 8041, 8045, 8049, 8053, 8057, 8061, 8065, 8069, 8073, 8077, 8081, 8085, 8089, 8093, 8097, 8101, 8105, 8109, 8113, 8117, 8121, 8125, 8129, 8133, 8137, 8141, 8145, 8149, 8153, 8157, 81

1⁶ é L é M E N s les fois que a serait un de ces derniers nombres
 , la question serait impossible. La démonstration en est facile. Soit $a^x = pp$
 et $a - x = qq$ ^ l'addition des deux formules donnera ; $ka = pp + qq$; donc il
 faut que aa soit la somme de deux carrés ; or , si 2a est une somme de cette
 espèce , a en sera une semblable -, parconséquent , lorsque a n'est pas la
 somme de deux carrés , il sera toujours impossible que a-j- x et a — x soient
 en même temps des carrés. a 18. Comme 3 n'est pas la somme de deux
 carrés , il suit de ce que nous avons dit , que ^ si $a = 3$ ^ la question est
 impossible. Mais on pourrait objecter qu'il y a peut-être deux carrés
 fractionnaires, dont la somme est = 3; nous répondons que t:ela n'est pas
 possible non plus ; car si Ton avait qq ss et qu'on multipliât par qqss , on
 obtiendrait $5qqss = ppss + qqrr$, où le second membre , somme de deux
 carrés , serait divisible par 3 ; or , nous avons vu plus haut qu'une somme de
 deux carrés ne peut avoir pour diviseurs que des nombres qui soient aussi
 des sommes de cette espèce. Il est vrai que les nombres 9 et 45 sont
 divisibles par 3 , mais ils sont divisibles aussi par 9 , et même chacun des
 deux carrés qui composent tant l'un que l'autre, est divisible par g, yu que
 $9 = 3 \times 3$ » + o% $45 = 3 \times 15$ » + 3»;

The text on this page is estimated to be only 25.18% accurate

d'à l g è b r e. Aor ce:it donc un cas différent et duquel il n'est pas question ici : nous pouvons donc nous en tenir à cette conclusion, que si un nombre a n'est pas en nombres entiers la somme de deux carrés^ il ne le sera pas non plu» en fractions. Lorsqu'au toontraire le nombre a est en nombres entiers la somme de deux carrés , il peut être d'une infinité de . manières la somme de deux carrés en nombres fractionnaires ; c'est ce que nous allons faire voir. 219. Cinquième question. Décomposer en autant de manières qu'on voudra un nombre , qui est la somme de deux carrés , en une autre somme de deux carrés. Soit ff+gg le nombre proposé , et qu'on cherche deux autres carrés , par exemple xx ^tyy, dont la somme xx +^y soit égale au nombre^ + gg*. Il est clair d'abord que si x est ou plus grand ou plus petit que f il faut qu'au contraire y soit ou plus petit ou plus grand que g. On a donc , $x = zf + pz$, $yzng - qz^2$ on aura $jf + ^fp^2 + PP^{22} + gg - ^g^2 + W^2 = jf + ggf$ OÙ les deux termes ff et gg se détruisent ; après quoi il n© reste que des termes qui sont divisibles par z. Âiitô on* aura ^fp + pp^ — ^s? + 992 = o> o^ PP^ + W* = ^g^ *^ ^fp> donc fP + Çfl d'où, l'on tire pour x et y l'w; valeur» suivante» ^ # ^ _am + f(.9

The text on this page is estimated to be only 19.25% accurate

iqS é L É M E N s dans lesquelles on peut adopter pour p et 9
tous les nombres possibles à volonté. Que^parexemple, fi scâtlenoiaSM
proposé, ensorteqne on aura et à cause de pp-^qtl * ^ PP + W ' si on fait
p:=Q, q = i, on trouve aao. 5iiti^^ii^ ^itfon. Si o est)a BOtumedede deux
carrés, trouver de* iïomb#€

The text on this page is estimated to be only 12.34% accurate

D*A L G Ê B R E* ||0 desorte que $a := ia$; mais l'on peut résonâre
ie nombre %6 encore â*ttne infinité de manières en deux ,ç0xxé». jCfr ,
fsaigqpM û nous écrîyxtts dans les formules 4e ci^essçs i Mu aa Ëea de p et
q, etp et au lieu de $x eXy$, nous tronyona $\wedge aft^{\wedge}|- 5(ui^*-\text{— } //)$ lofci + tt —
ni* Maintenant nous pouyotps Jixt>8t^tiieri^^ eï if des nombres
quelconques » et déterminer par là p et 7 » et paicovaémff^ aussi la yaleur
de a Qn^on suppose , par exemple $\wedge$ en aura doue $\wedge \sim \wedge \wedge \wedge \wedge \wedge \wedge$ aai. Mais
afin de résoudre cette question d^mè manier» générale , sQÎt et désignons
Tincomme 'Si^filJimrales $a^{\wedge \wedge}$ si etdoiyeht deyenir des carrés. Faisons 4

The text on this page is estimated to be only 15.89% accurate

aSo É L £ M E N s nous aurons d'abord ensuite ' Donc il faut que
 les carrés s^2 et yy soient tels que $XX^2 = yy^2$ {ce -f- dd^2 }, où en effet
 $s^2 = Qcc - j - dd$ est la somme de deux carrés² puiiqu'on a ■²: .-..■.. '
 $!i\dot{C}cc^2dd) = (\dot{c} + dy + \dot{C}c^2dy. \wedge .\_ \dots \bullet \bullet \gg^{\wedge} . \dots \gg)$. Supposons , poui abrégér *
 $'c+d=f, c - d=g,$ il faudra; que $\bullet m$ ' et cela arrivera² d'après ce qui a été dit
 ci-dessus ; quand $pp + \wedge n$ ' -² $pp + \wedge 9$ On obtient par là une solution très-
 facile , en faisant $p=i, g=i$; car on trouve ' - $\bullet \bullet$ ' . ² $= \dot{C} = g = c - rf, y=f=c+d$;
 parconséquent et il est clair que $a - | - 2; = cc + fH - f - \wedge cd =: (c - J - d'Y^{\wedge}$ et $a -$
 $a = ce + dc\hat{c} - 2cd = (c - d)^{\bullet} . \blacksquare - . \blacksquare \backslash$

The text on this page is estimated to be only 20.18% accurate

D* A L G É B R E. àOl Cherchons une autre solution , en faisant $P = \sqrt{9} = 3$ nous aurons $c^2 - jd^2 + 7c + r^2 \sim 5^2 - y^2 = 5^2$ où c et d ainsi que x et y peuvent se prendre en tnoins, parcequ'il n'est question que de leurs carrés. Or, puisque a doit être plus grand que j^2 qu'on fasse d négatif $\sqrt{9} = 3$. aura $\bullet \dots$. $c + 7^2 c - d^2 = X^2 - g^2$, $y = \dots$. De là résulte $Q^2 + 4cd + Q^2$, , j^2 ; $\sqrt{-1}$ - T et cette valeur étant ajoutée à $a = cc - d^2$, donne $p^2 - 22$ dont la racine carrée est $\sqrt{}$; si Ton , $-14q$ ce $-14cd - ddr$. tj soustrait ensuite 2; de a . il reste $\sqrt{}$ $J = \dots$, carré $\sqrt{}$ 25 ; et on voit qu'en effet de ces deu $\sqrt{j^2} \hat{e}$ devra être un carré. Cette dernière formule est de nature à ne point admettre de solution , à moins qu'on ne connaisse d'avance un cas satisfaisant ; mais un tel cas se présente a^ sitôt , c'est celui de $p = 1$. Soit donc

The text on this page is estimated to be only 7.36% accurate

JIM É L é M E V S on aura $arx + 1 = 1 + 4w + 4?^{\wedge} + 9^{\wedge}$ » ce qui peut devenir un carré en bien des manières. i®> Qu'on en suppose d'abord la racine $zsz i^{-\wedge}qq$, ea ava ainsi $4q + 4qq := ish q$, ou $4 + 4qf ssa d^{*}oà q = \text{---} i$; donc $p = y$ et aprs— .}. a^ Soit k racine = $i - i^{\wedge}(/$, on troiureni jiarcônse^[Qent $9 = \text{---}^{\wedge}$ et $p = i^{\wedge}$ ce qui donne $* = \text{---} 1 >$ comme auparàyant. 3*. Si l'on fait la racine = $14^{-\wedge} 4^{*} 9^{\wedge}$ ^Imi de xetitD^er le premier ^t les d^^^ de;miers .tec^i^s^ ,pn A r d'où Ton tire i dono $4^{\wedge}$ On peut adopter aussi $1 - 5^{\wedge} - \bullet^{\wedge}$ pour 4a -rrane , et . en a dans ce cas »+497 + $4?^{\wedge} + 9^{\wedge} = i - 49 + ^9 + 4\ll^{\wedge} + 9^{*}$; r

The text on this page is estimated to be only 18.66% accurate

d'algèbre. fto3 nais on trouve comme auparayant 5'. On peut, si
Ton -veut, retFancier les éciïx premierl% ;ermes , en faisant la racine :=: ji -
f' ^99 > ^^^ ^^ ^^^^ ilors parconséquent ^ — T> BDun On trouvera un
plus grand nombre de valeurs pour 9, en faisant usage d*une de celles qu'on
vient de déterminer, par exemple, de celle-ci, $9 = — i$; car soit à présent $9 =$
 $— i + r$, on a $p = i + r$; flp=i+r-f-rr;;et.;i*=;^+ir+in-+ar»+r

The text on this page is estimated to be only 16.01% accurate

5S04 é L É M E N S divisant ensuite les termes restons par rr ,
 nous ayons — 8 + Sar = dz 4o +ir :t 8/r ; et en admettant le signe supérieur ,
 nous trouvons '^ — 3a — 8/" Or y à cause de J — T* nous ayons - ai . donc
 ainsi 9". Que à nous aidoptons le signe inférieur, nous avons — 8 + 33r =
 -40 +Jf-8/r, d'où l'on conclut jy-53 '•=3r+H3r' et conséquemment ce qui
 conduit à l'équation précédente. • . ■ ' . 3*^ . Soit 4^ -4-4^^5 la racine de ïa
 formule ; desorte < -' ■ 'il' 1 GH+Sar» — 8rr — 24r+25=i
 6r^+3ar3±:4om!:4or+i 6rComme de part et d'autre les deux premiers
 termes et le nier se détruisent , nous aurons — 8r — 24 = ±:4o" + 16^ —
 40, ou — 24r — 24 ^= — 4^" ^ 4o«

The text on this page is estimated to be only 13.75% accurate

d'algèbre. Soit nous admettons le signe supérieur, nous avons par conséquent $24r - 24 = 4o'' + 4o$; Or $o = G4r + 64 >$ ou $c = r + i$, est-à-dire $r = 1$, $p = i$; éà connu, et qui se reproduira en faisant usage de l'autre igné. 4°. Que la racine soit $5 - \{-fr + g^{\wedge}\}$ et qu'on détermine $st^{\wedge}$, de façon à faire évanouir les trois premiers termes. Puisque actuellement $I 25 - a^{\wedge}r - 8rr + Sar^{\wedge} + i6i^{\wedge} I =^{\wedge}5 + iofr + lOgrr + Qfgr^{\wedge} + ggr^{\wedge} + ffr$, on aura d'abord $^{\wedge} - fl4 = io/$, d'où $/ = -\blacksquare^{\wedge}$; ensuite $-8 = \log + ff$. ou $g = : \_{}^{\wedge} = \_5 = \_{}^{\wedge}$. Quand on aura donc substitué et divisé les termes restans par $'$; on aura $S 32 + i\ll r = 2/g + ggr$, et $r = Y|_{\sim}, \backslash \ddot{e} \ddot{e} A l f / \bullet rr 1 \dots + 24'i7s \bullet''' 32.6a5$ Urle numérateur $s/g'' - oa$ devient ici $=^{\wedge} r - 32.4qS - iG.32.3i^{\wedge} 1 j/ .^{\wedge} = -^{\wedge} \_{}^{\wedge} \_{}^{\wedge} = -^{\wedge} - p$, et le dénominateur $625 625$ lainsi $I |$ et on en conclut $r = \bullet \_{} - V55o \blacksquare r 1 7 J^*a >$ moyennant quoi on obtient une nouvelle valeur de x à cause d'fc $X = pp - I$.

The text on this page is estimated to be only 21.83% accurate

6 L é M E N s. Sixième question. Trouver un nombre x qui, ajouté à chacun des nombres donnés a , b et c , produise un carré;
 Puisqu'il faut que les trois formules $x+a$, $x+b$, $x+c$ soient des carrés, qu'on fasse la première $x+a = z^2$, on aura et les deux autres formules se changeront en $x+b = y^2$ et $x+c = w^2$; il faudrait présentement que chacune de ces-ci fût un carré; mais c'est ce qui n'arrive pas généralement (souvent la chose est impossible, et cette possibilité dépend uniquement de la nature des nombres a , b et c). Si par exemple on avait $a=1$, $b=2$, $c=3$, c'est-à-dire, $a=1$, $b=1+1$, et $c=1+1+1$, il faudrait que z^2 , y^2 et w^2 fussent des carrés, et par conséquent fût une fraction; ainsi on ferait $z = \frac{p}{q}$, et il faudrait que les deux formules $\frac{p}{q} + a$ et $\frac{p}{q} + b$ fussent des carrés, et que par conséquent aussi leur produit $p^2 - q^2$ fût un carré; or nous avons fait voir plus haut que cela est impossible. Voulût-on faire $a=2$, et $b=3$, c'est-à-dire $a=1+1$ et $b=1+1+1$. on aurait, en faisant encore $c=4$.

The text on this page is estimated to be only 22.56% accurate

D*A L G £ B R E. tuyj \& deux formules $pp + \hat{a}??$ et $pp - a^9$ à transformer en carrés ; par conséquent il faudrait aussi que leur produit $p^\wedge - ifl^\wedge$ [evînt un carré ; or c'est ce que nous ayons de même fait voir tre impossible. Soit en général [e plus L faudra que les foi^ihuléè $pp -|- mtiq$ ètpp-^ nqq deviennent les carrés ; et nous Tenons de voit qtte cela est impossible , ant lorsque $ms-f-^\wedge etn\pm=-^\wedge iy$ que lorsqtie $m = -f- a$ et $i = 1 - 3$. Cela est impossible aussi , lorsque car on aurait dans ce cas deux formules ^ dont le produit serait $^\wedge p^* - \cdot /"^\wedge^\wedge^\wedge$, c'est-à-dire la différence de deux bi-carrés , et nous savons qu'une telle différence ne peut jamais devenir un carré. De même ^ quand $m = 5kjf$ et $n = ^!iff$. On a les deux formiiles $pp -f- !^\wedge ffqq$ et $pp - ^ffqq$ qui ne peuvent devenir toutes les deux des carrés^ parcequ'il faudrait que leur produit $p^\wedge - ^Z""**/*$ pût devenir un carré; or si Ton Fait $^\wedge = r$, ce produit se change en $j;K - 4^\wedge^\wedge$, qui est une forintde dont l'impossibilité a été démontrée plus haut. Que si Ton suppose $m^\wedge=si etn\pm\pm st$, ensorte qu'il s'agisse ' de réduire en carrés les formules $pp + qq$ et / âp -f- iàqq \ on fera $pp + qqr=zrr$, $pp + 2qq=ssi$

Soit la première équation donnera et la seconde
 donnera $rr + qq = ss$; donc il faudrait que tant $rr - qq$ que $rr + qq$ pût être
 carré; or l'impossibilité en est prouvée, puisque le p de ces formules, ou $r^2 - q^2$,
 ne peut devenir un carré. Les exemples que nous venons de donner
 suffisent pour voir qu'il n'est pas facile de choisir pour mettre les n qui
 rendent la solution possible. L'unique moyen de lier de telles valeurs de m et
 de n , c'est de les imaginer ou de les déterminer par la méthode qui suit. On
 fait on a par la première équation et par la seconde, $m^2 - n^2 = k^2 - f^2$. Se cela
 posé, on n'a qu'à prendre pour y, g, h et k des nombres quelconques à volonté, et
 on aura des valeurs de m et n qui rendront la solution possible. Soit par
 exemple, $A = 3, f = 5, k = 1$ et $g = 2$, on $m = 2$ et $n = 6$; et on peut être
 certain maintenant qu'il est possible de réduire en carrés les formules $pp - f^2 - qq$
 $^2 + PP$ + puisque cela arrive quand $p = 1$ et $q = 2$, Mais la première formule
 devient en général un carré, si $p = rr + 2J^2, q = z^2$;]

The text on this page is estimated to be only 18.59% accurate

D* A L G £ B R E. S09 car il en résulte La seconde formule devient alors $pp + Qqq == r^* + s^{orrss} + 4^{*^}$; et nous connaissons un cas où elle se transforme en un carré ^ savoir le cas de $p = i$ et $^ = \hat{a}$, qui donne $r = i$ et $i = i^$ ou en général $r = zs \setminus$ desorte que la formule est $= aSs^$. Connaissant donc ce cas^ nous ferons $r = ^ - f^ \wedge > h3r$ hypothèse qui donne $rr = \ll + \hat{u}5(4 - \ll, r \leq 54 + 4^f + 6w \ll + 45t' + t \wedge \wedge$ moyen de quoi les premiers et les derniers termes se détruiront. Faisons de plus $4 = fl /$, d'où $/ \bullet = >$ afin de chasser les termes pénultièmes, et nous parviendrons à l'équation $i(45 + a6^ = icfs - f - io \ll + J9^ = 145 + la^$, ou $a : ? \text{ — — } ^$ et $j \text{ — — } -$; donc $j = \text{ — } 1$ et $t = a$, ou $t = : \text{ — } a^$, et parconséquent $r = \text{ — } 5$ et $rr = ^ss$, ce qui nest autre chose que le cas déjà connu. Ainsi déterminons plutôt $/$, d'après la condition que les seconds termes s'évanouissent : il faudra faire $44 = 10 /$, ou $/ = ^$; a. O '-•.. '\"

The text on this page is estimated to be only 26.60% accurate

filO É L É M E k s et en diviiant ensuite les autres termes par stt , nous aurons $aSs + 4t = zios + ffs + sft$, c'est-à-dire, ce qui donne ainsi $r = 3$, $j = io$; moyennant cela nous trouvons $pzzzskss \text{ --- } rr = 191$, $q = ars = zSo$, «t nos formules seront $pp + aqq^{4368i} = (209)$ » , $pp + ^{(fg = 58o8i} = (a4iy$. afl4- Remarque, On peut trouver de la même manière encore d'autres nombres pour m et $n^{\wedge}$ qui fassent que nos formules deviennent des carrés; et il est bon de remarquer que U rapport de m à n est arbitraire. Soit ce rapport, comme a à b , et qu'on ait $m = .az$ et $n = iz$, il sera question de savoir comment on doit détermiminer z , afin que les deux formules $pp + azqq$ et $pp + bzqq$ puissent être transformées en carrés. Nous en indiquerons lei moyens dans la solution du problème suivant. 2^5. Neuvième question. Si a et $\&$ sont des nombres donnés , trouver le nombre z , tel que les deux formules $pp - f- azqq$ et $pp + ia^{^}$ deviennent des carrés, et déterminer en même temps les plus petites valeurs possibles de p et de q . Qu on fasse $pp - j^* azqq := z rr$ et $pp rf' bzqq z =: ss$, et qu'on multiplie la première équation par b et la seconde par

The text on this page is estimated to be only 15.15% accurate

D-A L G E B R E. SU a, la différence des deux produits fournira
 Téquatioii $(6 - a)pp' = brr - ass$, et par conséquent $brr - ass = pp'^{-t} = a^*$
 et il faudra que cette formule soit un carré ; or c'est ce qui arrive, quand $r =$
 5. Qu'on suppose donc a afin de faire sortir les fractions a on aura $brr^{**} ass$
 $bss + 2ft(ft - a)^f - f \gg \&(\&\blacksquare^{*} \bullet g)^* \hat{a} \{^{*^}$

The text on this page is estimated to be only 9.18% accurate

$MI\hat{U} < L \text{ \pounds } M E N$ f de plus «t par conséquent $p \equiv *4 - \hat{t} \equiv 6(i -$
 $tt)^+ + \langle x - a_6ay \equiv (x - 6y)^* - fl6)y$. Ayant donc trouvé p , r et 5 , il nous reste
à déterminer «. Soustrayons pour cet effet la première équation $pp + azqq$
sa: rr de la seconde $pp - ^bzqq \text{ } zsz \text{ } ss$, le reste sera « $w(6 - a) = \langle - rr = (j$
 $+ r)(5 - r)$. Or $54 - r = a(i - a)ay - axx$, $* - r = a_6(6 - a)jy - a(6 -$
 $a)jy^{\text{tm}}$ « $4.r = aa; (C6 - a)y - x$, et $* - r = a(i - a)j^{\wedge}(6y - ar)$; ainsi $\blacksquare >$ (é
— à) $zqqT = zaxi\{b - a)j^{\wedge} - \langle$. $a(6 - a)j((6y - x)$, on $a\grave{\text{c}}^{\wedge} = \pm ax((6 - a)jf$
— $x)ajf(6y - x)^{\wedge}$ ou $*79 = 4xy((6 - \langle)J' - a)(6y - x)$; par conséquent
 $n s^*a\{\wedge^t$ donc de prendre pour qq le plus grand carré ptf l lequel le $oum\acute{e}f$
ateur soit divisible; mais remarquons premier' l

The text on this page is estimated to be only 20.44% accurate

D* À L G i B R E. aiS rement que nous ayons déjà trouvé
 $pr=zb(^b - a)yy + xx - abxy = (x - Sy)^* - aby$, et qu'ainsi on peut
simplifier en faisant $x=v + by$, ou $X - iy =: v$, puisqu'alors $p = vi/ - aby$,
et ou Moyennant cela on pourra prendre pour vety des nombres
quelconques , et adoptant pour qq le plus grand carré contenu dans le
numérateur , on déterminera facilement la yaleuE.âe z ; après quoi on
reviendra aux équations. $m:=iaz$, $nz=:bz$, et $/i=: vi^ - a5yy^$ et on
obtiendra les formules qu'on cherchait qui est un carré dont la racine est $2^$
La seconde formule devient $pp + 4bzqq = (vi/ - aby + 4i(y (v + ay)(v +$
 $iy)$ ce qui est aussi un carré dont la racine $^ = -- vi/ - âby - aby$, et on
peut prendre les valeurs tant de r que de s positive». Développons ces
résultats dans quelques exemples.

The text on this page is estimated to be only 22.08% accurate

Sl4 i L £ M E N s aa6. Exemple premier. Soit $a = \frac{1}{2}i$ et $i = +i \cdot \bullet$.
 T>*mi ohercbe des nombres z^2 tels que les deux formules pp'^2zqq et $;\}p 4-$
 ^{9} deviennent des carrés; savoir, la première $=77$, et la seconde $=ss$. Nous
 avons donc $p = vv + \frac{1}{2}$, et il ne restera , afin de trouver z , qu'à considérer la
 formule $z^2 - \frac{1}{2}z - \frac{1}{4} >$ nous donnerons à v et à $\frac{1}{2}$ différentes valeurs, et nous
 verrons celles qui en résultent pour ». 1«. a° . 3 3°. A^5* . 6°. 1 V 1 4 5 16 à
 $y^2 - y + \frac{1}{2}zqq$ z 1 1 ■ 3 4 6 5 52 1 5 4.3o 4 3o i3 1 3 5 iS.iS 4 1 9 9.16.5 9 7
 25 36.25.16.7 1 7 9 16.9.14 i6 i5 »7 9.16 5 41 36.a5.i6 7 337 16.9 14 65
 Nous sommes en état, moyennant ces valeurs, de résoudre les formules
 suivantes, et d'en faire des carrés. On peut transformer en carrés 1°. les
 formules $pp - Bqq$ et $pp + 67^2$: cela se fait en supposant $p = 5 e\ddot{i}\grave{c} = a$; car
 la première devient $=25 - 24 = 1$, et la 8econde $=25 + a4' = 43a^\circ$. Les deux
 formules $pp - 5oqq$ et $pp + Zoqq$: savoir, en faisant $p = i3$ et $\frac{1}{2}a$; car la
 première devient $=i6g - 'lao = 49 j$ et la seconde $= 16g - f - i^2o = aSg$. I 1 j

The text on this page is estimated to be only 14.06% accurate

D'ALGÈBRE. flS 3[^]. De même les deux formules $pp - i5ff$
 $^{tj}f \gg \bullet \}''^{^9>}$ car si Ton fait on a la première = $a8g - r - s^{^} = 4d > \textcircled{R}^{^}$
seconde = $289 + 240 = 529$. $^4''^*$. Les deux formules $pp - Sq$ et $^p 4^*$
 ^{9} deviennent pareillement des carrés ; savoir , quand $p=4i$, $\varsigma = la$; car alors
 $pp - 5qq = 1681 - 7^0 = 961 = 31^2$, et $pp + 5qq = 1681 + 71^0 = a^{^i} =$
 $49 \times 5^*$. Les deux formules $pp - *jq$ et $jpp + 7^9$ sont des carrés[^] si $p =$
 337 , $q = la$; car la première alors est = $11359 - ippSoo = 12769 = 1$
 $13^{^}$ et la seconde est = $11559 + 100800 = 214369 = 463^2$. 6^{**} . Les
formules $pp - i^qq$ et $pp + i4qq$ deviennent des carrés dans le cas de $I p =$
 $G5$, $q = ia$; car alors $pp - i4qq = 4^{25} - 2016 = 2209 = 47^2$ et $pp +$
 $i4^q = 4^{25} + 2016 = 6241 = 79^2$. Exemple second. Lorsque les deux
nombres m et Jt sont dans le rapport de 1:2; b'est-à-dire , que $\hat{u}=i^6 = a$, et
qu'ainsi $m = \frac{1}{2}n$ trouver pour z les valeurs telles que les formules
 $pp - 4^{*i}$ et $pp - 4^{^q}$ puissent être transformées en carrés. 4

The text on this page is estimated to be only 26.37% accurate

3i6 É L é M E n s n a érait raperBa ici de faire usage des formules générales que nous avons données plus haut, cet exemple pouyant se i^ duira immédiatement au précédent. En efiTet^ si $pp + zqq = rr$ et $jpp + ix^0qq = ss$; on a par la première équation $ppz=irr-zqq$, ce qui étant substitué dans la seconde^ donne $rr + zqq = ss \setminus lû$ nsi la question exige que les deux formules $rr-^zqq$ et $rr + zqq$ puissent devenir des carrés^ et c'est, comme on voit, le cas de Vexemple précédent. On aura parconséquent pour z les valeurs suivantes $> 6, 3o, i5, 5, 7, i4>$ etc. On peut faire aussi en général une transformation semblable. Car supposons que les deux formules $pp + ^q$ et $pp + nqq$ puissent devenir des carrés, et faisons $pp + mqq:=2rr$, $pp + nqq = ss$; la première équation donnant $pp - rr^ mqq$, la seconde' deviendra $ss:=:rr - mqq + nqq$, ou $rr+ (ji - m) ^9 = 55$; si donc les premières formules sont possibles, ces dernières $rr \bullet ^\gg mqq$ et $rr + (n - m) \varsigma$ le seront de même , et comme m et n peuvent être niis Fun à la place de Tautre , les formule» $rr^{^nqq}$ et $rr+ (m - n) ^\varsigma$ seront possibles pareillement; et au contraire, si les premières sont impossibles 1 les autres ne le seront pas moins. i

The text on this page is estimated to be only 19.92% accurate

D*ALOÉBRE. , 317 8. Exemple troisième. Que m soit à n
comme i:5, ou que te que 'il s'agisse de transformer en carrés les formules
/jp-f-sff '+-5zqq. sque a=i etA = S, ;stion sera possible dans tous les cas où
 $2i?? = 4^y(v+J')(v + 3y)$, /7=:vv— 3jy. adoptons pour v et^ les valeurs
suivantes : $1^a \gg 3 \gg V 1 3 4 y v-f-y +3y zqq 1 4 l6.3 a 5 9 4*9.3o I 5 7$
 $4.4.35 i6 a 4-9 3o 4.4 35 P \hat{u} 3 i3| 4". 4*9 \ll 25.4*2 4.4.9.35 191 4.j.i6.â5$
nous avons ici deux cas pour z^q , ce qui fait que nous)ns transformer de
deux manières les formules pp -f- 2qq + 6qq. première est de faire psa , = 4,

The text on this page is estimated to be only 23.92% accurate

ftl8 B L É M £ N s et parconaequent aussi car nous ayons alors pp
 + !^qq — 9 , pp + 6qq^2S. La seconde manière est de supposer moyennant
 quoi nous aurons* pp + 2qq={ ao9)• , pp + 6qq^ 0»4O*« n est difficile de
 décider ai on ne pourrait pas faire aussi ft=i ; ce qui aurait lieu y quand zqq
 serait un carré. Mais quant à la question , si les deux formules pp^qq et pp-
 ^- Zqq pauvtnt devenir des carrés, voici le procédé qu'elle exige. A2ig . H
 s'agit de rechercher si . on peut transformer ^n canpés» ou non , iesibrmules
 pp -i-qq etpp^\- 5qq : qu'pn soppeM ■ 1 . PP + qq = rr , pp+5qq = ss, et
 qa*OB considère les points suivans : 1*. Les nombres petq peuvent être
 regardés comme pre* miers entre eux ; car s'ils avaient un commun
 diviseur. les deux formules ne laisseraient pas de rester 4es carrés, après
 qu'on aurait divisé p et q par ce diviseur. a*, p ne peut être un nombre pair ;
 car en ce cas q serait .impair, et parconséquent la seconde formule serait un
 nombre de l'espèce 4^1 + 3, qui ne peut devenir un carré; doncp est
 nécessairement impair , et pp est un nombre de l'espèce 8/1 -f' 1 * 3'. Puis
 donc que p est impair , il faut que , dans la première fomude^ q soit non-
 seulement pair, mais qu'il soit mêuEie din* 1

The text on this page is estimated to be only 20.55% accurate

D*À L G è B R E. aiJI siblepar 4) stBn que qq devienne un nombre de Teiica -i6fi, et .^e pp -|- qq soit de Tespèce 87i«f» i . 4®. De plus p ne peut être divisible par 3 ; .<:ar n="" cela="" pp="" serait="" divisible="" par="" g="" et="" f="" ne="" le="" pas="" que="" parcons="" aussi="" zqq="" pourrait="" divis="" non="" donc="" un="" carr="" ainsi="" p="" peut="" sera="" nombre="" de="" tesp="" s="" puisque="" h="" faut="" qu="" soit="" car="" autrem="" l=""> «* parconséquent pp '+- qq vm. nombre de Tespèce S» -f- a , -qui ne peut être un carré ; donc q doit pouvoir se diviser par 3. £^, p n'est pas divisible non j>lu6 par 5 ; car si cela était , q ne le serait pas^ et qq serait un nombre de l'espèce 5n + i ou 5/1 + 4 S parconséquent Sqg bbtsàï de l'espèce 5/i + 3 ou 5n -f* 2 , et comme pp -f- 3^9 appartiendrait.aux mê^le8 espèces^ cette formule ne pourrait devenir un carré ; donc il faut nécessairement que p ne soit pas divisible par 5 ^ et que pp soit un nombre de l'espèce 5/i -f- 1 , ou de l'espèce 5/? -f' 4* 7*. Mais puisque p n'est pas divisible par 5 , ycrysinq est divisible par 5 onction; que si -^ n'était pastlhisiMe par 5, qq serait de l'espèce 5«+â ou 5n^3/comiii€^nbb9^V(îBS"Vti; et puisque pp est 5/i + 1 ou 5/1 + 4 > i^ faudrait que pp'j^iqq fut de même ^ ou 5/i -f- 1

The text on this page is estimated to be only 25.07% accurate

990 t t i M Er n \$ Soit en second Kem I ^^ on anra dant ce cas
 $qq^{\wedge}=z5n+i$ et $5qq = 5n + 3$; donc $pp + 377 = 57i + a$, ce qui ne peut être
non pins un carré. U s'ensuit de là qœ qtf doit être divisible par 5. 8"*. Or q
étant divisible d'abord par 4> ensuite par. 3 et sa troisième lieu aussi par 5 ^
il faut que ce soit un nombre tel que $4*3.57?i$, ou que $^{\wedge} = 6om$; ainsi nos
formules deviendraient $pp + 36oom7n =: rr$, et $pp + 10800mm = SS'$, cela
posé, la première, étant soustraite de la seconde, donnera 1 desorte qu'il
faudra que s 'i-retS'^r soient des facteurs ds 7aoomm; et on doit faire
attention en même temps qu'ft faut que 5 et r soient des nombres impairs, et
de plus premiers entre eux. 9^ . Soit de plus $72bomm = 4fg>$ ou que les
facteurs en soient afet 2g , et qu'on suppose on aura $*=f+g$, rizzf'^g, et il
faudra que f et g soient premiers entre eux , et que $1*011$ soit pair et Vautre
impair. Or comme $^{\wedge}=: 1800mm$, il faudra donc décomposer 1800mm en
deux facteurs, dont l'un soit pair et l'autre impair ; et qui n'aient aucun
coounua diviseur.

The text on this page is estimated to be only 19.23% accurate

d'à L G É B 11 E. Ail 10*. U est à remarquer en outre , que
puisque $rr=pp + qq$, «t qu'ainsi r est un diviseur de $pp -f^{\wedge} qq^{\wedge}$ il faut que
ioit pareillement la somme de deux carrés, et comme ce nombre est impair ,
il faut qu'il soit contenu dans la formule 11®. Si nous commençons
maintenant par supposer $m = i^{\wedge}$ nous aurons $j^{\wedge}=i800 = 8.9.a5$, et de là
résulteront les décompositions suivantes ; $/=i800$, $g = i$, ou $/=a00$, $gs=9$, ou
 $/=:aa5$, $g = 8$. La première donne $r=f—g=z 1799 = 411 -f 5$: la seconde
donne $r=/— g = i9i = 4» + 5*$ la troisième donna mais la quatrième donne
 $r:=/— g'=-ai7 = 4i^{*}+ !$ • Ainsi les troid premières décompositions devront
être exclues ,

The text on this page is estimated to be only 27.58% accurate

AS3 ft L É M E N S et il ne nous restera que la quatrième ; nous
 pouvons en conclure en général^ que le plus grand facteur doit être impair,
 et que le plus petit doit être pair; mais au reste la valeur $r=3i7$ ne peut même
 avoir lieu ici, parce que ce nombre est divisible par 7» ce qui n'est pas la
 somme de deux carrés. l'a*. Soit $n=a$ on aura $a^2=7300=1$: Sa. aaS ; c'est
 pourquoi l'on fera $a'=a-5$, $g=a$, en sorte que et ce nombre étant la
 somme de deux carrés, il vaudra peine de l'essayer. Or comme $9=iao$,
 $r=i95$, et que on aura $r+q=3iS$, $r-7=73$; mais puisque ces facteurs ne
 sont pas des carrés, on voit bien que pp ne devient pas un carré. On perdrait
 de même sa peine à substituer au lieu de m d'autres nombres, c'est ce que
 nous allons encore faire voir. aoo. Théorème. Il est impossible que les deux
 formules $pp-j^2qq$ et $pp-5qq$ soient l'une et l'autre un carré en même
 temps; desorte que dans les cas où l'une est un carré, il est sûr que l'autre
 n'en est pas un. Démonstration. Puisque p est impair et que q est pair, ainsi
 que nous l'avons vu, $pp-5qq$ ne peut être un carré que lorsque $qT=Qrs$ y
 $pz=zrr'^{ss}$, 'i ■ $ttpp'^Zqq$ ne peut être un carré, que lorsque q = fitu,
 $p=ztt - Zuu$, ou $p = Sua - f^{\wedge} \bullet$

The text on this page is estimated to be only 20.17% accurate

$D^* A L O \ddot{E} B a E$. Sfl3 comme dans les deux cas q doit être un double produit[^] on suppose pour l'un et l'autre $q = aabcd$, qu'on fasse pour la première formule $r=iab$, $s = cd$, pour la seconde $t:=aG$, $u = bd^{\wedge}$ aura pour celle-là $p = aai\& \text{ --- } \bullet c c d d^{\wedge}$ pour celle-ci $p = aacC' \text{ - }^{\wedge} S b b d d y$ ou $p = Z b b d d' \text{ }^{\wedge} a a c c$; ces deux valeurs doivent être égales ; ainsi l'on a $a a b b \text{ --- } c c d d = a a c c \bullet \text{ --- } Z b b d d$, bien $* o o i f r \text{ --- } c c c U = :: Z b b d d \text{ --- } - a a c c$ ^ on observera que les nombres a , $i^{\wedge} c$ et $^{\wedge}$ sont généralement plus petits que p et ς . H faudra maintenant considérer ique cas séparément : le premier donne $a a b b \text{ -f- } Z b b d d = c c d d + a a c c$, $b b C a a + 5 d d) = c e (a a + d d)$, ù résulte $b b a a \text{ - }^{\wedge} \text{ - } d d$ oc $a a + 3 d d$ * ction qui doit être un carré. Ôr le numérateur et le dénominateur ne peuvent avoir ici d'autre commun diviseur que $3^{\wedge}$ cequ'ils ont pour différence $Q d d$, Si donc s était un commun $\bullet$ in 1 . $a a$ '4~ $d d$ $a a \text{ --4- } o d d$

sa4 ih É M E N s rément des carrés ; mais les nombres a et d sont <1 ang c impairs l'un et Tautre, ainsi leurs carrés sont de la forme Si et la formule est comprise dans l expression 4r, et ne peut être un carré ; donc 22 ne peut être un diviseur < mun ; le numérateur aa-^ddetle dénominateur aa-)sont premiers entre eux , et il faut que chacun soit de même un carré. Or ces formules sont semblables aux mières ; et si celles-ci étaient des carrés^ il faudrait que formides semblables , mais composées des plus petits nom! fussent aussi des carrés ; ainsi on peut en conclure récq>rc ment de ce qu'on n'a pas trouvé des carrés dans les { nombres , qu'il n'y en a point dans les grands. Cette conclusion cependant n'est admissible qu'autant le second cas ^ aabb — - ccdd := Zbbdd — aacc ; nous en fournira une pareille. Or cette équation donne aabb -f- aacc = Zbbdd -^ ccdd^ ou aa {bb + ce) z=zdd{5bb + ce) , et parconséquent dd bb 'A' ce ce 'A' bb €ia 00 -f- ce ce -h 00 aa Zbb - f- ce "" ce + Sbb ' ainsi cette fraction devant être un catré, la conclusion pr dente se trouve pleinement confirmée ; car si dans de gr nombres il y avait des cas où pp + qq et pp -f- ^qq fussent carrés^ il faudrait que de tels cas existassent aussi pour nombres plus petits , et c'est ce qui n'a pas lieu. 23 1 . Douzième question. Déterminer trois nombres, x,y (tels qu'en les multipliant ensemble deux à deux, et ajouta au produit I on obtienne chaque fois un carré ; c'est-à-dire c

The text on this page is estimated to be only 13.94% accurate

D*ALGÈBRE. a^S s'a^t de transformer en carrés les trois
formnlestsniyantes : $1^\circ. a^{+1}, a^{\otimes}, xz + 1, 3^{\otimes}.jrs-4- i$. Qu'on suppose des
deux dernières Tune $xz -j- 1 =: pp, y$ et l'autre et on aura $z^{*^z} z$. I^a
première formule se trouve transformée par là en celle-ci $i^{\wedge \wedge ' -^i + 1}$, qui
doit parconséquent être un zz carré, et qui ne le sera pas moins si on la
multiplie par zz ; desorte que la formule $\{pp - i\} (^{qq} - i) -f- az$, doit
être un carré, ce qu'il est facile d'obtenir. En eifet^ que la racine en soit $= z -$
 $f- r$, on aura $(pp - O (W - 0 = ara + rr, . et ^_ (pp - O (0($

The text on this page is estimated to be only 14.50% accurate

!lfl6 é L É M E N 8 Mais si Ton demande des nombres «ntiers , il faudra faire h première formule «t supposer alors la seconde formule devient ; $\arcsin \sqrt{4x^2 + J} - H = \arcsin \sqrt{4x^2 - f}$; , et la troisième sera et ellea deviennent évidemmmênt (tes carrés , si i*on fait vu $q_i^p j^a g^c X_j^k$, k spjQo^de est $=Ea5a \pm f^p a^4 - pp$,^ dont k racine est $a^2 dzp$, et la troisième est $5jy - i$; $\hat{a}^i jy - f - pp >$ dont la racine esi $y \pm ip$. Nous ayons parconséquent cette solution très-élégante : $x^2 + 1 = y^2$, d'oà $y = \sqrt{x^2 + 1}$, qui a eu liei ; pour une valeur quelconque de p ; et de plus le troisième nombre se trouve de deux manières $\sqrt{p}$ } isqu*on a Eclaircissons ces réspekats par quelques ^s ^çiples. 1°. Soit $pT = i3y$ on aura $pp - 1 = 58$, et si Ton fait on aura «=12, ou $2 = 0$; ainsi les trois nombres cberckés sont 2 , 4 et is2.

The text on this page is estimated to be only 11.78% accurate

$V^X i \hat{O} t \acute{E} K \grave{E} i 22f !2^{\wedge}$. Soit $p=4^{\wedge}$ on j|pj9- $^{\wedge}l3SlS\}$ maintenant
 ai $0? = 5$ et $^{\wedge}3$; 3, on troiye $2 = i6$ ou $z r= o$; donc les trois nombres
 cherchés sont $3^{\wedge}5$ et $i6 \ll 3^{\wedge}$. Soit $p==:5^{\wedge}$ on aura et si de plus on fait $07 = 3$
 $ft^{\wedge} = 8$; on trouve $2 = ai^{\wedge}$ ou bien $2 = 1\$ d$ où résultent les nombres suivais
 : } , 3 et S y ott S , 8 et $^{\wedge}1^{\wedge} \hat{a}Ss$. Treizième question. On cherche trois
 nombfeif entiers $^{\wedge} x,yetz$, tels que si on a $^{\wedge}ovt\acute{e}^{\wedge\wedge}$ chaque j $^{\wedge}$ roduit de ces
 nombres multipliés deux à deux $^{\wedge}$ un nombre donné a $^{\wedge}$ un obtienne chaque
 fois un catré. Puisque Tes troi $^{\wedge}$ formules suivantes doivenli êtte des carfés $^{\wedge}$
 $l \textcircled{R}$. ory + «> a''' a» 4- a , $^{\wedge}$. yz $^{\wedge}a$, qfk $^{\wedge}$ ont «Ugpose la pre* mière et qu on
 fasse $^{\wedge}$ on aura pour la seconde formule et pour la troisième $^{\wedge}y +yy+y4 -f$
 $^{\wedge\wedge}yy-^{\wedge}$ (ff- $^{\wedge}ppi$ 9t elles deviennent toutes deujic des carrés , si $\varsigma = ^{\wedge} \hat{a}p$;
 ainsi

The text on this page is estimated to be only 20.05% accurate

asS É L i M £ N s c'est-à-dire qu'on peut trouver pour z deux valeurs différentes. a33. Quatorzième question. On demande quatre nombres «ntiers x , y , s et v tels que si on ajoute aux produits de ces nombres pris deux à deux un nombre donné a il en résulte des carrés. Il faut donc que les six formules suivantes deviennent des carrés. 1°. $xy + a$, 2°. $xz + a$, 3°. $yz + a$, 4°. $xs + a$, 5°. $ys + a$, 6°. $zs + a$. Qu'on commence par supposer la première «t quVm preone la seconde et la troisième formule descendront des carrés. Si de plus on suppose $v = x + y - s$, la quatrième et la cinquième formule deviendront pareillement des carrés ; il ne reste donc, que la sixième formule. qui sera $xy + yz + xs - 4ps + flj$ et qui devra de même être un carré. Or comme $flp = ay + a$, cette dernière formule devient $xy + yz + xs - 4py - 3y^2$, et par conséquent il «agit de transformer en carrés les deux formules suivantes : 1°. $xy + yz + xs - 4py - 3y^2 = pp$, 2°. $(x - y)^2 - 4q^2$. Que la racine de la dernière soit $(x - y) - q$ on aura $xy + yz + xs - 4py - 3y^2 = (x - y - q)^2$; ainsi $5a = (x - y)^2 + q^2$,

The text on this page is estimated to be only 21.71% accurate

D' À L G È B R E. SS9 et par conséquent , cya + 3a Soit à présent il en résultera $\wedge$, $\wp\wp + 3a$ on ou et $4\wp\wp + a\wp\wp = (9\hat{1} + 3a) y + a\wp\wp$ — $aa\wp = 3 (\wp\wp + 3a) jf$ — $4\wp\wp$, $\_ a\wp\wp\sim aay W + 3a$ — $4\wp^*$ où f et r sont arbitraires » pourvu que x et y deviennent des nombres entiers; car puisque $p==:jf|-r$, le » notabres 2 et v seront aussi de tels nombres. Le tout dépend principalement de la nature du nombre a, et il est vrai que la condition par laquelle on exige des nombres entiers y pourrait causer quelques difficultés; mais il faut remarquer que la solution est déjà fort restreinte d'un autre côté[^] parcequ'oin a doni[^] aux lettres 2 et v les | valeurs $x+jfdzap$, tandis, qu'elles pourraient en avoir évidemment un grand nombre d'autres. Voici donc quelques considérations sur cette question', qui peuvent avoir leur utilité dans d'autres cas. , $1^{\wedge}$. Lorsque ocy -f* a doit être un: carré, ou •» il faut toujours que les nombres x et[^] aient UjEbrme r.rr [^]s ; si d(mc nous supposons ■ t ■ ■ , l f t ■*: : ■ I».-. $1*1$. V a[>]=ift — occ, yz=dd—ae[^] 3

The text on this page is estimated to be only 11.04% accurate

fi5o i t t u ^ n s nou9 trouYont Soit maintenant ie — p crf = i l ,
nous aurons çt parconséquent opy + fit =? (f t c f * - ^ a c e) \ f i ^ . Si de plus
nous çupposons • et que nous donnions à y * et à ^ des valeurs telles que les
formules $x^{\wedge} \& ' - f - a e t y z + a$ deviendront p^eillement des carrés. Ainsi tout se
réduit à donfaèr tant k b , c, d e i e ^ * 4 f ^ t i g , d e » ; v a l e u r 8 t e l l e s q n ^
lépib^été^ q[ue nous ayons supposée ait lku. 3^ . Représentons ces trois
couples de lettres par les filetions T-, -^ et *2K; elles devront être tellt^ que
6haqu0 dilTérehce d^ deuxd*entre elles soit expriniée p^r iine
fr^ptioq^dontk aonér çateur=* i. Car puisque , . i .il ■ b d ic — de ce €e il
faut , ainsi que nou^ ravonn -vu , que ce numérateur soit r= zh I . Une de
ces fractions au reste est arbitraire , çt il est facile d'en trouver une autre:, de
façon que la condition presr. çpte ait lieu. Soit , par exemple^ la première -
= |, il faudra .

