

Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques

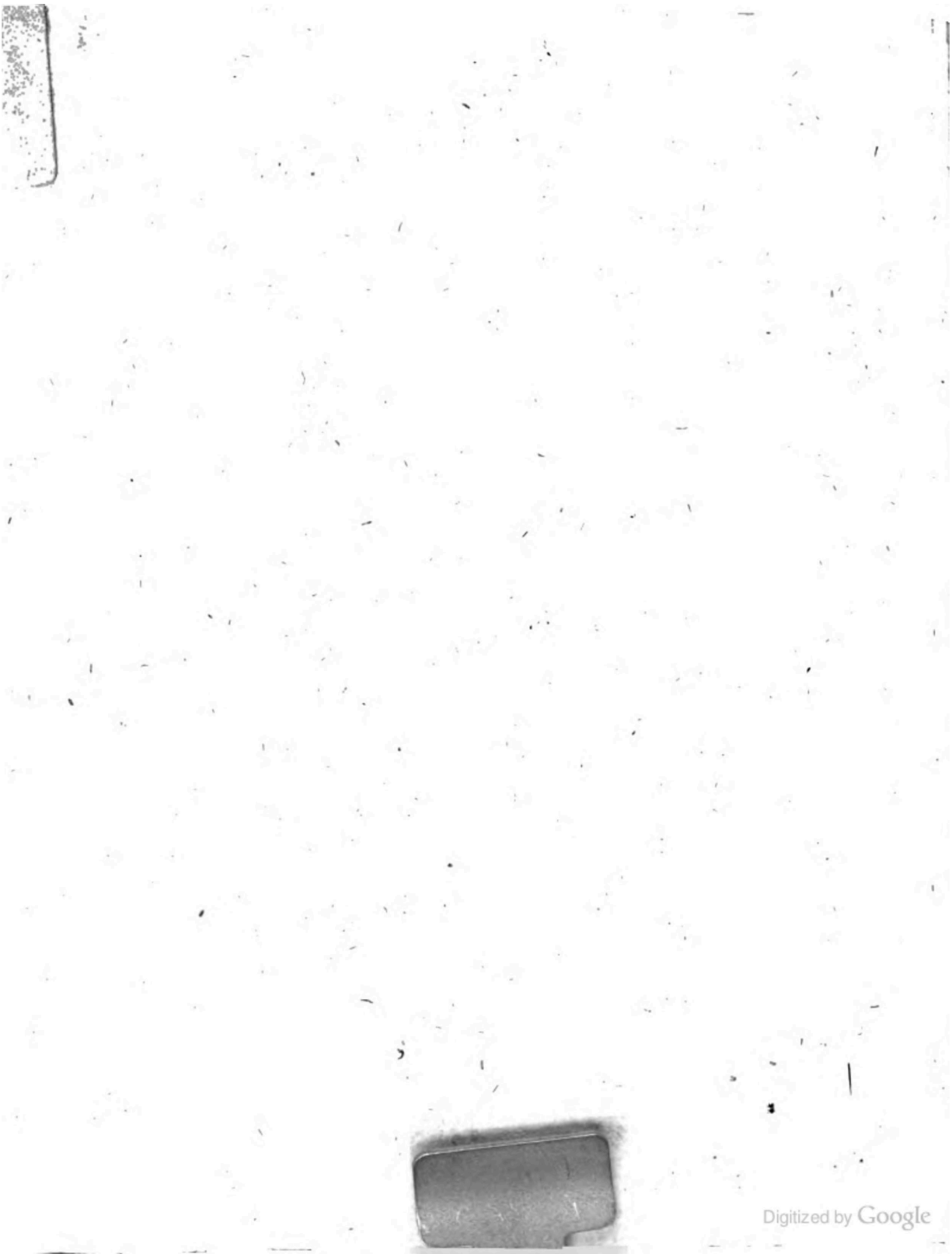
This book was produced in EPUB format by the Internet Archive.

The book pages were scanned and converted to EPUB format automatically. This process relies on optical character recognition, and is somewhat susceptible to errors. The book may not offer the correct reading sequence, and there may be weird characters, non-words, and incorrect guesses at structure. Some page numbers and headers or footers may remain from the scanned page. The process which identifies images might have found stray marks on the page which are not actually images from the book. The hidden page numbering which may be available to your ereader corresponds to the numbered pages in the print edition, but is not an exact match; page numbers will increment at the same rate as the corresponding print edition, but we may have started numbering before the print book's visible page numbers. The Internet Archive is working to improve the scanning process and resulting books, but in the meantime, we hope that this book will be useful to you.

The Internet Archive was founded in 1996 to build an Internet library and to promote universal access to all knowledge. The Archive's purposes include offering permanent access for researchers, historians, scholars, people with disabilities, and the general public to historical collections that exist in digital format. The Internet Archive includes texts, audio, moving images, and software as well as archived web pages, and provides specialized services for information access for the blind and other persons with disabilities.

Created with hocr-to-epub (v.1.0.0)





The text on this page is estimated to be only 23.62% accurate

1 BCU - Lausanne 10947883^8 Di 10** ^l^jÇ**

The text on this page is estimated to be only 15.00% accurate

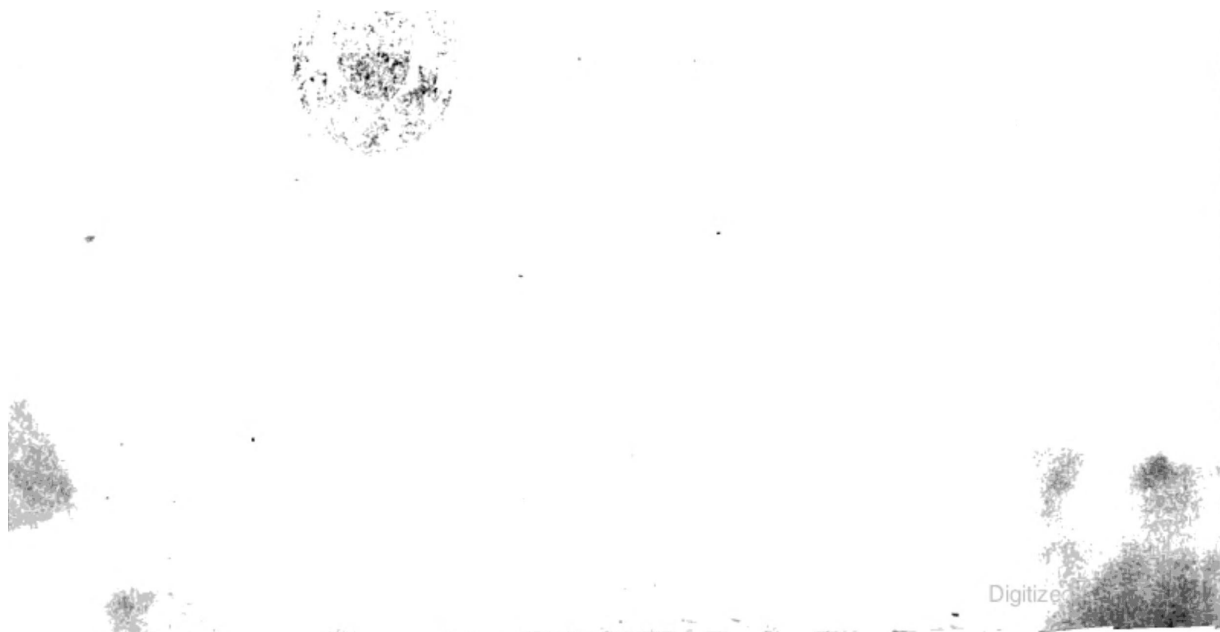
I V • Digitized by Google r J

The text on this page is estimated to be only 14.50% accurate

INTRODUCTION A L'ANALYSE DES LIGNES COURBES
ALGEBRIQUES.

The text on this page is estimated to be only 5.00% accurate

; ! i



INTRODUCTION A L'ANALYSE DES LIGNES COURBES
ALGÈBRIQUES. Par GABRIEL CRAMER, Professeur de Philosophie &
de Mathématiques-, des Académies & Sociétés Royales de Londres , de
Berlin , de Montpellier , de Lyon , & de IAA GENEVE, Chez les Frères
Cramer Se Cl. Philibert. M D C C L. Digitize

The text on this page is estimated to be only 24.00% accurate

A Digitized by Google

PREFACE A Théorie des Lignes courbes fait une partie
confidérable des Mathématiques : Elle commence où finissent les Elémens,
au delà defquels on ne va point fans elle. On ne fauroit s'en pafler dans les
Sciences dont la perfection dépend de la Géométrie , telles que la
Méchanique , l'Astronomie , la Phyfique. Les Syftèmes modernes
fuppofent néceffairement cette connoiffance. Si l'étude en efl utile, elle
n'eft pas moins agréable. Des variétés perpétuelles, rappellées conftamment
à l'unité , offrent à l'Efprit un fpeclacle dont il ne Ce lafle jamais. Au/ſſi les
Courbes ont - elles toujours fait un des a 3 pnnny Google

vi PREFACE principaux objets des spéculations des Géomètres. A peine la Géométrie sortoit-elle de l'enfance, qu'elle s'occupa des Serions coniques : bientôt après elle admira les propriétés de la Conchoïde , de la Cissoïde , des Spirales , (Courbes très différentes de celles que nous désignons par ce nom , & qui font les Hélices des Anciens) & de plusieurs autres Lignes , dont le nom & la connoissance a péri avec la plupart des monuments de l'ancienne Géométrie. Dans ce qui nous en reste , on voit que si les Anciens ont eu autant d'esprit & de génie que les Modernes , ils leur cèdent par la Méthode , par cet art infiniment utile de déduire d'un seul Principe universel un grand nombre de Vérités , de les ramener à des Règles générales , de les développer par des conséquences uniformes , & de les lier les unes aux autres de la manière la plus propre à faire naître de nouvelles découvertes. Ce que les Anciens avoient démontré sur les Courbes , quelque important , quelque subtil qu'il fut, n'étoit pourtant qu'un amas de Propositions particulières , qui ne pouvoient guères servir à en trouver d'autres , qu'autant que ces Recherches donnoient des exemples & des modèles , qu'un Esprit né Géomètre s'efforçoit d'imiter. Une grande application & l'étude opiniâtre d'une Courbe pouvoit y faire voir des propriétés singulières : L'Inventeur en étoit redevable à son génie , & souvent à la Fortune. Digitized by Google

P R E F A C E VIT II en étoit à peu près de même de toutes les branches des Mathématiques , jufqu'à l'invention de l'Algèbre ; moyen ingénieux de réduire les Problèmes au Calcul le plus fimple & le plus facile que la Queftion propofée pût admettre. Cette clef univerfelle des Mathématiques en a ouvert la porte à plufieurs Efprits , pour lefquels elle eut toujours été fermée fans ce fecours : On peut dire que cette découverte a produit une véritable révolution dans les Sciences qui dépendent du Calcul. Il y a donc , ce femble , de l'humeur, Se une forte de caprice , à méprifer une Méthode fi utile , & à faire gloire de n'employer que l'Analyfe géométrique des Anciens. Celle-ci, je l'avoue, a l'Algèbre le mérite d'une évidence plus fenfible, & d'une certaine élégance qui plaît infiniment : mais il s'en faut beaucoup qu'elle foit aufi* commode Ôc aufi univerfelle. Donnez lui donc, fi vous voulez, la préférence; mais ne donnez point d'exclufion à l'autre Méthode. Les Vérités mathématiques ne font pas fi faciles à trouver, qu'on doive chercher du mérite à le fermer quelque des routes qui peuvent y conduire. C'eft fur-tout dans la Théorie des Courbes au'on éprouve bien fenfiblement l'utilité d'une Méthode aufi générale que l'efi: celle de l'Algèbre. Des Cartes, dont l'efprit inventeur ne brille pas moins dans la Géométrie que dans la Philofophie , n'eut pas

vin PREFACE plutôt introduit la manière d'exprimer la nature des Courbes par des équations algébriques, que cette Théorie changea de face. Les découvertes se multiplièrent avec une extraordinaire facilité: chaque ligne de Calcul enfançoit de nouveaux Théorèmes. Par ce moyen, fait fupple *nu génie, & le génie aidé d'un art si lécourable u. eu des succès qu'il n'auroit jamais obtenu par ses propres forces. Car ce qu'il y a d'admirable ici, c'est qu'on ne fauroit découvrir par le moyen de l'Algèbre quelque propriété d'une Courbe particulière, qu'elle ne fait auTi-fût connoître des propriétés femblables, ou analogues, dans une infinité d'autres Courbes. Ajoutez que l'Algèbre seule fournit le moyen de distribuer les Courbes en Ordres, Cla/îes, Genres & Espèces: ce qui, comme dans un Arfenal où les armes sont bien rangées, met en état de choisir, sans hésiter, celles qui peuvent servir dans la Résolution d'un Problème proposé. C'est à l'illustre Mr. Newton que la Géométrie est sur-tout redevable de cette distribution. Son Enuimération des Lignes du troisième Ordre est un excellent modèle de ce qu'il faut faire en ce genre, Se une preuve convaincante que ce grand Homme avoit pénétré jusqu'au fonds de ce que la Théorie des Courbes a de plus délié & de plus intéressant. Il est fâcheux que Mr. Newton se soit contenté d'étaler ses découvertes sans y joindre les Démonstrations, Digitized by Google

PRE FA CE ix trations , Se qu'il ait préféré le plaisir de se faire admirer à celui d'instruire. Ce n'est pas que dans une Lecture attentive de son Traité on ne puisse apercevoir quelques traces de sa Méthode : on découvre que ses principaux guides dans ces Red" i ches ont été la Doctrine des Séries infinies , qui lui doit presque tout, Se l'usage du Parallélogramme analytique , dont il est l'Inventeur: on peut même entrevoir qu'en quelques endroits il n'a pas suivi ces guides avec l'exactitude qu'on admire dans les autres ouvrages. Ces légères inadvertences n'ont pas échappé à Mr. Stirling, qui a développé les Principes de la Méthode de Mr. Newton , dans l'excellent Commentaire qu'il nous a donné sur son Livré. On y voit qu'il ne manquoit presque rien à Mr. Stirling pour donner une Théorie complète des Courbes, Se qu'il n'auroit voulu que peu de choses à dire, s'il ne se soit pas attaché avec trop de scrupule à ne point s'écarter de son Auteur. Mr. Nicole a donné , dans les Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, une explication aussi nette qu'exacte des Principes que Mr. Newton a pu suivre dans son Enumération des Lignes du troisième Ordre c'est grand dommage qu'un commencement si heureux n'ait pas eu de suite. Que ne pouvoit-on pas attendre du génie de Mr. Nicole? On trouve dans le même Recueil quelques Mémoires

I x P R E F A C E moires' de Mr. De Bragelogne, relatifs à une
Enumération des Lignes du quatrième Ordre , qu'il avoit entrepris à
limitation de celle que Mr. Newton a donnée des Lignes du troisième Ordre.
Il y a de très bonnes choses dans ces Mémoires ; mais l'Auteur s'étant arrêté
au milieu de sa course , on ne voit pas si sa Méthode étoit la plus propre à le
mener avec exactitude & avec certitude à l'Enumération qu'il avoit en vue. Il
s'étend assez sur les Points multiples , qui servent de fondement à la
subdivision des Genres en Espèces , & en Variétés; mais il ne dit rien , ou ne
dit que peu de choses , des Branches infinies , dont doit dépendre la Divi-
sion générale de! Courbes de chaque Ordre en leurs Classes & Genres.
Voilà *ce que j'avois devant les yeux lorsque je commençai cet Ouvrage. La
longueur du tems qu'il a resté entre mes mains devoit lui avoir donné un
degré de perfection , que je crains avec raison qu'on n'y trouve pas. Mille fois
Mr. de Gravesande, qui m'honorait de son amitié se dont la perte me fera
toujours amère , m'avoit communiqué ses Recherches sur les Séries, & ce
qu'il avoit ajouté aux découvertes de Mrs Taylor & Stirling. Quelques
observations que je fis sur sa Méthode parurent lui plaire , se trop prévenu
en ma faveur , il eut la bonté de me dire , qu'ayant la clé de la Théorie des
Courbes il ne me feroit pas difficile d'en faire usage. Si j'ai eu tort de
l'en croire

PREFACE xi re , qu on pardonne cette erreur au relpedl dont j
 etois pénétré pour ce grand Homme. . Cet Eflai étoit à peu près fini , quand
 Mr. l'Abjé De Gua fit paroître XUjage de lAnalyfe de Descartes pour
 découvrir les propriétés des Lignes géométriques de tous les Ordres. La
 lubftitution qu'il y fait du Triangle algébrique au Parallélogramme de
 Newton eft une idée[^] oeureufe» dont j ai profite avec reconnoiffance , aufTi
 bien que de quelques autres penfées ingénieufes de cet Auteur : mais je n'ai
 pas cru devoir le fuivre dans la méprile où il eft tombé fur les Branches
 infinies des Courbes Se fur leurs Points multiples, pour avoir négligé l'ufage
 des Séries infinies , ou pour avoir voulu juger i'une Série entière par fon
 feu! premier tenueJaurois tiré une grande utilité de Y Introduction à
 lAnalyji des infiniment petits de Mr. Euler, fi ce Livre m'avoit été plutôt
 connu. Son objet étant prefque le même que le mien, il n'eft pas furprenant
 que nous nous foions fouyent rencontré dans les Conclurions. Mais la
 différence des Méthodes eft aufi grande quelle peut l être quand on
 travaille fur un même fujet: ce quç je ne dis point pour préférer la route*
 que j'ai prûe à cejle qua tenu Mr. Euler». mais feulement pour avertir le
 Leâeur de cette diyerfité. Voici une légère idée de l'ordre que j'ai- cru devoir
 fuivre* . Le premier Chapitre expofe en général la nature b x des

XII PRE FA CE des Lignes courbes , Se la manière de les représenter par des Equations. On diviso d'abord les Lignes en régulières & irrégulières. Celles-ci n'ont ni Définition , ni Description réglée Se connue. Celles-là sont décrites par une loi certaine, qui constitue leur essence ou leur nature. On divise ensuite les Lignes régulières , en celles qui peuvent être décrites sur une superficie plane , Se celles qui ont une double courbure. Puis on expose la manière d'exprimer par une Equation la nature des Lignes à simple courbure : invention heureuse de Descartes , qui renferme le Principe, ou du moins le Germe, de tout ce que les Modernes ont découvert sur les Courbes. De là on passe à la distinction des Lignes en algébriques & mécaniques: on définit les Courbes exponentielles & les transcendentes , qui tiennent en quelque sorte le milieu entre les mécaniques , Se les algébriques. On entre dans quelque détail sur la manière dont une Courbe algébrique est représentée par son Equation ; On indique le moyen de discerner si une Equation proposée exprime une seule Courbe , ou l'assemblage de plusieurs. On parle des Branches de Courbes , finies ou infinies , réelles ou imaginaires. On fait voir en quel sens le cours d'une Ligne algébrique est continu , quoique la Courbe puisse être composée de parties détachées. On montre enfin la manière de décrire une Courbe en assignant la position d'une infinité de ses points ; nonDigitized by Google

PREFACE XIII non-seulement lorsque son Equation peut être résolue, mais encore en plusieurs autres cas. Il faut pourtant avouer qu'il manque une Méthode générale pour cela : si l'Algèbre pouvoit la donner, on aurait, par cela seul, tout ce qui est nécessaire pour la connoissance des Courbes. On indique, dans le second Chapitre, une manière générale de transformer l'Equation d'une Courbe, quand on veut la rapporter à d'autres coordonnées que celles dont le rapport est exprimé par l'Equation proposée. On donne, pour faire ces transformations, dans les cas les plus utiles & les plus communs, des manières abrégées, qui peuvent être superflues lorsque l'Equation est fort simple, mais qui deviennent presque nécessaires, ou du moins très commodes, quand cette Equation est d'un degré assez élevé, ou qu'elle est composée d'un grand nombre de termes. Le troisième Chapitre développe la division des Lignes algébriques selon leurs différents Ordres. On y voit les Equations générales de chacun de ces Ordres, le nombre de leurs termes, celui des Points donnés par lesquels on peut faire passer une Ligne d'un Ordre donné, & le nombre des Points dans lesquels une Ligne d'un Ordre donné peut rencontrer une Ligne du même Ordre, ou d'un autre Ordre au/donné. La Règle qui détermine ce nombre est très importante dans la Théorie des Courbes.

xiv PREFACE

bes , plusieurs grands Géomètres l'ont supposée, mais personne, que je sache, n'en a donné la Démonstration. On la prouve ici, par une manière, expliquée dans l'Appendice N°. i , de faire évanouir une grandeur indéterminée , au moyen de deux Equations dans lesquelles elle entre. C'est-là proprement un Problème de pure Algèbre ; mais les Méthodes connues ayant paru insuffisantes, on en a cherché une autre , qui rend la chose facile au moyen d'une façon singulière d'employer les nombres , ou chiffres , pour exprimer les indéterminées & leurs fonctions. L'usage de cette Notation peut s'étendre à d'autres Recherches, & en général cette Méthode est assez féconde en Corollaires utiles dans l'Algèbre. La Règle démontrée dans le Chapitre précédent étant le fondement de la Méthode usitée pour la construction des Egalités , on en a pris occasion de faire dans le Chapitre quatrième quelques Remarques sur cette construction. On en développe le Principe ; on en détermine l'étendue ; on en marque les limitations. On indique la source des difficultés que Mr. Rolle a élevées contre cette Méthode , & les moyens d'éviter furement les inconvénients qu'il y a trouvés. On propose enfin une manière générale de fixer le nombre & la nature des racines d'une Egalité , de distinguer les imaginaires des réelles , & parmi celles-ci les négatives des affirmatives. On l'a

Digitized by Google

PREFACE xv l'applique aux Egalité's du fécond , troisieme Se
 quatre me degré ; ce qui e(t nécellaire Se fuflifant pour la fuite de cet Eflai.
 Le Chapitre cinquième démontre un Théorème fort général fur la valeur du
 produit de toutes les ordonnées d'une même abfciffe ; & il en fait
 l'application aux Courbes du fécond Se du troifième Ordre. Ce feul
 Théorème renferme tout ce que les Anciens ont démontré fur la
 comparaifon du quarré de l'ordonnée avec le rectangle des portions du
 diamètre dans les Seclions Coniques : ce qui fait la plus grande partie de ce
 qu'ils ont connu de ces CourBes. On fétend à d'autres Cas dont les Anciens
 n'ont pas fait mention ; Se on donne les propriétés analogues des Courbes
 du troifième Ordre. Il n'y a aucune difficulté à le fuivre dans les Courbes
 des Ordres fupérieurs. Dans le Chapitre fixième , on confidere d'abord deux
 Lignes telles que la fomme des ordonnées de l'une eft égale à la fomme des
 ordonnées de l'autre , ces ordonnées ayant une même abfciffe. On fait voir
 que l'une de ces Lignes peut , en une infinité de Cas , être i'afTemblage de
 plufieurs Droites , Se que toutes ces Droites peuvent iè réduire à une feule ,
 qui efl alors le Diamètre de la Courbe. On démontre que chaque Courbe a
 néceffairement un ou plufieurs Diamètres. On définit les Diamètres
 curvilignes, Se le Diamètre abfolu. On prouve que dans les Lignes du
 lecond

r'xari PREFACE cond Ordre tout Diamètre est un Diamètre absolu , mais qu'il n'en est pas de même dans les Courbes des Ordres (supérieurs. On enseigne à chercher les Diamètres absolus d'une Courbe. On explique ce que c'est: qu'un Contre-Diamètre & un Centre général. On donne des Règles pour les trouver. Il s'agit dans les Chapitres suivants de ce qu'il y a de plus remarquable dans le Cours d'une Ligne. Ce sont les Branches infinies et les Points singuliers. C'est par les Branches infinies qu'on divise les Courbes de chaque Ordre en leurs Genres , et c'est par les Points singuliers qu'on subdivise en Espèces les Courbes de chaque Genre. Pour déterminer ces Branches et ces Points, on n'a point de Méthode plus sûre et plus générale que celle des Séries. C'est pour cela qu'on a cru devoir l'expliquer avec soin dans le Chapitre septième; d'autant mieux que cette Méthode n'a été donnée jusqu'ici que d'une manière imparfaite ; qu'on a laissé sans Démonstration une partie du procédé qu'il faut suivre ; et que ce procédé , de la façon qu'il est proposé dans les Auteurs , conduit souvent à des résultats bornés et par là vicieux. La vraie Méthode des Séries est fondée sur le Parallélogramme de Mr. Newton, invention excellente > mais dont l'Auteur n'a pas donné la Démonstration, dont il semble même n'avoir pas senti tout le prix. Après lui, Mrs. Taylor et Stirling en ont étendu l'usage; mais leurs

Digitized by

PREFACE xvii Règles n'ont ni la généralité ni l'exactitude nécessaires. Mr. S' Graves a de les a rectifiées jusqu'à un certain point. Cependant la Méthode, qui n'est qu'un abrégé de la Méthode générale, n'en confère pas toute l'universalité; elle n'a lieu que dans certains Cas, & dans ces Cas elle n'est pas toujours autant abrégée qu'elle pourrait l'être: il en est même, où elle peut jetter dans l'erreur d'une énumération imparfaite. Pour éviter ces inconvénients, on a cru devoir remonter aux Principes de la Méthode des Séries & en démontrer exactement le procédé. On en donne même l'Investigation, & on indique quelques moyens d'abréger les calculs à la longueur desquels la Méthode générale est (Lui-même: On s'est ici borné à ce qui est nécessaire pour la Théorie des Courbes. La matière est vaste, & on pourrait en compiler des Volumes sans fin. Le Chapitre huitième est employé à déterminer le nombre, la nature, & la position des Branches infinies que peut avoir toute Courbe dont l'Equation est donnée. Ces Branches s'éloignent infiniment ou de l'Axe des abscisses, ou de celui des ordonnées, ou de l'un & de l'autre. Cela se différencie aisément, par la seule inspection de l'Equation proposée. On en indique la manière; après quoi On explique la différence des Branches hyperboliques & paraboliques. On donne, pour cet effet, une idée des m. c Hyper

XVIII PREFACE Hyperboles & des Paraboles de tous les Ordres : on expose les variétés du nombre & de la position de leurs Branches , & on fait voir en quels Cas elles sont réelles ou imaginaires. Ensuite on donne les moyens de reconnoître si les Branches infinies qu'indique l'Equation d'une Courbe sont imaginaires ou réelles ; de décider , dans ce dernier Cas , si elles sont hyperboliques ou paraboliques , c'est-à-dire , si elles ont une Asymptote droite , ou si elles n'en ont point ; & dans le Cas où elles ont cette Asymptote, de déterminer sa position; de trouver,, dans tous les Cas, leurs Asymptotes- courbes , c'est-à-dire la Courbe la plus simple qui règle la position, & , pour ainsi dire, la marche des Branches infinies de la Courbe proposée. Ces Règles sont éclaircies par un grand nombre d'Exemples choisis. Et ce Chapitre est terminé par quelques Théorèmes généraux sur le nombre de Branches infinies & d'Asymptotes droites , que peuvent ou ne peuvent pas avoir les Courbes des différents Ordres. > Dans le Chapitre neuvième, on établit les Divisions g. n. des Lignes Courbes, fondées sur le nombre , la nature , & la position de leurs Branches infinies. On fait voir qu'il n'y a que trois Courbes du second Ordre ; à savoir le Cercle; l'Hyperbole; & la Parabole : ce qui donne , en peu de mots , ce qu'on appelle Digitized by v^ooQle

P R E F A C E xix pelle là Conftru&ion des Lieux Géométriques.
 On réduit les Courbes du troifième Ordre à quatre Gaffes , qui fe
 fubdivifent en quatorze Genres , conformément à ce que Mr. Newton a
 établi dans fon Enumération des Lignes du troifième Ordre , dont cet article
 peut être regardé comme un petit Commentaire. Il y a neuf Claſſes des
 Courbes du quatrième Ordre, &1 chacune fe fubdivife en divers Genres ;
 mais 1 énumération en eſt comme impoſſible. Il a donc fallu fe borner à
 donner les Principes nceffaires pour réduire à fa Claſſe & à fon Genre
 toute Courbe donnée de cet Ordre. On indique feulement que celles du
 cinquième Ordre ont onze Claſſes , & Ton propoſe une Règle générale lur
 le nombre des Branches hyperboliques & paraboliques , que peuvent avoir
 les Courbes d'un Ordre quelconque. Les Chapitres fuivants font deſtinés à
 l'examen des Points ſinguliers d'une Courbe. Ces Points font ou Points
 multiples ,. ou Points d'Inflexion. Les Points multiples font ou doubles , ou
 triples , ou quadruples &c Les Points d'Inflexion ont une Inflexion ou
 ſimple, ou double, ou triple, &c. Les Inflexions d'un d.gré impair font
 vifibles; celles d'un degré pair font inviſibles , & ne le manifeſtent que par
 le Calcul: on les nomme Serpente-mens. c % ' On

XX PRE FA C E [On indique au Chapitre dixième la manière de connoître si un Point assigné d'une Courbe donnée est simple ou multiple ; & dans ce dernier Cas , quel est le degré de sa multiplicité ; de chercher si une Courbe d'Equation donnée a des Points multiples, où ils sont, & quels ils sont; de marquer les conditions qui peuvent donner des Points multiples à une Courbe dont l'Equation ou la Construction est donnée. Enfin on indique quel est le nombre de Points multiples que peuvent avoir les Courbes des différens Ordres , & quel peut être le degré de leur multiplicité. On montre, par exemple, que les Courbes du cinquième. Ordre ne peuvent avoir qu'un Point quadruple, & qu'alors elles ne peuvent avoir aucun autre Point multiple: qu'elle ne peuvent avoir qu'un seul Point triple, mais qu'avec celui-là elles peuvent avoir trois Points doubles ; enfin qu'elles peuvent avoir jusqu'à six Points doubles, quand elles n'ont aucun autre Point multiple. Le Chapitre onzième donne les moyens de déterminer les différentes espèces des Points simples ou multiples , par le nombre & la position de leurs Tangentes. On y explique la manière de mener les Tangentes d'un Point quelconque. Cette manière, qui revient dans le fond aux Méthodes connues & en particulier à celle des Infiniment petits, est «

Digitized by Google

PRE FA C E xxi est démontrée ici par cette seule considération, que la Sécante d'une Courbe devient sa Tangente lorsque les deux Points de section se réunissent en un seul. La solution du Problème des Tangentes mène trop naturellement à celui de Max 'unis & Minimis , pour qu'il soit permis de n'en rien dire. La Méthode qu'on propose revient encore aux Méthodes connues ; mais on y a joint quelques Remarques qui , (sans être absolument nouvelles , ne sont pas communes. Elles servent à distinguer un Maximum d'un Minimum , Se à distinguer les uns Se les autres des Points multiples Se des Points d'Inflexion , avec lesquels il est aisé de les confondre. On tire de cette Méthode quelques usages pour déterminer le cours des Lignes Courbes , Se on finit par la manière de trouver les Points d'Inflexion simple ou multiple, que peut avoir une Courbe d'Equation donnée. On entre au Chapitre douzième dans un plus grand détail sur la courbure des Lignes Courbes en leurs différents Points. Elle se mesure par la courbure du Cercle , qui étant uniforme dans tout le contour d'un même Cercle, varie selon que le Cercle est plus grand ou plus petit. On enseigne à trouver y pour chaque Point d'une Courbe donnée , le Cercle de même courbure. La méthode qu'on donne pour cela, Se qui n'est qu'une suite des principes établis dans le Chapitre précédent 3 dent,

XXII PRE FA C E dent , réfout facilement ces Problèmes :

Trouver en quels Points de fon cours une Courbe a une courbure donnée , une courbure infinie , une courbure infiniment petite, (a plus grande ou fa plus petite courbure , &c. On compare entr' elles les courbures infinies , & auffi les courbures infiniment petites; Se on en afligne les degrés, en indiquant pour chaque Point , dont la courbure n'eft pas finie, la Parabole de même courbure; car ici le Cercle eft inutile , puifque tout Cercle a une courbure finie. Cette comparaifon laiffe entrevoir une variété infinie dans les Points finguliers des Courbes. On n'en fauroit épuifer le détail. C'eft afTez ' d en énumérer les efèces les plus fimples , celles qui peuvent convenir aux Courbes des premiers Ordres , autour defquelles roulent nos ipéculationes. On a taché de le faire , dans le treizième & dernier Chapitre , pour tous les Points multiples dont Ibnt fufceptibles les Lignes des premiers Ordres. L'Appendice contient tçois Démonftrations qui auroient trop interrompu la fuite du Difcours fi on les avoit inlérées où elles font citées. Il n'y a proû>rement que celle du N°. 2. qui fbit néceflaire. Ele eft extraite d'un plus long Mémoire fur ce même fujet, lequel devoit faire partie dun Traité d Algèbre. Tel eft le Plan que je me fuis propofé dans cet ILffai.

Digitized by Google

' P R E F A C E xxm Effai. Cest à mes Lecteurs à juger si je l'ai rempli. J'ai tant de grâces à leur demander , que je ne leur ferai point d'excuses , ni sur le style , où je n'ai cherché que la clarté; ni sur certains détails, que j'ai cru nécessaires aux jeunes Géomètres en faveur de quelques j'écris , ni sur la longueur de cet Ouvrage y dont je suis moi-même surpris. Elle vient principalement du nombre- d'Exemples que j'apporte pour illustrer les Règles que je donne. Je suis fort bien que les Savans en voudroient moins * mais en échange les Commencans en désireroient peut-être davantage. Je puis dire aux uns , que je ne crois pas avoir placé un seul Exemple sans quelque raison particulière & j'ose assurer les autres que je ne pense pas qu'ils trouvent dans les Règles aucune difficulté qui ne soit éclaircie par quelque Exemple,

The text on this page is estimated to be only 22.75% accurate

.s Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 21.78% accurate

INTRODUCTION L'ANALYSE DES LIGNES COURBES
ALGEBRIQUES. CHAPITRE I. De la Nature des Lignes Courbes en
général , & de leurs Equations. L HgHHKpUTF. Ligne cil Régulière ou
Irrégttiê/ * - I rc. Les Lignes irrégulières font cefies qui font décrites fans
aucune régie certaine , ou connue. Tel eft le trait que forme au hazard un
Ecrivain. Ces Lignes ne lont point Tobjct de la Géométrie : elles ne lui
donnent aucune prilc. Car un Géomètre, pour chercher & dcA mon« oy
Google

The text on this page is estimated to be only 27.29% accurate

2 DE LA NATURE D ES LIGNES COURBES PlancI. montrer les propriétés d'une Ligne , doit partir de fa Cua?. u Définition , ou , ce qui est la même chose , de la manière- x* re dont cette Ligne peut être construite ou décrite. Mais les Lignes irrégulières n'ont aucune Définition ou Description réglée & connue > qui les distingue de toute autre Ligne. 2. Les Lignes régulières sont , au contraire , celles qui sont décrites suivant une Loi constante qui détermine la position de tous leurs points. Il y a quelque propriété uniforme qui convient également à tous les points d'une même Ligne régulière , & qui ne convient qu'à eux seuls. Cette propriété constitue la Nature ou l'Essence de cette Ligne. Ainsi la nature du Cercle consiste dans l'égalité de ses rayons. C'est cette égalité des rayons qui distingue la circonférence d'un Cercle de toute autre Ligne courbe , & qui détermine la position de tous les points de la Ligne circulaire , en les fixant tous à une même distance du centre. }. Cette Définition des Lignes régulières convient avec celle des Lieux géométriques. Les anciens Géomètres donnoient ce nom aux Lignes , Droites ou Courbes , dont chaque point étoit également propre à résoudre un Problème géométrique indéterminé. f Si l'on propose , par exemple , de décrire , sur une Ligne droite donnée A B , un Triangle d'une grandeur donnée ; ce Problème est indéterminé ; parce que sur la Droite A B on peut décrire une infinité de Triangles égaux , qui feront tous de la grandeur donnée , & qui donneront ainsi une infinité de Solutions. Comme tous ces Triangles égaux AcB, ACB, A'cB &c. ont leurs sommets, C, f, &c. sur une même Droite cCc parallèle à AB [Eucl. i. §7] , cette Droite cC* est ce qu'on appelle le Lieu des sommets de tous les Triangles égaux à ACB décrits sur la base AB. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 26.20% accurate

ET DE LEURS EQUATIONS, 3 c*Ar.i. De même, si Ton
demande de décrire un Triangle re- Plimcl. à angle sur l'hypothénuse donnée
DE; on propose Ln Pro- **• *• blème indéterminé. Car la circonférence
DFE, décrite sur le diamètre DE, a cette propriété [Eucl. III. j 1] que si
d'un de les points quelconque F on tire deux Droites FD, FE aux deux
extrémités du diamètre DE, ces deux Droites feront avec le diamètre un
Triangle rectangle. La circonférence DFE est donc le Lieu des sommets de
tous les Triangles rectangles qui (è peuvent décrire sur l'hypothénuse donnée
DE. 4.. Les Lignes se divisent encore en celles qui peuvent être tracées sur
une surface plane, & celles qu'on ne peut décrire que sur une surface
courbe. Un grand Géomètre moderne % qui a considéré ces dernières, les
appelle Courbes à double courbure. On conçoit qu'en général elles sont plus
compliquées que les Courbes à simple courbure, qui peuvent être écrites
sur un plan. Dans cette Introduction nous nous bornerons à celles - ci, dont
les propriétés servent de fondement aux recherches qu'on peut faire sur les
autres. 5. Des Cartes est le premier, je pense, qui ait entrepris d'exprimer la
nature des Lignes par des Equations algébriques. Voici comment il s'y est
pris. Dans le plan, sur lequel une Ligne comme MM est tracée, on choisit
à fç. \$: volonté un Point fixe, qu'on nomme K Origine, par lequel on mène
à différence deux Droites AB, AD. De chaque point M de la Ligne MM on
mène des Droites MP, MQ^ parallèles aux Droites AB, AC, & qui y sont
terminées réciproquement. L'une, comme MP ou son égale A se nomme
^Ordonnée ou \ Appliquée. L'autre, comme MCi ou A 2 fois * Mr. Clai r au
t, Recherche sur les Courbes à double courbure. 4/>. Paris 1731. t
Géométrie, Livre L & IL Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 27.24% accurate

4 DE LA NATURE DES LIGNES COURBES PtAKcl. fon
égale AP, se nomme la Coupée ou VAKctife. C'est pour- Cuu.1 quoi la
Droite AB s'appelle la Ligne ou Kaxe des abscisses ou * h des coupées, & la
Droite AD la L*£«* ou Y Axe des ordonnées ou des appliquées. Et l'on le
sert du mot de coordonnées pour exprimer en commun l'abscisse &
l'ordonnée d'un même point. MP & MQ, ou MP & PA, ou enhn M Q. & QA
font les coordonnées du point M. 6. Chaque point d'une Ligne régulière
ayant une propriété commune [§. 2], qui caractérise cette Ligne & distingue
les points qui lui appartiennent de ceux qui ne lui appartiennent pas; cette
propriété se réduit ordinairement à un certain rapport entre les coordonnées,
lequel se peut souvent exprimer par une Equation algébrique indéterminée.
C'est cette Equation qu'on appelle l'Equation de la ligne dont elle exprime la
nature. i°. 4- Soit par ex. le Cercle $mM^wA/$, décrit du centre C avec le
rayon donné CM: On demande l'Equation qui exprime la nature de (à
circonférence. Qu'on prenne à volonté le Point A pour l'Origine, AB pour la
Ligne des abscisses, & AD perpendiculaire à AB pour la Ligne des
ordonnées. Si d'un point M, pris à volonté sur la circonférence, on mène M
P, M parallèles à AD, AB; elles feront les coordonnées du point M. On
cherche donc l'équation indéterminée qui exprime leur rapport d'une manière
générale, c'est-à-dire, qui exprime, non le rapport particulier des Droites MP
, MQ tracées dans la Figure, mais le rapport général de l'abscisse & de
l'ordonnée d'un point quelconque de la circonférence. Cette équation doit (se
dédire de la propriété commune à tous les points de la circonférence Mm
M, qui consiste en ce que chacun d'eux est à une même distance donnée CM
du centre C. Cette propriété dépend donc & de la grandeur donnée du rayon
CM, & de la position donnée du centre C. La position du Digitized by
Google

The text on this page is estimated to be only 27.92% accurate

ET DE LEURS EQUATIONS. \$ Cha» i. du centre C par raport
aux Droites AB, AD, auxquelles Plawc.i. 6% tout le doit «porter , eft fixée
en menant les Droites CF , CE parallèles à AB, AD. Car, le centre C & les
Droites AB , AD étant donnés de pofition , la grandeur des Droites C F , C
E eft donnée *, & réciproquement les Droites CE , CF étant données de
pofition, la pofition du centre C eft fixée. Dérignons ces Droites données
par des lettres , en nommant CE , a\ CF , b\ & le raion CM , r. Les lettres a ,
b , r , marquent donc des grandeurs confiantes , qui relient toujours les
mêmes , en quelque endroit de la circonférence qu'on prenne le point M;
parce que leur grandeur eft indépendante du choix de ce point M. Mais fi on
dérigne PabfdOê AP , ou MQ^, par la lettre x , & l'ordonnée MP , ou AQj
par la lettre y ; ces deux lettres x & y exprimeront des grandeurs variables.
Car , comme on cherche une équation qui convienne également à tous les
points de la circonférence , une équation qui exprime également le raport
des coordonnées A P , P M du point M , & des coordonnées kir , vr(* de
tout autre point fx de la circonférence ; la lettre x doit déligner
indifféremment l'abfciflc AP & Pabfciflc A -rr , & en général une abfcifTe
quelconque; & la lettre^ doit marquer également l'ordonnée PM &
l'ordonnée t u , & en général une ordonnée quelconque : oblervant
feulement que, dans l'équation, x Si y expriment les coordonnées d'un
même point , mais quelconque. Pour fixer les idées , attachons nous au
point M. Si (on ordonnée MP coupe la droite CF en G, on auia GM = MP
— PG = MP — CE=jy — /i, &CG=:CF — FG = CF — AP = b — x. Mais
le triangle CGM étant redangfe , les quarrés de GM & de CG enemble Ibnt
ég.iux au quarré de l'hypothcnufe CM. Donc (y — a y + (£ — xy=rr, ouyy
— 2*y+aa + M — 2bx + xx = rr. Cette équation n'eft pas particulière au
point M : elle convient aulfi bien à tout autre point de la cirA i
confeDigitized by Google