The text on this page is estimated to be only 11.80% accurate

I> A L G E B R E. j5i V 7 que la seconde - lui soit à-peu-près
égale ', A« 7m+2 3/ii-f-i 8 5 11 487n-)-3 5m-f-a ii7n+3 4^71-+- 1 8 I 7 7 "7
i3ni+5Li7m+5 "§m+3 7771 -|-a naaicsBi 4^. Quand on a déterminé
convenablement, les deux fractions - et ->, il est facile d*en trouver aussi
une troisième anace

The text on this page is estimated to be only 16.68% accurate

$a^*5d \ddot{E} L \acute{E} M E N s$. logue à celles-là. On n'a qu'à supposer
 desorte que $f=tt\hat{a}$. $g c +e'$ car les deux premières donnant on a $g c cc^{\sim}ce^{\wedge}$ et
 en soustrayant de même la seconde de la troisième , on aura $f d be^{\wedge\wedge} cd \pm 1$
 $g'' e ce -j- ce ce -f- ee' 5^{\wedge}$. Après avoir déterminé de cette manière les trois
 fractions $h d -f -$, $-$ et $^{\wedge}$, il est facile de résoudre notre question pour trois
 nombres x,y et z , en faisant que les trois formules $xy -\{-a, xz-f-a$ et $yz -j- a$,
 deviennent des carrés : on n'a qu'à poser $x=zl)b - acc^{\wedge}y=zdd - aee$,
 $z^{\wedge\wedge}ff'-^{\wedge}agg$. Qu'on prenne , par exemple, dans la table du $n^* 3$, $-4 \acute{e} \sim L$ d'où
 $-f - i^{\wedge}C 3' e^{\wedge} g^{\wedge}$ delà résultent ces valeurs $a: = 25 - 9a, y = 49 - iGa$,
 $2=144 - 490$, desquelles ont déduit $ocy + az=$. $laaS - 840a + i44a^{\wedge} = (35$
 $- laa)^*$;

The text on this page is estimated to be only 23.49% accurate

$n^{\wedge} A L G \hat{E} B R E. fl33$ ensuite $xz + a = 3600 - liS\hat{a}oa -) - 44^{\wedge\wedge} =$
 $(So - flia)^{*} . ; 3nfin yz'\backslash a:=z 7o56 - 4704a + 78401 = (64 - a8a)^{*} . \pounds 34.$
 Qu'il s'agisse maintenant de déterminer, conformément à notre question ,
 quatre lettres, $x,^{\wedge}, s$ et v , il faudra joindre une quatrième fraction aux trois
 précédentes. Soit donc les trois premières $-, -, -== ' ^$ pt qu'on suppose la
 quatrième fraction $k e+g fle + c'$ de façon qu'elle ait avec la troisième et la
 seconde le rapport prescrit j si Ton fait après cela $x=:bb - ace, yznzdd -$
 $ae, ^{\wedge\wedge}ff - ^S \gg v^{\wedge\wedge}hh-^akk$, on aura rempli déjà les conditions suivantes
 : 1®. $ay + a =$ un carré , $a^{\circ} . xz -f- a =$ un carré , 3®. $j^{\wedge}z + a =$ un carré , $^{\wedge\wedge\wedge}-$
 $y^{\wedge} + a =$ un carré , 5®. $zi/ -f- a =$ un carré ; et il ne reste donc qu'à faire
 ensorte qu'*aussi $xv -\{- a$ Revienne un carré , ce' qui ne résulte pas des
 suppositions précédentes, parceque la première fraction n'a pas avec la
 quatrième le rapport prescrit. Cela nous oblige à conserver dans les trois
 premières fractions le nombre indéterminé m ; c'est par ce moyen j 0t en
 déterminant m , que nous parviendrons à transformer aussi en carré la
 formule $xv + a$. 6°. Qu'on tire donc de notre petite table le premier cas , et
 qu'on fasse $b 3 d Sm *f- 1 ^ c *'ê ai \gg +i^*$ on aura $f 3m + 4 ^{\wedge\wedge} "+ \bullet 5 g \sim "am-$
 $H3' \% ^ 4m + 4^*$

The text on this page is estimated to be only 12.41% accurate

S34 £ L é M E N » cl*où résultent ces détermnations fl «nsi on
W-Hc==9(67n+5)^— elle deviendra = ; parconséquent ïà première donn^ a;
=: II — a ,, et la dernière fournit V = (I/n — a)* — amm. La question est
doàc seulement que xi/ -f~ ^ devienne un carré. Or à cause de ¥'= (II — a),
mu»- * 4^/71 + 4*

The text on this page is estimated to be only 12.12% accurate

P* A L G £ B R E, fl55 PO a a:v + a=(II— a)«m7n — 4(11— -a)
 Im + ^II — 3a; et puis donc que ceci doit être un carré , qu'on en suppose la
 racme==(II — a) m— p; le cacrédé cette qaaiitit^^ étant iîl—aymm^r^a
 (M-r-a) nip + pp, on aura — 4(II--a)l7n + 4n~3«== — fl(n— a)7wp+pp;
 donc /3p-r4n+3fl iî>Olt p = fl + 7, . on trouvera m flî(11— à) ' où l'on peut
 adopter pour t et ^ tela noipbrts quc.Vpn ^oo^f' Si , par exemple , a == i ,
 qu'on fasse I = m = a , on aura >9 et en faisant ç = x , on trouvera 2 , de plus
 * l.a • J * • mais ne nous arrêtons pi^ plus iQngntftRips à cette question , et
 passons à une autre, • Quinzième question. On cherche trois nombres
 x^ y et z, tels que les aonoimes et les difi&reicèâ^de 6és âoihbretf pris
 deux à deux , soient des carrés. La question exigeant qu'on transforme en
 carrés les six formule.» wvaatçs ; i^ a? H-^ya«..àr-f'a'i S^.j^rf-sr, /p. x^y,

The text on this page is estimated to be only 16.20% accurate

a5S é L É M E N s 5°. a;— -Zy 6**. j^ — «, on commencera par les trois dernière^i et on supposera « les deux dernières fourniront déserte qu'on aura a cause de $x - y = qq^{rr} = pp$; ainsi $pp - f - rr$, ou la somme de deux carrés^ doit équivaloir à un carré qq ; or c'est ce qui arrive ^ quand $pz = z^2ab$, $rzzizaa^{bbf}$ puisqu'alors $q = aa' + bb$. Mais conservons encore les lettres p^q etr, et considérons aussi les trois premières formules^ nous aurons $a + jr = ç7 + rr + a$, $r) a : + z = qq + !iz$, $jr + a = 5 rr + a35$. ■ Soit la première $qq + rr + s^ = itt$, moyennant quoi $az = t^ - i^f - ir$; il faudra encore que $W - ^ rr =$ un carré , $tt - ^ =$ un carré ; c'est-à-dire $tt - (aa - W)^ =$ utt carré, «— $(aa + W)^ = iin$ carré; Ht m w 1

The text on this page is estimated to be only 21.24% accurate

d'algèbre. • nZj u bien nous aoroos à traiter les deux formules $f^{\wedge}$
 $\text{--- } o^{\wedge} \text{--- } M \text{--- } f \text{ saa\&ft } t \text{ tt } \text{--- } a^* \text{--- } M \text{--- } fiaabb \setminus$ or comme tant $ce + cW \text{--- } f \text{---}$
 acrf que $c^{\wedge} dd''^{\wedge} Qcd$ sont des carrés[^] il est aisé de voir que nous
 Ltteindrons notre but , en comparant $f^{\wedge} \text{--- } a^{\wedge} \text{---} \ll M$ ayec $cc^{\wedge\wedge} dd \text{ it } aaabb$
 ayec acd . Supposons dans ce dessein $cd = aabb^{\wedge} =^{\wedge} ffgghhkh$, ;t prenons
 $^{\wedge} = ffSS^{\wedge} d = hhkk^* aa = ffhh, bb = ggkk$, ou $a = fh, b = gk$; la première équation
 $^{\wedge} t \text{--- } a^* \text{--- } i4 = cc + cW$; prendra la forme $tt^{\wedge} fiM^{\wedge} g^{\wedge} M = fg^{\wedge} + \forall ki$;' donc ou
 il faudra parconséquent que ce produit soit un carré ; mais comme la
 résolution en serait difficile , reprenons les choses d'une autre manière. Si
 nous déterminons par les trois premières équation* les lettres y et z ; nous
 trou:vons d où résulte $qq = zpp + rr$. Or nos premières formules deviennent
 maintenant

The text on this page is estimated to be only 10.83% accurate

oSg ÉLÉldÈfIS FaiaooB cette dernière desort» quv il ne nous restera à transformer en carrés que les fonHuies $U^{-\wedge}qq$ et $tt^{-f-}/T'^{\wedge}$ Àtais puisqii'S faut q[iie posons $q^{\wedge}r^{\wedge}ina^{-\wedge}bb$, et $p^{\wedge}szaa'^{-\wedge}bb$, nous auront $fi^{\wedge}i^{\wedge}ab$, et parconséquent nos formule» siéront: $tt + \{aa + bby:U^{-\wedge} \hat{a}^{-\wedge} b^* + Qaabhia \pm tlia \ \& \gg fè \ tt + (aa-rW)^* = i^{\wedge\wedge} + a^* + M \text{---} \bullet aaoéissun \text{ carré.}$ Nous n'avons à présent, pour arriver à notre but^ qu'à com^ parer de nouveau $tt + \hat{a}^{\wedge} + \wedge^{\wedge}vec \text{ ce } -f- \text{ dii et } aaabb \text{ ayec } 2ci^{\wedge}$ Soit donc , commet $\wedge^{\wedge}i^{\wedge}e^{\wedge}M\ddot{i}Ti$ et nous aurons $cdzn^{\wedge}n^{\wedge}b$, et il faudra encortf^ que d'où résulte Ainsitoutser^diMtätrowtr deitfcdiff^énces dedeulcbiM;aniéS| savoir/^ — $k^{\wedge}$ et $g^* \text{---}$. W, qui, multipliées Tune par l'autre^ produisent uu carré»

The text on this page is estimated to be only 15.15% accurate

d'alcebhk. aS) 'onàdérons pour cet effet la formule $m^{\wedge} - n^{*\wedge}$
voyons quel» ibres elle fournit , si Ton substitue à m et à, n des nombres nés
^ et faisons attention aux carrés qui se trouveront parmi nombres; la
propriété de $m^{\wedge} - /i^{*} = (mm + 1171) (mm - /wi)$, s servira à construire
pour notre dessein la table qui suit 2 ^ABLE des nombres compris dans la
formule $m^{\wedge} - r^{\wedge}$. r i mm, nn 1 mm-^nn mm-^-nn $m^{*} - 71^{\wedge\wedge} 4 3 5 3.5 9$
1 ' 8 10 1S.5 9 4 5 i3 5.i5 i6 1 i5 i7 3»5.i7 i6 9 7 a5 26.7 fl5 1 a4 a6 16.3. r5
aS 9 16 34 iS.a.i7 4.9 1 •48 5o a5.iG.fl.3 49 iS 33 65 3.5.ii.i3 64 1 63 65,
9.5.7»i5 8i 49 Sa l3o 64.5.13 121 4 117 ia5 a5.9.5.i3 lai 9 lia i3o 16.2.5.7.15
lai 49 7a 170 144.5.17 i44 25 "9 169 1G9.7.17 16,9 1 168 170 16.3.5.7.13
169 81 88 aSo 25^16.S.ll 1 as5 64 161 aSg 289.7.23 1 I "ous pouvons déjà
déduire de là qaelq|i«i^ soludons. £â ît , soit $ff^{\wedge\hat{p}}^{\wedge*} = 4$,

The text on this page is estimated to be only 11.85% accurate

^ éLÉMEMS nous avons soit de plus nous aurons donc alors gi
 — A* = 64.5.i3; tt=64,a5.i69, d'où « = 5ao. ' ainsi Or^ puisque « = 370400,
 /= 3, gr = 9i * = ^> * = 7> nous aurons a = ai, & = 18; p = 117,9 = 765, r =
 756; de tout cela résulte ax = « - } ^ jop -f* 99 = 8S9514. et par conséquent X
 = 434557 \yz=ix — pp — 4^0968, et a = a? — 99 = — i5o538; et ce dernier
 nombre peut aussi se prendre positif ; la d rence alors devient la somme , et
 réciproquement la soi devient la différence. Puis donc que les trois nombres
 c phés soat : j^ = 40.0968 z=i5o568 nous avons a: +jr = 855625 = (925)*
 a;+ 2 = 585225:= (765)» y+ z = 571535 = (756)* et de plus x — y=z
 i3689=:(ii7)* x — z = 284089 = (533)* y — a = 270400 = (520)*.

The text on this page is estimated to be only 16.75% accurate

t d'algèbre; aAi Là table gênons avbns donnée^ ferait trouver èïi
;àr àlorô ^ in a parconséquent de là provient , .- r ax=tt-f-pp+^^ç=95o6a5
+300704+370409 =^1431739; et -, ■ . . . • * £ Or il faut observer que si ces
nombres ont la propriété qu'on exige , ils la conserveront par quelque carré
qu'on les multiplie. Si donc on les prend quatre fois plus grands , U faut
quel bnombres suivans-satisfâdéeat également : $\pm = 3843458$, $y = ao4oS4î2$
 , $a \pm = 1\ 7G1\ 858$; eteoinme ces nombres' sôtit pKis grands que les
précédens, oà peut regarder ceux-ci comme les plus petits que la question
admette. - . : a3S. Seizième question. On demande trois carrés, tels que
la différence dé diiaqué eouple de ces carrés soit un carre. La solution
précédente peut , servir à résoudre aussi cette» iôBiyelle question. En effet,
d i^j^ et a sont dès nombres tels ipie le^ formuWs" suivantes deviennent
des carrés : $1^{**}. x + y\ 9\ iP. x^y; ^: x + i, 4^ \ll j- ^) 5^ y + a, G^{^}.y-^z; ^Êf ^$
MM

The text on this page is estimated to be only 20.30% accurate

^û É L £ M E N s il est clair Que pareîlicment le produit $xx - yy$ de lapremiirtf et de la seconde , le produit d'^X'-'^tt de la troisième et de là quatrième, et le produit $j^{^^} - 22$ de la cinquième et de la sixième , seront des carrés , et parconséquent xx , yy et ^seront trois carrés tels qu'on les demande. Mais ces nombres seraient fort grands , et il y en a saïs doutè^e^aoînâres qui satisfont, vu qu'il n'est pas nécessaire, pour que xx "^^yy devienne un carré, que $x - ^y$ et ^— ^ soient des carrés; car, par exemple, aS — g est un carré, quoique ni 6 -f- 3 ni 5—3 ne soient pas des carrés. Ainsi résolvons la question indép^H damment de cette considération , et remarquons d'abord qu'on peut prendre 1 pour Tun des carrés cherchés : la raison en e^ que si les formules $xx^{^^}yy$, $xx - zz$ et ^^ — 2» sont des carrés, elles ne le seront pas moins, si on les divise par zz } parconséquent on peut supposer qu'il s'agit de transfoimer Ht k $XX - ^j - ^ - 1$, et -^ — ' 1 . et la question né toà» à * ftS ZZ ZZ ' zz X V présent que sur les deux fractions - et •=^ . z z^ Of si nous ^pfjfosoni ' * ■ î X' pp-f- 1 y qq Hr ' z pp — 1 ^ ^ 97 — 1 ^ * ' * les deux dernières conditions se trouveront remplies > pwqÉMi de cette façon $XX I^{pp} z^{^} (^{qq}—iy j$ Sous ces hypothèses , il ne nous reste à tijait^t que la pre-^» j Wière formule ,. ,. mj. : jc< \pp—\'qq-~ij\pp--i 'il—^/

The text on this page is estimated to be only 18.76% accurate

$b^* \Delta L 6 \epsilon^{\wedge}$ it is: 243 le premier facteur est ici $= 3 - \sqrt{v}^{\wedge} r$, le
 second $r = - \sqrt{HH \sim PP}^{\wedge \wedge}$]g produit de ces deux facteurs ($pp - iXqg -$
 $iy 4ippqg - O (OT \blacksquare^{\wedge \wedge})$: Orivoit que, dans ce produit, dénominateur est déjà
 Un carré $^{\wedge}$, et que le numérateur ren * me le carré $4' >$ donc il ne s'agit que de
 transformer en carré formule $\{ppqq - \wedge\}(97 - PP) > \wedge \wedge \wedge^{\textcircled{R}}^{\wedge}$ celle-ci $>$
 $ppq - i)(- - 1)$, et on y parvien $^{\wedge}$ a en faisant $r, a - t \pm J \Delta. 2 - \ddot{E} + : \ddot{E} .. \bullet \gg - \blacksquare$
 isque dans ce cas chaque facteur devient, dépairément un rré. Pour s'en
 convaincre, on remarquera que e parconséqnt le produit de ces deux
 fractions doit être carré, qu'il doit l'être aussi étant multiplié par
 $4ffgg \gg h h k k$,)yennant quoi il devient $= fg (^Jf - 4^{\wedge} gg) ftk (hk - f - Ai)$; suite,
 que cette formule (levi $^{\wedge}$ nt tout-à-fait semblable à celle 'on a trouvée
 précédemmeilt, si l'on fait $^{\wedge}$ isqu'alors on à qui a lieu, comme nous avoçs
 vu; pour $aa = 9, 6\hat{O} = 24$, $ce = 3S 81$, $c\hat{c}\hat{c} = 4g$; $\bullet \ll. \bullet : / >$

The text on this page is estimated to be only 12.89% accurate

fl44 EL £ MEUS Ainsi ^ d*oii résultent ces valeurs }e produit de oes deux équations donne 63. i3 i3.i3 ^, ., i5 et on en Conclut que desorte que nous arona n-4 X pp-'h i 4^ y W + i *^5 . 2 np-* -i d*»" ^ aà — 'i i53* 4ift iH5s r iS 17.. a6o G5- l pais donc que faispns^ àVeifet d'obtenir desnonibres entiers ;« t=i53, ' ; et nous aurons ^ — — 697 > ^^ = r85. Donc enfin les trois nombres carrés cherchés sont' XX a^ 4^5809 , et , en effet,^ xfx^^yy2=. 45i 584 = (^7»)* yy'=- 34226, yy — zz, := io8iG=(iô4)* zz = 525409 , XX — ' zz = 4G2400 = (680)*. . x^ , , ... — — • i> Il est évident dé plus que ces carrés sont beaucoup plus petits que ceux que nous eussions trouvés, en carrant lés'ti'ois nombres x ^y et z de la solution pi:écéd^i;ite. 237. On nous objectera sans doute ici que cette solation lit été tj-ouvée que par un ^ simple tâton Peinent, -puisque nous 31 \ »•

The text on this page is estimated to be only 21.14% accurate

n * A L G è B R B. a45 LYons fait usage de la table de l'art. 1335. Mais nous répondrons pie nous ne nous sommes servis de ce moyen , qu*afin de parvenir aux plus petits nombres possibles ; car si on voulait ne pa^ ivoir égard à la brièveté, il serait facile, moyennant les règles données ci-dessus^ de trouver une infinité de solutions. En effet, ayant trouvé $Xp + 1y^7 + 1^{\%}pp - i'zqq - i'$ nous avons réduit la question à celle de transformer en carré le produit $(fpqq - i)(2i - ij)$. si donc nous faisons $2 = r7ij4^*puc == mp$, notre formule deviendra $(vnmp'^{\wedge} - i)(mrti - i)$, ce qui est évidemment un carré , -quand $p = z : i$; mais de plus nous allons voir que cette valeur nous en fera connaître d'autres , si nous écrivons $p = i + -^{\wedge} > nQw^{\wedge}$ avons , en conséquence de cette supposition, à transformer la formule . $(mm - 1) \cdot (mm - i + fynms + Gmmss + /^{\wedge}mms^{\wedge} + mms^{\wedge})$; elle ne sera pas moins un carré , si on la divise par $(mm - i)^*$; cette division nous donne $+ J^{\wedge}mms$, $Gmmss$, $Amms^{\wedge}$. , $mms^{\wedge} mm - 1 mm - i mm - i mm - i * 1 r r \bullet mm$, . : .i": . . . -« etsi, pour abrégé, nous taisons — '■ , = û, nous aurons à $mm - 1$ réduire en carré la formule $i + 4^{\wedge} + Gass - f - 4^{\wedge\wedge} + ^{\wedge\wedge}$. Que la racine «n soit $i + /^{\wedge}$.rf- gss, dont le carré est $i + zfs - f 2^{\wedge 55} + ffss + Qfgs^{\wedge} + ggs^{\wedge}$, et qu'on détermine/ et g de manière que les trois premiers termes s'évanouissent , savoir: en faisant 3

The text on this page is estimated to be only 11.73% accurate

fi[^]S É L é M E N'S les deux derniers termes fourniront
 Téquatia^a 4a + as = afg + ggs d*où résulte 4a -[^] affç 4[^] — 1 aoa + Se* gg
 — a 4[^]+ — lao[^] + Qoa — r « ' ^{^^} 4* — laa + 8aa 4 ([^]û — i) [^] 4^{^^} — [^]2 9
 = i*3? fioo5 — 494./'t îi** . Spit zn = 1 , on aura [^] = 4.-[^]=-[^]. i3 •5 11 ' *• »
 P[^]rconséquent âS çt on a tout ce qu'i[^] faut pour déterminer le« fractions [^] et
 -[^]

The text on this page is estimated to be only 17.86% accurate

D' A L G i B f C. s47 Il est i^n cas p^rtiçpHer qui mérite que nous y fassions attention ; c'est celui où a est un carré , et il a lieu , par exemple, quand $m = I$; puisqu'alors $a = f$. Si nous faisons encore ici $>$ Jour abrégé, de sorte que notre formule soit $i + 4^bs + Bbbs + 4bbs^2 + bbs^3$, nous pourrions la comparer avec le carré de $i + zbs - f^s$ c'est-à-dire avec $i + 4^is + Qbss + 4*1^{ss} + 4*^{sss} + ^{sss} >$ et effaçant de part et d'autre les deux premiers termes et k Jernier , et divisant les autres par. w, nous aurons $Gbb + 4bbs = ai + 4i< + 4b^s$, d'où résulte $Gbb - Qb - 4b^5 - I > - gy^ - . 4b - 4bb . - SLbb^{b'}$ ou bien cette fraction étant divisible encore par $6 - i$, nous aurons enfin $1 . - aJ - 2bb 1 - Qbb S = ,p=.,^j_$. Remarquons 45ue nous aurions auséi pu adopter $i + ^bs + ^5*$ pour la racine de notre formule ; le carré du trinôme étant $1 - f - 4*^ + ^bss + 4if^^{ss}$ aurions effacé le premier et les deux derniers termes ; et divisant les autres par s, nous serions parvenu^ à l'équation $4bb + > Çbbs := 46 + s^bs + 4bbs$. Mais comme cette équation nous aurait donné $^5 = - 2 , p - - 1$; par conséquent $PPrr^{^o} > è •$

The text on this page is estimated to be only 16.97% accurate

d48 £ L É M E K s et nous ne pourrions tirer de là aucune
concluBion , pnisq[^]ii devient = o. I* Pour revenir donc à la solution
précédente , qui a donn[^] |« 1 — zbb con[^]pie / (elle qous ii[^]dique que
[^]im^{^^^}y on a » parconséquent • fl38. Dix-septième question. On cherche
trois nombres cati xés [^] tels que la somme de chaque couple \$oit un carré.
Puisque ce sont les trois formules arx +j;y , a:jî + »5Cl yy -j- [^]z, qu'il s'agit
de transformer, diyisons-les par za, afc) *d'avoir ces trois autres : 1?. -: —
4- jO[^] ::[^] un C5[^]n:é , ll[^] [^] -f- i = un carré, [^] ZZ *' ZZ ' ZZ ' 30 yyi j [^]= un
carré. ' ZZ ' Qn satisfait aux deux dernières , en faisant ft la première
formule se change en celle-ci, 'y ' — " [^] --JL [^] qui doit Quçsi être un carré,
si on la multiplie j par [^]pqq , c'est-à-dire qu'il faut que qq {pp — 1)* -f' fP
(?9 — 1)* = un carré ;

The text on this page is estimated to be only 18.69% accurate

d'à L 6 é b r e. %49 pt c'est ce qui ne peut guère s'obtenir ^ à moins qu'on ne con^ caisse d'ailleurs un cas où cette formule devient un carré ; et fcomme il est difficile de le deviner^ il faudra avoir recours? ai d'autres artifices dont nous allons rapporter quelques-?, nns. i"*. Comme la formule en question peut s'exprimer ainsi, $W (P + 0*(P \sim 1))^* + PP (9 + 0*(9 - O^* = ^\langle n \text{ carré};$ qu'on fa3se ensorte qu'elle soit divisible par le carré $(p - f - i) >$ on l'obtient en faisant $q - i - p + i^{\wedge}$ ou $9 = p + a^{\wedge}$ car alors et la formule devient $Cp + a) \gg (p + i) - (p - i y + pp(p + 3)^* (p + 0^* = "n \text{ carré};$ 3e sorte qu'en divisant par $(p + i)^*$, on a $(p^{\wedge \wedge} a)^* (p - i)^* + PP (P + 3)^* >$ ce qui doit être un carré, et à quoi on peut donner la forme $sp^* + Sp' + 6pp - ^p - \backslash - /^{\wedge}$. Oir'le dernier terme étant ici un carré, supposons que la racine de la formule soit $a + ^ + gpp$ ou $gpp - \{-fp + fl$, dont le carré est $ggp^{\wedge} + afgp^{\wedge} + 4gPP + JfPP + 4/p + 4 >$ et nous chasserons les trois derniers termes, en faisant $- 4 = 4f$, d'où $f = - 1$, et $6 = r4\hat{e}'' + \gg >$ d'où $g = f$; îes premiers termes étant divisés par $p^{\wedge}$, donneront ensuite $sp + 8 = ggp + a/\hat{e}r = rfp - ^{-} \bullet Ro^{\wedge}$ trouvons par là $p = - a4 > \zeta = -^{\wedge} aa ; \% >$

The text on this page is estimated to be only 15.34% accurate

aSo É L é M E N i ^oiic enfin et ' Faisons maintenant pous aurons
 . rt = 575.ii, j^:=483.ia* et parconséquent les racines des troia carrés que
 nous clier*' chons^ seront : 07 = 6325= 11 .23. 25-, j^ = 6796 = 12 .21 . a5;
 z = 5a8 = 3 . 1 1 . 16 ; car il en résulte : xpc^iry = 23* (275* + 252»)=
 23*. 373*. orx 4. az= 11^(575*+ 48*) = 11». 577*. yy + zz= 12» (483* +
 44") = 12». 485*. 2**. On peut obtenir encore d'une infinité de manières^
 que notre formule soit divisible par un carré ; qu'on suppose , par exemple ,
 ((/Tf-i)*=4(/?+i)*, ou + i=2(p+0> c'est-à-dire ^ = 2p -J- 1 ,ou ^ — 1 =2/7, la
 formule deviendra i^p+iyip + iyiP'^iy+pp.4.(ip+iy {4ppy=zun carré, t.

The text on this page is estimated to be only 13.58% accurate

fi * A L G è B R E. âSf ^ qu'on ptiut diviser par $ip + i Y$,
 moyennant quoi $Ton \wedge \zeta op + J) * (P \sim \wedge) * "f" \wedge \wedge P \wedge \wedge "o$ carré, m
 $S L op \wedge , ' \wedge 4 f \wedge - i \wedge - 3 / 3 p - f' \hat{u} p + 1 =$ un carré ; Forninle (le.Uqudle on ne
 peut tirer aucun parti. 3*. Failionsclonc plutôt $(9 - iy = 4(p + i)^*$, ou $9 - i$
 $= 3(p+i)$, lous aurons $q = ap+3$, ou $7 + i=2p+4=2 (p + a)$, it nous
 obtiendrons, après avoir divisé notre formule par $(p-f-i)^{**}$:ett€ autre
 formule : $(ap + 3)^* (p - r- 1)^* + i6 pp (p + a)^ 3u g - 6p + 53pp -f- GSp'$
 $+ aop^*$; que la racine en soit $3 - p 4-gpp$, dont le carré est $9 - 6p + Ggpp$
 $+pp - \wedge gp \wedge + ggj \wedge \backslash$ les deux premiers termes s'évanouissent^ et nous
 chassons le Toisième en faisant $53 = 6g + i$, ou $g=\wedge i$ f ainsi les autres termes
 se divisent par p et donnent $aop+68=g'g-p - ag$, ou $\wedge = \wedge p$; donc ^u moyen
 de quoi nous obtenons une nouvelle solution. /f*. £(i l'on veut faire pna f\ la
 formule après avoir été divisée par $(p - i)^*$, devient $\bullet (\wedge \wedge)^* (/ > +. \ddot{i}) \bullet -f ff$
 $w (ap + O^*$;

The text on this page is estimated to be only 14.26% accurate

\ dS^ £ L É k E Kf S multipliant par 81 , on a où le premier et le dernier terme sont Vim et l'autre Ses càrris,* Qu'on suppose donc la racine = aopp — 9P + 5 > dont le carré pst 4oqp^ — 3Gop5 ^ lacpp -f' 81 pp — 54p + 9> on auri^ fr U donc 47ap + 73 = — 3Gop + 2Q1 ; P = T3* 9-r-17 On aurait aussi pu prendre pour racine aopp + 9P — 3, ce qui est celle de 40op* + SSop'» — isopp + 8ipp — 5^' + 9> mais en comparant ce carré ayec notre formulé ^ on aurait trouvé r 47sp + 73 = 36op — 39 , d'où p = «-f- 1 , valeur qui ne peut nous servir. 5*. On peut faire aussi que notre formule soit même divisiblt par les deux carrés (p -f- 1)• et (p-^— 1)• en même temps. Qu'on fasse pour cet effet ^=2L±I,d'où9+i=ei±^±i±i=^^^^ p+t «t _i=Çi p + t p+ P+t p+t la formule se divisera par (p 4- 1)* (p — 1)*> et se réduira + PP ^ ' ^ » " ~ ^ - ^ ^ ^ — ^; 81 on multiplie par ip + ty - ^ ^ \p + ty (p + f)^, il faudra , comme auparavant , que la formule puisse devenir un carré, et on aura (pf+i)* (p + O^* +PP(^+ ^^ (t — 1)% ou Up^ + Qi;(^Uji-' 1)p^ H-Qtpp + (« •4- ^ yPP + Ç^tt — lypp + 2t {tt + i)p + tt,oiL le premier et le dei^

The text on this page is estimated to be only 6.31% accurate

•u 1^' A L G É B R É. dS\$ et termes sont des carrés. Qu'on prenne donc poir racinri >p -f- (tt + 1) p — t , ce qui est celle du carré ttp^ + ai 1 aura ^ en comparant, àf^ + (tt+ i)*p + (tt-^i)*p + â«(tt+ i) . ^r- »ttp + itt,-iT .1 Yp — saXitt + 1) i U 4^^+ (« -- 1) *p + 4K^^ + O = Oi (« + i)V-(-4^ (« + i) =o^ i'est-^à-dire,' •- *• * P le là résultat p=: ZL* l'ouè "'^/ -5^^-f^i _1/ ^ — ^^ f^ -- rf *-• < ■ ■ innn aussi et la lettre f est arbitraire. I- 1 f ■> I Soit^ par exemple i t^=za, on aura . » . - 1 • • • — é 8 ' — il ■" = -1 ainsi p = -r ' '^ = -7 ' 1 : : « — ap ~ y»' ' ^ -£ ^-^^ — ^» *.'*.s*> . ^ ?

The text on this page is estimated to be only 14.53% accurate

$\sqrt[3]{a^3 + b^3 + c^3 + 3abc}$ et les racines des trois carrés cherchés sont
 $a = 3, b = 4, c = 5$. On voit qu'elles sont encore plus petites que celles que nous ayons trouvées ci-dessus. « Il en résulte que si $x^2 + y^2 = z^2$, $3x^2 + 4y^2 = 5z^2$ ou $5x^2 + 4y^2 = 3z^2$, on a nécessairement x, y, z multiples de 60. Une dernière remarque que nous ferons au sujet de cette gestion, c'est que chaque solution en fournit aisément une nouvelle; car lorsqu'on a trouvé trois valeurs a, b, c telles que $a^2 + b^2 = c^2$, $3a^2 + 4b^2 = 5c^2$ ou $5a^2 + 4b^2 = 3c^2$, les trois valeurs suivantes satisferont pareillement, savoir $X = ab + yz, Y = bc + xz, Z = ac + xy$, il faut que $X^2 + Y^2 = Z^2$, $3X^2 + 4Y^2 = 5Z^2$ ou $5X^2 + 4Y^2 = 3Z^2$. Or, comme nous tenons de trouver $a = 3, b = 4, c = 5$, $x = 3, y = 4, z = 5$, nous avons d'après la nouvelle solution, $x = 3, y = 4, z = 5$. Et toutes ces trois valeurs étant divisibles par 60, on en tire de nouvelles solutions en multipliant par 60.

The text on this page is estimated to be only 16.01% accurate

ty^k L G È il lei t: ii5S irréduisent aux suivantes , ou qui sont encore moindres que telles qu'a données la solntidn précédente , et il en résulte vx '+-yy=z 71 289 = 267[^] , XX -f- 2* = i5Ga5 == ia5* , yy -j- zz=: 5g53G = 244** 239. Dix-huitième question. On cherche deux nombres ± et j[^], tels que l'un ajouté au carré de l'autre, produise ttà carré ; c'est-à-dire que xx + y et jy + x soient des carrés; Si on voulait commencer par supposer cèx+y=pp, et en déduire «n aurait pour l'autre formulé , p* — sippxx + X* + X = un carr[^] ^ ' et il serait difficile de la résoudre. Qu'on suppose donc en même temps l'une des deux formule! XX + y = ip — Jcy =pp — apx + XX, t% f autre yy + x::=:zÇq[^]yy = qq[^]Qqy+yy, # on obtiendra par là les deux équations suivantes [^] ■ * ' ■ • ■ -' ^ i •• ■■••- ■■ i*. y + npx =[^]ppy 2*. X + aqy = qq/ desquelles on tire aisément[^] ^ _!iqpp—qq . __apqq — pp 1 •>• (

The text on this page is estimated to be only 13.53% accurate

mSG E L £ m e n s où p et 7 sont indéterminés. Qu'on suppose donc, par ezenipléj $p=a$, $q=5t$ on aura les deux nombres cherchés $x = 1A V$ — $\hat{i}J^i$ mo^{^^}énnànt quoi $\wedge \bullet \wedge nrj$ — $5*9 \gg^{\wedge} *3 5*9$ — $\backslash^{\wedge} 3J f$ Si on faisait ' on aurait d: = — tV s • ., l r ai. > ' J'. $T^{\wedge} * 1 1 *$ solution qu'on pourrait lie pas admettre[^] parceqae l'un del nombres cherchés se trouve négatif Mais soit nous aurons n -m • • . $\wedge$ — $\hat{a} \hat{o} > \wedge'$ — tof d'où nous dérivons. --r-r 4. V — $\wedge$ -L. J~ M2 — $C^{\wedge} i * j ' \bullet * * * *$ $T^{\wedge} J^{\wedge}$ — $Z \hat{o} \hat{o}^{\wedge} l o$ — 400 — VaoJ / ' ■ et ,. •» vv -4- X — -iL -L. $\wedge \wedge -^{\wedge} J i^{\wedge}$ — r-S-V JJ « $\wedge$ 100 1[^] a o — *- 1 o o V 1 o [^] • 246. Dix-neuvième question: Trouver deux nombres $df > r$ À la somme soit un carré, et dont les carrés ajoutés ênsèmole[^] produisent un bi-carré. Nommons ces nombres a: et $j^{\wedge}$; et puisque $xx + W$ doit devenir un bi-carré, commençons par en faire un carré, en supposant / $\wedge x = pp'^{\wedge} qq$, $y = apq^{\wedge}$ kia. moyen de quoi M 1

The text on this page is estimated to be only 20.96% accurate

D* A L G È B R È. 25^ Or, ^dùr que ce carré devienne un bi-carré j il faut que pp -f- 99 soit un carré ; continuons donc en faisant p = 5 rr — * w ^ ç = ars, aEn^e f^ présentement nous avond ce qui est un bi-carré. Or^ suivant ces suppositions, nous avons il nous reste parconséquent à transformer en un carré la formule Imaginons que sa racine soit rr -f- ar^ -f- 5^ , ou la formule égaie au carré r* + 4^^s + 6rrss + 4rs^ + ^# nous pourrons élTacer de part et d'autre les deux premiers et le dernier terme , et diviser les autres par rss ; ainsi nous aurons 6r+4î = — 6r — 4^, ou iflr + 8ff=o> desorte que ^— g- — — 5,r. Ifous poumons aussi supposer la ratine z=z rr -^ ars '•^^ ss , en égalant la formule au cane r* — 4^^s + Grrss — 4'''^ + ^ î de cette manière le premier et les deux derniers termes se dé^ truisant des deux côtés ^ nous aurions, en divisant par rrs, les autres termes , 4r — 65 = — 4'* + 6^* ou 8r=iiw; parconséquent a. R

The text on this page is estimated to be only 14.95% accurate

v ^58 EL é M £ N s ainsi dans cette seconde supposition , si nous trouverions a; = — 115, ou une valeur négative. Mais faisons à présent ' r=is+t, nous aurons pour notre formule Donc »^— ^— »— — — Il I ■ ■ Il mm^iim^m^mmm J^/^r^ s— ^5* + si,jsH + lissst 4. / ^i? — Qrrss = — ^^ — 18^^ — Qsstt ^^r^ = — is^— 4^t + 5^ = 4. 5^; donc la formule = -^s^ + ^s^t + ^sstt 4.10^*' + ^. Cette formule doit aussi être un carré , si on la multiplie par iG, moyennant quoi elle devient ^♦ + 2965^^ + 408-'^^^ + iGo5t^ + iQt^, Egalons-la au carré de ss + i^e^st — 4^f, c'est-à-dire à'^" + aqG^t + aiSgG^^W — iiiJ^t^ -f- iGi^; nous voyons les deux premiers termes et le dernier se détruire des deux côtés, et nous parvenons par là à l'équation 218965 — 1 184^ = 4085 + iGot, qui fournit ^ ' ^ 13 A4 .?^f 84. ■ 7"~'*»4î,« '537» i34i*

The text on this page is estimated to be only 6.44% accurate

$t > *A L G \acute{E} \grave{A} R \grave{E}.$ \s donc que »us aurons $r = |j r + t| = i46g$,
parconséquënt $x = :ri \text{ — } 6rrss + 5^{\wedge} ==: 4665486037761 / y = 4r^5 -^ 4rs^{\wedge}$ rin
1 ©61 652293520; û5g

The text on this page is estimated to be only 28.84% accurate

%to É L £ M E N s 2 a u CHAPITRE XV. Solutions de quelques questions où Von demanda des cubes. • $2^4 1 \cdot 1.$ O u s avons traité dans le chapitre précédent quelques questions où il s'agissait de faire ensorte que certaines formules devinssent des carrés , et elles nous ont donné occasion de développer différens artifices que demande l'application des règles que nous avons données plus haut. Il nous reste à présent à considérer des questions qui roulent sur la transformation de certaines formules en cubes ; les solutions K qui vont suivre répandront du jour sur les règles que nous avons aussi indiquées plus haut pour les transformations de cette espèce.

^{4} . Question première. On demande que la somme de deux cubes , ac^4 et y^4 , soit un cube. Puisque $x^4 + y^4$ doit être un cube ^{4} il faut qu'en divisant cette formule par le cube y^4 , le quotient soit pareillement un cube ^{4} ou que Soit donc $2X$ us aurons $X y z^4 - 5zz + 5z = C$. Si nous voulions maintenant, en suivant les règles données plut h^{ut} j supposer ici la racine cubique $= 2 - u^4$ et en compa»-*

The text on this page is estimated to be only 21.53% accurate

d'algèbre. Si tant la formule avec le cube $2^3 - 3uz + 3u^2z - u^3$ déterminer u de façon que le second terme aussi s'évanouisse nous aurions et les autres termes formant l'équation $32 = 5u^2z - u^3 = 32 - 1$; nous trouverions $2 = 00$, ou nous ne pourrions rien conclure. Laissons donc plutôt u indéterminé ; et tirons 2 de l'équation carrée en u ou 522 rf $32 - 3m^2 322 = 3(t^2 - 1)22 = 22 = (u^4 - 3$ trouverons " $3u^2z - 5u^2z$: $31^*U^2 32 3(u^2 - 1)2$ nous $3(u^2 - 1)$ ou $3(u^2 - 1) - 3u^2 - 3$) • la question se réduit par conséquent à transformer en carré la fraction qui est sous ce signe radical. Multiplions d'abord pour cet effet les deux termes par $3(u^2 - 1)$, afin que le dénominateur devenant un carré, savoir $36(u^2 - 1)^2$, nous n'ayons à traiter que le numérateur $3u^4 - 12u^2 + 9$. Comme le dernier terme est un carré, nous supposons la formule, conformément à la règle, égale au carré de $gu + 3$, c'est-à-dire à $g^2u^2 + Qgu + 6gu + G + 9$, nous ferons 3

The text on this page is estimated to be only 26.75% accurate

sfis £ L é M E N « .disparaître les trois derniers termes y en
faisant $o = G$, ou $/ = o$, fit $Bg - zr$: — 18, ou $g - = 5 - 3$; pt l'équation qu^{ste} ,
savoir fionnera $u = i$. Mais cette valeur ne nous apprçnd encore rien ; ainsi
nous pontinperons en écrivant pr notre formule devenant, dans ce cas —
 $ifl^{—} * 3t^*$, c« qui m peut être un carré , à moins que t ne soit négatif ,
faisons $waxr$ sitôt $f = — 'S \backslash$ nous avons par ce moyen la formule $13^* —$
 Si^* , qui devient un carré dans le cas de $5 = 1$. MaÎEi nous voici ar rêtés de
nouveau ; car dans Thypothèse $5=1$, $onat = — lit$, $Il = o$, d*où Ion ne peut
conclure autre' chosç, si ce n'est que. de quelque manière qu'on s'y prenne ,
on ne trouvera jamais une valeur qui fasse parvenir au but qu'on se propose
; et Ton peut en inférer déjà avec assez de confiance , qu'il est impossible de
trouver deux cubes dont la somme soit im cube ; on s'en convaincra
entièrement p^r la démonstration suivante, 243. Théorème. Il n'est pas
possible de trouver deux cubes dont la somme ou bien la différence soit un
cube. Nous commencerons par faire observer que si l'impossibilité dont
nous parlons a lieu pour la somme , elle a lieu aussi pour la différence de
deux cubes. En effet, s'U est impossible que jl est impossible aussi que $oxz^{^}$
 $rr'.y^{^}$ est la différence de deux çutîesi donc^ etc. Cela *f.i

The text on this page is estimated to be only 25.11% accurate

d'à L G È B R E. 263 posé , il suffira de démontrer l'impossibilité en question , soit de la somme seulement , soit de la différence ; or voici la suite des raisonnemens que cette démonstration exige. 1^{re}. On peut regarder les nombres x et y comme premiers entre eux ; car s'ils avaient un commun diviseur , les cubes seraient aussi divisibles par le cube de ce diviseur. Par exemple si on aurait $x = a^n$ or si cette formule est $x = a^n$. -f- a^{2n} ••• aussi. • . . Q^n . Puis donc que x et y n'ont point de facteur commun / ces deux nombres sont ou impairs tous les deux , ou bien l'un est pair et l'autre est impair. Dans le premier cas, il faudrait que z fût pair, et dans l'autre cas le nombre serait impair. Par conséquent de ces trois nombres x , y . et z , il y en a toujours un qui est pair et deux qui sont impairs ; et il suffira donc, pour notre démonstration, de considérer le cas où x et y sont tous deux impairs , parcequ'il est indifférent de prouver l'impossibilité de la somme ou pour la différence , et qu'il arrive seulement que la somme devient U dif-

The text on this page is estimated to be only 29.24% accurate

Le nombre $4k + 1$ ne peut devenir un cube ; et la démonstration
 devait se rapporter à la différence, on aurait $6pq + t^2q^2 = 2q$
 $(4k + 1)^2$, formule tout-à-fait la même que la précédente, si on met p et q
 à la place l'un de l'autre. Par conséquent il suit pour notre question, de
 démontrer l'impossibilité de la formule $p^2 - 5q^2$, puisqu'il
 s'ensuivra nécessairement que ni la somme ni la différence de deux cubes
 ne peut devenir un cube. 4°. Si donc $p^2 + q^2$ était un cube, ce cube
 serait pair, et par conséquent divisible par 8 ; donc il faudrait que la
 huitième partie de notre formule, ou $p(p^2 + 3q^2)$ fût un nombre entier et
 outre cela un cube. Or nous savons que l'un des nombres p et q est pair, et
 l'autre impair ; ainsi $p^2 - 3q^2$ doit être un nombre impair, et comme il n'est
 point divisible par 4, il faut que p le soit, ou que q soit un nombre entier.
 4 5°. Mais afin que le produit $(p^2 - 5q^2)$ soit un cube, il faut que
 chacun de ces facteurs, s'ils n'ont point de diviseur commun, soit un cube
 séparément ; car si un produit de deux facteurs qui sont premiers entre eux,
 doit être un cube, il faut nécessairement que chacun soit de soi-même un
 cube ; le cas est différent et demande une considération particulière, si ces
 facteurs ont un diviseur commun. Ainsi la question est ici de savoir si les
 deux facteurs p et $p^2 - 3q^2$ ne pourraient pas avoir un diviseur commun.
 Pour y répondre, il faut considérer que si ces facteurs ont un diviseur
 commun, les nombres p et $p^2 - 5q^2$ auront le même diviseur ; qu'aussi la
 différence de ces nombres, qui est $3q^2$, aura le même diviseur commun
 avec p , et que, puisque p et q sont premiers entre eux, ces nombres p et
 $5q^2$ ne peuvent avoir d'autre commun diviseur que 3, ce qui a lieu quand p
 est divisible par 5.

The text on this page is estimated to be only 27.43% accurate

D* A L G è B R E. 65 S°. Nous avons par conséquent deux cas à examiner : Ton est celui où les facteurs p et $p^2 + 5q^2$ n'ont point de commun diviseur^ ce qui arrive toujours^ lorsque p n'est pas divisible par 3; Tautre cas est celui où ces facteurs ont un diviseur commun ^ et il a lieu quand p peut se diviser par 3 ; parcequ'alors les deux nombres sont divisibles par 3. Nous avons besoin de distinguer soigneusement ces deux cas l'un de Tautre parcequ'ils exigent chacun une démonstration particulière. 7°. Premier cas. Que p ne soit pas divisible par 3 , et que par conséquent nos deux facteurs ^ et $p^2 + 5q^2$ soient premiers 4 entre eux, desorte que chacun en particulier doive être un cube. Pour faire d*abord que $p^2 + 3q^2$ devienne un cube^ il n'y a. jf comme nous l'avons vu plus haut^ qu'à supposer $p + qy = z$ ($t + u\sqrt{-5}y$ et ce qui donne $p^2 + 3q^2 = (t^2 - 5u^2)y^2$ («-f-3utt)^;=un cube. Or par là $p^2 + 5q^2 = t^2 - 5u^2 + 8q^2 = (t^2 - 5u^2) + 8q^2$, $p^2 + 5q^2 = (t^2 - 5u^2) + 8q^2$, $p^2 + 5q^2 = (t^2 - 5u^2) + 8q^2$. Puis donc que q est un nombre impair^ il faut que u aussi soit impair, et par conséquent que t soit pair, parceque sans ceU tt . — uu serait pair. 8°. Maintenant que nous avons transformé $p^2 + 5q^2$ en cube^ Et que lions avons trouvé il s agit aussi que ^ ^ et par conséquent aussi que ap soit un cubej ou , ce qui revient au même , que la formule $at (t + 3ii)$

The text on this page is estimated to be only 29.78% accurate

ft66 É L É M E N s {t — 3u) soit nn cube. Or nous avons à observer ici que t un nombre pair et non divisible par 3 ; puisqu'autrement p serait divisible par 5, ce qu'on a expressément supposé n'être pas , ainsi les trois facteurs , $t^2 - 5u$ et $t - 3u$ sont premiers entre eux et il faudrait que chacun d'eux fut im cube en particulier. Si donc nous faisons $t + 5u = f$, $t^2 - 5u = g^2$, nous aurons Si donc ai est un cube, nous aurons deux cubes f^3 et g^3 , dont la somme serait un cube , et qui seraient évidemment beaucoup plus petits que les cubes a^3 et j^3 adoptés au commence-» ment ; car c'est comme nous avons d'abord fait et que nous venons de déterminer p et q par les lettres t et r , il faut nécessairement que les nombres ac et g soient beaucoup plus grands que t et u , 9°. Si donc il existait dans de grands nombres, deux cubes tels que nous les demandons , on pourrait aussi assigner en de* moindres nombres deux cubes dont la somme ferait un cube , et on pourrait parvenir de la même manière à des cubes toujours plus petits. Or, comme il est très-certain qu'il n'y a point de ces cubes dans les petits nombres , il s'ensuit qu'il n'y en a point non plus dans les plus grands. Cette conclusion se confirme par celle que fournit le second cas et qui est la même , comme! on va voir. 10**. Second cas. Supposons à présent que p soit divisible par 3 , et que q ne le soit pas , et faisons $pr = z^2$ 5ry notre forme deviendra — . $(t^2 - 5u^2 + 5qq)$, ou $f^2 r (3r^2 - f^2 - 5u^2)$; et ces deux facteurs sont premiers entre eux , vu que $3r^2 + qq$ n'est divisible ni par 2 ni par 3 et que r doit être pair aussi bien

The text on this page is estimated to be only 26.37% accurate

P^{ALGEBRE}. 267 ffoe p; c-est pourquoi ch^{cunde} ces deux facteurs doit être un. pube en particulier. n^{**}. Or en transformant le second facteur $Srr + \frac{t}{q} + 3rr$, nous trouvons de la même manière que pⁱ-dessus $\wedge = \wedge$ (« --. Quu) , $r = 3w$ ($W - r uM$) ; fBt il faut remarquer que puisque q était impair, t doit être ici pareillement un nombre impair, et que u doit être pair. ' or lâ[^]. Mais il faut aussi que $\sim$ - soit un cube ; 091 en muld-? 4 pliant par le cube $\wedge$, que $-\wedge$ ou $2u$ ($f^\wedge - uu$) = au ($f - f - u$) ($< \bullet - u$) j, poit un cube; et comme ces.' trois. facteurs sont des nombres premiers entre eux, il faut que chacun par lui-même soit qn pu be. Supposons donc $\wedge r$ " 'i jl s'ensuivra . , > . c'est-à-dire que «i au était un cube, $f^\wedge - \wedge g^\wedge$ serait un cube. On aurait parconséquent deux cubes $f^\wedge$ et g^{**} beaucoup plus petits que les premiers ; dont la différence serait un cube , et par là même on connaîtrait aussi deux cubes dp^t la somme, serait un cube, puisqu'on n'aurait qu'à faire $/^\wedge - g^\wedge z = h^\wedge$ pour avoir $y^\wedge - 1 P + g^\wedge$ ou un cube égal à la somme de deux cubes. Voilà donc la conclusion précédente pleijement confirmée ; c'est-à-dire qu'on ne peut assigner même par les plus, grands nombres deux cubes tels que leur somme ou leur ijiflpérence soit un cube , et cela par la raison qu'on ne rencontre point de cubes de cette espèce dans les pliiâ petits[^] nombres.

sS8 £ L E M E N s a44- ^^ donc qu'il est impossible de trouver
 deux eubei dont la somme ou la différence soit un cube , notre première
 question tombe d'elle-même ; aussi a-t-on coutume plutôt de commencer
 dans cette matière par la question de déterminer trois cubes dont la somme
 fasse un cube ; mais en supposant que deux de ces cubes soient arbitraires j
 desorte qu'il ne s'agit que de trouver le troisième ; ainsi nous passerons
 immédiatement à cette question. 245. Question deuxième. Deux cubes c^3 et
 $6'$ étant donnés, on demande un troisième cube , tel que la somme de ces
 trois cubes fasse un cube. Il s'agit de transformer en cube la formule $a^3 - 6x^3$
 $6^3 - x^3$; cela ne peut se faire à moins qu'on ne connaisse d'avance un cas
 satisfaisant ; mais un cas de cette espèce se présente aussitôt c'est celui de
 $x = a$; qu'on fasse donc $a^3 = y^3 - a^3$, on aura c'est par conséquent la formule
 $y^3 = 2a^3$ qui doit devenir un cube ; or le premier et le
 dernier terme étant ici des cubes on trouve aussitôt deux solutions. 1°. La
 première demande qu'on fasse la racine de la formule $y^3 - 2a^3$, dont le
 cube est $y^3 + 3y^2a + 3ya^2 + 2a^3$; on a de cette manière $y^3 - 2a^3 = 3y^2a + 3ya^2 + 2a^3$
 $3ay - 3aa = 3iy + 2bb$; et par conséquent $aa = bb$, mais $X = i$; desorte que cette solution
 ne nous est d'aucun usage. 2°. Mais on peut aussi prendre pour racine $y - i$
 Jy , dont le cube est $y^3 - 3y^2i + 3y^2i^2 + i^3$, et déterminer f de façon
 qu'aussi les troisièmes termes se détruisent, savoir en

The text on this page is estimated to be only 21.57% accurate

D'ALGÈBRE; s² faisant Saa=t5bbf, ou/=jj; car alors cm parvient à l'équation qui² multipliée par b², devient et donne et par conséquent a::=zy-a=²,_²=a.²_². Ainsi les deux cubes o² et &² étant donnés, nous connaissons aussi la racine du troisième cube cherché ; et si nous voulons que cette racine soit positive , nous n'avons qu'à supposer le cube b² plus grand que l'autre a² : faisons-en l'application à quelques exemples. 1². Soient 1 et 8 les deux cubes donnés, ensorte que a =: 1 et & = 2 ; la formule 9 + o:² deviendra un cube , si a: = -² ; car on aura 9 + ^=²= (¥)'â². Soient les cubes donnés 8 et 527 , desorte que a^z â et 6 =: 3 • la formule 35 -f- ^ sera un cube dans le cas d» 3®. Que 5i7 et 64 soient les ci:d)es donnés, c'est-à-dire q;tte a =3 et & = 4 ; ^^ formule 91 + o;² deviendra un cube , ai :e — ^^ mi. u. — 37 . Si Ton voulait déterminer pour deux cubes donnés d'autres troisièòKs cubes , il f^iudrait poursuivre en substituant

afo é L É M E N s . , , ■ 4- 2 aii lieu de x^* dans la formule $a' + i'$
 $+ ar : o^\wedge \text{ — } ' \text{—} \text{œ}$ car on parviendrait par ce moyen à Une formule semblable à
 la précédente , et qui fournirait ensuite de nouvelles Taleun de z ; mais on
 voit assez qu'on s'engagerait dans des calculs très-prolixes. ■ 246. Il se
 présenté ati reste dans cette question un cas remarquable^ celui où les deux
 cubes donnés sont égaux ^ où $c = 6$; car dans ce cas on a $a : = \text{ — } = 00\ 5$
 c'est-à-dire qu'on o n'a aucune solution ; et voilà la raison pour laquelle on
 n'a plu encore résoudre le problème de transformer en cube la formule $ao^\wedge$
 $+ a : ^\wedge$. Soit, par exemple, $a = 1$, ou que cetfè formule soit $a - f - x'$, on trouvera
 que quelques formes qu'on lui donne , ce sera toujours inutilement > et
 qu'on gcherchera en vain une valeur de x qui satisfasse. On conclut de là ,
 avec assez de certitude , qu'il est impossible de trouver un cubé . égal à la
 Somme d'un cube et d'un double cubé y où bien qiïè l'équation est
 impossible j et comme cette équation donné il serait impossible aussi de
 trouver deux cubes dont la diffè-» rence fût égale au double d'un autre cube;
 cette conséquence à'étend de même à la somme de deux cubes ; et tout cela
 va être porté jusqu'à une évidence complète par la démonstration qui suit.
 247- t'héorème. Ni la somme ni la différence de deux cubes ne peut devenir
 égale au double d'un autre cube ; cela veut aire (^ue la formule $X? t\pm i y^\wedge$
 $zzz Q, Z^\wedge$ •it toujours impossible , si ce n'est dan^ le cas évident $j' = a : . *$

The text on this page is estimated to be only 28.67% accurate

$i > * \Delta L G \in B A \mathbb{Z}$. On peut encore ici regarder x et y comme premiers entre eux ; car si ces nombres avaient un diviseur commun, il faudrait qu'il y eût le même diviseur, et que toute l'équation $x^3 + y^3 = 2z^3$ par conséquent, fût divisible par le cube de ce diviseur. Cela posé, comme z^3 doit être un nombre pair, il faut que les nombres x et y soient impairs tous les deux, moyennant quoi tant leur somme que leur différence sera paire. Ainsi faisons nous aurons et il faudra que des deux nombres p et q l'un soit pair et l'autre impair. Or de là il suit $x^3 + y^3 = 2z^3 \Rightarrow x^3 + y^3 = 2p^3q^3$ — $x^3 + y^3 = 2p^3q^3$ ($p^3 + q^3$) $y^3 = 2p^3q^3 - x^3$ — $y^3 = 2p^3q^3 - x^3$ «'est-à-dire deux formules tout-à-fait semblables. Par conséquent il suffira de prouver que la formule $p^3 + q^3$ ne peut devenir le double d'un cube, ou que $p^3 + q^3$ ne peut être un cube. On va voir comment nous nous y prendrons pour cette démonstration. 1°. Il se présente de nouveau deux cas différents à considérer : l'un où les deux facteurs p et q n'ont point de commun diviseur, et doivent être un cube chacun séparément ; l'autre où ces facteurs ont un diviseur commun, lequel diviseur

â/a £ L é M E N s un cube. Or t n'étant pas divisible par 3^4
 puisqu'autrement p serait aussi divisible par 5 y les deux facteurs tett —
 quu sont premiers entre eux, et parconséquent il faut que chacun en
 particulier soit un cube. 3®. Mais le dernier facteur à son tour a deux
 facteurs, savoir t^5u et $t - 5u^4$ qui sont des nombres premiers entre eilx ,
 d'abord parceque t n'est pas divisible par 3 , et en second lieu, parceque l'un
 des nombres t^5 et u est pair, tandis que l'autre est impair ; car si ces nombres
 étaient impairs tous les deux , il faudrait que non-seulement p , mais aussi
 que q fut impair, ce qui ne se peut -, donc il faut que chacun de ces deux
 facteurs , $t - 5u^4$ et t^5 en particulier soit un cubé. 4^ . Soit donc nous
 aurons Or t doit être un cube qtie nous désignerons par h^3 moyennant quoi
 il faudrait que parconséquent nous aurions deux cubes beaucoup inoindres
 savoir t^5 et $t - 5u^4$, dont la somme serait le double d'un cube. 5°. Second cas.
 Supposons à présent p divisible par 3^4 et Conséquemment que q ne le soit
 pas. Si nous faisons $p = z^5r$, notre formule devient $Sr(grr + 37^4) = 9r(3rr +$
 $(79>^4$ et ces facteurs étant maintenant des nombres premiers entrer eux , il
 faut que l'un et l'autre soient un cube. G". Afin donc de transformer en cube
 le second; $7 + 3fT$ / Aous ferons

. D'ALGÈBRE il est évident et il faudra encore que l'un des nombres x et y soit impair et l'autre pair vu qu'autrement les deux nombres 9 et r seraient pairs. Or nous obtenons par là le premier facteur $gr = fl7M$ (« — un) ; et Comme il doit être un cube, il faut aussi qu'en le divisant par 37, la formule $u(W - i^u)$, ou $(x-f-u)(x - u)$, soit un cube. 7°. Mais ces trois facteurs étant premiers entre eux, il faut qu'ils soient tous eux-mêmes des cubes. Ainsi supposons pour les deux derniers nous aurons mais u devant être un cube nous aurions de cette manière, en de bien plus petits nombres, deux cubes dont la différence serait égale au double d'un autre cube. 8°. Puis donc qu'on ne peut assigner en petits nombres des cubes tels que leur somme ou leur différence soit un cube doublé, il est clair qu'il n'y a point de cubes de cette espèce, même parmi les plus grands nombres. 9°. On objectera peut-être que notre Conclusion pourrait induire en erreur, parcequ'il existe dans ces moindres nombres un cas satisfaisant, savoir celui $def = x^3g$. Mais on doit considérer que lorsque $f=g$, on a dans le premier cas et ainsi $u = 0$; que par conséquent aussi $x = 0$, et que comme nous avons supposé il faudrait que les deux premiers cubes x^3 et y^3 eussent déjà été a. S

The text on this page is estimated to be only 28.41% accurate

9y4 É L É M E N S égaux Tun et l'autre ^ lequel cas a été
 expressément excepté. De même^ dans le second cas, sifzzzg, il faut que t-
 f- u = ^ — u, et pareillement u = o ; donc aussi r := o et p = o ; donc les
 deux premiers cubes a? ety^ deviendraient encore égaux ^ de quoi il n'est
 pas question dans le problème. ii48. Question troisième. On demande en
 général trois cubes, a^, y^ etz^f dont la somme soit égale à un cube. Nous
 venons de voir qu'on peut supposer deux de ces cubes connus, et qu'on peut
 déterminer par là le troisième^ pourvu qu'il n'y en ait pas d'égaux ; mais la
 méthode précédente ne fournit dans chaque cas qu'une seule valeur pour le
 troiâàmt cube , et il serait difficile d'en déduire de nouvelles. Nous
 regarderons donc à présent les trois cubes comme in-« connus ; et afin de
 donner une solution générale ^ nous feron» a^^y^ -f- a' = v^ ; nous
 transposerons lm des premiers pour avoir et voici comment nous satisferons
 à cette éqUation. i**. Soit nous aurons , comme nous avons vu , o^+y^ =
 2pCpp+5qq). Soit de plus nous aurons aussi v^ — a'=:fi^ (w-f-Srr ; donc il
 faut que ^PXPP + 3^9) = â* O^ + ^^d»

The text on this page is estimated to be only 18.83% accurate

ou D*A L G £ B R E. 375 p ($\wedge pp + 5qq$) = $5(\ll + 3rr)$. $\hat{a}$. Nous ayons tu plus haut qu'un nombre tel que $pp + \wedge qq$, ne peut avoir pour diviseurs que des nombres de la même forme. Puis donc que ces deux formules $pp - f - Sqq$ et $5.\wedge + \wedge O$ doivent avoir nécessairement un diviseur conunun , soit ce diviseur = $\wedge < - f - 5uu$, $3\wedge$. Faisons en conséquence $pP'h5qq = iff + Sgg$) ($tt + Suu$) et $ss + 3rr = (hh + Zkk) (\wedge U + 3m^*)$; •t nous aurons $p = ft + 5gu$, $q = gt' - Ju$; par conséquent $PP = \# \wedge + 6/gto + 9gguu$, $qq \wedge gggtt - \wedge s \wedge fgtu + ffuu$, d'où résulte $pp + Sqq \wedge (ff + 5gg)tt + i5ff + 9gg)uu$; «u bien $pp + Sqq = (ff + Zgg) iU + 5uu$). $4\wedge$. Nous tirons de la même manière de l'autre formule d'où résulte l'équation $(ft + 5gu) (ff + 5gg) (\ll + 3ui /) = (Af + 3ftu) (AA + 3W)(\ll + 3ttM$, qui $\wedge$ divisée par $tt - \wedge \wedge uuy$ donne $fKff + \wedge gg) + \wedge gu(ff + Sgg) \wedge hKhh + 5kk) + 3hu(\wedge hh + \wedge \wedge \wedge$

The text on this page is estimated to be only 27.22% accurate

$\frac{1}{2}S$ ÉLÉMENT OU moyennant quoi $\sim fUf + ^Sg) - h i h h + 5kk)$
 " 5[^]. Chassons encore les fractions , en faisant $u := ^f(ff + 5gg) - h i h h + Zhk)$,
 «t nous aurons où Ton peut dpnner telles valeurs qu*On veut aux lettres/, gi
 Aet ft. 6[^]. Lors donc que nous aurons déterminé par ces quat nombres les
 valeurs de t et de u ^ nous aurons lo. $p = ft + 5gu$, fl°. $q = gt - fu$, 3**,
 $sz = ht + 5ku$, 4°. $r = kt ^ hu$; de là nous parviendrons enfin à la solution de la
 question et Cette solution est générale , au point qu'elle renferme toui les
 cas possibles^ vu que dans tout ce calcul on n'a admif aucune limitation
 arbitraire. Tout l'artifice consistait à rendrft notre équation divisible par tt -j-
 3uu , moyennant quoi nom avons pu déterminer les lettres t et u par une
 équation du premier degré. On peut faire des applications sans nombrt de
 nos formules : nous en donnerons une pour exemple i«. Soit '.

The text on this page is estimated to be only 17.99% accurate

p: !■ d*àlgebre. ^77 on aura t:=-5g(ff+5gg), ainsi P = -% (ff+3gg)
+Zfg iff+Zgg)^3g=i-5g, tt r =: -/(//+ 3gg) + 1 ; parconséquent X = - 3g -
(ff+ 5ggy +/, y=-Sff + (j9^+3g-g))»-/. Si outre cela nous supposons noua
aurons x = ^no, y = i4, «=17, i' = — 7* et de là résulte l'équation finale —
20^+ 14^+17' = — 7^, ou i/f-f' 17' + 7' = ûo'• â49• Question quatrième. On
demande trois nombres qui forment une progression arithmétique^ dontla
différence soit 1 ; et qui soient tels que leurs cubes ajoiltés ensemble
reproduisent un cube. Soit X le nombre ou le terme moyen , ar *— i sera le
plus petit et X -f- 1 le plus grand ; la somme des cubes de ces trois
nombres^ est 3a^-J.6x = 3a? (a7x + a>.

The text on this page is estimated to be only 17.30% accurate

ayS É L É M E N s et elle doit être un cube. Il nous faut ici d'avance un cas où cette propriété ait lieu et nous trouvons, après quelques essais que ce cas est Ains nous pouvons, d'après les règles établies plus haut faire en sorte que $a^3 = 64 + 48y + 12xy + y^3$, et moyennant quoi notre formule devient $a^6 + 15y^2 - 3Gy^2 + 3j^2$, où le premier terme est un cube, mais où le dernier Test pas. Supposons donc la racine $= 6 + j^2$ ou la forme $= a^6 + 12Sj^2 + 12j^2y + 4j^4$, «t faisons évanouir les seconds termes en écrivant $15y = 10j^2$, ou $y = \frac{2}{3}j^2$; les autres termes, divisés par j^2 , donneront a^5 . $a^5 = 3S$ ou $+ 3y - j^2 = -g + j^2$, $183.36 + 18j^2 = 10a^5 + a^5j^2$, ou $18^3 - 18^2.25 = a^5j^2 - 183.36 - 18a^5$; donc $-183.36 - 18a^5 = 18^3(18.56 - 150 - a^5 - 3.18^2 \sim a^5 + 3.18^2)$ c'est-à-dire $-3Q4'15 - 7452 y^2 1871 \sim 1871$ •

The text on this page is estimated to be only 25.35% accurate

D * À L G È B R E. S79 ÀOtM -12TTfi' Comme on pourrait trouver embarrassant de poursuivre cette réduction en cubes, il est bon d'observer que la question peut toujours se réduire à des carrés. En effet , puisque $3a; (arx + 2)$ doit être un cube, qu'on suppose cette formule $= a^y^f$ on aura $3xx + S:=zxy^$, et parconséquent $G 36 XX =z y — 3~6y — 18'$ Or le numérateur de cette fraction étant déjà un carré , nous n'avons besoin de transformer en carré que le dénominateur $By^ — 18$, ce qui exige aussi qu'on ait trouvé un cas. Considérons pour cet effet que 18 est divisible par 9, maii que 6 est seulement divisible par 5 , et qu'ainsi y pourra se diviser par 3; si nous faisons donc $=:3$ «, notre dénominateur deviendra $= iGas^ — - 18$, ce qui étant divisé par g et devenant $iSz^ — a$, doit encore être un carré ; or c'est ce qui a liett évidemment dans le cas de $£ = 1$. Ainsi nous ferons et il faudra que $16 + 54^ + 54VV + 181/^ =s$ un carré ; que la racine en soit $4 + ^*' 1$ dont le carré est $1 S+S^v-fn^{*'}^$ il faudra que $54 + 18^=^$; ou $i8i/ = — ^$, ou $flv = — If$; donc ce qui produit «'=-il; 4

The text on this page is estimated to be only 20.97% accurate

aSo É L E M E N S[^] etc. et après cela J — 3a* Reprenons à présent le dénominateur $Gy^3 - i^8 = iGaa - 18 = 9(182^5 - a)$; puis 6 (car la racine carrée du facteur $182^4 \ll a \text{ est } 4 + \sqrt{1} = i^4 48 >$ celle du dénominateur total est $|||$; mais la racine du numérateur est 6 \ donc i leur tout-à-fait différente de celle* que nous ayons trouvée précédemment. Il s'ensuit que les racines de nos trois cubiques cherchées sont $\cdot a, - \cdot 1 - \text{TÔT}$ $j \cdot \wedge \cdot \gg^* \wedge - ia^7 > \ll - \cdot \cdot A'T^* - 1Q^7^*$ et la somme des cubes de ces trois nombres sera un cube dont la racine $\wedge^* 17 i o^7^*$ Ta TÔT" aSo. Nous terminerons ici ce traité de l'Analyse indéterminée, ayant eu suffisamment occasion dans les questions que nous avons résolues, d'expliquer les principaux artifices qu'on a imaginés jusqu'à présent dans cette partie de l'Analyse* C le r

The text on this page is estimated to be only 28.61% accurate

ADDITIONS. Xj e s Géomètres du siècle passé se sont beaucoup occupés de r Analyse indéterminée , qu'on appelle vulgairement Analyse de Diophante; mais il n*y a proprement que MM. Bachet et Fermât qui aient ajouté quelque chose à ce que Diophante lui-même nous a laissé sur cette matière. On doit surtout au premier une Méthode complète pour résoudre en nombres entiers tous les problèmes indéterminés du premier degré (*); le second est l'Auteur de quelques Méthodes pour la résolution des équations indéterminées qui passent le second degré (**); de la Méthode singulière par laquelle on démontre qu'il est impossible que la somme ou la différence de deux carrés - carrés , puisse jamais être un carré (***) ; de la solution d'im grand nombre de problèmes très-difficiles et de plusieurs beaux théorèmes sur les nombres entiers , qu'il a laissés sans démonstration^ mais dont la plupart (*) Voyez plus bas le paragraphe III. Au reste je ne parle point ici de son Commentaire sur Diophante, parceque cet Ouvrage, excellent dans son genre, ne renferme, à proprement parler, aucune découverte. (^*) Ce sont celles qui sont exposées dans les chapitres 8, 9 et 10 du Traité précédent. Le P. Bilet les a recueillies dans différents écrits de M. Fermât , et les a publiées à la tête de la nouvelle édition de Diophante,, donnée par M. Fermât le fils. (***) Cette méthode est détaillée dans le chapitre i^ du Traité précédent ; en trouve les principes dans la Remarque de M. Fermât, qui est après la Question xxi du Livre yi de Diophante^

J'ai fait des ADDITIONS. ont été ensuite démontrés par Euler, dans les Commentaires de Pétersbourg (*). Cette branche de l'Analyse a été presque abandonnée dans ce siècle; et si on en excepte Euler, je ne connais personne qui s'y soit appliqué ; mais les belles et nombreuses découvertes que ce grand Géomètre y a faites , nous ont bien dédommagé de l'espèce d'indifférence que les autres Géomètres paraissent avoir eue jusqu'ici pour ces sortes de recherches. Les Commentaires de Pétersbourg sont pleins des travaux de Euler, dans ce genre , et l'Ouvrage qu'il vient de donner est un nouveau service qu'il rend aux amateurs de l'Analyse de Diophante. On n'avait point encore d'Ouvrage où cette science fut traitée d'une manière méthodique^ et qui renfermât et expliquât clairement les principales règles connues jusqu'ici pour la solution des problèmes indéterminés* Le Traité précédent réunit ce double avantage ; mais pour le rendre encore plus complet^ j'ai cru devoir y faire plusieurs additions dont je vais rendre compte en peu de mots. La théorie des fractions continues est une des plus utiles de l'Arithmétique , où elle sert à résoudre avec facilité des problèmes qui y sans son secours , seraient presque intraitables ; mais elle est d'un plus grand usage encore dans la solution des problèmes indéterminés , lorsqu'on ne demande que des nombres entiers. Cette raison m'a engagé à exposer cette théorie avec toute l'étendue nécessaire pour la faire bien entendre ; comme elle manque dans les principaux Ouvrages d'Arithmétique(^) Les problèmes et les théorèmes dont nous parlons, sont répandus dans les Remarques de M. Fermât sur les Questions de Diophante y et dans ses Lettres imprimées dans les Opéra Mathematica y etc. , et dans le second Volume des Œuvres de Wallis. On trouvera aussi dans les Mémoires de l'Académie de Berlin , pour les années 1770 et suivantes, les démonstrations de quelques théorèmes de cet Auteur» qui n'avaient pas encore été donnés.

A b D i T I O N S, 285 tiqie et d'Algèbre, elle doit être peu connue des Géomètres; je serai satisfait si je puis contribuer à la leur rendre un peu plus familière. Je donne ensuite des applications nouvelles de cette théorie à l'Analyse indéterminée. Je détermine les minima qui peuvent avoir lieu dans les formules indéterminées à deux inconnues , surtout dans celles du second ordre, et je démontre, relativement à celles-ci, des propositions remarquables qui n'étaient pas connues , ou qui n'avaient pas encore été démontrées d'une manière générale et directe. On remarquera principalement dans l'article 33 une Méthode particulière t)our réduire en fractioni continues les racines réelles des équations du second degré , et dans les articles suivant , une démonstration rigoureuse que ces fractions doivent toujours être nécessairement périodiques (*), Les autres additions concernent la résolution des équations in« déterminées. Bachet Siyait donné en 1624, la résolution compléta des équations indéterminées du premier degré. Celles des équations du second degré n*a paru qu'en 1769, dans les Mémoires de l'Académie de Berlin. On la redonne ici simplifiée et généralisée de manière à ne rien laisser à désirer. A l'égard des équations indéterminées des degrés supérieurs au second, on n'a encore quo des méthodes particulières pour les résoudre dans quelques cas; et il est à présumer que , pour ces sortes d'équations, la résolution générale devient impossible passé le second degré, comme elle paraît Têtre passé le quatrième pour les équations déterminées. Enfin , le dernier paragraphe renferme des recherches sur les fonctions qui ont la propriété, que le produit de deux ou de plusieurs fonctions semblables est aussi une fonction semblable ; j'y donne une méthode générale pour trouver ces sortes de fonctions , et j'en fais voir l'usage pour la résolution de différens problèmes indéterminés, sur lesquels les niéthodes connues n'auraient aucune prise. (*) Dans c«tte nouvelle édition on a fait quelqncs changemens à l'analyse du problème prenier du paraf;niphe Mcoud; potttr la rendre plu» directe et pluft facile à suivre. s*

984 A 0 D I ï I O N Si SUR LES FI[^]ACTIONS CONTINUÉS.

PARAGRAPHE PREMIER. 1. \[^] o M M E la théorie des Fractions continues manque dans les livres ordinaires d'Arithmétique et d'Algèbre , et que par cette raison elle doit être peu connue des Géomètres [^] nom croyons devoir commencer ces Additions par une exposition abrégée de cette théorie , dont nous aurons souvent lieu d« faire l'application dans la suite. On appelle en général fraction continue toute expression de cette forme, [^]-f-,etc. où les quantités a, jS[^] y, i", etc. et b, c, dy etc. sont des nombres entiers positifs ou négatifs ; mais nous ne considéreront ici que les fractions continues dans laquelle les numérateurs b, c, d, etc. sont égaux à l'unité[^] c'est-à-dire celles qui sont de la forme [^]/3 + i i" +, etc. ce [^]/S , [^], etc. étant d'ailleurs des nombres quelconques entier! positifs ou négatifs; car celles-ci sont, à proprement parler, les seules qui sont d'un grand usage dans l'Analyse , les autres n'étant prescjue que de pure curiosité. a. Milord Brouncker est, je crois , le premier qui ait ima* giné les fractions continues : on connaît celle qu'il a trouvée pour exprimer le rapport du carré circonscrit, à l'aire du cercle, et qui est

N ADDITIONS. 185 $^{+5} + 2,5^{2-4}$, a +, etc. Mais on ignore le chemin qui l'y a conduit. On trouve seulement dans VAnthmetica infinitorum quelques recherches sur ce sujet, dans lesquelles TVallis démontre d'uae manière assez indirecte, quoique fort ingénieuse, l'identité de l'expression de Brouncker avec la sienne, qui est, comme ron $\mathbb{R}^{*} >$ aii'.i'.IrlTTt; il y donne aussi la méthode de réduire en général toutes sortes de fractions continues à des fractions ordinaires. Au reste, il ne paraît pas que l'im ou Tautre de ces deux grands Géomètres ait connu les principales propriétés et les avantages singuliers des fractions continues; nous verrons ci-après que la découverte en est principalement due à Huyghens, 3. Les fractions continues se présentent naturellement toutes les fois qu'il s'agit d'exprimer en nombres des quantités fractionnaires ou irrationnelles. En effet, supposons qu'on ait à évaluer une quantité quelconque donnée a, qui ne soit pas exprimable par un nombre entier; la voie la plus simple est de commencer par chercher le nombre entier qui sera le plus proche de la valeur de a, et qui n'en différera que par une fraction moindre que l'unité. Soit ce nombre *, et l'on aura a — CL égal à une fraction plus petite que l'unité; desorte que ■ sera au contraire un nombre plus grand que l'unité \ «oit âonc = 6, et comme b doit être un nombre plu» a — «6 ' grand que l'unité, on pourra chercher de même le nombre entier qui approchera le plus de la valeur de h\ et ce nombre étant nommé i8, on aura de nouveau h — 9» égal à une fraction plus petite que l'unité, et parconséquent t g «era égal à une quantité plus grande que l'unité, qu'on pourra désigner par c; ^nsi, pour évaluer c, il n'y a qu'à chercher pareille

The text on this page is estimated to be only 28.59% accurate

986 ADDITIONS. ment le nombre entier le plus proche de c , lequel étant désigné par $\gg$ on aura $c^{\wedge}y$ égal à une quantité plus petite que l'unité; et par conséquent sera égal à une quantité J plus grande que l'unité, et ainsi de suite. Par ce moyen il est clair qu'on doit épuiser peu à peu la valeur de a , et cela de la manière la plus simple et la plus prompte qu'il est possible, puisqu'on n'emploie que des nombres entiers dont chacun approche, autant qu'il est possible, de la valeur cherchée. Maintenant, puisque on aura

ADDITIONS. 2287 t , en général j U est bon de remarquer ici que les nombres a, p, y, etc. , jui représentent , comme nous Venons de le voir , les valeurs entières approchées des quantités a, b^ c^ etc. peuvent être pris chacun de deux manières différentes^ puisqu'on peut prendre également pour la valeur entière approchée d'une quantité donnée, Tun ou Tautre des nombres entiers^ entre lesquels se trouve cette quantité ; il y a cependant une différence essentielle entre ces deux manières de choisir les valeurs approchées par rapport à la fraction continue qui en résulte ; car si on prend toujours les valeurs approchées plus petites que les véritables, les dénominateurs jS, y, ^, etc. seront tous positifs; au lieu qu'ils seront tous négatifs, si on prend les var leurs approchées toutes plus grandes que les véritables, et ils leront en partie positifs et en partie négatifs /si les valeurs ap* prochées sont prises tantôt trop petites et tantôt trop grandes. En effet , si a est plus petit que a^ C'-'u. sera ube quantité positive; donc b sera positive, et jSle sera aussi; au contraire a — A sera négative, si a est plus grand que a; donc b. sera négative , et jS le sera aussi. De même si jS est plus petit que b, i— -/S sera toujours une quantité positive ; donc c le sera aussi, et parconséquent aussi y ; mais si fi est plus grand que b ,b — fi âera. une quantité négative ; desorte que c , et parconséquent aussi y, seront négatifs , et ainsi de siûte. Au reste, lorsqu'il s'agit de quantités négatives, j'entends par quantités plus petites, celles qui, prises positivement , seraient plus grandes ; nous aurons cependant quelquefois dan\$ la suite occasion de comparer entre elles des quantités purement par rapport à leur grandeur absolue ; mais nous aurons soin ^'avertir alors qu'il faudra faire abstraction des signes.

fi88 ADDITIONS. Je dois remarquer encore que si, parmi les quantités d , etc. il s'en trouve une qui soit égale à un nombre e : alors la fraction continue sera terminée, parce qu'on peut conserver cette quantité même; par exemple si c est un nombre entier la fraction Continue qui donne la valeur de a En effet il est clair qu'il faudrait prendre $r = c$ c donnerait $c^y o^*$ et par conséquent $=0$; desorte que l'on aurait les termes suivans deviennent nuls vis-à-vis de la quantité 0 ; or à $= o$; donc on aura simplement c Ce cas arrivera toutes les fois que la quantité a sera mesurable, c'est-à-dire qu'elle sera exprimée par une fraction rationnelle; mais lorsque a sera une quantité irrationnel transcendante alors la fraction continue ira nécessairement à l'infini. 4- Supposons que la quantité a soit une fraction ordinaire $\frac{A}{B}$, A et B étant des nombres entiers donnés; il est d'abord évident qu'un nombre entier t qui approchera le plus de $\frac{A}{B}$, sera le

ADDITIONS. 2289 tient de la division de $\frac{a}{b}$ par B ainsi
 supposant la division faite à la manière ordinaire , et nommant a le quotient
 et C le reste, on aura $\frac{a}{b} = \frac{a}{b} + \frac{C}{b}$, donc $\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$; pour avoir de même la valeur
 entière approchée $\frac{a}{b}$ de la fraction $\frac{a}{b}$, il n'y aura qu'à diviser B par C , et
 prendre pour $\frac{a}{b}$ le quotient de cette division ; alors nommant D le reste, on.
 aura $\frac{a}{b} = \frac{a}{b} + \frac{C}{b}$, C et par conséquent $\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$; On continuera donc à diviser
 C par D ; et le quotient sera la valeur du nombre y , et ainsi de suite ; d'où
 résulte cette règle fort simple pour réduire les fractions ordinaires en
 fractions continues. Divisez d'abord le numérateur de la fraction proposée
 par son dénominateur f et nommez le quotient a ; divisez ensuite le
 dénominateur par le reste, et nommez le quotient f ; divisez après cela le
 premier reste par le second reste, et soit le quotient y ; continuez ainsi en
 divisant toujours l'avant-dernier reste par le dernier. , jusqu'à ce qu'on
 parvienne à une division qui se fasse sans reste, ce qui doit nécessairement
 arriver^ puisque les restes sont des nombres entiers qui vont en dimi^ nuant
 ; vous aurez la fraction continue $\frac{a}{b} = \frac{a}{b} + \frac{C}{b}$ etc. qui sera égale à la fraction
 donnée. 5. Soit proposé de réduire en fraction continue la fraction $\frac{a}{b}$; on
 divisera donc 103 par 887, on aura le quotient 1 et le reste 6 ; on
 divisera 887 par 6, on aura le quotient 147 et le reste 5 ; on divisera 6
 par 5, ce qui donnera le quotient 1 et le reste 1 ; on divisera 5 par 1
 9 , on aura le quotient 5 et le reste 0 ; on divisera 1 par 0 > on aura le a. T

a^O ADDITIONS. quotient i et le reste 4 ; on divisera 5 par 4 » on aura le quotient 1 et le reste i ; enfin, divisant $4 P^{i^i}$ on aura le quotient 4 et le reste nul, desorte que Topération sera terminée. Rassemblant donc par ordre tous les quotiens trouvés, on aura cette série, $i > 4 > di^> i | ii4i d^*$ où Ton formera la fraction continue $ii03 \ 1 \ 6$. Comme dans la manière ordinaire de faire les divisions, on prend toujours pour quotient le nombre entier qui est égal ou moindre que la fraction proposée , il s'ensuit que par la méthode précédente on n'aura que des fractions continues dont tous les dénominateurs s'ont des nombres positifs. Or on peut aussi prendre pour quotient le nombre entier qui est immédiatement plus grand que la valeur de la fraction, lorsque cette fraction n'est pas réductible à un nombre entier, et pour cela il n'y a qu'à augmenter d'une unité la valeur du quotient trouvé à la manière ordinaire ; alors le reste sera négatif, et le quotient suivant sera nécessairement négatif. Ainsi on pourra à volonté rendre les termes de la fraction continue positifs ou négatifs. Dans l'exemple précédent, au lieu de prendre i pour le quotient de $i \ io3$ divisé par 887, je puis prendre 2 ; mais j'aurai le reste négatif — 671, par lequel il faudra maintenant diviser 887; on divisera donc 887 par — 671 , et l'on aura ou le quotient — 1 et le reste 21 G , ou le quotient — a et le reste — 455. Prenons le quotient plus grand — 1 , et alors il faudra diviser le reste — G71 parle reste 216, d'où Ton aura ouïe quotient — 3 et le reste — 23, ou le quotient — 4 et le reste 133* J« continue la division en adoptant le quotient plus gran4

The text on this page is estimated to be only 25.74% accurate

À D O t T I O N s. 1291 — 3; 3*aurai à diviser le reste 21 G par le reste $-^a3$, ce qui me donnera ou le quotient — g et le reste 9 , ou le quotient — lo et le reste — 14, et ainsi de suite. De cette manière on aura iio3 , i 887 $-^{+ir3} + \sim 1 — 9 +$ etc. DÙ Ton voit que tous les dénominateurs sont négatifs. 7. On peut au reste rendre positif chaque dénominateur négatif, en changeant le signe du numérateur; mais il faut alors changer aussi le signe du numérateur suivant; car- il est clair qu'on a $ft-| 1 =/x I ^ -j-$ etc. $^ -|-$ etc. Ensuite on pourra, si Ton veut, faire disparaître tous les «ignés — - de la fraction continue , et la réduire à une autre dont tous les termes soient positifs ; car on a en général $'^ V +$, etc. $\blacksquare ^ * 1 -^ , ^ * y — 1 +$, etc. . comme on peut s'en convaincre aisément, en réduisant ces deux quantités en fractions ordinaires. On pourrait aussi par un moyen semblable introduire des termes négatifs à la place des positifs , car on a $* y — 1 +$ etc. D'où l'on voit que par ces sortes de transformations on peut $^$ elquefois simplifier une fraction continue , et la réduire à

figa ADDITIONS. un moindre nombre de termes; ce qui aura lieu toutes les fois qu'il y aura des dénominateurs égaux à l'unité positive ou négative. En général il est clair que pour avoir la fraction continue la plus convergente qu'il est possible vers la valeur de la quantité donnée, il faut toujours prendre pour $a, b, c, \dots$ les nombres entiers qui approchent le plus des quantités $a, b, c, \dots$. Il faut qu'ils soient plus petits ou plus grands que ces quantités; or il est facile de voir que si, par exemple, on ne prend pas pour « le nombre entier qui approche le plus, soit en excès ou en défaut, de a , le nombre suivant » sera nécessairement différent de l'unité; en effet la différence entre a et a sera alors plus grande que $\frac{1}{a}$, par conséquent on aura $b = [a]$ (dus petit que a ; donc $\frac{1}{b}$ ne pourra être qu'égal à l'unité. Ainsi toutes les fois que dans une fraction continue on trouvera des dénominateurs égaux à l'unité, ce sera une marque que l'on n'a pas pris les dénominateurs précédents aussi approchans qu'il est possible, et que par conséquent la fraction peut se simplifier en augmentant ou en diminuant ces dénominateurs d'une unité, ce qu'on pourra exécuter par les formules précédentes, sans être obligé de refaire en entier le calcul. 8. La méthode de l'art. 4 peut servir aussi à réduire en fraction continue toute quantité irrationnelle ou transcendante, pourvu qu'elle soit auparavant exprimée en décimales; mais comme la valeur en décimales ne peut être qu'approchée, et qu'en augmentant d'une unité le dernier caractère, on a deux limites entre lesquelles doit se trouver la vraie valeur de la quantité proposée, il faudra, pour ne pas sortir de ces limites, faire à la fois le même calcul sur les deux fractions dont il s'agit, et n'admettre ensuite dans la fraction continue que les quotiens qui résulteront également des deux opérations. j Soit, par exemple, proposé d'exprimer par une fraction continue le rapport de la circonférence du cercle au diamètre.

The text on this page is estimated to be only 24.73% accurate

additions; agS Ce rapport exprimé en décimales est, par le calcul de P'iete , 3, 1415926535 ; desorte qu'on aura la fraction iôoôloÔoolt' a réduire en fraction continue par la méthode ci-dessus ; or û on ne prend que la fraction $\frac{1}{10000} >$ on trouve les quotiens 3^7 , i5 , 1 , etc. et si on prenait la fraction plus grande lotlîl • on trouverait les quotiens 3, 7, i6, etc. desorte que le troisdème quotient demeurerait incertain ; d'où l'on voit que , pour pouvoir pousser seulement la fraction continue au-delà de trois termes , il faudra nécessairement adopter une valeur de la périphérie qui ait plus de six caractères. Or si on prend la valeur donnée par Ludolph en trente-cinq caractères, et qui est 3, i4i59, 26535, 89793, 23846-, â6433, 80279, 50288; et qu'on opère en même temps sur cette fraction et sur la même $>$ en y augmentant le dernier ca-r ractère 8 d'une unité ^ on trouvera cette suite de quotiens ,5, 7, i5, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1^ 3, 1, 14, a, 1, 1, 3, 2) 2, 2, 1, 84, 2, z, 1, z5, 5, 1.3^ 1, 4, 2^ 6, 6, u dcr forte que l'on aura Périph. ^g . 1^ diamètre. ^^ 7 *Ju -- i * ' i5 •+-- , 1. Comme il 7 a ici des dénominateurs égaux à l'unité, o» pourra simplifier la fraction , en y introduisant des termes gatifs I par les formules de l'art. 7 , et l'on trouyera diamètre. 7 + -? i 394— 3 _i: 3 - f^ etc. ou bien diamètn 7+ -? , * / 16 H 7 , f ^ — 394+5 .^ ^^ — 3 + etc.

234 ADDITIONS. 9. Nous ayons montré ailleurs comment on peut appliquer la théorie des fractions continues à la résolution numérique des équations y pour laquelle on n'avait encore que des méthodes imparfaites et insuffisantes. (Voyez Us Mémoires de l'Académie de Berlin pour les années 1767 et 1768.) Toute la difficulté consiste à pouvoir trouver dans une équation quelconque la valeur entière la plus approchée soit en excès ou en défaut de la racine cherchée, et c'est sur quoi nous avons donné le premier des règles sûres et générales par lesquelles on peut non-seulement reconnaître combien de racines réelles positives ou négatives, égales ou inégales, contient la proposée ou encore trouver facilement les limites de chacune de ces racines et même les limites des quantités réelles qui composent les racines imaginaires. Supposant donc que x soit l'inconnue de l'équation proposée, on cherchera d'abord le nombre entier qui approchera le plus de la racine cherchée, et nommant ce nombre a , il n'y aura qu'à faire, comme on l'a vu dans l'art. I, $x = a + \frac{1}{y}$ (Je nomme ici K^y , z , etc. ce que j'ai dénoté dans l'art. cité par a , b , c , etc.) et substituant cette valeur à la place de x , on aura, après avoir fait évanouir les fractions une équation du même degré en y , qui devra avoir au moins une racine positive ou négative plus grande que l'unité. On cherchera donc de nouveau la valeur entière approchée de cette racine, et nommant cette valeur b , on fera ensuite $y = \frac{1}{b + \frac{1}{z}}$, ce qui donnera de même une équation en z , qui aura aussi nécessairement une racine plus grande que l'unité, et dont on cherchera pareillement la valeur entière approchée, et ainsi de suite. De cette manière, la racine cherchée se trouvera exprimée par la fraction continue

ADDITIONS. ftgS qui sera terminée , si la racine est
 commensurable ^ mais qui ira nécessairement à Tinfini ^ si elle est
 incommensurable. On trouvera dans les Mémoires cités tous les principes et
 les détails nécessaires pour se mettre au fait de cette méthode et de ses
 usages , et même différens moyens pour abrégé souvent les opérations
 qu'elle demande ; nous crojrons n'avoir presque rien laissé à désirer sur ce
 sujet si important. Au reste ^ pour ce qui regarde les racines des équations
 du second degré , nous donnerons plus bas , (^art. 33 et suw.) une méthode
 particulière et très - simple pour les convertir en fractions continues. lo.
 Après avoir expliqué la génération des fractions continues^ nous allons en
 montrer les usages et les principales propriétés. Il est d'abord évident que
 plus on prend de termes dans une fraction continue , plus on doit approcher
 de la vraie valeur de la quantité qu'on a exprimée par cette fraction; desorte
 que si on s'arrête successivement à chaque terme de la fraction , on aura une
 suite de quantités qui seront nécessairement convergentes vers la quantité
 proposée. Ainsi ayant réduit la valeur de a à la fraction continue -y 4-4
 '^«r+,etc. on aura les quantités 5/ etc. ou bien, en réduisant >

The text on this page is estimated to be only 26.03% accurate

2g6 additions; Pour pouvoir mieux juger de la loi et de la convergence de ces quantités nous remarquerons que par les formules de l'art. 3 on a et = «t -f- r^ ^ = P + -» c = j' -f- -1, etc. d'où Ton voit d'abord que a est la première valeur approchée de a; qu'ensuite si on prend la valeur exacte de a qui est — T — j et qu'on y substitue pour b sa valeur appprochée jS, on aura cette valeur plus approchée — -= — ; qu'on iaura de même une troisième valeur plus approchée de a^ en mettant d'abord pour. 6 sa valeur exacte , ce qui donne (fit/2-^ i)c + fit fic+1 ' et prenant ensuite pour c la valeur approchée }^; par ceUioj^ la nouvelle valeur approchée de a sera fty + i continuant le même raisonnement , on pourra approcher davantage, en mettant, dans l'expression de a trouvée ci-dessus, à la place de c sa valeur exacte ^—ï — > ce qui donnera et prenant ensuite pour d sa valeur approchée ^; desorte qu'on aura pour la quatrième approximation la quantité et ainsi de suite.

The text on this page is estimated to be only 25.77% accurate

ADDITIONS. «97 De là il est facile de voir que si par le moyen des nombres $\frac{y}{x}$, $\frac{y'}{x'}$, etc., on forme les expressions suivantes $C = \frac{yB+A}{yB'+A}$, $C' = \frac{y'B'+A}{y'B'+A}$, etc., etc. on aura cette suite de fractions convergentes vers la quantité a , $A^{\wedge} B^{\wedge} C^{\wedge} D E F A'' B'^{\wedge} O' D'' E'^{\wedge} F'^*$. Si la quantité a est rationnelle, et représentée par une fraction quelconque $\frac{p}{q}$, il est évident que cette fraction sera toujours dans la série précédente; puisque dans ce cas la fraction continue sera terminée, et que la dernière fraction de la série ci-dessus doit toujours équivaloir à toute la fraction continue. Mais si la quantité a est irrationnelle ou transcendante alors la fraction continue allant nécessairement à l'infini; on pourra aussi pousser à l'infini la série des fractions convergentes. 11. Examinons maintenant la nature de ces fractions; et d'abord il est visible que les nombres $\frac{y}{x}$, $\frac{y'}{x'}$, etc. doivent aller en augmentant, aussi bien que les nombres $\frac{y}{x}$, $\frac{y'}{x'}$, etc. car $\frac{y}{x} < \frac{y'}{x'}$. si les nombres $\frac{y}{x}$, $\frac{y'}{x'}$, etc. sont tous positifs les nombres $\frac{y}{x}$, $\frac{y'}{x'}$, etc. seront aussi tous positifs, et Ton aura évidemment $B^{\wedge} A$, $C > B^{\wedge} D > C$, etc.* et $jB^* = ou > ^{\wedge} S C^* > iSD >> C'$, etc.^o. Si les nombres t , f , y , etc. sont tous ou en partie n^e

The text on this page is estimated to be only 25.97% accurate

Skⁱ ADDITIONS. tifs [^] alors parmi lei nombres ^{^^} B, C, etc. et A[^], B[^], ^{^>3|°} y en aura de positifs et de négatifs; mais, dans ce cas[^] on considère que l'on a en général par les formules précédentes I? d où l'on voit d'abord que si les nombres a, fi, y, etc. sont différents de l'unité, quels que soient d'ailleurs leurs signes[^] on aura nécessairement[^] en faisant abstraction des signes[^] -i plus grand que l'unité; donc -[^] moindre que l'unité, parcoih séquent -[^] plus grand que l'unité, et ainsi de suite; donc B plus grand que A, C plus grand que B, etc. Il n'y aura d'exception que lorsque parmi les nombres ^{^> ^9} y» ^{^tc.} il s'en trouvera d'égaux à l'unité; supposonsj par exemple, que le nombre y soit le premier qui uà égal à ± 1 ; on aura d'abord B plus grand que A, mais dea moindre que B, s'il arrive que la fraction [^]soit de signe dif' férent de [^]; ce qui est clair par l'équation $\text{£}_-, A B \sim \text{'^'}^{\wedge} B'$ parceque[^] dans ce cas[^] j[^]

The text on this page is estimated to be only 29.48% accurate

ADDITIONS. 99 moins que c et c' ne soient de même signe ; donc » puisque y et cT sont les valeurs entières approchées de c et d ces nombres $^{\wedge}$ et $(T$ devront être aussi de même signe; mais la fraction c/A doit être de même signe que y , à cause que y est un nombre $j4$ c entier, et $^{\wedge}$ une fraction moindre que l'unité; donc $Tr^{\wedge}t i^{\wedge}$ seront des quantités de même signe ; parconséquent $-^{\wedge}$ sera une quantité positive. Or on a $c — ^{\wedge}^{\wedge}c'$ donc multipliant par $—$, on aura $JtS — = d — -4- I ; ^{\wedge}C , D$ donc $-^{\wedge}$ étant une quantité positive $^{\wedge}$ il est clair que jr sera, I plus grande que T unité ; donc D plus grand que $£$. ! De là on voit que s'il arrive que dans la série $A^{\wedge} B, C,$ etc. » il se trouve un terme qui soit moindre que le précédent; le terme suivant sera nécessairement plus grand ; desorte qu'en mettant à part ces termes plus petite $^{\wedge}$ la série ne laissera pas d'aller en augmentant Au reste, on pourra toujours éviter, si l'on veut, cet inconvénient, soit en prenant les nombres $*, iS, y^{\wedge}$ etc. tous positifs , soit en les prenant tous différens de l'unité , ce qui est toujours possible. On fera les mêmes raisonnemens par rapport à la série

The text on this page is estimated to be only 19.88% accurate

Soo ADDITIONS. $A^*, B \setminus C \setminus$ etc. dans laquelle on a pareillement -
 $j; = \wedge, \_ = 3, + \wedge, - \wedge. = J + \wedge,$ etc. d'où Ton déduira des conclusions semblables
aux précédentes, la. Maintenant[^] si on multiplie en croix les termes de
Fractions voisines dans la série $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$, etc. on trouveia. $BA' - \wedge JB' = 1$,
 $CB' - BO \wedge AB' - BA' \wedge DO - CD \gg = BO - CB'' \wedge$, etc. d'où je conclus
qu'on aura en général $BA' - AB'' \wedge = I CB' - BO = -1 DO' \wedge CD \} = i$ etc. 2
Cette propriété est très-remarquable[^] et donne lieu à plusieui conséquences
importantes. ABC D*abord on voit que les fractions $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$, etc. doivent
? être déjà réduites à leurs moindres termes ; car si , . par[^] exemple, C et O
avaient un commun diviseur autre que l'unité, le nombre entier $CB \wedge - BO$
serait aussi divijsible par ce même diviseur , ce qui ne se peut , à cause de
 $C5i - \wedge 5C \gg = -1$. Ensuite si on met les équations précédentes sous cette
form[»] $B A \_ i B' A' \sim A'B' C B 1 \epsilon' B' \sim O B y D C \_ 1 D' O \sim OD \wedge E' D' \sim$
 $D'E' \wedge \wedge * \wedge'$

ADDITION S, Soit il est aisé de voir que les différences en ire les fractions voisines de la série $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$, etc. vont continuellement en diminuant y desorte que cette série est nécessairement convergente. Or je dis que la différence entre deux fractions consécutives est aussi petite qu'il est possible; ensorte qu'entre ces mêmes fractions il ne saurait tomber aucune autre fraction quelconque, à moins qu'elle n'ait un dénominateur plus grand que ceux de ces fractions-là. Car prenons, par exemple, les deux fractions $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$; dont la différence est $\frac{1}{6}$ supposons, s'il est possible, qu'il existe une autre fraction $\frac{m}{n}$ dont la valeur tombe entre celles de ces deux fractions, et dans laquelle le dénominateur n soit moindre que 6 ou que 3 ; donc puisque $\frac{m}{n}$ doit se trouver entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$ faudra que la différence entre $\frac{m}{n}$ et $\frac{1}{2}$ soit plus petite que la différence entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$, qui est $\frac{1}{6}$; ou la différence entre $\frac{m}{n}$ et $\frac{1}{3}$ soit plus petite que la différence entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$, qui est $\frac{1}{6}$; mais il est clair que celle-là ne saurait être moindre que $\frac{1}{n}$; donc, si $n < 6$, elle sera nécessairement plus grande que $\frac{1}{6}$; de même la différence entre $\frac{m}{n}$ et $\frac{1}{3}$ ne pouvant être plus petite que $\frac{1}{n}$ sera nécessairement plus grande que $\frac{1}{6}$, au lieu qu'elle devrait être plus petite. i3. Voyons présentement de combien chaque fraction de

The text on this page is estimated to be only 25.62% accurate

o = 30a ADDITIONS. la série $-07 > ^{***}$ approchera de la valeur de la quantité a. JT si Pour cela on remarquera que les formules trouvées dans l'art. 10 donnent $Ab + 1 Bc \wedge A \_ Cd + B \wedge \text{---} Od + B' \_ De + C$ et ainsi de suite. C Donc si on veut savoir de combien la fraction $-rq'f Jffx$ exemple , approche de la quantité $\wedge$ on cherchera la différence C , . , $Cd + B$ entre $-r^\wedge$ et c ; en prenant pour a la quantité $'7^\wedge r^\wedge \text{---} \wedge \wedge$ aura C $\_ Cd + B$ C $\_ BO \text{---} CB' 1 \wedge 0 \sim Od + B' O \sim (F(\hat{O}3 + B^\wedge \sim C^\wedge Od + B^\wedge y$ à cause à $\_ BO \text{---} CB^\wedge = 1 >$ (art. 12); or comme on suppose que J soit la valeur approchée de d, ensorte que la différence entre d et $\wedge$ soit moindre que Tunité, (art. 3), il est clair que la valeur de d sera renfermée entre les deux nom* bres $\wedge$ et * et $D^\wedge \pm 0$; donc la différence a $\text{---} \wedge$ sera renfermée entre ces deux limites *** , --- ; d'où Ton pourra C juger de la quantité de l'approximation de la fraction --- .