The text on this page is estimated to be only 27.81% accurate

6 DE LA NATURE DES LIGNES COURBES Plan ci.

conférence, par ex. au point p. Car, à ce point p, on a $Cp = r$. $l^*y = UTr$ — $7ty = t^7r$ — $C E = y$ — a , & $C > F y$ — $FC = Aw$ — FC — $*$ — k . De plus $C/* = CM = r$. Donc l'équation $p > 1 + Cyx = C/*1$, que donne le triangle rectangle $C > f^*$, exprimée analytiquement, est $(jV — b)l = zrr$, ou $yy — 2ay + aa + xx — 2bx — bb = rr$, qui est précisément la même que celle du point M. Ainsi cette équation exprime analytiquement la nature du Cercle. Elle est du genre de celles que les Analystes nomment indéterminées, parce qu'elles contiennent deux inconnues, ou plutôt deux variables, qui ont chacune une infinité de valeurs, mais qui sont tellement enchaînées l'une à l'autre par le lien de l'équation, que la détermination d'une de ces variables emporte la détermination de l'autre. Dans cette équation $yy — 2ay — aa — xx — ibx + bb = rr$ si l'on veut que la variable x représente l'abscisse déterminée AP, que je nommerai c, l'équation indéterminée se change en cette égalité déterminée $yy — iay + aa — cc — ibc + bb = rr$, où y, qui n'est plus une variable mais seulement une inconnue, exprime la valeur de l'ordonnée déterminée PM. Et si l'on donne à x la valeur d, que je suppose être celle de l'abscisse A v, l'équation indéterminée se transforme en cette égalité déterminée $y y — iay — aa + dd — M + bb = rr$, ou y maintenant déterminée exprime l'ordonnée $7r$ (*). 7. On auroit trouvé une équation plus simple pour exprimer la nature du Cercle, en choisissant mieux la position de l'origine. Si on l'auroit prise au centre, taillant tous jours les coordonnées perpendiculaires Tune à l'autre, l'abscisse x auroit été CP, & l'ordonnée y auroit été PM; & le triangle rectangle C P M faisant voir que les carrés des deux coordonnées sont ensemble égaux au carré du rayon, on

The text on this page is estimated to be only 29.80% accurate

ET DE LEURS EQUATIONS. 7 Chat. I on auroit eu , pour l'équation du Cercle , $xx + yy = rr$. Pianci. S- 7- Une même Ligne peut donc être désignée par des Equations différentes , qui la représentent chacune, pour ainsi dire , sous Ton point de vue. Et l'Analyse des Courbes confiée en partie à déterminer la position des Axes , de telle manière qu'il en résulte , pour exprimer une Courbe , l'équation la plus simple ou la plus convenable au but qu'on ici propose. 0 8. Mais, avant que d'aller plus loin , il est à propos de remarquer ici , qu'il y a des Courbes régulières dont on ne peut pourtant exprimer la nature par aucune équation analytique. Si on décrit , par ex. sur le diamètre A B , un Cercle K^g- *• ADB , & qu'abaissant de chaque point D de la circonférence une perpendiculaire DP sur le diamètre A B , on la prolonge en M jusqu'à ce que PM soit égale à l'arc correspondant AD : la Courbe AMC , qui passe par tous ces points M , sera régulière , étant décrite suivant une loi uniforme. On ne (auroit pourtant la représenter par aucune équation algébrique , parce que prenant les Sinus versés A P pour les abscisses , on n'a aucune manière algébrique d'exprimer leur rapport aux arcs AU , ou aux ordonnées PM qui sont égales à ces arcs. Ces sortes de Courbes sont appelées transcendentes , mécaniques , ou irrationnelles ; pour les distinguer de celles qu'on peut représenter par des équations algébriques , & qu'à cause de cela on nomme Courbes algébriques , géométriques , ou rationnelles. C'est surtout pour les Courbes transcendentes qu'on a besoin du Calcul des infiniment petits , qui fournit des équations propres à exprimer la nature de ces Courbes. p. Entre)igitized by Google

The text on this page is estimated to be only 29.38% accurate

Planc. 1. 8 DELA NATURE DES LIGNES COURBES p. Entre ces deux genres de Courbes , les algébriques Cha*. i. & les tranfeendantes , on peut placer le genre des Courtes S* 9 exponentielles. C'est le nom qu'on donne aux Courbes dont la nature s'exprime par des équations , où il n'entre , à la vérité , aucune grandeur infinie ou infiniment petite , mais qu'on ne peut pourtant pas rapporter aux équations algébriques ordinaires , parce qu'elles renferment des termes qui ont des expofans variables. Une des plus fimples Courbes en ce genre eft la Logarithmique , représentée par l'équation $y=ba^x$. Sa nature confifte en ce que , les abfciffes étant prifes en progreflion arithmétique , les ordonnées font en progreflion géométrique. Si on défigne par l'unité la différence qui régné dans la progreflion des abfciffes , & par i : a la raifon qui régné dans la progreflion des ordonnées , on verra que fi l'ordonnée à l'origine eft b , les abfciffes $0, i, 2, 3, 4, 5, \&c.$ qui font en progreflion arithmétique , auront les ordonnées $b = ba^0, ba^1, ba^2, ba^3, ba^4, ba^5, \&c.$ en progreflion géométrique. Donc en général à l'abfciffe x répond l'ordonnée ba^x Ainfi , nommant cette ordonnée y , l'équation de la Logarithmique fera $yz=ba^x$ On peut rapporter a ce genre , ou plutôt à un genre intermédiaire entre les Courbes exponentielles & les algébriques , celles que Mr. Leibnitz nomme interfecendentes. Ce font celles dans l'équation defquelles on trouve quelques termes avec des expofans irrationnels : comme dans l'équation $y^2 + y = x$. io. Nôtre defsein n'est point de parler ici de toutes ces fortes de Courbes. Les algébriques nous offrent aflés de fingularités & de variétés. Elles font ou finies, ou

The text on this page is estimated to be only 27.77% accurate

ET DE LEURS EQUATIONS. Ck*f. I ou mixtes. Une Courbe est infime , quand elle a des branches qui vont à l'infini , comme les Courbes A, B, C, _ D, E, F. Une Courbe finie , quand , renfermée dans un espace borné, elle retourne sur elle-même ; soit qu'elle ne fasse qu'un simple tour , comme le Cercle , ou l'Ovale G , soit qu'elle se noue & renoue plusieurs fois , comme un Huit-de- chiffre , ou un Las -d'amour , &c. H , I, K, L, r

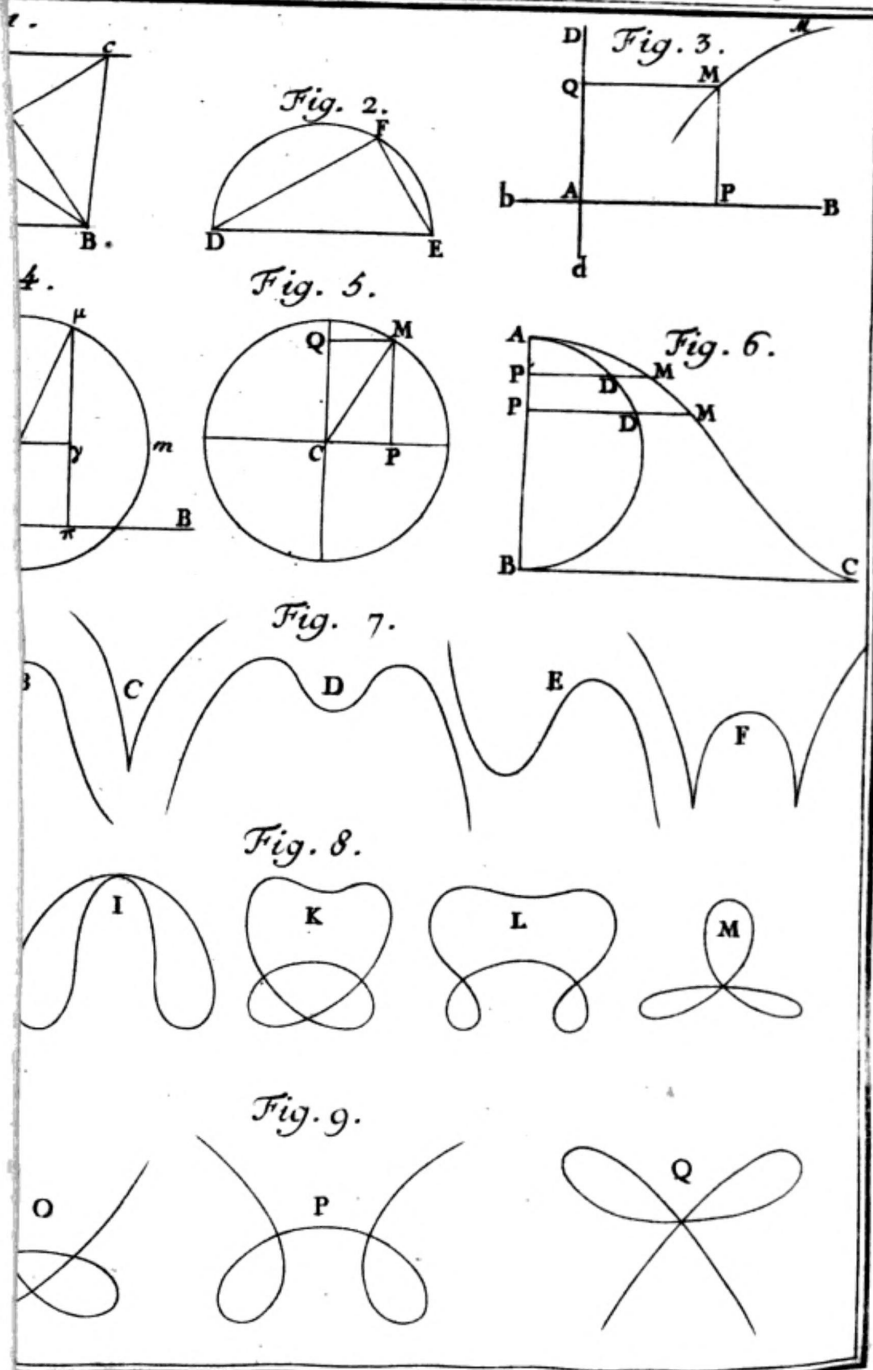
The text on this page is estimated to be only 25.77% accurate

io DELA NATURE DES LIGNES COURBES $\Pi a k c I$. de ces égalités. Ces valeurs , ou ces racines , expriment Cha^* . l les ordonnées qui répondent à chaque abscisse. Ainsi chaque abscisse porte à son extrémité une ou plusieurs ordonnées , suivant qu'il y a une ou plusieurs racines de l'égalité en laquelle le transforme l'équation de la Courbe , quand on substitue à a la grandeur de l'abscisse. La Ligne , passant par toutes les extrémités de ces ordonnées , aura autant de branches au[^] a de valeurs différentes dans l'équation. Et quand l'Algèbre peut donner ces valeurs , leur examen fait connoître si les branches auxquelles elles se rapportent sont finies ou infinies , quel est leur cours , & leur position ; en un mot , tout ce qu'elles ont de remarquable. Ainsi dans l'équation du Cercle , qui a été donnée au § 6 , $yy - 2ay + aa + bb - ibx + xx = rr$, ou $yy - 2ay + aa - rr - bb + ibx - xx$, Toit $(y - a)^2 - rr - bb + 2bx - xx$, y a deux racines ou valeurs différentes , savoir $tf - f - vXrr - bb - 2bx - xv$, & $* - VC^7$ — $bb - 4 - 2bx - xx$). C'est pourquoi chaque abscisse AP [x] a deux ordonnées [y] PM & P M. La Courbe a donc deux branches, qui sont les deux demi -circonférences, la supérieure m M m , & l'inférieure m Mm. La première passe par les sommets de toutes les ordonnées PM [y] égales à $\sqrt{4 - v/(rr - bb + 2bx - xx)}$, & la seconde par les extrémités de toutes les ordonnées PM [y] égales à $a - \sqrt{rr - bb + 2bx - xx}$). Mais dans cette autre équation indéterminée $xx + 6ax + XX + aa - 6ay = 0$ y n'a qu'une seule valeur ($ra + x + \frac{f}{*}$). Chaque abscisse de la Courbe , que cette équation représente, n'a donc qu'une (seule ordonnée. A proprement parler , la Courbe n'a qu'une seule branche ; mais cette branche est quelquefois comptée pour deux ; parce qu'elle s'étend à l'infini du côté positif & du côté Négatif.

ET DE LEURS EQUAT 10 NS. n C«Ar. L i z. Non-seulement
 l'équation d'une Courbe indique le Plan. le nombre de ses branches, elle
 marque encore leur position. Les valeurs positives de x marquent des
 abscisses positives, & les valeurs négatives de x désignent des abscisses
 négatives. De même les ordonnées positives sont indiquées par les valeurs
 positives de y , & les ordonnées négatives, par les valeurs négatives de y .
 L'usage, mais arbitraire & libre, est de prendre les abscisses positives à la
 droite, les négatives à la gauche; les ordonnées positives au dessus de l'Axe
 des abscisses, les négatives au dessous. De là les noms donnés aux quatre
 angles que font entr'eux les deux Axes. L'angle BAD se nomme V Angle
 des abscisses & des ordonnées positives, ou Y Angle des coordonnées
 positives, parce que tout point de la Courbe qui se trouve dans cet angle a
 son abscisse & son ordonnée positive. Par une raison semblable, BAd est le
 Angle des abscisses positives & des ordonnées négatives, DAb Y Angle des
 abscisses négatives & des ordonnées positives, & enfin dAb se nomme X
 Angle des abscisses & des ordonnées négatives, ou Y Angle des
 coordonnées négatives. Les deux angles opposés DAB , dAb s'appellent, d'un
 nom commun, les Angles des coordonnées de même figure, & les angles
 opposés BAd , bAD sont les Angles des coordonnées de différent j (signés.
 BAD , BAd sont les Angles des abscisses positives, DAb , dAb les Angles
 des abscisses négatives; BAD , DAb les Angles des ordonnées positives,
 BAd , bAD les Angles des ordonnées négatives, &c. Quand l'Analyse peut
 résoudre l'équation d'une Ligne; (ses racines font connoître la position des
 branches de cette Courbe, elles indiquent dans quel angle, ou dans quels
 angles, tombent ces branches. Lorsque, dans une racine, les x étant
 positives les y le sont aussi, la branche que représente cette racine est dans
 l'angle des coordonnées positives: mais si les x positives donnent des y né-
 gatives,

The text on this page is estimated to be only 28.41% accurate

12 DE LA NATURE DES LIGNES COURSES Pl. il gatives , la
 branche est dans l'angle des abscisses positives Cm^* , i. & des ordonnées
 négatives. Que si les x négatives rendent $\bullet^*$, 3^* les y positives , la branche
 tombe dans l'angle des abscisses négatives & des ordonnées positives : mais
 si aux x négatives répondent des y aussi négatives, la branche tombe dans
 l'angle des coordonnées négatives. Ainsi dans la Courbe que représente Péq
 : $xx + 6MX XX + Saa - 6^*y = 0$, ou $y = \frac{xx + 6MX XX + Saa}{6^*}$, l'équation fait
 voir qu'à l'Origine , où * est zéro , la valeur de $ttg. io. y$ est ga . $Aa = Im$ est
 donc la grandeur de la première ordonnée. Supposant ensuite x positive , on
 voit qu'à mesure que'elle augmente , les termes $-$ & x augmentent aussi,
 sans que le terme constant l a diminue ; ce qui prouve que XX' l'abscisse x
 croissant, l'ordonnée y $[= - + x + \{ a \}]$, qui est positive , croît aussi. Donc
 du côté des abscisses positives , la Courbe n'a qu'une branche ad, qui tombe
 toute entière dans l'angle des coordonnées positives , & qui , partant de
 l'extrémité a de la première ordonnée Aa , s'éloigne à l'infini & de l'Axe des
 abscisses & de l'Axe des ordonnées. Pour connaître le cours de cette Ligne
 du côté des abscisses négatives , on fera x négative , ce qui change l'éq. $y =$
 $\frac{xx + 6MX XX + Saa}{6^*}$ en $y = \frac{-xx + 6MX XX + Saa}{6^*}$. Où l'on voit $6a$ $6a XX$ que x étant moindre que
 $6a$, $-$ est moindre que x , de façon que le terme constant $\backslash a$ est moins
 augmenté par le XX terme positif $-$ que diminué par le terme négatif $-x$.
 L'ordonnée y va donc d'abord en décroissant , à mesure que Digitized by
 Google



The text on this page is estimated to be only 26.33% accurate

Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 25.83% accurate

ET DE LEURS EQUATIONS. 13 ckap- i. que x négative augmente, fi bien que y , qui e'toit à PO- Pu 11. S- 1* rigine J 4, diminue jufqu'à devenir zéro, quand x eft devenue a. Car alors y cft- a + \ a = o. Si donc on prend l'abfciffe négative AE égale à a , l'ordonnée de cette abfciffe lèra zéro , c'eft-à-dii c , que la Courbe aE paflera par le point E de l'Axe des abfciffes. L'abfciffe x continuant à croître du côté négatif , les ordonnées deviennent négatives, & reftent négatives jufqu'à -ce que x fctt devenue 5 4= Al. Alors l'ordonnée ci\ de nouveau égale à zéro [y — ~ — 5 4+1/* = °]. La Courbe, après s'être enfoncée au deflbus de l'Axe des abfciffes juf. qu'à un certain terme , remonte & coupe de nouveau cet Axe au point 1 , éloigné de ^Origine A de la diftance 5 a. L'abfciffe * continuant à crotte , toujours du coté négatif, l'ordonnée y redevient pofitive , 8c (è trouve égale à la première ordonnée Aa[|*] quand x vaut 6 a. Après • X V quoi x croiflânt toujours , le terme pofitif — l'emporte toujours lur le terme négatif — x , & l'ordorméc y va toujours en augmentant à mefure que l'abfciffe augmente, ce qui donne la branche infinie Im, qui s'éloigne à l'infini de Pun & de l'autre Axe. On (âifira parfaitement ce détail , & on verra (ènfiblement quel eft le cours de la Ligne , fi on fubftituc fucceflîX X veinent, dans Péq : y — ~^a + * + 1<*> différentes valeurs au lieu de x , comme 34, 24, o, — 4, — 24, — \$ 4, ■ — • 4*> — Sat — 6*9 — 74 , &t. & l'on trouvera qu'à ces aLlciffes répondent les ordonnées 5*4 , 3J4, 24, £4, o, — î 4, — \4 , — ',a, o, |4, 24 , érc. Ce calcul fait , onpourra décrire par points cette portion de la CourB s be Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 23.76% accurate

I* DE LA NATURE DES LIGNES COURBES ſu If. be qui s'étend depuis rabfciflc jufqu'à i'abfciflè — ?a, c AP c'eit-a-dire, qu'on pourra affigner onze points de la Cour- JYj, be , aflèz près les uns des autres , pour qu'il foit aifé de la décrire avec quelque exactitude en traçant d'une main hardie une Ligne courbe par ces onze points. Pour cet effet , ayant mené deux Droites AP , AQS qui fe croifent , ns. 10. à angles droits fi l'on veut , au point A cïïoifi pour l'Origine , on prendra fur l'Axe des abfciflès A P , du côté droit , trois parties AB , BC , CD égales à la Droite donnée a , pour avoir les trois abfciflès pofitives A B == a , AC ~ 2a & AD = \$* , & du côté gauche fept parties auflî égales à a , pour avoir les fept abfciflès négatives AE = — * , AF = — 2* , AG = — 3* , AH = — 4a , AI = — 5" > AL = — 6a , AM == — ya. Parlespoints D , C , B , E , F , G , H , I . L , M , on mènera des parallèles à AC^ , qui feront les ordonnées de ces abfciflès , & on leur donnera les longueurs convenables , en failànt Dd = \$ja , Cc = ^ay Bb = 2* , Aa = ?* , Ff = — \a , Gg = — jat Hh — — i* , Ll = :l a , Mm ~ 2a. Les points d , c , b , a , E , f , g , h , I , l , m , ainfi déterminés font tout autant de points de la Courbe que repréfente XX l'éq i - y = — +x-{- \a ou xx + 6ax + \$aa — 6ay^c : & comme ils font aflèz près les uns des autres , fi la Droite a ci\ fort petite , on le repréfentera aflèz bien la forme ffc h. de cette Courbe, en traçant une Ligne par tous ces points. Autre Exemple. Si on examine de même la Courbe repréfentée par Péq : xxy + 2axy — axx aay — o , ou axx x y = — ; ; — =*(— ; —) , on verra que * = o xx + 2ax + aa Ka + xJ 9 n donne auflî y = o , ce qui montre que la Courbe paflè par l'Origine A. Prenant enfuke fucceffivement diverfès abfcifles, toutes pofitives & toujours plus grandes, c'eft-adire x augmentant toûjours , le numérateur & le dénominateur Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 26.49% accurate

ET DE LEURS EQUATIONS. ij i?Yj." natttir de la fra&ion -
augmentent auffi ; mais le nu- Pl" !Î mérateur augmente plus à proportion
que le dénominateur. X X Ainfî la fra&ion — ■ — & la valeur a(— ■ — V
de l'ordona-\-x ^a+x' née y vont en croiflant , de forte que la branche A B ,
qui eft du côté des ablciflès pofitives , eft toute entière au def (ûs de la
Ligne des ablciflès , & s'en éloigne de plus en plus. Elle ne s'en éloigne
pourtant pas à l'infini , mais feulement d'une diftance égale à la Droite
donnée a. Car quand x ferott infinie , elle feroit cenfée égale à a + x , & X x
y qui eft toujours *(33—)* feroit égale à)*=*. Du côté des ablciiTes
négatives , le cours de cette Courbe eft plus fingulier. Pour le reconnoître ,
on fera x négative dans l'éq : xxy -J- 2axy — axx + aay =0 de la Courbe, ce
qui la transforme en xxy — zaxy — axx + aay =0, qui (è réduit ày=a(— —
)■ ou*(— —)*, A X Xm — a (uivant que x eft plus grande ou plus petite
qu'*. Voïons d'abord quelles ordonnées répondent aux abfciflès plus petites
qu'4. Il eft clair que plus x augmente , plus le numérateur de la fraction -
augmente, & plus le dénominateur diminué. L'augmentation de l'un & la
diminution de l'autre concourent à faire augmenter la fradion. Ainfr
l'ordonnée y [= =<-^=rx)*] augmente avec l'abfciflè , mais fi rapidement
qu'elle devient infinie quand l'ablciflc x [AC] eft devenue égale à a. Car
alors y [CD] eft = *()»-. Or une grandeur finie a* divifée a — a o o 0 par
le zéro repréfcmel l'infini , parce que le fini contient une Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 27.80% accurate

16 DE LA NATURE DES LIGNES COURBES ru il. une infinité de fois le zéro ou plutôt l'infiniment petit. Cha*. i. Après cela l'abscisse x étant plus grande qu' a , l'ordonnée y est d'abord excessivement grande, parce que le dénominateur $x - a$ est excessivement petit. Mais à mesure que x augmente, le dénominateur augmente & même dans une plus grande proportion que le numérateur, de sorte que la fraction diminue & avec elle l'ordonnée y . Cependant cette diminution a (es bornes : car quand l'abscisse est infinie, le dénominateur $x - a$ est censé égal au numérateur x , puisqu'il n'en diffère que de la grandeur finie a qui n'est rien auprès de l'infini x . Alors donc y est Cette branche EF de la Courbe, qui répond aux abscisses négatives plus grandes qu' a , vient donc de l'infini en s'approchant de l'Axe des abscisses : mais elle n'en approche point plus que de la distance a . Et tout le cours de la Ligne est à peu près tel que le représente BADE F dans la Fig. 1 r, qui a été tracée par points, suivant le calcul des ordonnées, dont voici le résultat. $a = 100$, 34 , 24 , 4 , 0 , — a , — J^* , — y — 4 . — I a , — 24 , -34 , — inf. $y = 4$, 100^* , pt , $\{^*$, o , $£$ 4 , 4 , $\$^*$, mf , 94 , 44 , 54 , 4 . 1 4. De ces deux Exemples, quoique particuliers, on peut tirer deux Conclusions, qu'on verra sans peine être générales. La première, c'est qu'une Ligne algébrique passe par l'Origine, quand son équation est telle que x étant supposée égale à zéro, $y = 0$ en est une des racines ; ou, si l'on aime mieux, quand y étant supposée égale à zéro, $x = 0$ en est une des racines. Ainsi, dans le (second Exemple [§ préc.], si l'on fait $x = 0$, l'éq : $xy^2 + 2axy - axx = 0$ se réduit à Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 27.43% accurate

ET DE LEURS EQUATIONS. Vj Chap. L aay rr o , dont ;~oeft la
 feule racine. Donc à l'abfciflê Pl. n. / . M. jéro y c'eft-à-dire à l'Origine ,
 l'ordonnée eft zéro. La première ordonnée eft donc fans longueur , elle fe
 réduit à un point , & la Courbe , qui parte crtêntiellement par le (bmmet de
 toute ordonnée, paflê par l'Origine. Or $x = 0$ donne $y = 0$, toutes les fois que
 dans 1 équation d'une Ligue il n'y a aucun terme tout confiant, aucun terme
 qui ne renferme ni x ni y . Car , dans cette équation là , fi l'on fait $x^{\wedge}=0$, tous
 les termes où il y a quelque x s'évanouirtènt , & tous les termes qui reftent
 font multipliés par y , puifqu'il n'y avoit aucun terme qui n'eut ou x ou y .
 Ces termes reftans s'évanouiroient donc par la fuppoftion de $^{\wedge} = 0$. Il font
 donc entr'eux une équation dont $y = 0$ cil une racine. Ainfi à l'abfcit le $x=0$
 répond au moins une ordonnée $y=0$. Donc la Ligne, dans l'équation de
 laquelle il n'y a aucun terme .tout confiant , parte par l'Origine. 1 5. La
 féconde Conclusion , e'eft qu'on trouvera en quels points une Ligne
 algébrique coupe l'Axe des ordonnées, en faifànt $x = 0$ dans l'équation de
 cette Ligne. Les valeurs de y dans l'équation transformée détermineront les
 points où la Ligne rencontre l'Axe des ordonnées. Ainfi dans le premier
 Exemple du §. préc. en faifànt SOC $x = 0$ dans l'éq : $y^r = \text{---} + x + 1 a$, on
 la réduit $ky = \{ a$. C'eft pourquoi la Courbe ne parte pas par l'Origine A ,
 parce que $x = 0$ ne donne pas $^{\wedge}=0$: mais elle pafTe *<>• par le point a de
 la Ligne des ordonnées , qui eft à la diftance $Aa = \text{£}^*$ de l'Origine, parce que
 $x = 0$ donne De même , on aura les points où une Ligne algébrique coupe
 l'Axe des, abfcirtès , en cherchant les valeurs de $Jn/rod.$ à PAnaiyfe des
 Lignes Courbes, C x dans Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 25.17% accurate

18 D E LA NATURE D ES LIGNES COURBES Pt.ii. x dans
l'équation transformée par la substitution de zéro Cha». l au lieu de y. 5- »J*
MM Dans la même équation, $y^2 = -fx + \frac{1}{2}x^2$ ou $xx - fx - \frac{1}{2}hsaa = 0$ $6 ay = 0 > ^$
l'on finit JV = 0 > on a "ra $xx - 6 *x + 5 a = 0$, qui a deux racines $x=r - a$,
& $xrr = 5/2$. Ce qui montre que la Courbe rencontre l'Axe des abscisses en
deux points E, l ; savoir, aux extrémités des abscisses AE [- a] & Al [- 5 a J. 16. C'est donc les abscisses & les ordonnées, qui, suivant qu'elles
sont positives ou négatives, déterminent la position des branches d'une
Ligne algébrique, & qui font connoître dans lequel des quatre angles des
coordonnées elles se trouvent. Ces ordonnées méritent encore plus d'être
considérées quand l'équation les donne imaginaires *, quand elle les
détermine à être possibles* Alors la Courbe manque dans toute
l'étendue où les ordonnées sont imaginaires. Elle manque tout-à-fait, ou,
pour mieux dire, l'équation ne représente aucune Courbe, lorsque les racines
sont toujours imaginaires. Telle est l'équation $yy + xx + rr = 0$, dont les
racines $y = \sqrt{-(rr - xx)}$ $r=0$, & $y + \sqrt{-(rr - xx)} = 0$ sont essentiellement
imaginaires, quelque valeur qu'on donne à x. Mais il arrive plus souvent
que la Courbe ne manque qu'en partie. Cela a lieu quand les racines qui
expriment les ordonnées sont réelles dans une certaine étendue, &
imaginaires dans une autre étendue. Soit que la Courbe renfermée, comme
le Cercle, dans un certain espace ne s'étende point au-delà, ni d'un côté ni
de l'autre. Soit qu'allant à l'infini d'un côté elle ne passe point certaines
bornes * Hijl. de FAcdd. 17251. pag. 41. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 24.42% accurate

ET DE LEURS EQUATIONS. 19 CH^r.L bornes de l'autre. Soit qu'étendue à l'infini de part & Pc^{*} *- t6' d'autre elle laide dans le milieu un ou pluficurs efpaces où les ordonnées font imaginaires. Alors il v a dans ce milieu des vuides qui féparent les parties de la Courbe. Soit propofée l'équation $y^* - \phi y - x^* + ioox^* = 0$, qui, réfoluë par la méthode ordinaire pour les équations du fécond degré, fe trouve avoir ces quatre racines $y = 4 \cdot \sqrt{(48 - \sqrt{VC^*4 - IOOX^{*2} \cdot 4})} \cdot y_{-} + \sqrt{(48 - y/(x + iocxx + 2304))} \cdot y - \sqrt{(48 + \sqrt{VC X4 IOCXX + 2J04})} \cdot \sqrt{(\sqrt{V JOOXX + 2J04})}$ Où l'on voit 1^{*}. Qu'en général à chaque abfcifie x répondent quatre ordonnées y, hors les cas où quelques[^] unes, ou bien les quatre, deviennent imaginaires. 20. Que les deux premières racines, étant pofitives, indiquent des branches qui font au deflus de la Ligne des abfciflès, au lieu que les branches représentées par les deu^{*} dernières racines, qui font négatives, tombent au deflus de la Ligne des abfciflès (§. 13). j^{*}. Que la première & troifième racine étant précifément les mêmes, fi ce n'eft que la première eft pofitive & la troifième négative; la branche que représente la première eft femblable à celle que défigne la troifième, mais dans une pofition renverfée, l'une étant au deflus & l'autre au deflus de l'Axe des abfciflès. Ce qui ayant aufli lieu pour la fièconde & quatrième racine, il fuit que l'Axe des abfciflès partage la Courbe en deux parties qui fe reflêmbent; & même, fi les ordonnées font perpendiculaires aux abfciflès, en deux parties exactement égales

The text on this page is estimated to be only 26.12% accurate

20 DE LA NATURE DES LIGNES COURBES pt.il. 40. Que dans ces quatre racines, comme il n'y a que Chap. r. des puissances paires de x , savoir, x^1 & x^4 , qui sont inégalement puissances de x & de $-x$; chaque abscisse négative a les mêmes ordonnées que l'abscisse positive égale : de sorte que le côté gauche de la Courbe est tout pareil à son côté droit ; ou, ce qui est la même chose, que l'Axe des ordonnées partage, comme celui des abscisses, la Courbe en deux parties semblables. Il faudra donc d'examiner les ordonnées positives qui répondent aux abscisses positives, de voir ce que donne x positive dans les deux premières racines de l'équation. Car quand on aura les branches de la Courbe dans l'angle des coordonnées positives, on aura le cours entier de cette Ligne, puisqu'il est exactement le même dans les trois autres angles. Voyons donc d'abord quelles branches fournit la première racine $y = \sqrt{(48 - h \cdot J(4 - 100x^2 + 2504))}$. Cette racine sera réelle, tant qu'on donnera à x une valeur qui rende $x^4 - 100x^2 + 2504$ positive. Car cette grandeur étant positive, (à racine carrée précédée du signe - est réelle & positive, laquelle avec 48 fait une somme positive, dont la racine carrée $\sqrt{(48 + \sqrt{(x^4 - 100x^2 + 2504)})}$ est réelle. Si au contraire on donne à x une grandeur qui rende $x^4 - 100x^2 + 2504$ négative, la racine carrée de cette grandeur négative est imaginaire, & j , dont l'expression $\sqrt{(48 + \sqrt{(x^4 - 100x^2 + 2504)})}$ renferme cette racine carrée, est imaginaire. L'existence ou non-existence des branches représentées par cette racine, dépend donc de ce que la grandeur $x^4 - 100x^2 + 2504$ est positive ou négative. Pour déterminer ce qu'elle est, on cherchera les racines $xx - 36 = 0$ & $xx - 64 = 0$ de l'éq: $x^4 - 100x^2 + 2504 = 0$, afin de réduire cette grandeur en ses deux facteurs $(xx - 36) \times (xx - 64)$. On réduira de même $xx - 36$ en ses deux facteurs

ET DE LEURS EQUATIONS. ai Cha». i. frêteurs (x — 6) x (x 4- 6) & xx — 64 en (es deux fâ- Pu Cl, S- »«• &eurs (* — 8) x (x 4- 8). Ainfi la grandeur x4 — 1 oexx 4-2304 eft#réduite en lès quatre fâêteurs (*4-0 x(* — 6) x (x4- 8) x (x — 8). Elle fera donc pofuive , fi ces quatre fadeurs font pofitifs , ou s'il y en a deux feulement : mais elle fera négative , fi un fèul de fes facteurs , ou trois , font pofitifs. Comme on fuppolê x pofitive , les deux facteurs x+6 & x+8 font ellèntiellement pofitifs. Donc x4 — ioxx 4- 2 g 04 eft une grandeur pofitive, quand x — 6 & x — 8 font tous deux pofitifs ou tous deux négatifs : elle elt négative , quand x tombant entre 6 & 8 rend x — 6 pofitif & x — 8 négatif La racine y = «4- y/ (48 4- s/ (*4 — ioxx 4-2304)) donne donc deux branches féparées par l'intervalle qui tombe entre les abfcifies x = 6 & x = 8. Examinons ces deux branches Tune après l'autre. D'abord , fi x= o , on aura y = y7 (48 4- y7 2 \$04) = y7 (48 4- 48) = √ 96. C'eft la grandeur de la première ordonnée de cette branche. Enfuite , x prenant quelque grandeur, — ioxx retrace plus de 2304 que x4 ne lui ajoute : enforte que l'ordonnée va en décroiltant à mefure que l'abfcilTe augmente , jufqu'à-ce que x= 6* failànt x4 — ioxx 4- 2 \$ 04 égal à zéro réduife^ à ^48. La première branche C B va donc en s'a prochant de la Fig. 1* Ligne des abiciflès , dès le point C extrémité de la première ordonnée AC = v/ 96 jufqu'au point B extrémité de l'ordonnée PB == y7 48 » qui répond à l'abfcifle AP = 6. L'autre branche, que défigne la même racine y = ^ (4* ^v^Cx4 — ioxx 4- 2304)) commence à iablCIFlè * = 8 ■= A (\ Cette valeur de x rendant x4 — ioxx 4- 2^04 égal à zéro , donne y — QD =r y7 48. Dès lors x croiflant augmente la grandeur x4 — 1 00 xx 4- 2 3 04 & par conlèquent l'ordonnée y [4- vX 4\$ + VC *4 — » ©oxx4- 2 % °4))] C 3 Cette Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 24.89% accurate

I 22 DE LA NATURE DES LIGNES COURBES Pl. il. Cette racine marque donc une branche D E , qui part du Cmaf. i. point D & va en ^'éloignant à l'infini de l'Axe des abfcif- *■ »*"• lès & de celui des ordonnées. Voyons à prélént quelles branches donne la (ècondc racine $\wedge = \wedge(48 - y/ (** - ioox*-h 2304))$). On voit d'abord que cette racine eft imaginaire , comme la précédente, tant que 'oexx-f- 2504) eft imaginaire ; c'eft-à-dire , dans tout l'intervalle compris entre les abfcifles $x = 6$ & $x=8$, où la Courbe n'a ni ordonnée ni branche. Outre cela , cette féconde racine eft imaginaire quand $— 100 xx + 2 504$) furpaflè 48 , parce qu'alors $48 — v7 O4 — " ioovx-h 2304$) eft négative , & fa racine quarrée , qui eft la valeur de y , imaginaire.» Or $4/(x^4 — ioovx + 2304)$ furpaflè 48 , quand fon quarré $x^4 — 100XX + 2J04$ furpaflè le quarré de 48 , qui eft 2304, quand $x^* — ioovx > 0$, ou $x^* > roovx$, quand $ecx > 1 00$, ou $x > 1 0$. La racine $\wedge = \wedge(48 — (x^* — ioovx^4 2304))$ eft donc imaginaire , i°. quand x tombe entre 6 & 8 , & 2°. quand x furpaflè 10. Elle eft au contraire réelle, i°. quand x eft moindre que 6 , & 2*. quand x tombe entre 8 & 10. Elle indique donc , comme la précédente, deux branches , mais dans une poficion bien différente. Confidérons-les l'une après l'autre. Si on fait $x = 0$, on aura $y = v/(48 — y/ 2 504)$ ' $\wedge(48 — 4S) = 0$. La première branche paflè donc par l'Origine. Emuitc x croiflânt , $x^4 — 100XX + 23C4$ décroît , & par conféquent $y/ (48 — \backslash J (x^4 — \bullet 1 00 x x -f2504))$, ou 7, augmente, jufqu'à ce que x devenue égale à $<^* = AP$, donne $x^4 — ioovx + 2304 — 0$, & $y \sim y/ 48 = PB$. Cette racine exprime donc la branche A B , qui , partant de l'Origine A , va fe joindre à l'extrémité B de la première branche CB indiquée par l'autre racine. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 21.43% accurate

ET DE LEURS EQUATIONS. 23 Cha* 1. On a déjà dit que toutes les abfciiTcs entre A P = 6", Pi- n. J»«ltf- & AQ.— 8 n'ont que des ordonnées imaginaires. Mais $x=A\sqrt[4]{8}$ rend $x^4 - 100xx^4 - 2^4 C^4$ égal à zéro, & donne $y/(48 - 0) = V 48 = QD$. En suite se augmentant, — $100xx^4 - 2^4 C^4$ augmente, & $\sqrt[4]{(48 - V(x^4 - 100xx^4 - 2^4 C^4))}$ diminue, jusqu'à-ce que $x = 10$ rende $V(x^4 - 100xx^4 - 2^4 C^4)$ égale à $y^7 2034 = 48$ & $y^4 - (48 - 48) = 0$. La Courbe passe par l'extrémité de l'abscisse $x = 10 = AF$. Donc la (seconde) branche qu'indique la racine $y = \sqrt[4]{48}$ —

The text on this page is estimated to be only 21.54% accurate

sa DE LA NATURE DES LIGNES COURBES Cw.1 IL f. itf. Soit
 $x = j$ o, la l'.y fera a $^{(484-^{2304})} \sim \langle \rangle .y9?-,6c$ la a*. $^{\wedge} = ^{\wedge}(48-^{2304}) — o = \gg$
 $\sqrt{C48-^{*}-^{2205}} = 9-744 + \bullet \bullet vY4Wmojj — 1.0214, = y'tfS-r-^{\wedge} \langle 920 \rangle$
 $= 9.582 + - \bullet \bullet . Vr(4WI9 \gg 3!)aa == p \bullet V(48-v/7^{\wedge}) = 4-yioX = 10. \dots v/r48-h\sqrt{2}$
 $304j = 9798 4- \dots ^{\wedge}(48-^{2304}) = 0 = ii. \dots ^{\wedge}(48-W4845) = io.84j4- \dots$
 $vWV484f) = iW = ia. \dots 484- v? \% 0 + \dots tf \& M \& sm \pounds 2 \hat{U} \pounds . \& c \& \pounds . xj.$ On
peut remarquer dans cette Courbe , & la même chose a lieu dans toute autre
qui a des ordonnées imaginaires , qu'une première ou dernière ordonnée
réelle, celle qui fort de limite aux ordonnées réelles & aux imaginaires , est
proprement une double ordonnée , ou , si l'on veut , deux ordonnées égales
réunies & confondues en une seule. r«- !*• Telles sont les ordonnées PB &
QJ) qui répondent aux abscisses AP=6 & AQ,= 8 , & aux sommets B , D
desquelles le terminent les branches CB , AB & ED , FD. Si l'on fait $x = 6$,
ou $x \sim 8$, la grandeur radicale $V (x^* rr-i 00x^4-2304)$ devient zéro, & les
deux racines $4-^{\wedge}(48 + v/(^*4 — 100xx4- 2304))$ & $-+ -^{\wedge}(48 — \sqrt{(^*4 — 100x^*$
 $+ 2304))$ se réduisent l'une & l'autre à $V48$, & deviennent égales. Donc , au
lieu qu'en général , dans cette Courbe , chaque abscisse a deux ordonnées
positives , les abscisses AP = 6 & AQ= 8 n'ont qu'une seule ordonnée
positive PB , QD , ou , si Ton veut , elles en ont deux , mais égales &
rSunits. Plus l'abscisse A se rapproche de de_ venir égale à A P , plus se
s'approche de P , plus aussi les sommets S & O des ordonnées itf , tt\$
s'approchent l'un de l'autre Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 22.16% accurate