The text on this page is estimated to be only 23.51% accurate

ADDITIONS. [. En général on aura $B \sim \frac{1}{2} B^{\{B'c+A'\}} I^{**}$
 — $C \gg C \gg (C \gg j, \text{ etc. seront alternativement poss et négatives ; c'est-à-dire}$
que ces fractions seront alterrement plus petites et plus grandes que la
quantité a. s plus, comme $\frac{1}{2} C \gg, cf \gg$

$B'y+A'>C \setminus C d+B'>O i^{\wedge}+B'>D \setminus \text{ etc. omme cura } b < D \hat{=} + C \% \text{ etc.}$
)rte que les erreurs qu'on commettrait en prenant les frac

The text on this page is estimated to be only 27.94% accurate

504 A D D I T I O N S. tions $-j^{\wedge}$, $\blacksquare^{\wedge}$, $\wedge$, etc. pour la valeur de a , seraient t« tivement moindres que $\wedge^i \wedge^i j^{\wedge} r^{\wedge}$ » 'OD $\wedge \wedge \wedge^* \wedge^i$ " $\wedge^* \wedge^i$ H $\wedge \wedge \wedge \wedge \wedge^{\circ}$ $\wedge$ » C $\wedge$ « $\wedge^0$ B $\wedge^i$ O + B $\wedge^i$ ' 0 {P' + oy $\wedge \wedge^i \wedge^i$ d* o A Ton Yoit combien ces erreurs sont petites, et combien] elles vont en diminuant d'une fraction à Tautre. Mais il y a plus : puisque les fractions $-jj$, $-\wedge$, $y > j$, etc] sont alternativement plus petites et plus grandes que la qoaih tité a y il est clair que la valeur de cette quantité se trouvera toujours entre deux fractions consécutives quelconques; or nous avons vu ci -dessus $\wedge$ (art. la), qu'il est impossibk qu'entre deux telles fractions puisse se trouver une antre fiao* tion quelconque qui ait un dénominateur moindre que l'un di ceux de ces deux fractions; d'où l'on peut conclure que cunedes fractions dont il s'agit $\wedge$ exprime la quantité c(Jm exactement que ne pourrait faire toute autre fraction quelcofi-l . cnie , dont le dénominateur serait plus petit que celui dé la'frM tion suivante ; c'est-à-dire que la fraction $j q$, par exem] $\wedge^i$ E exprimera la valeur de a plus exactement que toute autre tion — , dans laquelle n serait moindre que D. n i5. Si les valeurs approchées « , i8 , > , etc. sont toutes ou en partie plus grandes que les véritables , alors parmi ces no $\wedge$ nbrei il y en aura nécessairement de négatifs , (art. 3), ce qui rendra aussi négatifs quelques-uns des termes des séries A $\wedge$ Bf €, etc. A\ B $\wedge$, C\ etc. parconséquent les différences enW les fractions " $j l$) " $\hat{o} i > j^{\wedge} f^{\wedge \wedge} c$. et la quantité a , ne seront pta alternativement positives et négatives, comme dans $\wedge^e$ cas $\wedge$ l'article précédent; desorte que ces fractions n'auront plt» l'avantage de donner toujours des limites en plus et en moutf

The text on this page is estimated to be only 26.57% accurate

A D D I t l O N â. 3o5 dé la quantité a, ayanta^e qiii mē
parâitd*ane très-grande initportance ', et- (^i doit parc[>]ti!séqûetit faire
préférer toujours dans la pratique l'es fractions continues où les
dénonûnateur[^] seront tous positifs. Ainsi nous ne considérerons plus dans la
faite que des fractions de cette espèce. jé R {[^] Ty 16. Considérons donc la
série — . —, ^, —, etc. dans u» x> o iJ laquelle les fractions sont
alternativement plus petites et pliis grandes que la quantité a, et il est clair
qu'on pourra partager cette série en ces deux-ci : ACE • 2"»' ^' F' . £i» j)i>
j^i» ®*^* donc la première sera composée de fractions toutes plus pe'tites
que a, e[^] qui iront en augmentant vers la quantité a; donc la seconde sera
composée de fractions .toutes plus grandes que a , mais qui iront en
diminuant vers cette même quantité. Examinons chacune de ces deux séries
en particulier : dans la première on aura/ (^art. 10 et is) , • c A[^] ~A'C[^] E C
> etc. et dans la seconde on aura « B D ^ • . 5«" D' '^jB'J)^ ■ D F F' ""^ D' F"
etc. jOr «i les nombres y,i',tt etc. itai.ent.ton\$ ^f»an à l'unité ^ fl. V

The text on this page is estimated to be only 26.74% accurate

3o6 ADDitlOHS. on pourrait prouver , comme dans Vart. 1A, qu'entre deux fractions consécutives quelconques de l'une ou de l'autre d'une des deux séries précédentes , il ne pourrait jamais se trouver aucune autre fraction dont le dénominateur serait moindre que ceux de ces deux fractions; mais il n'en sera pas de même lorsque les nombres y, i , etc. seront différents de l'unité car, dans ce cas on pourra insérer entre les fractions dont «'agit y autant de fractions intermédiaires qu'il y aura d'unité dans les nombres $y, i, \dots$, etc. et pour cela il n'y aura qu'à mettre successivement dans les valeurs de Ci Oy {art. 1o), les nombres $i, a, 3$, etc. y à la place de y et de même dans les valeurs de Z et D , les nombres $i, 3$, etc. à la place de i , et ainsi de suite. l'j. Supposons par exemple que y soit $c=4$ » $c=4B + A, e = 45$ » + -irf» , , . A C et on pourra insérer entre les fractions $\frac{B+A}{cB+A}$ $\frac{5B+A}{B'+A}$ $\frac{B'+A}{ZB'-A}$ Or il est clair que les dénominateurs de ces fractions forment une suite croissante arithmétique depuis A jusqu'à e et nous allons voir que les fractions elles-mêmes croissent successivement depuis $\frac{B+A}{cB+A}$ jusqu'à $\frac{B'+A}{ZB'-A}$, en sorte qu'il serait impossible d'insérer dans la série $\frac{B+A}{cB+A}$ $\frac{B'+A}{ZB'-A}$ aucune fraction dont la valeur tombât entre celles de deux fractions consécutives, et dont le dénominateur se trouvât aussi entre ceux des mêmes fractions. Car h en prend les diiF

The text on this page is estimated to be only 29.32% accurate

Ad b I T I o N s 3o7 rences entre les {ractions précédentes , on aura , à cause de $B + A A 1 B^J A^A^ ' A^i B' + A') nB + A B + A 1 SB + A stB + A 1 3B' + A' ai5'+>/''''(ai5' + ^\ll)(3^' + ^0 C ZB + A 1 O ZB^ + A^{\sim} (J5B^ + A') b ' A B 4--//$ d'où Ton voit d'abord que les fractions $\frac{---}{---}$, $\frac{^}{^}$, $\frac{^-}{^-}$. etc. $A^ Jo^fA^$ vont en augmentant, puisque leurs différences sont toutes positives; ensuite, comme ces différences sont égales â l'unité divisée par le produit des deux dénominateurs , on pourra prouver par un raisonnement analogue à celui que nous avons fait dans l'art. iq, qu'il est impossible qu'entre deux fractions consécutives de la série précédente , il puisse tomber une fraction quelconque $-*$, si le dénominateurn tombe entre les dénominateurs de ces fractions , ou , en général ; s'il est plus petit que le plus grand des deux dénominateurs. De plus, comme les fractions dont nous parlons , sont toutes B plus grandes que la vraie valeur de $a^$ et que la fraction $\frac{---}{---}$ est la plus petite , il est évident que chacune de ces fractions approchera de la quantité a , ensorte que la différence en Sjsra B plus petite que celle entre la même fraction et la fraction $\frac{^}{^}$; tr on trouve V

The text on this page is estimated to be only 21.62% accurate

308 ADD 1 t I O N s. A B 1 A^ B' A'B^ B +A B 1 B^^A^ B*
 (^B^ + A')B^ tkB +A B 1 siB'+A' B' {!iB^ + A')B^ 5B +A B _ 1 > . ZJSi +
 A' T' ~ {ZB' + A') B' C B _ 1 O j5* ~ OB" Donc y puisque ces diffÉrences
 sont aussi égales à l'unitc . divisée par le produit des dénominateurs, on y
 pourra appliquer le même raisonnement de Tarticle 12^ pour prouver
 qu'aucune fraction -^ ne saurait tomber entre une quelconque des fractions
 -5- , ' / •>■ , ' , ^ t etc. et la fraction -bt» A^' B^+A^' i^B^+A^' ^' si le
 dénominateur n est plus petit que celui de la même frao* tion ; d'où il suit
 que cliacUne de ces fractions approche plni de la quantité n "que ne pourrait
 faire toute autre fraction plus petite que a, et qui aurait un dénominateur
 plus petit ^ c'est-àdire, qui serait conçue en termes plus simples. 1 8. Nous
 n'avons considéré dans l'art, précéd. que les fractions intermédicures «ntre -
 ^ et ^, il en sera de même dei c • . »• - CE E G [tractions intermédiaires
 entre y^ et — , entre -^^ ®t 7^ * ^*^* si s , }f y etc. sont des nombres plus
 grands que l'unité. On peut aussi appliquer à l'autre série -^ , -^ , ^, etc. tout
 ce que nous venons de dire relativement à la première -7-, ■^, ^, etc. desorte
 que si les nombres ^, Ç, etc. sont

The text on this page is estimated to be only 19.13% accurate

AD 15 1 T I O N s. 3©9 plus grands que Tunité y on pourra insérer entre les fractions ■Î7- et ■=— , entre -rr-et tt» etc. différentes fractions intermédiaires toutes plus grandes que a ^ mais qui iront continuellement en diminuant y et qui seront telles qu'elles exprimeront la quantité a plus exactement que ne pourrait faire aucune autre fraction plus grande que (Z^ et qui serait conjue en termes plus simples. De plus y si jS est aussi un. nombre plus grand que Tunité , on pourra pareillement plaicer ayant la fraction -^ les fractions ji + i s.4+1 ZA + i _ .. ,, iS^+i . B — — > , — g — , etc. jusqu'a — jg— , savoir^, et ces fractions auront ljesi mêmes Ql'opriétés que les autres fractions intermédiaires» De cette manière on aura dt>nc ces deux suites complètesde fractions convergentes vers la quantité a. Fractions croissantes et plus petites que a. iL ^ + ^ aig +A ZB +A A^> B^ + J^' 2J5' + ^"* 3^'-^^^®*^• yB '+'A C D +C 2Z7 + C 3D + C gZ> +C E F +E eD' + C' ' £î • ^Fi + El ' ®^^- ®*^-*^Fractions décroissantes et plus grandes que a... __, __, — y— > etc. ^C + B D E -^D ^0^.^»' £M' £:»4.Z>* , etc. etc. etc.

310 ADDITIONS. Si la quantité a est irrationnelle ou transcendante, les deux séries précédentes iront à l'infini, y compris la série des fractions $\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^3}, \dots$ etc. que nous nommerons dans la suite fractions principales, afin de les distinguer des fractions intermédiaires, va d'elle-même à l'infini (art. 10). Mais si la quantité a est rationnelle et égale à une fraction quelconque $\frac{p}{q}$, nous avons vu dans l'article cité que la série dont il s'agit sera terminée et que la dernière fraction de cette série sera la fraction même $\frac{p}{q}$, donc cette fraction terminera aussi nécessairement une des deux séries ci-dessus, mais l'autre série pourra toujours aller à l'infini. En effet, supposons que $\frac{p}{q}$ soit le dernier dénominateur de la fraction continue, alors $\frac{p}{q}$ sera la dernière des fractions principales, et la série des fractions plus grandes que a sera terminée par cette même fraction $\frac{p}{q}$; ou l'autre série des fractions plus petites que a , se trouvera naturellement arrêtée à la fraction $\frac{p}{q}$ qui précède $\frac{p}{q}$; mais pour la continuer il n'y a qu'à supposer que le dénominateur qui devrait suivre le dernier dénominateur q , soit $q + 1$ (art. 3); desorte que la fraction qui suivrait $\frac{p}{q}$, dans la suite des fractions principales, serait $\frac{p}{q+1} + \frac{1}{q(q+1)}$ ou par la loi des fractions intermédiaires, il est clair qu'à cause de $s = \frac{1}{x}$, on pourra insérer entre les fractions $\frac{p}{q}$ et $\frac{p}{q+1}$;

ADDITIONS. S'il une infinité de fractions intermédiaires qui
 seront etc. Ainsi, dans ce cas, on pourra, après la fraction $\frac{a}{b}$ dans la
 première suite, placer encore les fractions intermédiaires dont nous parlons,
 et les continuer à l'infini. Problème. 13. Une fraction exprimée par un grand
 nombre de chiffres, étant donnée, trouver toutes les fractions en moindres
 termes, qui approchent si près de la vérité, qu'il soit impossible d'en
 approcher davantage sans en employer de plus grandes. Ce problème se
 résoudra facilement par la théorie que nous allons expliquer. On
 commencera par réduire la fraction proposée en fraction continue par la
 méthode de l'art. 4^e ayant soin de prendre toutes les valeurs approchées
 plus petites que les véritables, pour que les nombres p, q, r, s etc. soient tous
 positifs; ensuite, à l'aide des nombres trouvés p, q, r, s etc. on formera, A, B, C, D
 d'après les formules de l'art. 10, $\frac{A}{B}, \frac{A+C}{B+D}, \frac{A+2C}{B+2D}$ etc. dont la dernière sera
 nécessairement la même que la fraction proposée, parceque, dans ce cas,
 la fraction continue est terminée. Ces fractions seront alternativement plus
 petites et plus grandes que la fraction donnée, et seront successivement
 conçues en termes plus grands; et de plus elles seront telles que chacune de
 ces fractions approchera plus de la fraction donnée, que ne pourrait faire
 toute autre fraction quelconque qui serait conçue en termes moins simples.
 Ainsi on aura par ce moyen toutes les fractions conçues en moindres termes
 que la proposée, qui pourront satisfaire au problème. 4

5ia ADDITIONS. Qae si on veut considérer en particulier les fractions plus petites et les fractions plus grandes que la proposée , on insérera entre les fractions précédentes autant de fractions intermédiaires que Ton pourra, et on en formera deux suites de fractions convergentes, les unes toutes plus petites et les autres toutes plus grandes que la fraction donnée , {art. 16, 17 et 18); chacune de ces suites aura en particulier les mêmes propriétés ABC que la suite des fractions principales $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$, etc. car les fractions dans chaque suite , seront successivement conçues en plus grands termes , et chacune d'elles approchera plus de la fraction proposée , que ne pourrait faire aucune autre fraction qui serait pareillement plus petite ou plus grande que la proposée, mais qui serait conçue en termes plus simples. Au reste il peut arriver qu'une des fractions intermédiaires d'une série n'approche pas si près de la fraction donnée , qu'une des fractions de l'autre série, quoique conçue en termes moins simples que celle-ci; c'est pourquoi il ne convient d'employer les fractions intermédiaires , que lorsqu'on veut que les fractions cherchées soient toutes plus petites ou toutes plus grandes que la fraction donnée* Exemple I. 20. Suivant M. de la Caille , l'année solaire est de $365^s 5' 48'' 49''' > ^t$ par conséquent plus longue de $5' 48'' 49'''$ que l'année commune de 365^s , si cette différence était exactement de 6 heures, elle . donnerait un jour au bout de quatre années communes; mais si on veut savoir au juste au bout de combien d'années communes. cette. différence peut produire un certain nombre de jours , il faut chercher le rapport qu'il y a entre $5' 48'' 49'''$ et 6^h on trouve ce rapport $= \frac{1}{100}$, desorte qu'on peut dire qu'au, bout de 86400 années communes, il faudrait intercaler 864 jours pour les réduire à des années tropiques. Or comme le rapport de 86400 à 20929 est exprimé en ter

The text on this page is estimated to be only 25.94% accurate

ADDITIONS. 313 'mes fort grands,' on propose de trouver en des termes plus petits des rapports aussi approchés qu'il est possible de celui-ci. ' On réduira donc la fraction $\frac{H}{H+1}$ en fraction continue par la règle donnée dans l'art. 4. $\frac{2141}{2141+543} = \frac{2141}{2684}$ Connaissant ainsi tous les quotiens $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, etc. on en formera aisément la série — > etc. de la manière suivante : $\frac{4}{7} = \frac{3}{5}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{5}$. OÙ Ton voit que la dernière fraction est la même que la proposée. Pour faciliter la formation de ces fractions /on écrira d'abord, 'comme je viens de le faire ,la suite des quotiens $\frac{a}{b}$ é^éTy},

514 ADDITIONS. etc. et on placera au-dessous de ces coefficients les fonctions f, f^2, f^3 etc. qui en résultent. La première fraction aura toujours pour numérateur b nombre qui est au-dessus, et pour dénominateur l'unité. La seconde aura pour numérateur le produit du nombre a est au-dessus, par le numérateur de la première, plus l'unité, et pour dénominateur le nombre même qui est au-dessus. La troisième aura pour numérateur le produit du nombre qui est au-dessus par le numérateur de la seconde, plus celui de la première; et de même pour dénominateur, le produit du nombre qui est au-dessus par le dénominateur de la seconde, plus celui de la première. Et en général chaque fraction aura pour numérateur le produit du nombre qui est au-dessus, par le numérateur de la fraction précédente, plus celui de la fraction précédente; et pour dénominateur le produit du même nombre par le dénominateur de la fraction précédente, plus celui de la fraction précédente. Ainsi $39 = 7.4 + 1, 7 = 7, 33 = 1.29 + 4, 8 = 1.7 + 1, 128 = 3.33 + 39, 31 = 3.8 + 7, \dots$ ainsi de suite; ce qui s'accorde avec les formules de Fart. 10. Maintenant on voit par les fractions f, f^2, f^3 , etc. que l'intercalation la plus simple est celle d'un jour dans quatre années communes, ce qui est le fondement du calendrier Julien; mais qu'on approcherait plus de l'exactitude en intercalant que sept jours dans l'espace de vingt-neuf années communes, ou huit dans l'espace de trente-trois ans, et ainsi de suite. ... On voit de plus, que comme les fractions f, f^2, f^3 sont alternativement plus petites et plus grandes que la fraction $\frac{1}{24}$ ou $\frac{1}{24} \times$ ou $\frac{1}{24} /$ » l'intercalation d'un jour sur quatre ans sera trop forte, celle de sept jours sur vingt-neuf ans trop faible, celle de huit jours sur trente-trois ans trop forte, et ainsi de suite; j, n

ADDITIONS. 515 mais chacune de ces intercalations sera toujours la plus exacte qu'il est possible dans le même espace de temps. Or si on range dans deux séries particulières les fractions plus petites et les fractions plus grandes que la fraction donnée, on y pourra encore insérer différentes fractions secondaires pour compléter les séries ; et pour cela on suivra le même procédé que ci-dessus, mais en prenant successivement à la place de chaque nombre de la série supérieure « tous les nombres entiers moindres que ce nombre (lorsqu'il y en a). Ainsi en considérant d'abord les fractions croissantes $1, 1, 1, \frac{1}{5}$. $\frac{1}{8} > \frac{1}{39} > \frac{1}{694} > \frac{1}{909A9}$ on voit qu'à cause que l'unité est au-dessus de la seconde, de la troisième et de la quatrième, on ne pourra placer aucune fraction intermédiaire, ni entre la première et la seconde, ni entre la seconde et la troisième, ni entre la troisième et la quatrième ; mais comme la dernière fraction est au-dessus d'elle le nombre $\frac{1}{5}$, on pourra, entre cette fraction et la précédente, placer quatorze fractions intermédiaires, dont les numérateurs formeront la progression arithmétique $865, 556, 425569, 435569$, etc. et dont les dénominateurs formeront la progression arithmétique $6^4, 9^4 + a.1349, 6q4 + 3.1349$, etc. Par ce moyen la suite complète des fractions croissantes sera $A/M, 13X, a^gS, iAJi4, ltee.1, i95y, ftSiAl, Soyie, 3^{*"} 9, 1 * Ji * 39 > T54 > *o4.3 > 33 d A > ATJT i T090 > 743 9" > 87 88 \gg Ai94.fl 47417 5*986 585SS 64ia4 .6g.Q93 75*6 \gg o83i ioi37 > ii486 > ia835 > I4i84 > i5533' 1688a > 7\hat{I} \gg 3T > i958o 1 \gg o9s9* \gg$ • Et comme la dernière fraction est la même que la fraction donnée, il est clair que cette série ne peut pas être poussée plus loin. De là on voit que si on ne veut admettre que des intercalations qui pèchent par excès les plus simples et les plus exactes

The text on this page is estimated to be only 22.88% accurate

,¹⁸ ADDITIONS. tes seront toujours celles d'un jour sur quatre années, ou huit jours sur trente-trois ans, ou de trente-neuf sur soixante-un ans[^] et ainsi de suite. Considérons maintenant les fractions décroissantes^{1^} 3, 16, 1, i et d'abord, à cause du nombre 7 qui est au-dessus de la pⁿ* mière fraction, on pourra en placer six autres ayant celle-ci, dont les numérateurs formeront la progression arithmétique 4 + 1 > 3-4 + ^ > ^4 + 1 ^ c^c > ®t ^o'^^ l^s dénominateurs formeront la progression 1, a, 3, etc.; de même, - à cause du nombre 7, on pourra placer entre la première et la seconde fraction deux fractions intermédiaires; et entre la seconde et la troisième on en pourra placer 15, à cause du nombre 16 qui est au-dessus de la troisième; mais entre celle-ci et la dernière on n'en pourra insérer aucune, parce que le nombre qui se trouve au-dessus de celle-ci, est l'unité. De plus, il faut remarquer que comme la série précédente n'est pas terminée par la fraction donnée, on peut encore la continuer aussi loin que l'on veut, comme nous l'avons fait dans l'art. 18. Ainsi on aura cette série de fractions croissantes. ■i. 9 1.1 17 «1 05 ag «a 95 laS a89 45» 61 1 TTî a > a> "3"> T'y "S"> 6 > "f*" i5 ' " ^ > '3i > 7© > To^ » îTf» iff* 933 109A ia55 i4i P i577 1738 * i899 ao6o aaai a38> ., »ai5> 4 65 > 3Q4. > 343 i ~31Iâ"> 4ai > 4tfo » 4i)U > . bit > TtT» a_543 a 7 04 S569 9i969 178369 a64769 35iiR9 43 7569 gfn oTS'f 6Ô5 > i34?* aaaT?> 43ao7 ^ 64136 ' 85o65 > io5994»**'^ lesquelles sont toutes plus petites que la fraction proposée[^] et en approchent plus que toutes les fractions qui seraient conçues en termes moins simples. On peut conclure de là, que si on ne voulait avoir égard qu'aux intercalations qui pécheraient par défaut, les plus simples et les plus exactes seraient celles d'un jour sur cinq ans, ou de deux jours sur neuf ans, ou de trois jours sur treize ans ^ etc. »

ADDITIONS. 317 Dans le calendrier grégorien on intercale
 seulement vingt-dix-sept jours dans quatre cents années. On voit par
 la table précédente qu'on approcherait beaucoup plus de l'exactitude y
 en intercalant cent neuf jours en quatre cent cinquante années. Mais il faut
 remarquer que dans la réformation grégorienne on s'est servi de la
 détermination de l'année donnée par Copernic, laquelle est de $365^{\frac{5}{8}} + 49'$
 flo*. En employant cet élément, on aurait, au lieu de la fraction mH, celle-ci
 $\frac{1}{1000}$, ou bien $\frac{1}{1000}$; d'où Ton trouverait par la méthode précédente, les quotiens
 $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{3}$, et delà ces fractions $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{3}$. à 31 JLiâ 5A2. qui
 sont, à l'exception des deux premières, assez différentes de celles que
 nous avons trouvées ci-dessus. Cependant on ne trouve pas parmi ces
 fractions la fraction adoptée dans le Calendrier grégorien; et cette
 fraction ne peut pas même se trouver parmi les fractions intermédiaires
 qu'on pourrait insérer dans les deux séries $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ et $\frac{1}{4}$, car il est clair
 qu'elle ne pourrait tomber qu'entre ces deux dernières fractions, entre
 lesquelles, à cause du nombre 3 qui est au-dessus de la fraction $\frac{1}{4}$, il peut
 tomber deux fractions intermédiaires qui seront $\frac{1}{8}$ et $\frac{1}{6}$; d'où l'on voit qu'on
 aurait approché plus de l'exactitude, si dans la réformation grégorienne on
 avait prescrit de n'intercaler que quatre-vingt-dix jours dans l'espace de
 trois cent soixante et onze ans. Si on réduit la fraction $\frac{1}{4}$ à avoir pour
 numérateur le nombre 86400, elle deviendra $\frac{1}{86400}$, ce qui supposerait
 l'année tropique de $365^{\frac{5}{8}} + 49' + 12''$. Dans ce cas, l'interpolation
 grégorienne serait tout-i-fait exacte, mais comme les observations donnent
 l'année plus courte de plus de $\frac{1}{4}$, il est clair qu'il faudra nécessairement,
 au bout d'un certain espace de temps, introduire une nouvelle interpolation, "

The text on this page is estimated to be only 24.53% accurate

3i8 ADDITIONS. Si on voulait 8*en tenir à la détermination de M. de k Caille y comme le dénominateur 97 de la fraction ^^ se troufi entre les dénominateurs de la cinquième et de la sixième des fractions principales trouvées ci-devant, il s'ensuit, de ceqne nous avons démontré {art. i4) > io6> n3> 33ioa > 33a 15 > 663i7 > T953»' Î653iî* 1, S, 1, i4, a, a, 11464-0 8 4878943 54i935i 8oi43857 1657o7o65 ft45g5o9«« 3b49i3 > i3uoiao> i7a5o33 > 855105»^ 9 ôa746i97 > 78^56779 * 1,' 2, 2, a, a, 411557987 ie6896P8P6 a54949i779 6i6795o454 1 48853 9a687 I3'ooa97t) > 340*6a73i > 8ii3a843» > 19633*9607 > 4.738167 65» » 1, 84, a, 1, tfio53343i/ii i7 833-66ai653i 3587785776ao3 fi37il5i 99*734 67oi487a59 > Sb^t 6309 7408 1 7Tiaoa768ao75 > 1 7o969o7794lf3 ' 1, i5, 3, «95893'^76«P37 1 3 9755ai 85a6789 4a8flfl45933493o4 a85i7i*46ioô8> 444854b7 7oa853 > i3t>3«8i«157oi 1 7 t

ADDITIO^s. 319 »3, ' 1. 4; S7o667493«6677ii 6l 3i8995ft54i
 7o4S 3 e > A 6 a 7 3e 33 73 5 9 >l • Sfti649iOii6ii4374> TTO5T97i?
 5TÎ449i * 96*76877a6V5a33« > a. S, e, «lâo8iU6à33ft9iè7>
 iTSTf^{tîîî}TTg 734o > 8 4 A 4685 i 7 4* 6 5 1 3 a o 7. * 1. . 173
 '979'3453aa8937ooi 3-° ^A^°A° ^ '-^A°-3 73588 ^ Ces fractions seront
 donc alternativement plus petites et plus grandes que la vraie raison de la
 circonférence au diamètre , c'est-à-dire que la première f sera plus petite , la
 seconde -^plus grande ^ et ainsi de suite ; et chacune d'elles approchera plus
 de la vérité que ne pourrait faire toute autre fraction qui serait exprimée en
 termes plus simples , ou / en général , qui aurait un dénominateur moindre
 que le dénominateur de la fraction «oivante^ desorte que Ton peut assurer
 que la fraction 2. approche plus de la vérité que ne peut faire aucune autre
 fraction dont le dénominateur serait moindre que 7 ^ de même la fraction ^
 approchera plus de la vérité que toute autre fraction dont le dénominateur
 serait moindre que 106^ et ainsi 4esi autres. Quant à l'erreur de chaque
 fraction , elle sera toujours moindre que l'unité divisée par le produit du
 dénominateur de cette fraction par celui de la fraction suivante. Ainsi
 l'erreur de la fraction ^ sera naoindre que }, celle de la fraction ^ sera
 moindre que 77x05 > ®* ^^ ^® suite. Mais en même temps l'erreur de
 chaque fraction sera plus grande que l'unité divisée par le produit du
 dénominateur de cette fraction ^ par la somme de ce dénominateur^ et du
 dénominateur de la fraction suivante y desorte que l'erreur de la fraction f
 sera plus grande que y, celle de la fraction ^ plus grande que 77773, et ainsi
 de suite, {art. i4)« âii q^ voirait maintenaat sépara les fractions plus petites

The text on this page is estimated to be only 24.11% accurate

5a6 additions; que le rapport de la circonférence au diamètre , d'avec les pis grandes, on pourrait , en insérant les fractions intermédiaires conyenales } Les $\frac{1}{2}$ former deux suites de fractions , les unes croissantes et les autres décroissantes vers le vrai rapport dont 3 agit ; on aurait de cette manière des fractions plus petites que $\frac{1}{2}$ et plus grandes que $\frac{1}{2}$. 5 » 5 41 69 91 121 151 181 211 241 271 301 331 361 391 421 451 481 511 541 571 601 631 661 691 721 751 781 811 841 871 901 931 961 991 1000

Fractions plus grandes que $\frac{1}{2}$. 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 1000

Chaque fraction de la première série approche plus de la vérité que ne peut faire aucune autre fraction exprimée en termes plus simples , et qui pècherait aussi par défaut ; et chaque fraction de la seconde série approche aussi plus de la vérité que ne peut faire aucune autre fraction exprimée en termes plus simples et pèchant par excès. Au reste ces séries deviendraient fort prolixes, si l'on voulait les pousser aussi loin que nous avons fait celle des fractions principales donnée ci-dessus. Les bornes de cet Ouvrage ne nous permettent pas de les insérer ici dans toute leur étendue; mais on peut les trouver au besoin dans le chap. XI de l'Algèbre de Wallis, (Opus Mathematicum vol. II.) Remarque, 22. La première solution de ce problème a été donnée par Wallis, dans un petit Traité qu'il a joint aux Suites

À b 6 I T i 6 N *. èai tñiùnés à^Sorrdcius , et on la retnnive dans
 l-ettârôit cité dé soA Algèbre ; mais la méthode de cet auteur est indirecte et
 fort laborieuse. Celle que nous venons dé donner est due à Huy^ghens\ et
 on doit la regarder comme une des principales dédouver.tes dé ce grand
 géomètre. La construction de son automate planétaire paraît en avoir été
 Toccasion. En effet, il est clair que potir pouvoir représenter exactement les
 mouvemens et les périodes des planètes, il faudrait employer des roues où
 les nombres des dents fussent précisément dans les mêmes rapports que les
 périodes dont il s*agit ; mais comme on ne peut pas multiplier les dents au-
 delà d'une certaine limite dépendante de la grandeur de la roue , et que
 d'ailleurs les périodes des planètes sont incommensurables, où du moins ne
 peuvent être i-eprésentées avec une certaine exactitude que par de
 trèsgrandà nombres , on est obligé de se contenter d'un à-peu-près , tet la
 difficulté se réduit à trouver des rapports exprimés en plus petits nombres ,
 qui approchent autant qu'il est possible de la Vérité , et plus que ne
 pourraient faire d'autres rapports quelbonques qui ne seraient pas conçus en
 termes plus grands. ^ ■ • • - » • ^' Huyghens irésoiit cette question par le
 moyen des frac-. tions continues , comme nous l'avons fait ci-dessus ; il
 donné la manière de former ces fractions par des divisions continuelles , et
 il démontre ensuite les principales propriétés des fractions convergentes qui
 en résultent , sans oublier même les tractions intermédiaires. Voyez , dans
 ses Opéra posthuma , le Traité intitulé : Descriptio automati planetarii.
 D'autres grands géomètres Ont ensuite considéré les fractions continues
 d'une nianière plus générale. On trouve surtout dans tes commentaires de
 Pétersbourg, (tom. IX et XI des anciens, et tom. iX et XI des nouveaux), des
 Mémoires de Euler remplis des recherches les plus sages et les plus
 ingénieuses sur ce sujet; mais la théorie de ces fractions, envisagée du côté
 arithmétique qui en est le plus intéressant, n'avait jpas encore été , ce tne
 semble , autant cidtivée qu'elle le mé*^ â. X \

The text on this page is estimated to be only 20.06% accurate

Zaa A D P I T I o or s. ritait ; c est ce qui m*a engagé à en composer ce petit IVaité» pour la rendre familière aux géomètres. Voyez ausà les Uémoires de Berlin pour les années 1767 et 1768. Au reste cette théorie est d'un usage très^tendu dans toott l'arithmétique ^ et il y a peu de problèmes de cette science ^ au moins parmi ceux pour lesquels les règles ordinaires ne suffissent pas, qui n'en dépendent directement ou indirectement M. Jean Bernoulli vient d'en faire une application heureuse et utile dans une nouvelle espèce de calcul qu'il a imaginé pour faciliter la construction des tables de parties prc^ortionjielles. Voyez le tome I de son Recueil pour les astronomes. \

The text on this page is estimated to be only 25.98% accurate

Au $\hat{I} > I T I o N$ it $3a3 \wedge^* e \cdot " \blacksquare I \blacksquare \gg "i \blacksquare ,$. Il il, .1 $iiiMi^i$. II'. $\blacksquare I$,
. 'I tW PARAGRAPHE IL E j- Méthodes pour déterminer les nombres entiers E ijui donnent les minima des formules indé $\wedge$ s terminées à deux inconnues. JLiES qm $\wedge$ stions dont nous allons nous Occuper $>$ et pour les-» quelles nous allons donner des méthodes directes et générales $\wedge$ sont d'un genre entièresaent nouveau dans l'analyse indéter- $\wedge$ mmée. On n'avait point encore appliqué cette analyse aux problèmes de maximîs et minimis , nous nous proposons ici de déterminer les minima des fractions rationnelles $\wedge$ entières et homogènes à deux inconnues , lorsque ces inconnues doivent être des nombres entiers. Cette recherche nous conduira encore à la théorie des fractions continuas $\wedge$ et servira à don $\wedge$, ner à cette théorie de nouveaux degrés de perfection. « PROBLEME I. $\hat{a}3$. Etant donnée une quantité posiitive a, et supposant qu9 y et z ne puissent être que des nombres entiers positifs et pre- $*$ m $\wedge$ iejs entre eux , on demandé de trouver les valeurs de ces nombres qui rendront la formule $y - az$ $zi7t$ minimum (aistraction faite du signe) , relativement à tous les nombres plus petits qu'où pourrait substituer pour y et z. Soient p et q des nombres entiers et premiers entre eux $\wedge$ qui , étant substitués pour y et a dans la formule $y - az$, la rendent plus petite que ai 9n y substituait d'autres nombres moindres que p et q. Donc prenant pour r et $\wedge$ des nombres quelconques entiers-positifs et premiers entre eux, mais moindres que p et 9, il faudra qi $\wedge$ e la valeur $4e p - a\grave{c}soitmoin^{*}\wedge$

The text on this page is estimated to be only 19.65% accurate

5¹² A D D I t I o N s; dire que celle à $r - as$, abstraction faite des signes de ces quantités, c'est-à-dire, en les prenant Tune et Tautre positivement. Prenons r et s tels que l'on ait $ps - qr = zt$: 1, le signe supérieur ayant lieu lorsque $p \sim^+ aq$ sera positif, et l'inférieur, lorsque $p - aq$ sera négatif. (Nous verrons, dans un Moment, qu'il est toujours possible de trouver des nombres qui satisfassent à cette condition). Je vais prouver que tous les autres nombres moindres que p et q , qu'on substituerait pour y et z , rendraient la formule $j^+ - az$ (abstraction faite du signe) plus grande que $p - aq$ et que $r - as$. En effet, il est clair qu'on peut supposer en général $^+ = pf + m$, $a = ^+$ et u étant deux inconnues; or par la résolution de ces équations on a $ps - qr = ^+ - ps$ donc, à cause de $j: ^+ - (jfr = \pm 1, ^+ * f = \pm 1 (jy - rz), uz = \pm (^+ qy - pz)$; d'où l'on voit que $^+$ et u seront toujours des nombres entiers puisque p, q, r, s et y, z sont supposés entiers. Donc $^+$ et u étant des nombres entiers, et p, q, r, s des nombres entiers positifs, il est clair que pour que les valeurs de $^+$ et u soient moindres que celles de p et q , il faudra nécessairement que les nombres t et u soient des signes différens. Maintenant je remarque que la valeur de $r - as$ sera aussi de différent signe que celle de $p - aq$; car faisant $p - aq = zP^+ r - as = R$, on aura $P - nJ^{++} - i - r = a - f - , = a - l : H 9 - y ^+ i$

The text on this page is estimated to be only 21.52% accurate

donnQ 4ôno A p p I T I o N 9. 3a5 q S ' qs* q s qs* done ,
puisque'on suppose que Iç signe ambigu soit pris conformément à celui de la
quantité $p^{^^}$ aq ou pj. Il f«iudraque la P R quantité $-^{\wedge} \text{ — —}$ soit positive ,
si P est positif, et négative, si P est négatif; or , comn[^]e [^].est

The text on this page is estimated to be only 25.35% accurate

Sa6 ADDITIONS* les signes ambigus étant à volonté ; or , cela
 suit éyidctnmentâi la théorie des fractions continues ; mais on peut aussi le
 démontrer directement et indépendamment de cette théorie. Car k difEculté
 se réduit à prouver qu'il existe nécessairement un nombre entier positif et
 moindre que p , lequel étant pris pour r , rendra q rit: i divisible par p ; or
 supposons qu*on substitue successivement à la place de r les nombres
 naturels $1, 2, 3, \dots$ jusqu'à p , et qu'on divise les nombres $=!;$; i , $\hat{a}^i$ ih i , Zq
 ± 1 , etc. p $H;$: 1 par p , on aura p restes moindres q_i » p , qui seront
 nécessairement tous difterens les uns des autres; car si , par exemple
 $\wedge m q d t i e t n q \wedge i \wedge$ (m et n étant des nombres entiers diiférens qui ne surpassent
 pas p , étant di^TÎsés par p , donnaient un même reste , il est clair que leur
 différence , $(m - n)$, devrait être divisible par p ; or c'est ce qui ne se
 pe^t, à cause que q est premier avec p , et que $i - n$ est un nombre moindre
 que p . Donc puisque tous les restes dont il s'agit , sont des nombres entiers
 positifs moindres que p et diiférens entre eux , et que ces restes sont au
 noinbre de p il est clair qu'il faudra nécessairement que le zéro se trouve
 parmi ces restes, et conséquemment qu'il y ait un desQombrei $q \pm i$ y $Qq \pm i$
 $, 5q \pm 1$, etc. $p q \pm i$ qui soit divisible par p ; or il est clair que ce ne peut être
 le dernier; ainsi il y aura fiurement une valeur de r moindre que p , laquelle
 rendra $Yq \wedge \setminus$ divisible par p ; et il est clair en même temps que le quotient
 sera moindre que $q \setminus$ donc il y aura toujours une valeur entière et positive de
 r moindre que p , et une autre valeur pareille de s et moindre que q ,
 lesquelles satisferont à l'équation $5 = \wedge \wedge \wedge$ ou $p \wedge \wedge \wedge r = r \pm i$, â4* On voit
 parla que les nombres r et s sontparni lu nombres moindres que p et q ^
 ceux qui reQâent la formule $y = az$ la plus petite. Nous dénoterons pour
 plu? ^e «mpUcité les nombres $r \wedge \wedge \setminus$

The text on this page is estimated to be only 21.01% accurate

i D D I T I O If s. Sa/ par p' et $q^\wedge$; on aura ainsi la condition pq'
 — qp' — $\pm i'y$ et les quantités $p^\wedge - aq$, $p^\wedge - ^\wedge aq^\wedge$ seront les deux minima
 consécutifs dans la série des valeurs de $^\wedge$ — az, en prenant pour V et z tous
 les nombres qui ne surpassent pas $\text{pet } q$: ces minima seront de signes
 contraire» » et le second immédiatement plus grand que le premier. Il est
 clair qu'on peut trouver de même .deux autres nombres p'' et $^\wedge$ moindres
 que $p^\wedge$ et $q^\wedge$, et qui aient avec ceux-eî la même relation que $p^\wedge$ et $q^\wedge$ ont
 avec p et q. Ainsi $^\wedge \text{ comm} \gg p > .^\wedge aq^\wedge$ est de signe contraire $\text{kap} — a\text{ç}$ » il
 faudra faire $PY' — 9^\wedge p'' = rpi$; et la quantité $p'' — cqf''$ sera de signe
 contraire à $p^* — aq^\wedge$ et plus grande que celle-ci $^\wedge$ mais en même temps elle
 sera plus petite que toute autre valeur $\text{dey} — az$ tant que $j^\wedge$ et z seront
 moindres que p^* et '. En continuant îe même raisonnement, on trouvera
 encore des nombres p''^* , $\text{ç}''^*$ moindre» $\text{que } p''$, $q^\wedge \setminus$ tels que $pi > \text{ç} \gg \text{îi} — q^\wedge y_{ii}$
 $= \pm i 1$, et qui rendront la quantité $p''' — a^\wedge'''$ du signe contraire a $\text{pit} —$
 $aqtx$ et plus grande que $p'' — a^\wedge'^* >$ niais moindre que si on prenait pour p'''
 et $\text{ç} \gg$ d'autres nombres moindres que p'' et $^\wedge$, et ainsi de suite. On aura de
 cette manière deux suites de nombres entiers décroissans p , $pSP^\wedge' > P''' >$ etc.
 „ $q \setminus fl^\wedge S 9''' > ^\wedge \text{c}$, tela que $p \text{ flt} — 9 pi = \pm 11 pi$ $qxi^\wedge qi \text{ pix} = rpi$ $p'' q''t^\wedge \text{ }^\wedge 11$
 $\text{put} = it 1$, etc. $^\wedge 4$

The text on this page is estimated to be only 21.32% accurate

À D D I T. l Q I[^] §: çt qui donAeront la suite des minima p*
 — aq[^] piii — o[^]ui[^] etc., de la formule [^] — ûz ; ces minima seront
 successtvement da signes difFérens , et formeront une suite croissante, telle
 qoQ chaque terme , comme pV* — aq[^]\ sera un minimum relative-, n[^]ent
 aux valeurs dey et 2; pioindres qye p\ et (/'. D'où il s*ensuit que les termes
 correspondans des deux séries p y p[^] y p'* , etc , 9 , 9% (/** , etc. , ont des
 propriétés ana.logues , et résolvent le problème proposé. Il ne s'agit donc
 plus que de trouver les deux séries[^]. Pour cela je remarque 1°. qu'en
 ajoutanjt ensemble Ici équations pq' — qp'=±i, piç" — 9

P=l[^]P'+P''\ alors l'équation deviendra M'=q—q\

The text on this page is estimated to be only 17.01% accurate

A D D : T I a N t' \ Çflj te qui donne de même On trouvera de la même manière en ajoutant ensemble $h^{\wedge}$ leiu[^] équations $pi^{\wedge}it\_ qipu - qp$ $ipiTçui\_ çîptît = d: 1^{\wedge}.^{\wedge}t$ faisant des raisonnemens semblables, li} étant un nombre entier, et ainsi de suite. Donc la loi des deux séries dont il s*agit[^] sera, $P =^{\wedge} P' + P^{\wedge} 9 =/^{\wedge} g' + ?^* p'' =^{\wedge\wedge} p^{\wedge\wedge\wedge} + p''' ly' =^{\wedge} \ll q^{\wedge} u^{\wedge\wedge} ui$ $p^{\wedge\wedge\wedge} = /tA^{\wedge\wedge} p^{\wedge\wedge} 4.p^{\wedge} iy">=r/EA^{\wedge\wedge\wedge} \ll -|rÇ^{\wedge}$, etc.. les nombres $/t^{\wedge}$, $/t^{\wedge*}$, $/t^{\wedge*}$, etc. , étant tous entiers positifs [^] et îea[^] nombres p , p^* , p'' , $p^{*''}$, etc. , g , $q^{\wedge}$, $ç/*$, $çf^{***}$, etc. , formant [^]eux séries continuellement décroissantes. On voit par cette loi qu'il suf&ra de conn[^]tre les nombres $H- i y^{-} > h^{\wedge}$ etc. , pour pouvoir trouver tous les termes dçs 4eux séries , lorsqu'on en connaîtra les deux derniers, La substitution des valeurs précédentes donne $p - ,aq$ $=fjL (p\ll - aq^{\wedge}) + P''^{\wedge\wedge} aq^{\wedge\wedge} px - açi z=:xî (p'' - aq'') + p^{\wedge\wedge\wedge} -- aq^{\wedge\wedge\wedge}$ $pti - aq'' =/tA'' (p''' - a^{\wedge}\ll'') + p^{\wedge\wedge} - aqf^{*'} pi.ii--aqfui=:^m(piv \ll.fl^{\wedge}iy)$ $+pT - c^{\wedge\wedge\wedge} i ftÇr$

The text on this page is estimated to be only 14.67% accurate

B5o additions; d'où Ton tire I ti ^ p« — aç' p' — o^* ^ ~p" — oç" ^ p" — a" |(/ ' ^ ~p»" — a9»" ^ p"* — ofl* ^* etc. On a vu plus haut que les quantités p — 'O^, p* — aç*, p" — tf^" ^ etc. , forment une suite de termes qui vont en augmentant^ et qui sont alternativement positif» et négatifs ; d'oà •1 -^ 1 r ^ p — aq p^ — aq^ p^^ -^ aq^^ ^ û suit que les fractions'^- — ' — ^ /■■>>■ ■>■■■/ .%>■■ ■ -■ 4^ etc. ^ p* — aq^ p^^ — €iq^^ p^^ — oç*"" ont toutes des valeurs négatives et moindres que Fimité ^ et €m au contraire les fractions — ^- — ~- » --^ — ^ — —r» ©te. sont ^ pî — aqr» * p^^-^aq'^ * toutes positives et plus grandes que Tunité. Ainsi comme les valeurs des premières dont renfermées entre les limites o et— i, on pourra substituer ces limites à leur place ; ce qui donnez^ ^ aq^^ — p" ^ flfl" — p** • ^ ^ -" — û^" ^ p" — a^" r»^ .i-. n»v / ^/ttv ^ Tti^ ^n '^?" ~r ^x, etc. Il est clair que ces limites suffiront pour déterminer les nombres /it, y^ ^ fjL^^ , etc. puisqu'on sait que ces nombres doivent être tous entiers. Par ce moyen , la détermination de fjt, ne dépendra que des quatre termes p* , p" , q^ , q^ \ celle de ft* ne dépendra que de p" , p*** , ^" , q^^ , et ainsi de suite*, parconséquent, en connaissant les valeurs dep\ p", et q^ , ^" , on

The text on this page is estimated to be only 25.00% accurate

ADDITIONS. B5l 'troi)era d'abord (jl | ensuite on aura p et q par les formule[^] $p = p^* + p^{**}$, $fl = ftc; ' + 9''$ données ci--des8us. De même[^] en connaissant seulement les termes $p^{\wedge}$, $p^{*''}$, $4y''$, $^{\wedge*''}$, on trouvera d'abord //t* par la condition de , oriiii — plu aa[^]it — piit $x^{\wedge}t < --^{\wedge}; \wedge^{\wedge} — > --T- 1-«$ ensmte on aura p% o' par les formules $p^* = jt^{\wedge}p'' + p'''$ $fl' = fx''^{\wedge*} + 9^{*''}$; de là on trouvera (i , et enfin p et f , et ainsi de suite. D'où l'on peut conclure qu'il sul&ra de connaître les deux derniers termes de chacune des deux séries correspondantes p_j , $pSp'' > P''^{*} >$ etc. q , $q \setminus q^{\wedge} \setminus ^{\wedge'''}$, etc, pour pouvoir remonter de là sucessivement à tous les autres tenues , et connaîtra les deux séries entières. Ce problème est donc réduit maintenant à trouver les deux derniers termes de ces séries. Pour cela je remarque que , par leur nature , elles doivent se terminer Vune et l'autre à zéro; car les formules $p = p^* + p'^*$, $p' = ^*p \gg '-f-p\ddot{''}^*$, etc., font voir que fc est le quotient et p'' le reste de la division de p par p^* ; que $[4, ^{\wedge}$ est le quotient et $p''^{\wedge}$ le reste de la division de $p^{*'} par p'$, et ainsi de suite, de manière que p'' , $p^{*''}$, etc. sont les restes que l'on trouve en cherchant le plus grand commun diviseur des deux nombres[^] p et $p^{\wedge}$ qui sont supposés premiers entre eux ; parconséquent on doit nécessairement parvenir à un reste nul. On doit dire la même chose des nombres ζ'' , $\zeta^{*''}$, etc. qui ne sont que les différens restes qui résulteraient de la recherche du commui][^] diviseur de q et $q^{\wedge}$ Supposons que la série ζ , $q^{\wedge}$, $^{\wedge''}$, etc. se termine avant sa correspondante p , $p >$, p'' , etc. , et soit , par exemple',

The text on this page is estimated to be only 23.59% accurate

SSil ADDITION f; d'où, à cause que $\zeta^* \gg^* \text{et } p^{*\wedge}$ ne peuvent être que 4emoi9l>m fin tiers positifs $\wedge$ il suit que illl $\text{---} \wedge m \text{nlV } 9''' = 1$, $f' =$ ll ainsi les deux quantités deviendront $p^{**} \text{---} a$ et i . Mais nous avons vu que ces quan« tités doivent être de signes différens, et qu'abstraction faite des signes, la seconde doit être plus grande que la première, $\wedge$ ces quantités étant deux termes consécutifs de la série des minima; donc il faudra que $a \text{---} p^{**} > 0$ et $< i$; par consé* quent $p^{**} < a$ et $> a \text{---} i$. . Ainsi p^{**} sera connu, parceque devant être un nombre entier, il ne pourra être que le nombre entier qui tombera entre a et $a \text{---} i$. Donc en général dans le eas dont il s'agit, les déuxdemiew termes de la série $, *, "$, etc. seront $i, 0$; et les corresr pondans de la série $p, p^*, p'',$ etc. seront at, i , en dénotant par fit le nombre entier qui tombe entre a et $a \text{---} i$. Supposons maintenant que ce soit la série $p, p', p'',$ etc $\wedge$ qui se termine la première, et soit $p^{\wedge\wedge}$, par exemple, $= Q$; $\wedge$ lors réquation $p'' y v^{\wedge\wedge} n y v \text{---} i$ devenant $p^{\wedge} y v^{\wedge} q \text{---} i$, donnera par la raison que p^{**} et $q^{\wedge}$ doivent être entier! positifs, $p \text{---} = i, 9 \gg v^{\wedge} i$. desorte que les deux quantités $p^{**} \text{---} a^{**}$, $p^{*\wedge} \text{---} c^{*\wedge}$ qui. doivent être de signe contvair $i^{\wedge} e^{\wedge}$ et la seconde plus grande que k

The text on this page is estimated to be only 22.27% accurate

Al> 1> I T I O N I. S35 pfemière, deviendront i — oq"* — a\ d*où il suit qu'il faudra que $1 - \wedge^{\wedge} * > 0$ et 1 i c'est-à-dire que ζ^* devra être le nombre entier qui tombera entre - et — !• ^ a a ^ Donc , en général , dans ce second cas , les derniers termes de la série/? , p* , p" , etc. seront 1 , o ; et les correspondans dana la série 9, 9* , (jf" , etc. , seront jS , 1 , en dénotant par ^ le nombre entier qui tombera entre - et - — 1 • ^ a a On voit par là que le premier cas aura lieu lorsque a est un nombre plus grand que Twiité, et que le second aura , lieu lorsque a sera moindre que Tunité. Connaissant ainsi les deux derniers termes correspondans des séries p, p\ p" , etc., q, q\ 'S etc., on poitrira, par les formules données' plus haut , trouver successivement , en remontant, tous les termes de ces séries qui résolvent 1er pro^ blême proposé. - . [-, . f25. Il est plus commode dç considérer des.^ép,es à rebours, en commençant par les derniers termes. Aitisi nous avons deux séries croissantes que nous représenterons pour plus de.com-modité de cette manière : P% PS P".P"S etc.. • q\ q\ q^\ (/»', etc. . . . , ■ ^ et pour lesquelles nous avons les déterminations sidrantes : iSi a >> 1 , ■ f p<> = i, p'a — 1, 9*=o, 9*==l, ' i - 1 M^ Si a< 1 , ^" -!- -' --' •

The text on this page is estimated to be only 14.83% accurate

834 A t) f> I T I 6 n ». ensuite piii—^ii pli ^pi, 9»»=^" 9" +9"
etc. etc. 4Bt pour la détermination de /x* , /t^" , /x*" , etc. les conditions j ..
^r. °?'^i r ^^ oçi" _pui •^ ^iii — piii il est bon de remai'quer encore que le
second cas rentre dans r le premier. Car , en supposant dans les formules du
premier W cas a ^ 1 ^ on aura nécessairement do n p«=i, p» = o, 9^ = o, 9«
= i, et de là desorte qu*îoi p* , p" et 9* , 9" seront ce que seraient p^ , p\ 9° ,
9' , dans les formules du second cas; et les termes suivans serppt
parconaequent les mêmes dans les deux ca&. On peut donc établir en
général, quel que soit le nombre a -y les déterminations suivantes, p*» = 1
9* = o f>' =^ 9* =?i >"=/' p^ +1 9"=/' p>»= /x" p" +p" q''' = fï" q" 4-9» .
n»^±; ^'V"+P" 9*^ =::iW."Y"+9" ^ „ ■ . - ^ ^ ■ •• fetc. etc*

ADDITION 11 s. USi ite • ^ ^ «.11 ^11 p — OCj etc. gne «^
dénote le nombre entier qui est immédiatement e que la valeur de la
quantité placée aprè^ ce signe. rouvera ainsi successiyement toutes les
valeurs de p et ourront satisfaire au problème , ces valeurs ae pouvant e les
termes correspondans des deux séries $p^f p^{\wedge} p^{\vee}$ » :c. et $g^{\%} q^{\backslash} q^{\wedge}$, etc.
ÇQROLLilREl. \$i on fait $a^{\wedge} — p^* a q^{\wedge} — p i^* p \langle \rangle "I^{\wedge} \hat{a}^{\wedge}$,_ $p^{\vee} — g^{\wedge}$
etc. i) comme il est facile de le viâr. $a — y. - - > . 1 4 ? s : ^ i c — ^ t t C ; II \rangle$

The text on this page is estimated to be only 27.05% accurate

$\frac{SsS}{A} \frac{9}{b} \frac{I}{T} \frac{I}{O} \frac{k}{9i} \frac{tet}{tA^d}, \frac{|fA^{\wedge}}{etc.*} \frac{\text{àôiiicie5rioiliiM8 F-}}{h^i}$
 $f^{*''}$ > etc. ne seront autres que ceux que nous avons désignés par « $\llcorner$ », $jSj y$,
 etc. dans Tart. 3, c'est-à-dire que ces Nombres seront les termes de la
 fraction continue (laquelle représente la valeur de $a^{\wedge}$ en sorte que Ton aura ici
 $\llcorner -/* + -J- . + \_L f^{* \wedge} (iU^{\wedge \wedge} \text{et} \hat{e}i^{\wedge} \text{ar} \acute{e}o \text{ns} \acute{e}q \text{uent les nombres } p', p^{**}, p''' , \acute{e}t \acute{e}.$
 seront les numérateurs, et $' , '' , 9'''$, etc. les dénominateurs des fractions
 convergentes vers a , fractions que nous avons désignée ci-devant par $-^{\wedge}, ,^{\wedge},$
 $^{\wedge}$, etc. (art; 10); Ainsi tout se réduit à convertir la valeur de a en une fraction
 continue dont tous les termes soient positifs, ce qu'on peut exécuter par
 les méthodes exposées plus haut ; pourvu qu'on ait soin de prendre toujours
 les valeurs approchées ci défaut ; ensuite il n'y aura plus qu'à former la
 suite des fractions principales convergentes vers a , et les termes de chacune
 de ces fractions donneront des valeurs de p et q , qui résoudront le
 problème proposé; desorte que l'on pourra être qu'un de ces mêmes
 fractions; COROLLAIRE II; 137. Il résulte de là une nouvelle propriété
 des fractions dont nous parlons *, c'est que nommant $-$ une des fractions
 principales convergentes vers a , (pourvu qu'elles soient déduites d'une
 fraction continue , dont tous les termes soient positifs) la quantité $p - aq$
 aura toujours une valeur plus petite J (abstraction faite du signe), qu'elle
 n'aurait, si on y mettait à la place de p et q d'autres nombres moindres
 quelconques!

The text on this page is estimated to be only 23.25% accurate

ADDITIONS. 337 PROBLEME II. $\wedge$. Étant proposée la quantité $Ap'' - f - Bp'' + q + Cp'' + q'' + c$. rf- Vq'' , dans laquelle A, B, C, etc. sont des nom-hres entiers donnés positifs ou négatifs, et $L^{\wedge}et^{\wedge}x'' + j?$ $'' - \gg + Cx'' - * + etc + f^{\wedge} = o$, on aura par la théorie des équations $Ap''' + Bp'' - tg^{\wedge}Cp'' - \gg \ll^{\wedge} etc. + Fq'^{\wedge}$ Donc la question se réduit à faire ensorte que le produit des quantités $p - tq$, $p - Sq$, $p - yq$, etc. $\ll (p - .)^* + \wedge V > (p - '9)^* + *?*$, etc. soit le plus petit qu'il est possible; tant que p et 9 sont des nombres entiers positifs. Supposons qu'on ait trouvé les valeurs de p et q qui répondent au minimum ; si Ton met à la place âe p et q d'autre9 noinbres moindres, il faudra que le produit dont il s'agit, ac*quière une valeur plus grande. Donc il faudra nécessairement que quelqu'un des facteurs augmente de valeur. Or il est visi^ ble que si

338 ADDITIONS. chose arriverait au facteur $(p - \sqrt{w\zeta}) - f > \sqrt{\zeta}$, si $\sqrt{u}$ était négatif, et ainsi des autres; d'où il s'ensuit que parmi les facteurs simples réels, il n'y a que ceux où les racines sont positives[^] qui puissent augmenter de valeur ; et parmi les facteurs doubles imaginaires , il n'y aura que ceux où la partie réelle de la $nt^{\wedge}$ dne imaginaire, sera positive , qui puissent augmenter aussi : de plus 3 faut remarquer, à l'égard de ces derniers, que pourqoe $(p - \sqrt{\zeta})^* - f - y^{**}$ augmente tandis que p et ζ diminuent , il faut nécessairement que la partie $(p - \sqrt{f}qY$ augmente, parceque l'autre terme v^*q^* diminue nécessairement ; desorte que l'augmentation de ce facteur dépendra de celle de $p^{\wedge}l^{\wedge}$, et ainsi des autres. Donc les valeurs de p et q qui répondent au minimum , doivent être telles que la quantité $p - \sqrt{aq}$ augmente, en donnant k p et q des valeurs moindres , et prenant pour a une des racines réelles positives de l'équation $jrf^{**} + \sqrt{a}^{**} - \sqrt{f} - Cx^{**} - * + \text{etc.} + ; r=0$, ou une des parties réelles positives des racines imaginaires de la même équation, «il y en a. Soient r et $\sqrt{a}$ deux nombres entiers positifs , moindres que p et $1/\sqrt{a}$; il faudra donc que $r - \sqrt{as}$ soit $\sqrt{p}^{\wedge}a^{\wedge}q$, (abstraction faite du signe de ces deux quantités). Qu'on suppose[^] comme[^]ans l'article a3[^] que ces nombres soient tels que $p^{\wedge} - \sqrt{r} = \pm 1$, le signe supérieur ayant lieu, lorsque $p - \sqrt{a}$ est positive; et l'inférieur , lorsque $p - \sqrt{a}$ est négative; ensorte que les deux quantités $p - \sqrt{aq}$ et $r - \sqrt{a}$ deviennent de différents signes, et l'on aura exactement le $\sqrt{as}$ auquel nous avons réduit le problème précédent , (art. 5i4) , et dont nous avons déjà donné la solution. ■ • • .[^] Donc , (art. 6) , les valeurs, p et q devront nécessairement

ADDITIONS. 339 e trouver parmi les termes des fractions principales convergentes vers a , c'est-à-dire vers quelque-une des quantités que nous avons dit pouvoir être prises pour a . Ainsi il faudra retirer toutes ces quantités en fractions continues[^] (ce qu'on pourra exécuter facilement par les méthodes enseignées ailleurs), et en déduire ensuite les fractions convergentes dont l s'agit [^] après quoi on fera successivement p égal à tous les numérateurs de ces fractions, et q égal aux dénominateurs correspondans, et celle de ces suppositions qui donnera la moindre valeur de la fonction proposée, sera nécessairement aussi celle qui répondra au minimum cherché. REMARQUE I. 39. Nous avons supposé que les nombres p et q devaient être tous deux positifs; il est clair que si on les prenait tous deux négatifs, il n'en résulterait aucun changement dans la valeur absolue de la formule proposée; elle ne ferait que changer de signe dans le cas où l'exposant m serait impair; et elle demeurerait absolument la même, dans le cas où l'exposant m serait pair; ainsi il n'importe quels signes on donne aux nombres [^] et [^] lorsqu'on les suppose tous deux de même signe. Mais il n'en sera pas de même, si on donne p et q des signes différens; car alors les termes alternatifs de l'équation proposée, changeront de signe, ce qui en fera changer aussi aux racines $x > y > z > \dots$ $\pm \sqrt[m]{L}$ — 1, $\pm \sqrt[m]{L} - 1$, etc. desorte. que celles des quantités $x, y, z, \dots$ etc. a, t , etc. qui étaient négatives, et par conséquent inutiles dans le premier cas, deviennent

The text on this page is estimated to be only 25.83% accurate

Siio ADDITIONS. parties réelles jft , ^, des racines imaginaires de Téquation $1 AxT+Bk'' - \gg 4- C^* \ll -^* + \text{etc.} +^{\wedge} = 0$, |fi en faisant abstraction des signes de ces quantités ; mais ensnfa il faudra donner kpètq les mêmes signes , ou des signes differ-, rens, suivant quela quantité qu'on aura prîse pour a, anraa|., originairement le signe positif ou le signe négatif.

REMARQUE II. k 3o. Lorsque parmi les racines réelles a, fi, y, etc. ily en ads Gonmiensurables^ alors il est clair que la quantité proposée de* viendra nulle , en faisant- égal à une de ces racines; de80rti|a< que, dans ce cas^ il n'y aura pas , à proprement parler, de nwi' miim.; dans tous les autres cas il sera impossible que la qnastité dont il s*agit, devienne zéro, tant que p et q seront dislg nombres entiers; or comme les coefficients A,B , C, etc: sontl ^ aussi des nombres entiers {hyp,)y cette quantité seratouj 4%ale à un nombre entier , et parconséquent «lie ne pourra Jt" znais être moindre que Tunité. Donc si on avait à résoudre en nombres entiers Téqnation $Ap^{\wedge} + Bp'^{-\wedge}q + Cp'^{-\wedge}q^{\wedge} + \text{etc.} + T\zeta^{\wedge}rsdz i$, il faudrait chercher les valeurs de p et f par la méthode du problème précédent , excepté dans les cas où Téquation $jl^{\wedge}m\_f. BnT^{-\wedge} + Cx''\gg -^* 4. \text{etc.} -f.;^{\wedge} = 0$, aurait des racines ou des diviseurs quelconques commensura* blés ; car il est visible que la quantité $jip''^{\wedge} 4- \pounds p^{\wedge} -^{\wedge}q + Cp'^{-\wedge}q^{\wedge} 4- \text{etc.}$ pourrait se décomposer en deux ou plusieurs quantités seni'

ADDITIONS. 541 >1able8 de degrés moindres ; desorte qu'il
 faudrait que chacune le ces formules partielles fût égale à l'unité en
 particulier, ce [ui donnerait pour le moins deux équations qui serviraient à
 léterminerpet<7. Nous avons déjà donné ailleurs (Mémoires de V
 Académie le Berlin pour tannée 1768) , une solution de ce dernier
 pro>lème ; mais celle que nous venons d'indiquer est beaucoup ilus simple
 et plus directe , quoique toutes les deux dépendent le la même théorie des
 fractions continues. PROBLÈME III. 3i. On demande les valeurs dep et de
 q> qui rendront la quantité $Ap^{\infty} + Bpq + Cq^*$ la plus petite qu'il est possible
 , dans f hypothèse qu'on rCad^ mette pour p e^ q que des nombres entiers.
 Ce problème n'est, comme Ton voit , qu'un cas particulier du précédent ;
 mais nous avons cru devoir le traiter à part, parcequ'il est susceptible d'une
 solution très-simple et trèsélégante , et que d'ailleurs nous aurons dans la
 suite occasion d'en faire usage dans la/ésolution des équations du second
 degré à deux inconnues, en nombres entiers. Suivant la méthode générale ît
 faudra donc coimnencer par chercher les racines de l'équation $x^2 + Ax + B = 0$
 lesquellessontj comme l'on sait, $x = \frac{-A \pm \sqrt{A^2 - 4B}}{2}$ Or, 1**. si
 $A^2 - 4B$ est égal à un nombre carré , les deux racines seront
 commensurables,'et il n'y aura point de mmi^ 3

The text on this page is estimated to be only 28.73% accurate

34^ ADDITIONS. mum proprement dit, parceque la quantité $\sqrt{p^*}$
 $-f- Bpq + C(\sqrt{})$ pourra devenir nulle. a^* . Si $B^* - 4^C$ n'est pas un carré ,
alors les deux racinol seront irrationnelles ou imaginaires, suivant que B^*
 $- 4^{C^2}$ sera $>$ ou $<$ o, ce qui fait deux cas qu'il faut considérer l'é-l '
parement; nous commencerons par le dernier, qui est le plus facile à
résoudre. Premier cas lorsque $B^* - 4AC$ et « $\sqrt{}$ déduire ensuite la série des
fractions convergentes, (art. 10), laquelle sera nécessairement terminée^ cela
fait, on essaiera successivement pour p les numérateurs de ces fractions, et
pour q les dénominateurs correspondans , en ayant soin de donner à p et q
les mêmes signes ou des signes différens, suivant — fi que — -j- sera un
nombre positif ou négatif. On trouvera de cette manière les valeurs de p et q
, qui peuvent rendre la formule proposée un moindre, EXEMPLE. Soit
proposée , par exemple ^ la quantité $49P^2 - a^2$ On aura donc
ici $A = 49$ ifi^=;= — a^2 , C^u^oi .

The text on this page is estimated to be only 23.73% accurate

donc ADDITIONS. — R 543 $\frac{4^a - C}{9S}$, et $\frac{4^a}{9S} = \frac{4^a}{9S}$.
 Opérant donc sur cette fraction de la manière enseignée dans l'art. 4, on trouvera les quotiens 2^a , 5^a à l'aide desquels on formera ces fractions, (voyez l'art. 20), $2; 2^3 \pm 5$. JL1 o> 1 > * > 7 * Desorte que les nombres à essayer seront 1, 2, 5, 17 pour p, et G, 1, 2, 7, pour q\ or désignant par Pla quantitéproposée, on trouvera fi $\frac{p^9}{P I 0 49 a 1 10 5 3 5} \gg 7 7 49$ d'où l'on voit que la plus petite valeur de P est 5, laquelle résulte de ces suppositions $p=5, 4^a = 2$; ainsi on peut conclure, en général, que la formule proposée ne pourra jamais devenir plus petite que 5, tant que p et q seront des nombres entiers; desorte que le minimum aura lieu $\frac{4^a}{9S}$ lorsque $p=5$ et $= 2$. Second cas lorsque $B^* - 4AC > 0$. 33. Comme dans le cas présent Téquatipn $\frac{4^a}{9S} + 5x + C = 0$ Il deux racines réelles irrationnelles, il faudra les réduire l'une 4

The text on this page is estimated to be only 27.10% accurate

544 Additions. et Pautre eu fractions continues. Cette opération peut se fair» avec la plus grande facilité par une méthode particulière que .nous avons exposée ailleurs , et que nous croyons devoir rappeler ici , d'autant qu'elle se déduit naturellement des formules de Tarticle a5» et qu'elle renferme d*aiUeurs tous, les principes nécessaires pour la solution complète et générale du problème proposé. Dénnotons donc par a la racine qu'on a dessein de convertir en fraction continue ^ et que nous supposerons toujours positive^ et soit en même temps b Tautre racine ^ on aura j comme l'onsait^ $a + b^{^^}$, $ab = ^$, d'où ou bien en faisant, pour abréger, OÙ le radical $\sqrt{J}$? peut être positif ou négatif; il sera positif , lorsque la racine a sera la plus grande des deux^ et négatif^ lorsque cette racine sera la plus petite ; donc Maintenant, si on conserve les mêmes dénominations de l'article a5 , il n'y aura qu'à substituer à la place de a la valeur précédente , et la difficulté ne consistera qu'à pouvoir déterminer facileipent les valeurs entières approchées ft», ^u", iu»'», etc. Pour faciliter ces déterminations , je multiplie le haut et le aq' ^p''' p" — Oij''' aq''' —p' tivementpar J (bq'—p'), J (p" — bq"), A (bq''' — p'''), etc. bas des fractions $>--j — ^-$, $^-i ^>-^tt -itt \bullet$ etc. respec« «

The text on this page is estimated to be only 4.51% accurate

A D D I T I O N 8« 345 it comme on a =:Ap- + Bp'q^ + Cq*, A
 (p» — a(/") (p» — ifl") = Jp^-^A (^a + b)p"q"-^Aab!f = a'p^ + ^p"qf» +
 CV' , etc. A {p-^aq-)(^bq^-p^)=^lJLA^iB^i\VE, A {aq^-p^Xp^^^bq^^) ~—
 Apy^+ Aap'y+Abp'q"—Aabq^q"^^ :=^Apy' — CqY' — İB (p y» + 9'p") ^
 (p» — a^ii) (ici" _ ») = _ ^p"p"» 4. Aap^'y 4. Abp^'q'^^ — Aabq^'q'^^
 ~^Ap'y — Cq"q'^ — '^B(p"q"" + î"p*") + iV^J?(p"V — C9'»p")> et ainsi de
 suite : je fais, pour abréger, P^ =A P» :=:Ay-i'Bp' q' +Cq* P" =Ay + Bp"q'^
 +Cq* P""=Ap^ + Bp""q"" + Cq* , etc. Ç" =Ap^p^^ +l^(pi^n ^^pi.)+C.?>ç»
 Ç"> zzr u^p"p«" + 1 ^ (p"9"" + 9V") + ^O"" 1 etc. J'aurai, à cause de piy —
 qf"p>=i , p»"9"— ç»»p"=— 1 , p'^9"»— qf^^p'^^ssi , etc.

The text on this page is estimated to be only 15.72% accurate

546 ADDITIONS. les formules suivantes. 1 11 r 1 3 M"! < — ^ .
 • *ⁱ, etc. Or si dans Texpression de Q" on met ponr ç" et p" lenn Taleors
 /tx«p* + 1 et /u." , elle deviendra fc'jP* + Ç«; de même si on substitue dans
 l'expression de Q''' pour p''' et 7''' leurs valeurs i^"p"+p', et fc"ç" + q\ elle se
 changera en ^11 pu ^ Qu ^ g|. gjjjgj ^Qi |.gg^g . desorte que Ton aura
 Çiii _ ^n pu ^ Çii QiT _ ^nipui^^Qiii^ etc. Pareillement si on substitue dans
 Texpression de P" les valeurs de p" et 9" , elle deviendra ^* P* + a/a' Ç* + -
 ^ ; et si on substitue les valeurs de p''' et ç"* dans l'expression de P''' , elle
 deviendra]iI»P" + a/x» Ç" + P» , et ainsi de suite; j desorte que l'on aura P»
 =/x»P*> +2^ Ç* +C P» =:/t^P» +2/"4-P", etc. Ainsi oïl pourra , à Taide de
 ces formules , continuer aussi 3 L

The text on this page is estimated to be only 23.38% accurate

ADDITIONS. 347 loin qu'on voudra les suites des nombres f_j , y ?
 $\wedge f_j\}^\wedge$, etc.; ζ^{**} , $\zeta^* > \zeta'' >$ etc., et P° y $P \setminus P''$, etc. qui dépendent, comme
 Ton voit, mutuellement les uns des autres, sans qu'il soit nécessaire de
 calculer en même temps les nombres $p^\wedge$, $p_S p''$, etc. et $<7^\circ$, $q \setminus 9''$, etc. On
 peut encore trouver les valeurs de $P \setminus P''$, JP''^* , etc. par des formules plus
 simples que les précédentes, en remarquant que l'on a et ainsi de suite;
 c'est-à-dire $\zeta_i : > "P"ir = ^jE$; etc. d'où l'on tire $P \text{ pr} \text{---} p \dots J\%1^\wedge$. etc. Les
 nombres $f_t^\wedge i^\wedge S f$, étant donc trouvée ainsi, on aura (art. a6), la fraction
 continue $^\wedge^\wedge^\wedge -1-$ etc. Et pour trouver le minimum de la formule $Ap^\wedge +$
 $Bpq - f \gg d^{*\wedge}$

The text on this page is estimated to be only 27.58% accurate

548 ADDITIONS. il n'y aura qu'à calculer les nombres p° , p° , p° , etc. et $9^{\circ} > ^{\circ} > ?^{\circ} \ll 9^{\circ} > ^{\circ} c$. (art. a5), et les essayer ensuite à la place de p et 9 ; mais on peut encore se dispenser de cette opération I en remarquant que les quantités P° , P° , P° , etc. ne sont autre chose que les valeurs de la formule dont il s'agit, lorsqu'on y fait successivement $p=p^{\circ}$, p° , etc. et $q = q^{\circ}$, q° , etc. Ainsi il n'y aura qu'à voir quel est le plus petit terme de la suite P° , P° , P° , etc. qu'on aura calculée en même temps que la suite $/ca$, (jl°) , fjL° etc. et ce sera le minimum cherché; on trouvera ensuite les valeurs correspondantes de p et 9 par les formules citées. ^ 34.

Maintenant je dis qu'en continuant la série P° , P° , P° , etc. on doit nécessairement parvenir à deux termes consécutifs de signes différents, et qu'alors tous les termes suivants seront aussi deux à deux de différents signes. Car on a,, (art. précédent). $JP^{\circ} = (P^{\circ} - O(P^{\circ} - V) > P^{\circ} = A \{f-ciq^{\circ}\} \{p^{\circ} - bq^{\circ} - ^{\circ}$, etc. or de ce qu'on a démontré dans le problème II, il s'ensuit que les quantités $p^{\circ} - a^{\circ}$, $p^{\circ} - ciq^{\circ} - p^{\circ} \gg - aq^{\circ}$ etc. doivent être de signes alternatifs, et aller toujours en diminuant; donc, 1°. si i est une quantité négative, les quantités $p^{\circ} - bq^{\circ}$ et $p^{\circ} - bq^{\circ}$, etc. seront toutes positives; par conséquent les nombres P° , P° , P° , seront tous de signes alternatifs; 2°. si A est une quantité positive, conyue les quantités $p^{\circ} - a^{\circ}$, $p^{\circ} - a^{\circ}$, etc. et, à plus forte raison, celles-ci, $t^{\circ} - a^{\circ}$, $t^{\circ} - a^{\circ}$, forment une suite décroissante à l'infini, on arrivera nécessairement à une de ces dernières quantités, comme $t^{\circ} - jj^{\circ}$, — acquiesera

ADDITIONS. 34 $\wedge$ — $>a^\wedge$ le seront aussi; desorte que toutes les quantités $a — \wedge + \wedge$, $— \hat{u}$, $a — \hat{O}4-S-- — a$, etc. seront nécessaire-^{*} ment de même signe que la quantité $a — \bullet 6$; parconséquent les quantités $\wedge - jYj - — 6 > \wedge — \ast \#$ etc. et celles-ci, $p'' \gg — f\grave{c}'' \gg$, $p^{\ast \wedge} — bq^{\wedge \prime \prime}$, etc. à Tinfini, seront toutes de même signe; dono les nombres P''' , $P^{\ast \wedge}$, etc. seront tous de signes alternatifs. Supposons donc, en général $>$ que l'on soit parvenu à des termes de signes alternatifs dans la série $-P^*$, P'' , $P^{\ast \prime \prime}$, etc. et que P soit le premier de ces termes, ensorte que tous les ter[^] mes, $P \wedge P$, P , etc. à Tinfini, soient alternativement positifs et négatifs, je dis qu'aucun d'eux ne pourra être plus grand, que E , Car si, par exemple, les nombres $P^{\ast \prime \prime}$, $P^{\ast \wedge}$, $P^\wedge$, etc. sont tous de signes alternatifs, il est clair que les produits deux à deux, $p^{\wedge \wedge \wedge} p^{\wedge f \wedge} p^{\gg v} p^y \wedge$ etc. seront nécessairement tous négatifs; mais on a, (art. précéd.). donc les nombres positifs, $— P^{\ast \prime \prime} P^{\ast \prime}$, $— P^{\wedge \wedge \prime} P''$, seront tous moindres que $j\pounds$, ou au moins ils n'excéderont pas E' , desorte que, commie les nombres $P^\wedge \wedge P^\wedge \wedge$, $P^{\wedge \wedge \wedge \wedge}$ etc. sont d'ailleurs tous entiers parleur nature, les nombres $P^{\ast \prime \prime}$, $P^{\ast \prime \prime \prime}$ etc. et, en général, les nombres P , $P^\wedge$, etc. (abstraction faite de leurs signes); ne pourront jamais surpasser le nombre E . ' Il s'ensuit aussi de là que les termes $\grave{C}^{\ast \wedge}$, Q' , etc. et, en général, $Q^\wedge$, Q etc., ne pourront jamais être plus grands que $^\wedge E$. D'où il est facile de conclure que les deux séries P , P , etc. et $\grave{C}$, $\grave{C}$, $\grave{C}$, etc. quoique poussées a 1 mfiui[^] ne pourront être composées que d'un certain nombjce de

"350 ADDITIONS. termes différens , ces termes ne pouvant être , pour la première que les nombres naturels jusqu'à E pris positivement ou négativement $\wedge$ et pour la seconde , les nombres naturels jusqu'à $[\wedge$ avec les fractions intermédiaires j , $|\wedge|\wedge$ etc. pris anssipoâtivement ou négativement; car il est visible par les formules de l'article précédent, que les nombres ζ^* , ζ'' , Q''' , etc. «eront toujours entiers, lorsque B sera pair, mais qu'ils contiendront chacun la fraction $\wedge$, lorsque B sera impair. Donc, en continuant les deux séries $P^\wedge$, jP'' , $P^{*''}$, etc. et ζ^* , ζ'' , $\zeta^{*''}$, etc. il arrivera nécessairement que deux termes correspondans , comme P et ζ , reviendront après un certain intervalle de termes dont le nombre pourra toujours être supposé pair ; car, comme il faut que les mêmes termes P et ζ reviennent en même temps une infinité de fois, à cause que le nombre des termes différens dans l'une et dans l'autre série est limité , et parconséquent aussi le nombre de leurs combinaisons différentes , il est clair que si ces deux ter*, mes revenaient toujours après un intervalle d'un nombte impair de termes , il n'y aurait qu'à considérer leurs retours altemanativement , et alors les intervalles seraient tous composés d'un nombre pair de termes. On aura donc, en dénotant par ap, le nombre des termes intermédiaires et alors tous les termes $P^\wedge$ y $P^\wedge^\wedge$, $P^\wedge^\wedge^\wedge$ etc. $Q^\wedge$, $Q^\wedge^\wedge$, $Q^\wedge^\wedge^\wedge$ y et f/L , $[JL$, $,0:$ etc. , reviendront aussi au bout de chaque intervalle de $2p$ termes. Car il est- facile de voir par les formules données dans l'article précédent pour la détermination des nombres $\wedge'$, $/!x''$, $/u''$ », etc. ζ' , ζ'' , $\zeta^{*''}$, etc. et PS P'' , $P''S$ etc. que dès qu'on aura $P^\wedge - \wedge' \wedge = P^\wedge$, et $\zeta'' - \wedge \wedge \wedge = \zeta''$,

The text on this page is estimated to be only 25.38% accurate

ADDITIONS. 351 lura aussi lite $\zeta^{\text{fl}*} - \diamond - \text{af} + 1 \_ Q^{\wedge} + i$
 $p^{*} \text{""}^{\wedge} \text{""}^{*} \text{""} = \text{isp ir} + \ddot{\text{i}} \text{ c aussi Lnsi de suite } \langle \bullet - \diamond - \text{a} \rangle - \text{f} - 1 \langle \bullet - \text{fa}^{*} \rangle$ onc svn est
un nombre quelconque égal ou plus grand $T^{\wedge}$ et que m dénote un nombre
quelconque entier positif $\wedge$ lura en général ,n + amp $\_pn^{\wedge} \zeta U + \text{amp } \_n^{\wedge}$
 $\wedge n + \text{flmp } \_n .^{\wedge}$ orte qu'en connaissant les $\wedge - \text{f}'^{\wedge} P$ premiers termes de cbae
de ces trois suites , on connaîtra aussi tous les suiyans ne seront autre chose
que les ap derniers termes répétés infini dans le même ordre. >e tout cela il
s'ensuit que pour trouver la plus petite yar de $P = j4p^{\wedge} - | - Bpq - j - C\zeta^{*}$, il
suffit de pousser les séries , $P \setminus P''$, etc. et Q^{**} , Q^{*} , Q'' , etc. jusqu'à ce que
deux née correspondans , comme P et Q reparaissent ensemaprès un nombre
pair de termes intermédiaires, ensorte t l'on ait $P'^{\wedge\wedge} = P^{*}$, et $Q''^{\wedge\wedge} = Q^{*}$, rs le
plus petit terme de la série P», $P \setminus P''$, etc. $P^{*} \wedge' 2$ le minimum
cherchéCOROLLAIRE I. 55. Si le plus petit terme de la série F'' , $P^{\wedge}$, $P'^{\wedge}$,
etc. $^{\wedge}$ ne se trouye pas ayant le terme P , alors ce terme

35a ADDITIONS. reparaitra une infinité de fois dans la même suite prolongée à l'infini ; ainsi il y aura alors une infinité de valeurs de p et q qui répondront au minimum , et qu'on pourra trouver tout] par les formules de Tart. 125 ; en continuant la série des nombres $\frac{1}{x^*}$, $\frac{1}{x^{**}}$, etc. au-delà du terme $\frac{1}{x^{***}}$ par la répétition des mêmes termes $\frac{1}{x^{****}}$ etc. comme on l'a dit plus haut. On peut aussi , dans ce cas , avoir des formules générales qui représentent toutes les valeurs de p et de q dont il s'agit ; nous ne donnerons pas le détail de la méthode qu'il faut employer pour y parvenir ; nous nous contenterons de renvoyer pour cet objet aux Mémoires de B déjà cités l'année 1768 pag. 145 et suiv. où l'on trouvera la théorie générale et nouvelle des fractions continues périodiques.

Ti COROLLAIRE II. 36. Nous avons démontré dans Tart. 34 > qu'en continuant la série P^* , P^{**} , P^{***} , etc. on doit trouver des termes consécutifs de signes différens. Supposons donc , par exemple , P^{**} et P^{***} soient les deux premiers termes de cette série on aura nécessairement les deux quantités $p^{**} - \frac{1}{q^{**}}$ et $\frac{1}{p^{**}} - q^{**}$ de mêmes signes, à cause que les quantités $p^{**} - \frac{1}{q^{**}}$ et $\frac{1}{p^{**}} - q^{**}$ sont de leur nature de différens signes. Or mettant dans les quantités $p^{**} - \frac{1}{q^{**}}$, $\frac{1}{p^{**}} - q^{**}$ etc. les valeurs de p^{**} , q^{**} , etc. (art. 15), on aura $p^{**} - \frac{1}{q^{**}} = \frac{1}{p^{**}} - q^{**}$ ($p^{**} - \frac{1}{q^{**}}$) etc. D'où, à cause que p^{**} , q^{**} etc. sont des nombres positifs il est clair que toutes les quantités $p^{**} - \frac{1}{q^{**}}$, $\frac{1}{p^{**}} - q^{**}$, etc. l'infini, auront les mêmes signes que les quantités $p^{**} - \frac{1}{q^{**}}$, $\frac{1}{p^{**}} - q^{**}$ etc. à l'infini, auront alternativement les signes plus et moins.

The text on this page is estimated to be only 19.84% accurate

À D D I T 1 O K s. 553 Maintenant on aura par les équations précédentes $*^{\wedge}''' p' - bq'' p^{\wedge} - bq''$, $\blacksquare P^{\wedge} - ^{\wedge}9^{\wedge} P' - bq^{\wedge}$, $^{\wedge} ** \sim p^{\wedge} - bq^{\wedge} p^{\wedge} \gg - A^{\wedge}vi^{\wedge}eic.$ ou les quantités $\sim j^{\wedge\wedge} \hat{A}iT^* v - Tv * \textcircled{R}^{\wedge} -$ seront toutes positives. Donc, puisque les nombres $(jl^{\wedge}, /a^{\wedge}, /a''', \text{etc.})$ doivent être $py - bq''$ tous entiers positifs, $(,hyp,)$, la quantité $^{\wedge} \blacksquare ^{\wedge\wedge}$ devra être $r n$ positive et $] > 1$, de même que les quantités $^{\wedge} - ^{\wedge\wedge}$, $fi \text{---} ^{\wedge\wedge}tc., \text{à}oT^{\wedge}c$ les quantités $^{\wedge\wedge}, _{\wedge\wedge}, ^{\wedge\wedge}, _{\wedge\wedge}, \text{etc.}$ seront positives et moindres que l'unité \ desorte que les nombres $(j^{\wedge}, ^{\wedge}u, ^{\wedge}*, \text{etc.})$ ne pourront être que les nombres entiers qui sont immédiatement moindres que les valeurs de $^{\wedge} \hat{A}v > \blacktriangledown!$ $\hat{A}vT^*$ etc. ; quant au nombre $p\}^{\wedge\wedge}$ il sera aussi égal au nombre entier qui est immédiatement moindre .que la valeur de $^{\wedge\wedge} \wedge ^{\wedge\wedge}$ toutes les fois qu'on aura. .. $p \gg'' - ba^{\wedge\wedge\wedge} \wedge r2 - ^{\wedge} 1$, Ainsi on aura $U^{\wedge}i$

The text on this page is estimated to be only 20.48% accurate

?54 ADDITIONS. le signe < placé après les nombres /ea["], f/}"
» fⁱ, etc. déno* tant» comme plus haut , les nombres entiers qui sont
immédiatement au-dessous des quantités qui suivent ce même «igné. Or il
est facile de transformer , par des réductions semblant— ba["] p[^]* ia" blés â
celles de Târt. 33, les quantités \y[^]Lxyf y ily» «te. en celles-ci, -[^] — Î5ît —
» "[^] nT[^] — ®*[^]' -[^] plus,» condition de î[^]; — —[^] < i peut se réduire à
celle-ci kiii [^] ■ [^] —2 2₋ ; lacruelle . a cause de ■ [^] '[^] — [^] i , 4mra
sûrement lieu lorsqu'on aura ...» Dm — -p[^] = ou < 1 ; dotrc on vnra f* [^] ps
» [^]

The text on this page is estimated to be only 26.85% accurate

A D D I T I a N 8. 355 termes seront absolument déterminés par ceux qu'on a supposé donnés. En effet connaissant, par exemple, P^{**} et $Q^{\wedge\wedge}$, on connaît d'abord P'' par l'équation ensuite ayant $Q^{\wedge*}$ et P' , on trouvera la valeur de $f^{*''}$, à l'aide de laquelle on trouvera ensuite la valeur de $Q^{\wedge}$, par l'équation $\zeta^{\wedge} = |tA^{\wedge} / \wedge^{\wedge} + Q^{\wedge}$; or l'équation donnera $P^{*\wedge}$; et si on fait d'avance que $- \text{---} = j^{\wedge}$ doit être = ou que l'on ait trouvé

The text on this page is estimated to be only 27.66% accurate

même • 55S X 1> D I î I o N s. et supposons que t soit > h , c'est-à-dire $w^{zh} + v$, donc] on pourra d'un côté remonter du terme P au terme P ou $P^{\wedge}$, et de l'autre, du terme $p'^{\wedge\wedge\wedge}$ au terme $P''^{\wedge}$ ou $P^{\wedge} " * " ^{\wedge}$; et comme les termes d'où Ton part de part et d'autre, sont égaux , tous les dérivés seront aussi respectivement «gaux^ desorte qu'ou aura :=OU

The text on this page is estimated to be only 21.12% accurate

ADDITIONS. 557 (art. 33). Donc $\sqrt{2} = 1$, $Q^* = 0$ donc d'où Ton voit i^* . que P^* est négatif, et par conséquent de signe différent de P^{**} ; 2°. que P^* est ≥ 1 , parceque K et $[A$ «ont des nombres entiers ; desorte qu'on aura $P^* \geq 1$ ou $P^* < 1$; donc on aura, (art. précéd.) desorte qu'en continuant la série $P^* \wedge P^* \setminus P^*$, etc. le terme $J^* \wedge \blacksquare = 1$ reviendra nécessairement après un certain intervalle de termes ; par conséquent on pourra toujours trouver une infinité de valeurs de p et de q qui rendent la formule $p^* - Kq^*$ égale à l'unité. COROLLAIRE IVT. 38. On peut aussi démontrer cet autre théorème : Que si l'équation $p^* - Kq^* = \pm H^*$ est résoluble en nombres entiers * . en supposant K un nombre positif non carré, et H un nombre positif et moindre que J/K , iesnornhres p et q doivent être tels que - soit une des $\frac{p}{q}$. tion principales convergentes vers la valeur de $\sqrt{K}$. ' Supposons que le signe supérieur doive avoir lieu, ensorte que $p^* - Kq^* = H^*$.. 5

The text on this page is estimated to be only 19.85% accurate

• S58 donc on aura ADDITIONS. $-P+9\backslash^{\wedge}K'$, $V^{\wedge}.$ ($\wedge\wedge\wedge y$ qu'on cherche deux nombres entiers positifs r et $\wedge\wedge$ moii que p et $q^{\wedge}$ et tels que «o ce qui est toujours possible , comme on Ta démoatré dans l'article s3y et l'on aura (il q S qs donc retranchant cette équation de la précédente , il vienèa desoTte qa'on aura $H p-.qy/K = q(\wedge-+VK)$ $t\text{---}S\backslash K=:t.$ $sH K^{\wedge}(\{+\wedge'\wedge\})$ ') Or commet $>/jK$ et H

The text on this page is estimated to be only 17.82% accurate

ADDITIONS. 359 ositivement , sera $\wedge$ — , à cause de 1 — — —
 >t. Ainsi on aura les deux quantités $p = \zeta^{\wedge} K$ et $r = 5^{\wedge} K^{\wedge} \backslash VL$ bien, en
 faisant $a = V K$. $\wedge$ celles-ci, $p = a^{\wedge}$ et $r^{\wedge \wedge} iis$, esquelles seront assujéties aux
 mêmes conditions que nous avons supposées dans Fart. 224 * $\wedge \wedge \wedge^{* \wedge \wedge} 1^{* \wedge \wedge}$
 tirera des conclu $\wedge$ » Bons semblables ; donc , etc. (art a6). Si Ton avait $p^{*} =$
 $iRC9^{*} =$ — H, alors il faudrait chercher les nombres r et $\wedge$, tels que €t Ton
 aurait ces deux équations $\_i / sa X$ Comme H — -, oti Uea qde $j > \_ \wedge \wedge \wedge \_ \wedge$
 $\wedge$ savoir v'iiC + 2> H j. 12. mais jr

The text on this page is estimated to be only 28.97% accurate

56q ADDITIONS. ihyp,) ; donc il suffit de prouver q^{e*-y}
 onbieiLi $P^{>V^>}$ c'est ce qui est évident, à cause que la $q_i s\{^K - r$ étant
 négative, il faut que $r^s \sqrt{K}$, et, à forte raison, $p > \bullet .s J/X$, puisque p^r .
 Ainsi les deux quantités, $p - q \sqrt{K}$ et $r - 5^K$, set de diiFérens signes,
 et la seconde sera plus grande que la première, (abstraction faite des
 signes), comme dans le caspé- V^c cèdent ; donc, etc. ■^{^^} Donc, lorsqu'on
 aura à résoudre en nombres entiers imt équation de la forme $p^r - Kq^s =$
 $\pm H$, ou $\text{fr} < \sqrt{K}$, il n'y aura qu'à suivre les mêmes procédés de l'article 33, en
 I faisant $Az = 1$, $B = 0$, $C = -K \setminus V$ on ren- $i^{\wedge}$ et si dans la série $P \setminus P \setminus P \setminus$
 P''' , etc. P^r contre un terme $=ih\text{fr}$, on aura la résolution cherchée, sinon on
 sera assuré que l'équation proposée n'admet absolument aucune solution en
 nombres entiers. 2 REMARQUE. 39. Nous n'avons considéré dans l'art. 33
 qu'une des racines de l'équation $Ak''^{\wedge} B)c + C = 0$, que nous avons supposée
 positive ; si cette équation a ses deux racines positives, il faudra les prendre
 successivement pour a , et faire la même opération sur l'une que sur l'autre ;
 mais si l'une des deux racines ou toutes deux étaient négatives, alors on les
 changerait d'abord en positives, en changeant seulement le signe de $j5$, et
 on opérerait comme ci-dessus ; mais ensuite

The text on this page is estimated to be only 29.73% accurate

ADDITIONS. 3?1 l faudrait prendre les valeurs de p et de $^{\wedge}$ avec des signes difèrens , c'est-à-dire Tune positivement et Tautre négativement $^{\wedge}$; art. 2g-). Donc en général on donnera à la valeur de B le signe $\text{am}>\text{igu} \pm 1$, de même qu'à $^{\wedge}E$, c'est-à-dire qu'on fera et qu'on mettra di à la place de $^{\wedge}E$, et il faudra prendre ces signes ; ensorte que la racine a «oit positive , ce qui pourra toujours se faire de deux manières différentes ; le signe supérieur de B indiquera une racine positive, auquel cas il faudra prendre p et $^{\wedge}$ tous deux de même signes ; au contraire le signe inférieur de B iQdiquera, une racine négative , auquel cas les valeurs de petq .devront; être prises de signes différens. « EXEMPLE. 40. On demande quels nombres entiers il faudrait prendre pour $^{\wedge}$ et q , afin que la quantité $5P^* - 1\ 18/77 + 378(j^*$ devînt la plus petite qu'il est possible Comparant cette quantité avec la formule générale du problème III $^{\wedge}$ on aura $^{\wedge} = 9$, $^{\wedge} = \text{---} 118$, $C = 37$ », donc $B^{\wedge\wedge}4ACz=z5i6$; d'où l'on voit que ce cas se rapporte à celui de l'art. 33. On

The text on this page is estimated to be only 28.58% accurate

SSa ADDITIONS. fera donc où Ton remarquera d*abord que ^/79
> 8 et

The text on this page is estimated to be only 11.89% accurate

ADDITIONS. 363 <0 O O O .^ ^ ^ ** H II + 1 (D • • 13 I + O 1
Ot M II H 1 II + I 00 il II U1 09 + H I 00 il I il s O il 1 H NI • + • 1 il 1 il 4^
O o il I ut H ;o CD I il il i Il il il il il I 1^1 W O ^ il t7> en •p •\$: "î: T2 "is
T? *Î5 A / V r V A V / ' ^ / \ ^ > / \ p 1 1 1 «> + 1 VI 1 Ut os 1 1 ^ * o 09 + 1
i 1 » + «^1 VI va VI VI 2 1» • 1 1 1 1 1 M ■ « Il 1 1 J1 M 1 ► * 1 I 1 * 1
■1 » a.