ET DE LEURS EQUATIONS. 2\$ C«a». I. dePautre, jufqu'à-ce que Att devenant AP , le point w Pc.il >• *7- tombant iûr P , les Ibmmcts /3 & £ tombent l'un fur l'autre & tous deux enfemble fur B. Telles font aufli les ordonnées que repréfentent les racines + $^{(48 — — ioxx + 2304)}$ & — $^{(48 — 1/(** — 1 oxx -+- 2 1 04))}$, lorfqu'on fait $x = z 1 o = A F$. Cette fuppoſition rend ces deux racines égales à zéro , & par conféquent égales entr'elles. Ici donc , deux ordonnées, une poſitive une négative, deviennent égales & fè réunitent en une feule ordonnée égale à zéro. Et cette ordonnée , ou plutôt ce point F , elt une limite qui fépare les ordonnées réelles des imaginaires , une borne où viennent Ce terminer les deux branches D F , d F. 1 8. Ceci a généralement lieu dans toutes les Lignes algébriques , qui ont des ordonnées imaginaires , & luit néceſſairement de ce que l'Algèbre enſeigne fur les racines imaginaires , qu'elles font toujours en nombre pair dans une équation , & qu'elles vont , pour ainſi dire , deux à deux en forte qu'ayant été réelles jufqu'à un certain point, fi elles deviennent imaginaires au-delà, elles font égales en ce point , foit qu'elles y ayent une grandeur finie, foit qu'elles y deviennent infinies , foit qu'elles s'anéantiffent & fe réduiffent à zéro. Car une racine ne paſſe du réel à l'imaginaire , * que parce que dans fon expreſſion il entre, fous un ſigne radical d'un expoſant pair, quelque grandeur, qui de poſitive devient négative: ce qui ne ſe peut faire fans qu'elle paſſe par le zéro. Mais l'équation aura toujours une autre racine exprimée de la même manière que la précédente, ſcavoir nVft que la grandeur radicale a un ſigne contraire. Dont la raifon elt que htrod. À PAnalyſe des \JgnctCo*rbts. D cha* Ufage de î Andyfe

The text on this page is estimated to be only 20.41% accurate

i6 DE LA NATURE DES LIGNES COURBES P*. VL chaque racine d'un expofant impair eft également pofitive Ch. IL & négative , & par conféquent double. Lors donc que l8> cette grandeur radicale paflê par le zéro ; les expreffions de ces deux racines ne diffèrent plus l'une de l'autre , les ordonnées qu'elles repréfentent (ont égales. $ab + a \sqrt{xx - aa}$, Si, par ex. $y = H$ cft la racine $r \sqrt{2MX - XX}$ d'une équation indéterminée ; cette équation aura auffi ces $ab + a \sqrt{xx - aa}$ — trois autres racines , $y = j - r - \sqrt{r}$, $y = 9y^{24} \sqrt{AX} \sqrt{ab - a \sqrt{xx - aa}}$, $y = \frac{ay}{(xx - aa)} - \sqrt{r}$, « $y = z \sqrt{r}$. Car $\sqrt{iax - xx} y = \sqrt{iax - aa}$ fi l'on veut débaraffier de lignes radicaux l'équation $y =$ on aura d'abord $\sqrt{iax - xx}^2 = 2ax - xx$) $9s^* N r = ab a \sqrt{xx - aa}$, & quarrant $yy (2ax - xx) = a^2 b^2 + 200b y / \sqrt{xx - aa} + (xx - m^2)$; enfuite tranfpofant $yy(2ax - xx) - aabb - aa(xx - aa) = 2aaby / (xx - aa)$, & quarrant derechef $(jy (2ax - aa -) xx - aa))x = 4.a^2 b^2 (xx - aa)$. Or cette équation , ainfi dégagée de l'irrationalité > a les quatre racines indiquées ci - dedus. Car , fi l'on en tire la racine quarrée, on aura également $yy \sqrt{iax - xx} - aabb - aa \sqrt{xx - aa} = + 2aab y / (xx - aa)$, & $yy(2ax - xx) - aabb - aa \sqrt{xx - aa} = - iaab \sqrt{xx - aa}$, parce que la racine quarrée de $xx - aa$ z également le figne + & le figoc — . Ces deux équations étant mifes (bus cette forme $y y = aabb + 2aaby / (xx - aa) + 4. aa (xx - aa) (2ax - xx) - aabb - 2aaby / (xx - aa) + aa(xx - aa) 2ax - xx$) tire la racine quarrée , la première donne y

The text on this page is estimated to be only 17.30% accurate

1 ET DE LEURS EQUATIONS. $a^7 \cdot t^{WO} \cdot f^j e, 4/ > + 4y/ (.rx$
44) Pl. H. $i r j j - s^{(xsc - 44)}$ la leconde donne $y = -$, & $y = y \setminus^{(24X$
 $X^*) y ah - ay/(xx - aa), , . - v/^x - xx) > Parcc q \gg e$ la racine

The text on this page is estimated to be only 24.65% accurate

a8 D E LA NATURE DES LIGNES COURBES Pull, d'une Ligne algébrique est continu % Car du reste une Courbe peut avoir des parties détachées , qui paroissent 5", iU jettées çà & là : ce qui n'empêche pas qu'on ne la regarde comme une seule Courbe , parce que (es parties séparées conservent une continuité secrète par le lien de l'équation. Mais ceci demande un éclaircissement. . 20. Une seule. équation peut représenter l'assemblage ou le système de plusieurs Lignes tracées sur un plan. C'est lorsque cette équation est le produit de plusieurs équations rationnelles , qui représentent diverses Lignes rapportées à une même Origine & aux mêmes Axes. Car si l'on dispose plusieurs équations de manière que leur second membre soit le zéro , & qu'on les multiplie les unes par les autres ; leur produit est une équation qui a pour les racines toutes les racines des équations dont elle est formée. Donc, puisque chaque racine d'une équation indéterminée exprime une branche de la Ligne que cette équation représente L§. 11] , le produit de plusieurs équations désigne la Courbe qui a toutes les branches des Lignes particulières dont les équations ont concouru à former ce produit. Elle représente donc le système de toutes ces Lignes. g. t\$. Par ex* f> deux Cercles égaux (ont tracés sur un même plan, & qu'on prenne pour l'Origine le centre A de l'un, les coordonnées éant à angles droits , on aura , pour représenter les deux circonférences r M R M, q m Qm , l'équation composée de celles des Ç§. 6 & 7 , (yy iay -f aa+bb 2^x+xx — rf) x (jyy +xx — rr) = o * Stilling, Line* terui ordinis Newtonianae àc. 8°. 0x«w. 1717. ou Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 21.37% accurate

ET DE LEURS EQUATIONS. $\pm 9 Om^* I.$ ou $y^* i/t/ + 2XJ/ 2ax*y$
 $-f- x^4 = 0$ K. IL $*' 10^* 2bxf + 2 2*x \gg + arf \bullet -f- fciflè$ AP a quatre ordonnées
 PM, Pm, Paf, Pw, fi ce n'est lorsqu'elles deviennent imaginaires. La racine y
 $— a — V(rr — bb+ibx — xx) = 0$ représente le demi - cercle rMR : La
 racine $y — a + \sqrt{(rr — bb - \{- ib-x — xx\})} = 0$ marque le demi -cercle RA/r ;
 La racine $y — \sqrt{(rr — xx)} = 0$ désigne le demi-cercle qmO: fct la racine $y + \sqrt{Crr — xx} = 0$
 exprime le demi -cercle Qm q. L'équation qui a ces quatre
 racines représente donc les deux circonférences rMR Af, qmQw. 2i. Par
 conséquent, lorsqu'une équation peut être divisée en d'autres équations
 rationnelles , la Ligne qu'elle représente est le système de différentes Lignes.
 Mais lorsqu'une équation est irréductible , lorsqu'elle n'a point de racines
 rationnelles , la Ligne qu'elle exprime doit être censée une seule Ligne, encore
 qu'elle ait des branches détachées les unes des autres. L'équation $\sqrt{rr — xx} = 0$
 exprime le lieu de O 1 mi-cercle Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 22.78% accurate

/ * 1 30 DE LA NATURE DES LIGNES COURSES Pun. mi-cercle qmQ^Mais fi Ton vcot ôter l'irrationalité [en Ch*»I. faifant^ — >/ {rr — xx), & quarrant Pun & l'autre mem- 5' IU bre] , on aura yy + xx — r r = o , qui , avec la racine y — V Crr — xx)r=:o, renferme encore la racine y + y/ (rr — xx) == o , qui exprime le demi«-cercle q m Q. On ne fàuroit donc repréfenter le demi-cercle q m Q par une équation rationelle , fans qu'elle exprime en même tems le demi-cercle qwQ. Ces deux demi-cercles appartiennent donc à une même Courbe. Et Ton voit généralement qu'on ne peut donner une équation rationelle d'une Courbe mêlée , ou compofée de portions de différentes L'gnes : parce que cette équation» rationelle exprimera auffi les autres portions de ces Lignes , qu'on ne voudroit pas exprimer. Ainfi l'équation de l'Ovale compofée de quatre arcs de Cercle, repréfente, fi elle eft rationnelle , non ièulement ces quatre arcs , mais les quatre circonférences entières. Il faut feulement remarquer que les équations , dans lesquelles une autre peut (è décompolèr , lbnt cenfées rationnelles , quand l'irrationalité n'afiècle point les variables x & y , mais feulement leurs coefficients ou les confiantes. Ainfi Péq : y* — zbyy — abxx -f-64— o le pouvant divifèr en ces deux - ci , yy — x %/ab — bb — o & y y + x y/ab — bb = o , elle ne fera pas cenfée reprélènter une (èule Courbe , mais l'aflèmblage de deux Courbes , dont la nature s'exprime par les deux équations qui compolent la Propofée. 22. Avant de finir ce Chapitre , ajoutons un mot fur la manière de décrire une Courbe par points , qui a été indiquée aux §§. 1; & 16. Dans cette recherche de plufieurs points d'une Ligne algébrique dont l'équation eft donnée , nous avons pris des fuites d'abfciffes en progreflion arithmétique -, & c'eft (ans doute ce qu'il y a de mieux, Digitized by VjOOQIC

The text on this page is estimated to be only 22.58% accurate

ET DE LEURS EQUATIONS. 31 C«*r. l mieux , . quand on n'a pas des raifons particulières pour Pl. IL *** faire fon calcul autrement. Il n*y avott point de pareilles raifons dans les Exemples du §. 1 \$. Mais dans celui du §.1 6 , ce choix des abfchTes a jette dans des extradions de racines quarrées , qui ont obligé à fe contenter d'avoir les valeurs des ordonnées fimplement par approximation. On peut fouvent éviter cet embarras , en cherchant uniquement les ab(eifles & les ordonnées qui font rationnelles * , & en employant dans cette vûë les méthodes de Diophante, & autres (èmbJables , qui fervent à éviter les nombres irra- tionels. Un Exemple aflTés fimple fera comprendre cet ufage. Soit propofée Téq : $x'y^* - iox'j» + 60 = 0$, dont les racines font $y— &) = . y X ' X$ Si on fuppofc fucceffivement $x = o , 1 , 2 , 3,4 , &c.$ il arrivera fort fouvent que $V(25)$, & par conféquent y fera une grandeur irrationnelle ; ce qui engageroit à des calculs pénibles & ne permettroit pas une entière exactitude. Mais fi au lieu de prendre les x en progreflîon arithmétique , on choillt celles qui donnent des y rationnelles , le calcul fera plus facile , & néanmoins auflî propre à donner une idée de la Courbe. . D'abord , il eft clair que Fableflè x e'tant pofitive & $60 5 = ^ V (25 — \sim)$ petite, l'ordonnée $y [= _$ fera imagû. naître: parce que x étant petite, ^eft grande, & $25—^$ négative. * * » • * Hifi. de ÎA**à. 1712. pag. yr.)igitized by Google

The text on this page is estimated to be only 19.29% accurate

J2 DE LA NATURE DES LIGNES COURBES ' 11 négative.

Donc $V(25 - S)$, & par conséquent $\sqrt{25 - S}$ est $\sqrt{-1}$ imaginaire, tant que 25 est plus petit que S , tant que $25 < S$, ou que $x < \sqrt{S} = 5$. Mais au(Ti tôt que x est égale à 5), y commence à être réelle, & comme en ce 60 point 25 — $\sqrt{25 - S}$ est zéro, à Pabfcifle 2 = 2 * repondent deux ordonnées positives égales chacune à $\sqrt{25 - S}$. 12 12 Pour avoir, après cela, une fuite d'abfcifles & d'ordonnées rationnelles, on fera fucceflivement $\sqrt{25 - S}$ égal à $i, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots$ &c. & on trouvera que $V(25 - y^2)$ donne $x = 2\sqrt{y^2 - 25}$, !a Ie. $y = 2\sqrt{25 - x^2}$, Se la $2 < y = 1, 2, \dots = 2f, \dots = 2\sqrt{25 - x^2} = 1, 2, \dots = 2i, \dots = 2\sqrt{25 - x^2} = 4, \dots = 6, \dots = 8, \dots$ & Si Ton fait enfuite $\sqrt{25 - S} = 5$, on trouvera $X = 0$, ce qui donne x infinie, & $y = 0$ qui est le zéro, ou l'infiniment petit. Continuant à fuppofer $y/\sqrt{25 - S}$ égale à 6, 7, 8, &c. on aura x négative $\sqrt{25 - 7^2} = 6, \sqrt{25 - 8^2} = 3, \dots$ Sh ■ ie. $\sqrt{25 - 7^2} = 6, \sqrt{25 - 8^2} = 3, \dots$ 2i . • — 4» • — 4 . y = 8 . — in . . li5 = 9 • — ii . • = ?Tİ = io . = — . . = — 184 . On Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 20.78% accurate

J?T DS LÉVKS EQUATIONS. 3; Cmap. i. On trouvera peut-être trop de vuide entre l'abfciflè Pi- IU 6\ & l'abfciflè infinie pofitive, qui réTultent des fuppoſitions, $^{(25 - r)} = 4$ & $\sqrt[7]{(2S - \sim)} = S$ comme auſſi entre l'ablciflc infinie négative & Pabfciflè — 5 £ que donnent les fuppoſitions $^{(25 - ^)} = r$ 5 , & $25 - \sim = 5$. Pour remplir ces vuides, on peut fuppolèr $60 - \sim$ égale à quelcun des nombres rompus , qui (ê trouvent entre 4 & 5 & entre 5 & 6. Par exemple , $V < \langle 5 - \sim \rangle = 4$ j donne $x - 5?^{\wedge}$, la r «.[^] —]|* - & la 2 £L 4Î • • 1 — 5» • • — — . . tn l l I _ 1 » 1 » IÎTS • • Ml . *4 Prenant donc toutes les abfciOês qui font ici marquées , & leur donnant à chacune les deux ordonnées qui font calculées , on aura pluſieurs points de la Courbe , par leſquels on reconnoît que fon cours eſt à peu près tel que le repréſente la F/£. 14. Cet Exemple futfit pour donner une idée de cette méthode, & pour faire juger des facilités qu'elle aporte dans le Calcul. U eſt feulement fâcheux qu'elle ne ſoit pas générale, & que les artifices de Dioph ante ſoient fi bornés. On peut quelquefois trouver d'autres tours qui réuË. furent dans des cas , où ces moyens ne ſuffiroient pas. 2j. Il eſt, par exemple, très fouvent utile de prendre une troifième indéterminée , dont les rapports à x & ky peubitra. à rA»alyfsdesUëties Courba. h vent

Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 25.02% accurate

5* DE LA NATURE D'ES LIGNES COURBES Pl. il vent être beaucoup plus (impies que celui de y à se. Car il peut arriver que Péquation en x & y (6k fort compoféc & *J" & qu'on puifle trouver une variable z qui aura des raports aflez fmples avec x & avec y. Alors , au moyen de cette indéterminée z , on trouvera tant de points qu'on voudra de la Ligne algébrique dont x & y font les coordonnées. Ainfi , fi Ton propofê la Courbe dont la nature eft exprimée par Péq : $y^* - J - x^*y^* - f - 2 y' - xi = 0$, il (eroit difficile d'en tirer la valeur d'y ou d'x , puisqu'il faudroit réfoudre pour l'une une équation du troifième , & pour l'autre , une équation du quatrième degré. Mats fi Ton fuppofc $x=rjyz$, on transformera l'équation propofe'e en $y^{+^V-fajf^*} - y^*z^* = 0$, qui, divifée par y^* , fe réduit à $y+yz^{*+*} - z^0 = 0$, ou à $= - r_-$. On a donc a, qui eft =yzi égal à $z \blacksquare \sim 2Z$. Et, au moyen de ces $z \sim 1$ deux équations , donnant fucceffivement à z différentes valeurs , on aura les valeurs correfpondantes de y & de x, l'ans être obligé à extraire aucune racine. 51 1 Digitized by G

The text on this page is estimated to be only 22.21% accurate

ET DE LEURS EQUATIONS. 3^{ie} Cap 1. Si l'on fait $z = -4$ » on aura $y = -\$ 0 \& * -1 \frac{5}{r} \text{Pt} - 2 \cdot 1 \blacksquare 4, 1 \cdot 1 \cdot X - I - 4. = \ddot{e} = 4 - 2 \cdot -1.$ '« $r \cdot 2 \cdot = 4 \hat{1} \dots 1 \cdot 1 \cdot 1 = 15 \text{ zrr}$ ». UT 7 7^{ie} ' 4 |gt +03 = +7i = 4- 4^{ie} T On prendra donc les ordonnées y qui font ici calculées, & on leur donnera les abscisses x déterminées par le Calcul, & on aura assez de points de la Courbe pour en tracer une partie qui donnera quelque idée de son cours. Voyez F/g. 15. Exemple. Si l'on propose Vég : $2f - icx/ + 15X' r = 0$, dont on ne pourroit avoir les racines y ou x, que par la résolution d'une équation du cinquième ou du troisième degré ; on pourra faire $y = 4xz$, ce qui transformera l'équation proposée en celle-ci $t^5xV - JxV + i5x' = 0$, ou, divisant par x^5 , en $x'z^5 - 20x5' - f - 240 \sim 0$, qui par rapport çond degré, & a pour racines $x = E$ s a x n'eu* que du fèio $\sim 2 \backslash (25 -)$. d'où

Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 14.14% accurate

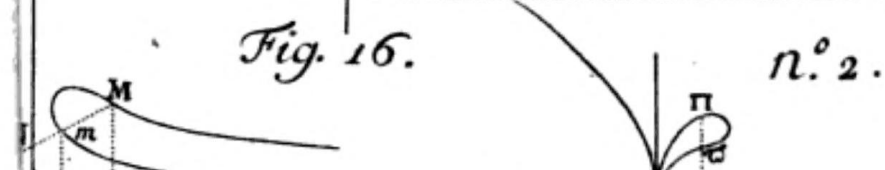
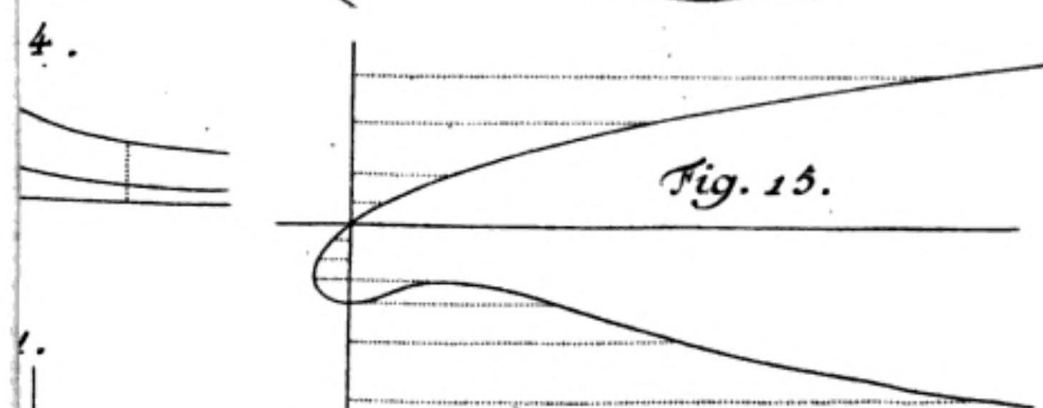
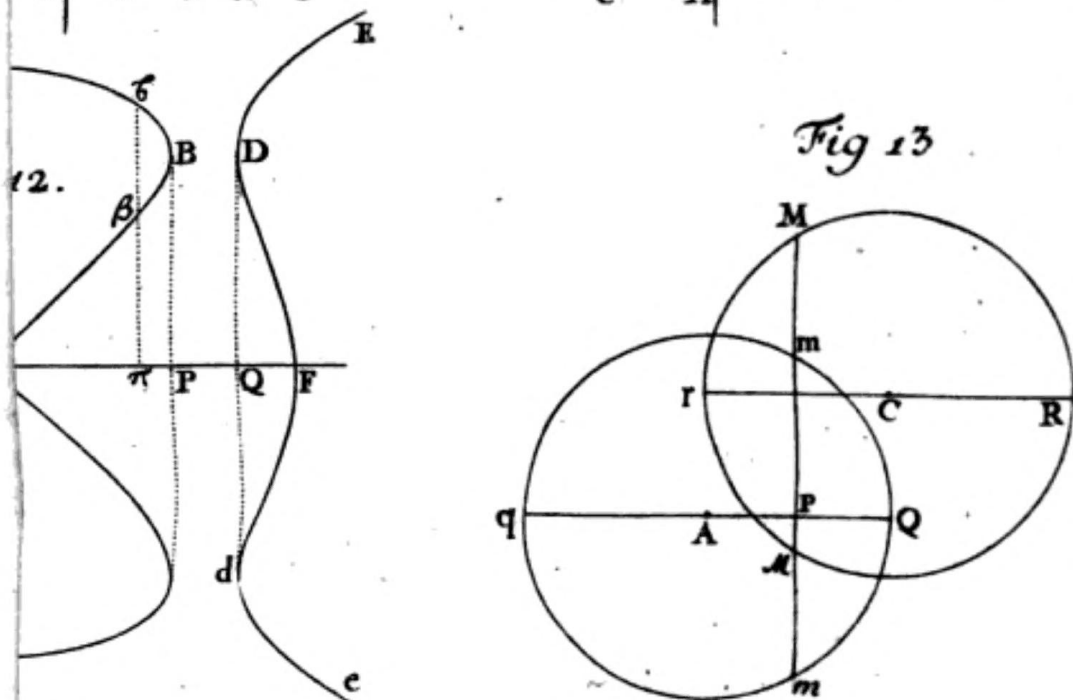
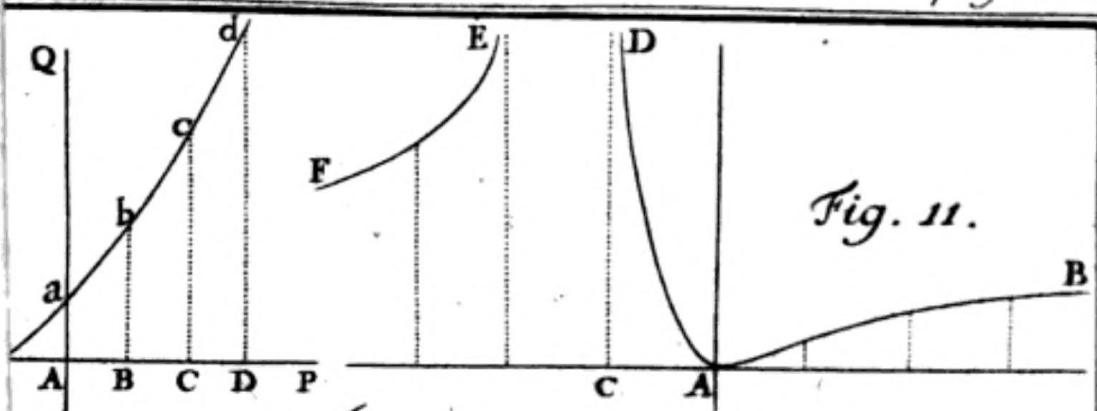
35 DE LA NATURE DES LIGNES COURBES d'où Ton tire
j[=:i*z] = L .Orchid * B* 2* l'équation du §.22. Faifant donc fucceflivement
^ («5— ~) égal à o , 1 , 2 , ? , &c on aura des valeurs rationnelles de z &> ,
par lcfqueiles on trouvera celles de*, en prenant se = 2 ^ . Voici le réfultat
du Calcul. S=I . s=2i . =2* . =lf' • • =lï . =2 . =2\$. =3^ . =^ . =Fp . =îf =3 «
=?î • =af\$ • =,*xj • • =n • =m -1 , 7 ti 1 » »; • ■ 1 îô • Tôô » • xo • 100 •xoo
t 1 ..t . i fin 17 i»> ' 4ï • 1 4tT * 'TÇô * îf»ôô * 140 • iïtoa s=5 . —infini. —
rafpe:.— inf petit— infpct.^rzinf.p. - 1 ■ f» I4T — — 44 1 — _r — 141
s== J î • 1 1 7 • X 60 • «400 * Jiô ' i+oo < - J — — • ' l < t ii ît» — .O . 3TÎ
' zïo • 1 lôô • «ô • lioô . — — 2ï . — 4, • =jr\$ • — î • — — ri =9 . — 'y'j •
— — 1 \$iV=24rn • — ?fi • — "—"^ïit =10. =r— f. =55\$. =6\$.=?— 2i|]
font les coordonnées, & dont /'équation eft^= , ou 2» tfyy — i tfigitized by
Google

The text on this page is estimated to be only 24.14% accurate

ET DE LEURS EQUATIONS. Chap.i. $xy^2 - x^2y + 6xy = 0$ (§. préc), & qu'on mène BN, Pu Vx parallèle à l'Axe des ordonnées AQ^par le point B donc la distance à l'Origine est $AB = 2$. Puis tirant, comme on voudra, par l'Origine A, une Droite qui coupe BN au point N, & la Courbe Mm aux points M, m, on tirant à part $BN^2 = 4r$ pour une abscisse, on lui donnera les ordonnées $r, 1, w, \dots$ égales à MP, m p, on aura les points n, », «r de la Courbe dont l'équation est $2y^5 - 10xy' + 15x^2y'' = 0$. Car le rapport des PM f^j aux AP [a], dans la Courbe Mm, s'exprime par l'éq: $z^5 - 10z^4 - 60 = 0$. Et le rapport des AP [z] aux BN ou \$v [x] s'exprime par l'éq: $z = \sqrt{x}$ puisque les triangles semblables ABN, APM donnent cette proportion, AP[z]: PM = AB [2]: BN [x]. Donc en substituant $\sqrt{x}$ pour z dans l'éq. on a

The text on this page is estimated to be only 25.14% accurate

DES TRANSFORMATIONS CHAPITRE II. Des transformations que fubit l'Equation d'une Courbe , quand on la raporte à d'autres coordonnées. m 24. T A position de l'Origine & de la Ligne des J J abliifles & des ordonnées étant arbitraire (§. 5), on peut la changer à volonté : ce qui fait naître diverfès équations (§. 7.) qui toutes représentent la même Courbe. Il eft important pour l'Analyfe de l'avoir transformer l'équation qui exprime le raport des coordonnées d'une Ligne en une autre équation qui exprime le raport d'autres coordonnées quelconques de la même Ligne, m. Pour le faire d'une manière générale ; foit MN une ' 17' Ligne algébrique , dont la nature eft exprimée par une équation quelconque , qui marque le raport des coordonnées AP [x] & PM [/] On demande l'équation qui donne le raport d'autres coordonnées , telles que BQ^[z] & QM [»]. On fuppofe donc que les Origines A & B font données de polition , aufi bien que les Axes A P , AH; BQ, Bl. Par les points B & Q , extrémités de la ligne B Q^ foient menées les Droites BC , QE parallèles à AH, & terminées à AP, & les Droites BD, QF parallèles à AP, & terminées à PM. Nommons AC, m & BC, ». De plus , comme tous les angles des triangles BQG , & MQF (ont donnés , la raifon de leurs cotés eft donnée. Que celle de B Q^ à B G foit exprimée par la raifon de t à p. Donc $BG = \frac{t}{p} BQ$: car $1 : t = BQ : BG$. Que la raifon de BQ^ à QG foie déiignée par $1 : q$, & QG fera $= \frac{1}{q} BQ$. De même , il Ton exprime Digitized by Google



Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 19.60% accurate

DEŦ EQUATIONS. 39 Chap.tŦ. exprŦme la raŦfon de QM à QF par
1 :r, & celle de QM Pl. in. /. *4. à M F par 1 : / , Q F fera = r// , & M F = su.
Donc , puifque $APT^{\wedge} = AC4 - CE - f - EP = AC[w] + BG [^3] + QF(r\gg i$, &
puilque $P M [y] = PD - h DF + FM = BC [«_{,} + QG fysl + MF (su\$, on aura
 $x = m +pz + rf$

The text on this page is estimated to be only 26.38% accurate

DES TRANSFORMATIONS Pl. lu. BQj^aflè par l'Origine primitive A, $x=p\%$ & $y=zfz + Cta\&.tft$ uy parce qu'alors AC [«] ert auffi nulle. I**fi IV*. Si , l'ans changer la pofuion des coordonnées , xi. on veut Amplement tranfporter l'Origine de A en B; les triangles BGQ^, MFC^difparoiflènt ; BG [/*] devient BQJ*L & M F [/*] devient MQj*], mais CG[ra] & FQXfs] font égales à zéro. Donc $x = m+z$ & $y = n = u$. V°. Si l'Origine eft tranfportée fur un autre point de la Ligne des abfciffes ; comme les ordonnées ne changent as, il fuffit de faire $x=\pm z$, Et fi l'on tranfporte l'Origine fur un autre point de la Ligne des ordonnées s comme cela ne change rien aux abfciffes , on fera Amplement $y=\pm zu$. VT. Je ne dis rien de deux autres changemens moins confidérables; dont l'un confifte à changer $+x$ en $-x$; ce qui eft prendre les abfciffes pofitives pour les négatives , & réciproquement! c'eft-à-dire , renverfer la figure de droite à gauche : ou à changer $-y$ en $+y$; ce qui eft regarder comme négatives les ordonnées qu'on avoit prifes pour pofitives , ou renverfer la figure de haut en bas : Et dont l'autre confifte à changer m en y & y en x : ce qui revient à prendre les abfciffes pour ordonnées & les ordonnées pour abfciffes , à faire faire à la Courbe un quart de converfion. 26. Ces transformations font d'un grand ufage pour l'Analyfe des Courbes. Il eft donc à propos d'indiquer ici quelques voyes abrégées pour les exécuter plus commodément. Elles font fondées fur ce Principe , que fubftituer à x un binôme $m+z$, dans une puiſſance quelconque de x , comme dans la cinquième, c'eft écrire au lieu de x^5 , la cinquième puiſſance de $m + z$, qui eft $m^5 - 5 m^4 z + 10 m^3 z^2 - 10 m^2 z^3 + 5 m z^4 - z^5$ Digitized by v^ooqLc

The text on this page is estimated to be only 20.65% accurate

DES EQUATIONS. 4« Chaf. îl. io/w'z* -f- \omxzi + 5W2*+2f ,
dont les termes ont tou- Pt- in. * tes les puitlances fuceffives de Z , depuis
l'unité' , qui ci\ z°, ju(qu'à z5. Les coefficients mi^ ^m*i lom* , iow1, 5w, 1
, fe calculent ainfi. On pofc d'abord m' , c'eft-à-dire, une puitlance de m qui a
fc«nême expofant que celJe de x ; on multiplie ce terme mi par (on expolant
[s] , & on le divile par m , ce qui donne le fécond coefficient 5«r4. On
multiplie ce (ècond coefficient par [2] la moitié de (on expolant [4] , & on
le divile toûjours par m. Cette ope'ration donne le troifième coefficient 1
om* , qu'on multiplie par [1] le tiers de (on expofant [\$] , & qu'on divife
par m , pour avoir le quatrième coefficient 10 m'. Celui-ci doit être multiplié
par [{ } le quart de (on expolant [2] , & divife toûjours par m. Par ce moyen
on a le cinquième coefficient 5/* , qu'il faut multiplier par [y] la cinquième
partie de (on expofant [1] , & divilêr par m , pour avoir le fixième &
dernier coefficient 1 . Alors l'opération eft finie , parce que ce terme ne
contient plus de m. On opérera de fa même manière , fi au lieu d'une (impie
puitlance de x , on a une de fes fondions rationnelles entières a + bx + cxl +
dx* + ex* &c. compofée de conk tantes & de puiliànces de x. Ainfi puifque
a r= — r ! * au lieu de Récrivant b(m-\-z) = bm -f- bz exl . . c(m-l[-
z)lz==cm -\ -2cmz-\-czz dxl . . J(OT-f-*)'='^'»'-r->' ^" z.-\ -Umzt ^Jz% ex* . .
e(m+z)*^em*+^M*z+6emW-±-\emzl-{-*z* Ûc. Ûc. &c. on aura a+bx+cxl-
\ -dxi+cx+ &c. — XP + M'z + A/V + M'V + A/lvz4 &c dont les coefficients
M\A' , M" > M''' , M'v , cfr. fe calculent comme on vient de dire. Sniròa. à
ÏAnalyfe des Ugnc: Courbes. F Le Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 21.03% accurate

4a DES, TRANSFORMATIONS. Pt.nr. Le premier M^* est la fonction même $a + bx + t x^* + \text{Chap. il } dx1 + \ll c4$, transformée par la substitution de n à x . $** * M$ le change en $A^\#$, si on multiplie chaque terme de M° où le trouve quelque puissance de $/\gg$, par P_{expolant} de cette puissance, qu'on divise le produit par m . De M' on forme M^* en multipliant chaque terme de A_{if} par la moitié de P_{expolant} de m & le divisant par m . En multipliant chaque terme de M'' par le tiers de P_{expolant} de m & divisant toujours par m , on aura M''' . Et on continuera de même, jusqu'à ce qu'on vienne à une grandeur, où il ne reste plus de m . $a+bm + cm1 dm1 + cm^*$ & $c \text{ — } M^\circ o \setminus 2 \ 3 \ 4 \ b \ H- \ 2cm \ \bullet + - \ idm1 \ -f \ Jw? \ 5^* = M' o \ k \setminus k \ c + idm + 6''w^* \ \&c = M'' O \ \ddot{i} \_ J \ o \ j \ e \ \&c \text{ — } A/1'$ On peut aussi, & dans l'application il est plus commode, ne changer x en m qu'après toute l'opération. On fera donc l'ur x ce qu'on vient de dire qu'il falloit faire sur $m \ y$ & après le calcul on changera dans M^* , M' , M'' , &c. tous les x en m . Ainsi oy Google

The text on this page is estimated to be only 24.71% accurate

DES EQUATIONS. 43 Pl. III. Cmap.ii. Amfi $x \sim m$ S- , « $a + bx +$
 $nf + te + ex^*$ &c = $Af^4 + bm + cm' + dm' + em''$ &c 01234 o A i i o \ i d +
 &c = $M''' = d + Agm$ &t e &c = $zM'' = e$ &c 27. Pa r ces principes on peut
 exécuter avec facilité les transformations indiquées au §. 25. Veut -on
 transporter l'Origine Oir un point donné de l'Axe des abfcifles ou des
 ordonnées; ce qui fè tait en fubitituant à x , ou » + » à y . Qu'on propolè, dis-
 je, de fubitituer $m + z$ à x . On écrira l'équation fur une ligne : on en
 multipliera chaque terme qui contient queloue puiltence de x par l'expoiant
 de cette puiflance , & dans chacun de ces termes on changera un x en z . Le
 produit s'écrira fur une féconde ligne , dont on multipliera chaque terme où
 fe trouve quelque puiOànce de x par la moitié de (on expofant , & on
 changera de nouveau un x en z . Le produit fera la troifième ligne, dont on
 multipliera chaque terme qui contient quelque puiOànce de x par le tiers de
 fon expofant , termes de toutes ces lignes , & on aura la transformée F 2
 Exemple, * Vfagt de tAntl. &c. pag. 30\$ & Cm. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 20.47% accurate

44 DES TRANSFORMATIONS III. Exemple. On propose l'équation A. $c''n^4 + 2gii + 4xyZ - 2xylz + 2Atax : L1 - $aylz + \wedge ccyz Jk \setminus . oo + 6xlz - 2yyzi + 2^axzl$ Changeant x en />, & réunifiant tous ces termes, on trouvera que la transformée de Péq : A est $w^4 + 4wz + 4wz' - z^4 - a \gg 1/ - 4/w/z - fz^* + \%am^* + 24^* \gg^* Z + 244WZ1 + 8^*ZJ$ \$amyl $5^*/z + 4^*flKry - f 4 ccyz 8^*97 4- ya cz - o$. Que si Ton veut substituer $n+u$ hy, on opérera sur les $^$ comme on vient de faire sur les x, en changeant de ligne en ligne un y en a. 28. Dans l'application de cette Méthode, le calcul devient plus commode, quand pour substituer $w-f-z$ à $^$, on commence par ordonner l'équation selon les dimensions $d>$; & quand pour substituer $n+u$ à y, on prépare l'équation en l'ordonnant par x. L'Exemple lui-même fera voir l'avantage de cette préparation. On propose de substituer d'abord $z^4 - 2^*$ à x, & ensuite $u - ^*$ à y dans l'éq : $x1 - 2xly + xyl - yi - 2ax \setminus 4 - 4''^*)' + ^*/ + ^*V - 2^*1^* = o$. Pour faire la première substitution, on ordonnera l'équation par y. —y igitized by Google

The text on this page is estimated to be only 15.51% accurate

PuHL DES EQUATIONS. At Ch. II; 9 a 20? 21 _ || ~ 1 o ïz)/+
 (—4*+ 4^)zr+C3xI-4^x-24^z i j +z/— 4^hM*» o è î o [=* — 2Z>f4*Z3 C
 — a)zzjr o \ •2a) zz + (!)»' L+z' La transformée est donc — — 2zV + zJ +
 34Vl — 4*zy +4azz + azy + 2a1z — 4**. Pour substituer « — * à y on
 ordonnera l'équation par x 0 1 © 2 i o 3 a 1 . +(_2>xi+(2)+4^)<x+
 (-3iy+2^+«i> o £ o r g o o î o x* * 5"*x-4- M* -2i L — «■ + «IX + 44«\ —
 oy Ainfî la transformée est x' — 2//x* 4-«*x — ** 4-2**x +4*«l — s^x —
 4*ztt + a\ 29. S 1 l'on veut exécuter en même tems les deux (ùbHitutions de
 m-\-z à x &dc» + «à^,ce qui sert à transporter l'Origine sur un point
 quelconque qui auroit m pour abscisse & n pour ordonnée, [§ 25. IV] , on
 opérera comme on vient de le dire dans le §. précéd. mais sur les x & les y
 en même tems. Soit , par ex. Péq : a4 — 44 'y + p*'x — #V — 3a1 xy + 1
 — + 64x} 4- *+ = o , le Calcul se fera Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 20.46% accurate

4* DES TRANSFORMATIONS « _ Pt. III. fera comme on le voit
ici , ce qui , après le §. prec. expli- Ch. IL que mieux la chofè qu'on ne
pourroit le faire par un long & ** cirtours. Il lutfit de remarquer que des
deux nombres placés fous chaque terme, le premier eft relatif aux
dimenfions de y & le lècond à celles de x , & que les termes liés par une
accolade , doivent être réunis en un même terme qui clt leur fomme. Ainfi
au lieu de — \auzz & — \auzz, on fuppofe — auzz, a> — par l'expofant de
cette puiflânee , & on Digitized by Google

DES EQUATIONS. 47 Chaf.i/. on le divifera par y. La Tomme de ces termes eft le coëf- Pl. m. S- *9- ficient de u. Puis , on multipliera chaque terme de la première ligne qui contient quelque puiffance de x par l'expolânt de cette puiffance & on le divifera par x. La (brome de tous ces termes eft le coefficient à'u. C'eft ainfi qu'on aura calculé la féconde ligne. On viendra enfuite à la troifième qui eft compofée des termes uu , uz & zz. Le coefficient à'u fervira à former celui tfuu & la première moitié de celui d'*z, fçav. i°. le coefficient: dW, en multipliant chaque terme du coefficient d1*, où le trouve quelque puiffance d'y, par la moitié de fon expofant , & le divifant par v: 2°. la première moitié du coefficient d'»z , en multipliant chaque terme du même coefficient d*»; où Te trouve quelque puiffance d'x, par la moitié de fon expolânt & le divifant par x Le coefficient de z (ervira à former i°. l'autre moitié du coefficient de uz, en multipliant ceux de lès termes qui contiennent quelque puiffance d1 y par la moitié de lèMrs expoians, & les divifant par y: 2°. le coefficient de z z , en multipliant par la moitié de Pcxpofant d'x , & divifant par x , tous les termes du coefficient de z , où fc trouve quelque puiffance de x. La quatrième ligne a quatre termes a* , uxz , «i* , z* , qui fe forment par les coefficients de uu , ttz & zz , de la même manière que ceux - ci ont été formés par les coefficients de u , & de z , fi ce n'eft qu'au lieu de multiplier chaque terme par la moitié des expoians des puiffances de x & de y qu'il renferme , on le multiplie par le tiers de ces expofants. Le refte de l'opération eft femblable à celle qui a donné la troifième ligne. Le coefficient de un forme celui de «J , & la première moitié de celui de uuz : Le coefficient de uz forme la féconde moitié de celui de uuz , & la première moitié de celui de uzz ': Et le coefficient de i° forme la féconde moitié du coefficient de uzz, & tout zed