The text on this page is estimated to be only 25.64% accurate

564 ADDITIONS. Je m'arrête ici, parceque je vois que $Q_{vii\_Çi}^{\wedge}$ prix — $\pi^{\wedge}$ et que la différence entre les deux numéros i et 7 est paire ; d'où il 8*ensuit que tous les termes suiyans seront aussi les mêmes que les précédens ; ainsi on aura $Q'''=4$, $Ç^{\wedge}»»=— 3$, $Q'''^{\wedge}=7$, etc. $P > tii$. , $P^{\wedge}»=:ia$,etc. desorte qu'on pourra , si Ton yeut, continuer les séries cidessus à l'infini , en ne faisant que répéter les mêmes termes. $12^{\wedge}$. Prenons maintenant le radical $^{\wedge}73$ avec un signe négatif $^{\wedge}$ et le calcul sera comme il suit :

The text on this page is estimated to be only 11.57% accurate

ADD I « I O N s. ses -o /O rO o o o O -o O o >-4 < •4 ^ *tf t^ tm
•« o M •M M tort m II H II i H II II II II I 1 1 M 1 1 ^^ 1 1 fù o^ CD VI o
O) Ot 09 CO co • • 9^ • C7t Ô) • M • In **J + 1 + 1 + 1 1 1 1 en en 4>^ W ^
00 ^ M 4K CD H 1 II H II 1 II II II 1 1 1 1 1 [y» -^ ^ ^ w 00 M Si, M'^ •<.
t="" m="" j="" il="" ii="" h="" r="" c5="" cd="" en="" i="" ij1="" w=""
icd="" ko="" o="" iii="" tnocdx="" fv="" a=""> O^ 11 iM O en + I II ;s s 'ts
^ 5 S - " AAAAAAAAAA I tn < ;d + CD i I * O va CD V4 + 09 v3 CD I 00
I w, CD + I v| CD I 09 VI CD ■p^ CD + ^ 1 (O ^ '^ VI CD tn II. II II II II II
II II II

The text on this page is estimated to be only 24.35% accurate

366 ADDITIONS. On peut s'arrêter ici , puisque Ton a trouvé et que la différence des numéros 9 et 3 est paire ; car en continuant Its séries on ne retrouverait plus que les mêmes qu'on a déjà trouvés. Or , si on considère les valeurs des termes $P_0, P_1, P_2, \dots$ trouvées dans les deux cas on verra que le plus petit des termes est égal à -3 ; dans le premier cas , c'est le terme P_2 auquel répondent les valeurs p_1 et 9 ; et dans le second cas, c'est le terme P_1 auquel répondent les p_2 et q_1 . D'où il s'ensuit que la plus petite valeur que puisse la quantité proposée est -3 ; et pour avoir les valeurs de p et q qui y répondent , on prendra dans le premier cas les séries $7, 1$ et 1 , et l'on en formera les trois principales convergentes $f, f, \dots$; la troisième sera donc $\frac{1}{7}$ en sorte que Ton aura c'est-à-dire que les valeurs cherchées seront $p = \frac{1}{7}, q = \frac{1}{7}$. Dans le second cas on prendra les nombres $5, 1, 1, 3$, lesquels donneront ces fractions $\frac{1}{5}, \frac{1}{1}, \frac{1}{1}, \frac{3}{1}$; desquelles on aura $p = \frac{1}{5}, q = \frac{1}{1}$; donc $P = 39, 9 = 7$. Les valeurs qu'on vient de trouver pour p et q dans le cas du minimum , sont aussi les plus petites qu'il est possible ; mais on pourra si l'on veut en trouver successivement d'autres

The text on this page is estimated to be only 16.21% accurate

Donc, dans le premier cas, on aura pour les valeurs satisfaisantes p et q , celles-ci, p^{111} , q^{111} , p^{1x} , q^{1x} , p^{xv} , q^{xv} , etc. et dans le second cas, celles-ci, p^{1v} , q^{1v} , p^x , q^x , p^{xv1} , q^{xv1} , etc. Or les valeurs de μ , μ^1 , μ^{11} , etc. sont dans le premier cas 7, 1, 5, 3, 2, 1, 1, 1, 5, 3, 2, 1, 1, 1, 5, 3, etc. à l'infini, d'où il résulte que

The text on this page is estimated to be only 29.59% accurate

5G8 A D D t t I O N s.' et les fractions quatrième , dixième , etc. donnent les leurs de p et q ^ lesquelles seront donc prrSg, 9 = 7, ou p = 6a25, (7 = 1118*, etc. De cette manière on pourra donc trouver par ordre tootei les valeurs de p et q , qui rendront la formule proposée = — 3 , valeur qui est la plus petite qu'elle puisse recevoir. On pourrait même avoir une formule générale qui renfermât toutes ces valeurs de p et de q ; on la trouvera , si l'on en eût curieux , par la méthode que nous avons exposée ailleurs ^ et dont nous avons parlé plus haut , (art. 35). Nous venons de trouver que le minimum de la quantité proposée , est - 3 , et par conséquent négatif ; or on poumit proposer de trouver la plus petite valeur positive que k même quantité puisse recevoir ^ alors il n'y aurait qu'à examiner les séries P^ , JP' , P'' , jP''' , etc. dans les deux cas, et on verrait que le plus petit terme positif est 5 dans les deux cas ; et comme , dans le premier cas , c'est JP'^ , et dans le second P''* qui est = 5 1 les valeurs de p et de q , qui donneront la plus petite valeur positive de la quantité proposée , seront p*^ , q^ , ou p* i 9* , ou etc. dans le premier cas, et p*'' , q''' , ou p'* , q'' , etc. dans le second ; desorte que l'on aura par bi fractions ci-dessus p=83, q=11, ou p= 13291, q=1762, etc. ou p=ii, q= 2, p= 1843, q= 33i,etc. . Au reste on ne doit pas oublier de remarquer que les nombres jea, fjl\ /Lt'' , etc. trouvés dans les deux cas ci-dessus, ne sont autre chose que les termes des fractions continues , qui représentent les deux racines de l'équation $gx^2 - 118x + 378 = 0$. Desorte que ces racines seront 1 4

The text on this page is estimated to be only 25.02% accurate

Additions; $96 | ^3 + \text{etc.} > 15 + - . t '+3 + 4 ^5 + \text{etc.}$ èicptessions
 qu'on pourra continuer à l'infini par la simple re^ pétition des mêmes
 nombres. Ainsi on voit par là comment on doit s'y. prendre pour réduire en
 fractions continues 4 les racines de toute équation da second degré. < C O L
 1 é. 4i . Euler à donné dans le tome XI dfes nouveaux Coiillttentaires ëe
 Pétersbourg y une méthode analogue à la précédente j quoique déduite de
 priiicipes un peu diffÉrens , pour tédfrire en fraction continue la racine d
 un; noiïïbtè quelconque • • • • entier non-carré , et il y a joint. uiïe table où
 les fractiond continues sont calculées pour tous tés nombres naturels non-
 càrés jusqu'à 120. Comme cette table peut être utile éh diiTé[Vites
 occasions^ et surtout pour la solution des problèmes éterminés du second
 degré , comme on le verra plus bas y nous croyons faire plaisir à no»
 lecteurs de ,la leur, présenter ici; on remari^era qu'à chaque nombre ràméal
 , il. répond deux suites de nombre^ entiers ; la supérieure est celle df s
 nombres jP*, — P*, P" \ — P" \ etc. et l'urférieùre eU4îel {« des nombres (jlj
 ia\ fî^^, ft*", etc. •r ' \ â. A a

The text on this page is estimated to be only 13.06% accurate

^ A 0 D f T I 0 II i. l/fl V7 VII . |/is t/i4 1/15 1/17 V/ao 1111 etc. 1
a a a etc. 1 a 1 d 1 a t etc. 1 1 a 1 a 1 a etc. 1111 etc. a 4 4 4 ^^c. 1 a 1 a 1 a
1 etc. a a 4 a 4 a 4 ^^ci'3a3i3a3i etc. aiii4iii4 ^^c* i 4 1 4 1 4 1 ^^c* a 1 4 1
4 1 4 etc. I 1 1 I etc. 3 6 6 6 etc. 1 a 1 a 1 33635 a I etc. 3 6 etc. 1 3 1 3 1 3 1
etc. ^ a 6 a 6 a 6 ^ic. 1453-4 5 1 1 1 i 1 4334 1 etc. 6* 1 1 i 1 6 etc. I 5 â' 5 1
3 1 a 1 6 5 a 5 1 etc. 1 a 1 6 ètc: 16161 3i 6 1 6 6 i etc. 1 6 etcI 1 1 1 I etc. 4
8 8 8 8 etc. 1 ^ 1. a 1 44848 a I a 1 etc. 4848 etc. .«MriB^i 1 3 5 a 5 4 a i 3 1
3i35a53L etc. a8ai3ia8 etc. 14141 42838 414^ ^^3828^ etc. 1 5434 4 1 I a
1 5 I 5 4 3 4 5 1 etc. 181 1 a 1 I 8 etc. 1 6 3 a 3 4 1 a 4 a 6i63236i etc. I 8 1
2 4 a I 8 etc. . -wt* j I -il

The text on this page is estimated to be only 17.93% accurate

A'Tt) t t T I Ô * \$. ift 1 • y/aS V^ l/a6 V/a7 l/fl8 1/39 l/3o V/3i
V/32 ^/33 t/34 1/35 1/38 V/3g V/40 173717371 etc, 4 1 3 1 8 1 3 1 8 etc.
1818181 etc. 4181818 etc. 1111 etc. 5 10 10 10 etc. 1 â 1 s 1 a 1 etc. 5 5 lo 5
10 5 10 etc. 1343 1343 1 etc. 5323 10 333 10 etc. 14^54 14554 1 etc. 53113
10 3113 10 etc. i5i5i5i5i etc. 5 3 10 3 10 3 10 s 10 etc. i6533356 i65 etc. 5i
i353i 1 loi'i etc. 174^1747 1 ®^c. 5iiiioiiiio etc. 1 8 3 8 i 8 3 8 1 etc.
5i3iioi3iio etc. 1939 1,9^9 1 etc. 5i4iioi4iio etc. 1 10 1 10 1 10 1 10 etc. 5 1
ïo 1 10 1 10 1 etc. I 1 1 1 1 etc. 6 13 13 13 13 etc. 13 1 3 13 1 etc. 6 6 13 16
13 6 13 etc. 1 3 1 3 1 3 1 etc. 6 4 1^4 ^^ 4 ^^ ^tc. 14 14 1 4 1 etc. 63 133 13
3 13 etc. 1 5 5 1 5 5 1 etc. 6 3 3 13 3 a 12- etc. 16 16 16 1 etc. 6 3 13 a 13 3
13 etc. M- ,. :• I

The text on this page is estimated to be only 13.20% accurate

^ A 0 D f T I o H A; < I/fl 1111 etc. 1 a a a etc. ■■^ V/3 1 a 1 a 1
a t etc. 1 1 a 1 a 1 a etc. t/5 1111 etc. a 44 4 etc. ^6 1 a 1 a 1 a 1 etc. 224^4^4

The text on this page is estimated to be only 17.43% accurate

A'* ô î T I o * \$; ift VI. ' v/23 173717:271 etc. 4 1 3 1 8 1 3 1 8
etc. V/24 1818181 etc. 4181818 etc. 1/26 1111 etc. 5 10 10 10 etc. V/a7 1 â
1 â 1 ai etc. 5 5 10 5 ïo 5 10 etc. 1/28 1343 1343 1 etc. 5323 10 333 10 etc.
1/39 14554 14554 1 etc. 52113 10 3113 10 etc. 1/3o I 5 1 5 1 5 1 5 1 etc. 5 3
10 3 10 3 10 3 10 etc. V^Si 16533356 i65 etc. 5 1 1 3 5 3 1 1 10 l'i etc. V52
174^1747 1 etc. 5 1 1 1 10 1 1 1 10 etc. |/33 1 8 3 8 i 8 3 8 1 etc. 5 1 3 1 10
1 3 1 10 etc. t/34 1939 1939 1 etc. 5 1 4 1 10 1 4 1 10 etcV'35 I 10 1 10 1
10 1 10 etc. 5 1 ÏO 1 10 1 10 1 etc. V37 1 I 1 1 1 etc. 6 13 13 13 12 etc. 1/38
13 1 3 13 1 etc. 6 6 13 16 13 6 13 etc. V3g 1 3 1 3 1 3 1 etc. 6 4/^^.4 ^^ 4
^^ ^tc. v'40 14 14 14 * etc. 63i33i23ï2 etc. V4i 1 5 5 1 5 5 1 etc. 6 3 3 13 3
3 13 etc. 1,,^ 16 16 16 1 etc. 63 13" a 13 3 13 etc.

The text on this page is estimated to be only 12.74% accurate

37» k n D i l l o n s> -■■" " ""*■ v/43 ï/45 1/48 V/So V/5i V/53
1/53 1/54 1/56 1/57 »/58 v/60 V/6i 1763939367 176 etc. 6ii3i5i5ii iflii etc.
18674758 i85 etc. 6iiiaiii 12211 etc. i 54549 194 549 ^94 etc. 6iasai iai»2!âi
laiâ etc. 1" 10 376535673 10 iio3 ctCr 6 i3ii262ii3 1 12 i3 etc. 111211 6 1 5
1 1 11 a 11 la 1 5 I 1 etc. la etc. 1 la 6 1 1 la la 1 1 la etc. la 1 etc. 1 1 I I etc.
7 14 14 ^4 etc. 1 a 1 a 1 a etc. 77 147 14 7 etc. irikaMita 1 39 4g 3 139493 1
3 etc. 74 1 a 1 4 144 ^^ ^7 4 14 4 etc. 1477 4 ^ 47 7 4 147 etc. 73 1 1 3 143
1 1 3 143 1 etc. iSgagS 169396 i5 etc« 73-1613 1431613 143 etc. i656 i656
16 etc. 7333 14 333 14 3 etc. 17 17 17 1 etc. 73 143 14 3 14 etc. 1 87378 1
8 7 etc. 711411 14 1 1 etc. 1907709 196 etc. 7111111 14 11 etc. 1 10 5 3 5
10 1 >o 5 etc. 7 1373 1 i4 1 3 etc. 111411 1114 etc. 7 1 3 1 14 1 3 etc. 1
133496694313. 113 5 etc. 7 143133734 1 14 14 etc. WtÊ^

The text on this page is estimated to be only 15.74% accurate

A 1> D I T I o ir 8. ZjZ 1 .. ■ 1 i3 â i3 1 i3 a etc. 716 1 14 1 6 etc.
V/G3 1 14 1 14 1 ^4 ®^c71 i4 1 14 1 c^c* 1/65 1111 etc. 9 16 16 iG etc.
V/66 1 a 1 a i etc. 8 8 iG 8 iG etc. V/67 i3679a9763 i36 etc. 85aii7iia5 iG5a
etc. V68 14 14 1 4 ^^c* 84 iG 4 iG 4 etc. ^69 i54ii3ii4^ i54 etc. 833 14 i33
16 33 etc. t/7o iGgSgG 169 etc. 8 a 1 a 1 a 16 a 1 etc. V/71 1 7 5 11 a 11 5 7
175 etc. 8aa 17 laa iGaa etc. 1/73 18 1 8 18 etc. 8 a 16 a 16 a etc. 1/73
1983389 198 etc. 8 1 1 5 5 1 1 iG 1 1 etc. 1/74 1 10 7 7 10 1 10 7 etc. 8 111
1 iG 11 etc. 1/75 111611 1116 etc. 8 1 1 1 iG 1 1 etc. 1/76 lia 589343985 la
iia5 etc. 8 iaii545iia 1 iG la etc. 1^77 i i3 47 4 ^^ 1 .i3 4 etc. 8 1 3a3 1 16. 1
3 etc. VI^ 1 i4^ ^4 1143 etc. 8 1 4 1 iG 1 4 etc. •79 1 i5 a i5. 1 i5 a etc. 8171
iG 17 etc. /8o 1 16 1 iG 1 16 etc. 8 1 16 1 iG 1 etc.

The text on this page is estimated to be only 15.94% accurate

^4 A D D I T I o 11 i, V/Sa 1 1. 1 1 etc. 9 18 18 18 etc. ■ ■ q 1/83
12 12 12 etc. 9 9 18 9 18 9 etc. v/84 3 3 1 3 1 3 etc. 9 6 18 6 18 6 etc. f ^/85
149 9 4 149 etc. 94114 18 4 1 etc. • V8G 1 5 10 7 11 2 11 7 10 5 1 5 lo etc.
93 11 18 11 i3 18 3 1 etc. « 1/87 1 G 16 16 etc. 93 18 3 18 3 etc. V/88
179897 179 etc. 921112 182 1 etc. V89 18 5 5 8 1 8 5 etc. 9 2 3 3 2 18 2 3
etc. V/90 19 19 1 etc. 92 i8 2 1*8 etc. V/91 1 10 9 3 i4 ^ 9 1 ^ ^109 etc.
Qii5i5iii8ii etc. v/ga 1118747811 1118 etc. g 112421 i 18 11 etc. i/g3 1 12
711434117 13 1127 etc» 9 11 1464111 18 11 etc. V/94 1 i3 6 5 9 10 3 i5 2
i5 3 10 9 5 6 i3 9 i23i i5 18 i5 ii32 1 1 etc. 18 etc. -Vg5 1 14 5 14 1 i4 etc. 9
1 2 1 18 1 ^ Vg6 ii54i5 ii5 etc. 9 1 3 1 18 1 etc. • V^g7 1 16 3 11 89 9« 11 3
16 1 16 etc. Qi5iiiiii 161181 etc. Kg8 1 17 2 17 1 17 «etc. 918 i 18 1 etc. 1
Vgg 1 18 I 18 1 etc. 9 1 18 1 18 etc. »

The text on this page is estimated to be only 11.99% accurate

A D D I T I O 11 i» 375 Ainsi on aura[^] par exemple [^] fl+ etc. *
a+ etc. et ainsi des autres. '* po p* p" Et si on forme les fractions
convergentes [^], [^], tL-, H H H iiii w[^]i [^] etc. d'après chacune de ces fractions
continues > on aura »i it (P°)* — a («r)* = i . P' — aç* = — » , p» — 29» =
1 , etc. et de même , (;»»)• — 3(7»)» =: I, [^] — 3i7* = — a, p« — 3[^] = 5i, etc.
etc. 4

The text on this page is estimated to be only 23.09% accurate

B76 ADDITIONS. I T I PARAGRAPH III. fiur la résolution des équations du premier deffri à dei4x inconnues en norrpbres entiers.

Addition pour le Chapitre J, /(a. JLjOR\$9U'0]!f a à résoudre une équation de cette forme oa?— $6y = c$, où $a, i^{\wedge} C|$ sont des noml^fres entiers dpnnés , positifs on $n^{\wedge}$ gatifs^ et où les deux inconnues x et $^{\wedge}$ doivent être aussi des nombres entiers , il suilit de connaître une seule solution , pour pouvoir en déduire facilement toutes les autres solutions possibles. En effets supposons que l'on sache que ces valeurs satisfont à Téquation proposée , « et /S étant des nombres en^ tiers quelconques^ on aura donc $a\ll 6 — iiS = c$, et parconséquent ou bien $c(x — \text{ft}) — i(j^{\wedge} — /3) = o$; d*où Ton tire $x — \text{fit } b y -$
^ tu

ADDITIONS. 377 Qu'on réduise la fraction - à ses moindres termes[^] et sup-« posons qu'elle se change par-là en celle-ci -[^], où 6' et q[}] se* j-ont premiers lentre eu[^], il est visible que Téquatioii X — « b' y — 0 a> Qe saurait subsister dans la supposition que a;-»«t, y'^^fi fioient des nombres entiers, à moins que l'on ait jn étant un nombre quelconque entier; desorte que l'on aura en général m étant un nombre entier indéterminé. Comme on peut prendre m positif ou négatif à volonté, il .jBSt facile de voir qu'on pourra toujours déterminer ce nombre m y ensorte que la valeur de x ne soit pas plus grande que —, ou que celle de ^,ne soit pas plus grande que —, (abstraction faite des signes de ces quantités); d'où il s'ensuit que |d l'équation proposée, or — èy==c, est résoluble en nombres entiers; et qu'on y substitue succès[^] sivement à la place de x tous les nombres entiers tant positifs que négatifs, renfermés entre ces deux limites —, , on en trouvera nécessairement un qui satisfera à cette équation; et on trouvera de m^e une valeur satisfaisante de y parmi s les nombres entiers positifs ou négatifs, contenus entre les limites —, Q>

The text on this page is estimated to be only 28.76% accurate

sSy[^] ADDITIONS. Ainsi on pourra par ce moyen trouver une
 première 9q^lii[^] tion de la proposée , après quoi on aura toutes les autres fat[^]
 mules ci-dessus. 43. Mais si on ne veut pas employer la méthode de
 tâtoniM* ment que nous venons de proposer [^] et qui serait souvent très*
 laborieuse , on pourra faire usage de celle qui est exposée dam le chap. I du
 traité précédent , et qui est très-simple et trèsdirecte f ou bien on pourra s*y
 prendre de la manière suivante. On remarquera [^] 1[^]. que si les nombres a et
[^]ne sont pu premiers entre eux y Téquation ne pourra subsister en nom*
 bres entiers , à moins que le nombre donné c ne soit divisible par la plus
 grande commune mesure de a et b. Desorte qn'ei ■supposant la division
 faite lorsqu'elle a lieu [^] et désignant hi qnotiens par a}, b* [^] c[^] , on aura i
 résoudre Téquation û'x— i|y =c', où c* et i* seront premiers entre eux. a**.
 Qyte si Ton peut trouver des valeurs ût p et de q ffi satisfassent à Féquation
 a'p — i* < 7 = rdi 1 , on pourra résoudre l'équation précédente ; car il est
 visible qu'en multipliant ces valeurs par dz c[^], on aura des valeurs qoi
 satisferont à l'équation a*jî — i[^] = c'; c'est-à-dire qu'on aura Or l'équation
 c'p — ô'ç = zfc I «st toujours résoluble en nombres entiers , comme nous
 l'avoni démontré dans l'art. aS-, et pour trouver lés plus petites w

The text on this page is estimated to be only 27.90% accurate

ADDITIQLfâU -35% , Jeurs de p et de qui y peuvent satisfaire , il n'y aura qu'à convertir la fraction -- en fraction continue par la méthode a "lOLiâTart. 4> ^t, en déduire ensmt la série des fractions prihcU - pa2e5 convergentes vers la même fraction -^ par les formules de Tart, lo; la dernière de ces fractions sera la fraction même b 1 P f-^, et si on désigne l'avant-dernière par t-, on aura par la Joi de ces fractions , (art. 12) , a}p — 6*^ = di 1 , le signe supérieur étant pour le cas où le quantième de la fraction - est pair, et l'inférieur pour celui où ce quantième est impair. Ces valeurs de p et de ^ étant ainsi cōntées, on aura donc d'abord , - x=x±,pc\ yz=z±:q(^, ^ "et prenant ensmt ces valeurs pour à et fi, on aura en général (art. 42), * * X = ±pc^ + mb^ , y = dt çc* + ^0} expressions qui renfermeront nécessairement toutes les solutions possibles en nombres entiers de l'équation proposée. Au reste, pour ne laisser aucun embarras dans la pratique de cette méthode , nous remarquerons que quoique les nombres a et b puissent être positifs ou négatifs , on peut néanmoins les prendre toujours positivement , pourvu qu'on donne des signes contraires à x, si a est négatif, et à y, si b est négatif.

The text on this page is estimated to be only 19.17% accurate

1S8o ADt>iti^oifs; EXEMPLE. 44- ^our donner un exemple de la lûiétliode précédente nous prendrons celui de V^rticle i4 du chap. I du traité pn cèdent où il 8*agit de résoudre Téquation changeant p en x et 9 en jf ^ on aura donc Ainsi on feéa Sgx — 56y = ii û==39, i = 56, c=ii; et comme 56 et 3g sont déjà premiers entre eux, on aura c* = 39, 6" = 56, c» = ii. On réduira donc en fraction continue la fraction --7 =fj et pour cela on fera, (comme os l'a déjà pradqaé dans l'ai tticle flo) , le calcul suivant , 3q|56 i7 !9 34 5 a 1' 1: 5 .4 2d 2

The text on this page is estimated to be only 22.78% accurate

Ensuite , à l'aide des quotiens $i, \hat{a}^3$ etc. on- formera les fractions
< 1 il $\hat{f}i^{\wedge} 1 > flj T^*> 16* 3yi$ ■if' . i la pénultième fraction fl sera celle
que nous ayons désigné 'général par $\wedge$ desorte qti'on aura $p = a^3, = iS$; «
E- comme cette fraction est la quatrième, et par conséquent! Son quatrième
pair $\wedge$ il faudra prendre le signe supérieur; haï Ion aura en général "i- 4 t . X
= $fl3* 1 1 -f- 5Sm, j^{\wedge} = 1 6^{\wedge} 1 1 \bullet(- Syn^{\wedge}$ ■I pouvant être un nombre
quelconque entier y positif ott *gatif . REMARQUE. $\wedge$ « ». On doit là
première solution de ce problème à Bachet \ziruic $\wedge$ qui Ta donnée dans sa
seconde édition de ses Ré" ions mathématiques , intitulées Problèmes
plaisants et dé $\wedge$ ibles y etc. La première édition de cet ouvrage a paru en
ptia, mais la solution dont il »agit n'y est qu'annoncée, et ik» n'est que dans
l'édition de i6a4 q $\wedge$ *on la trouve complète. Ml méthode de Bachet est très-
directe et très-ingénieuse,' et miiUdsse rien à désirer du côté de l'élégance et
de la généralité. $\wedge$ iIcnis. saisissons avec plaisir cette occasion de rendre à
ce fewant autour la justice qui lui est due sur ce sujet, parcequ' HMs avons
remarqué que les géomètres qui ont traité le mêm'a Itt $\wedge$ èiRit après lui, ii*ont
jamais fait aucune mention de son $\wedge$ Yoiei en peu de mots à quoi se réduit la
méthode de Bachet, lyres avok fait voir comment la solution 4es équations
de la

The text on this page is estimated to be only 22.09% accurate

S8s ifi) D I V l'd N 9: Sorme ax — iy rrc, (a et 6 étant premiers entre eux) , se réduit à celle de or — $6y = \pm 1$, il s'attaclie à résoudre cette dernière équation y et pour ce il prescrit de faire entre les nombres a et & la même opérât) que si on voulait chercher leur plus grand commun divisev (c'est aussi la même que nous avons pratiquée ci-deyant ensuite nommant c, d , e^f, etc. les restes provenant des d ferentes divisions, et supposant» par exemple ^rcpm y soit dernier reste qui sera nécessairement égal à Tunité, (a ca que aetb sont premiers entre eux , hyp.) » il fait , lorsque nombre des restes est pair ^ comme dans ce cas , ces derniers nombres jS et £& seront les plus petites valeurs . Si le nombre des restes était impair, comme si g: était kd ^er reste = 1 , adors il fwtidrait faire $f \pm i = T, --^ := zs, — — = :J^{\wedge}$ etc. Il est facile de voir que cette méthode revient au mè dans le fond que celle du chap. premier; mais elle en moins commode ; parcequ'elle demande des divisions; au les les géomètres qui sont curieux de ces matières, verront ff plaisir dans Fouvrage de Bachet, les artifices qu'ila emplcr pour parvenir à la règle précédente , et pour en déatîrs solution complète des équations de la forme $GX^{\wedge} — by z=z e$.

The text on this page is estimated to be only 11.99% accurate

X D D I T I O N S*. 9B9 ■ I I ■ III II > ^ , ' \i ' ..IL" 'tga

PARAGRAPHE IV. Méthode générale pour résoudre en nombres entiers les équations à deux inconnues p dont l'une ne passe pas le premier degré Addition pour le Chacq)itre III fS. i^oit proposée l'équation générale, $fc + ix + cy + dt - f \cdot exy^4 - yy + gxfy + hx^4 + kx^4y + \text{etc.} = 0$, pma laquelle les coefficients a, 6^c , etc. soient des nombres entiers donnés, et oH a; et y soient deux nombres indéterminés qui doivent aussi être entiers. Tirant la valeur de y de cette équation, on aura $a + bx - dx^4 + fx^4 A^4 + > \text{etc}^*$ $'^c - f - ex + g^* - f'^4 > **c$ Ainei la question sera réduite à trouver un nombre entier M^ étant pris pour x, vende le numérateur de cette fraction visible par son dénominateur. . ^ «apposé $= c - f - ex + g^4 + f^4 + > \textcircled{R}^*C'$!t qu'on élimine x de ces deux équations par les règles ordinaires de l'algèbre, on aura une équation finale de cette

The text on this page is estimated to be only 24.83% accurate

ri84' A P D I t I o K «;• forme ^ où lea coefficitnaf >/, B, C, etc. seront des fonctions la* tioanelles et entières des nombres a, b, c, etc. Mamteûant, puisquey =^— ^, on aura aussr p=:i:—qyi P 9 desorte qu'en substituant cette yaleur de p, il viendra' ^ — i?y^ + C9 + Z>yY — £p<7y + F9» + etc.=o, où Ton voit que tous les termes sont multipliés par q , à l'ex- ception du premier terme A ; donc il faudra que le nombre uf soit divisible par le nombre q , aufremenit il serait imposôbli que les nombres q ety pussent être entiers i lar fois^ On cherchera donc tous les diviseurs du nond>ré entier . . . • connu A f et on prendra successivement chacun de ces briseurs pour q ; on aura par chacune de . ces suppositions ona équation déterminée en a: , dont on cherchera par Tes vléûky des connues ; les racines rationnelles et entières^ s'il y en à; on substituera ensuite ces racines à la place de x, etonvern si les valeurs résultantes de p et de q seront telles que ^ soit un nombre entier. On sera sûr de trouver par ce mofct toutes les valeurs entières de x , qui peuvent donner aussi (kl valeurs entières pour j^ dans Téquation proposée^ De là on voit que le nombre des solutions en nombres étr tiers, de ces sortes d'équations , est toujours nécessairement lh mité ; mais il y a un cas qui doit être excepté^ et qiii échappa à la méthode précédente. . 47- Ce cas est celui où les coeiÉciens e, g, k, etc. sonl'

The text on this page is estimated to be only 26.98% accurate

ADDITIONS. 385 nuls, en sorte que Ton ait simplement $a+bx+dx^2+fx^3+hx^4+\text{etc.}$ $V = \frac{a}{c} - \frac{bx}{c^2} + \frac{dx^2}{c^3} - \frac{fx^3}{c^4} + \frac{hx^4}{c^5} + \text{etc.}$ Or voici comment il faudra s'y prendre pour trouver les valeurs de x qui pourront rendre la quantité $I. a + bx + dx^2 + fx^3 + hx^4 + \text{etc.}$ divisible par le nombre donné c : je suppose d'abord qu'on ait trouvé un nombre entier n qui satisfasse à cette condition, il est facile de voir que tout nombre de la forme $n \pm \frac{r}{c^y}$ satisfera aussi, fc étant un nombre quelconque entier; de plus si $\frac{r}{c^y}$ est $\frac{1}{c^y}$, (abstraction faite des signes de r et de c) on pourra toujours déterminer le nombre ijl et le signe qui le précède, en sorte que le nombre n devienne $< -$; et il est aisé de voir que cela ne saurait se faire que d'une seule manière, les valeurs de n et de c étant données; donc si on détermine le signe par n cette valeur de $n \pm \frac{r}{c^y}$, laquelle est $< -$, et qui satisfait à la condition dont il s'agit, on aura en général p jx étant un nombre quelconque. D'où je conclus que si on substitue successivement, dans la formule $a - bx + dx^2 + fx^3 + \text{etc.}$ à la place de jx , tous les nombres entiers positifs ou négatifs qui ne passent pas $-^{\frac{1}{c}}$ et qu'on dénote n', n'', n''' etc. ceux de ces nombres qui rendront la quantité $a + 6jc + cfc - f - \frac{1}{c^4}$ divisible par c tous les autres nombres qui pourront faire le même effet seront nécessairement renfermés dans ces formules $71 \pm \frac{f}{4}c$, $71 \pm \frac{f}{4}c, n$ etc. 2. Bb - >

The text on this page is estimated to be only 26.51% accurate

58(5 additions; u^* , x'' , $u^{*''}$, etc. étant des nombres quelconques entiers^ On pourrait faire ici différentes remarques pour faciliter la recherche des nombres n , ti'' , n''' , etc. ; mais nous ne croyons pas devoir nous arrêter davantage sur ce sujet, d'autant que nous avons déjà eu occasion de le traiter dans un Mémoire imprimé parmi ceux de l'Académie de Berlin pour l'année 1768 , et qui a pour titre nouvelle Méthode pour résoudre les problèmes indéterminés, 48. Je dirai cependant encore un mot de la 'manière de déterminer deux nombres x et y en sorte que la fraction devienne un nombre entier; c'est une recherche qui nous sera fort utile dans la suite* a Je suppose que y et x doivent être premiers entre eux, et

The text on this page is estimated to be only 28.37% accurate

ADDITIONS. 387 ^ de c. Donc, comme cetj' sont supposés premiers entre eux, il faudra que la quantité $a-f-\hat{o}/i + rf/\hat{i}+yTi^{\wedge} + \text{etc.}$ soit ' elle-même divisible par c ; ainsi il ny aura qu*à chercher par la méthode de l'article précédent , toutes les valeurs de n qui r pourront satisfaire à cette condition, et alors on aura ea : général $x::^{\wedge}nj - az$, z étant un nombre quelconque entier. n est bon d'observer que quoique nous ayons supposé que les nombres x et ^ doivent être premiers entre eux , ainsi que les nombres $j^{\wedge}$ et c , notre solution n'en est cependant pas moins^ générale ; car si on voulait que xety eussent une commime mesure « , il n'y aurait qu'à mettre $etx^{\wedge}$ et «ty * , à la place de 07 et jf , et on regarderait ensuite x^* et'^ comme premiers entre eux; de même si $y^{\wedge}$ et c devaient avoir un© commune mesure j8 , on pourrait mettre $j8y''$ à la place de $y^{\wedge}$, et il serait permis de regarder $y^{\wedge\wedge}$ et c comme premier» «utre eux» i

388 A D O I T I O N s. PARAGRAPHE V. Méthode directe et générale pour trouver les valeurs de y qui peuvent rendre rationnelles les quantités de la forme et pour résoudre en nombres rationnels les équations indéterminées du second degré à deux inconnues lorsqu'elles admettent des solutions de cette espèce. Addition pour le Chapitre IV* * 49* Je suppose d'abord que les nombres connus a et c , soient entiers ; s'ils étaient fractionnaires , il n'y aurait qu'à les réduire à un même dénominateur carré et alors il est clair qu'on pourrait toujours faire abstraction de leur dénominateur ; quant au nombre x , on supposera ici qu'il puisse être entier ou fractionnaire y et on verra par la suite comment il faudra résoudre la question lorsqu'on ne veut admettre que des nombres entiers. Soit donc $\frac{y}{x} = \frac{a - f - 6j}{-f - ex}$, »t l'on en tirera

ADDITIONS. 389 desorte que la difficulté sera réduite à rendre rationnelle l'quantité $l/(4cy^* + 6^* - 4ac)$. 5o. Supposons donc en général qu'on ait à rendre rationnelle la quantité $|(A^* + B^*)|$, c'est-à-dire, à rendre $Ay'^* + B$ égal à un carré x^2 A et B étant des nombres entiers donnés positifs ou négatifs x et y un nombre indéterminé qui doit être rationnel. Il est d'abord clair que si l'un des nombres A ou B était $= 1$, ou égal à un carré quelconque x^2 le problème serait résolu par les méthodes connues de Diophante, qui sont détaillées dans le chapitre IV; ainsi nous ferons ici abstraction de ces cas, ou plutôt nous tâcherons d'y ramener tous les autres. De plus, si les nombres A et B étaient divisibles par des nombres carrés quelconques x^2 on pourrait aussi faire abstraction de ces diviseurs, c'est-à-dire, les supprimer, en ne prenant pour A et B que les quotiens qu'on aurait après avoir divisé les valeurs données par les plus grands carrés possibles x^2 en effet, supposant $A = a.W$, $B = b.W$ on aura à rendre carré le nombre $Ax'^2 + Bx'^2$ donc divisant par W , et faisant $fi = y/x$ il s'agira de déterminer y connue x ; ensorte que $A'y + B$ soit un carré. D'où il s'ensuit que dès qu'on aura trouvé une valeur de y propre à rendre $Ay^* + B$ égal à un carré, en rejetant des valeurs données de x et de y les facteurs carrés t^2 et s^2 . quelles pourraient renfermer x il n'y aura qu'à multiplier J^2

The text on this page is estimated to be only 29.10% accurate

5gO ADDITIONS. valeur trouvée de y par $-$, pour avoir celle qui convient à $k L^*$ » I quantité proposée. 5i. Considérons donc la formule $Ay^{\wedge} - B y$ dans laquelle $j4$ et B soient des nombres entiers donnés qui ne soient divisibles par aucun carré; et comme on suppose que y puisse être une fraction, faisons $y = \frac{p}{q}$, p et q étant des nombres entiers et premiers entre eux, pour que la fraction soit réduite à ses moindres termes; on aura cette quantité $\frac{A p^{\wedge} - B q^{\wedge}}{q^{\wedge}}$ qui devra être un carré; donc $A p^{\wedge} - B q^{\wedge}$ devra en être un aussi; desorte qu'on aura à résoudre l'équation en supposant p, q et z des nombres entiers. Or je dis qu'il faudra que q soit premier à A , et que p soit à B ; car si q et A avaient un commun diviseur, il est clair que le terme $A p^{\wedge}$ serait divisible par le carré de ce diviseur; et que le terme $B q^{\wedge}$ ne serait divisible que par la première puissance du même diviseur, à cause que q et p sont premiers entre eux, et que A est supposé ne contenir aucun facteur carré; donc le nombre $A p^{\wedge} - B q^{\wedge}$ ne serait divisible qu'une seule fois par le diviseur commun de q et A , par conséquent, il serait impossible que ce nombre fût un carré. On prouvera de même que p et B ne sauraient avoir aucun diviseur commun. Résolution de l'équation $A p^{\wedge} - B q^{\wedge} = 17^{\wedge}$ en nombres entiers. 62. Supposons A plus grand que B , on écrira cette équation ainsi, $A p'^{\wedge} - B q'^{\wedge}$, et on remarquera que comme les nombres p , et z doivent être entiers, il faudra que $4^{\wedge} - B q^{\wedge}$ soit divisible par A .

The text on this page is estimated to be only 17.64% accurate

ADDITIONS. Sgt Donc , puisque Aetq sont premiers entre eux, (art précédent), on fera $n^2 = Aq^2$ suivant la méthode du 1^{er} art. 4^e cir dessus , « = $n^2 - Aq^2$, n et q^2 étant deux nombres entiers indéterminés; ce qui claa- <> géra la formule $a^2 - Bq^2$ en celle-ci , $(n^2 - B)q^2 = 2nJqq^2 + J^2q^2$, dans laquelle il faudra que $n^2 - J^2$ soit divisible par A , en A prenant pour n un nombre entier non > 0 . ' ' On essaiera donc pour n totts les nombre² entiers qui ne A , surpassent pas — , et si on n'en trouve aucun q*i* rende »*-*-J² divisible par A, on en conclura jiii>-l«-claiap que l'équation $n^2 = Aq^2$ est pas résoluble en nombres entiers , et qu'ainsi la quantité $Ay^2 - Bx^2$ ne saurait jamais devenir un carré. Mais si on trouve une ou plusieurs valeurs satisfaisantes de n , on les mettra l'une après l'autre à la place de n, et b*a* jpoursuivra le, calcul, comme on va l'avoir. r, o. t Je remarquerai seulement encore qu'il serait inutile de donner A . r ' . lier aussi à n des valeurs plus grandes q*i*è — ; car nommant t^2 , $a^2 \leq A n^2$, n^2 etc. les valeurs de n moindres /² $n^2 \pm 1$: Lt² etc² du 5 IV) ; or si iiiiistituarit' ces valeurs à la place de n d*à* h'd*à*ns jia - •■ . • » , formule $(n^2 - B)q^2 = 2nAq q^2 + A^2q^2$, c'est - à - dire $\{nq - r^2 = Aq^2\}$ Y • — JSç² ^ il est clair qu o*ù* aura les mêmes résultats *

The text on this page is estimated to be only 26.13% accurate

593 ADDITIONS. tats que si on mettait seulement $n \setminus zi$, n^* etc. à la plac[^] de 71, et qu'on ajoutât à q[^]les quantités qi/A^* , $h^{^^}$ "çi -j- ."»rf etc. desorte que , comme 9' est un nombre indéterminé, ces substitutions ne donneraient pas des formules diffÉrenteⁱ de celles qu'on aura par la [^]simple substitution des valeurs $n \setminus n$, $7i$ » , etc. 53. Puis donc que $n^{^^}B$ doit être divisible par A, soit-i le quotient de cette division[^] ensorte que et l'équation $Ap^{\wedge}=z^{\wedge'}Bq''=(^{\wedge}n^{*^{\wedge}B})q^{*'}QnAqq^{\wedge'}A''\{f, itaxkt$ divisée par [^]«.deviendra celle-ci » . $p'zriAY^{\frown}finqq' + A^{\wedge}$, ou $A^{\wedge}$ sera nécessairement moindre que [^] à cause que et que $B'^{\wedge}A^{\wedge}$ et n non $> \text{—}$. Or 1^{**} . si $A^{\wedge}$ est un[^] nombre carré, il est clair que cett^t équation sera résoluble par* les méthodes connues, et l'on ei aura la solution la plus simple qu'il est possible[^] en faisant $9' = o$, $7=1$, $fz=iy/A \setminus 2^{**}$. Si $A^{\wedge}$ n'est pas égal à un carré , on verra si ce nombn est moindre que $i?$, ou au moins s'il est divisible par un nombre quelconque carré , ensorte que le quotient soit moindri que jB , abstraction faite des signes *, alors on multipliera tout l'équation par [^] , et l'on aura, à cause de $AA'' \text{—} /i^{\wedge}=\text{—} ^{\wedge}AY \text{—} \{^{\wedge}A'q^{\wedge}TMfy^{\wedge}Bq^{\wedge} \setminus$

The text on this page is estimated to be only 26.72% accurate

ADDITIONS. 5g3 teorte qu'il faudra que $Bq^{\wedge} - f - A^{\wedge}p^{\wedge}$ soit un carré ; donc diyimt par $p^{\wedge}$ et faisant 1 au^a à rendre carrée la formule $By^{\wedge} + ^{\wedge}>$ laquelle est^a 3mme Ton voit, analogue à celle de l'article a. Ainsi ^a si C Dntient un facteur carré ^a, on pt)urra le supprimer^a en ayant tention de multiplier ensuite par y la valeur qu'on trouvera 3ur $y^{\wedge}$, pour avoir sa véritable valeur ; et l'on aura une forule qui sera dans le cas de celle de l'article 5i , mais avec îtte différence que les coefficiens .^a et C dp celle-ci seront Loindres que les coefficiens A et B àt celle-là. 54. Mais si $A^{\wedge}$ n'est pas moindre qpie $B^{\wedge}$ nine peut le devenir, L le divisant par le plus grand carré qui le mesure , alors oxv ra substituant cette valeur dans l'équation, elle deviendra 1 1 i ■ ' . • . ■ ""■■■; $n\}z=:n - vA\ 1 :^{\wedge}\rangle = >rfv\rangle - Mv + A = ^!-^{\wedge}$. On déterminera , ce qui est toujours possible , le nombre $A^{\wedge}$ itier V , ensorte que $n\}$ ne soit pas >- — , abstraction faite des Zék gnes , et alors il est clair que ^a" deviendra ^a ^' , à cause $d^{\wedge} - f' = :^{\wedge} = ^{\wedge}$

The text on this page is estimated to be only 15.95% accurate

S94 ^ D D I T I O H 5. On fera donc ici le même raisonnement que nous é fait dans Tarticle précédent , et si ^" est carré » on là résolution de Téquation; si > if ^* n'est pas carré, ^u'il soit « ^ ^ ou qu'il le devienne y ktsixA diyisé par un c; on multiplien i réquoation par A^^^ et oa aura; en faislant H la formule $B^{\wedge} - f^{\wedge}$

= — ^ ni 4 • • I • On prendra donc pour $r^{\wedge}$ un nombre entier, tel que n soit pas > , abstraction faite des signes ; et comnleJS pas > 4^\ (Ayp.)* A s'ensuit Péréquation -

ADDITIONS» 3g5 A^{55} sera j("* etc. rment une suite
 décroissante de nombres entiers, A^{55} est visie qu'en continuant cette suite , on
 parviendra nécessairement ■wn terme moindre que le nombre donné B\ et
 alors nomant ce terme C, on aura, comme nous l'ayons vu ci-dessus,
 formule $By^A +$ à rendre égale à un carré. Desorte A^{55} que iT les opérations que
 nous venons d'exposer, on sera totijours sure de pouvoir ramener la
 formule. $Ay^A -f- A^{55}$ à une. autre , us simple, telle que $By^A + C$, au moins si le
 problème est tsoluble. 55. Or , de même qu'on a réduit la formule $Ay'^A -f- A^{55}$
 à ille-ci $By^A + C$, on pourra réduire cette dernière à cette atre-ci A^{55} $Cy^A -\}$ - D,
 oùP sera moindre que C,et ainsi de suite; t comme les nombres A , B , C, D
 etc. forment une série air que "dette série ne ourra pas aller à Tinfini , et
 qu'ainsi l'opération /Jer A^{55} . A^{55} ujours iécessairement terminée. Si la question
 n'admet point de soluion en nombres rationnels , on parviendra à une
 condition impossible ; mais si la question est résoluble, on arrivera toujours
 i une équation semblable à celle dé l'art. 53,. et .ou'll'im des coefficiens,
 comme A^{55} sera carré; ensorte qu'elle sera susceptible des méthodes
 connues; or cette équation étant résolue, on pourra, en rétrogradant,
 résoudre successivement toutes les équations précédentes, jusqu'à la
 première Eclaircissons cette nlétliode par quelques exemples

The text on this page is estimated to be only 23.17% accurate

r S3S ADDITIONS. EXEMPLE I. 56. Soit proposé de trouver une valeur rationnelle de x telle que la formule $7 + iSx - f^{^^}$ devienne un carré (Yoy. chap. IY[^] art. 67 du traité précédent.) On aura donc ici $a = 7$, $6 = i5$, $c = i3$; donc desorte qu'en nommant[^] la racine du carré dont il s'agit, « aura la Sonnule $4 * i3y^* - ' i3g$ qui devra être un carré ; ainsi aura $^ = 4.13$, $i? = 139$, où l'on remarquera d'abord que A est divisible par le carré desorte qu'il faudra rejeter ce diviseur carré et supposer simplement $^ = i3$; mais on se souviendra ensuite de diviser] a la valeur qu'on trouvera pour $jr^$ (art. 5o). On aura donc $^$ en faisant $jr = -/$ l'équation $i3p^* - iSgç^* = a^*$, ou bien, à cause que 139 est $> i3$, on fera $jr = 2$, pour avoir $- iZ^j f + 139^* = z^*$, équation qu'on écrira ainsi, $- i39p^* = a^* - i3ç^*$. On fera[^] (art. 5a), et il faudra prendre pour n un nombre entier non $>$ c'est-à-dire

ADDITIONS. 3^7 [onzie $n^* - i3 = iSG8 = 139.1a$; [esorte qu'en
 faisant la substitution et divisant ensuite par $-^i3q$, on aura l'équation $p^* =$
 $- la 9^* + 3.4199^* - 1399$ ». Or, comme $- la$ n'est pas un carré, cette
 équation n'a pas encore les conditions requises; ainsi, puisque la est déjà
 moindre que $i3$, on multipliera toute l'équation par $- la$, et elle deviendra
 $- lap^* = (- 139 + 4iq y - 139)$ », desorte qu'il faudra que $139^* - lap^*$
 soit un carré, ou bien, en taisant $^=jr$, que $i3^ - la$, en soit un aussi. r On
 voit ici qu'il n^*y aurait qu'à faire $y = 1$; mais comme ce n'est que le hasard
 qui nous donne cette valeur, nous allons poursuivre le calcul selon notre
 méthode, jusqu'à ce que l'on arrive à une formule qui soit susceptible des
 méthodes ordinaires. Comme la est divisible par 4 je rejette ce diviseur
 carré, en me souvenant quie je dois ensuite multiplier la valeur à $ey^$ par a ;
 j'aurai donc à rendre carrée la formule $i3y^ - 3^$ ou bien, en faisant $j^ = -$,
 f on suppose que r et $'s$ sont des nombres entiers premiers entre eux, ensorte
 que la fraction -soit déjà réduite à ses moindres termes, comme la fraction
 $2 \setminus$ celle-ci $i3i^ \sim 5s^$; soit la racine $a^$, j'aurai «t je ferai »»=:7iM— .i3*%

The text on this page is estimated to be only 17.25% accurate

SgS A. D D ĩ T I O N Sv m étant un nombre entier non $> ^$, c'est-à-dire tel que $m^* + 5$ soit divisible par 3; or je trouve $m = 6$, ce qui donne $m^* + 3 = 39 = 3 \cdot 13$; si donc substituant la valeur de a^* et divisant toute l'équation par 3^4 on aura Comme le coefficient 3 de 5^* n'est ni carré ni moindre que celui de 4^* dans l'équation précédente, on fera (art. 54) et substituant Ton aura la transformation $I^* = 3i^{**} - 2(5 - 3/4)5V, + 3/4 - a. 6/4 - 13) J^*$; on déterminera a , en sorte que $3 - 3^4$ ne soit pas ^{4} et est clair qu'il faudra faire $fc = 1 = a$, ce qui donne $\blacksquare 6^4 - 5fABf:0$; et l'équation deviendra $i^* = 35^* + A$ laquelle est, comme l'on voit, réduite à l'état demandé, puis que le coefficient du carré de l'incrémente des z indéterminé du second membre est aussi un carré On fera donc, pour avoir la solution la plus simple qui est possible $-\$ = 0$, $^* = 1$, $r; = z i$; donc $\bullet$ de là - "" .1.

The text on this page is estimated to be only 14.19% accurate

ADDITIONS» Sg j maïs nous avons vu qu'il faut multiplier la valeur de $y^{\wedge}$ par s; . ainsi on aura donc , «n rétrogradant toujours $^{\wedge}$ on aura $i- = i$, donc $9^*=p$; donc l'équation donnera $(-ia(/ + 4i/))=p$ »; donc $-i2(/4..4ip=p$, ou $iaç = 4op$; donc $J'— p— la— 3>$ inaïs comme il faut diviser la valeur de $^{\wedge}$ par fl , on aura $^{\wedge}=f$ î ce sera le côté de la racine de la formule proposée $7 + iSx + i3a7^*$; ainsi faisant cette quantité = $-^{\wedge}$ on trouvera par la résolution de l'équation , d oà $X — 39>$ OU $^{\wedge}$. On aurait pu prèn

The text on this page is estimated to be only 22.85% accurate

400 ADDITIONS. on trouvera $a^2 + b^2 = \pm i$; donc « — |i, ou = -i. « Si on Tonlait avoir d'autres yalens de j:, il n'y aurait chercher d'autres solutions de l'équation $r^2 = 3i^2$ quelle est résoluble en général par les méthodes connues; on peut aussi dès qu'on connaît une seule valeur x^2 en déduire immédiatement toutes les autres valeurs satisfaisante X par la méthode, cpqiliquée dans le chapitre IY du t précédent. remarque: 9 57. Supposons en général que la quantité a -f- x^4 devienne égale à un carré g^2 , lorsque $x = \sqrt{a}$ ensorte que ait donc desorte qu'en substituant cette valeur dans la formule propo elle deviendra Qu'on prenne $g + \sqrt{a}$ (a? — f) pour la radne de cette qt tité, m étant un nombre indéterminé, et Ton aura l'équat $g^2 + \sqrt{a}(x^2 - \sqrt{a}) = rg^2 + 5jmgr(x - \sqrt{a}) + m(a - \sqrt{a})$ c'est-à-dire en effaçant g^2 de part et d'autre, et divisant suite par $x - \sqrt{a}$, i + c (a; +) = amg + m*(a: — /) ; d'où l'on tire $\sqrt{a}^2 - \sqrt{a}^2 = \sqrt{a}^2 + b + \sqrt{a}^2 Tn^2 - \sqrt{a}^2$

The text on this page is estimated to be only 25.86% accurate

À i) D I T t O N âv 4oi Et il est claii" q\ x à cause du nombre indéterminé rn, cette expression de X doit renfermer toutes les valeurs qu'on peut donner à j;, pour que la formule proposée devienne un carré; car quel que sôit le nombre carré auquel cette formule peut être égale , il est visible que la racine de ce nombre pourra toujours être représentée par $g + m(x - f)$, en donnant à m une valeur convenable. Ainsi quand on aura trouvé par la méthode expliquée ci-dessus une seule valeur satisfaisante de a;,. il n'y aura qu'à la prendre pour y, et la racine du carré qui en résultera, pour g ; l'on aura , par la formule précédente, toutes les autres valeurs possibles de x. Dai^s l'exemple précédent on a trouvé ainsi on fera et l'on aura 5 r « • de _^ ig -*^ lom-^am* c'est l'expression générale des valeurs rationnelles ae jî , qui peuvent rendre carrée la quantité $7 - f - i5x + iSo$;** EXEMPLE II* 58. Soit encore proposé de trouver une valèuif rationnelle de y y telle que aSy* -«- 5 soit lin carré; Comme aS et S ne sont divisibles par aucun notnbre carré ^ il n'y aura aucune réduction à y faire* Ainsi en faisant il faudra que la formule $a3p^* - 5^*$ devienne Un carré «* ; de soi:te qu'on aura l'équation Ai C%

The text on this page is estimated to be only 18.26% accurate

403 ADDITIONS. On fera donc $z = n^2 - aSq^2$, «t il faudra prendre pour n un nombre entier lum n^2 , ul qüe $n^2 + S$ soit divisible par a^3 . Je trouve » =: 8 j ce qui doj;uie et cette valeur de n est la seule qui ait les condttiooa requises. Substituant donc $iq - a^3q^2$ à la place de z^2 divisant toute Féquation par a^2 , j'aurai celle*ci, $l^2 = 5q^2 - Q.8qq' + ^Zq^2$ dans laquelle on voit que le coefficient 3 est déjà moindre que la valeur de B qui est 5, abstraction faite du signe. Ainsi on multipliera toute l'équation par 3, et l'on aura $5/>^* = (3(/ - BçO' + S^2)$; desorte qu'en faisant $- = y$, il faudra que la Formule $- 5y^2 + 5$ soit un carré, où les cocfficiens 5 et 3 n'admettent aucune réduction. Soit donc $^ = -$, (r et $^$ sont supposés premiers entre eux, au lieu que q^2 et p peuvent ne pas l'être), et l'on aura à rendre carrée la quantité $- 5r^2 + 3^2$ ' > desorte qu'en nommant U racine z^2 on aura $- 5r^2 + 3^2 =: 2i^0$ et de là $- 5r^2 = \hat{a}^2 - 3s^2$. On prendra donc $z^2 := 3$ ms *' Ss p \ «t il faudra que m soit un nombre entier non $> |$, et tel que $m^2 - 3$ soit divisible par 5^* , or c'est ce qui est impossible v car

The text on this page is estimated to be only 16.88% accurate

A b l> i t I o j» «[^] 4di CVfi iiè poîn[^]ait prfcndre que 771=1
ou=[^] ce qui donne m* -[^]3 =—[^]2 oîi = i. Aiizisî Ob eh doit tondtire que
leproblèm« n'eit pasrésoluUe[^] c'est[^]-diré i[^]*il est iihpofisible que la
forrotile aS[^]y* — Spuiss» jamais détenir égale à un nombre carré [^] quelque
noinibn que l'on eubdtitiie à la {jace de[^]. COROtLAlREw 59. Si 6n avait
tine équation quelconque du second depé k deuk inconnues , telle que a +
èx -f- cy + dj[^] -f~ ^{^^} "[^]fy* — [^] > et qtie l'on proposât de trouver des
valeurs rationnelles de dû et y qui satisfissent à cette équation, on y pourrait
parvenir, lorsque cela est possible[^] par la méthode que nous venônt
l'exposer. En effet, si on tire la vâletir dey en o[^] , on aura ûfy + ex + c[^]{/i([^]c
+ exy-[^]4fia+bx + dx[^])), »U bien en faisant îcsorte que la question sera
réduite à trouver des valeurs dô c qui rendent rationnel le radical v/(^{*} +[^]a; +
5/X^{*}). HEMARQUE» 60. Nous avons déjà traité ce niême sujet , liiais
d*Une lUà[^] lière un peu différente , dans les Mémoires de t Académie des
iciences de Berlin pour l'année 17671 et nous croyons être les

The text on this page is estimated to be only 25.92% accurate

404 A D D I T I O î[^] s. premiers qui ayons donrté une méthode directe et exenipté âé tâtonnement pour la solution des problèmes indéterminées dil second degré. Le lecteur qui sera curieux d'approfondir cette juadère, pourra consulter les Mémoires cités, où il trouvera •UTtout des i[^]emarkes nouvelles et importantes sur la recherche des nombres entiers qui, étant pris pour n, peuvent rendre n* — ^ divisible par A, AeXB étant des nombres donnés. On trouvera aussi dans les Mémoires pour les années 1770 et suivantes, des recherches sur la forme des diviseurs dei nombres représentés par z* — Bq[^]\ desorte que par la forme même-du nombre A , on pourra juger souvent de Timpossibi' lité de r équation Afz=i%^{^^}Bq^{^^} •ù Ayl rjr.B == à un carré , (art. 5a).

The text on this page is estimated to be only 28.48% accurate

ADDITIONS! 405 m ■ ' , , , .1 j .,.'8 (PARAGRAPH VI. Sur les doubles et triples égalités[^] I . ^ . « ■ (• 61. Il ous traiterons fcl en peu de mots des doublés el triples égalités , qui sont d'un usage très-fréquent dans l'analyse de Diophante[^] et pour la solution desquelles ce grand géomètre et ses commentateurs ont pru devoir donner des règles particulières. Lorsqu'on a une formule contenant une ou plusieurs inconnues à éгалer à une puissance parfaite , comme à un carré ou à un cube, etc. cela s'appelle, dans l'analyse de Diophante, une égalité simple ; et lorsqu'on a deux formules contenant Ta même ou les mêmes inconnues à éгалer chacune à des puissances parfaites[^] cela s'appelle une égalité double[^] et ainsi de suite. ;.:-jt : ; . Jusqu'ici on a vu comment il faut résoudre tes égalités sim[^]ples où l'inconnue ne passe pas le second degré [^] et où la puissance proposée est la seconde, c'est-à-[^]irele carré. Voyons donc comment ou dcddt traiter lea égalités doubles et triples de la même espèce. Çql[^] Soit d'abord pressée cette égalité doublée [^] a -f- Sx = à' pn carré[^] c -f- cEr = à un carré , où l'inconnue a: ne. se trouve [^]u'au premier degré. Faisant a + &[^] == i* «t c + dx=: u*,.et chassant x de

The text on this page is estimated to be only 16.63% accurate

4d9 ADDITIONS^ ces deux équations , on aura $iK\hat{I} - ic = rft^* - r - 5u^*$; donc $rft^* = ftu^* + ad - rftc$, et $\{dty = dbu^{\wedge} + (^{\wedge}ad - bc)d$; desorte qnèladifficulté sera réduite à trouver une valeur tsh tionnelle de u, telle que $dbu^{\wedge} + ad^{\wedge} - r bcd$ devienne un carré. On résoudra cette égalité simple par la métl^ode exposée ch ^essuB y çt connaissant ainsi u on aura $u^* a$ Si régjalité doublée était $fltp^* + ix =$ à un carré $cr^* 4- c2x 3r$ à un carré . il n'y aurait qu'à £a|ire 1 a;* çt multiplier ensuite Tune et l'autre formule par le carré $3^{\wedge\wedge}$ pn aurait ces deipc autres égalités $a-+- ia7=$ à un cairré, ç 'j' $dx =$ à un carré $j^{\wedge}$ qui sont semblables aux précédentes* Ainsi on peut résoudre en général toutes les égalités doubles où l'inconnue ne pas§e pas le premier degré j, et celles où Tin-. connue se trouve dans tous les termes , pourvu qu'elle ne passe pas le second degré ; mais il n'en eçt pas de même Ipsque $Vp^{\wedge}$ à de^ égalités de cette forn^e , $a + ij? -f- c,T^* =$ à un carré • if- $iSx -f- j/or^* ==$ à lin $c^{\wedge}x:r4$ «

The text on this page is estimated to be only 15.49% accurate

App I T l o N a. 407 Si on résout la première de ces égalités par $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ et qu'on nomme y la valeur de x qui rend $ax^2 + bx + c = 0$, on aura en général, (art. 67), $\sqrt{ax^2 + bx + c} = Q\sqrt{m^2 - cy} + R$ donc substituant cette expression de x , dans l'autre formule $\sqrt{6 + 8x - 7x^2}$, et la multipliant ensuite par $\sqrt{m^2 - cy}$, on aura à résoudre l'égalité $\sqrt{(m^2 - cy)^2 + 8x(m^2 - cy) + 6(m^2 - cy) - 7x^2(m^2 - cy)}$ ($\sqrt{m^2 - cy} = \sqrt{agm + A + gf}$) $+ > (\sqrt{m^2 - cy} + \sqrt{S^2 + i + cf})^2 =$ à un carré, dans laquelle Inconnue m intervient au quatrième degré. Or on n'a jusqu'à présent aucune règle générale pour résoudre ces sortes d'égalités et tout ce qu'on peut faire, c'est de trouver successivement différentes solutions, lorsqu'on en connaît une seule. (Voyez le chapitre IX.) 1. $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ Si on avait la triple égalité ; or $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{ax^2 + bx + c}$; on ferait $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{ax^2 + bx + c}$, $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{ax^2 + bx + c}$, $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ et chassant x de ces trois équations on aurait celle-ci, aieorte qu'en faisant $u = \sqrt{ax^2 + bx + c}$

The text on this page is estimated to be only 16.44% accurate

408 ADDITIONS. la difficulté se réduirait à résoudre l'égalité simple $jk - bh^2 - ck - f dh$, --, $2x^2 - Tr = 2^2$ un carré. ad — ^2cp ad''cb laquelle est y comme Ton voit ^ dans le cas de aotre métboJQ générale. Ayant trouvé }a valeur de, £« on aur^u = te, t ■ * et les deux premières équations, donneront àd''cb * y ad — cb « • * ■ Mais si la triple égalité proposée ne contenait qu'une seule variable, oi[^] retomberait alors dans uie égalité où l'inconnue monterait au quatrièm^e degré. ^ Ji'-. • En effet, il est clair que ce cas peut se déduire du précédent[^] en faisant ^ . • ' « « * desorte qu'il faudra que Ton ait $oa^2 - c^2 = d^2 - çb$. et parçônaéqiênf ; •T - — ad — cô Or nomimàhty" une des valeurs de-z qui peii[^]yeut satisfaire 4 Végalité ci'dessus; et faisant, pour abréger, $çA = r bh$

The text on this page is estimated to be only 11.47% accurate

ADDITIONS* ^99 a aura en général^ (art. 5y), % — — , m* — c
Donc y substituant cette yaleur de z dans la dernière égalité. : la multipliant
toute par le carré de m^ -^^ e , on aura celle-^îî^ — — ^! — Il •'-••»■ — .4
— == a un carre , I. Tinconnue m monte , comm^ l'on yoit^ au quatrième
de^ê« ij>»^'^"^^*w'^

The text on this page is estimated to be only 29.28% accurate

419 A 1 > I > I T I O N 9. iMtPMHM^ PARAGRAPH VII

Méthode directe et générale pour trouver toutes les valeurs de x exprimées en nombres entiers par lesquelles on peut rendre rationnel l'expression $\frac{V}{CA^2 + B}$, k , et l étant des nombres entiers donnée pour trouver aussi toutes les solutions possibles en nombres entiers des équations indéterminées du second degré à deux inconnues. * Addition pour le Chapitre VI ^ 64.

Voici par la méthode du 5 V on puisse tirer des formules générales qui renferment des valeurs rationnelles, propres à rendre $Ay^2 + B$ égal à un carré, cependant ces formes ne sont d'aucun usage, lorsqu'on demande { des valeurs exprimées en nombres entiers; c'est pourquoi nous sommes obligés de donner ici une méthode particulière pour résoudre la question dans le cas des nombres entiers. Soit donc $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \text{entier}$; et comme A et B sont supposés des nombres entiers et

The text on this page is estimated to be only 22.80% accurate

A 1> B I T I O N 9. 4il Soit être aussi un nombre entier , il est clair que x devra être [pareillement entier; déserte qu'on aura à résoudre en nopabrei^ entiers l'équation a:» ^ cy» = J?. Je commence par remarquer ici qi!ie si B n'est divisible par ftucun nombre carré , il faudra nécessairement

The text on this page is estimated to be only 22.99% accurate

4ifl A D D r T I o N t; De là je conclus , i®. que si B n'est divisible par aucun caifr; y et B seront premiers entre eux. a?. Que si B est divisible par un seul carré et*, y pourra êtrl premier à -5 , ou divisible par a , ce qui fait deux cas qu'il fan* dra examiner séparément ; dans le premier cas on aura à x^ soudre Téquation $a:^^Jy^ = B$, en supposant y et B premiers entre eux; dans le second, oi aura à résoudre Féquation $x^* — Jy = B \setminus B^{\wedge}$ étant ==--, en supposant aussi $^{\wedge}$ et $B^{\wedge}$ premiers entre cnx; mais il faudra ensuite multiplier par et les valeurs qu'on ami trouvées pour j' et x, à TefiFet d'avoir les valeurs cçnvenabfesi Véquation proposée. 3°. Que si B est divisible par deux difFérens carrés , ** et?, on aura trois cas à considérer; dans le premier^ on résout l'équation $a:* — -^{\wedge} = j5$, en regardant^ et $B^{\wedge}$ comme premiers entre eux; dans le second^ i on résoudra de même l'équation $x^{\wedge}Jy^* = B \setminus B^{\wedge}$ étant = — , dans Thypothèse de y et $B^{\wedge}$ premiers entre eux, A et on multipliera ensuite les valeurs de a; et $j^{\wedge}$ par ee; dansb troisième , on résoudra l'équation $J5" \text{ étant } = ^{\wedge}$, dans rhjrpothèse de y et $^{\wedge}$. premiers enti» eux^ et on multipliera ensuite les valeurs de x et de $j^{\wedge}$ par II *■>

The text on this page is estimated to be only 25.04% accurate

ADDITIONS. 4ⁱⁱ $J^\wedge$. etc. Ainsi on aura autant d'équations différentes à résoudre, qu'il y aura de différents diviseurs carrés de $^\wedge$; mais ces équations seront toutes de la même forme et y sera aussi toujours premier à B. 65. Considérons donc en général l'équation où y est premier à $^\wedge$; et comme x et y doivent être des nombres entiers, il faudra que $o^\wedge - uiy^\wedge$ soit divisible par B, On fera donc, suivant la méthode du § IV ^{art. 48} » $X = Ty - Bz$, et l'on aura l'équation $(n^\wedge - y)^\wedge - nByz + 5V = B$, par laquelle on voit que le terme $(i^\wedge - A)y^\wedge$ doit être divisible par B y puisque tous les autres le sont d'eux-mêmes; donc, comme $j^\wedge$ est premier à B $^\wedge$ ($J^\wedge y^\wedge -$ il faudra que $n^\wedge -$ soit divisible par B; desorte qu'en faisant $-g - C$, en aura, après avoir divisé par B y $Cy'''' - SLTiyz + Bz^\wedge = i$. or cette équation est plus simple que la proposée, en ce que le second membre est égal à l'unité. On cherchera donc les valeurs de n qui peuvent rendre $n^\wedge - A$ divisible par B; pour cela il suffira, (art. 47) > d'essayer pour n tous les nombres entiers positifs ou négatifs auⁱ

The text on this page is estimated to be only 26.24% accurate

4i4 kryvirloifi. B al $\wedge$ — etsi parmi ceux-ci on n'en trouve aucun qui satiisiasséjl on conclura d'abord qu'il est impossible que $c^{\wedge} \cdot \wedge^{\wedge}$ A puisée être divisible par B , et qu'ainsi Téquation proposée n'est pas résoluble en nombres entiers.. Mais si on trouve de cette manière un ou püsêtirs nombret satisfaisans ', on les prendra l'un après Tautre pour n, ce qà donnera autant de différentes équations qu'il faudra traiter séparément , et dont chacune pourra fournir une ou plusienn solutions de la question proposée. Quant aux valeurs de n qui surpasseraient celle de $\wedge >$ ot en pourra faire $\wedge$ straction, parce qn $\wedge$ elies ne doimeraieit point d* équations différentes de celles qui résulteront des fstr leurs de n qui ne sont pas $\wedge$ —, comme nous l'avons déjà mw tré dans l'art. 52. Au reste , comme la condition par laquelle on doit déteini' $\wedge$ ner n est que $n^* \wedge - y^{\wedge}$ soit divisible par B,Û9st clair qne dmque valeur de n pourra être également positive pu négative} desoxte qu'il sui&ra d'essayer successivement pour n tous les nombres naturels qui ne sont pas plus grands que $\wedge$, et de prendre ensuite les valeurs satisfaisantes de n tant en plus qu'en moins. Nous avons donné ailleurs des règles pour faciliter la re $\wedge$ cherche des valeurs de n qui peuvent avoir la propriété requise, et pour trouver ces valeurs à priori dans un grand nombre de cas. J $\wedge$ oyez le $\wedge$ Mémoires de Berlin pour l'wnéi 17 $\wedge$ 7, pages 194 etf $\wedge$ 7 $\wedge$. \ :

The text on this page is estimated to be only 25.74% accurate

1 i> b I T I 6 11 8. 4i§ ésoiution de téiiu(Uion Cy* — ^ aayz + Bx^ = i en acMdbrei entiers. On peut résoudre cette équation par deux méthodes différé* ntes que nous allons expliquer. PREMIÈTTE MÉTUO D*Ë. €6. Comme les quantités CyU^B sont supposées des nom«is entiers , de même que les indéterminées ^ et 2 , il est ^d-»le que la quantité Cy* — aryz + Bz* sera toujours néceiidrement ég^e à des nombres entiers; parconséquent l'unité ra la plus petite valeur qu'elle puisse recevoir, à moins L*e]le ne puisse devenir nulle , ce qui ne peut arriver que rsque cette quantité peut se décomposer en deux facteurs bionnels ; comme ce cas n'a ancme difficulté , nous en fit* ■38 d*abord abstraction, et la question se réduira à trouver % valeurs de ^ et s , qui rendront la quantité dont il s* agit la us petite qu*il est possible ; si le minimum est égal à Tunité , k «ara la résolution de Téquation proposée ^ sinon on sera inré qu'elle n'admet aucune solution en nombres entiers. xsaile problème présent rentre dans le problème III du § II, «st susceptible d'une solution semblable. Or comme l'on a ici iTt. 65), il faudra distinguer deux cas ^ suivant que A sera mti€ ou négatif. Premier cas lorsque n* — . BC = A < o. C7. Smivant la méthode de l'article 62, il faudra réduire en ^ctiçm coûtinne la fraction ^, prise positivement; c'est ce i*on exécutera par la règle de l'article 4 ; ensuite on formera tr les formtifés de l'article 10 la série des fractions conver*

The text on this page is estimated to be only 28.87% accurate

4i6 À t> d I t l o R s. n gemtes vers ^> et il li'j aura plus qu'à
 essayef stiôcc ment les numérateurs de ces fractions pour le nombre les
 dénominateurs correspondans pour le nombre z ; si le posée est résoluble en
 nombres entiers , on trouvera de manière les valeurs satisfaisantes de ^ et 2
 ; et réciproqu< DU sera assuré que la proposée n'admet aucune soluti*
 nombres entiers, si parmi les nombres qu'on aura essayés l'en trouve point
 de satisfaisans. Second cas lorsque n* — BC z=:j4'^ù, 68. On fera usage ici
 de la méthode de Tart. 33 et ainsi , à cause de on considérera d'abord la
 quantité, (article 3g), $n \pm \sqrt{A} \hat{u} - \hat{v}$ i dans laquelle il faudra détermixier les
 signes tant de k t* de 71, que nous avons vu pouvoir être également positi
 négative , que de ^A , ensorte qu'elle devienne positive suite on fera le
 calcul suivant : $111 . j \hat{C}'' = /. 'P' + \hat{C}', P \gg S^{\wedge}, \hat{A}.. <=^{\wedge}!^{\wedge} 111$ etc, eic. etc.

The text on this page is estimated to be only 23.46% accurate

À $i > D$ 1 t t d K S; $4^{^^}$ et ôh continuera seulement ces séries jusqu'à câ qtke deux termes icorrespondans de la première et de la seconde série reparais* sent ensemble ; alors , si pàrnli lés termes de là seconde série P^{**} , P^* , jP'' , etc. il s'en trouve un égal à Tunité positive, ce teime donnera une solution de l'équation proposée $^$ et les valeurs de y et a seront les termes corirespohdans des deux séries $P^0\%$ jP^* , P'' , etc. et $\zeta\%$ Q' , ζ'' , calculées par les formules de Tart. fl5 ; sinoiçi on en conclura sur le champ que la proposée n'est pas résoluble en nombres entiers, ($^p^{^oy\&i}$ l'exemple de l'article 4o.) .. . Troisième eus lorsque $A=\pm$: à iià cafré $^$ 63. Dans te cas le nombre ^{A} deviendra rationnel , et là (juàntité $Cy^{\wedge} - \hat{i}^{^nyz} + Bt^{\wedge}$ poûrf a se décomposer en deust facteurs rationnels. En effet cette quantité n'est autre chose que celle-éi $> V.-^{\wedge}$ «i. u $i^{\wedge} 1 1 - - ^{\wedge}$ laquelle , en supposant' jgi $z=i a^{\wedge}$, peut se mettre sous cette forme , $iCy\pm in + a)zy(\&i\pm, Xn^{\wedge}a)zy, c^{\wedge} . .$ $^$ Or comme il fàùdrà qtte lé produit âe $n-^{\wedge}a$ par $n-^{\wedge}à$ soit divisible pàf C , et parconséquent/que l'un de ces deux noitibres $n -|- a$ ef $n \bullet^*- a$ soit divisible par uii dés -facteurs de C, et l'autre par le facteiir réciproque;' supposons donc $C =:bc$ et quen-j- a $j=:fb$, et $n^{^^} az=z$ gel f et b étaiit des nombres ëntiets $^$ et la quantité précédente deviendra le produit de ces deux facteuxs linéaires , $cy \pm fz$ et $hy \pm: gz$; donc $>$ puisque ces deux fac-: tôitrs sont égaux à des nombres entiers , il est clair que leUt produit ne saurait être = 1 , comme l'équation proposée le demande $^$ à moins quç chacun d'eux ne soit en particulier fié Dd

The text on this page is estimated to be only 18.72% accurate

^ig ADDITION^ . t=;iz 1 ; on fer^i donc $cy \pm fz = z \pm i$, $by \pm gzz = \pm i$, et on déterminera par là ks nombres y et z] si ces nombre! â8 trouvent entiers, on aura la solution de l'équation proposée, sinon elle sera insoluble au moins en nombres entier». SECONDE MÉTHODE. 70. Qu'on pratique sur la formule $Cy^* - \hat{o}/iyz - f^* \wedge \gg^*$ dci transformations semblables à celles dont nous avons fait usage plus haut, (art. 54) « et j^ dis qu'on pourra toujours parvenir à une transformée , telle que ks nombres Zri M, N étant des nombres entière dépendani des ^ombre8 donivés $C \wedge B$, n, eîisorte quei Ton ail^ et que de plus nM- ne soit |^ pluâ grmid^ (abstraction faite des signes) * que le nombre X , ni que le nombre A^ : les nombres § et " ^ seront aussi des nombres entiers j mais dépendiUis des nombres indéterminés y et z. En effet sôit , ^ par exemple , C moindre que B ^ et qu'oM mette la formule dont il s'agit spus cette forme $\mathfrak{f}y^{\wedge} - \wedge nyf + By$, •n taisant $C \wedge B \setminus z = y$, fi 271 n'e&f pas plus grand que È\ il est clair que cette fbrmul* aura déjà d*elle-même les conditions teqi^ises; mais si a/i est ^lu8 grand que B^ , alors on supposera

The text on this page is estimated to be only 14.13% accurate

A t) ê i f t 6 H I; 4ij[^] et substituant on Atm la transforméA[^]y—
a«yy +i?'y, . . . • • • Or[^] comme le nombre m est indéte[^]mùié , ^{^^}fonrrlk, eh
\\é Supposant entier , le prendre tel que le nombre n ««[^] mB[^] nd soit pas
plus grand que {B[^] ; alors a/i' ne surpassera pas B[^]é Ainsi, si a/i* ne
surpasse ptas tton phis[^]" , la transformée pré-* cédente sera déjà dans le cas
qu*on a en vue ; m[^] Àkr[^] est plus grand que 5" , en continuerÉ alors à
supposer ee qtB doimera la nouvelle transformée 11 ■"• On déterminera le
nombre entier m* , ensorte que n* — m[^]£^{^^} ne sôit pas plus grand qiié — -
, ûioyènnèini qtioi âiî[^] né sur-« passera [^]a\$ 5[^]\\i desorte que Von aura la
transformée cherchée[^] fii s[^]n[^]}[^] ne surpasse pat non plus 5"[^] ^ mais si an"
surpasse [^]"^{^^} on supposera de nouveau X ■ I . y» — m"y*" + y*[^] , etc.
etc* Or il est visible que ces opérations ne peuvent pas aller à l'infini; car
puisqiie sîn est plus grand que B[^] et que an' ne l'est pas , il «»t clair que n'
sera iHoindre que n ; de même an[^] Mt plofrgrand [^]e i[^]' , et âi»" ne Teit pas ;
donc n" sera moiv a

The text on this page is estimated to be only 26.50% accurate

42» ADDITIONS. die que $n\}$, et ainsi de suite ; desorte que les nombres $n, n^j n''$ etc. formeront une suite décroissante de nombres entien,[^] laquelle ne pourra parconséquènt pas aller à l'inËni. On p Tiendra donc nécessairement à une formule où le coefficient terme moyen ne seFa pas plus grand que ceux âes termes extrêmes[^] et qui aura d'ailleurs les autresproprfetés que noot avons énoncées ci-dessus ; ce qui est évident par la nature mêmft des transformations pratiquées. Pour faciliter la transformation de la formule ' '. ..' . • • • . Cy -[^] Qnyz rh ^{^^^} cncelle-ei[^] }e désigne par D le p)u8 grand des deux.coefficiens extrêmes C et B, et par £>* l'autre coefficient , et, vice versa-, je désigne par ù la variable dont lécâtré se trouve multiplié par D[^]et-par i' Tautre variable; ensortequela formule proposée. prenne cette forme où D[^] soit moindre que D ; ensuite je n'aurai qu'à faire le calcul suivant : 111 ' etc. etc. etc. où il faut bien remarquer que le signe =[^] qui est mis après les lettres 771 y 77i\ tti" etc. n'indique pas une égalité parfaite [^] mais -feulement une égalité aussi approchée qu'il est possible[^] vk

The text on this page is estimated to be only 25.43% accurate

, ADDITIONS. $4^1 j t^{\wedge}nt$ que m , m^* , m'' etc. ne «ont que des nombres en- $*$ $^{\wedge}$ tiers. Je n'ai employé ce signe $==$ que faute d'un autre signe $^{\wedge}$ convenable, - Ces opérations doivent être continuées jusqu'à ce que dans la série n , $/i^*$, zi'' , etc. on trouve un terme comme n qui, (abstraction faite du signe), ne surpasse pas la moitié du terme correspondant $D^{\wedge}$ de la série $Z>'$, D'' , $D^{*''}$ etc. non plus que la moitié du terme suivant $D^{\wedge}$. Alors on pourra faire •u bien Nous supposerons toujours dans la suite qu'on ait pris pour M le plus petit des deux; nombres $D \setminus D^{*''}$ 71. L^* équation fiera donc réduite à celle-ci, où $N^{\wedge} — LM = ^{\wedge}$, et où $2iVn$ est ni $> Z$, ni $> ilf$, (abstraction faite des signes). Or M étant le plus petit des deux coefficients L et M , qu'on multiplie toute l'équation par ce coefficient M , et faisant il eçt clair qu'elle se changera eh celle-ci $^{\wedge} 3$

The text on this page is estimated to be only 18.45% accurate

4ad A p D I T I o N s; dans laquelle il faudra maintenant distinguer les deux cas de A positif et de j négatif. Soit i^A , A négatif et $i^A \ll -a$, a étant un Qon^e positif; l'équation sera donc Or y comme $N^A - i^A M^A$, on aura d'où Ton voit d'abord que les nombres L et M doivent être de mêmes signes ; d'ailleurs qN ne doit être ni $i^A Z$ ni $i^A M$; donc $i^A y^*$ ne sera pas > -7 ; donc $a = i^A Z / i^A J / 5$ et puisque M est supposé moindre que L, ou $i^A u$ moins pas plus grand que $L j^A$ on aura à plus forte raison $(? = i^A u > |4 f^* 5$ donc $i^A f =$. ou

The text on this page is estimated to be only 19.88% accurate

A D D I T I O N Si» 4a3 •t Ton aura donc par Féquation on aura et parconséquent desorté que **• ûé sautait être un nombre entier, comme il I« doit , {fyp») à moins que ^ ne soit égal à Tunif é , soit = d: i , et parconséquent Mz:z 1. i)e là je tire donc cette conséquence, quô Téquation proposée ne saurait être résoluble en nombres entiers , à moins qu0 M ne se trouve égal à Tunité positive. Si cette condition a Ueu , alors on fera et où remontera de ces valeurs à celles de y et s. Cette méthode revient pour le fond au même que celle de l'article 67 , mais elle a sur celle-là l'avantage de ^'exiger aur cun tâtonnement. 1)*. Soit maintenant j4 un nombre positif^ on aura er comme N^ ne peut pas être plus grand que —7- , il est cîaîr 4 que l'équation ne pourra subsister, à moins que — LM n^ soit un nombre positif, c'est-à-dire que L et M ne soient de signes diffÉrens. Ainsi j4 sera nécessairement «

The text on this page is estimated to be only 26.29% accurate

4^4 A D D I T I a n f ; pu il/ = ou $< v/-^$. (iC cas de ' ne peut avoir lieu que lorsque j_4 est un carré ; par conséquent ce cas est très-facile à résoudre par la méthode donnée plus haut (art. 63), Reste donc le cas où j n'est pas carré , et dans lequel on aura nécessairement $M'^y A$, (abstraction faite ^{u} signe de M)] alors l'équation sera dans le cas du théorème de Fart. 38 , et se résoudra p^- ; conséquent par la méthode que nous y ayons indiquée.. $^$ Ainsi il n'y aura qu*à faire le calcul suivant $^ ^o = 0$, $P^* \gg = 1$, (JL

additions; 4[^]S la résolution de l'équation proposée ; car il n'y aura
 qu'à prendre pour u et [^] les termes correspondans des séries p^{*}, p^{''}, p^{'''}
 etc. q\ q[^]\ laquelle contient pour chaque radical y' A , les valeurs des termes
 des deux séries P^o , — P\ P'\ — P^{'''} etc. et (a , fi\ /x", fA^{''}% etc. continues,
 jusqu'à ce que l'un des termes P\ P'', P^{'''}* etc. devienne = 1 ^ après quoi tous
 les termes suivans de l'une et de l'autre série reviennent dans le même ordre.
 Desorte qu'on pourra juger sur-le-champ, par le moyen de cette t[^]lcj.

The text on this page is estimated to be only 19.99% accurate

^&S A D D I Y I o N a; de la résokibilité de Téquation De la manière de trouver toutes les solutions possihkl de l'équation $Cy^* - anyz - | - Bz \gg = i$, lorsqu'on n'en connaît qu'une seule, 7a. Quoique par les méthodes que nous venons de donner, on puisse trouver successivement toutes les solutions de cette équation, lorsqu'elle est résoluble en nombres entiers, cepen* dant on peut parvenir à cet objet d'une manière encore plat simple que voici : r Qu'on nomme p et q les valeurs trouvées de y et z, ensorte que Ton 4it $Cp^{\wedge} - SLnpq + Bq^{\wedge} = i$, et qu'on prenne deux autres nombres eûliérâ r et s, tels $^{\wedge} \hat{u} t \text{ } ps'^{\wedge} qr = i$, (ce qui est toujours possible, à cause que p etq sont nécel' sairement premiers entre eux), qu'on suppose ensuite y- $^{\wedge} ipt'^{\wedge} i^{\wedge} r Uy \text{ } zssqt + su$, t etu étant deux nouvelles indéterminées ; substituant ces expressions dans l'équation $Cy^{\wedge} - * 2nyz + > Ba^* = i$, ft faisant pour abréger $P:ssLCp^{\wedge\wedge} Qnpq + i^{\wedge} \S \S = Cpr^{\wedge} n(ps - f^{\wedge} qr) - + * Bqs \setminus Rzs \S r' ^{\wedge} unrs + Ss \setminus$

The text on this page is estimated to be only 12.90% accurate

X © D I T I o N s: 4[^] Wi aura cett» transformée , Orona,(Aj77.)*
P = i; L« plus , si on nomme p et ^ deux valeurs de r et 5 qui satls* assent à
T équation *:ai aura en général^ (art. 4[^])^ r=f + mp, sr=z c + mq, r% étant
un nombre quelconque entier ; donc mettant ces ya^ eurs dans Texpression
de Q, elle deviendra Ç=:Cpf — n ip^ + qf) + BqiF + mP\ lesorte que
comme P s= i^ on pourra rendre Çsso^ eit Prenant Maintenant je remarque
que la valeur de Ç* — PB se réduit, après les substitutions et les réductions/
à eejle^ci^ ^ n* — CB) (^ps — çr)* ; desorte que comme ps — qr^i, 3n
aura 3onc faisant P=i, Ç = o, Il viendra •— R == ^ , savoir H i= — >df ;
ainsi relation traiMlr Ebrmée ci-deseus se changera en cellercî^ ^r comme
^1 2| Pi y, v et « sont, par Thypothèse^ des noii|^,

The text on this page is estimated to be only 17.73% accurate

'4&8 ADDITION S." bres entiers , il est facile de voir que t et u seront ansii di , nombres entiers; car^ en tirant leurs valeiirs des épatons ^ on a $ps - ^{qr} qr - p^{'}$ c'est-à-dire , à cause de $ps - ^{qr} qr = i$, $t = jy - rs$, $u = psi - qy$. Il n*y aura donc qu'à résoudre en nombres entiers l'équatioi et chaque valeur de t et de u donnera de nouTelles ysiem\ dey et z. En effet, substituant dans les valeurs générales de r et x h| vdeur du nombre m trouvée ci-dessus , on aura $r = p(i - Cj^{^} - ^{B}pq^{^} + npÇjxr + qf)$, $5 = 9f + nq\{p^{^} + qp^{^} f u bien$, à cause de $Cp^{^{'}}^{anpq} + Bq^{^} =: i$, $r = (^{B}q^{^}np) \{q^{^}p7) = -Bq + np$, $s = z(^{C}p - nq)(^{p9'} - qfi)^{^} = Cp - nq$. Donc mettant ces valeurs de r et ^ dans les esqpressions ci* dessus de ^ et z , on aura en général $y = pt^{(^{B}q^{^}np)u}$, $z :=: qt'^{^}ÇCp - nq)u$. y5. Tout se réduit donc à résoudre l'équation D' n H'^AvJ'^is

The text on this page is estimated to be only 19.90% accurate

ADDITIONS. 4%Q _ Or, !•. si $x > 0$ est un nombre négatif, il est visible que cette B^pation ne saurait subsister en nombres entiers ^ qu*en faisant $u=0$, $t=1$, re qui donnerait $y-p > 0$?• D*où Von peut conclure ^e dans le cas où x est un nombre positif; réquation proposée, _ . L « peut jamais admettre qu*une seule solution en nombres en* iers. ^ ' Il en serait de même , si A était un irombre positif carré.; ^xx faisant $x = a^2$, on aurai: «ne a^2 . Mais si A est un nombre positif hori-carré , alors l'équation , . , , **— ydftt»=l - - . ! • . ». -T. ., • r • 9é i fc^ toujours susceptible d*une infinité de solutions eninombves entiers, (art. 67), qu*nnées ci-dessus, (art. 71, n°. a); mais il sui&fll d# trouvée i^iplus petites valeurs de tet tt,' et pour cela, dès que l'on eiK parvenu j dans la. série, jp?^JP";,,jPf'^ çtc^ à^iin^ terme Kja^jl à Tunité, il n'j^iura qu'à calculer p^ le^ formule^ ae s^içs t^rm^; correspondit i^es 4^U2C séries p^, p^,

The text on this page is estimated to be only 14.40% accurate

$p^{\wedge}$, etc. 4tt iBf*t

The text on this page is estimated to be only 16.97% accurate

A D l> I t l O il s» 4^t i^u, on aura on général et pour la
déturmiaation de T et ⁱ'équatroii qui est semblable i la proposée». Ainsi [^]
on pourra supposer 3r = (», rTs:u\ ee qui donnera Nommant donc t", u'[^] les
secondes valeuTBdè [^] et u[^] oé aura Maintenant il est clair qu*on peut
prendre ces np[^]vitellles yan teurs t"y u" à la place des premières t\ u[^]; ainsi
Toa aura ttù Ton peut supposer de npuyeau [^]e qui donnera '[^] t = lH[^]^Jltîhi\
u te f tt»» 4.nV». i[^]insi on aura de nouvelles valeurs de < et u [^] leiqnettls
Beoroute IH ainsi de suit[^]. / . • _:4

The text on this page is estimated to be only 21.88% accurate

/IS% Addition f. 75. La méthode précédente ne fait trouver que
suce vement les valeurs t'' , t''' etc. u'' , u''' etc. : voyons mai nant comment
on peut généraliser cette recherclie. C d'abord d'où je tire cette combinaison
, donc supposant on aura «V i: $M'' \vee A = (t' \pm u' V^Y$ Qu'on n^ee à présent
ces valeurs de $''$ et u'' à la place celles de $t^{\wedge}$ et $u' ^{\wedge}$ l'on aura 6à faisant de
nouveau et nommant $\pounds''$, $u''Vle8$ valeurs résultantes de t et u viendra on
trouvera de même $\bullet r^{\wedge} \pm u >^{\wedge} V^{\wedge} = B = O^{\wedge} + u'.^{\wedge}/ji)^{\wedge}$, . et ainsi deisuiteé , v :
Donc, si pour, plus de simplicité on nomitie maintenant et 7[^] les pteiiiérés
et plus petites valeurs de t , u] que ne avons nompié[^] ci-des8»s $t^{\wedge\wedge} 1^{**} :^{\wedge}$ on
.aura- en général ,

The text on this page is estimated to be only 21.53% accurate

À D D I T I O R se 455 ♦h étant un nombre quelconque entier positif; d'où Ton tire $\wedge m$ cause de Tambiguité des signes $\wedge_-(\wedge T+r^\wedge J[y'^\wedge i T - ri/J) m . \_ (7''+ r ^\wedge/\wedge)'' - (T - rt/\wedge r$. Quoique cfs expressions paraissent sous une foitné îrraUonnelle , cependant il est aisé de voir qu'elles deviendront rationnelles, en développa{it les puissances de Tdtz $\wedge A \setminus$ car on a $\wedge$ comme Ton sait $\wedge \wedge m(m-i)(m-a) y, \_ 3^\wedge 3^\wedge \wedge \wedge \wedge J$ Donc $\wedge -^\wedge y m 4. m \zeta m - 1) j j r^\wedge \wedge \wedge y^\wedge i a \hat{a} \acute{e} O.4 a.o + 7n(m-^\wedge i)(7n - a)(m - 5)(m - 4) J^\wedge \wedge \wedge i-s^\wedge s +^\wedge gtc; 2.5.4*5$ 6ù l'on pourra prendre pour m des noiiibres quelcori^iues entiers positifs. Il est clair qu'en faisant successivement $m = 1^\wedge 3, 3^\wedge 4 > \wedge \wedge c.$ on aura des valeurs de t et de u , qui iroât en augmentant. Or je vai? prouver que l'on aura de cette manière toiites lés valeurs possibles de t et $1/\wedge$ pourvu que T' et $\wedge$ en soient leâ plus petites. Pour cela il suffit de prouver qu'entre l^s valeurs de i et u qui répondent à un nombre quelconque m , et celles 2i £e

The text on this page is estimated to be only 24.11% accurate

434 ADDITIONS. qui répoiidraient au nombre suivant m -f- i , il est impossiliiti qu'il se trouve des valeurs inteimédiaires qui puissent satisfdre| à l'équation Prenons, par exemple , les valeurs f'' , n'' , qui résultentde la supposition de $m=3$, et les valeurs $V^{\wedge}$, $u^{\wedge}''$, qui résultent de la supposition $mz:z4i \textcircled{\wedge}$ soient, s'il est possible , d'autra valeurs intermédiaires 6 et v , qui satisfassent aussi à l'équatioB Puisque Ton a m III IV IV on aura III III zv ir d'où Ton voit que si $\hat{o} > t''$ et $<^{\wedge}$, on aura aussi $v > u''$ el $^{\wedge} u^{\wedge}$. De plus on aura aussi ces autres valeurs de t et u, savoir qui satisferont à la même équation car en les y substituant, on aurait équation identique , à cause de ihyp/). Or ces deux dernières équations donnent

The text on this page is estimated to be only 17.22% accurate

À D D I t i O N s. 435 Ūoûù mettant dans T expression de $u =$
 $\text{fla}^{>^{\wedge}} \text{--- Vf}^{\prime}$, à la place de $\hat{O}$, $u^{\wedge} \text{ji} - \text{f} - \text{j} \text{---} \text{---}^{\wedge} \text{j} >$ et à la place de i^* et u
 $> \blacktriangleright u^*$; donc on aura une valeur de u , qui sera moindre que la quantLt4
 $^{\wedge} \text{""tt} \gg v \ll - u^{\wedge} \text{H}^{\wedge}$; mais cette quantité est égale à $f^{\wedge}$; car « - TvâS ' d'où
■MM

The text on this page is estimated to be only 27.64% accurate

436 A D D I T I O S $\wedge$. de plus 1 1 puisdtle (AypoiA.); donc et desorte que la valeur de $V^W \text{ --- } u^*t^*$ se réduira à $\wedge \vee A \sim \wedge$ Il s'ensuivrait donc de là qu'on aurait une valeur de U^P , ce qui est contre rh3rpjotlièse , puisque F' est supposé la plus petite valeur possible de u. Donc il ne saurait y avoir de valeurs de f et M intermédiaires entre celles-ci , t^* , $t^{\wedge}$ et u^* , $u^{\wedge}$. Et comme èe raisonnement pevt s'appliquer en général à toutes valeurs de $\wedge$ et u qui résulteraient des formules ci-dessus, en y faisant m égal à un nombre entier quelconque, on en peut conclure que ces formules renferment effectivement toutes les valeurs possibles de t et u. Au reste il est inutile de remarquer que les valeurs de t et de u peuvent être également positives ou négatives ; car cela est visible par l'équation même $t^{\wedge} \text{ --- } Au^{\wedge} = zi$. De la manière de trouver toutes les solutions possibles , en Tfombres entiers, des équations indéterminées du second degré à deux inconnues, r 76. hes méthodes que nous venons d'exposer suffisent pour

The text on this page is estimated to be only 17.67% accurate

À D D I T I O H 9. 437 là réaoliitioi) complète dç\$ écpiations de
 U foïmQ mais il peut arriver qu'on ait à résoudre des équations du se, çond
 degré d'une forme plus composée ; c'est pourquoi nom croyons devoir
 montrer comment il faudra s'y prendre. Soit proposée l'équatioA ' . :: • . ar[^]
⁺ ^{^^^} "f- ^{^^*} + dr 4" ^{^f} +/== ^{^f} où a, i, c, d, «, y, soient des nombres
 /entiers donnés, et où r et 5 soient deux inconnues qui doivent être aussi des
 nombres entiers. J'aurai d'abord , par la résolution ordinaire [^] !iar+bs+d= [/
 ((i[^] +rf)*--.4a (c^{^*}+ e5 4- d));, r d'où l'on voit que la difficulté se réduit à
 faire ensorte quç (65 + d)» — 4a (c5* + e5+dîX foit un carré, » Supposons
 pour plu&'de simplicité bd — aoe ^{^^} gy d--4af-h, [^]t il faudra que [^]5* + 5[^]5
 -f- é soit. un carré ; supposons ce carré ==j'*,. ensorte que Ton ait l'équation
 4s[^] + !igs + h:[^]y\ ft tirant la valeur de [^], on aura [^]f + g = v[^] c[^]j» + g» —
^{^^}) r

The text on this page is estimated to be only 18.96% accurate

438 A D D I T I Q 11 \$, desorte qii'il ne 8*agira plus que de rendre ç^réela formule Donc û on fait encore on aura à rendre rationnel le radical $\sqrt{Vi + By}$. ç*est à quoi on parviendra par les méthodes données. Soit tnsorte que réqiiàtion à résoudre soit Ton aura donc d'ailleurs on a défi aar + ijr -f d = $\pm y$ \ ainsi dès qu'on aura trouvé les valeurs de x t\y ^ on aura celles de r et ^ par les deux équations $\pm: y - r$ rf — r ijr lia Or comme r et ^ doivent être des nombres entiers , il esf visible qu'il faudra i**. que or- et y soient des nombres entier^ aussi ; 2**. que dt. x '^ g soit divisible par A , et qu'ensuite ihy — d — bs le soit par aa. Ainsi , après avoir trouvé toutei les yaleuis possibles de :p et y en nombres entiers , il rçstçrj

The text on this page is estimated to be only 27.29% accurate

ADDITIONS. 4³ encore à trouver parmi ces valeurs, celles qui pourront rendre x^A des nombres entiers. Si A est un nombre négatif ou un nombre positif carré, nous avons vu que le nombre des solutions possibles en nombres entiers est toujours limité; desorte que, dans ces cas, il n'y aura qu'à essayer successivement pour x et A les valeurs trouvées, et si l'on n'en rencontre aucune qui donne pour r et A des nombres entiers, on en conclura que l'équation proposée n'admet point de solution de cette espèce. La difficulté ne tombe donc que sur le cas où A est un nombre positif non carré, dans lequel on a vu que le nombre des solutions possibles en entiers, peut être infini; comme l'on aurait dans ce cas un nombre infini de valeurs à essayer, on ne pourrait jamais bien juger de la résolubilité de l'équation proposée, à moins d'avoir une règle qui réduise le tâtonnement entre certaines limites; c'est ce que nous allons rechercher 77. Puisqu'on a, (art. 65), et, (art. 7a), il est facile de voir que les expressions générales de r et s se ront de cette forme, $ctt + \sqrt{u} + y aH - f H^u + >^* r^j$. s^A , t , $i8$, A , t^* , jS^* , A^* , J''' étant des nombres entiers connus; et t , u étant donnés par les formules de l'art. 75, dans lesquelles l'exposant m peut être un nombre entier positif quelconque; ainsi la question se réduit à trouver quelle valeur on doit donner à m , pour que les valeurs de r et A soient des nombres entiers. 4

The text on this page is estimated to be only 25.85% accurate

Je remarque d'abord qu'il est toujours possible de trouver une valeur de u qui soit divisible par un nombre quelconque A , car supposant l'équation $Q > f$ — au-dessus deviendra laquelle est toujours résoluble en nombres entiers ; et l'on trouvera les plus petites valeurs de a et a' en faisant le même calcul qu'auparavant mais en prenant A à la place de a ; or f comme ces valeurs satisfont aussi à l'équation elles seront nécessairement renfermées dans les formules de Tart. 75. Ainsi il y aura nécessairement une valeur de m qui rendra l'expression de u divisible par A . Qu'on dénote cette valeur de m par fA , et je dis que si dans les expressions générales de t et u de l'article cité, on fait à la valeur de u sera divisible par A , et celle de t étant divisée par A , donnera i pour reste. Car si on désigne par t^* et V les valeurs de t et u , où $m = fA$, et par T et V' celles où $m = 1$, on aura (art. 75), donc c'est-à-dire, en comparant la partie rationnelle du premier membre avec la rationnelle du second, et l'irrationnelle avec

The text on this page is estimated to be only 20.05% accurate

$c \in \mathbb{K} \setminus \mathbb{Q}$ rationnelle, donc puisque V est
 divisible par A , c^n le sera aussi, et 7^n laissera le même reste que laisserait
 T^n mais on a $-(A \nmid c^n)$, donc $7^n - T^n$ doit être divisible par A . et même par A^2 ,
 puisque V Test déjà; donc 7^n et par conséquent aussi 7^{2n} étant
 divisé par A , laissera le reste i . Maintenant je dis que les valeurs de t et u
 qui répondent à un exposant quelconque m , étant divisées par A , laisseront
 les mêmes restes que les valeurs de t et u qui répondraient à l'exposant m
 modulo A . Car désignant ces dernières par $\hat{t}$ et $\hat{u}$ on aura
 $t \equiv \hat{t} \pmod{A}$ mais nous venons de trouver ci-dessus, donc on
 aura $e \equiv \hat{e} \pmod{A}$ ($\ll t \equiv \hat{t} \pmod{A}$) ($T^n \equiv \hat{T}^n \pmod{A}$, d'où Ton tire, en faisant la
 multiplication, et comparant ensuite les parties rationnelles ensemble et les
 irrationnelles ensemble).