The text on this page is estimated to be only 20.29% accurate

48 DES TRANSFORMATIONS Pc m. & tout celui de z\ C'est dans ces coefficients formés par Our.il: moitié qu'on peut trouver des termes réparés qu'il faut * ** réunir. On formera de la même manière la cinquième ligne, par le moyen de la quatrième, en multipliant par le quart des exposants d'y & d' x, &c. Et on continuera de même, jusqu'à ce qu'on soit parvenu à une ligne, où il ne reste plus ni x ni y. Toutes ces lignes ensemble, en y substituant wàx&»à), font la transformée complète. Exemple ? sur la même équation que ci-dessus. /i4— 4*>+9** — aayy—iMoxy* 1 laaxx — axxy * 6ax* +*4 o.o i.o o.i 2.0 n 0.2 i.2 o.; 0.4 0.0 j.o o.t o.f 0.0 j.o o.k î-î gj 4-(— ad)uu + Ejaax—ax^uz *(l2aa — ay ^ \Zax^6xx) zz 0.0 0.0 o.{ 0.0 {.o o. ! o. \ ! gy-f 1 ■ 1 0.0 0.0 0*3; ~ * (1) z* Autre Exemple. On veut substituer z>bi* à x + * dans Téq: / + x* — 2 *x5 — 2Mxy + l aaxx = o

The text on this page is estimated to be only 15.57% accurate

Chip.h DES EQUATIONS. 49 Puni. $x - \sqrt{y} = \sqrt[4]{x^4 - y^4}$
 $2a^{xy} - \{ -J^4 x^{4.0} 0.4 0.5 1.1 0.2 \} \cdot o \cdot x \cdot o \cdot i \cdot O \cdot \ddot{i} \cdot O \cdot \ddot{i} \cdot * \cdot o \cdot 0.0 \cdot o \cdot f \cdot o \cdot j \cdot 0.0 +$
 $(4y > ' + (o > \ll * - K^\circ > * M - f^4 * - 24 > \gg i \cdot o \cdot 04.0.0 + (.) \ll 4 + (o > , i - Koy^\wedge - Ko > l'4 -$
 $(i > 4 I 1 I + (44 \gg -4 \gg) \ll + (54' - \hat{I}4 \gg - a4 \gg 4 - j4' > + (s \text{ pour } x \ \& \ \text{çz} + u \text{ pour } / , \text{ ce}$
 $\text{terme (èra changé } * i , . h b , l l , / - 1 / - i . \text{ ena; } z (yz + a) = * p z z + / \$ a \gg +$
 $/ . / - I / - 2 / - 2 t f U - l J - 2 / - J l - 1 , I 2 J I . 2 \text{ £ } / \_ 2 4 / f Z "2 * . / . / f .$
 $I . 2 . g 2 \text{ £ } A^\wedge v .$ Or la fuite de ces termes lè calcule par une Régie fcmblable
à celle du §. 26 , & qui (è peut énoncer ainfi<* ĨAnaljfe des Ugnés Courbes.
G On Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 26.98% accurate

10 DES TRANSFORMATION 5 ni. On écrit en première ligne l'équation proposée, après Chap. il avoir change' x en x^a & ; en fz, c'est-à-dire, après avoir écrit p pour x & q pour / , & après avoir multiplié chaque terme par une puissance de z dont l'exposant (bit égal à la Comme des exposants de x & déjà dans ce terme. On forme la seconde ligne , en multipliant chaque terme qui renferme quelque puissance de q par l'exposant de cette puissance , en le divisant par q , & changeant un z en un u ». La troisième ligne (è formera , en multipliant chaque terme de la seconde , qui contient quelque puissance de q par la moitié de l'exposant de cette puissance , divisant par q , & changeant un z en un u , &c &c. Ainsi, dans ax^y , écrivant p% pour x, & qz pour v , on aura $a p'' q^* z^*$ premier terme ou première ligne. Ce terme multiplié par / exposant de q , divisé par / , M m q , & par le changement d'un z en u , devient $y z^* 1 u$, second terme ou seconde ligne : qu'on multiplie par — — , moitié de l'exposant de q , qu'on divisera par q , & où on changera un z en u, pour avoir le troisième terme ou la troisième ligne • — l-ap q ** ** , 1.2 & on continuera de même jusqu'à-ce qu'on vienne à des termes qui ne renferment plus la lettre q. Exemple. On propose de substituer pz à x, & qz + * à x^a dans l'éq : $x^a + x^4 - 4*xy + %byy = 0$. Cette équation, en changeant x en $\frac{p}{z}$ & y en $\frac{q}{z}$, cil Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 19.13% accurate

DES EQUATIONS. 51 Chaf.il M* 4. hlpz 4< *tyz + ? ^/z* 4.
4^>fzm + 8 bqxz% *',ft ' o o 1 o 1 2 + abri +4.afwz «4/1 \6bquz. o o î_ La
transformée est donc a1 + (bl/> + abqiz^b abu + C? W + 4*/>7+ Sbqq)zz +
(44/ + 1 6^) «2 + 8^»»= O. De même s'il faut substituer su à , & r * 4* z à x
, on posera en première ligne l'équation proposée , après avoir changé x en
ru & y en su , & on opérera sur r comme on vient d'opérer sur 7 , en
changeant de ligne en ligne un u en un z , &c. Voici le procédé du Calcul sur
le même Exemple, ** +C b'r 4*) « + C ?*rr 4* 4^ 4* 8Af/) *• O I O 2 1 O
o î o 41 \$ azz Ainsi la transformée est a* 4*(£*r4< + (j^rr + 4*r/ + 86// £*z
4« (6ar >* +ss)uz + = o. On pourroit de même (substituer tout à la fois p z -
[< ru à x 9 & q z *{* s u à y , ce qui change la position des deux Axes sans
changer l'Origine. Mais cette transformation a un peu plus d'embarras & un
peu moins d'utilité que les précédentes. Nous la laisserons donc pour venir
à quelque chose de plus essentiel. G 2 CHAPI

The text on this page is estimated to be only 27.93% accurate

52 DES DIFFÉRENTS ORDRES CHAPITRE III. Des différents Ordres des Lignes algébriques. Pl. ni. J1» T Es Lignes algébriques considérées analytiquement (se divisent en différents Ordres, (selon les degrés de leurs équations. Ces degrés s'estiment, comme dans les Équations déterminées, par le degré du plus haut terme de l'équation. Mais, puisque dans les équations des Lignes algébriques il y a deux indéterminées x & y le degré de chaque terme s'estime par la somme des exposants des puissances de x & de y . Les termes qui n'ont que des constantes, dans lesquels il n'y a ni x ni y font du degré zéro. Ceux qui n'ont qu'un x (sans y , ou qu'un y sans x , mais où cette indéterminée peut être multipliée par un coefficient ou une grandeur constante quelconque, comme by ou cx , font des termes du premier degré. Les termes du (second degré font ceux où le trouvent xx , xy , ou yy . Mais x^2 , xy , xyy font les termes du troisième degré ; x^4 , x^3y , x^2y^2 , xy^3 & y^4 ceux du quatrième, & ainsi de suite. 12. On peut donc former, pour chaque Ordre de Lignes, une Équation générale, qui représente toutes les Lignes possibles de cet Ordre - là : lesquelles ensuite se divisent & subdivisent en Genres & Espèces, (selon la variété des coefficients qui multiplient les termes de ces Équations. L'éq : $ax^2 + by^2 + cxy = 0$, exprime la nature des Lignes du premier Ordre parce qu'elle n'a aucun terme qui porte le premier degré. L'éq: Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 25.58% accurate

DES LIGNES ALGÈBRIQUES. 53 jC». ni. L'éq : $a + by + ex$
 $4\ll \text{àyy} > \backslash * \text{exy} + \{ * \text{focx} = 0$ représente Pl. in. /•**• une Ugne quelconque du
fécond Ordre , parce qu'il ne s'y trouve que des termes du lècond degré ou
des degrés inL'éq : $a + by^cx^dy^exy^fxx + g y' + 4 < /V^4\ll /x' = 0$,
exprime en général une Ligne du troifième Ordre , parce que fes termes les
plus élevés ne font que du troifième Ordre , &c. * 3\$. Dans cette manière
d'estimer l'Ordre d'une Ligne algébrique , on fuppofe que l'on équation eft
irréductible : parce qu'une équation réductible eft moins Péquation d'une
Ligne d'un certain Ordre , que celle de deux ou plufieurs Lignes de
quelques Ordres inférieurs [§. 20 , si]. Cela eft pourtant indifférent en foi -
même, & rien n'empêche qu'on ne regarde , fi Ton veut , le fyftème de deux
Lignes du premier Ordre , comme une Ligne du lècond Ordre ; & le fyftème
de trois Lignes du premier Ordre , ou celui de deux Lignes, l'une du
premier, & l'autre du fécond Ordre , comme une Ligne du troifième Ordre ,
&c. \$4. Ce q.u'il y a de plus important à remarquer fur cette diftribution des
Lignes algébriques par Ordres , c'eft que chaque Ligne eft fi bien fixée à fon
Ordre, qu'elGj le * Mr. Newton diftingue les Ordres des Lignes Se les
Genres des Courbes. Comme le premier Ordre ne renferme que la Ligne
droite [Voyez, ci - deffbus f, 40.] , il appelle Courbes du premier Genre, les
Lignes du fécond Ordre, Courbes du fécond Genre, les Lignes du troifième
Ordre , & ainfi de fuite. Quelque répugnance qu'on ait à s'écarter des
dénominations établies par ce Grand Homme , il m'a paru que cette
diflinftion génoit trop l'expieffion , & je me fuis déterminé à dire
indifféremment , Courbes ou Lignes du fécond Ordre , Courbes ou Lignes
du troifième Ordre, âcc. Digitized by Google

54 DES DIFFERENS ORDRES Pt. m. le n'en fort point , par quelque équation qu'on la repré- Ch. M. (ente. Je veux dire , qu'encore qu'on puiſſe exprimer la 14^{e} nature d'une Ligne algébrique par une infinité d'équations différentes , félon le choix qu'on fait de l'Origine , & la poſition qu'on donne aux Axes ; cependant toutes ces équations font d'un même Ordre , auquel par conféquent la Ligne propoſée doit ſe rapporter. En effet , ſi l'équation de cette Ligne qui exprime le raport entre les coordonnées x & y eſt d'un certain Ordre ; l'équation , qui exprimera le raport entre d'autres coordonnées z & u de la même Ligne , eſt néceſſairement du même Ordre. Car quelque variée que ſoit la poſition des z & des u par raport aux x & aux y , on aura toujours [§.24] $x = zm^p$ & $y = w + qz^s u^t$ & en ſubſtituant ces valeurs de x & de y dans l'équation qui exprime leur raport , on aura la transformée qui donne le raport des coordonnées z & u . Mais puilque, dans les équations $x = m^p z^m$ & $y = n + q z^h u^s$, z & « ne montent qu'au premier degré , non plus que x & y il ſ'enſuit qu'après la ſubſtitution , z & « ne monteront dans l'éq : transformée qu'au même degré où montent x & y dans la propoſée. Donc l'éq ; des z & « fera du même Ordre que celle des x & y . Ainſi l'Ordre d'une Ligne algébrique ne change point par le changement de les coordonnées. * §5. Mr. Newton arrange les termes de l'équation d'une Ligne algébrique dans un Parallélogramme diviſé en plufieurs Cafés , ou petits quarrés. Il place dans chaque ligne horizontale les termes où la variable y a le même expoſant , & ces expoſants augmentent d'une unité en montant de ligne en ligne : Il place dans chaque colonne verticale * Uſage de l'Anaſyſe, &c. pag. 340. & ſuiv. Digitized by VjOOQic

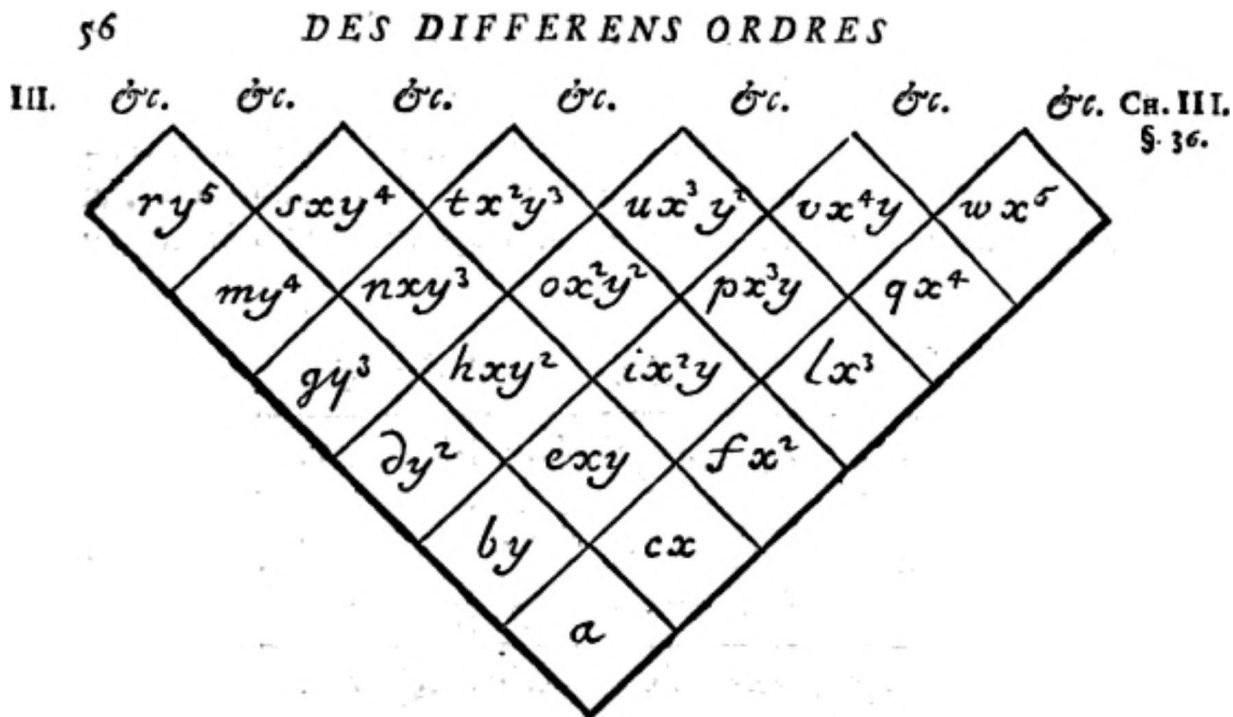
The text on this page is estimated to be only 20.51% accurate

DES LIGNES ALGEBRIQUES. Ch. m. verticale les termes où l'indéterminée x a le même expo- ft. IU. $> \bullet$ fant , & ces expofants croiflènt d'une unité en partant d'une colonne à l'autre de gauche à droite. Ainfi chaque terme a fa Café déterminée par les expofants d'oc & d $>$ dans ce terme. $\&C \mid \&(. \&(. j \&c. \&c \backslash \&c. V 1 "y\grave{c} * y \backslash \&c sf h mxy * bxy1 exy nxyxtxlyl ix\%y fx'y *xy \backslash \&c. yxy \backslash \&c. vx4y \&c. ex fx1 1 kx > \blacksquare$ Mais comme dans cette difpofition les termes d'un même degré fe trouvent placés en diagonale , Mr. Db G u a , en tournant le Parallélogramme , lui a donné une fituation plus commode *. Il fe préfente alors comme un triangle , dont la pointe regarde en embas , & où les termes de l'équation générale font placés comme on le voit dans cette Figure, qui explique la chofe fumTamment. * Uf*g, de FAnslyfe , &c. pag. 2* &c. $\blacksquare$ ' .il .?Ol!S>.'i

Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 28.19% accurate

§6. Dans ce Triangle, que l'Auteur appelle Triangle algébrique ou analytique, chaque Case prend son nom des x & des y qu'elle contient. La Case inférieure feule, qui n'a ni x ni y , le nommera la Case de la pointe, ou, pour abrégé, la Pointe du Triangle. Des deux Cases qui la touchent, l'une s'appelle la Case y , l'autre la Case x . Les trois voisines (en nomment la Case yy , la Case xy , & la Case xx). On comprend aisément par là quel est le nom de chaque Case. Dans cette disposition on voit 1°. que tous les termes d'un même degré sont dans le même Rang horizontal; les plus hauts degrés dans les Rangs supérieurs, les plus bas dans les Rangs inférieurs. Chaque équation générale a autant de rangs que l'exposant de son Ordre a d'unités, sans compter la Case de la pointe, où l'on place le terme constant. 2 e. Que si l'on veut ordonner l'équation par x , c'est-à-dire, suivant les dimensions de la variable x , on n'a qu'à considérer comme les termes de cette équation, les Bandes Digitized by Google



The text on this page is estimated to be only 24.60% accurate

DES LIGNES ALGEBRIQUES. 57 Ch.iii. Bandes qui montent de droite à gauche. Dans le Trian- pr. m* * *6' gle ci-deflus, le premier terme lèra la plus haute bande , qui confine dans le (cul terme xs , & cette bande , foie qu'elle n'ait que ce terme , l'oit que, le Triangle étant prolongé, elle en ait plufieurs, fe nommera la Bande x5. Le lècond terme lèra la bande contiguë , qui a les deux Cales qx* & ou C 9 + "jy) : c^c s'apelle la Bande x*. On prendra pour troifième terme la bande liivante /x' , px?y, uxxyx , ou (/4-/\y4-«yi) *' : c'en" la Bande x' ; pour quatrième terme la bande /*x, /x'jy, ox'j^*, /*y , ou (/+/>+» r'+y*)** > qui elt la 5^ ** s pour cinquième terme la bande ex , rxy , £.vyz , , sxy\ ou (<,-f-^ + ^yi + »jV, + {r4)-*' » qui s'apelle la Bande x: & pour fixième & dernier terme a+by+dy -\ -gyl + wy* + ryf , que nous nommerons la Bande fans xt ou la Bande des put fonces d*y. De même , fi on veut ordonner l'équation par y, on prendra pour fes termes confécutifs les Bandes qui montent de gauche à droite, (ç., i°. la Bande yf , qui n'a ici que le terme ry\ 2°. la Bande y* qui a les deux termes nty* , sxy* , ou (w 4"/JOjy+. Bande y1 compolée de trois termes g y* , nxyi , , ou 4*»*4-'x: 40. la Bande y1 qui contient quatre termes dyx , £ jr^r , oxlyx , , ou (d + hx-\- ox~ + ux* 50. la Bande y, qui eft by +exy + ixxy +pxxy** vx*y , ou (£4-

The text on this page is estimated to be only 24.01% accurate

58 DES DIFFERENS ORDRES III Le nombre des coëfficiens b, c, , r, &c. de cha- Ch.iii. que équation générale [§. \$2] est le même que le nombre de lès termes. Mais ce nombre des coefficients peut être diminué d'une unité, parce que le fécond membre de ces équations étant zéro , on peut diviser tout le premier membre par un coefficient quelconque , comme celui de la plus haute puissance d' y ou d'x , laquelle , après cette division , n'a pour coefficient que l'unité. Ainsi , divisant par c l'équation générale du premier Ordre $ax + by + c x = 0$, elle (è réduit à $\hat{y} - f = 0$, c c dans laquelle, avec l'unité qui multiplie x, il n'y a que deux coefficients - & — . c c Si donc v est l'exposant d'un Ordre quelconque, le nombre des coefficients de l'équation générale de cet Ordre fera $1 + v$, somme de la progression arithmétique $2 + 3 + 4 + 5 + \dots$ dont la différence est 1 , le premier terme 2 , & le nombre des termes $v + 1$. • 38. Il suit de là, qu'on peut régulièrement faire passer une Ligne de l'Ordre v , par le nombre { w + 1 } de points donnés , ou qu'une Ligne de l'Ordre v est déterminée & Ton équation donnée, quand on a fixé $1 + v$ points par lesquels elle doit passer. Ainsi une Ligne du premier Ordre est déterminée par . deux points donnés; une du fécond par 3; une du troisième par 6 ; une du quatrième par 10; une du cinquième par 15 , &c : - La * SnaUNG, Line* ttrtii Ordinis , &c. pag. 3 de suiv.

The text on this page is estimated to be only 27.74% accurate

DE S LIGNES ALGEBRIQUES. 59 Ch. m. La Démonstration n'a
 befoin que d'un Exemple. *. Pl. m. S- 18- Soient A, B, C, D, E cinq points
 données par leC- ^ lt> quels il faut faire pafler une Ligne du fécond Ordre.
 On mènera à volonté deux droites FG , FH , par un point F , qu'on prendra
 pour l'Origine , & ces droites pour les Axes ; après quoi menant par les
 points donnés les ordonnées Aa, Bb, Cc, Dd, Ee; elles feront données, auflî
 bien que les abfcilîês Fa , Fb , Fc , Fd , Fe. Qu'on nomme donc Aa , a; Bb ,
 b ; Cc , c \ Dd Ee , e ; & Fa , *; Fb , 0 ; Fc , y; Fd , i — o La condition de
 pafler par B3donne de même/f+BH C\$+Dbb+Eb\$ f/3/3 -o Celle de pafler
 par C, donne A»{*Bc-\~Cy+Dcc+Ecy ^yyzzo Celle de pafler par D,
 donne . . . A+Bi + » — o On peut par le moyen de ces cinq c'uations
 trouver les valeurs des cinq coefficients A, B, C, D, E, ce qui détermine lcq :
A+By -f-Cx 4- Dyy + Exy +xxz=o de la Courbe cherchée. Le Calcul
*véritablement en feroit aflez long f : mais il H 2 n'eû * Line* terni Oriinis ,*
cVr. pag. 69. Newton, Arithbetic univerfitlis. Probl LXT. pag.mihi a??f*
C'eft à VAlgèbre à donner les moyens d'abrèger ce CalcoL Je Digitized by
Google

The text on this page is estimated to be only 26.96% accurate

DES DIFFERENS ORDRES Pl. III. n'est pas besoin de le
faire , pour le convaincre qu'il est CH. in. toujours possible de faire passer
une Ligne du (second 5 j 8* Ordre par les 5 points donnés A , B , C , D , E ,
& en général une Ligne de l'Ordre v par le nombre $v + 1$ de points
donnés. Il suffit de voir que chaque point fournit une équation , & qu'on peut
déterminer autant de coefficients qu'on a d'équations. Donc v points
déterminent $v + 1$ coefficients, c'est-à-dire , autant ou même en a dans
l'équation générale des Lignes de l'Ordre v [§. préc. j. Comme dans ces
Equations , les inconnues A , B , C , D y E ne montent qu'au premier degré ,
le Problème fera toujours possible , & les Racines imaginaires n'y peuvent
apporter aucune exception ou limitation ; parce que ces coefficients (qui
déterminent sans qu'il (ait) besoin d'aucune extraction de racines , qui est la
seule opération qui puisse introduire des imaginaires dans un Calcul. Mais il
peut arriver, ou que quelques-uns de ces coefficients soient zéro ; & alors
l'équation de la Courbe est réduite à un moindre nombre de termes; ou que
quelques-uns les trouvent infinis; & alors les termes qui sont affectés de ces
coefficients sont les seuls toute l'équation , les autres s'évanouissant en
comparaison de ceux-là : ou que quelques-uns soient indéterminés ; & alors
on peut faire passer par les points donnés une infinité de Lignes du même
ordre. Si l'on avoit besoin de chercher actuellement l'équation de la Courbe
qui passe par un nombre de points donnés , on abrégeroit le Calcul en
prenant un des points donnés , comme Je crois avoir trouvé pour cela une
Règle assez commode & générale, lorsque on a un nombre quelconque de
équations & d'inconnues dont aucune ne passe le premier degré. On la
trouvera dans l'Appendice, N°. I. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 15.74% accurate

DES LIGNES ALGEBRIQUES. 61 Ch.iii. comme A , pour l'Origine. Car , à ce point , l'abfcifle & Pu m. * ' * l'ordonnée étant zéro , on aura a & a tous deux zéro. Ain- fi£- *J* fi la première des cinq équations ci-defliis, eft réduite à $y^*r=0$, & les quatre autres à $Bh + C\&+ Db b * \{e-ct\}(\wedge\wedge- yt -\{-\{Ht-b\%Yod-c^i f-y\>\} "(j\&r-fy \{le-d*M+*n<\&d-b\%))ye-ct\}\{bd+ce\}+\{ile b^*\}(yd cl)\{be^Jl\} p (Bc-by) >fV\langle\langle (lie^by^dt) -(Qi b) (yr-c\%\{&drb^*&r + bt) (yd-ci) (\$f^yd^i) L \backslash fr-by/\$e-dt)\{bc+de\}— yQd-biJ, yt-<*j(bd+cc)+tfe-b*Xvd- c t, (be+cd) \blacksquare$ Mais on abrégera encore plus fi Ton prend pour Axe des ordonnées la droite AB & pour Axe des abfciflès la fy** droite A E , menées du point A à deux des points donnés B , E. Alors Pordonnée A B [b] ayant une ablcifle [0] zéro, & rabfciflè AETi] ayant fbn ordonnée [e] égale à zéro , les valeurs de S, C, D, E, fè réduiront à $B = C =$
 " 72 $c> (* — — (\pounds — 0 —) — (> — c)\$) \sim ^ —$

The text on this page is estimated to be only 23.78% accurate

62 DES DIFFEREEES ORDRES Pl. III. de forte que l'équation
 fera [en multipliant par le dénomi- Cm m. natcur commun J , cd(y(b d} —
 O^)** — ■ §*8<0(« — y) — —c)*) x by\$ {a ^§ — y) — 0 — ait fon
 Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 21.89% accurate

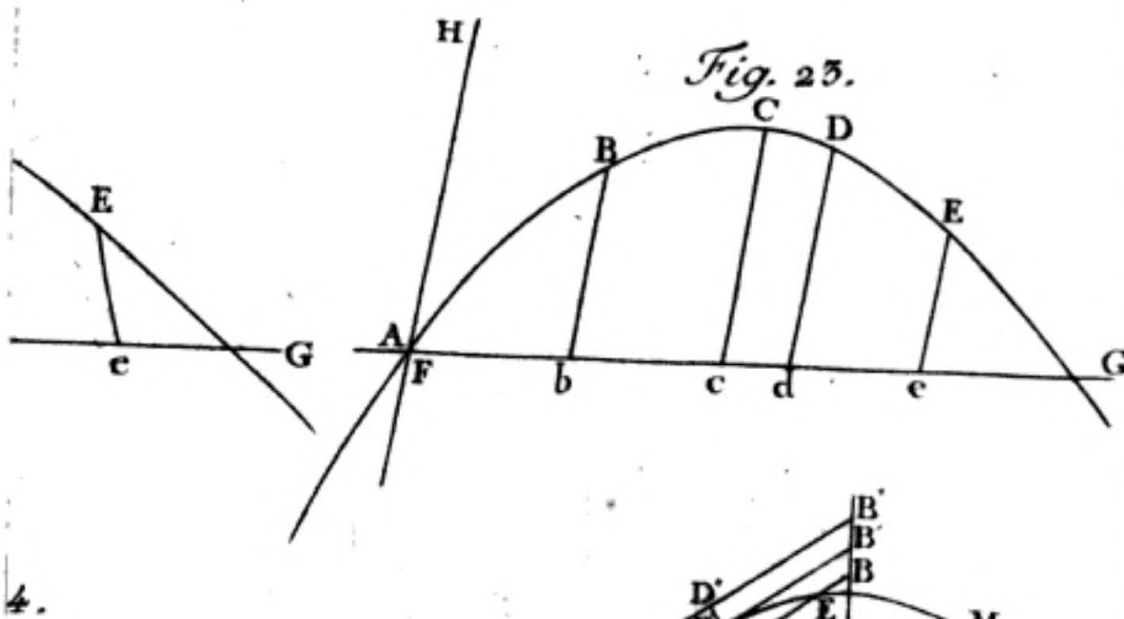
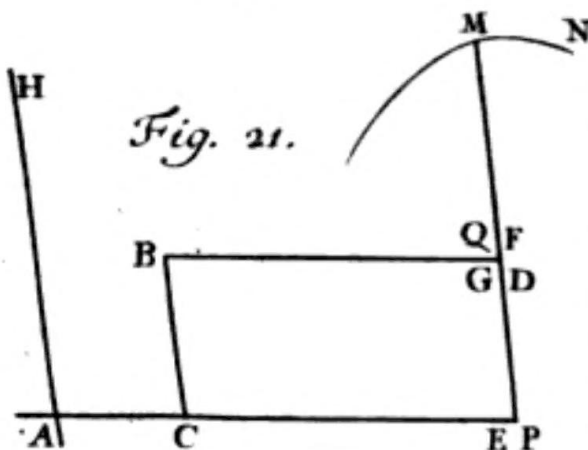
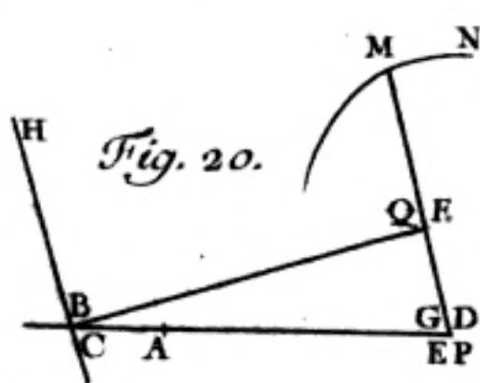
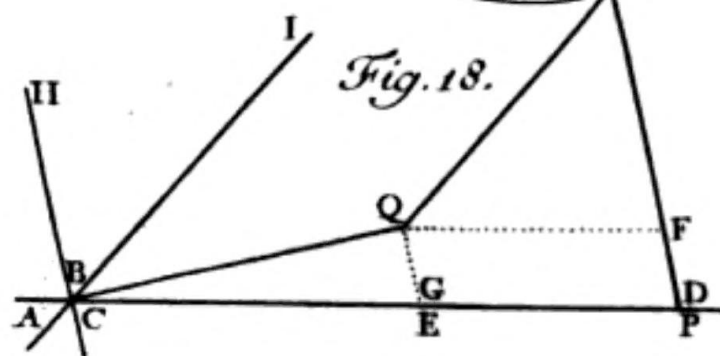
DES LIGNES ALGEBRIQUES. 63 Ch.hi. {on plus haut expofant inférieur à celui de l'Ordre de la Pt. HL iy- Courbe : il peut (e faire que cette équation ait des racines imaginaires , & les ait même toutes ; ce qui donne des interactions imaginaires & qui n'exiltent pas : il peut le faire que deux ou plufieurs des racines réelles de cette équation foient égales ; & alors deux ou plufieurs points d'interfèdion Je confondent en un lèul. Soit , par ex. le Cercle M E F décrit du centre C avec % *j. un raion $CM = r$, & dont l'équation, en nommant z l'abfeifle CP, & u l'ordonnée PM, ett $zz+uu = rr$. On demande en combien de points (a circonférence rencontre la droite AB , qui paflê par les points A & B des Axes CA» CB,dont les diliances à l'Origine lont $CA=* & CB = b$. Soit nommée AB, c , & , à caulê du triangle rectangle ACB, on aura ce $-aa * \{ * bb$. Si l'on prend AB pour PAxe des ordonnées, en regardant $AQ^{[x]}$ comme l'abfciflê ^ point M , & $QM \setminus y$] , parallèle à ab , «o«,...ic ion ordonnée, on aura [§. 24 J $u=h-c & z=x - a+"c'$ Les valeurs de * & de u fubftituées dans l'éq: $zz+uu = rrr$ 2 axy 2 nay la transforment en $x x - 2 ax \sim -a a - \sim + c c \sim 7T"* \sim =rr'$ ou $[Pu'^{uc} "*" + bb\text{Lcc}\sim \text{ en } xx - 2/tXV 2AAV 2ax + aa - \{ \setminus yy = rr$, qui exprime la nature du Cercle relativement aux coordonnées $AQJ^{*}] & QM [y]$. Si Ton rait , dans cette équation , $x= o$, elle fc réduira à $aa - \sim ^l+yy \sim rr$, qui marque par (es racines les interférons du Cercle MEF & de la Droite AB. Cette équation eft du même degré TMe l'Ordre de la Courbe. Un Cercle peut donc couper une Droite en autant de points

The text on this page is estimated to be only 24.33% accurate

64 DES DIFFERENS ORDRES Pt. UL points qu'il y a d'unités dans l'exposant de Ton Ordre, CM.in. c'est-à-dire, en deux points; & cela arrive quand les racines $\sqrt{aa^2 - 4a^2cc}$ (a* — aacc^rrcc) aaz—y/Crrcc — aabb) nées y=. —, ou de l'éq : $aa - 4yy = rr$ font réelles : car ces racines nées de Tignent les deux ordonnées primitives AE, AF par l'extrémité de laquelle paflê la circonférence. Mais quand ces racines font imaginaires, les intersections le font auflê. Cela arrive lorsque $me < a^2bb$, ou $rr < 4$, foit $r < ab$, c'est-à-dire quand le rayon [r] CM est plus petit que $ab - \frac{r^2}{2a}$, qui est la perpendiculaire CD" abaissée du centre C sur la droite A'B' : Alors les intersections F & E disparaissent; la Droite ne coupe plus le Cercle. Que si ces racines deviennent égales; ce qui a lieu quand $me = a^2bb$, ou $r = y$, quand le rayon CM est égal à la perpendiculaire CD' ; alors les deux points d'intersection se confondent en un seul, le Cercle ne rencontre la Droite A'B' qu'en un seul point D'. 40. Puis qu'une Droite ne peut couper une Ligne algébrique du premier Ordre qu'en un seul point [§. prec] la Ligne algébrique du premier Ordre ne peut être courbe; car une Courbe peut toujours être coupée par une Droite en plus d'un point. Donc la Ligne droite est la seule Ligne algébrique du premier Ordre. C'est ce que l'on voit encore évidemment par le détail des équations de courbes. Elles ne peuvent avoir que trois termes $ax^2 + by + ex$. Mais elles peuvent ou les avoir Google

The text on this page is estimated to be only 26.75% accurate

I Digitized by Google



The text on this page is estimated to be only 29.67% accurate

Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 28.01% accurate

DES LIGNES ALGEBRIQUES. 6\$ C«t III. avoir tous trois, ou n'en avoir que deux, ou même n'en Pl. iv. 5. 40. avoir qu'un : Ce qui fait trois cas" diflerens. I. Lorfque l'équation du premier Ordre eft complette , c'eft-à-dire , lorfqu'elle a fès trois termes , on peut toujours fuppofèr que le terme confiant a eft (êul & polît if dans le premier membre. Les deux autres termes by & ex font le fécond membre, où ils peuvent être pofitifs ou négatifs. Soit A B la Ligne des abfciffes , & AD celle des ordonnées, faifant cntr'elles un angle quelconque DAB. Cas I. Si dans l'équation réduite à la forme que nous venons de dire, b & c font pofitives ; que Péq : (oit $a = 3by - f - ex$: elle repréfente une Droite. Pour avoir (à pofinon , il lui fût d'avoir celle de deux de fes points, de ceux, par exemple, où elle coupe les deux Axes. On aura l'un en faifant $x = 0$, & l'autre en fai $\{ant^{\wedge} = 0$. Qu'on faflê $x = 0$, & Péq : by $4 * c x$ (è réduit à $a = by$, ou $y =$ On prendra donc fur l'Axe des ordonnées AD, du côté pofitif , A E égale à $\sim$, qui eft la troifième proportionnelle à la ligne b, à la ligne a , & à la ligne qu'on prend pour l'unité , & on aura le point E , où la Droite cherchée coupe l'Axe des ordonnées [§.15]. De même, fi on fait $jy = 0$, Pcq: $dss^{\wedge} + tt$ le réduit à $a = ex$ ou $x = -^{\wedge}$; de forte que prenant fur AB l'Axe des abfeiffes , du côté pofitif, AC égale à $\pm$, qui eft la troifième proportionne à c , a , & 1 , on aura le point C c& la Droite cherchée coupe l'Axe des abfciffes. Il ne refte donc plus qu'à mener cette Droite C E. Je dis qu'elle eft repréfentée par Péq : $a = by > \backslash * cx$. <' ' :^: H Car fi d'un point tjuelconque de cette Droite on'-menc'l totrod. à

PAlyfe des Lignes Courbes, l une Digitized by Goc

The text on this page is estimated to be only 23.12% accurate

66 DES DIFFERENS ORDRES fc. IV. une parallèle à AD, on déterminera une abscisse x & une Ch. m. ordonnée[^]. Ce point peut être pris, ou sur la partie S^4 EC, ou au-delà de C, ou au-delà de E. i°. Si le point est M , entre E & C, l'abscisse AP > 0, & l'ordonnée PM $[y]$ sont toutes deux positives. Et les triangles semblables CAE, CPM donnent $CA [\sim] : AE [\sim] = CP [-x] : PM[y]$. Donc $\sim - \sim = ^$, ou, transposant $V-$, multipliant par bc , & divisant par ay $a = \frac{bc}{ay} x$. 2°. Si le point m est pris au-delà de C, l'abscisse Ap $[x]$ est positive & l'ordonnée pm $[-y]$ négative. Et les triangles semblables CAE, Cpm donnent toujours $CA[-] : AE [ij] = Cp[* - pm[-y]]$. Donc qui (c réduit aussi à $a = \frac{bc}{ay} x$. g°. Si le point f est pris au-delà de E, l'abscisse Af $[-x]$ est négative & l'ordonnée fu est positive. Les tr. sembl. CAE, donnent aussi $CA[-y] : AE [y] = Cif [-x + y]$: // x' / i cl AN $*t*[y] >$ ou $-j - j - \frac{c}{y} >$ qui se réduit encore à 2. Si b & $*$ sont négatives, l'équation fera $* = -47 - ex$: & faisant $x=0$, on aura $a = -by, o \parallel y =$. $Y = AE$ négative, & en faisant $tf = 0$, on aura $* = ifc$. »?• —, ou $* = AC$ aussi négative. Et Ton prouvera, comme dans le n°. précéd., que EC est la Droite que représente Téq: $a = -by - ex$. 3. Si zed by Google

The text on this page is estimated to be only 21.64% accurate

DES LIGNES ALGEBRIQUES. 67 ci. m. ?. Si b est positive & c négative, l'équation fera s — P*. IV. *•* ^ — ex. Et failant *=o, on aura a= by 9 ou > — ^ ^ j=:AE positive ; mais faifant > = o, on aura ou *= — ~ — AC négative. 4. Enfin , fi £ est négative & c positive , l'équation étant * = — + * x, on trouvera que x = o donne J= — 7 = AE négative, & que y = o donne *=y = AC positive. Donc, en général, l'équation du premier Ordre étant complète & réduite à cette forme a = + byz±zcx > où l'on fuppose a positive : Si b & c font toutes deux positives , la droite EC foûtend l'Angle des coordonnées positives : Si b & c font toutes deux négatives , E C fbûtend TAngle des coordonnées négatives : Si b coefficient d> est positif & c coefficient d'* négatif, E C fbûtend l'Angle des ordonnées positives & des ablettes négatives. r .rSi^c°ëfficient \$ y est négatif & c coefficient d'x positif, E C foûtend l'Angle des abCciCTes positives & des ordonnées négatives. Cas 1 1. Si l'équation du premier Ordre n'a que deux termes , c'est que a, ou b, ou c font zéro. 1. S* a est zéro, & *- font zéro: les parties AC, A E prises fur Jes deux Axes devenant nulles , la Droite E.C paflè par l'Origine [§.14]. Cependant ces parties * AE> to" meme qu'elles s'évanouïTent , gardent leur raifon de j à j ou de r à h : ce qui détermine la poI 2 firioa Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 26.07% accurate

DES BIFFER ENS ORDRES te r/: fition de la Droite reprefentée
par Péq : $\pm^{\pm};x\sim o$. Ck.in. Car fi Ton prend $A c = c$ fur Taxe des abfciflès , &
A e s? b fur l'axe des ordonnées , toutes deux pofitives , ou toutes deux
négatives , fi b & c ont dirTérens fi* îo. gnes : mais Pune pofitive & l'autre
négative , fi h & s r

The text on this page is estimated to be only 25.86% accurate

DES LIGNES ALGEBRIQUE S. est donc représentée par l'éq : $y = + -x$, ou $a = z^{tzy3}$ réduite de l'éq. générale $a \sim \pm zby \pm c x^9$ par la suppression de $c = 0$. Cas 1 II. Si l'équation du premier Ordre n'a qu'un (eul terme, ce ne fera pas le terme a , qui donneroit $a = 0$, équation impossible, puisque a est une grandeur donnée : mais ce sera le terme by , ou le terme cx 1. Si l'équation est $by = 0$, on aura $y = 0$ qui représente Amplement l'Axe des abscisses. Les ordonnées de cet Axe sont zéro, quelque abscisse qu'on prenne. 2. Si l'éq. est $ex = 0$, on aura $x = 0$, qui représente l'Axe des ordonnées, dont chaque point a son abscisse égale à zéro. 44. Un raisonnement tout semblable à celui du §. 9* démontre qu'une Ligne ne sera coupée par une Droite parallèle à l'axe des abscisses, qu'en autant de points au plus qu'il y a d'unités au plus haut exposant de x dans son équation ; & qu'elle ne sera coupée par une Droite parallèle à l'axe des ordonnées qu'en autant de points au plus qu'il y a d'unités au plus haut exposant de y dans son équation. Par ex, l'éq. : $x^1 y^1 - 1 = 0$ exprime une Courbe du troisième Ordre, qui peut être coupée en trois points par une infinité de Droites, qui ont diverses portions. Mais par une Droite parallèle à l'axe des ordonnées, elle ne peut être coupée qu'en un point ; parce que dans son équation y ne paraît pas le premier degré. Et par une Droite parallèle à l'axe des abscisses, la Courbe ne peut être coupée qu'en deux points, parce que dans son équation x ne s'élève qu'au second degré. En effet, Si la Droite parallèle aux ordonnées coupe l'Axe des abscisses en un point éloigné de l'Origine de la distance m , on doit regarder cette Droite comme l'ordonnée de l'abscisse m . Mettant 1 3 donc