The text on this page is estimated to be only 26.01% accurate

if^a ADDITIONS. Or 7^a est divisible par A , et T^a laisse le reste 1 ; donc ϵ laissera le même reste que t , et u le même reste que u . Donc y en général, les restes des valeurs de tête répondante aux exposants m^{-a} , $tm + ^Z^*$ » / » + $S/\dot{u}t$, etc, seront être mêmes que ceux des valeurs qui répondent à Texposant quelconque m . De là on peut donc conclure que si Von veut avoir les restes provenans de la division des termes t^* , t'' , t'^a etc. etu^* , tt'' , m''^* etc. qui répondent à $m = i, 2, 3$, etc. par le nombre A , il suffira de trouver ces restes jusqu'aux termes t'^a et u^a inclusivement ; car, après ces termes, les mêmes restes reviendront dans le même ordre a et ainsi de suite à l'infini. « Quant aux termes t'^a et u^a , auxquels on pourra s'arrêter, ce seront ceux dont l'un u^a sera exactement divisible par a » et dont l'autre t'^a laissera l'unité pour reste ; ainsi il y aura qu'à pousser les divisions u^a à ce qu'on parvienne aux restes 1 et G ; alors on sera assuré que les termes suivans redonneront toujours les mêmes restes que Ton a déjà trouvés. On pourrait aussi trouver l'exposant $2/a$ à priori ; car il n'y aurait qu'à faire le calcul indiqué dans l'art. 71, n^* a, premièrement pour le nombre A y et ensuite pour le nombre $A A^a$ et si on nomme a le numéro du terme de la série P' , P'' , P'^* etc. qui, dans le premier cas, sera $= J$, et f le numéro du terme qui sera $= 1$ dans le second cas, on aura qu'à chercher le plus petit multiple de a et de f , lequel étant divisé par $3r$, donnera la valeur cherchée de $//$, Ainsi si l'on a, par exemple, pn trouvera dans la table de Part, a pour le radical $|S^a - po = 1$, $J > i = .3$, $P'l = X\hat{i}$

The text on this page is estimated to be only 27.52% accurate

5Q ADDITIONS. 443 2 (ensuite on trouvera dans la même table
 > pour le radical $V(6.9)=1/54$, r (donc $p^{\wedge}=6$; or le plus petit multiple de a
 et 6 est 6 , qui jf étant divisé par 22 ^ donne 3 pour (juotient ^ desorte qu'on
 ri^nra ici s Donc , pour avoir dans ce cas tous les restes de la division des
 termes t\ f', ^"* etc. et 1^, u", u*" etc. par 5, ilsuf-^ ^ fira de chercher ceux
 des six premiers termes de Fune et de ; l'autre série ; car les termes suivans
 redonneront toujours les r mêmes restes , c'est-à-dire que* les septièmes
 termes donne-t ^ Tont les mêmes restes qpe les premiers ; les huitièmes le\$
 ^ inêmes restes que les aeconds ^ et ainsi de suite à TinEni. Au reste il peut
 arriver quelquefois que les termes t et u^ fdcnt les mêmes propriétés que les
 termes t^^, c'est-à-diro que u^soit divisible par A , et que t^ laisse l'unité
 pour reste. Dans ces cas on pourra s'arrêter à ces mêmes termes; car les ""
 restes des termes suivans if* ^ ^ if* ^ etc. u , vf* etc. — feront les mêmes
 que ceux des termes t* , t^*, etc. u* , u" , etc, •^ ^t ainsi des autres. En
 général nous désignerons par M la plus petite valeur dçt l'exposant m ^ qui
 rendra ^-- 1 et u divisibles par A. 79. Supposons maintenant que Ton ait une
 expression queir ^ conque composée de t et de u et de nombres entier»
 donnés ^ 4^ ^^ière qu'elle représente toujours des nombres entiers,

The text on this page is estimated to be only 27.50% accurate

444 i^D . p I T I a If s et qu'il s'agisse de trouver les valeurs qu'il faudrait donner l'exposant m , pour que cette expression devînt divisible un nombre quelconque donné A ; il n'y aura qu'à faire successivement $m = 1, 2, 3$, etc.. jusqu'à M et si aucune de ces suppositions ne rend l'expression proposée divisible par A on en conclura hardiment qu'elle ne peut jamais le devenir quelques valeurs qu'on donne m . Mais si Ton trouve de cette manière une ou plusieurs valeurs de m qui rendent la proposée divisible par A , alors nommant chacune de ces valeurs, toutes les valeurs possibles de m pourront faire le même effet > seront $N + M, N + 2M, N + 3M$ etc. et en général $N + hM$, A étant un nombre tier quelconque. Pe. m^A , si l'on avait une autre expression, composée de t, u et de nombres entiers donnés, laquelle être en même temps divisible, par un autre nombre quelconque donné A , on chercherait pareillement les valeurs convenables de t et de u ; que nous désignerons ici par M' et J' et toutes les valeurs de l'exposant m qui pourront satisfaire à la condition proposée, seront renfermées dans la formule $N' + h\{M'\}$, h étant un nombre quelconque entier. Ainsi on aura qu'à chercher les valeurs qu'on doit donner aux nombres entiers h et A' , pour que Ton ait $N + kM' \equiv N'^k M'^k$ savoir équation résoluble par la méthode de l'article 42* Il est maintenant aisé de faire l'application de ce que nous venons de dire au cas de l'art. 77, où les expressions proposées sont de la forme $M^{-u} + y y^a H + f'u + >^*$, et les diviseurs sont cT et J^* . Il faudra seulement se souvenir de prendre les nombres

The text on this page is estimated to be only 29.15% accurate

A t) û i f ! 6 « «. 44â : u successivement en plus et en moins , pour avoir tous les m possibles. * REMARQUE. ' 80. Si l'équation proposée à résoudre en nombres entiers •«ait de la forme $ur^* + Qbrs + cs^{\wedge} = /$, Si y pourrait appliquer immédiatement la méthode de l'art. 63} Itr 1°. il est visible que r et 5 ne pourraient avoir un commun diviseur, à moins que le nombre y ne fût en même temps divisible par le carré de ce diviseur; desorte qu'on pourra ^ujours réduire la question au cas où r et 5 seront premiers entre eux. a°. On voit aussi que s et fne pourraient avoir un commun diviseur ^ à moins que c6 diviseur n'en fût un aussi «1 nombre a , en supposant r premier à s ; ainsi on pourra édoire encore la question au cas où s et f seront premiers entre eux. (Voyez» l'art. 64-) Or^ étant supposé premier à y, et à r , on pourra faire $r' = zns'^{-} - fz^{\wedge}$ X il faudra , pour que l'équation soit résoluble en nombres entiers , qu'il y ait une valeur de n positive ou négative pas plus grande que^ , laquelle rende la quantité $an^{\wedge} - f'^{\wedge\wedge} + c$ divisible par y. Cette valeur étant mise à la place de n, toute l'équation deviendra divisible par^ , et se trouvera réduite au cas le celle de l'art. 65 et suiv. Il est facile de voir que la même méthode peut servir à réduire toute équation de la forme $ar^{\wedge} - f - hr^{\wedge}s - f - cf'^{\wedge} V - j - etc. + ks^{\wedge} = f^{\wedge}$ ^, b, c etc. étant des fiouxbrei entiers donnés ; et r et ^ deu^

The text on this page is estimated to be only 25.55% accurate

44^ A £> D I T I O N â. indéterminées qui doivent être aussi des nombres entiers une autre équation semblable , mais dans laquelle le terme connu soit l'unité , et alors on y pourra appliquer la méthode générale du 5 H. (Voy. la remarque de Tart. 3o.) EXEMPLE I. 81. Soit proposé de rendre rationnelle cette quantité $\sqrt{3x + 62x - 75}$, en ne prenant pour x que des nombres entiers ; on aura à résoudre cette équation laquelle étant multipliée par 7, peut se mettre sous forme $7^2 \cdot 3x + (30x - 7^2) = 7y$, ou bien en faisant $7^2 - 3x = z$, et transposant a; $z = 1171 - 7^2$, ou $z - 7^2 = 1171$. Cette équation est donc maintenant dans le cas de Tart. 65, de sorte qu'on aura $z = 7^2 - 1171$ d'où Ton voit d'abord que y et B doivent être premiers entre eux, puisque ce dernier nombre ne renferme aucun carré. On fera; suivant la méthode de Tart. 65, $xz = ny - 1171$.

The text on this page is estimated to be only 23.97% accurate

AUDITIONS. $\wedge j \set t$ il faudra y pour que l'équation soit résoluble y que Ton puisse rouver pour n un nombre entier positif ou négatif non $> \text{---}$, c'est-à-dire non $> \bullet 58o$, tel que $n^* \text{---} \text{---} ii7i$, $D^\wedge = 88$, $n = \pm :32i$; donc ' retenant pour plus de simplicité $1^\wedge$ lettre $J^\wedge$ à la place de $\&y$ et mettant $y^\wedge$ à la place de z, je ferai le calcul niyant, où je supposerai d*abord $n = 3\hat{a}i$: $m = ^\wedge = 4, n' = 321 \text{---} 4.88 = \text{---} 3i$, $m \gg = s'^{\wedge\wedge} = \text{---} 3, n \gg' = -3i + 3.ii = a$, $11 m^{**} = - = 2, 7l^{**} = :2 \text{---} 2.1 = 0$, $1 \text{ £}) \gg' = ilLZ = 1$, $y = \text{---} 3y^* + y''$. $11 Z)'^\wedge = Z = :7, y \ll = ay/i + y$; «,

The text on this page is estimated to be only 20.39% accurate

44^ À b to I T I b N é; Puisque $n^* \gg 1$ et par conséquent $\epsilon \ll 1$ et $\delta \ll 1$ on s'arrêtera ici et on fera et à cause que $D'' \gg D'$ Maintenant je remarque que A étant ≈ 7 , et par conséquent négatif il faut, pour la résolubilité de l'équation, que l'on ait $Mz=i$; c'est ce que Ton vient de trouver; desorte qu'on en peut conclure d'abord que la résolution est possible. On supposera donc et l'on aura, par les formules ci-dessus, $y = \pm i, y = \pm 3$ $= a, j^{\text{rtqpihiqpiii}}$ les signes ambigus étant à volonté. Donc $X = 3aiy - 1171a = Hh^{\$}$ et conséquemment $\sqrt{a^2 + 3i^2}$, Or comme on exige que la valeur de s soit égale à un nombre entier, on ne pourra prendre que $\sqrt{a^2 + 3i^2} = 7$. Il est remarquable que l'autre valeur de s , savoir -2 , quoique fractionnaire, donne néanmoins un nombre entier pour la valeur du radical $\sqrt{(\sqrt{a^2 + 3i^2} - 7)^2}$ @ 1 @ même nombre 1 1 que donne la valeur $\sqrt{a^2 + 3i^2} = 7$; desorte que ces deux racines de l'équation $5o + S^2S - 7^* = lai$;

ADDITIONS. 449 Nous avons supposé ci-dessus $n=33i$; or on peut faire également $n=z$ — Sai ; mais il est facile de voir d'avance que $\wedge$ out le changement qui en résultera dans les formules précédentes, c'est que les valeurs de m , m^* , zn'' , et de n^* , ti'' , chan5eront de signe , moyennant quoi les valeurs de $y^\wedge$ et y deviendront aussi de différons signes, ce qui ne donnera aucun Qouveau résultat, puisque ces valeurs ont déjà d'elles-mêmes le signe ambigu ih. Il en sera de même dans tous les autres cas; desorte qu'on pourra toujours se dispenser de prendre successivement la valeur de n en plus et en moins. La valeur $\wedge == 7$ que nous venons de trouver , résulte de la valeur de $/i = d$: Sai ; on pourrait trouver d'autres valeurs de $\wedge$, si on trouvait d'autres valeurs de n qui eussent la condition requise; mais comme le diviseur $B = iiji$ est un nombre premier , il ne saurait y avoir d'autres valeurs de n de la même qualité y comme nous l'avons démontré ailleurs, (3feTfioires de Berlin y pour tannée 1767, page 194) , d*où il faut conclure que le nombre 7 est le seul qui puisse satisfaire à la question. J'avoue au reste qu'on peut résoudre le problème précédent avec plus de facilité par le simple tâtonnement ; car dès qu'on est parvenu à l'équation $x^\wedge = 1171 - 7^\wedge\%$ il n'y a qu'à essayer pour y tous les nombres dont les carrés-multipliés par 7 ne surpassent pas 1171, c'est-à-dire tous les nombres $< \sqrt{\wedge} < i3$. Il en est de même de toutes les équations où A est un nom-* bre négatif; car dès qu'on est arrivé à l'équation $x^\wedge = B + Ay \setminus \textcircled{u}$ (en faisant $\wedge = - a$), a. Ff

The text on this page is estimated to be only 22.65% accurate

45o ADDITIONS. il est clair que les valeurs satisfaisantes de y , s'il y en a > ne pourront se trouver que parmi les nombres $\bullet < | / \text{ — } .$ AUSA n'ai-je donné des méthodes particulières pour le cas de A négatif $^$ que parceque ces méthodes ont une liaison intime avec celles qui concernent le cas de j positif, et que toutes ces méthodes étant ainsi rapprochées les unes des autres, peuvent se prêter un jour mutuel et acquérir un plus grand degré d'évidence. EXEMPLE II. 8f3. Donnons maintenant quelques exemples pour le cas de $^$ positif, et soit proposé de trouver tous les nombres entiers qu'on pourra prendre pour $j^$, en sorte que la quantité radicale $V/(i3y^* - f - 101)$ devienne rationnelle. On aura ici, (art. 64) $> ^ = i3$, $B = 101$, et l'équation à résoudre en entiers sera $00^ \text{ — } i3y^* = 101$, dans laquelle, à cause que ici n'est divisible par aucun carré, y sera nécessairement premier à ici. On fera donc, (art. 65), $X = ny \text{ — } 1012$, et il faudra que $i^* \text{ — } i3$ soit divisible par loi, en prenant I Je trouve $\ll = 35$, ce qui donne $71^* = 1225$, $Ti'' \text{ — } i5 z = z$ $1212 = 101 X$ la; ainsi on pourra prendre $/\gg. = \pm: 35$, et substituant, au lieu

The text on this page is estimated to be only 20.49% accurate

ADDITIONS. 451 de 3Cy $\pm 35y$ — loia, on aura une équation toute divisible par 101, cpi, la division faite, sera lûy* ip joyz -f- 1012*= 1. Employons encore, pour résoudre cette équation, la méthode de Tart. 70 *, faisons $D^* = i2$, $D=i:ioi> 7i = \pm 35$, mais au lieu de la lettre fl nous conserverons la lettre j^, et nous changerons seulement z en j'^, comme dans l'exemple précédent. Soit, 1®. 71 = 35, on fera le calcul suivant : $m=?$ $^=3, /i'=35-3.i2=-i$, $D'=\}$ — $^=-i, y^y+y\ m'=ii=3$, $z.'^ = ^ 1 + 1 =0$, $D'^ = ^ = i3, y=/ +y\$ Comme 71" = o, et conséquemment

The text on this page is estimated to be only 17.89% accurate

^Sfl additions; nombres qui répondent à y/ 1 3, il se trouve le nombre idani une place paire; car il faut, pour que l'équation précédente soit résoluble, que dans la série jP°, P*, P", etc. il se trouve un terme = — i ; mais on a P° = i, — P» = 4, P"==3etc. donc etc. or dans la série i , 4> ^>^i 4> ^ ^c* ^^ trouve justement 1 à la sixième place , ensuite que P^=— i; donc on aura une solution de l'équation proposée^ en prenant les nombres p^, q^ étant calculés d'après les formules de Tar' ticle a5 , en donnant k (à, ^jt} ^ /u" etc. les valeurs 5 ^ i ^ i> ^ 1 , 6 etc. qui forment la série inférieure de^ nombres vépos* dans à ^/iS dans la même table. On aura donc p«=1 9*> =0 p* =5 9' = i p'''=p» +p» = 7 9»" =9» +9» ~a p^ =p»r+p»" = i8, ^v _^, Y ^^m_5; Donc y" = i8, y = 5; «onc Nous avons supposé ci-dessus /» = 35 , mais on peut wm prendre » ;;a — 35. ^

The text on this page is estimated to be only 25.26% accurate

ADDITIONS. 4³ Soit donc a*. Ji = — 35 ^ on fera ainsi on aura les mêmes valeurs de D" , D*" et n" qu'auparavant , dcsorte que la transformée en j''' et j^"* sera aussi la piême. On aura donc aussi y" = 18, y = 5; donc Nous avons donc trouvé deux valeurs de y avec les valeurs correspondantes de y* ou z\ et ces valeurs résultent de la supposition de 71= i 35; or comme on ne peut trouver aucune autre valeur de n qui ait les conditions requises^ il s'ensuit que les valeurs précédentes seront^ les seules valeurs primitives que Ton puisse avoir; mais on pourra ensuite en trouver une infinité de dérivées par la méthode de Tart. 7a. Prenant donc ces valeurs de j^ et z pour p et ç , on aura en général , (art. cité) , y:=ij4t — (loi.aS — 35.74)w=— 34^ + 267^ « = 23^ + (12.74 — 35. a3)u= sSt+ i'5u ou j^ = — 34« — (ioi.i3 — 35.34)m=: — 34^— 123a z= i3t+ (— 12.34+25.13) M r= \Zt+ 47U et il n'y aura plus qu'à tirer les valeurs de t et m de Téqua3

The text on this page is estimated to be only 24.75% accurate

454 ADDITIONS tion $\sqrt{a^2 - b^2} = i$; or ces valeurs se trouvent déjà toutes calculées dans la table qui est à la fin du chapitre VII du traité précédent ; on aura donc sur-le-champ $t = 64s$ y $u = iSo$; desorte que prenant ces valeurs pour T et $\sqrt{a^2 - b^2}$ dans les formules de l'art. 76 , on aura en général $t = \frac{(649 + 180 \sqrt{15})^{1/2} + (649 - 180 \sqrt{15})^{1/2}}{2} a \frac{(649 + 180 \sqrt{15})^{1/2} - (649 - 180 \sqrt{15})^{1/2}}{2}$ où Ton pourra donner à m telle valeur qu'on voudra , pourvu qu'on ne prenne que des nombres entiers positifs. Or comme les valeurs de i et u peuvent être prises tant ea plus qu'en moins , les valeurs de y qui peuvent satisfaire à la question[^] seront toutes renfermées dans ces deux formules $y = dz'j4^* \pm 267U$, $=: \pm 54t \pm .iz3u$, les signes ambigus étant à volonté. Si on fait $m = o$, on aura $t rz = 1$, $zz = o$; donc $y = \pm 74f$ ovi $= \pm 54$; et cette dernière valeur sera la plus petite qui puisse résoudre le problème. Nous avons déjà résolu ce même problème dans les Mémoi" res de Berlin pour l'année 17S8 , page 2^{^5} ' > mais comme

ADDITIONS. 455 nous y avons fait usage d'une méthode un peu différente de la précédente , et qui revient au même pour le fond que la première méthode de Tart. G6 ci-dessus , nous avons cru devoir le redonner ici, pour que la comparaison des résultats qui sont les mêmes par Tune et l'autre méthode, puisse leur servir de confirmation , s'il en est besoin.

EXEMPLE III. 83. Soit proposé encore de trouver des nombres entiers qui, étant pris pour y , rendent rationnelle la quantité $\frac{a^2 - 79y}{y}$ dans laquelle y sera premier à a , puisque ce nombre ne renferme aucun facteur carré. Qu'on suppose donc $a = 71^2 - 10z$, et il faudra que $a^2 - 79y$ soit divisible par y , en prenant $n^2 - 79y < 5y$; on trouve $y = 33$, ce qui donne $n^2 - 79y = 1010 = 101 \times 10$; ainsi on pourra prendre $n = \pm 33$, et ces valeurs seront les seules qui aient la condition requise. Substituant donc ± 33 à la place de a , et 10 à la place de z ,

The text on this page is estimated to be only 24.38% accurate

45S ADDITIONS. sint toute réquation par loi , on aura cette transformée $10^* q: S6yz + loiz^* = i$. On fera donc et prenant d'abord n en plus , on opérera comme dans Texemple précédent ; on aura ainsi $m^{\wedge}=3$, $n'=33-3$. $xo=3$, $D''=9=\wedge=-7$, $\wedge^{\wedge}=3/+ /$ Or comme $n^* = 3$ est déjà $< —$ et $<$, il ne sera pal nécessaire d'aller plus loin , ainsi on aura la transformée laquelle étant multipliée par $— 7$, pourra se mettre sou5 cette forme , $(7y + 3y)'-79y-7$ Puisque donc 7 est si cette équation est résoluble, il faudra que le nombre 7 se trouve parmi les termes de la série supérieure des nombres qui répondent à $I/79$ dans la table de l'art. $4^{\wedge} * ^t$ même que ce nombre 7 y occupe une place paire , puisqu'il a le signe $—$. Mais la série dont il s'agit ne renferme que les nombres 1 , 15 , 2 , qui reviennent toujours ; donc on doit c)nclure sur-le-champ que la dernière équation n'efct pas résoluble, et qu'ainsi la proposée ne Test pas, au moins d'après la valeur de $/i = 33$. 11 ne reste donc qu'à essayer l'autre valeur $t\hat{=} — 33$, laquelle donnera

ADDITIONS. 457 desorte qu'on aura cette autre transformée $7y' + 6y'y'' + 10y = 1$ laquelle se réduit à la forme $(7y-3y_0^*-79y=-7$; qui est semblable à la précédente. D'où je conclus que l'équation proposée n'admet absolument aucune solution en nombres entiers. REMARQUE. 84. M. Euler, dans un excellent Mémoire imprimé dans le tome IX des nouveaux Commentaires de Pétersbourg, trouve par induction cette règle, pour juger de la résolubilité de toute équation de la forme lorsque B est un nombre premier; c'est que l'équation doit être possible toutes les fois que B sera de la forme $A^n + r^*$, ou $A^n + r^* - A$ mais l'exemple précédent met cette règle en défaut; car 101 est un nombre premier de la forme $A^n + r^* - A$ y en faisant $A = 79$, $n = 4$, $r=38$; cependant l'équation $cc^{79j} = 101$ n'admet aucune solution en nombres entiers. Si la règle précédente était vraie, il s'ensuivrait que si l'équation $Ay^* = B$

The text on this page is estimated to be only 25.06% accurate

458 ADDITIONS. est possible lorsque B a une valeur quelconque b y elle léserait aussi en prenant pourvu que a fût un nombre premier. On pourrait limiter cette dernière règle y en exigeant que b fût aussi un nombre premier ; mais avec cette limitation même elle se trouverait démentie par l'exemple précédent ; car on a en prenant $101 = 4An + b$, $a = 79$, $n = -2$, $ft = 733$; or 733 est un nombre premier de la forme $x^2 - 79y^2$, en faisant $x = 38$, $y = 3$; cependant 101 n'est pas de la même forme $x^2 - 79y^2$.

ADDITIONS. 459 PARAGRAPHE VL Hemarques sur les équations de la forme et sur la manière ordinaire de les résoudre en nombres entiers. 85. X-JA méthode du chap. VII du traité précédent, pour résoudre les équations de cette espèce , est la même que celle que M. TVallis donne dans son Algèbre, (chap. XCVIII) , et qu'il attribue à Milord Brounker ; on la trouve aussi dans l'Algèbre de M. Ozanam , qui en fait honneur à M. de Fermât. Quoi qu'il en soit de l'inventeur de cette méthode , il est au moins certain que M. de Fermât est l'auteur du problème qui en fait l'objet* il l'avait proposé comme un défi à tous les géomètres anglais, ainsi qu'on le voit par le commercium cpistolicum de M. TVallis : c'est ce qui donna occasion à milord Brounker d'inventer la méthode dont nous parlons ; mais il ne paraît pas que cet auteur ait connu toute l'importance du problème qu'il avait résolu ; on ne trouve même rien sur ce sujet dans les écrits qui nous sont restés de M. Fermât , ni dans aucun des ouvrages du siècle passé, où l'on traite de l'analyse indéterminée. 11 est bien naturel de croire que M. FeiTnat , qui s'était principalement occupé de la théorie des nombres entiers, sur ie

The text on this page is estimated to be only 26.48% accurate

4S3 A $\hat{p} > D I T 1 O l i s . ^{\wedge} j f$ étant un terme quelconque de la série infinie $/x^*$, $/x''$, etc. dont le quantième p ne peut se déterminer qu'a posteriori. Il faut remarquer que dans cette fraction continue les nombres $/u$, $i d \}^{\wedge} (j l^{\wedge}$ etc., doivent être tous positifs, quoique nous ayons vu dans Tart. 3, qu'on peut en général, dans les fractions continues, rendre les dénominateurs positifs ou négatifs, suivant que l'on prend les valeurs approchées plus petites ou plus grandes que les véritables; mais la méthode dupro' blême I (art. aS et suiv.) $^{\wedge}$ exige absolument que les valeurs approchées $/u$, $f j i . \backslash [j l^{\wedge}$ etc., soient toutes prises en défaut $\ll r^{\wedge} 87$. Maintenant, puisque la fraction - est égale à une fraction continue dont les termes sont $^{\wedge}$, $^{\wedge} \% ^{\wedge} ''$ etc. jaP, il est clair, par Tart. 4 $>$ que $/u$ sera le quotient de p divisé par c , que $/x^*$ sera celui de q divisé par le reste, $/ > t''$ celui de ce reste divisé par le second reste, et ainsi de suite; déserte que nommant r , s , y , t , f etc. les restes dont il s'agit, on aura, par la nature de la division, $p = z = t / (7 - f - r, < 7 = ^{\wedge} V + ^{\wedge} > r = / ^{\wedge} '' j - f - * > 6 t c .$ où le dernier reste sera nécessairement $= 0$, et l'avant-dernier $= 1$, à cause que p et q sont des nombres premiers entr'eux. Ainsi $^{\wedge}$ sera la valeur entière approchée de $-$, $i u' V C I r$ celle de $-$, u^{**} celle de $-$ etc., ces valeurs étant toutes r s prises moindres que les véritables, à l'exception de la dernière $f j i P j$ qui sera exactement égale à la fraction correspondante j à cause que le reste suivant est supposé nul. Or, comme les nombres $/u$, $f X'^{\wedge} / > t''$, etc., $/x^{\wedge}$, sont les mêmes pour la fraction continue qui exprime la valeur de $f -$, et pour celle qui exprime la valeur de $^{\wedge} A ^{\wedge}$ on peut V

The text on this page is estimated to be only 25.52% accurate

ADDITIONS. 4³ prendre, jusqu'au terme $\wedge\wedge$, c'est-à-dire, $p^* - \wedge^9 = 0$. Ainsi on cherchera d'abord la valeur approchée en défaut de $\wedge$, c'est-à-dire de $j/\wedge$, et ce sera la valeur de $\wedge$; ensuite on substituera dans à la place de p sa valeur $[xq + r$, ce qui donnera $(\wedge^* - \wedge) q - h 2iAqr + r^* = 0$, et on cherchera de nouveau la valeur approche en défaut de $-\wedge j$ c'est-à-dire de la racine positive de Téquation et l'on aura la valeur de $/x'$ On continuera à substituer dans la transformée il $\wedge\wedge - A) q^{\wedge} + otiqr - f - r^* = 0$, À la place de $(]f, /x \gg r + .y$; on aura une équation dont la racine f ■era -; on prendra la valeur approchée en défaut de cette ■racine, et l'on aura la valeur de $/>t''$. On substituera $ft''r + J$ à la place de r , etc. Supposons maintenant que t soit, par exemple, le dernier ireste qui doit être nul, s sera l'avant-dernier qui doit = i ; donc si la transformée en $*$ et $*$ de la formule $p^* - Aq^{\wedge}$ est

jfi^ additions; $p^{\wedge} + Qst + Rt^{\wedge}f^{\wedge}$ faudra qu'en y faisant $t = 0$, $S=:l$ elle devienne $= i$, pour que l'équation proposée ait lieu ; donc P devra être $= i$. Ainsi il n'y aura qu'à continuer les opérations et les transformations ci-dessus, jusqu'à ce que Ton parvienne à une transformée où le coefficient du premier terme soit égal à l'unité ; alors on fera dans cette formule la première des deux indéterminées, comme r , égale à i , et la seconde, comme s , égale à zéro; et en remontant, on aura les valeurs convenables de p et $^{\wedge}$. On pourrait aussi opérer sur l'équation même $P^* - A9^*=:i$, en ayant seulement soin de faire abstraction du terme tout connu 1 , et par conséquent aussi des autres termes tout connus qui peuvent résulter de celui-ci, dans la détermination des valeurs approchées $1^{\wedge}, 1^{\wedge\wedge}, ^{\wedge\prime\prime}$ etc. de $^{\wedge}$, -, - etc. dans ce cas on essaiera à chaque nouvelle transformation, si l'équation transformée peut subsister en y faisant l'une des deux indéterminées $= i$ et l'autre $= 0$; quand on sera parvenu à une pareille transformée, l'opération sera achevée, et il n'y aura plus qu'à revenir sur ses pas pour avoir les valeurs cherchées de p et de q . Nous voilà donc conduits à la méthode du chap. VU. $^{\wedge}$ examiner cette méthode en elle-même et indépendamment des principes d'où nous venons de la déduire, il doit paraître assez indifférent de prendre les valeurs approchées de $/u$, $/u^*$, $fjt^{\wedge\wedge}$ etc. plus petites ou plus grandes que les véritables, d'autant que, de quelque manière qu'on prenne ces valeurs, celles de r , h

The text on this page is estimated to be only 23.92% accurate

The text on this page is estimated to be only 18.32% accurate

466 ADDITIONS. OU bien -, en rejetant le terme constant — s ,
 $v + rV^1 = H'$ d'où $2^a + 6^3 r$ a prenons de nouveau la limite es moins , et
faisons $q = 2r + s$, la dernière équation deviendra où Ton voit d'abord qu'on
peut supposer $f = 0$, $r = 1$; ainsi on aura $qzzzQ$, $p = 5$. Maintenant reprenons
la première transformée — $2^* + 4^r + y \gg = 1$, où nous avons vu que $2 > 2$ et

The text on this page is estimated to be only 10.70% accurate

ADDITIONS. 467 donc négligeant le terme constant 5 , r= g , -
=____>i^i

468 ADDITIONS. Continuant de cette manière à prendre toujours les linifei en plus, on ne trouvera jamais de transformée où le coefficient du premier terme soit égal à l'unité, comme il le faut, pour qu'on puisse trouver une solution de la proposée. La même chose arrivera nécessairement toutes les fois qu'on prendra la première limite en moins, et les suivantes toutes en plus; je pourrais en donner la raison à priori; mais comme le lecteur peut la trouver aisément par les principes de notre théorie, je ne m'y arrêterai pas. Quant à présent il me suffit d'avoir montré la nécessité de traiter ces sortes de problèmes d'une manière plus rigoureuse et plus profonde qu'on ne Vit' vait encore fait.

ADDITION». 4⁹ PARAGRAPHE IX. De la manière de trouver des fonctions algébriques de tous les degrés ^ qui étant multipliées ensemble produisent toujours^ des fonctions semblables. ^Addition pour les chapitres XI et XII. S8. J s. crois avoir eu en même temps que M. Euler Tidé» de faire servir les facteurs irrationnels et même imaginaires des formules du second degré ^ à trouver les conditions qui rendent ces formules égales à des carrés ou à des puissances quelconques ; j'ai lu sur ce sujet à l'Académie ^ en 1765 un Mémoire qui n'a pas été imprimé, mais dont j'ai donné un précis à la fin de mes recherches sur les problèmes indéterminés , qui se trouvent dans le volume pour l'année- 1767, lequel a paru en 1768 avant même la traduction; allemande de TAI* gèbre de M. Euler. J'ai fait voir dans l'endroit que je viens de citer , comment on peut étendre la même méthode à des formules de degrés plus élevés que le second; et j'ai par ce moyen donné la^ solution de quelques équations dont il aurait peut-être été fort difficile de venir à bout par d'autres voies. Je vais maintenant généraliser encore davantage cette méthode , qui me paraît mériter particulièrement] l'attention des géomètres par sa nouveauté et par sa singularité.

The text on this page is estimated to be only 20.55% accurate

470 ADDITIONS. 89. Soient e et f les deux racines de l'équation du second degré $A^2 - aj + A = 0$, et considérons le produit de ces deux facteurs, qui sera nécessairement réel ; ce produit sera $oc^2 + (it + fi)xy + ctfiy$ or on a par la nature de l'équation $5^2 - 05 - i = 0$; donc on aura cette formule du second degré $07^2 + axy + fy^2$ laquelle est composée des deux facteurs $x + ty$, $x + fy$, Maintenant il est visible que si Ton a une formule semblable 1 1 et qu'on veuille les multiplier l'une par l'autre, il suffira de multiplier ensemble les deux facteurs $x + ty$, $x^2 + cty$ et les deux $x + fy$, $x^2 + fiy$ ensuite les deux produits l'un par l'autre. Or le produit de $x - jety$ par $x^2 - fy^2$ est $xx^2 - r \ll (xy^2 + yx^2) + et^2y^2$; mais puisque e est une des racines de l'équation $5^2 - 0i - i = 0$, on aura $et^2 - a \ll -fi = 0$; donc $A^2 = art - J$;

The text on this page is estimated to be only 20.46% accurate

ADDITIONS. 471 donc substituant cette valeur de $c\&^{\wedge}$ dans la formule précédente[^] elle deviendra desorte qu'en faisant [^] pour plus de similitude $X = xx^{\wedge} - byy^{\wedge}$, $Y = xy^{\wedge} - y a^* -f- ajy^*$, le produit des deux facteurs $a: -\{- \ll ty, x^* + ety^{\wedge}$, sera $X+^{\wedge}K^{\wedge}$ et parconséquent de la même forme que chacun d'eux. On trouvera de même que le produit des deux autres facteurs, $X -j- 0y, x^{\wedge} -\{- iSy^*$, sera $X + iSK-$, desorte que le produit total sera $(X+ aY) \{X+fiY)$, savoir $X^* + aXY + bY\$ C'est le produit des deux formules semblables, $1 1 jc^* + axy + by^{\wedge}, x^{\wedge} -f- ax^{\wedge}y^{\wedge} + by$. Si on voulait avoir le produit de ces trois forftrales semblables $a:* + axy + by^{\wedge}$, $I 11 i 3C^* -f- axy + o^{\wedge}*$, $II iiiii II x^{\wedge} + ax y -f- by^*$, il n'y aurait qu'à trouver celui de la formule $X^* + oXY-^{\wedge}- bY^*$ par la dernière $i^{\wedge} + iz jj jr + iy^*$, et il est visible par les formules ci-dessus[^] qu'en faisant $y\gg = Xy\gg + Kx'' + \hat{u}Fy''$, le produit cherché serait $1 1 X^* -f aXY + bY\$

The text on this page is estimated to be only 20.92% accurate

^73 ADDITIONS. On pourra trouver de même le produit de quatre ou d'un plus grand nombre de formules semblables à celle-ci, $x^2 + axy + by^2$, et ces produits seront toujours aussi de la même forme* go. Si on fait on aura et par conséquent $\{x^2 + axy + by^2 = X^2 + aXY + bY^2$ Donc, si Ton veut trouver des valeurs rationnelles de X et Y, telles que la formule $X^2 + aXY + bY^2$ devienne un carré, il n'y aura qu'à donner à X et à Y les valeurs précédentes, et Ton aura pour la racine du carré la formule « $\sqrt{x^2 + axy + by^2}$ ». Ainsi, si l'on proposait de trouver des valeurs rationnelles de X' et P, telles que la formule $X'^2 + aX'Y + bY^2$ devînt un cube, il n'y aurait qu'à donner à X et Y les Valeurs précé

ADDITIONS. 4^e Rentes } moyennant quoi on aurait un cube
 dont la racine serait $JX^{\frac{1}{2}} - f aocy + iy^{*} > X$ et $j^{\frac{1}{2}}$ étant deux indéterminées.
 On pourrait résoudre d'une manière semblable les questions où il s'agirait de
 produire des puissances quatrièmes y cinquièmes etc. ; mais on peut aussi
 trouver immédiatement des formules générales pour une puissance
 quelconque m, sans passer par les puissances inférieures. Soit donc proposé
 de trouver des valeurs rationnelles de JC et F, telles que la formule $X^{*} +$
 $aXY - bY^{\frac{1}{2}}$ devienne une puissance $m^{\frac{1}{2}}$ c'est-à-dire qu'il s'agisse de
 résoudre l'équation Comme la quantité $X^{*} + aXY - bY^{\frac{1}{2}}$ est formée du
 produit des deux facteurs $X + aY$ et $X + jSK$, il faudra , pour qu# cette
 quantité devienne une puissance du degré m, que chacun de ses deux
 facteurs devienne aussi une semblable puissance. Faisons donc d'abord
 $X + AY = \{x + dLyY^{\frac{1}{2}}\}$ et développant cette puissance par le théorème de
 Newton, on aura $+ \dots - 0(\dots - O x) - y^{*} +$ etc. Or y puisque a est une des
 racines de l'équation on aura aussi $\langle t^{*} - a^{*} + fc = 0 ; -$ donc $\langle^{*} = a\langle -^{*} \pounds$
 $\wedge^{*} = a\langle^{*} - i^{*} = (a^{*} - 6)\langle - o\hat{o}$.

The text on this page is estimated to be only 17.28% accurate

474 ADDITIONS. et ainsi de suite. Ainsi il n'y aura qu'à substituer ces yal dans la formule précédente, et elle se trouvera par-là a posée de deux parties , Tune toute rationnelle qu'on cou rera à X , et Tautre toute multipliée par la racine a. , ^ comparera k etV, Si on fait pour plus de simplicité $A' = zi$ $B' = o$ $A'^{\wedge} = a$ $B'' = b$ $A''' = o/^{\wedge} — bA^{\wedge} J5 \gg " = ai5" — hB^{\wedge} A'''' = aA''' — 6^{\wedge} B'''' = aB^{\wedge} — bB'^{*} A^{\wedge} = aA'^{\wedge} — bA'' \setminus B'' = aB'^{\wedge} — bB'' \setminus$ etc. etc. etc. en aura $rt^{*} = u^{\wedge} A — B''^{\wedge} rt^{\wedge} = ^{\wedge} \gg^{\wedge} A — B'' \setminus$ etc. Donc substituant ces valeurs , et comparant , on aura $^{\wedge} \setminus ia: " \gg -y5 \gg " \sim$ etc. $m \{ m — i \} (m — 2) \ll , ,$ Or , comme la racine a n'entre point dans les expressk de X et Y, il est clair qu'ayant $X + Ar = (^{\wedge} x + Ay) - ^{\wedge}$,

The text on this page is estimated to be only 19.14% accurate

ADDITIONS. 47[^] on aura aussi donc multipliant ces deux équations l'une par l'autre > on aura $X^* + aXY + ir = (x^* + ary + iy^*)$, et par conséquent $Z = zai^{\wedge} - \{- ttxy + iy^*$. Ainsi le problème est résolu. Si a était = 0, les formules précédentes deviendraient beaucoup plus simples \ car on aurait $^{\wedge} = - i$ Setc. et de même $J5 > = 0, i5 = i, ^{\wedge} = 0, i?^{\wedge} = - i, 5^{\wedge} = 0, ^{\wedge} = i$ etc. donc $X = ar^{TM} i: 'X^{\wedge} v^{\wedge} b4^{\wedge} - ,, . ' a -^ a. 0,4 a;" > - 4y4ia - etc. _^m(m - i)(m \sim ii)(m - 5)(m - 4)^{\wedge} \ll 5y3fc^{\wedge} \ll .etc. 1^{\wedge}.3.4.5 -^$ et ces valeurs satisferont à l'équation 91. Passons maintenant aux formules de trois dimensions ; pour cela nous désignerons par «, /S, y les trois racines de réquation du troisième degré , $^{\wedge} - CM^* + ij - c = 0$.

The text on this page is estimated to be only 22.54% accurate

^76 ADDITIONS. et nous considérerons ensuite le produit de ces trois facteurs, lequel sera nécessairement rationnel, comme on va le voir. La multiplication faite, on aura le produit suivant, $x^2 + (A + B + C)x + D$ or par la nature de l'équation on a de plus on trouvera donc faisant ces substitutions, le produit dont il s'agit sera $x^2 + ax + b$. Et cette formule aura la propriété, que si on multiplie ensemble autant de semblables formules que Ton veut, le produit sera toujours aussi une formule semblable. En effet, supposons qu'on demande le produit de cette formule-là par cette autre-ci, $x^2 + px + q$, on a $(x^2 + ax + b)(x^2 + px + q) = x^4 + (a+p)x^3 + (ap+b+q)x^2 + (aq+bp)x + bq$.

The text on this page is estimated to be only 13.58% accurate

ADDITION s* 477 «+ bcy^z* + c^z' ; 3 est clair qu'il n'y aura qu'à chercher celui de ces six facteurs, x+ tfy-|-**jB, x+i8y +^z*, 3:+7y-fo[%] a' -|- cey ' + **a* , x* + ^y^+ jSV , x* + ^/j^* + y V ; qu'on multiplie d'abord x + *y + tt^z par x* + *y* + **2'> o^{^^} ^^^^ ce produit partiel xx* + «t (xy* + j^x*) + «* (xz* + zx' + jyO + fit[^] (^z* + zy*) + tf^{zz}* ; or * étant une des racines de l'équation ^ — oî* ' ^bs' ^c^zo , on aura tt? — ûflt* + i* — c =s G , par conséquent «^ =£: a«* • — &ce -f' ^î donc «4=3aA^ — &«&* -}- cce = (a'—6)ce*

The text on this page is estimated to be only 13.36% accurate

478 ADDITION». donc multipliant ces trois équations ensemble , on aura i^*m GÔté le produit àes deux formules proposées $\wedge$ et de l'autre la formule $A^* + aX^{\wedge}Y + (a^* - ai) X^{\wedge}Z - f bXY^{\wedge} + (a\hat{o} - 3c) XYZ + (6^* - aoc) XZ \gg + cl^{\wedge} + ocY^{\wedge}Z + bcYZ^{\wedge} + f^{\wedge}Z?$, qui sera donc égale au produit demandé y et qui est $\wedge$ c^mme l'on voit $\wedge$ de la même forme que chacune des deux formules dont elle est composée. Si on avait une troisième formule telle que celle-ci $\wedge i^{\wedge} + fl\hat{o}^{\wedge} + (a - ai) \hat{a}?'a' \gg + ia;\gg y + (ai - 3c) a:"y V^{\wedge} + (6^* - aac) a:\gg V + cy^{\wedge} + acyz" + icy" \hat{a}^{\wedge} . + c^* \hat{a}^{\wedge} \wedge$ et qu'on voulût avoir le produit de cette formule et des deux précédentes , il est clair qu'il n y aurait qu'à faire $X \gg = Xr''' - c (Fa \gg + ZyO + \hat{u}cZa" , p=xy" + rx \gg - 6(ra" + Zy") - (^* - \wedge)^{\wedge} \gg " Z \gg = Xz" + Zx" + yy \gg + a (Fz" + Zy") + (a^* - \hat{o})Za" ,$.et Ton aurait pour le produit cherché $k^{\wedge} + ai^{\wedge}y \gg + (a \gg - ai) X^{\wedge}Z' + iX'P + (\hat{u}5 - 3c) X^{\wedge}r^{\wedge} + (i \gg - aac) X \gg Z^{\wedge} + cF3^{\wedge} ccF^{\wedge}Z \gg + \hat{e}^{\wedge}F^{\wedge}i;* + (^2?'^{\wedge} ga.$
Faisons maintenant nous aurons $X = X^* - acyz + acz^*$, $F = axy - ohyz - (ai - c) z^*$, $Z = ax2 + 3^{\wedge}* + aoys - f- (a^* - i) a\%$

The text on this page is estimated to be only 19.51% accurate

ADDITIONS. 479 Et ces valeurs satisferont à Téquation X3 +
aX^K-f. JXP + cP-|(a*'— 2i)X^»Z +(ai— 3c)XKZ «n prenant >^== 0:3 ^
^j^j^ ^ j^ _j. ey3 + (a» — ai) x*z + (ai ~ 3c) ay» + açy«z + (i* — 2ac) xz*
+ içyz*+ ez^ ; donc si l'on avait ^ par exemple , à résoudre une équation de
cette forme ^ Y' -h (a* — ai) X*Z^ + iJ^' h + (û* — 3c) XTZ' + (i*—
2ac)A?Z' 4.cr3+aci*2»+icr*Z*+c»Z3===/^, ^n faisant dans les formules
ci-dessus

The text on this page is estimated to be only 20.98% accurate

480 ADDITIONS. et prenant $J^{\text{zzi}} a^? -^{\wedge} \text{tix}^{\wedge} y^{\wedge} (^{\wedge} a^{\wedge} - 26) x^{\wedge} + \text{ixy}^* + (\text{afr} - 3c) \text{ayt} - f - (i^* - \text{aac}) a^{\wedge} + \text{cy}^{\wedge} + \text{cuy}^{\wedge} z + \text{icya}^* + c'a^*$ Et on pourrait résoudre aussi successivement les cas où $^{\wedge}$ auliea de la troisième puissance $F^{\wedge}$ » on aurait $V^{\wedge}$, $f^{\wedge}$ etc. ; mais nous allons traiter ces questions d'une manière tout-à-fait générale , comme nous Tavons fait dans l'art, go ci-dessus. 93. Soit donc proposé de résoudre une équation de cette forme , $X^* + a:i^*r + (a^{\wedge} - ai) X^{\wedge}Z + iA'P + (ai - 3c) XKZ + (6^{\wedge} - \text{aac}) XZ^{\wedge} + cTP + acPZ - f. \text{icr}Z^* + e2?z = \text{irr}$ Puisque la quantité qui forme le premier membre de cette équation n'e^t autre chose que le produit de ces trois facteurs, $(X + \ll r + \ll^* Z)(X + /gK + ^{\wedge} * Z)(A^{\wedge} + j.r - f3.^* Z)$, il est clair que pour rendre cette quantité égale à une puis^ eance du degré m , il ne faudra que rendre chacun de ces fac^ teurs en particulier égal à une pareille puissance. Soit donc $X + ^*r + A^*Z == (x + \ll x + \ll 'a)"$, on commencera par développer la puissance m de $x - f - \ll^{\wedge} - |^{\wedge} \text{ttH}$ par le théorème de Newton , ce qui donnera $x^{\wedge} + \text{Tnjc}^{\wedge} - ^{\wedge} Qy 4 - \text{tfz} \text{rt} + \wedge \wedge \wedge \sim ' ^{\wedge} a : \rangle \text{---} \langle \langle \text{jf} - f -$

The text on this page is estimated to be only 9.04% accurate

Mais cofntae dans cette formule on ne voit pâô àiâément la loi des termes , nous supposerons en général $(a: + ^ly+ci^z)''' == P + jP \gg a + PV + P \gg V + P'V + \text{etc}$: fet Ton trouvera $px \text{ --- } 'ÎO^X \text{ h} \hat{u} \text{ } _{(im \text{---} i)yP' + i \ddot{m} z P \text{ } z x}$ $5x * ^4^ \text{ etc.}$ t est de qui se débiontre facilement par le calcul diâTéreiitiel. Maintenant on aura , à cause que et est une des racines Àé l'équation $> *^ \text{---} \hat{u} w^* + i^ \text{---} i - c = o \wedge$ Ipn aura» $dis^{\wedge} je^{\wedge} ' \blacksquare \blacksquare a? i \text{---} \hat{u} \langle t^* - i - iflfc \text{---} c = o ;$ d'où $et^* = a^{**} \bullet \text{---} i \ \& \langle ft + c \ j$ donc $\langle t^* r =: aJ \text{---} ^bct^{\wedge} + cflt = (a^* \text{---} ft) et^* \text{---} (ai \text{---} c) \langle t \text{---} | - ne; tt5^{\wedge} = (a^* \text{---} . i) ^3 \text{---} \wp qJ \text{---} c) et^* + occt = (a^{4*} i fio^{\wedge} \text{---} ^c) \langle t^* \text{---} _{(\wedge \langle i \text{---} i \rangle ^{ac})} \lll + (fl^* \text{---} i6)ci '$ et ainsi de suite; ... Desorte que si on fait $\wedge$ pour plus de simplicité $\wedge ik$.

The text on this page is estimated to be only 14.54% accurate

4^2 ADDITIONS. $A' = 0$ $A'' = 1$ $A''' = a$ $A'^{\wedge} = aA''' - bA'' + cA'A'''$
 $= aA^{\wedge} - bA'''^{\wedge} cA'' \backslash$ etc. $B' = 1$ $-6 \gg'' = zb^{\wedge} \bullet^{\wedge} = aB''' - bB'' - j^{\wedge} cB''^{\wedge} B^{\wedge} == a5 \gg^{\wedge}$
 $- bB''' + cB'^{\wedge}$ etc. $C = 0$ $C \gg = 0$ $C'' = c$ etc. $\ll = ^{\wedge} \text{fit}^* - B'a + C$ etc.

Substituant donc ces valeurs dans l'expression de $(x - f - \ll ey + a''i5)'''$, elle se trouvera cQmpoâée de trois parties , Tune toute rationnelle, Tautre toute multipliée par ct , et la troisième toute multipliée par $ct^{\wedge}$; ainsi il ny aura qu'à comparer la première à X , la seconde à ccK , et la troisième à $cc^{\wedge}Z$; et Ton on aura

The text on this page is estimated to be only 19.55% accurate

A p D I T X o N s. 483 •ura p[^]p ce moyçn $X = P + P'O + P''C'' +$
 $piiiC\gg'' + P^{>^C^3}$ etc. $7 = \text{---} P'i?^* -e- P'''i5\gg \text{---} . i?'''\gg^{\wedge}\gg\gg -^{\wedge} i'\gg^{\wedge}\gg^{\wedge}$ etc. Z
 $\text{---} P'A' + P''^{\wedge}\gg + pi'i^{\wedge}iu$ 4- $p^{\wedge}ji^{\wedge}$ etc. Ces valeurs satisferont donc à
Técjuation $jç + ^r + fit^*A: =; (;c + rty + et^z)''\gg$; et comme la racinç et
n'entre point en particulier dans le expressions de j\`r, F et Z, il est clair
qu'on pourra changer a en i3, ou en ^, desorte qu'on aura également $X + /Sr$
 $+ /S^{\wedge}Z = (:ç + /Sy + /S\gg z)\ll$, et $X + yY + yZ = (^x + yy + yzY$, Or multipliant
ensemble ces trois équations , il est visible que le premier membre sera le
même que celui de Téquation proposée , et que le second sera égal à une
puissance m , dont la racine étant nommée ^, on aura $/^{\wedge} = . x^{\wedge} + axr'y -f- (a\gg$
 $\text{---} Q,b)x^{\wedge}z + bxy'''' + \{ab \text{---} Zc)xyz + (i'' \text{---} sac) xz^* -f- cy^{\wedge} + acy^{\wedge}z -f-$
 $bcyz^{\wedge} + c^*2i^{\wedge}$. Ainsi on aura les valeurs demandées de X, Y , Z lesquelles
renfermeront trois indéterminées $x^{\wedge}y, \ll. ,$

The text on this page is estimated to be only 23.86% accurate

4fi4 additions; en supposant que $tL^{\wedge}f_i^{\wedge}y^{\wedge}i$ fussent les t-acines
d'une $\hat{e}q_i$ du quatrième degré , telle que celle-ci $5^{\wedge} = as^{\wedge} + i5^{*-^{\wedge}c_j}$
 $+ c^{\wedge}o$; pn aura ainsi $t\hat{f}_i8 + \hat{f}_i t^{\wedge} + \hat{f}_i t tT + iS_j. + |S^{\wedge} + >$

ADDITIONS!. 4⁴ Bii⁴ ainsi p peut avoir aussi ces quatre valeurs
 correspondantes $\sqrt[4]{a: + cj' + ei^z}$ 4- clH a: + i3y 4. iS^z + fiH iP + jy + S'^z
 + $\sqrt[4]{t}$ lesquelles ne sont autre chose que les facteurs dont il s'agit d'avoir le
 produit. Donc, puisque le dernier terme H doit être le produit de toutes les
 quatre racines , ou valeurs de p , il s'enr suit que cette quantité R sera le
 produit demandé. Mais en voilà assez sur ce sujet que nous pourrons
 peut#tre reprendre dans une autre occasion. Je terminerai ici ces Additions
 que les bornes que je me suis prescrites, ne me permettent pas d*étendre
 plus loin ; peut-, être même les trouvera-t-on déjà trop longues; mais les
 objets que j V ai traités étant d'un genre assez nouveau et peu connu, j'ai cru
 devoir entrer dans plusieurs détails nécessaires pour se mettre bien au tait
 des méthodes que j'ai exposées et de leurs ⁴ifTérens usages. FIW-.

The text on this page is estimated to be only 12.20% accurate

t .' 1 ;■ ■«■ • 4*