The text on this page is estimated to be only 24.90% accurate

70 DES DIFFERENS ORDRES vi. iv. donc m pour x dans l'équation de la Courbe, elle se transforme en $my - x^m = 0$, qui n'a qu'une seule racine $y = \frac{x^m}{m}$. La Droite parallèle aux ordonnées ne rencontre donc la Courbe qu'en un seul point. Si la Droite parallèle aux abscisses coupe l'Axe des ordonnées en un point dont la distance à l'origine soit a , on la regardera comme l'abscisse de l'ordonnée a . Et mettant a pour y dans l'équation, elle le changera en $x^m - a^m = 0$, dont les deux racines $x = \pm \sqrt[m]{a^m}$ montrent que cette Droite rencontre la Courbe seulement en deux points; qu'elle ne la rencontre qu'en un point, si ces deux racines sont égales, ce qui a lieu quand $a = 0$, quand $m = 2$ & qu'elle ne la rencontre point du tout, si ces deux racines sont imaginaires, ce qui arrive quand $a^m - 4b^m < 0$, quand $m > 2$. Si l'on cherche généralement en quels points (se rencontrent deux Lignes algébriques dont les équations sont données; on doit considérer que quand deux Lignes (se rencontrent, elles ont au point commun une abscisse & une ordonnée commune. Si donc x & y sont les coordonnées d'une de ces deux Lignes, & z & u les coordonnées de l'autre, on aura à chaque point de rencontre quatre équations 1°. $x = z$. 2°. $y = u$. 3°. l'équation de la première Ligne en x, y & confiantes. 4°. l'équation de la seconde Ligne en z, u , & confiantes. On peut donc, en vertu des deux premières équations, substituer dans

DES LIGNES ALGEBRIQUES. 71 dm. dans la 4^{toe} * pour % ,
& y pour u. Alors il refie deux Pi- IV. S- 4*. équations en x, j, & conitantes,
qui font celles des deux Lignes propofées ; par le moyen delqueHes fàifant
évanouir y , on aura une équation en x & confiantes , dont les racines x
marquent toutes les abfcifles qui répondent aux points de rencontre des
deux Lignes. Comme aufli , fi par le moyen des deux équations on fait
évanouir x , on aura une équation en y & confiantes , dont tes racines y
donnent toutes les ordonnées des points de rencontre. Pour déterminer
precifément ces points , il faudroit chercher & IWciflè & l'ordonnée de
chaque point de rencontre , en examinant par Tune & l'autre équation queU
les (ont les ordonnées qui répondent aux abfcifles qui font présentées
comme abfchiës des points de rencontre ; ou , fi Ton le trouve plus facile ,
quelles font les abfcifles des ordonnées que l'équation en y & confiantes
donne comme ordonnées des points de rencontre. On verra par là quels font
les points communs à l'une & à l'autre Ligne, c'ett-àdire , quels font les
points qui font véritablement points de rencontre. 4\$. Cela fèroit d'autant
plus nécelTaire , qu'encore qu'il (bit certain que chaque point de rencontre
donne une racine x dans l'éq : en x & confiantes , & une racine y dans l'éq:
en y & confiantes; on ne peut pas conclure réciproquement , que chaque
racine x , ou chaque racine y, donne un point de rencontre. Dont la raifon cft
que chaque racine x marque feulement qu'à une même abfcifle les deux
Lignes ont une même ordonnée , fans dire que ces deux ordonnées foient
réelles. Le calcul qu'on a fait n'emporte pas précifément la rencontre des
deux Lignes , mais feulement l'égalité d'une abfcifle & d'une ordonnée ;
égalité qui peut avoir lieu entre les quantités imaginaires comme entre les
grandeurs réelles. Dans ce cas , on peut dire qu'à Digitized by Google

y² DES DIFFERENS ORDRES r*. iy. qu'à ces abscisses
 communes répondent des intersections c*. iv. imaginaires, que le Calcul
 donne aussi bien que les réelles. §, 4J' La même chose peut arriver par rapport
 aux racines y. Cette équivoque feroit levée en cherchant les ordonnées y
 des abscisses x déterminées par l'éq : en x & constantes ; ou en cherchant les
 abscisses x des ordonnées y déterminées par l'éq : en y & constantes. On
 verroit par là où les points de rencontre sont réels ou imaginaires. Mais ce
 Calcul fera long & souvent impraticable. 44. Si x ou y ne monte qu'au
 premier degré dans l'une des deux équations proposées ; on est sûr, si c'est y
 , qu'à chaque abscisse il ne répond qu'une ordonnée , qui par conséquent ne
 peut jamais être imaginaire , puisqu'en sa propre expression il n'y a point de
 grandeur radicale. Ainsi chaque racine réelle de l'éq : en x & constantes
 marque un point de rencontre réel & non imaginaire. De même , si c'est x
 qui ne monte qu'au premier degré dans l'une des équations proposées ; on
 est sûr que chaque racine réelle de l'éq : en y & constantes , indique un point
 de rencontre réel. Soient proposées, par ex. ces deux éq: $yy + 2/tx = 0$ & $yy + 4xx - 10ax - \sqrt{6}aa = 0$. En éliminant y on trouvera $4x^2 - 12ax - \sqrt{6}aa = 0$, qui a deux racines , toutes deux réelles $x = 4^*$ & $x = -a$. Qu'on
 substitue la première racine 4^* au lieu de x, dans l'une & l'autre des deux éq
 : proposées , elles se réduiront à $yy + 5aa = 0$ qui n'a que deux racines
 imaginaires $y = \pm 4^*i$ & $y = -4^*i$. A l'abscisse 4^* répondent
 deux ordonnées égales dans chaque Courbe. Cela semble promettre deux
 intersections : mais ces ordonnées sont imaginaires, & les intersections le
 sont aussi. Qu'on substitue présentement dans les éq : proposées la seconde
 racine $-a$ au lieu de x > elles se réduiront l'une & l'autre à yy

The text on this page is estimated to be only 22.00% accurate

DES LIGNES ALGEBRIQUES. 73 OIIU. kyy — $2 \cdot 4 = 09$ qui a deux racines réelles ; $= +V2$, Pl. ly. S- 44- — 4^2 . L'abfciflè — a a donc dans chaque Courbe deux ordonnées réelles & égales, Tune pofitive, Pautre négative ; qui donnent par conféquent deux points d'interclè&ion réels, l'un au-deflus, l'autre au-deiïbus de la Ligne des ablcifles. Mais , fans ce Calcul , on auroit pû trouver le nombre des points d'interfe&ction , en confidérant que dans Péq: $yy^2 + 2x = 0$, la variable x ne monte qu'au premier degré'. Elle n'eft donc jamais imaginaire , quelque valeur qu'on donne à y. Ainfi il fuffit de chercher les racines de Péq : en y & confiantes, qui fe trouve en faifant e'vanouïr x, Car toutes les racines réelles de cette équation donnent des interfe&ctions réelles. Cette équation eft $y^4 + 6aayy - 16^2 = 0$, qui a ces quatre racines $y = +b \cdot V 2 \gg JX = -ay/2, ^{+4^2 - 2} = - \sqrt{J} - 2$, dont les deux premières, qui font réelles, donnent des interie&ctions réelles , & les deux dernières , qui font imaginaires , ne donnent que des interle&ctions imaginaires. * 45. On trouvera dans une infinité' d'Exemples , ce qu'on a pû remarquer dans celui-ci , qu'une feule. abfcik fe , [ou qu'une feule ordonnée] donne plufieurs points d'interfe&ction. Il eft très poffible qu'une mcmeabfciflè ait, dans les deux Lignes, plufieurs ordonnées, entre lelquelles il y en ait plus d'une qui (bit commune aux deux Lignes. Alors, il y a plus d'in ter. Actions que de racines réelles dans Péq : en x & conllantes , puifqu'une Icule & même racine donne plus d'une iuterfe&ion. Si l'on propofè, par ex. ces deux éq. $yy + xx = a$ & V^n trouvera cette éq: $sLéUtx - (2a - + dyfc$ dis Lignes Courbes. R ^Y=09 Jim' Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 23.40% accurate

74 D IF FER E NS ORDRES » « i , * *f* • / ^ Ch. TFL' fcy=o,
qui n'a que ces deux racmes >h — — :y(2

The text on this page is estimated to be only 16.71% accurate

DES LIGNES ALGEBRIQUES. 7j Cfc.nL deux éq : $Ayy * By + C = 0$, & $Dyy + Ey + F = 0$, Pl. Iy. lit - on x éq : $y^2 + By + C = 0$, & $Dyy + Ey + F = 0$, élimine j , on parviendra à cette éq : $\{AF - CDy + (AE - BD)(E - BF) = 0$, qui a autant de racines qu'il y a d'interleâions. Pour l'appliquer aux équations proposes ci- deOus, $yy + xx as = 0$, & $y y^4 + b^4xx - (*)^2 = 0$, on fera $A=i, B z=0, C=xx-as, D=i, E=0, F=$
 $(^=j)^4 - (* - J)^2$, & ces valeurs fubftituées dans l'éq: $(4fF - CDY + (AE - BD)(CE - 5F) = 0$, la changent en $V&y * i + hT - **^{**} - 4* y = 0^*$
qui , divXie par hb^4 cil juftement le quarré de Péq j 4 a ZéilÇIy $XX - ^M - r^4) = 0^>$ qu'on a trouvée ci-deffus. Dans celle-ci x a les deux mêmes racines +■ — ■« v'C*** — & — $T7^{aé*} - ^*>5$ mais chacune de .ces racines eft double, parce qu'à chaque abfciiê x répondent deux iaterlèâions.

46. Mais fi Ton ne cherche pas tant à connokre en combien de points lè rencontrent deux Lignes dont les équations l'ont données , qU'à (avoir , [ce qui a auffi fon ulàge j en combien de points une Ligne d'un Ordre donné peut rencontrer une autre Ligne d'un Ordre aulfi donné ; on doit concevoir ,

The text on this page is estimated to be only 24.88% accurate

DES DIFFERENS ORDRES 17. il refiera une équation , qui aura au moins autant de racines Ch. iil qu'il y a de points de rencontre des deux Lignes , puif- 5> que chaque point de rencontre a fôn abfcific & Ton ordonnée particulière. Or il eu* démontre' * que fi Ton a deux variables , & deux équations indéterminées qui expriment le raport de ces variables avec des confiantes , dcfquelles Tune (bit de l'ordre m & l'autre de l'ordre n ; lors qu'au moyen de ces deux équations on chafic une de ces variables , celle qui refte n'a , dans l'équation finale qui la détermine, que mn dimenfions au plus. Elle ne peut donc avoir, dans cette équation, que mn racines au plus. Par conféquent , deux Lignes algébriques décrites fur un même plan , ne peuvent fc rencontrer qu'en autant de points , au plus , qu'il y a d'unités dans le produit des nombres qui font les expofants de leurs Ordres \. Une Ligne, par ex, du 4e. Ordre ne peut rencontrer une Ligne du 5e. Ordre , qu'en 1 2 points , au plus : & une Ligne du 5e. Ordre ne fauroit rencontrer une Ligne du 12e. Ordre qu'en 60 points , au plus. 47. C e principe femble d'abord être en contradiction avec celui du §. 3 8. On peut toujours décrire une Ligne du fécond Ordre par cinq points donnés , quelle que ibit la pofition de ces cinq points. Si trois d'entr'eux font en ligne droite , cette Droite coupera en trois points la Ligne du fécond Ordre qui patte par les cinq points donnés. On * Ce Principe , purement algébrique , devroit être démontré dans l'Algèbre. Comme je n'en connois aucune qui en donne la DémonftraUon , j'ai crû devoir l'inférer dan* Y appendice, iV°. 4. ^ ■ . t Mr. Mac-Làurin a démontré la même chofe , mais je ne crois pas que fa Démonftration ait été rendue publique. Voiez TfA^f. Pbilof. N°. 430. pag. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 19.00% accurate

DES LIGNES ALGEBRIQUES. 77 c«.ir. On a vû pourtant [§. 39. ou précéd.] qu'une Droite ne Fi.hl 47' peut couper une Ligne du fécond Ordre qu'en deux points. Comment accorder ces deux conféquences oppofées ? 11 n'y a qu'un feul moyen. C'elt de dire que , dans ce cas , la Ligne du fécond Ordre qui pafle par les cinq points donnés , n'eil pas une Courbe , mais le Syttème de deux Droites, dont l'une eft celle-là même qui pafle par les trois points donnés en droite ligne & dont l'autre pafle. par les deux points reliants. Le Calcul confirmera la vérité de cette conciliation. Pofons , dans l'Exemple du §. 38 , que les trois points »*. A, D, E (oient en ligne droite. Comme on a pris AE pour l'Axe des ablcifles , le point D fe trouvant far cet Axe, l'ordonnée Dd [4^] cil zéro, ce qui réduit l'éq : $sd(y\{b - d) - (j> - c)\$)xx - (yKb - <*)(\bullet - y) - O-O <-cT;)iry + yK*j - y) - (\bullet - <*)» XV - y - *eby$ o pafle par les deux autres points B , C. • En effet * = o donne $yz=zb=zAH$, & $x=ry=:Ac$ donne $jf = f\pm=cC$. Donc la Ligne pafle par les points Ainfi une Ligne du lècond Ordre décrite par cinq points donnees, dont trois font en droite ligne, cft.nccellàirement k'Syùent de deux Droites , dont Tune pafle K 3 - par Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 22.16% accurate

78 1>ES D7FFERENS ORDRES UQl. iy. par ces trois points , & Tautre par les deux points ref Cn.m. tants. 5- 4fCet Exemple , & la néceffité d'admettre cet unique dénouement, nous autoriie à affirmer généralement *: Que quand , dans le nombre : : . • | - : v de points par lefquels on peut & veut faire pafler une Ligne de l'Ordre v , il y a plus de tv de ces points qui fe trouvent fur une Ligne de l'ordre..* inférieur à w, alors la Ligne cherchée de Tordre v n'eft pas une Ligne unique , mais le Syftème de deux ou plufieurs Lignes, 1 une desquelles eft cette même Ligne de l'ordre / fur laquelle fe trouvent plus de tv points donnés. Car autrement , deux Lignes , Tune de l'ordre / , l'autre de Tordre v , le coupejpiet en plus de tv points.* xx qui eft impoffible [§. 46 •]> 48. Une autre contradiction apparente entre les §4. ,46 & 1 S , eft celle-ci. Puisqu'une Ligne de l'ordre m ne peut rencontrer, une Ligne de l'Ordre », qu'en points, une Ligne, de l*Ordre v ne rencontrera une autre Ligne du même ordre qu'en w points. . Si donc w eft égal ou plus grand que le nombie iv«»f«x.-v, qui elt celui jdes. points qui déterminent une Ligne de Tordre v, on pourra faire pafler plus d'une Ligne de Tordre v par. iWri-iv poiuts; -ce qui lèmbie contraire au §. \$8 t. Ainfi deux Lignes .du troifieme Oidre fè pouvant couper en 9 points, h Ton .afligne ces 9 points pour y faire palier une Ligne du troiiième Ordre ; il eft clair que les .deux Lignes qui fè coupent dans ces 9 points (àUfont également à ,ce qu'on déjîre. L'équation de la Ligne qui doit pafler par. ces 9 points /i'ert donc pas déterminée. De même deux Lignes du qu*. .trième Ordre fe peuvent couper en 1 6 points. Et J'on a établi % Idem , ibid. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 25.22% accurate

DES LIGNES ALGÈBRES 1QJJE S. 79 Cn. ni. & abli [§. 38] que 14 points suffisent pour déterminer une Plîy. 4^e Ligne du quatrième Ordre. Mais si ces 14 points sont pris entre les 16 où ces deux Lignes se coupent, Tune & l'autre Ligne satisfait au Problème, qui est, par conséquent, indéterminé Cette contradiction le lève par la Remarque qui termine le §. 38. C'est qu'encore qu'on ait autant d'équations qu'il en faut, généralement parlant, pour déterminer tous les coefficients de l'équation prise pour représenter la Courbe qui doit passer par un certain nombre de points donnés, il peut pourtant arriver que ces coefficients* soient indéterminés. Alors l'équation prise relie indéterminée & représente une infinité de Courbes du même Ordre. D'où il. fait, Que si les 9 points, par lesquels on veut décrire une Ligne du troisième Ordre, ont une position telle qu'on puisse faire passer par ces 9 points deux Lignes. de cet Ordre, il pourra passer par ces mêmes 9 points, une infinité de Lignes du troisième Ordre. Et de même,, que si deux Lignes du quatrième Ordre se coupent en 16. points, parmi lesquels on en choisit 14 quelconques, il y a une infinité de Lignes du quatrième Ordre qui peuvent passer par ces 14 points, &c Ce qui est un véritable paradoxe. CHAPt

The text on this page is estimated to be only 24.87% accurate

80 * E M A R Q _ U E S CHAPITRE IV. Quelques Remarques for
la Conftruïion géométrique des Egalités, fi. 17. 49- "P\Es PrînciPcs étab, is
à la fin du Chap. précédent, §.4j>. yj découle la Méthode ufitée pour la
Conftru&ion des Egalités déterminées. Elle confiltc à choifir deux
équations indéterminées , telles que fàifànt évanouir une des deux variables
que ces équations renferment , l'équation déterminée , qui relk après cet
évanouïOement , loit l'égalité même qu'on propofoit à conftruire. Si l'on
décrit iùr un même plan & d'une même Origine les deux Lignes que
reprélèntent ces équations indéterminées , & qu'on mène les ordonnées de
tous les points où ces deux Lignes (è rencontrent, elles (èront les racines de
l'Egalité propofée [§. 42]. On fupposè ici que y cl\ l'inconnue de l'égalité
propofée , & x la variable qu'on fait évanouir. Soit propofé , par ex. ce
Problème fi fiimeux dans l'Antiquité, de trouver entre deux Droites données
bf deux moyennes proportionclles. Si on nomme la première^, la féconde
(êra-^, puifque a: yz=y.-^-. On aura donc cette proportion a:y=?-^\\ b, qui
donne Féq: =.ab y ou / =.aab ; Egalité du troifième degré , que ni l'Algèbre ,
ni la Géométrie Elémentaire ne peuvent réfoudre généralement que par
approximation. Mais, en iruroDigitized by Google

The text on this page is estimated to be only 25.94% accurate

SUR LA CONSTRUCTION DES EGALITES. U Ou IV.

introduisant une autre inconnue x , qui soit, par ex. la Puissance. >• «* féconde moyenne proportionnelle, on aura ces deux proportions $a : y = y : x$, Se $y : x = x : b$, qui donnent ces deux équations indéterminées $ax = yy$ & $xx = by$, lesquelles, faisant évanouir x , rendent l'Egalité qu'on avoit ci-dessus. Car la première de ces deux équations donne $x = \sqrt{ay}$, & cette valeur substituée dans la seconde la transforme en $\sqrt{ay} = b$ ou $y = \frac{b^2}{a}$, & divisant par $\sqrt{a}$, $y = \sqrt{a}b$. Si donc on décrit, d'une même origine A & sur les axes, 3^e mêmes Axes, les deux Courbes CAM, BAM représentées par les deux équations $ax = yy$ & $xx = by$, & que de leur commune intersection M on abaisse l'ordonnée MP $\perp$ xy elle sera la racine de l'Egalité cubique $y^3 = aab$, & la première des deux moyennes proportionnelles entre a & b . Et comme x représente la féconde de ces deux moyennes, l'abscisse AP[x] sera cette féconde moyenne, en sorte que les quatre Droites a , MP, PA, b , sont en proportion continue. Cela suit du §. 42. Car y & x sont deux variables, dont le rapport pour tous les points de la Courbe CAM s'exprime par l'équation $ax = yy$, & pour tous les points de la Courbe BAM par l'équation $xx = by$. Donc au point M, commun à ces deux Courbes, le rapport de y à x s'exprime en même temps par les deux équations $ax = yy$ & $xx = by$. Ces lignes y & x cessent donc d'être variables, & deviennent déterminées par les Egalités $y^3 = aab$ & $x^3 = abb$, qui résultent de l'évanouissement de x & de y , & qui déterminent la valeur de l'ordonnée & de l'abscisse au point M. En effet, puisque la Courbe CAM est représentée par l'équation $ax = yy$, ou, ce qui est la même chose, par la proportion $a : y = y : x$ l'Analyse des JJignes Courbes. L'ion Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 26.99% accurate

82 ' REMARQUÉS Pl.iv, «on quelque point M qu'on prenne fur cette Ch.iv; Courbe CAM, l'ordonnée MP [jy] ett toujours moyenne proportionnelle entre la Droite donnée a & l'abfciflè AP[x]. Et puifque la Courbe BAM eft reprélentée par Péq: $xx = by$, qui fe réduit à la proportion $y:x = z x: b$; Pablçillè AP [*] d'un point quelconque M de cette Courbe BAM eft moyenne proportionnelle entre l'ordonnée M P [y] & la Droite donnée b. Donc, au point M * commun à ces deux Courbes, on a ces deux proportions à la fois, $a : PM = PM : AP$, & $PM : AP = AP : b$. Donc PM & A? font les deux moyennes proportionnelles entre a & b. 50. Le choix des équations indéterminées qui doivent rendre l'Egalité propofée, lorlqu'on aura fait évanouît une des variables, n'a rien de difficile. On en prend une, prefque arbitrairement, & l'on tire de cette équation la valeur de y, ou de yy, ou de /, &c. en * & en constantes, ou même en y, x Se confiantes. On fubituë cette valeur en un ou en plufieurs termes de l'Egalité.* ce qui la change en une Equation indéterminée, qui, avec celle qui a été choifie, redonne l'Egalité propofée, en faitant évanouir x. On peut auflî combiner les deux équations indéterminées qu'on a trouvées, en les ajoûtant enfembk, en retranchant l'une de l'autre, ou en d'autres manières, qui fourniront toutes de nouvelles équations indéterminées, parmi tefquelles on aura le choix de celles qui paroûront les plus convenables. Dans l'Exemple du §. précéd. l'Egalité propofée à cont truire étott $yi = aab$, & Péq : indéterminée qu'on avoit choifie étoit $sx = yy$. On peut fubftituer cette valeur de yy dans le premier membre de l'Egalité, ce qui la transforme en $axy = aab$ ou $xy = ab$, autre équation indéterminée, qui, avec la première $axz = yy$, conftruira l'Egalité $y' = aab$. On peut auffi multiplier ces deux équations

The text on this page is estimated to be only 26.72% accurate

SUR LA CO INSTRUCTION DES EGALITE S. 1} Cr. v. lions
Tune par l'autre, & on aura axxy = aby (bit oex — ?u fi. je by , qui cil
l'équation dont on a fait ufage dans le §. préc. pour conftruire PEgalité
propoféc. On peut encore ajouter * ou (ôultraire , (oit les deux premières
équations , ce qui donne $ax > \{ * xy = yy -f- ab$, & $ax xy = yy - ab \setminus$ (bit les
deux dernières, d'où réfultent $xy *^{xxz} = ab - \setminus -by^0\%$ & $xy - xx = ab - by$;
(bit enfin, la première & la dernière, d'où l'on ure $ax^{xx} - yy <^{by}9$ & ax
 $- xx = yy - by$. On peut encore, fi l'on veut , multiplier ou divifer une de
ces équations par un nombre quelconque n , & ajouter au produit ou en
retrancher quelque autre e'quation de celles qu'on a trouvées. La première ,
par ex. multipliée par», donne $nax^{==} > 7yyi$ à quoi ajoutant la lèconde $xy =$
 ab , on aura $nax > \setminus * xy ss nyy^{ab}$. On voit aflcz par ce (impie Exemple ,
qu'on peut trouver une infinité d'équations indéterminées, entre lefquelles
on choifira celles qu'on croira les plus convenables. Ici , par ex. toutes ces
équations étant du (ècond Ordre , il conviendra de choifir $ax - xx = yy -$
 by , qui déligrie une Circonférence de Cercle , la Courbe la plus connue &
la plus aifée à décrire , & on la combinera avec celle qu'on voudra des
autres équations trouvées. 51. On a dit que le choix de la prémère des deux
équations indéterminées qui fervent à conltruire une égalité ert prefque
arbitraire. Ce qui empêche qu'il ne le (bit entièrement , c'eft la crainte que
les interlédions qui déterminent les racines de l'Egalité ne (oient imaginaires
[§. \\\ 11 faut que les Lignes choifies ayent des abfciflès réelles qui
répondent aux ordonnées qui font les racines de l'Egalité , ou des ordonnées
réelles qui répondent aux abfcit fes qui font les racines de l'Egalité
propofée. Autrement , il arrivera que les interjections qui devroient
déterminer

The text on this page is estimated to be only 25.45% accurate

84 REMARQUES ft- IV. ces racines feront imaginaires , & que
 l'Analyfte fera fru(l Ch. iv. tré de Ton attente \ §•«'• Si Ton avoit , par ex. à
 conf, on voulût employer pour cela les éq : $x' - ayy - o$ & $xyy + 15x^4 - 144x^3 = o$, qui rendent l'Egalité $x^4 - 15x^3 - 144x^2 = o$, en faifant
 évanouir x^2 . On trouvera , en prenant $u > AB$ & AD pour les deux Axes , que
 l'éq : $x^4 - ayy - o$ donne la Courbe EAF , qui , du côté [des absciffes
 positives , a deux branches égales & femblables , de part & d'autre de l'axe
 des absciffes , mais qui , du côté des absciffes négatives , n'a aucune
 branche , toutes les ordonnées $x^2 y$ [$= y^2 - x^2$] étant imaginaires , quand les
 absciffes x font négatives. On trouvera , au contraire , que l'éq : $xyy +$
 $15x^4 - 144x^3 = o$ repréente une Courbe GCH, qui tombe toute entière du
 côté des absciffes négatives , parce que x positive donne $y^2 = x^2 - 15x^3$
 [$= y^2 - 15x^3$] imaginaire. Ces deux Courbes EAF, GCH ne peuvent donc se
 rencontrer. D'où l'on croit porté à conclure que l'Egalité $x^4 + 15x^3 - 144x^2 = o$
 n'a que des racines imaginaires : fi l'on ne (avoit pas que des
 interférences imaginaires peuvent donner des racines réelles [§.4?] • En effet
 , fi on cherche les ordonnées que porte , dans l'une & l'autre Courbe ,
 l'absciffè — s ; on les trouvera égales entières & à $\pm \sqrt{15s^3 - 144s^2}$ Donc l'absciffè
 $x = -$ ou plutôt l'éq : $x^4 + 15x^3 - 144x^2 = o$, est une racine de l'Egalité $x^4 + 15x^3 - 144x^2 = o$
 $x^4 + 15x^3 - 144x^2 = o$: ce que le Calcul confirme aifément De même fi Ton cherche les
 ordonnées de l'absciffè — $2x$ on • Mt. Rolle, fJtft. de l'Acad. 1708 pag. 71 ,
 & 1709 , pag. 52. Et Mémoires de 1708 , pag. 339 , & de 1709 , pag. 320 ,
 & 419. igitized by Google

The text on this page is estimated to be only 27.63% accurate

SUR LA CONSTRUCTION DES EGALITES. 8y Ch. iv. on trouvera, pour Tune & Pautre Courbe, $\pm a^4v/ - a. pl. ry. *'5U$ Ainf l'abfcifle — $2a a$, dans les deux Courbes, une même ordonnée, quoique imaginaire, & cette abfciflè $x - : - 2 s$, ou plutôt l'éq: $x^4 + 2^* = 0$, est encore une racine réelle de l'Egalité $x^4 + 154' 4 \ll i4^{**} = 0$; ce que le Calcul vérifiera aufli. Le nombre des interlè&îons réelles des deux Lignes peut donc être moindre que le nombre des racines réelles de l'Egalité qu'on veut conftruire par le moien de ces deux Lignes. 52. Mais, en échange, le nombre des interlêétions des deux Lignes peut (ûrpafler le nombre des racines de l'égalité; parce qu'il le peui que plufieurs interférions ne donnent qu'une (eule racine; fç. , lorfque plufieurs points de rencontre n'ont qu'une même ordonnée, ou n'ont qu'une même abfciflc [§. 45]. Par ex. On veut conftruire l'Egalité $x^* - 15 a l x > \{ * i4^{**} = 0$ avec les deux éq: indéterminées $x^* - ayy \sim 0$ & $xyy - i5^{***} 4 \ll 14^{*'} = 0$, qui font reparoître l'Egalité propofée, en éliminant y . La première $x' - ayy = 0$ de ces deux équations donne, comme ci-deflùs, la Courbe Ftg. \$6t E A F, qui est toute entière du côté des abfciflès pofitives. Mais la féconde éq; $xyy - 154^{**} 44 i4^* = 0$, reprélente une Courbe compofée de trois portions féparées GBH, l K, i k. Ces deux dernières font du côté des abfciflès négatives, & la première du côté des abfciflès pofitives. En examinant l'éq: $xyy - 1 $alx^4 + 14 a' = 0$ ou $yy = \&$, on trouve que cette portion G B H est partagée par l'Axe des abfciflès en deux branches égales & femblables, qui partent du ppint B extrémité de l'abfcîûe $AB = \#^*$ -, qu'une abfciflè pofitive plus petite que AB n'a que des ordonnées imaginaires; mais qu'à commencer L S à B,

Digitized by Goc

The text on this page is estimated to be only 22.02% accurate

85 REMARQUES. .Bc.1V. àB , plus les abscisses augmentent , plus les ordonnées Cn augmentent aussi , sans palier néanmoins la grandeur $a > \sqrt{5}$, 5^* à laquelle les ordonnées ne parviennent que quand l'abscisse est infinie. La Courbe GBH rencontre la Courbe EAF en quatre points M, N , n, m. Il ne faut pourtant pas en conclure que l'Egalité $x^4 - 5x^2 + 14 = 0$ a quatre racines réelles. Car les intersections M , m , quoiqu'elles aient deux ordonnées MP $[\frac{4a}{2}]$ & mP $[-2^2]$, n'ont qu'une seule abscisse AP $[x = 2^*]$; Et les intersections N, n, quoiqu'elles aient deux ordonnées NQ $[-r^*]$ & n $[-a]$, n'ont qu'une (seule abscisse AQ $^x = a$). Ainsi les quatre intersections MjN, n, m ne donnent que deux racines $x - 2a = 0$, & $x - r = 0$. Et l'Egalité $x^4 - 5x^2 + 14 = 0$ n'a point d'autres racines réelles. Car si on la divise par $x - 2^* = 0$, & le quotient par $x - a = 0$ ou si on divise tout d'un coup l'Egalité par le produit $(x - 2a)(x - r) = 0 - 50 - 5ax - 2a^2$ on aura au quotient l'éq: $xx - f - 5ax - f - yaa = 0$, qui n'a que deux racines imaginaires, $+ \sqrt{-19}$ & $\sqrt{-1}$ / $-ip$. S g. On évite ces deux inconvénients , d'avoir plus & moins d'intersections qu'il n'y a de racines réelles dans l'Egalité qu'on veut contruire , en choisissant l'une des deux équations qu'on veut employer , telle que la variable y qui doit s'évanouir n'ait qu'une dimension. Car alors , cette variable, qui exprime les ordonnées des Lignes par l'intersection desquelles on construit l'Egalité , n'a qu'une seule valeur dans l'équation où elle n'a qu'une dimension , & cette valeur ne peut être imaginaire. Donc à chaque x réelle il répond une seule y , mais réelle. Il y aura donc [§. 44] autant d'intersections précisément que de racines réelles *. Représenté par Hermann , Observat. in Sched. Dni Rollb. ôcc. Miscell. Jkrd. Tom, III pag. iji.

The text on this page is estimated to be only 22.21% accurate

SUR LA CONSTRUCTION DES ' EGALITES. *? j Ch: IV.

Reprenons les Egalités des § §. précéd. $x^4 + 15x^2 + 4$ « Pt $14a^2 = 10$, & — $15x^3 + 4x = 0$, & pour les contruire, au lieu de l'éq : $x' - ayy = 0$, prenons $xx - ay = 0$, où y n'a qu'une (eule dimenfion. Qu'on {ubftituë 9 dans le premier terme des Egalités propofées, *y au lieu de xx, elles fe transformeront en $aayy + 15x^2 + 4y = 0$, & $Afjir - 15x^2 + 4y^2 = 0$, ou, diviiànt par $aa >$ en $yy - \frac{15}{a}x^2 + 4y^2 = 0$, & $yy - 15x^2 + 4y^2 = 0$. On contruira donc la première Egal : $x^4 + 15x^2 + 4 = 0$ par les interlè&ions des Courbes repréfentées par les deux éq : $xx - ay = 0$ & $yy - 15x^2 + 4y^2 = 0$; & la féconde Egal: $x^4 - 15x^2 + 4 = 0$ par les interjections des Courbes que reprélèntent les deux éq : $xx - ay = 0$, & $yy - 15x^2 + 4y^2 = 0$. La première. éq : $xx - ay = 0$ exprime une» Courbe. Fig h G A M. compofée de deux branches égales & femblables & js.* AC, AM; qui panant de l'origine A s'étendent à l'infini à droite & à gauche au -deflus- de l'Axe des abfciflès. Qu'avec cette Courbe on combine la Courbe EBiM re- Ftgm Jft préfentée par l'éq : $yy - 15x^2 + 4y^2 = 0$ & qui eft aufli compofée de deux branches égales & lèmbables 6M y B E, par tant du point B extrémité de l'ab(cicTe A B = s< — f44, & s'étendant à iïnfini vers la gauche,, deflus &• deObus l'Axe des abfciflès. Les-interfe&ions M, N de ces. deux Courbes CAM, EBM donneront les deux racine* de l'Egalité $x^4 + 15x^2 + 4 = 0$. En abaiflânt les ordonnées MP, NQ^on aura les abfciflès AP= — 2a Se AQ= — — -2a & x — -s a, ou $x^4 + 15x^2 + 4 = 0$ & *4- a~o, de cette Egalité. Et comme elle n'a que ces deux racines réelles % les Courbes CAM, EBM ne fe rencontreront qu'en cet deux points M & N. Mais fi avec la Courbe C A M, défignée par l'éq : $xx - ay = 0$ on combine la. Courbe EBM repréfentéc par 0 Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 26.80% accurate

88 R E M A R Q _ U E S 17. IVJq : $yy - 15x^4 + 14x^3 = 0$, qui est la même que la Ca.iv. Courbe EBM de la F/£. préc. transportée seulement de M la gauche à la droite, puis que ces deux équations ne diffèrent que dans le signe de x : on aura les racines réelles de l'Egalité $x^4 - 15x^3 + 14x^2 = 0$. En abaisant des points d'intersection M, N les ordonnées MP, NQ, on aura les abscisses AP=2* & AQ=*, qui font connaître les racines réelles $x = 2$ & $x = 1$, ou $x^2 - 2x = 0$ & $x^2 - x = 0$ de cette Egalité. Et ici, comme dans le Cas précédent, il n'y a ni plus ni moins d'intersections que de racines réelles. 54. C'est, sans doute, une nécessité que de prévenir les inconvénients cités aux §§. 51 & 52. Mais ce n'est que pour plus d'élégance qu'on joint à la Méthode cette condition, que les deux équations, qu'on employé pour déterminer une Egalité, soient les plus simples qu'il soit possible, & de l'Ordre le plus bas qui puisse suffire à la Construction *. Ainsi, comme pour construire une Egalité du 4e. degré, il faut de deux Courbes qui se coupent en 4 points, & puisqu'il ne faut pour cela que des Lignes du 2d. Ordre [§. 4.6] ; on regarderoit comme une faute contre la simplicité géométrique d'employer des Courbes d'un Ordre supérieur. Et comme une Egalité du 9e. degré, n'ayant que 9 racines, ne demande que 9 intersections, ce qui est le nombre de points où peuvent se rencontrer deux Lignes du 4e. Ordre [§. 46] ; il ne faudra pas employer des Courbes d'un Ordre plus élevé que le 4e, pour la construction des Egalités du 9e. degré. En général, les Egalités du degré w (è doivent résoudre par les intersections de deux Lignes de l'Ordre v , qui peuvent se couper en au- , tant * Jacobi Bernoulli Opers, pag. 34J.

Fig. 27.

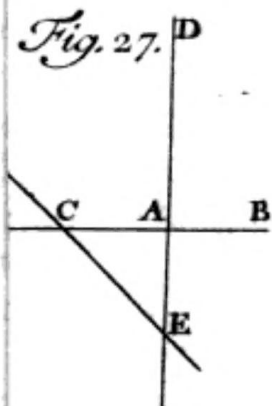


Fig. 28.

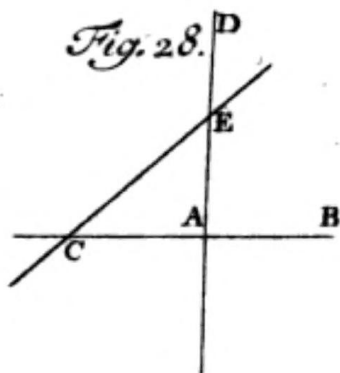


Fig. 29.

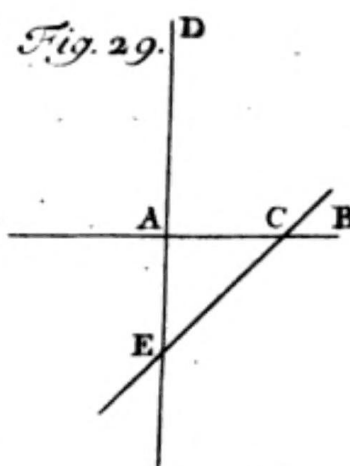


Fig. 31.

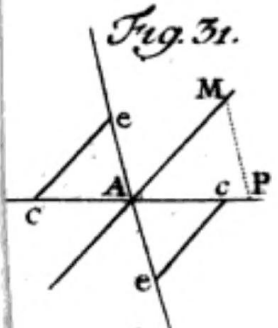


Fig. 32.

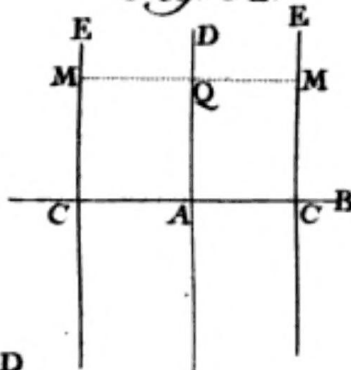


Fig. 33.

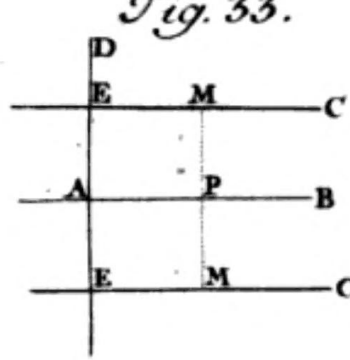


Fig. 35.

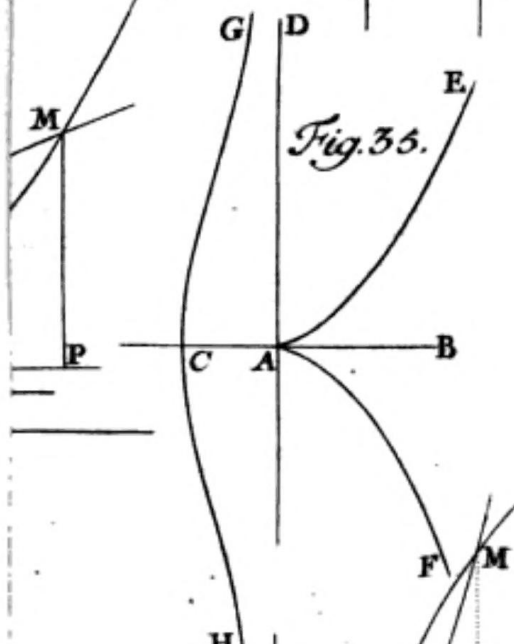
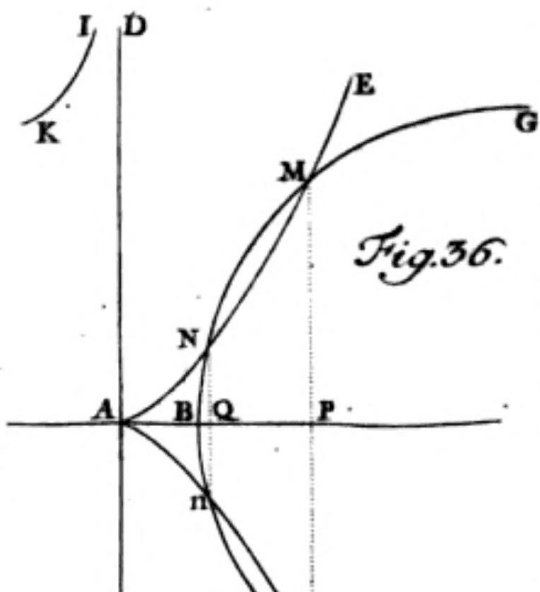


Fig. 36.



! Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 29.19% accurate

SUR LA CONSTRUCTION DES EGALITE' S. 89 Ch. IV. tant de points qu'il y a d'unités dans w , & déterminer par Pt. iy. /• ces interie&ions toutes les racines de l'Egalité'. Quant aux Egalités dont le degré n'est pas un nombre carré ; on pourroit les conftruire par deux Lignes telles que le produit des expolants de leurs Ordres fafle le degré de l'Egalité propose [§.46]. On peut, par ex. construire une Egalité du 15e. degré par les interlèétions de deux Lignes, Tune du 4e. , l'autre du 5e. Ordre. Mais, comme on peut réfoudre toute Egalité du 16e. degré par deux Lignes du 4e. Ordre, il n'a pas paru convenable d'employer une Ligne d'un Ordre fupérieur, pour construire une Egalité d'un degré inférieur & on a préféré d'élever l'Egalité du 15e. degré au 16e. en multipliant tous les termes par l'inconnue de l'Egalité. On eftime 'donc qu'il y a plus de (implicite à employer deux Lignes du 4e. Ordre, qu'une L«*gne du 5e. avec une Ligne du 5e. Ordre, De même, pour conftruire une Egalité du 14e. degré ; ce qu'on pourroit faire avec une Ligne du 4e. & une du 2e. Ordre : on aime mieux employer deux Lignes du 4e. Ordre, & élever l'Egalité du 14e. degré au 16e. , en multipliant tous (es termes par le carré de l'inconnue. Mais les Egalités du 12e. degré Ce conftruilènt avec deux Lignes, l'une du 4e. & l'autre du 3e. Ordre. Et c'est avec de pareilles Lignes qu'on conftruit les Egalités du 11e. & du 10e. degré, après les avoir élevés au 12e. en multipliant tous les termes de la première par l'inconnue, & tous les termes de la féconde, par le carré de l'inconnue. On a donc formé cette Régie générale pour la simplicité de la conftru&ion géométrique des Egalités déterminées *. » On extraira la racine carrée du degré de l'Egalité proposée. Si cette racine est exacte, on conftruirà l'Egalité Introd, à l'Analyse des Lignes Courbes. M » avec * Mr. DE l'Hôpital SèSum toniques, W H*

Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 27.71% accurate

90 R E M A R Q _ U E S Pl. 17. „, avec deux Lignes dont l'Ordre a pour expolant cette ra- Ch.iv. » cine même. Si la racine n'est pas exacte , on ôtera du & f* » degré de l'Egalité le plus grand quarré qui y foit conte» nu ; & fi le refte est égal ou moindre que la racine de » ce quarré , Tune des deux Lignes doit être de l'Ordre » qui a pour expofant la racine , & l'autre de l'Ordre im» méd internent fupérieur : mais fi le refte est plus grand « que la racine , les deux Lignes doivent être chacune de »> l'Ordre dont l'expofant a une unité de plus que la ra» cine. Si , par ex. l'Egalité e'toit du 30e. degré. Comme la racine quarrée la plus prochaine de go est 5, dont le quarré 25 ôté de 50 faille pour refte 5 , qui est égal à la racine 5 ; l'Egalité fe peut conftruire par deux Lignes , une du 5 e. & une du 6e. Ordre. Les mêmes lerviront à conP truire les Egalités du 26e, 27e, 28e, & 29e degré. Mais û l'Egalité étoit du 31e. degré , dont la racine quarrée aprochée est auflî 5; comme le quarré 25, ôté de 31 , iaiflTe 6 , qui est plus grand que la racine 5 ; il faudra pour conftruire l'Egalité du 31e. degré, deux Lignes du 6e. Ordre. Et il fuffira auflî de deux Lignes du même Ordre pour conftruire les Egalités du g 2e, 33e, 3 4% 55e, & 36e. degré. Les Egalités du degré 2. 34. ç .6.7.-9. 10..12.13..16.17..20.21..2İ.26..30.3 1..36 fe conftruifent par deux Lignes de I I I I I M I l'Ordre 1223 3 4 4 5 Ç 6 & — 2 2 3 3 4 4 î * 6 6 Les Egalités du degré 3*7.42. 43..4g.?o..r6.Ç7..d4.6?..72.73..8i.82..Q0.9i..ioo fe conftruifent par wKp*^vnrVv*rVWnry V^wnrvVvj^ Lignes lie | I I II l'Ordre 677 8 8 9 10 & — 7 7 8 8 9 9 10 10 55. Telle Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 29.82% accurate

SUR LA CONSTRUCTION DES EGALITES. 91 C«.iv. 55*

Telle est la Régie des Géomètres modernes pour Pi. 5- 1\$- le choix des Lignes propres à construire une Egalité d'un degré proposé. On voit par là , qu'ils mesurent la {implicite d'une construction par la simplicité de l'Ordre des Lignes qu'on y employé , & qu'ils (e font une Loi de ne pas admettre des Lignes d'un Ordre supérieur , quand celles d'un Ordre inférieur peuvent suffire. Je ne fais cependant si cette Régie est absolument la meilleure. Il semble que c'est moins la simplicité de l'équation que la facilité de la description , qu'il faut chercher dans le choix des Lignes propres à construire un Problème. On peut dire que chaque Problème a quelque Courbe propre à le résoudre plus naturellement que toute autre Courbe , même d'un Ordre inférieur. D'ailleurs , une Courbe d'un Ordre assez élevé , mais dont l'équation n'a que peu de termes , fera ordinairement plus aisée à décrire, soit par points, soit au moyen de quelque Instrument , qu'une Courbe d'un Ordre plus bas , mais dont l'équation la plus réduite conserve un grand nombre de termes. On voit même divers Exemples de Courbes faciles à décrire , quoique leur nature ne puisse s'exprimer que par des équations fort composées. Or , dans les constructions géométriques , ne doit - on pas préférer celles qui sont les plus simples ? Et les plus simples ne sont-ce pas celles qui s'exécutent par les Courbes les plus aisées à décrire ? L'équation n'est proprement qu'un ligne qui nous guide dans le Calcul ; & au fonds , c'est la description de la Courbe qui résout le Problème. Qu'on y parvienne par un Calcul plus ou moins long , plus ou moins difficile , cela n'entre pour rien dans l'opération même qui constitue véritablement la Solution. L'équation $xx^2 + yy^2 = rr$ qui est la plus simple équation du Cercle [§. 7] , est plus composée que celle - ci $xx = ay$, qui désigne une autre Courbe du second Ordre. On ne balancera pourtant pas à employer le Cercle pour construire M 2 une

The text on this page is estimated to be only 23.97% accurate

R E M A R E S Pl. v. une Egalité , plutôt que la Courbe
représentée par l'éq : Ch. iv. $xx=za y$. Pourquoi cela; si ce n'est à cause de la
facilité avec laquelle on trace une circonférence de Cercle ; facilite qui fait
qu'on aime mieux le servir du Cercle que de la Droite en plusieurs
rencontres : quoique la Droite Toit du premier Ordre , & la circonférence de
Cercle du fécond *. 56. Cela étant , je ne vois pas pourquoi on rejetteroit la
Construction suivante d'une Egalité quelconque , par le moyen d'une Droite
parallèle aux ordonnées , & d'une Courbe dont l'Ordre est , à la vérité , égal
au degré de l'Egalité proposée , mais dont on peut déterminer tous les points
par la Géométrie élémentaire f. Toute Egalité se peut réduire à cette forme
 $a=by^4$ « ty l dy l 4- ey* drc. Qu'on décrive la Ligne dont l'équation est $x=zby$
 $cyx^m \cdot dy^n = i \cdot ey^k + c$, & de laquelle on peut trouver tous les points avec
le Compas & la Règle. 3P« ^ar > Pren>jnt sur la Ligne des ordonnées A B
une ordonnée quelconque AQJ^], on trouvera by qui est à b comme y à 1 [1
est une Droite prise à volonté pour servir d'unité] , & cyl qui est à c en
raison doublée de y à 1 , & dy* qui est à a en raison triplée de y à 1 , & ainsi
de suite. Puis , menant parallèle à la Ligne A C des abscissés , & prenant sur
cette Droite la partie QM égale à $ey+tf+d?$ &c le point M (est un de ceux de
la Courbe. Cette Courbe AdefM étant ainsi décrite par points , ou de
quelqu'autre manière , si l'on en peut trouver de plus commode; si l'on prend
l'abscisse AG = * , les ordonnées GH, GI, GK, GL, déterminées en menant
par le

The text on this page is estimated to be only 25.35% accurate

SUR LA CONSTRUCTION DES EGALITES. 93 a».iv. le point G la Droite GN parallèle à A 6 , feront les racines pl. v. * **• y de l'Egalité « —èy+cf + 4' + «y4 &s. Car , par la nature de la Courbe , le raport { *dy* ére Donc l'abfaflè A G étant * , le raport de AG[*] à l'ordonnée GH , GI, GtK , où GL[j] eft exprimé par PEg: a zszèy + cy1 -\ -dyl &c. Donc G H, G I, G K, G L font les valeurs d> dans cette Egalité : elles font fes racines. 51. No n-setjlembnt cette conftrucion eft (Impie & d'une pratique facile : elle eft furtout utile pour déterminer les limites des Egalités, & le nombre de leurs racines réelles & de leurs racines imaginaires. On t voit , par ex. dans la F/g. ?o , que la Courbe a quatre branches Ad, de, cf, fM. C'eft pourquoi l'ordonnée GN peut couper cette Courbe en quatre points H, I, K, L Suppofons qu'elle la coupe en autant de points , & menons par les fbmmets d, e, f, les ablciflès d A , eE, fS, qui coupent G N en / , 1 , ç ; on voit que la première racine GH terminée à la branche Ad, eft plus petite que Gcf ou Aa, & qu'ainfi die tombe entre o & A A ; que la féconde racine G I , oui le termine à la branche d c, tombe entre G^ & G i , c'eiUà-dire , entre A A & A S ; que la troifième racine G K , terminée à la branche e f , tombe entre G t & G

The text on this page is estimated to be only 26.73% accurate

94 REMARQUES Pt y eE , fF , il est visible , par l'inspection de la Figure, i°. que Ch.iv; si la Droite a , à laquelle A G est perpendiculaire égale , (on trouve * plus petite que AD & plus grande que AE, l'ordonnée G N coupe les quatre branches de la Courbe , & que l'Egalité' a quatre racines réelles : 2°. que si AG [a] est plus petite que AE^GH ne coupe que les deux branches Ad, f M , & que l'Egalité' n'a que deux racines réelles , les deux moyennes qui devoient se terminer aux branches d e , e f, e'tant devenues imaginaires: 3°. que si AG[*] tombe entre AD & AF , l'ordonnée GN ne coupe que les branches ef, fM ; & il n'y a que les deux plus grandes racines de l'Egalité' qui soient réelles , les deux plus petites , qui devoient (se terminer aux branches Ad, & de e'tant imaginaires: 4*. enfin, que si AG[<] surpasse A F, la Droite G N n'atteint pas la Courbe & que toutes les racines de l'égalité sont imaginaires. Toutes ces déterminations dépendent des ordonnées dD, eE,fF, ou A A , As, A*, & des abscisses AD, AE, AF des sommets d , e , f Ces abscisses & ces ordonnées (c peuvent déterminer , en considérant que d D , e E , fF sont les limites des branches Ad , de , ef , fM, & qu'elles séparent les ordonnées réelles des imaginaires. Donc chaque abscisse AD , AE , A F a une ordonnée double ou deux ordonnées égales [§. 17]. Ainsi on trouvera ces abscisses en cherchant les valeurs de x qui donnent à l'éq: $x = by + cy^* + dy^* + c$ ou $0 = x + by + cy^1 + dy^1 + c$. des racines doubles , ou égales deux à deux. Mais la Régie de Mr. Hudd * nous apprend que quand une Egalité a des racines doubles , si on multiplie la suite bien ordonnée de ses termes par une progression arithmétique quel» * Cette R/gle se trouve parmi les Trait/s imprimés ordinairement à la suite de la Géométrie de Des Cartes. Pour éviter au Lecteur la peine d'y recourir , nous en avons joint la Démonstration dans V Appendice N°. gDigitized by Google

The text on this page is estimated to be only 29.88% accurate

SUR LA CONSTRUCTION DES EGALITES. 95 Ch. iv.

quelconque , le produit fera une autre Egalité' qui aura Fuv. *■ i7' toutes les racines qui ctoient doubles dans la propofée , mais qui ne feront que fimples dans l'Egalité réfultante. Par la comparaifbn de ces deux Egalités , on pourra déterminer les racines doubles qui font les ordonnées d D , eE, fF, & conféquemment les abfciflès AD, AE, AF. 58. Pour faire bien entendre ceci , il eft néceffaire d'y joindre quelque détail. Et comme les Egalités du premier degré n'ont aucune difficulté , prenons - en d'abord une du fécond, $a = by + cyx$ y ou plutôt (ytf). . . $a = by +$ puifqu'il ei\ ordinaire de réduire la plus haute puiffance de l'inconnue à n'avoir que l'unité pour coefficient. La Courbe reprélentée par l'éq : $x = by + yx$ étend deux branches à- l'infini du côté des abfciflès pofitives. Car x étant prifè infinie , y le fera auffi , puifque , fans cela , $by > yx$ ne pourroit égaler x infinie. Mais y étant infinie & à finie , le terme y^2 furpaffè infiniment le terme by , de (brre qu'à l'infini l'équation de la Courbe fe réduit à $y^2 = yx$. Si on prend x pofitive ,) a deux valeurs, x^2 pofitive & $-y/x$ négative. Mais x étant prifè négative , les deux valeurs dey, qui font $-+V - x$ & $-V - *$ font imaginaires. Donc la Courbe a deux branches infinies , du côté des abfciflès pofitives , & n'en a point du côté des abfciflès négatives. Sa forme eft donc à peu près telle qu'on la voit dans la Ftg. 40. Elle travèrfe deux fois Taxe des ordonnées A B, favoir, à l'origine A & au point B , extrémité de l'ordonnée $AB = -b$. Car la fuppofition de $x = 0$ donne $0 = by - y^2$, qui a deux racines $y = 0$ & $y = b$. Le point B tombe du côté négatif, fi b eft pofitive ; du côté pofitif , fi b elt négative. On voit dans cette Figure , qu'aux abfciflès pofitives répondent deux ordonnées , l'une pofitive & l'autre négative;

Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 23.93% accurate

96 REMARQUES Pl. v. vc , mais que les abscisses négatives ont deux ordonnées Ck. iy. imaginaires, si l'abscisse surpasse AD; réelles, si l'abscisse * si est plus petite que AD & dans ce dernier cas, négatives, si b est positive i J, positives , il A est négative [»°. 2]. L'abscisse AD, au'il est essentiel de connaître, est celle qui a une ordonnée double Dd. On la déterminera en multipliant l'éq : $0 = -x + by + yy$ par une progression arithmétique, telle que o. 1 , a; ce qui donne $0 = x^4 + 2yyx$ ou $0 = b + 2y$, (bit enfin $yzs = i - \text{ff. Dd}$ ou AA vaut donc $-i b$. Et au moyen des deux eq : $x = 3 by + yy^9$ & $jf^z = \pm b$, on trouve $AD[x]rr = -iM + ibb = -\sqrt{bb}$. Puis donc qu'en prenant l'abscisse A G égale à a , les ordonnées GH , Gl font les racines de l'Egalité (y^*) . . $a = by + yy$ on voit 1 °. Que si a est positive , l'Egalité A a deux racines réelles , une positive & une négative , dont la plus grande est celle qui a le signe contraire à celui de b. Elles sont égales, si $b=0$. 20. Que si a est négative, mais plus petite que $-\sqrt{bb}$ [AD] , l'Egalité A a encore deux racines réelles , de même signe , contraire à celui de b , & dont l'une est plus grande , l'autre plus petite que $-\sqrt{b}$ [D d]. 30. Que si $a = -\sqrt{bb}$, l'Egalité A a deux racines égales , ou une racine double égale à $-\sqrt{b}$. 40. Enfin que si a est plus négative que $-\sqrt{bb}$, les deux racines de A sont imaginaires ; & c'est ce qui arrive nécessairement quand $b=0$, & a

The text on this page is estimated to be only 26.16% accurate

SVR LA CONSTRUCTION DIS EGALITES. 97 Cm. m ce Cas fimple. On en aura plus de facilité à comprendre Pu y. l'application qu'on en peut faire aux degrés fupérieurs. • 59. Soit maintenant l'Egalité (B). $+ 9'^{+}/$ du je. degré. La Courbe que repréente l'éq: $x - by + cyx^2$ a deux Branches qui (è jettent à l'infini de part & d'autre de l'Axe des ordonnées. Car x infinie donnant aufli y infinie, l'équation de la Courbe à l'infini le réduit à $x=y^2$, parce que les termes by & cyy font infiniment plus petits que y, vis-à-vis duquel ils s'évanouït. Cette eq: $x=y^2$ n'a qu'une racine réelle $y = \sqrt{x}$, qui est pofitive quand x est pofitive, & négative quand x est négative. La Courbe travèrle l'Axe des ordonnées en autant de points qu'a de racines l'Eg: $0 = by^2 + cy^2 + y^3$, à quoi (è réduit la propoféc B par la fuppoftion de $x = 0$. Or cette Egal: $0 = by^2 + cy^2 + y^3$ a une racine $y=0$, qui marque que la Courbe paffe par l'Origine: Ses deux autres racines font celles de l'Eg, $by^2 + cy^2 = -y^3$, ou $-b - cy = y^2$, qui peuvent être réelles ou imaginaires. Elles font réelles, fi $-b - cy$ est pofitive [§ préc. n°. 1 J, c'est-à-dire, fi b est négative, & alors l'une a le figne $+$ & l'autre le figne $-$. Donc, en ce cas, la Courbe travèrle l'Axe des Flg' ordonnées deftus & defibus l'Origine A. Ces racines font aufi réelles quand b est pofitive, pourvû qu'elle ne forpaffe pas $\sqrt{-c}$ [§. pr. »°. 2], & alors elles ont toutes deux un même figne contraire à celui de c; de forte que c étant négative, la Courbe travèrle deux fois l'Axe des ordonnées au - deftus de l'Origine, & c étant pofitive, la Cour- nmm' 1 be coupe deux fois l'Axe des ordonnées au - délfions de l'Origine. Si b est égale à $\sqrt{-c}$, les deux racines font éga- 3 les à $-\sqrt{-c}$; f %.pr. »°. §], & la Courbe, au lieu de couper l'Axe des ordonnées, le touche à l'extrémité de l'ordonnée $-\sqrt{-c}$, c'est-à-dire, au-deflus d'A, fi c est négative, & $< \sqrt{-c}$ à l'AnalyfedtsUgnesCwrbs. N au

The text on this page is estimated to be only 21.50% accurate

5>8 R E M A R H U E S Pt. v. au-defibus d'A, fi* eft pofitive.
 Mais fi $b > \sqrt{c}$, les ra- Cn.iv; 4«- cins de l'Egal ; — $b = cy + yy$ font
 imaginaires , & la S-** mum. 'eîy. Courbe ne rencontre l'Axe des ordonnées
 qu'à l'Origine. *. »• 10. Les Commets d , e , (è déterminent en multipliant
 les termes de l'éq : $o = -x^4 + hy + cyy + y^*$ par la progr. arithm : o , i , 2 ,
 î ; ce qui réduit cette équation à (H)... $o = by^4 + 2$ dont 1[^] racines expriment
 les ordonnées d D , e E , des fomets D , E. On aura leurs abldflès AD, A E
 , en cherchant x par le moyen des deux équations //, & $o = -x + ty + rjp$
 ■+>/ , ce qui donne l'Egalité (/)... 27 $xx + 18 fox - 4 \text{ £ } 'x^4 - 4 = o$. 11
 lèroit aifé de déterminer ces abfciflès , & par là , les limites qui rendent
 réelles ou imaginaires les racines de B , en réfolvant l'Egal : I , qui n'elt que
 du (ècond degré. Mais , pour montrer comment il faut s'y prendre dans les
 Egalités des ordres (upérieurs , nous n'eflayerons pas de rclbudre cette Egal.
 I : nous fuppolèrons feulement qu'on lait , au moyen des Remarques~du §.
 préc. difcerner par les coefficients de cette Egalité , fi ces racines font
 imaginaires ou réelles , & dans ce dernier cas , fi elles (ont toutes deux
 pofuives ou toutes deux négatives , ou l'une pofitive & l'autre négative.
 Pour cet effet , on donnera à l'Egal : / cette forme $bbu - 4b1 iUc - 4e' . r$
 $1 ti = -x - J - xx$, fous laquelle on voit 27 27 [§. préc. »°. 4] que fes deux
 racines font imaginaires , lorC $bbec - 4.P a . , , l^{\circ}bc - Af \backslash$. que ^ eft plus
 négative que — 27) > c'eft-à-dire , lorfqe $1 o^{\circ}bs - 27^{\wedge} > S \backslash bbcc -$
 $i6bc'' + 4^*$, ou $io8AJ - loSbbcc > 4^* \$6bc + 4/' > o$, ce qui, divilant par 4
 & tirant la racine cubique, (è réduit à — ($c > o$. Ainfi . i°. Quand Digitized
 by Google

The text on this page is estimated to be only 23.66% accurate

SUR LA CONSTRUCTION DES EGALITES. 99 Çn.Tf. i".

Quand $t > \sqrt{cc}$, il y a deux racines de l'Egal. B Pt V. où font imaginaires, parce que les abscisses AD, AE, les foyers d, e, & la branche e d qui s'y termine étant imaginaires, la Courbe a, à peu près, la forme qu'on voit au #T. iode la Fig. 41, & qu'elle ne peut être coupée qu'en un seul point par l'ordonnée GH. On trouveroit la même cho(e, en considérant que les foyers d, e font imaginaires quand leurs ordonnées Od, Ee, font imaginaires. Car ces ordonnées font les racines de l'Egal. H. . . — $\sqrt{b} = \sqrt{z^2 cy + yy}$, qui font imaginaires [$\frac{y}{z} > \sqrt{r}$]. 4] quand — $\sqrt{b}$ est plus négative que — $K \sqrt{cy} = -\sqrt{tc}$, c'est-à-dire, quand $b > \sqrt{cc}$. 2. Si $b = \sqrt{cc}$, alors — $= -\sqrt{\pm(\)}$, 27 * 27 & les racines AD, AE de l'Eg. / font égales entr'elles & $i - kCU: \sim \sqrt{f} = -\sqrt{*S}$ tîr. A\$ Si De même — $\sqrt{b} = -\sqrt{J(f OS \& ,cs}$ racines Dd > Ee de $\sqrt{gIf}$ font égales entr'elles & à — $i(fO = -$ Dans ce cas, les deux foyers d, e, font réunis en un point, auquel fè réduit la branche e d. Ce point a fon abscisse J! « AD égale à — & fon ordonnée Dd égale à — $\sqrt{c}$. Donc, si AG[*] est plus grande ou plus petite que AD [$= \sqrt{ifC^*}$], GH ne coupe la Courbe qu'en un point; l'Eg. B n'a qu'une racine réelle. Si AGO] est égale à AD [$= \sqrt{r}$], GH passera par le point e ou d, & est censée y rencontrer trois fois la Courbe: si bien que l'Eg. B réduite à — $\sqrt{ccy^2 + cyy^2}^f$, ou $\sqrt{*bcyy + \sqrt{ccy^2 + ifc^2}} = 0$, a trois racines égales entr'elles & à — [Dd]. En effet / Hh $cyy + \sqrt{ccy^2 + \{ *4ic^2 \}} = 0$ n'est autre chose que le Cube de l'Egal: $y + \sqrt{cz} = z$ o, ou $y = -\sqrt{c} . j^o$. Si $b < \sqrt{cc}$ la Courbe a trois branches, & l'Eg. B peut avoir trois racines réelles. Mais il faut pour cela que N 2 AG zed by Google

The text on this page is estimated to be only 26.19% accurate

ioo * E M A R H U E S A G [a] tombe entre A D & A E , qui font les racines de l'Eg. I Nommant ces racines R & r, il feut que des deux grandeurs $R - a$, $r - a$, Tune foit pofuive & Pautre négative. Or, pour juger quand cela arrive, on transformera l'Eg. / en diminuant lès racines de la grandeur a , c'eft-à-dire, en fubftituant zix — 4, ouz+<àjr. La transformée eft $2jzz + 54''Z 4-27**4- 1 8 bci + i \%abc — 4fz -^+4^-^o$, ou $_*7«*- H8^-4^4V'^-^ 27 54*4- t8\& 4*' . , = z + 7.2$, dont les racines ont des fi27 gnes oppofés [$\S.^>w. »\ 1.$] quand le premier membre eft pofitif , c'eft-à-dire , quand $2 7 ** 4- 1 8 abc — 4 aci 4- 4 bl — bbec$ eft négative. Cette grandeur , que nous nommerons K, eft jultement le premier membre de l'Eg. /, transforme' par le changement d'x en a. Si cette grandeur K eft zéro, une des racines z , c'eft-à dire, $R - a$, ou $r - a$ eft aulfi zéro , le point G tombe fur D ou fur E. Mais fi K ci\ pofuive, les deux racines $R - a$, $r - a$ ont le même figne, AG eft ou plus grande, ou plus petite que AD & que AE, le point G tombe hors des limites D, E. Donc b étant $< \ c \ c$, Ffr.4r. O Si $2jaa + \%abc — 4^4.4^ — bbcc > o$, IT> M. I. gai : B a deux racines imaginaires , & une réelle , parce que G tombant hors des limites E , D , l'ordonnée GH ne coupe la Courbe qu'en un point. 2) Si $274** 18^ — 4^ + 4^ — bbu=o$, G tombe fur D ou fur E, & l'ordonnée GH touche la Courbe en d ou e , & la coupe en un autre point L'Egal : B a donc deux racines égales & une inégale. La valeur des racines égales , qui eft Dd , ou Ee , (ê détermine au moyen des deux Egal : B & H ; elle eft $2\pm\pm lL$. & la racine db—' 2 ce inéga

Digitized by Goo

The text on this page is estimated to be only 27.55% accurate

SUR LA CONSTRUCTION DES EGALITES. 101 | . inégale cft
 ($6b - 2cc^9 + bt y a$. Pt.V. §) Si $2j^*f + i8^*& - 4^{\wedge} 4^* 4^{*'} - < o$, G
 tombant entre D & E , l'ordonnée G H coupe la Courbe en trois points , &
 l'Eg : B a trois racines réelles. Après avoir reconnu fi les racines de B font
 réelles ou imaginaires , on s'affliercra aifément fi elles font pofuives ou
 négatives. Car l'Eg : B a eflentiellement une racine du même ficyy $-4-y$, x
 ne monte qu'au premier degré , la Courbe ne rencontre l'Axe des abfcifies
 qu'à l'Origine A [§. 41] , d'où elle pouflè deux Branches infinies de part &
 d'autre. Ainfi chaque abfciflè AG[d], pofitive ou négative, aura toujours une
 ordonnée G H [y] de même figne. Donc i°. Si l'Eg : B n'a qu'une feule
 racine réelle, on connok quel eft fon figne par celui du terme a. Il en eft de
 même fi B a trois racines égales ; ce qu'on peut regarder comme n'avoir
 qu'une racine , mais triple. Quand les deux autres racines de B font réelles ,
 elles ont un même figne , qui eft celui de l'ordonnée D d , ou de l'ordonnée
 Ec. Autrement, il faudroit que la Courbe coupât l'Axe des abfciflès ailleurs
 qu'en A. Donc 2°. Si Dd & Ee ont un même figne, ce fera auffi le figne de
 deux racines de l'Eg. B . Or Dd & Ee qui font les racines de l'Eg. H. . . — \
 $b = \backslash cy + yy$, ont un même figne [§. pr. »". 2] quand — \ b eft négative
 mais moins que — $\mathfrak{L} (^0* = - iec > c'$ eft- à- dire , quand $b < \backslash cc$. Leur ligne
 eft contraire à celui de \< , ou de c. Donc, quand B a trois racines réelles, b
 étant pofitive {& il faut pour cela que $b < \backslash cc$, l'ans quoi deux racines de B
 feroient imaginaires] , cette Egalité a une racine de mê- «*• me figne qu'* ,
 & deux rteines d'un figne contraire à ce- J Jjj4' lui de c ». N 3 Mais
 Digitized by Goc

The text on this page is estimated to be only 23.72% accurate

io2 REMARQUES PtV. Mais si B a trois racines réelles, b étant négative, Ch. elle a une racine de même signe que a, & les deux autres d'un signe contraire. Ce cas est celui de la F/£. 41. n°. r, ou A G [a] positive donne une racine positive G H & deux négatives G I , G K, & au contraire A G [a] négative donne deux racines positives & une négative. Ce qui s'accorde très - bien avec la Régie de Des Cartes, pour connoître le nombre des racines positives & des négatives par le nombre des changemens & des successions des signes de les termes. On aura tout ceci devant les yeux dans la Table suivante. I. b > \ccy donne deux Racines imaginaires, & une réelle de même signe qu'a. II. b = \cc y donne i°. Si m > ou < — £c%, deux Rac. imaginaires , & une réelle de même signe qu'*. 2\ Si a = — j,t*, trois Rac. réelles égales à — \c \\\. b positive & < \cc , donne , en faisant 27*4 + \%^*bc 44*' + bbec = Ky i°. Si K > Oy deux Rac. imaginaires, & une réelle de même signe quV a°. Si K = Oy deux Rac: égales à P***1 *g ^ un£ . . . ,6b tffN. égale a (—7-)I a. 9 * Ht4 bc ' %*. Si K < o, trois Rac: réelles, une de même signe qu'ii, & deux d'un signe contraire à celui de*. IV. b bbs o , donne , puisqu'en ce cas , K~ 2 744 — 4 *c\ i°. Si 2jaa > 4.ac> , deux Rac. imaginaires , & une réelle de même signe quV 2*. Si 2744 = 4^' , ou a~4fc% , deux Rac, égales à — \c \ & une égale à \c. . .

The text on this page is estimated to be only 24.02% accurate

SUR LA CONSTRUCTION DES EGALITE S. ioj Ch. iv. j*. Si
 $ijééK^{ac1}$, trois Racines réelles, une de Pu V. * même signe qu', & deux
 de signe contraire. V. h négative donne i*. Si $K > 0$ deux Rac. imaginaires,
 & une réelle de même signe qu'. 2\ Si $K = 0$, deux Rac. égales à - , & une
 $0 \text{ 6tf } 2CC \ 3 \setminus$ Si $K < 0$, trois Rac. réelles , une de même signe qu'a , & deux
 de signe contraire. Il est facile de réduire une Egalité du troisiéme degré »
 «sas fy + m à n'avoir point de (cond terme, & à paroître ious cette forme
 $a = \sqrt[3]{t + U}$ ne faut pour cela que substituer u — \c ky. Alors il ne s'agit que
 de voir si $27*a - r - 4/3'$ est positive, zéro, ou négative. Si elle est positive , ce
 qui ne peut manquer d'être quand /3 e(t positive ou zéro ; l'Egalité n'a
 qu'une Racine réelle de même signe que *. Si $270 - 0, 4* 4/S'$ est zéro ;
 l'Egalité a deux racines égales à & une troisiéme égale à $— 3^{\wedge}$ -. Si $27a* 4*4$
 £' est négative ; l'Egalité a trois racines réelles , une du même signe que « ,
 & deux du signe contraire. 60. Pour dire au (si quelque chose des Egalités
 du quatrième degré , soit (C) . . . a z= . $4* (y* + * + y*$, où pour abréger le
 Calcul , nous supposons qu'on ait fait diC paroître le fécond terme. L'éq : (L)
 $x = by \ 4* cy\% - f y*$ repr Jlênte une Courbe à deux Branches , qui
 s'éien- Bfc $4*$ dent à l'infini du côté des abscisses positives. Car à l'infini, son
 équation est $x = y*$, qui a quatre racines -fvHV7*, — V + V*, +V—V*> —
 $V — V* >$ qui font toutes

The text on this page is estimated to be only 25.08% accurate

104 REMARQUES Pl. y. toutes imaginaires quand * est négative , & dont les deux c>. rv. dernière* le font auûTi , même quand x est positive. Alors §• les deux premières font réelles , & montrent qu'une ablcifc (è infinie positive a deux ordonnées infinies , Tune positive , l'autre négative. La Courbe a donc , du côté des ablciflès positives , deux Branches infinies , l'une supérieure, l'autre inférieure à l'Axe des abfcifles. Mais elles peuvent (èrperter près de l'Origine , de manière qu'on comptera quatre branches. Pour en déterminer, en gros, le contour, voyons d'abord en quels points la Courbe rencontre l'Axe des ordonnées : car pour celui des ablcifles , il est certain qu'elle ne le rencontre qu'en A, puisqu'en dans l'éq : L , x ne monte qu'au premier degré [§. 41 J Si dans cette éq: L , on fait $at=0$, elle se réduit à $0 = by^4 + tj' * b J/*$ » ou (ht) — bzncyJff , qui peut avoir trois racines réelles, ou deux imaginaires & une réelle. Elle a trois racines réelles quand $27 bb + ^c*$ est négative [§. préc. J. Alors la Courbe rencontre l'Axe des ordonnées en trois points , (ans compter l'Origine. De ces trois racines , une a le même signe que — b , les deux autres ont un signe contraire. Donc , b étant positive , la Courbe coupe deux fois son Axe au-delTus de l'Origine mm*4*.' & une f°s au-deffbus : mais b étant négative , elle coupe l'Axe une fois au-delTus & deux fois au-delTous de POrimm. ». gjnc> \$j 2-}bb + A,? sss o , l'Egal : M a deux racines 7 b 7 b égales à — , & une troisiéme égale à — . Dans ce n,\.& 4. cas , la Courbe touche son Axe d'un côté , & le coupe de l'autre à une distance double. Enfin, si $aybb + 4^$ est positive , M n'a qu'une (èulc racine réelle de même signe ^ que — b . Ainsi la Courbe ne coupe son Axe qu'en un M* 7# point ; au-deffbus de l'Origine , si b est positive ; au-def*.*.& t. fus 9 si b est négative. Il Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 25.97% accurate

SUR LA CONSTRUCTION DES EGA LITE' S. xox Ch. 17. Il faut maintenant déterminer les Commets d,e,f. On Pl. V. multipliera donc l'éq : (L) $o = -x + by + cy^2 + f^2$ par la progr. arithm : $o, i, 2, j, 4$, ce qui la transforme en $or by + icy^2 + 4^2$, ou $(2V \sim) i^2 - kcy^2 + y$, dont les racines font les ordonnées dD, eE, fF des Commets. Ainfi deux de ces Commets ., par exemple, d & e, & par conféquent deux branches ed, d f de la Courbe deviennent imaginaires, quand deux racines de l'Egal. N font imaginaires, c'est-à-dire, quand $\sqrt{c}$, ou f, & $27(i^2) + 4(iO' = 7^{***}8"$, ou $27bb +$ font positives C'est le Cas représenté aux $\gg^\circ$. 7 & 8 de la Fig. 42, & alors la racine réelle f F est du même signe que $\sqrt{c}$, c'est-à-dire, négative quand b est positive, & mm. 7. positive quand b est négative. m., t 9t Qu'au moyen des eq : L & N, on élimine $\sqrt{c}$, on aura (O). . . $64X^2 + 32\langle xx + 6bbx + 4^2 + V + = o$, dont les racines R, r > p font les abscisses AD, AE, AF des lommets d, e, f. Ces abscisses font les limites des valeurs de a [AG] qui donnent à l'Eg : C des racines réelles ou imaginaires. Car si G tombe du côté négatif au-delà de F, PEg : C n'aura que des racines imaginaires : Si G tombe entre F & E, l'Eg : C aura deux racines réelles & deux racines imaginaires : Si G tombe entre E & D, TEg : C aura quatre racines réelles. Mais elle n'en aura plus que deux, si G tombe au-delà de D du côté positif Donc, si R est la plus grande AD, r la moyenne AE, & p la plus petite AF des racines de O, l'Eg : C n'aura que des racines imaginaires, si $s, r - a$, & $p - a$ font positives : EUe aura deux racines réelles & deux imaginaires, si $R - a$ & $r - a$ font positives, & $p - a$ négative, ou si $R - s, r - a$, & $p - a$ font négatives. • Enfin, elle aura (es quatre racines réelles, si $12 - *$ est « PAnalyfc des Lignes Courbes. O pofiti

The text on this page is estimated to be only 29.39% accurate

io6 ■ REMARQUES r*. v. positive, mais r — a > & p — «
 négatives. Donc substitui- Ch. 17. tuant, dans l'Eg: 0, z au lieu de x — a\ ou z +
 * au f-6° lieu d'x, l'Egal: C'aura quatre racines imaginaires, si toutes les
 racines z de la transformée sont positives ; elle aura deux racines réelles &
 deux imaginaires , si une ou trois racines z sont négatives : & elle aura (es
 quatre racines réelles , si la transformée a deux racines z négatives & une
 positive. Par la substitution de z + a à x , l'Eg : O se transforme en $54z' + (192 * + 52 tc')zz + 09*** + 6 + act + \forall * + ** fe' = 0$, ou — a > — iaacc — $\pm \pm f^4 > z'$, que pour abréger, nous écrirons ainsi (P)...et = /S z + t-zz + z1.
 Supposons d'abord que cette Egal : P a les trois racines réelles; & si /3 est
 positive, elle a une racine du même signe que « & deux racines d'un signe
 contraire à y. Mais si /S est négative, P a une racine du même signe que
 négative : enfin si et est positive & /S négative , ou si et , /S , & y sont
 positives , P a deux racines positives & une négative , ce qui marque que les
 quatre racines de C sont réelles. Pour récapituler, * négative Digitized by
 Google

SUR LA CONSTRUCTION DES EGALITES. 107 Ch. iv. gative
 -donne deux racines réelles & deux imaginaires : Et Pl. vS^*0 , • positive
 donne quatre racines imaginaires, fi $/3$ est positive & y négative : mais elle
 en donne quatre réelles, fi $/3$ Mais fi l'Eg : P a deux racines imaginaires,
 les abscisses AD, AE des sommets d, e deviennent imaginaires, & la
 Courbe ne conlève que le sommet f. Les ordonnées Fts- 4^* . dD, eE sont
 donc aussi imaginaires, & nous avons déjà vu que cela arrive,
 quand c, ou quand $2-jbb\ 4-8^*$ sont positives. Alors l'Egal : C ne peut avoir
 que deux racines réelles. Elles feront même toutes quatre imaginaires si *
 est plus négative que la (c'est la racine R [A F] de l'Egal : O, si R — a est
 positive. Or cette racine de l'Egal : P a le même signe que le terme a. Donc
 si deux racines de P sont imaginaires ; « négative donne à C deux racines
 réelles, mais * positive rend les quatre racines de C imaginaires. Pour
 connaître quels sont les signes des racines de C, on verra d'abord en jettant
 les yeux sur la F/g. 42, que quand les quatre racines (ont réelles, a étant
 négative, il y en a deux positives & deux négatives : mais a étant po-
 n.t.&%. sitive, on a trois racines positives & une négative, si b est positive,
 & au contraire trois racines négatives & une "•M* positive, si b est
 négative. Ce qui s'accorde avec la Ré- $wx^6\%$ gle de Des Cartes, puisque,
 dans le cas des quatre racines réelles, c doit être négative. Mais quand C n'a
 que deux racines réelles, on voit que a positive suppose nécessairement une
 racine positive & une négative : & que a négative donne deux racines $6'7'9'$
 négatives, si b est positive, & deux racines positives, si b, .7. est négative.
 n.%+6.%. On pourroit, en suivant les mêmes principes, passer aux Egalités
 du cinquième degré. Mais le calcul de l'Egalité générale feroit fort long. 11
 est plus traitable dans O 2 les igitized by Google

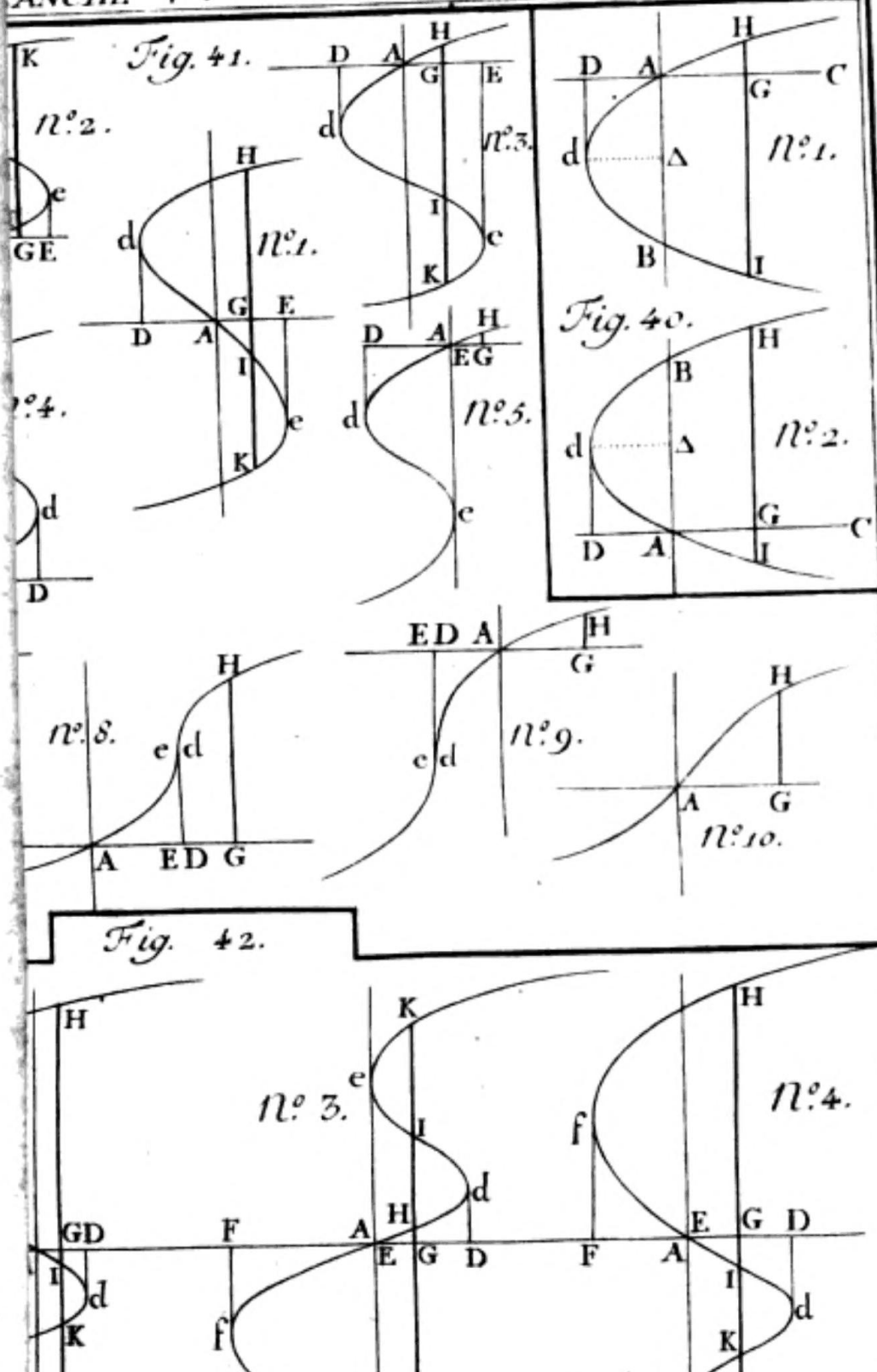
The text on this page is estimated to be only 24.25% accurate

108 REMARQUES SUR LA CONSTRUCT. DES EGALITES.

Pl. VI PAnalyfc des Courbes. CHAPITRE V. Valeur du produit de toutes les ordonnées dune même abfcilie. 6 1 . "]^T Otre dcflein cft de faire voir comment l'Analyfe Il découvre dans l'équation d'une Courbe fes principales propriétés. Voici un Théorème fort général , & qui peut (êrvir utilement dans cette recherche * . *fc.4j- Une Courbe QMSLRN de l'ordre v étant repjéfcntee par une équation , dont le premier terme , lorfqu'elle S s — — | S 2 eft ordonnée par^, (bit (*x +/3x + >* + &c.*)y^~' , & le dernier Ax f ^B%~t 1 + Cx &c. Je dis que PAxe des abfciflès A P coupant la Courbe aux points R , S , &c. fi on prend dès l'origine A les parties AT, AV, AX 8cc. égales aux racines de Péq : «x'+iS/ 1 -f->xi 2 + &c.^o9 & qu'on mène une ordonnée quelconque LN qui rencontre la Courbe en L, M, N &c le produit des ordonnées PL, P M , P N &c. de l'abfciflè A P fera à la fraction PQxPRxPS &c .r , . , ,rt , PTxPVxPXfc. raif0n donnéc de A* CCft"adire, . * NeWTONI Enumer. linear. 3*. ordinis. §. II. 5.4. Stirlinc , Line* tertii ordinis Newtoniaive j pag. 76 - 79. Mr. De Gua, , Vfage de l And. pag. 68.

Digitized by Google

I « Digitized by Google



The text on this page is estimated to be only 27.00% accurate

Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 24.85% accurate

PRODUIT DES ORDONN. D'UNE MEME ABSCISSE. 109 c«.v.
dire , comme le coefficient de la plus haute puissance de x Pu vl dans le
dernier terme , au coefficient de la plus haute puissance de x dans le premier
terme. Démonstration. si l'on divise l'équation de la Courbe par le
coefficient « $x - \frac{1}{3} x^1 \pm yx^2$ &c , pour lui donner cette forme $y J \dots +$
 $- ax^* + Qx^s \sim x$ &c. = 0 , où le premier terme $yV S$ n'a point d'autre
coefficient que l'unité, le produit de toutes les racines de cette équation,
c'est-à-dire le produit $PLxPMxPN$ &c. des ordonnées , est égal au dernier
terme $- *xs + x^{n-1}$ &c Or le numérateur de cette fraction est égal à
 $xPQx PSxPT$, &c, & le dénominateur à « $xPTxPV xPX$ &c Car les points
Q. R, S, &c. où une Courbe rencontre son Axe des abscisses, (è de'terminent
en faisant $y=0$ dans son équation [§. 15]. Mais cette supposition de $y = 0$
réduit l'équation à son dernier terme $Ax^V - f. Bx^o * 1$ &c= 0 , & les racines
de cette équation sont les abscisses $AQ^{\wedge}$, AR , AS , &c qui ont quelque
ordonnée égale à zéro. Divisant donc cette équation par A y afin que le
premier terme (bit pur; $x \sim xV$ &c. fera le produit de $(x - AQ)$ par $(x -$
 $AR)$ par $(x - AS)$ &c. c'est-à-dire, de $(AP - AQJ$ par $(A'P - AR)$ par $(AP$
 $- AS)$ &c. ou de PQ par PR par PS fco Donc multipliant le tout par A ,
 $Ax^{\wedge} Bx^{\wedge} 1$ &c est égal au produit $xPQxPRxPS$ &c. De même, puisque AT ,
 AV , AX &c. sont les racines O j de Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 22.80% accurate

HO TR0DU1T DES ORDONNEES Vt VI* de Tcq : mx 1 &c —
o% ou, divifant par et, de ^.«1; / , /3 /— i , , . / A s — t x + — jf tf* = o ; le
premier membre x + - x d drv. eft le produit de (x — AT) par (x — AV) par
(m — AX) &c, c'ert-à-dire , de (AP — AT) par (AP — AV) par (AP— AX)
&c, ou de PT par PV par PX &c. Donc multipliant par a,

The text on this page is estimated to be only 28.04% accurate

D'UNE MEME ABSCISSE. III Ch.v. On peut regarder Im comme l'Axe des abscisses, & fu vl *6%' menant qr parallèle à QR, qui coupe I m en/, on aura flxpm à $\wedge qx^r$ comme pl xpm à pQxpR. Donc enfin plxpm est àpqxpr comme PLxPM à PQxPR. Ce qui revient à dire, que si on mène par un point f deux droites lm, qr parallèles à deux autres droites LM, QR menées par un point P, & que ces quatre droites coupent chacune en deux points une Ligne du second Ordre; le rectangle \p m des parties de la première droite est au rectangle q p r des parties de la (seconde droite, comme le rectangle LPM des parties de la troisième est au rectangle QJR des parties de la quatrième. 2. Si l'abscisse a p, au lieu de couper la Courbe en ffe. 4 deux points, la touche en un (où l q; on doit concevoir qu'en ce seul point de contact q sont réunis & confondus les deux points de section q, r; en sorte que les deux parties p q, p r étant devenues égales, leur produit est un carré pq*, auquel le rectangle LpM des ordonnées est en raison donnée de d à a. De même, si on mène l'ordonnée // qui touche la Courbe en /, on concevra réunis en ce point les deux points de section L, M, & le rectangle L p M est devenu un carré qui est au carré /q* en raison donnée de à à a. 3. S'il arrive que l'éq : $dx^2 - eex = 0$ n'ait que des racines imaginaires, la Ligne des abscisses ajr ne rencontre point la Courbe, les points de section Q, R, qui feroient déterminés par cette équation [§. 15] étant imaginaires. Le Théorème ne laisse pourtant pas de se soutenir. Car il est toujours vrai que le carré : wLx^M des ordonnées est égal à —, ou $\sim (xx + A, , * +)$. Mats Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 24.54% accurate

112 PRODUIT DES OR DONNE' ES *UVI' cette quantité $xx + jx + t$ ne fera plus un rectangle QPR, qui feroit la différence de deux carrés KQ^2 & RP^2 [en divisant QR par le milieu en RJ. Elle fera la somme de deux carrés, $(x + \frac{A}{2})^2$ & $(\frac{C}{2})^2$]. 2^d Qu'on prenne donc, dès l'Origine *, une abscisse *B égale à $\frac{y}{\sqrt{C}}$; qu'on élève la perpendiculaire indéfinie BC, & qu'on la coupe en C par le Cercle décrit du centre * avec un rayon $\sqrt{C}$; ce qui donne $BC = \frac{y}{\sqrt{C}}$. — «Bl) = $\frac{y}{\sqrt{C}}$ - g), & on aura $vr C^2 = w B^2 + x^2 - f^2 = xx + x + \frac{C}{4}$. Donc, puisque le rect: wLx^2 est $= x^2 + x + \frac{C}{4}$, ce sera : Lx^2 est au carré wC en raison donnée de d à A II. Tout le reste subsistant, si la grandeur f est égale à zéro, Péq: $dx^2 + x^2 = 0$, faite en égalant le dernier terme à zéro, aura une racine $x = 0$. L'Origine sera donc sur un des deux points Q, R de la Courbe. Ce qui ne change rien aux Conclusions précédentes. III. Mais si c'est e qui est $= 0$, Péq: $dx^2 + x^2 = 0$ a deux racines réelles, si d & f ont différents signes, & deux racines imaginaires si d & f ont le même signe. Dans le premier cas, l'Origine est au point R qui divise QR en deux également. Dans le second, l'abscisse ne rencontre point la Courbe, & c'est le Cas du n°. L § : mais au lieu du point C il faut prendre le point D, sur la perpendiculaire «D, éloigné de l'Origine d'une distance *D = y/P

The text on this page is estimated to be only 26.96% accurate

D'UNE MEME 'ABSCISSE. $y/fL^{\wedge}$ parce qu'ici «B [— $\wedge$]
dévient nulle. On aura ?U donc le refh UM au quarré ttD1 en railbn donnée
de à à s. IV. Si d feulement eft égale à zéro , ^équation de la Courbe étant
 $ayy + (bx + a)y + eex + fl = o$, les ordonnées PL peuvent bien couper la
Courbe en deux Ffc.4fs points L , M ; mais les abfcifles ne la coupent qu'en
un feul point Qj[§. 4i]. Alors le rea : PLx PM eft égal à $-PQ = ^xPQj$
puifque $4=f^*> \& *=a$. Si on porte donc l'Origine en Q^, le rectangle LPM
des ordonnées eft égal au rectangle de l'abfcilTe P Q par une Droite
confiante — , troifième proportionnelle de a kt. V. Si d & e , égales chacune
à zéro , réduifent l'équation à $ayy+(bx ^cc^y o$, l'Axe des abÊ cin*ês ne
rencontrera point la Courbe & le rc&; LPM des * * ordonnées eft une
grandeur confiante , quelque abfcilCfè qu'on prenne. Ses deux ordonnées
LP*, PM font donc réciproquement proportionellcs l'une à l'autre. Ce Cas ,
où l'Axe des abfcifles ne rencontre point la Courbe , parce que le dernier
terme de l'équation eft réduit à p , eft efTentiellement différent de celui qui
a été touché au n°. 1. g , où l'Axe des abfcifles ne rencontre point la Courbe,
parce que Péq : $dxx-\sim eex* \{ *P =o$ n'a que des racines imaginaires. On ne
peut fùppofèr d, e, &cf égales chacune à zéro , parce qu'alors l'équation ,
divifible par y , fe pourroit réduire à deux équations du premier degré $y = o$
& $a y. *kbx+cc=oi$ & ne repréfènteroit que deux Lignes droites [§.ai. 40].
Utrod. à Pjnalylcdti Lignes Courbes. P VI. 1. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 27.88% accurate

U4 PRODUIT DES ORDONNEES fi.YU VI. i. Reprenons l'équation générale, & fuppofons $s \text{ Ch.}^* = 0$, ce qui la réduit à $(x+a)^2 + x^2 + 1 = 0$. Alors chaque abfciffè n'a plus qu'une ordonnée [§, 41]. Et pour appliquer à ce Cas -ci le Théorème gènétiq. 48. ral du §. 6 1 , on prendra AT égale à — y racine de l'éq: $hc + cc = 0$ & PL fera à PC^*PR , ou le red : T P L au ie&: QPR, en raifon donnée de d[A~\ à Tranfportant donc l'Origine en T , ce qui ne change rien aux ordonnées , le rectangle TPL des coordonnées eft au reâ: QJP R en raifon donnée de d à b. Mais fi Taxe a p , au lieu de couper la Courbe en deux points Q» R , la touche en un (èul q , le rec~t : t p L fera au quarr? de pq en raifon donnée. Et fi l'axe at ne rencontre point la Courbe , parce que les racines de Téq : $dx^2 + 4^* eex + 4^*/^* = 0$ font imaginaires, on prendra comme au n*. L j , «B=— & $BC = \sqrt{y}$; & ,e teÛ: TirL fera au quarré de ttC en raifon donnée de d à b. 2. Dans cette même équation , fi $f=z$ o , l'Origine tombe fur un des points $R > 0$ où la Courbe eft rencontrée par l'Axe des abfciffes. 3. Mais c — o fait tomber l'Origine au point K qui divilè également QR , lorfque.d & / ont des fignes différens. S'ils ont même figne, les racines de l'éq : $dx^2 + 4^*/1 = 0$ font imaginaires , l'Axe * w ne rencontre point la Courbe , & on doit tranlporter le point C en D fur la perpendiculaire «D à la même diftance de l'origine ». 4. Si l'on a $d = 0$, l'Axe des abfciffes ne coupera la Courbe [§.41] qu'en un lèul point Q. Et prenant toujourns Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 21.70% accurate

D'UNE MEME ABSCISSE. uy Pu Vfc jours $AT = -y$, on aura $PL = y$ ou TPL qui est le rectangle des coordonnées, en transportant l'Origine sur T est égal au rectangle de PQ par une constante b . Si on mène donc une autre ordonnée pl , on aura $TP \times PL : TP \times pl = PQ^2 : pQ$. Donc PL est à pl en raison composée de la droite de PQ^2 à pQ^2 & de l'inverse de PT à T . 5. Enfin, si l'on a d & e égales chacune à zéro, on aura $TPL = y^2$. Donc portant l'Origine en T , le rectangle des coordonnées est constant. VU. Dans tous les cas du n° préc. si on avait $c = 0$, cela ne changeroit rien aux conclusions, si ce n'est que l'Origine se trouve toute portée sur le point T , puisque la distance AT , qui est $-j$, se trouve nulle. VIII. 1. Mais si h y a aussi bien que a , est égale à zéro, l'équation" fera $ccy + Jxx + cex - i - f' = 0$, ce qui donne $dxx \times eex \times p d$, et $p \times H \times -xPQ \times PR$. Donc $xPL = PQ \times PR$. Le rectangle des parties $PQ \times PR$ de l'abscisse est égal au rectangle de l'ordonnée PL par une droite constante $-j$. Si l'abscisse a touche la Courbe en q , c'est le carré de pq qui est égal au rectangle de l'ordonnée pL par une constante. Et si l'abscisse w ne rencontre point la Courbe, les racines de $xx - j - x + j = 0$ étant imaginaires, le rectangle : P^2 de Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 27.26% accurate

6 PRODUIT DES ORDONNÉES Pl. vi. de l'ordonnée wL par
 une conſtante eſt égal au carré Ct.y. de la Droite ſr C menée de l'extrémité
 *■ de rabſciſſe au *' point fixe C , déterminé , comme aux n°. 1. g , &
 VI. I , en ſuivant. $-B = -^$, & $BC = V(^ -^j)$. 2. ici , comme aux n°. II, III, & VI,
 la ſuppoſition de fzzzo porte POrigine ſur un des deux points R. Et la
 ſuppoſition de $c = o$ porte A en K , ou C en D , ſuivant que les racines de
 $(/xx+/'=:o$ ſont réelles ou imaginaires. Mais on ne peut ſuppoſer $^=o$, parce
 que l'équation , n'ayant plus de terme du fécond degré , ne repréſenteroit
 qu'une Ligne du premier Ordre. 6°. On voit par cet échantillon, quelle
 variété de Cas ſe préſenteroit dans les Lignes des Ordres ſupérieurs.
 Touchons légèrement ceux qui ſe reportent aux Lignes du troiſième Ordre.
 L'équation générale fera $ſyl + + «0 yy +(dxx eex 4 fl) y +gx* bhxx+ i*x$
 $4« / * = o$. f. t. Et d'abord, ſ'il n'y manque ni le terme $*y*$, ni Pl. VU. le
 terme $g x'$, rabſciſſe & l'ordonnée peuvent couper la Courbe LQMRSN
 repréſentée par cette équation, chaK*'Sl' cune en trois points Q, R, S ; L, M
 , N. Et (elon le Théor. général [§. 6i] , le folide PLxPMxPN des ordonnées
 eſt au folide PQx PRx PS des parties de ſabſciſſe , en raifon donnée de £ [A
] à a [*]. De forte que menant deux ordonnées LN , l n , le folide PL x PM
 x PN eſt au folide PQx PRx PS comme le folide plxpmxpn au folide
 pQxpRxpS. Menant auffi qs parallèle à QS , on aura, toujours par la même
 raifon, le folide plxpmxpn au folide pQxpR xpS, comme le folide
 p\ xpmxf>n au folide pQxpR xpS. Donc enfin PLxPMxPN eſt à PQxPRxPS
 comme p\ xpmxpn à /qx/rx^s. Ce Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 25.00% accurate

Digitized by Google

Fig. 44.

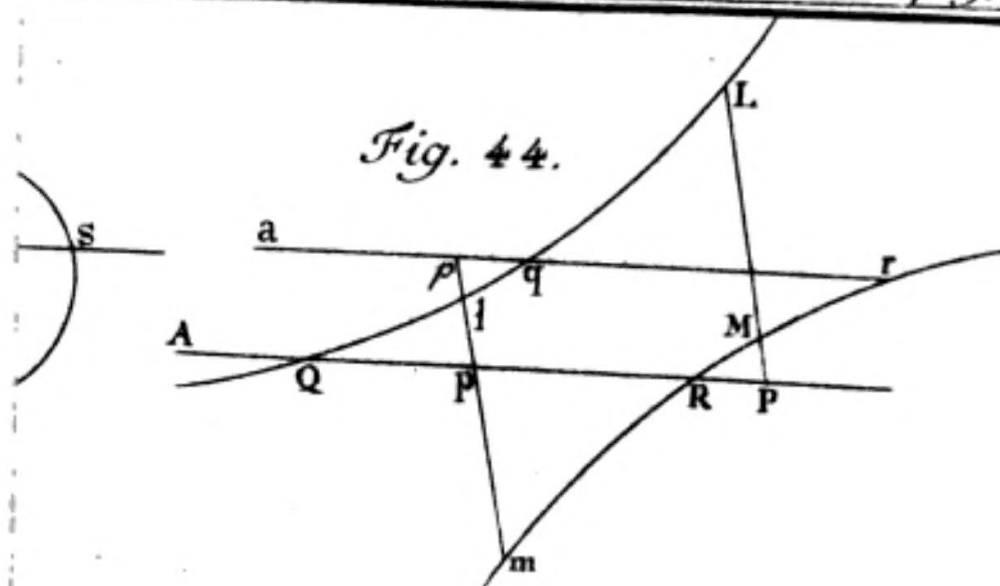


Fig. 45.

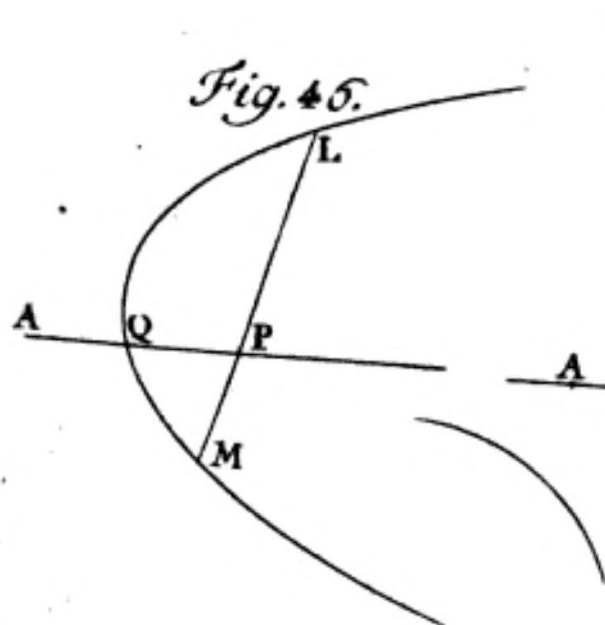


Fig. 47.

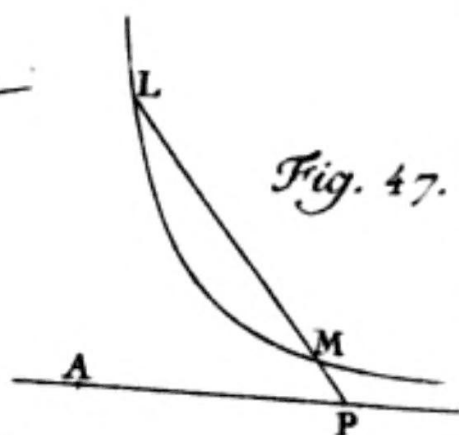
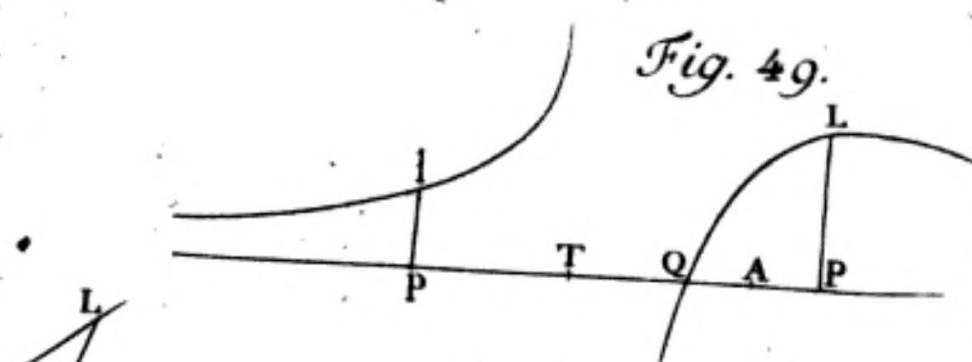


Fig. 49.



The text on this page is estimated to be only 22.57% accurate

li I I. i. uigiiizea by Google

D'UNE MEME ABSCISSE. 117 il. VIL Ce qui forme ce
Théorème. Si par un point P on Ch. v. mène deux droites LPN, QPS qui
coupent chacune en t_1 trois points une Ligne du troisiéme Ordre , & par
un autre point p deux autres droites p_n, q parallèles aux premières &
qui coupent auili chacune ia même Courbe en trois points ; le folide des
parties de la première droite LN interceptées entre le point P & la Courbe ,
est au folide des parties de la féconde droite QS interceptées auili entre le
point P & la Courbe , comme le folide des parties de la troisiéme droite ln
interceptées pareillement entre le point p & la Courbe , est au folide des
parties de la quatrième droite qs interceptées de même entre le point p & la
Courbe. 2. Si Pabfciflè ap coupe la Courbe en un lèul point s ** & la
touche en un autre point q , où Ton conçoit réunis deux points de fection,
alors le folide pLxpMxpN est au folide p q² x p s en raifbn donnée. De
même , fi l'ordonnée l p m touche la Courbe en m & la coupe en l , le
folide plxpm l fera au folide pq²xps en raifon donnée. Il peut même arriver
que l'abfcifle [ou • l'ordonnée] ne touche la Courbe qu'en un fèul point,
auquel se réünifTenc les trois points de fection Q. R, S. C'est ce qui arrive,
quand $Péq : \frac{f}{x} J + b h x x \cdot + < g^* x H K / * = o$, a fes trois racines égales. Dans
ce Cas, fi on tranfporte POrigine fur ce point de contact , le cube de
Pabfciflè est au (blide des ordonnées en raifon donnée. \$. Si l'abfciflè «««-ne
rencontre la Courbe qu'en un feul point cr, & la coupe en ce point -là fans la
toucher, Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 17.38% accurate

1x8 PRODUIT DES ORDONNEES Ch. v. duit de trois droites terminées à l'extrémité *m de rabfciflè, Pi. VH. *• *3- comme l'étoient PO, PR, PS à l'extrémité P de l'abfciflè, bb è% /♦ AP ; parce que l'eq : $x^2 + \text{---}xx - J \text{---} \text{---} \text{---}$ o n'a plus qu'une racine réelle, les deux autres étant imaginaires. On peut pourtant réduire le produit de ces deux racines imaginaires à un quarré, de la manière fuivantc. Soit eur—%. Donc $\wedge o - \backslash \_ - = z$

The text on this page is estimated to be only 18.85% accurate

D'UNE MEME ABSCISSE. u9 ■ V. '* i p <*. fur FE, prolongée
s'il le faut, une partie FG égale à y'j-, & on aura «G* =s*F* 4- FG* = zz +
— z + — . Qu'on décrive donc, du centre », avec le raïon «G ,^in cercle
GC, qui coupe en C la droite BC perpendiculaire à * B , & on aura BC* =
«C* — *B* = «G* — *B1 = (zz + — -z+— ; — + — J — \zz>k — z >fr .
Donc wC* =^rB1 + BC,=C^ + iz + + *zz* Ainfi puifque le folide .L^Mx

The text on this page is estimated to be only 27.25% accurate

lao ** PRODUIT DES ORDONNEES Pl. vil. élèvera la
perpendiculaire indéfinie BC & on la coupera Cn.y. en C par un cercle
décrit du centre * avec le raïon «C — v/ '11 , pour avoir le point fixe C ,
duquel menant la ~ droite «C, on aura wLx-îrMxwN à <5rC* x

The text on this page is estimated to be only 27.09% accurate

D'UNE MEME ABSCISSE. 121 c«.v. Le folide des ordonnées PLxPM xPN est égal à un fo- Pu yil S 6i- h h lide qui a une hauteur donnée — , & une bafe égale au reftangle des parties PQ^, PR de Pabfciflè. Si l'abfcifle a p touche la Courbe au point q , le re& : PQxPR devient le quarré pq\ Tranlportant donc l'Origine a fur ce point q , le folide pL x pM x pN des ordonnées est égal au folide qui a pour hauteur une droite donnée — , & pour bafe le quarré de PabfciflTc p q. Mais fi PAxe ne rencontre point la Courbe , ce qui arrive quand les racines de Péq : bbxx+iiix 4* / * = o font imaginaires; alors on prendra , comme au §. 62. n°.I. • • • 3, «0 = — -££y , on élèvera la perpendiculaire BC , on la coupera par un Cercle décrit du centre * avec un raïon *C = v/-^ = ^-, &on aura le point fixe C , duquel menant C*- , le folide ttLxwMxttN des ordonné b nées est égal au folide qui a la hauteur donnée — & la bafe égale au quarré de n C. 2. Si g & h font toutes deux nulles , le dernier terme de Téq : de la Courbe fera iùx + / 4 qui , égalé à zéro , n'a qu'une racine T . L'Axe AP ne rencontre la Cour- *' u' bc qu'en un feul point Et le folide PLxPMxPN des ordonnées est égal à - P Q== - PQ^, c'est-à-dire, [en tranfportant l'Origine au point Q,] que le folide des ordonnées est égal au folide , qui a pour hauteur fablciflc ;» PQ^& une bafe donnée — . a bitroà.àrdnalyf: de fUgnes Courbes. Q. 3. EnDigitized by Google

The text on this page is estimated to be only 24.52% accurate

122 PRODUIT DES ORDONNEES #1.VH. 2. Enfin ce folide
PLxPMxPN des ordonnées est c«v. ' d'une grandeur confiante — , fi les
quantités ξ , $b > s$ font chacune égale à zéro. IV. 1. Si dans l'éq : de la Courbe
 $*y^0 - f(\xi x + cc^{yy} 4 < (c/xx^r$

The text on this page is estimated to be only 23.16% accurate

D'VNE MEME ABSCISSE. i2j C«.V. 2. a étant toujours zéro, fi
de plus $\neq 0 > 0$ Origine Pu VIL tombe fur un des points $Q^{\wedge}$, R, S, ou fi l'Axe
rx rencontre la Courbe qu'en un feul point 8^* - & k folide PTxPL H PM eft
égal au folide x $PQ^{\wedge}$ Mais $Q^{\wedge}$ a fi Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 20.30% accurate

124 PRODUIT DES ORDONNEES Pl. vin. fi de plus / = o, PAXe
 ap ne rencontre point la Courbe , Ch.v. & le folide ptxpLxpM de Pabfciflc
 par les ordonnées [en fixant l'Origine en t] cit. d'une, grandeur conftanr V.
 Si dans tous les Cas du n°. précéd. on fuppose c = o, les conclurions qui ont
 éié tirées refent précifément les mêmes. La feule différence eft que
 l'Origine A eft néceflairement fixée au point T , puifque AT [— j-] (è
 trouve nulle. VI. Mais fi dans ces mêmes cas on avoit h = o , Péquation fe
 reduiroit a cette forme $yy - \frac{1}{2} y^2 + p^2 u^2 \pm \frac{1}{2} u^2 = 0$. Le rea . dës ordonnées
 »» PLxPM cft dol égal à $S - \frac{1}{2} l^2 + \frac{1}{2} l^2 = L X (x' + \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} x) = \frac{1}{2} x PQx$
 PR xPS. Donc $S S \frac{1}{2} l^2 - \frac{1}{2} x PL x PM = PQx PR x PS$. On aura ici toutes les
 mêmes condufions qui fe tirent dans le n°. IV, fi ce n'eft qu'au lieu de la
 droite variable PT [*+ -w] on doit prendre une droite confiante — . VII.
 Suppofons maintenant que b & c étant nuls faflent difparoître les deux
 premiers termes de l'éq : générale , & la réduifent à $(dxx + cex^4) +$
 $hhxx + gfe. 60. /V/x + /+ = o$. Chaque abfcifle A P n'aura qu'une feule
 ordonnée PL. Et pour appliquer ici le Théor. général , on prendra Digitized
 by Google

Fig. 52.

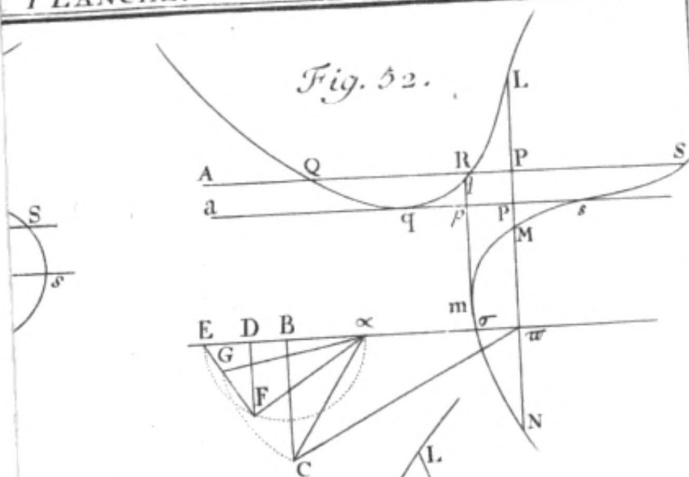


Fig. 54.

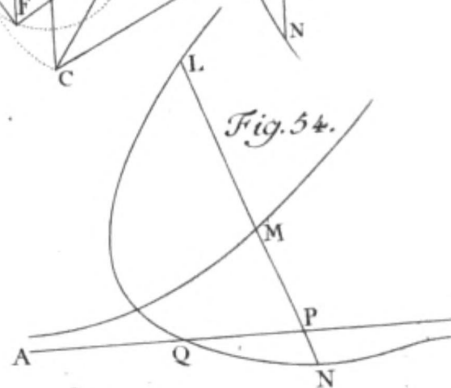


Fig. 55.

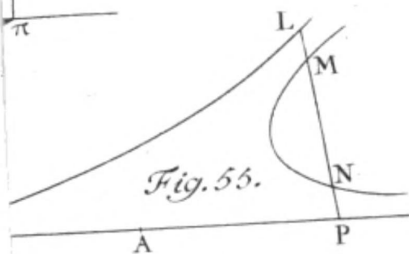
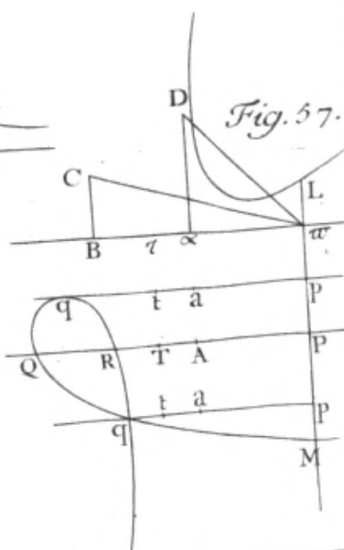


Fig. 57.



The text on this page is estimated to be only 23.33% accurate

Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 24.23% accurate

D'UNE MEME ABSCISSE. iaj Ch. v. prendra AT & AV égales aux deux racines de Péq : $Wx + Pt.v$, $S'63' r r > o p M$, $PQ \times PR \times PS . r$ $eex^f = o$, & Ton aura PL a $\sim pj^{\sim}py \rightarrow$ ou 'c Solide PT x PV x PL au folide $PQ \times PR \times PS$ en raifon donnée de ℓ à d. Lorique les racines AT, AV de $Pe'q : dx + 4^{\sim}x + \ell$, $= r o$ font réelles , on les peut déterminer par cette congruence triviale. Prenez fur l'Axe des abfcilTes AH = P élevez la perpendiculaire $H I = V \cdot j$, & du centre I , avec un raïon I T égal à A H , décrivez un Cercle qui coupera l'Axe en T & V. Car HT ou $HV = \sqrt{(IT^2 - IH^2)} = y / (AHI - HP) = \sqrt{jd - \ell}$. Donc $AT = AH - HT = \sqrt{AH^2 - 4p + HV} = \sqrt{-d - Vi^2jd - 7}$, qui font les deux racines de Péq : $gxx + p = o$. Mais Ci les racines de cette équation font imaginaires , ce P ce qui arrive quand IT ou $AH[-^{\sim}] < IH IV] > 1^{\sim}$ grandeur $xx + e \sim x$ ne peut plus reprélènter un rectangle PT x P V ; mais elle pourra exprimer le quarré d'une droite I P , menée de Pextrémité P de Pabfciflè A P à un point fixe I, qui fera déterminé comme au §. 6z. n°. I. g, en prenant AH = — élevant la perpendiculaire indéfinie H I , & la coupant en I par un Cercle décrit du cenP tre A avec un raïon AI = V j > Ainfi Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 23.80% accurate

n⁶ PRODUIT DES ORDONNEES Pl.VIH. Ainfi le folide $PQ \times PR \times PS$ eft proporcionel au folide $Ck \cdot PT \times PV \times PL$ quand les deux racines de l'éq : $dx^2 + ecx + t^* p = 0$ font réelles , & au folide $Pi \cdot l \times PL$ quand ces racines font imaginaires. Dans l'un & dans l'autre cas , ce folide $PQ \times PR \times PS$ eft me'iamorphofé fuivanc toutes les manières indiquées aux n^o.I, II, & III du préient § , foit par la pofition de PAxe des ablciffes, foit par les fuppoſitions de $l = 0$, ou de $i = 0$, ou de $l = l' = h = 0$; ou de $l = 0$, ou de $g = h = 0$, ou de $l = h = i = 0$. VIII. Si avec $a > bt$ & c , on a encore $l = 0$, le point T tombe fur A , & le point V* doit être pris à une dilance AV de l'Origine qui foit $\sim^4$, parce que les racines de l'éq : $dx^2 + eexzsz = 0$ font $x = 0$ & $x = \sim$. On a donc, en ce cas, le folide $PA \times PV \times PL$ proportionel au folide $PQ \times PR \times PS$, ou à tous ceux dans lesquels ce dernier k m'iamorphofè par les fuppoſitions des n^o 1, II, & III. IX. Si ce n'eft pas /*, mats e , qui foit $= 0$, les points T & V tombent de part & d'autre de l'Origine A , à une P diftanc y' — j t lorſque f & c d n'ont pas le même ſigne, P P parce que $x = y / \sim y = 0$ & $x - tV = d \sim 0$ font les racines de l'éq : $dx^2 + l''' = 0$. Si / & d ont le même ſigne, $l''' = y - j$ eft une grandeur imaginaire ; mais $xx + J - r$ exprime le quarré de KP menée de l'extrémité de l'abCcilTe AP au point K , déterminé en prenant A K $l = AIJ$

The text on this page is estimated to be only 23.34% accurate

D'UNE MEME ABSCISSE. 127 JdJ = $\hat{\hat{j}} > \hat{ur} h$ perpendiculaire indéfinie élevée au point pLV, li* A. Alors, le folide PLxPK* cft proportionel au folide PQ[^] x PR x PS , ou à tous ceux que lui fublittuent les fuppoſitions des n°. 1, II, & I IL X. Si les deux grandeurs f & e font , en même tems , z=± o , les deux points T & V tombent enfemble fur l'Origine A, parce que les deux racines de féq : <&x = o font x=o, # = 0 : & c'eſt le folide PLxPA1 qui eſt proportionel au folide P Qx P R x P S , ou aux folides équivalents. De même , la fuppoſition de d[^]ss -77 donnant à leq: Jxx -H eex >kP = o deux racines égales., chacune à — ou _ ~ , fait tomber les deux points T & V fur le point H, & change le rea: PTxP Ven un quarré PH\ fur lequel élevant un Parallélépipède qui ait PL pour hauteur, il fera proportionel au folide PQ[^]x PR x PS , ou à ceux e» qui il le transforme par les fuppoſitions des n\ I , II, & 111. XI. Si*, b, c & ^font nuls, féq: àxx * eex =0 réduite à eex>{*fi—o n'a qu'une racine x = — , à laquelle prenant égale AT , on aura [§. 61] ^ yfxPOxPRxPS r POxPRxPS _ le folide de la confiante — par Pabfciflê P T [en portant TOrigine de A en T] & par l'ordonnée PL cft égal au foKde PQx PRxPS , ou à ceux dans leſquek le transforment les fuppoſitions des n°. 1 & IL XII. En\ \ Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 22.96% accurate

ilB PRODUIT DES ORDONN. D'UNE MEME 4BSCISSE.

Pl.viii. XII. Enfin , si a, b} cyd,&c font nuls, l'éq: de la Courbe ré- Ch. v. f*
 hb S- *h duite à $Py^{gx1} \wedge bhc x + iix^* \setminus^* / + z = 0$, ou $y^* \setminus^* k \setminus^* + \sim^* H = 0$
 , fait voir que le fblide de l'ordon* s p fig.tu née PL [^] par le re& :
 confiant7— est égal au folide POx PR x PS , ou à ceux qui lui font
 fubftitués dans les n°.i&IL Dans le cas des n°. X. & X I. on ne peut pas ,
 comme au n°. III, fuppo(èr $x = 0$; parce qu'alors l'équation , n'ayant plus de
 terme du troifième degré , ne reprélènteroit qu'une Ligne du (ècond Ordre.
 On voit afièz , je penlè , que si Ton vouloit détailler tous ces Cas , combiner
 enfemble ceux qui peuvent l'être , & te laiflèr aller aux conféquences qui en
 fuivent naturellement , il y auroit dequoi faire un Volume. Mais nous ne
 nous propofons que d'indiquer les principes généraux , & d'autres
 confidérations nous appellent. CHAPI

Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 22.89% accurate

CHAPITRE VI. Des Diamètres , Contre-diamètres , & Centres des Lignes Courbes. 64. fTP O u t ce qui a été démontré au Chap. précéd. p^{vm}. JL n'est que la conséquence de ce Principe , Que le dernier terme d'une équation ei\ égal au produit de toutes ses racines. On fait auflî que le coefficient du (ècond terme , pris avec un signe contraire , ert égal à la fomme de toutes les racines. Donc (« x 4* \$ x 1 &e) y* ' + (sx'+1 + ^c/ + dtO/J'~/'''1 &* =0 étant l'équation d'une Courbe MmOftQ^, de l'Ordre v , fi on la f^,tfJ* divife par le coefficient du premier terme , afin que la plus haute puiffance de y (bit fans autre coefficient que l'unité, elle prendra cette forme yv^t*3c^- ***** yv—* 1 *i* &c = o , où le coefficient du fécond terme , pris avec un signe contraire , c'est-à-dire , — TJLi exprime la (bmme de toutes les racines.^ , ou de toutes les ordonnées P M , P m , P , &c. 65. Si fur les mêmes Axes on décrit une autre Ligne quelconque N v Qn représentée par une équation dont les deux premiers termes foient jv~mS+ — T * ' , intnd . a PAnaiyfe des Lignes Courbes, R />>"-« ,

The text on this page is estimated to be only 25.95% accurate

i3o DES DIAMETRES π -VIII^{*} — / — i > hçomme de fcs
ordonne'es $P_N + P_n * V_f$ &c. $\wedge JJ$ fera auflï — "^L. — Élj c'est-à-dirc, la
même que la fomme des ordonnées $P_M + P_m + P_f^*$ &c. de la premièrc
Ligne. La comparaifon de ces deux Lignes & les variétés infinies dont elles
font fufceptibles [car il fuffit qu'elles conviennent dans le coefficient du
fécond terme , leurs équations étant ordonnées par y : elles peuvent différer
dans tout le refte] donnent lieu à une infinité de Propofitions. Contentons -
nous de remarquer un Cas fort fimple. C'eft i celui où / = / , c'eft- à -dire,
celui où les deux Lignes font du même ordre v , & où leurs équations ont
les deux mêmes premiers termes. Si Ton ne prend que les abfciflès qui dans
chaque Ligne n'ont point d'ordonnées imaginaires , ou , ce qui eft la même
chofe , fi Ton ne prend que les ordonnées qui coupent l'une & l'autre Ligne
en autant de points qu'il y a d'unités dans le plus haut expolant v — / de la
variable y ; non -feulement la fomme $P_M + P_m + P_u$ &c. des ordonnées de
la première Ligne MmOp Q^{est} égale à la fomme $P_N + P_n - P_r$ &c. des
ordonnées de la féconde Ligne N » Qji ; mais encore le nombre des
ordonnées de l'une eft égal au nombre des ordonnées de l'autre. Etl'éq: P_M
 $+ P_m + P^* &c. = P_N - P_n + P_i > &c \#$ peut prendre cette forme $P_M - P_N +$
 $P_m - P_n + P^u - P^> &c. = 0$, ou — $NM + mn + fip &c = 0$, foit $M N &c$
 $= m n + fit &c$. Propofition qu'on peut énoncer ainfi. Deux Lignes d'un
même Ordre , & dont les équations ordonnées par y ont les deux mêmes
premiers termes , étant décrites fur les mêmes Axes ; toute ordonnée qui
coupe l'une & l'autre en un nombre de points égal à Pexpolant de la plus
haute puiffance d'y , eft coupée en forte que Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 23.89% accurate

DES LIGNES CO URB ES. 131 Ch. vi que la fomme de fès parties Interceptées entre la première P^{VIH}. * *i' & la féconde Ligne ert égale à la fomme de Tes parties interceptées entre la féconde & la première Ugnc. Je diftingue ces parties en fuppofant qu'on parcourt l'ordonnée d'un bout à l'autre , & papelle parties interceptées entre la première & la féconde Ligne celles qu'on parcourt en allant d'un point de la première Ligne à un point de la féconde , & parties interceptées entre la féconde & la première Ligne celles qu'on parcourt en allant d'un point de la féconde Ligne à un point de la première. Ainfi parcourant l'ordonnée N[>] de N à * , MN eft une partie interceptée entre la féconde & la première Ligne , mais m ti & t*t font interceptées entre la première Ligne & la féconde. 66. S'il n'y a dans l'équation aucune puiffance de * qui ait un expofant négatif, comme on le fuppofe d'ordinaire , & que / foit zero , le coefficient $\sim \frac{1}{8} \cdot *' + \frac{1}{8} \cdot *' < *$ du fécond terme fe réduit à $ax + b$. Alors on peut toujours prendre pour l'une des deux Lignes, le Syûctne d'autant de Droites qu'il y a d'unités dans v. Et ces Droites fé peuvent décrire en une infinité de façons. Car fi A B , r⁶⁺ A H font les deux Axes , & qu'ayant pris une abfcidé A B = 1 , on lui donne les ordonnées BC [— c] , BD [— d] , BE [— e] &c. dont le nombre foit v, & la (bmme [— c — d — e frc.] égale à — 'a , où l'on peut , fi l'on veut , prendre le zéro pour une ou plufieurs de ces grandeurs c > d, e > &c. & qu'on mène par l'Origine A les Droites ACc, ADd, AEe, &c. qu'on prenne auffi fur l'Axe des ordonnées les parties AF [— /J, AG [— g], AH [— h] &c. dont la fomme [— f — g — h &c] foit égale à — b : & qu'on mène les Droites Ff , Gg , Hh , &c. parallèles à AC, AD, A E, & G. Le fyftème de ces Droites Ff, R2 Gg, Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 23.46% accurate

132 DES D1A METRES Pu vin. Gg, H h &c. fera représenté par une équation dont les Ch.vi. deux premiers termes feront $y^4 - (ax + b)y$ v 1 . Car 5' '* l'ordonnée Pf de la Droite Ff est égale à $Pc + cf$. Or Pc est la troisiéme proportionnelle à AB f i], BC [— c] & AP[*]. Donc $Pc = \frac{AB \cdot f}{BC}$ ex. Et cf est égale à $AF \cdot \frac{f}{AC}$ y F f étant parallèle à Ac. Donc Pf [= $Pc + cf$] = $\frac{AB \cdot f}{BC} + \frac{AF \cdot f}{AC}$ L'équation de la Droite F f est donc $y^4 + (x + \frac{a}{b})y = 0$. Par la même raifon Péq: de Gg est $y + dx$. 4* $x = 0$, celle de H h est $y^4 - cx + h = 0$, & ainfi de fuite autant qu'il y aura de Droites. Donc le systéme de ces Droites est représenté par le produit $(y^4 - dx^4) (y^4 - fx^4) = 0$ de toutes ces équations [§. 20], dont le premier terme est y^8 & le fécond $(\{ex^4 + a c^2\}) y^4 = C +$ puisque $r^4 - c^2 v = *$, & $f + g + b + c = b$. Le systéme de ces Droites est donc représenté par l'éq: $y^4 + (ax + b)y^4 - r^4 = 0$, dont le fécond terme a pour coefficient $ax + b$, qui étant pris avec un signe contraire, donne $-ax - b$ pour la somme Pf4 /, &c. telles que $4 + \&Ph = A-H^$, &c. Doncla somme Pf+Pg+Ph &c &c + Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 29.18% accurate

DES LIGNES COVRBES. 133 Ci.YI. , , f £ , b . N , Pl.YIII. Ainfi décrivant fur les mêmes Axes une Courbe MQmji dans l'équation de laquelle les deux premiers termes foient $^{+}(4\#-f-\&)^{+}$, fi Ton mène une ordonnée Vu qui rencontre cette Courbe en un nombre v de points M, m, f* &c. la fomme des ordonnées PM, Pm, Vukc. de la Courbe, fera égale à la fomme des ordonnées Pf, Pg, Ph, &c. des Droites Ff, Gg, H h, &c. & les parties hf*, g m , &c. interceptées entre les Droites & ta Courbe , feront égales aux parties [ou à la partie] Mf &c. intercep' tées entre la Courbe & les Droites. 6 7. Rien n'empêche de prendre les ordonnées A F > AG, AH &c. égales entr'elles , & comme leur nombre eft v & leur fomme — b , chacune fera . On peut de même prendre les abfcifTes Al, AK, AL, &c. égales entr'elb b b les. Les nommant — r, la fomme H — + — f — &c = vr vr b b •4- — doit être — a: ce qui donne $r = \frac{a}{v}$. Alors $r^{\&}$. toutes, les Droites 1F, KG, LH &c. Ce réduifent à une a b feule RS représentée par $Péq^{+} + -\ll + - = 0$ ou vy $4\ll 4x 4^{*} b rr o$. Son ordonnée PS prile v fois eft égale à la fomme $PM + Pm^{+}Pju$ &c. des ordonnées de la Courbe M Qm /u , & les parties M S , m S , &c. interceptées entre la Courbe & la Droite font égales aux parties [ou à la partie] S» &c. interceptée entre la Droite & la Courbe. De forte que fi Ton prend cette Droite RS pour PAxe des abfcif0ês , la fomme des ordonnées négatives SM + Sm, &c. R 1 eft Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 24.27% accurate

»34 *>>ES 31 A M JET R ES Pi. vin. eft égale à la fomme su &c.
 des pofitives. Une Droite Ch.vi. qui a cette pofition le nomme un Diamètre ,
 à prendre ce *7* mot dans une fignification étendue * . 68. Il n'y a point de
 Courbe algébrique qui n'ait une infinité de Diamètres , parce qu'il n'y a
 point de Courbe dont on ne puifle transformer , en une infinité de façons ,
 l'équation *r)/''''''+(+bx &c)y &c = o , de forte que Tcxpolânt / devienne
 égal à zéro. Il faut pour cela que la plus haute ->uiOance de l'ordonnée y
 foit d'un degré dont l'expofant y — /] foit égal à v. Or c'eft ce qu'on peut
 toujours lire en donnant une pofition convenable aux ordonnées. Car
 puifque l'Ordre de la Courbe eft v, il y aura néccflairement dans fbn
 équation des termes , tels que / v — •/ t+i v — / — i *x y *** J , &(où la
 fomme des expofants de x &c y fera v [§. ? i]. On change la pofition des
 ordonnées en fubftituant z + ru à x , & su à y [§.25], fubftitution qui change
 ces termes en «(z+w)/V"/«v"/, ~'+ar+ls*~t'~l'+&c. de * Newton,
 Enumer. lin. tert. ordinis. §. IL 1.

The text on this page is estimated to be only 23.54% accurate

DES LIGNES COURBES. *ijj* Ca. VI. - • m P , , « . , , r Pl. VIII. §.
«t. de * ne Toit pas zéro, ccit a-dire, pourvu que a -{-a — -f- &c. ne (bit pas
ze'ro , ce qui fe peut faire en une infinité de manières , ces ordonnées «
auront un Diamètre. 69. Mais on peut s'élever à des Propofitions encore
plus générales fur cette matière. Soit CMNn une Courbe r& *« de l'Ordre v
, dont l'équation relative aux abfciffes AP [*] & aux ordonnées PM [y]
foit $y^{4\ll b} = \text{fr. } (c_{xx} + dx + e) y^{1-2} + (\sqrt{V} + g_{xx} - H_{xx} 4^* /) J + ^ =$
o , où la variable y s'élève à la pui (Tance v , ce qui eft toûjours poffible [§.
préc.]. S»it de plus B QD une autre Ligne décrite fur les mêmes Axes , dont
les abfciffes foient AP[x] & les ordonnées PQ [«]. Qu'on nomme z la partie
QM , QN , ou Qn , de l'ordonnée comprit entre les deux Lignes , & qu'on
fubftituë , dans l'éq : de la Courbe CMNn, + » au lieu ây. Cette équation
ordonnée , après fa transformation , fuivant les dimenfions de z aura pour
premier terme z , & les coefficients du (ècond , troifième , quatrième &c.
termes feront relpectivement , $vu^{\wedge} \zeta ax + b$, $VmV \ 1 \ u1 - + 1.2 \ 1 . f^* . j . \$
 $v-v — l'v — 2 \%$, $v — *'v — 2 \sqrt{+ (+S_{xx} + bx + Oi \grave{a}-c}$. Si l'on fùppofè
fucccflivement chacun de ces coefficients égal à zéro , il en réfultera les
conféquences fuivantes. L Le coefficient du fécond terme d'une équation
étant égal Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 25.85% accurate

136 DES DIAMETRES Pl. vui. égal à la somme de les racines : si ce coefficient est zéro c^* . vr. la somme des racines positives est égale à la somme des $***$ négatives. Donc , faisant vu $\bullet + \bullet ax^4 - b = 0$ la somme des z positives est égale à la somme des z négatives. Mais $-y^* 4 < + 0$ est une équation à la Ligne droite. Ainsi une Courbe CMNn étant donnée , on peut mener une Droite BQD telle que la prenant pour l'Axe des abscisses , la somme des ordonnées positives Q^M , Q^N , &c fera égale à la somme des ordonnées négatives Q_j , &c. [§. préc.] . II. 'Le coefficient du troisième terme d'une équation est la somme de tous les produits qu'on peut faire de (es racines prises deux à deux. Cette somme est donc nulle, les produits positifs $QM \times QN$ &c. sont égaux aux négatifs $QM \times Q_n$ $Q^N \times Q_n$ &c , lorsque ce coefficient est zéro : ce qui donne l'équation $v^* + v - i (ax^4 + cxx + dx + e) = 0$ à une Ligne du fécond Ordre. Donc lorsqu'une Courbe du troisième Ordre ou d'un Ordre supérieur est donnée , on peut toujours décrire une Ligne du fécond Ordre qui coupe les ordonnées, de manière que , faisant tous les produits qu'on peut faire en multipliant deux à deux les parties d'une ordonnée comprises entre ces deux Lignes , la somme des produits positifs fera égale à la somme des négatifs. III. De même , puisque le coefficient du quatrième terme d'une équation est la somme des produits des racines prises trois à trois , si l'on fait ce coefficient égal à zéro $V.V 1.V 2 . V 1.V 2$, ro , on aura l'éq : $*' H (ax^4 + = 0$ à une Ligne du troisième Ordre. On peut donc afflurer

The text on this page is estimated to be only 28.63% accurate

DES LIGNES COURBES. 137 CkVL affurer, qu'une Ligne du quatrième Ordre ou de quelque Pt.vili. * *** Ordre supérieur étant donnée , on peut toujours tracer une Ligne du troisième Ordre qui partage les ordonnées de la première Ligne , de manière que faisant tous les produits possibles de trois dimensions avec les parties d'une ordonnée comprises entre ces deux Lignes , la somme des produits positifs fera égale à la somme des produits négatifs. Et ces Propositions (è peuvent continuer à l'infini *. 70. Les Courbes , qui divisent ainsi les ordonnées d'une autre Courbe , en peuvent être appelées les Diamètres Curvilignes. On attache quelquefois à ce mot de Diamètre une signification bien plus réfléree. On désigne par ce nom un Axe qui coupe les ordonnées de façon que chaque abscisse ait des ordonnées positives & négatives égales. Il coupe donc l'espace terminé par la Courbe en deux parties égales & qui sont même (emblables lorsque les ordonnées sont perpendiculaires à l'Axe. Mr. Newton appelle ces Diamètres , des Diamètres abscissus f . L'on voit d'abord qu'en ce cas chaque abscisse a des ordonnées en nombre pair , puisqu'à chaque ordonnée positive il répond une ordonnée négative égale. Donc la plus haute puissance de y doit être une puissance paire. Mais de plus il faut que toutes les puissances impaires de y manquent dans l'équation. Car , si chaque ordonnée positive a une ordonnée négative égale , chaque racine positive [+ X] de y aura une racine négative correspondante [— X], en sorte que l'équation aura autant de racines $y+X=0$ que de racines $y - X=0$. On peut joindre l'Introduction à l'Analyse des Lignes Courbes. S dire * Sterling , Lin. tert. Ord. Newton, pag. 7j. t Njivtok , Enum, lin. tert* Ord. §. III. à la fin. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 28.16% accurate

US DES DIAMETRES Pi. Vin. cjrc ces racines par couples & en faire l'équation du fe-Ot.vi cond degré yy — $XX=09$ où il n'y a point de puiflân- ^7m ce impaire de y. Donc , dans l'équation de la Courbe toute cotnpofée de pareilles équations , on ne verra aucune puidànce impaire de y. ft. Il eft clair par les §§. précécL que tout Diamètre d'une Ligne du fécond Ordre eft un Diamètre abfolu. Car , dans cet Ordre , chaque abfcifiè ne peut avoir que deux ordonnées [§. 41]. Donc, fi leur fomme eft égale à zéro , ce qui eft le propre des Diamètres [§. 6y J » il faut que Tune étant pofitive & l'autre négative , elles foient égales : ce qui conftituë la nature du Diamètre abfolu Par conféquent , quelque pofition qu'on donne aux ordonnées d'une Ligne du fécond Ordre , pourvu que chaque abfciflè ait deux ordonnées , on pourra toujours leur trouver un Diamètre abfolu. Car quelque pofition qu'ayent les ordonnées d'une Courbe , on peut toujours leur trouver un Diamètre , pourvu que, dans l'équation , la plus haute puiflance dyy ait le même expofânt que l'Ordre de la Courbe [§. 63]. Donc , dans le (êcond Ordre , pourvu qu'j s'élève au quarré , c'eft-à-dire , pourvu que chaque abfciflè ait deux ordonnées [§.41], la Courbe aura un Diamètre. Et dans cet Ordre , tout Diamètre eft abfolu. 72. 1 l n'en eft pas de même dans les Ordres fupérieurs. Une Courbe peut n'avoir aucun Diamètre abfolu , parce qu'encore qu'on puiflè toujours faire évanouir quelques-uns des termes de l'équation qui renferment des puiflances impaires d'y , il n'eft pas toujours poffible de les faire tous difparokre. Dans les Courbes , par ex. du troifième Ordre , repréfentecs généralement par Téq ; é Hh by ex 4- dyy >\

The text on this page is estimated to be only 21.54% accurate

DES LIGNES COURBES. 139 Ch. yi. $4^*/r^* + hxyy 4 < sxxxy + /*$
 $= 0$, si l'on demande Pt-vili. $* 7^*$ quel doit être le rapport des coefficients a ,
 b et c , qui permet que la Courbe ait un Diamètre absolu : On peut
répondre 1°. que cela aura lieu quand on multiplie les puissances
impaires de y , font zéro : & alors la Ligne même des abscisses est le
Diamètre. Car l'équation, réduite à $x^m + x^k = 0$, a deux racines égales, l'une
positive, l'autre négative, $\pm \sqrt[m]{-x^k}$ — $Ix^0 + fxx - \{ -ex 4^* , , r. ^x 2 \}$ a moins
qu'elles ne soient toutes deux imaginaires. 20. La Courbe peut avoir un
Diamètre absolu différent de l'Axe des abscisses. Et pour déterminer en quel
cas la chose est possible, on donnera aux deux Axes une position
indéterminée, en substituant $w + z + y^*$ à x & $4z$ à y [§. 24], ou
seulement $qz + say$ parce que la position de l'Origine sur l'Axe des abscisses
étant indifférente, on peut la placer au point où la nouvelle Ligne des
abscisses coupe la primitive, ce qui rend $n = 0$. Après cette substitution, si
on égale à zéro les coefficients des termes x , z , zz , a' qui contiennent les
puissances impaires de l'ordonnée x , on aura ces quatre équations. (ytf).
 $.ks + cr J^?ems + 2fmr + imms + ilmmrz = 0$ (£)... $zdqs + cpsJ^? cqr + 2fpr +$
 $2hmqs + 2tTnqr + 2imps + 6/mprzxo$ ($O \cdot fgfff + ityf - J + tyfr + 2/pqr +$
 $rpps + ^/ppr = 0$ (£>).. $.£/ ' 4 - bru - j - hrs 4^ / r^* = 0$ On peut déterminer le
rapport de z à r , ou la valeur de la fraction — par Tcq: $D...es^1 + b£r + i — ^1 y$
 $0 r r y = 0$, qui étant du troisième degré a toujours au moins une racine
réelle. Ce rapport ainsi déterminé, si on le substitue dans l'équation

The text on this page is estimated to be only 23.00% accurate

i4o DES D 1 A METRES Jf.7*2f*Ues CmVTFt.VIir. 2j*^e~
 fubftituë dans l'e'q: A réduite à cette forme $ml - \frac{m}{r^4} = 0$, on déterminera
 la valeur de m. Et $(r + 2tm) - \frac{1}{6}Im$ comme l'eq : B donne -J. = - ,
 le raport de f à $\frac{1}{r}$ eft déterminé, dès que - & m- font connus. Mettant donc
 ces valeurs de $\frac{1}{r}$ & de $\frac{1}{r^4}$ dans l'e'q: $\frac{1}{r} \in \mathbb{C}$ qui fe réduit à $ig.f. \pm + 2k.f. \ddot{i} + i.f$
 $+ A. f^4 - 2i. - \frac{1}{r} + \hat{i} = 0$, on aura l'équation qui exprime le t t raport que
 doivent avoir entr'eux les coefficients $b > cyd y e, / *, f, f, \#, /$, afin que la
 Courbe (bit fufceptible de Diamètres abfolus. Mais ce Calcul fera fort long ,
 fi l'on ne trouve quelques abrégés. On y fupplcra en quelque forte , fi Poa
 confidère qu'on peut toujours foire évanouir le terme $s^* s^2 s$ par la
 réfolution de l'e'quat : $f^4 - f^4 - \frac{1}{r} + if = c$ » qui détermine la pofition des
 ordonne'es qui ne répugne pas à un Diamètre abfolu. Cette équation ne
 pouvant avoir qu'une ou trois racines réelles, il en fuit, qu'une Ligne du
 troifiétne Ordre ne (âuroit avoir qu'un ou trois Diame'tres abtblus. Mais
 toute Ligne de cet Ordre n'en eft Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 21.80% accurate

DES LIGNES COURBES. 141 Ch. vl. cft pas fufceptible.
 Suppofant que l'équation de la Cour- Puvu. $\$-7^{**}$ be, après
 révanouiffement du terme «' , foit $(Az+B)\{ux + tClz+D\&+E\}^{*}+Fzi + Gzz +$
 $Hx + I=0$, il faut encore voir fi l'on peut donner à Taxe des Abfciffes une
 pofuion qui falie dilparoître le fécond terme. Car on ne peut plus changer la
 pofition des ordonnées l'ans faire reparaître u\ On donnera donc à l'Axe des
 abfciffes une pofition quelconque [§. 25] en fubftituant pz pour z & w +
 u+y z pour * ; ce qui transforme l'équation en $\{Api + B\} (mm + 2WU +$
 $UU + 2mqz + 2q\backslash xz + \$y zz) 4- (Cppzz + \% + f)(\gg' + u+^)+ F/>V + Gplz\$
 $+ Hpz + * = 0$, dont les termes qui renferment la première puiffance d'u [ce
 font ceux qu'il faut anéantir] font $(Apz + \pounds)(2/wu + 2^uz) 4< (Cppzz ^Dpz$
 $+ E)u$, ou $(aApq + C^/>) uz z^4" (zAmp + 2Bq + Dp) uz 4(2B\gg\gg 4,E)u$. Ces
 trois termes égalés à ze'ro donnent ces trois équations $sApq+Cpq = 0$,
 $2Amp+2Bq + Dp = 0$, & $2Bw + E = 0$. Des deux premières on déduit $A p$
 $2B - A B 2 \sim = \text{---} L = \sim\sim r$, iz. Donc $\text{---} = \text{---} = C q 2Am>\backslash^{*}D C 2Am + D$ [
 puifque leq ; $2 Bm^{\wedge} E= 0$ donne $2m \text{---}] z> ABD \text{---} AAE$, ou $>\pounds 4E \text{---}$
 $ABD + BBC = 0$, pour déterminer le raport des coefficients $A > B$, C, D ,
 E propres à donner à la Courbe un Diamètre abfolu. 7?. A l'imitation des
 Diamètres, Mr. i>e Braceloncne * a imaginé les Contre -Diamètres. Ceft le
 S 3 nom * Hift. de fAcad. 1732. pag. 70. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 26.00% accurate

142 DES CONTRE-DIAMETRES Tl. viii. nom qu'il donne à un
 Axe des abscisses tel que les abscisses $c^*.vi.$ ordonnées opposées égales ont des
 ordonnées opposées égales. Il coupe donc la Courbe en deux parties égales
 & semblables, comme le Diamètre, mais avec cette différence, que les
 parties semblables sont opposées : celle qui est dans l'angle des coordonnées
 positives étant égale & semblable à celle qui se trouve dans l'angle des
 coordonnées négatives, &c. Il est bien que, quand un Axe est en même temps
 Diamètre & Contre - Diamètre, la Courbe se trouve partagée par (es Axes
 en quatre parties égales & semblables ; à supposer, comme on le fait ici, que
 les ordonnées sont perpendiculaires aux abscisses. Telle est la Courbe qu'on
 a examinée au §. 16. L'équation d'une Courbe, dont la Ligne des abscisses
 est un Contre - Diamètre, doit être telle que, changeant $+x$ en $-x$, & $+y$
 en $-y$, elle reste précisément la même. Car alors les $-x$ égales aux $+x$
 auront des $-y$ égales aux $+y$. Cela a lieu toutes les fois que, dans l'équation
 mise sur le Triangle analytique [§. 5 J, il manque tous les Rangs pairs, à
 compter du plus haut Rang en descendant. Ainsi l'éq : $(A)^4$ du quatrième
 Ordre, à $4x^4 + 4x^2y^2 + y^4$ gnes)igitized by Google

The text on this page is estimated to be only 26.81% accurate

DES LIGNES COURBES. 143 Ch. vi. gnes foient changez : Car
fi $+B=0$, auflî — $fl=0$, Puvill t-fh c'cft-à-dire, $C=0$. CB) (C) 74. Quand
l'équation d'une Courbe indique un Contre - Diamètre , on peut changer ,
comme on voudra , la pofition des abfcifles & des ordonnées ; elle
confèrvera fon Contre - diamètre , pourvû qu'on cornerve la même Origine.
Car cette tran (pofition des abfcifles & des ordonnées fe fait [§.as] en
fubftituant ; $z + w \rightarrow x$, & $fl \rightarrow f$ / u à y. Or puifqu'ici les z & les u font du
même degré que les x & les y , il eft clair que z & » dans l'équation
transformée feront au même degré que x & y dans les termes
correlpondants de la propofée : de (brte que les termes . qui naiffent de la
fublution faite en un Rang quelconque de l'équation propofée , reftent
dans le même Rang de la transformée. Donc , puifque , la Courbe ayant un
Contre - Diamètre , les Rangs pairs manquent dans la propofée [§. préc.] ,
ils manqueront auflî dans la transformée. Ainfi la Ligne des z eft un Contre-
Diamètre , auflî bien que la Ligne des x. Cela n'eft pas moins évident par
cette Démonftration. Soit PAp le Contre- Diamètre d'une Courbe M A m , A
F*, fi l'Origine , d'où prenant les abfcifles AP, Ap oppofées & égales , on
aura les ordonnées P M , p m auflî oppofées & égales. Donc les triangles
APM , Apm font égaux & lêmbables. Donc A M eft égale & oppofée à A
m. Maintenant , fi Ton change l'Axe des abfcifles & qu'on lui donne une
pofition quelconque QAq, pourvû qu'il paffê par la même uigi ized by
Google

The text on this page is estimated to be only 25.55% accurate

14* DES CENTRES PL.VIH. même Origine A , & qu'on mène
aulfî comme on vou- Ch. yi. dra les ordonnées MCf, mq; puifqu'elles font
parallèles , §74* les triangles AMQ^ Amq font femblables & égaux , à
caulê de AM égale à A m. Donc les abfciffes oppofées & égales A Q2 A q ,
ont des ordonnées QM , q m oppofées & égales. Donc QAq eft aufii un
Contre - Diamètre. 75. On voit par- là que le Contre Diamètre , dans les
Courbes qui en font fulceptibles , dépend du choix de POrigine. Elle doit
être placée de manière qu'elle divifè en deux parties égales toutes les droites
MAM , qui , menées par ce point A , le terminent de part & d'autre à la
Courbe. De forte que de toutes parts de l'Origine les parties dirc&ement
oppofées de la Courbe font une fimétrie parfaite. Le Point qui a cette
fituation s'appelle le Centre de la Courbe *. 76. Pour reconnoître par
l'équation d'une Courbe , fi elle peut avoir un Centre , & pour déterminer le
raport de l'es coefficients qui l'en rend fufceptible , aufi bien que la pofition
de ce Centre ; on tranfportera l'Origine en un point quelconque, écrivant
[§.25 ou 29] m + 7, pour x, & 4« « pour y dans l'équation de cette Courbe.
Puis ôTt fuppolèra que les rangs pairs , à compter dès le plus haut ,
s'évanouïTent , & les équations que donne cette fuppoſition (ont celles qui
déterminent le raport des coefficients propre à donner un Centre à la Courbe
, & qui fixent la pofition de ce Centre. Exemple L L'équation générale des
Lignes du fécond Ordre eft <• •frby + + % + «7 + /** — °- Pa,,r la
fubftitution de m^i à x , & de * y , elle le change en duu * NEWTON ,
Enumer. iin:tert. Ord. §. III. Mr. de Gua Ufsge de ĬAneiï, &c. pag. I.
Digitized by Google

Fig. 59.

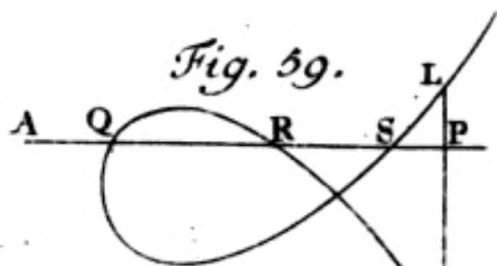


Fig. 60.

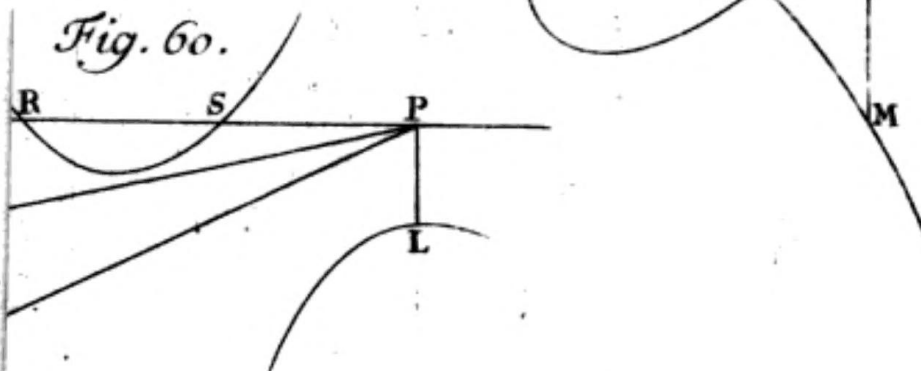


Fig. 62.

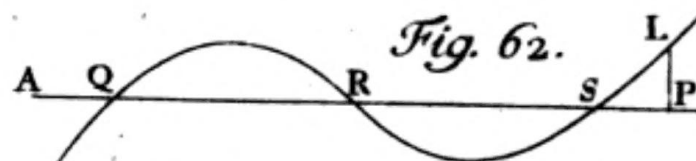


Fig. 64.

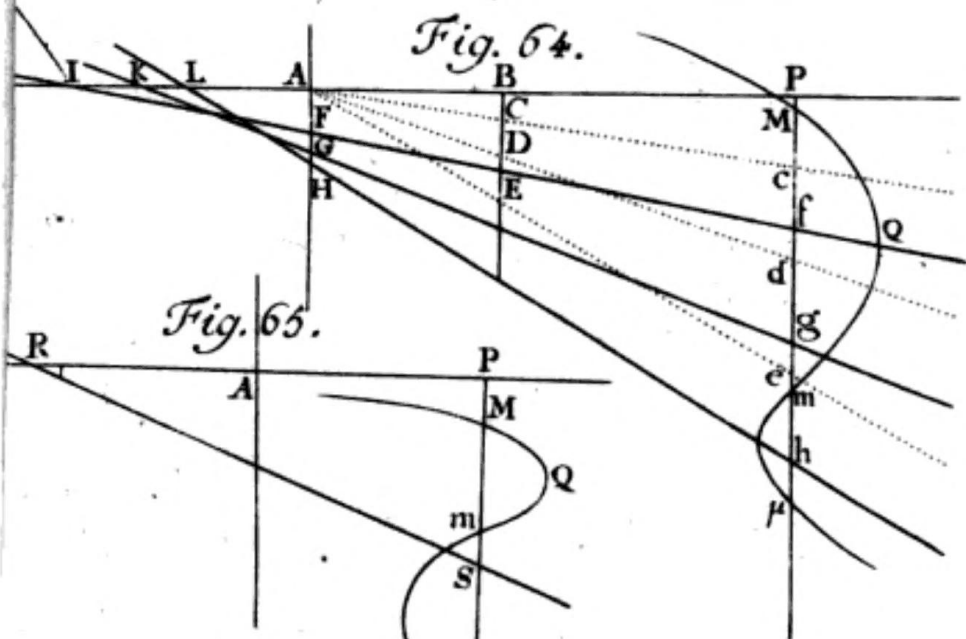
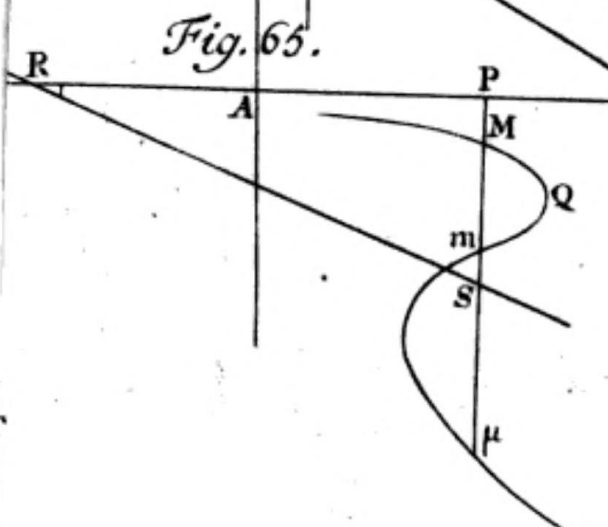


Fig. 65.



. I II

The text on this page is estimated to be only 22.23% accurate

DES LIGNES COURBES. i45 C«. VI. duu + ezu -hfzz n Pl.V1IL
+ (s + bn+cm »f dnnJfcn m -f /«w) !) On fera difparoître le fécond Rang , en
égalant * 4< em>{* 2dn & c >{* b + yjjbb — tad) _ h- y/(bh—Aad) = °>
= o. Elle n'exprime donc que deux Droites parallèles Jntrod, à P/inalyfe des
Lignes Courbes. T [§-4°]» Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 20.95% accurate

i*6 DES CENTRES Puym. [§.40], qui ont une infinité de Centres , aflâvoir tous Ch.vI les points de la Droite , qui leur est parallèle & autant * 7* éloignée de Tune que de Pautre. Au reste , tout Contre- Diamètre d'une Ligne du fécond Ordre en eît aulii un Diamètre abfolu. Car l'équation , qui exprime la nature d'une Ligne du fécond Ordre relativement à l'Origine placée au Centre , aura cette forme $Ayy + Bxy - h Cxx + D = 0$, puifque le fécond Rang y doit manquer. Et Ton peut toujours faire difparoître le terme Bxy fans changer l'Origine ni l'Axe des abfciffes , mais en donnant feulement aux ordonnées une pofition convenable, c'est -à-dire , en fuffifant $7 = f(Cb + x = z - 35]$, ce qui transformera l'éq : $Ay y - Bxy + Cxx - D = 0$, en $(4ACC - BBC)uM^*t^*Cz, z + D = 0$ où il n'y a aucune puiffance impaire de u. Ce qui fait voir que la Ligne des z est un Diamètre abfolu , aufi bien qu'un Contre - Diamètre. Exemple 1. L'Equation générale des Lignes du troifième Ordre , $* 4 - 4» 4* dyy 4 - exy - j - fxx 4* g y* 4 - bxyy 4 - 1 'x'y 4* Ac* = 0$, par la fubftitution de $m 4«z$ à x , & de $» + «$ à $^$, fe change en $0 =$ Si la Courbe a un Centre, le fécond & quatrième Rang doivent difparoître. L'évanouiffement du fécond donne ces trois équations $4 - hm + d = 0$, $zhn 4 - zim * \cdot e = 0$ Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 24.21% accurate

DES LIGNES COURBES. 147 Ch. VI + o. La comparaifon de la
ic. & de la Pl-VIII 2e. donnent $m \sim d, \sim \sim$ & $n = Jh \sim ld^*$ Et ces valeurs
fubftituées dans la 2e. , la changent en $ebi \sim tdii \sim rfb b 4- 6db / 41 6fei \sim$
9 Bx1 4- Cx 4- D= o reprélentc la plus grande partie des Courbes du
troifième Ordre. En la comparant avec Péq : générale , on aura $a = D, b = E, c$
 $\sim C,$

(148) CHAPITRE VII. Détermination des plus grands termes d'une équation. Principes de la Méthode des Séries ou Suites infinies. 77. T L n'y a rien de plus remarquable dans les CourJ. Les , que les Branches infinies , & les Points finguliers : C'est le nom qu'on donne aux Points d'une Courbe qui ont quelque choie qui les diftingue des autres. C'est par le nombre , Pcfpèce & la pofition des Branches infinies , que les Courbes (è divilènt en Genres & Efpèces : & c'est la nature , le nombre & la pofition des Points finguliers , qui cara&e'rifènt les diverfes Courbes d'uoè même fcfpèce. Voici le Principe qui nous guidera dans ces Recherches. Si dans une équation indéterminée , on fuppofo une des variables x ou y infinie ou infiniment petite, cette fuppofo rend certains termes de l'équation infiniment plus grands que les autres. On peut donc retrancher ceuxci làns (crupule , parce qu'ils ne (ont rien en comparaifon des plus grands , qui forment feuls toute l'équation. Par ce retranchement elle devient plus fimple & plus traitable. Il ne s'agit que d'avoir une Régie pour dilcerner dans une équation propofée , quels font les termes que la fuppofo d' x ou d' y infiniment grande ou infiniment petite 9 rend infiniment plus grands que tous les autres. 78. Il est bien clair que quand une variable devient infinie , toutes fes puiffances & toutes fes racines font auflî infinies.

The text on this page is estimated to be only 28.14% accurate

DES PLUS GRANDS TERMES D'UNE EQUATION 149

infinies."* Mais ces infinis constituent divers Ordres, félon Cn.vrr. les d&rés de leurs expofants. Quand x eft infinie , Ton x^78 quarré x^2 , qui eft le produit de l'infini multiplié par l'infini , ou l'infini répété infiniment fouvent, fbn quarré', disje , eft infiniment infini , ou l'infini du fécond Ordre. Le cube xxx , qui eft le quarré xx multiplié par l'infini x , eft l'infini du troifième Ordre , & ainfi de fuite. Ces Ordres de l'infini font les Ordres potentiels. Il faut aufli reconnoître les Ordres radicaux. Quoique $x^{1/2}$, ou $\sqrt{x}$ foit infinie , aucun fini ne pouvant l'égalé , elle eft pourtant infiniment moindre que x , puisqu'elle eft moyenne proportionnelle entre x & l'unité, entre l'infini & le fini. Et $x^{1/2}$, ou $y/x >$ aufli infinie, eft infiniment moindre que $x^{1/2}$. En général , toute puiffance , parfaite ou imparfaite , de l'infini $[x]$ eft infiniment plus grande que toute autre puiffance du même infini , dont l'exposant eft inférieur au sien. x^{m+n} eft infiniment plus grande que x^m , parce que x^{m+n} eft x^m multipliée par x^n . Or x^n eft infinie. Donc x^{m+n} eft x^m prife une infinité de fois. Mais les puiffances d'un expofant négatif, dont la racine eft infinie, font des infiniment petits. Par ex. x^{-1} , qui eft $\frac{1}{x}$, eft infiniment petite. Car le quotient d'une Divifion diminuant dans la même proportion que le divifeur augmente, le fini $[1]$ divifé par l'infini $[x]$ aura un quotient $[\frac{1}{x}]$ infiniment petit. Et x^{-2} , ou $\frac{1}{x^2}$, eft encore infiniment plus petite , puifque c'eft l'infiniment petit x^{-1} multiplié par $\frac{1}{x}$.

Fontenelle , Geom. de l'Infini. Part. I. Sed. 2. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 27.74% accurate

DES PLUS GRANDS TERMES tri t*t L~] d*v*fê Par Ïïv&m
ou l'infini^{ti}ème partie de l'infiniment petit. Par la même raison x^n est d'un
Ordre encore plus bas , & ainsi de suite. Mais $x^{1/2}$, ou , quoiqu'infiniment
petite , puisque s/x est infiniment grande , x a dis-je, est infiniment moins
petite que x : car x [ou $\frac{1}{x}$] est la moyenne proportionnelle entre 1 & x^2 [ou $\frac{1}{x^2}$].
7p. Q. u and on (l'appose une variable infiniment petite , toutes les
puissances & toutes les racines d'un exposant positif sont aussi infiniment
petites ; mais avec la même gradation & la même distinction d'Ordre que
dans l'infini , en sorte que de deux puissances d'une même racine infiniment
petite , celle qui a le plus grand exposant est infiniment plus petite que
l'autre. Si x est infiniment petite , xx est encore infiniment plus petite , ou
l'infiniment petit du second Ordre, xxx celui du troisième Ordre, &c. Car 1 ,
 x , xx , xxx , &c. sont des quantités proportionnelles ; de sorte que 1 est tant
infiniment plus grand que x , x est infiniment plus grande que xx , & xx que
 xxx , & en général x est infiniment plus grande que x^{m+n} . A ces Ordres
potentiels des infiniment petits , il faut joindre les Ordres radicaux. Puisque
 $x^{1/2}$ est moyenne proportionnelle entre 1 [1] & l'infiniment petit x]
, elle est infiniment petite , quoiqu'elle le soit infiniment moins Digitized by
Google

The text on this page is estimated to be only 24.67% accurate

D'UNE EQUATION. x est plus petit que x^2 . Et x^1 , autre infiniment petit, est infiniment moins que x^2 . Car $[x^2:6]$ est à $x^1:2$ [$= *?;6$] comme le fini T_i à l'infiniment petit. Mais la racine x étant infiniment petite, les puissances ou racines d'un exposant négatif sont infinies. Ainsi x^{-1} [ou $\frac{1}{x}$] est l'infini du premier Ordre, parce que le fini $[i]$ contient l'infiniment petit $[x]$ une infinité de fois. Et $*$ [ou $-$], étant l'infini [$\frac{1}{x}$] multiplié par OC OC ou lui-même, est l'infini de l'infini, ou l'infini du second Ordre, &c. Mais x [ou $\sqrt{x}$] est un infini radical, &c. Soit. Cette subordination des infinis & des infiniment petits étant bien établie » il semble d'abord que rien ne soit plus aisé que de reconnoître dans une équation les termes que la supposition d' x ou d' y infinie ou infiniment petite rend infiniment plus grands que les autres. Si on suppose x infiniment grande, il semble qu'on n'ait qu'à choisir les termes où x a le plus grand exposant : au contraire, si on suppose x infiniment petite, on croirait n'avoir qu'à prendre les termes où l'exposant est le plus petit. Mais ce (croit conclure avec précipitation. Car l'équation, ou la Courbe qu'elle représente, peut être telle qu'à x infinie réponde y infinie, ou finie, ou infiniment petite. Il faudra donc, du moins par rapport aux termes où entrent x & y , avoir égard aux exposants de ces deux variables. Si, par ex., le terme $x^m y^n$ est celui où x a le plus grand exposant, Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 29.92% accurate

tj2 DES PLUS GRANDS TERMES Cm. vil. pofant , on ne doit pas (è preiïèr de conclure que ce ters' 8o- me eft infiniment plus grand que $x y^*$ autre terme de l'équation. Car fi x & y lbnt deux grandeurs infinies d'un même Ordre , $x'y$ n'eft que du quatrième Ordre de l'infini , au lieu que xy^+ eft du cinquième Ordre. Cefl donc plutôt xy^* qui furpafle infiniment $x'y$. On ne doit pas non plus juger qu'un terme (bit d'un Ordre fupérieur à un autre , parce que les expofants de x & de y pris enfèmble font une fomme plus grande dans l'un que dans l'autre. Par ce principe on concluroit que xy^4 eft infiniment plus grand que $x'y$, & cela (croît vrai, fi x & y étoient deux infinies du même Ordre. Mais fi x étant infinie , y eft ou infiniment petite , ou finie , ou feulement d'un Ordre plus petit que x^2 , $x'y$ l'emporte infiniment fur xy Quel moyen y aura -t- il donc pour difcerner les plus grands termes d'une Equation , puifqu'il femble qu'on ne les peut reconnoître (ans favoir de quel Ordre eft y par raport à x , & qu'on ne peut découvrir ce raport de y à x (ans avoir feparé des autres les plus grands termes de l'équation? Quel fil nous conduira dans ce Labyrinthe ? Si. D'abord il eft évident qu'on ne (àuroit fuppofer qu'un (eu) terme de l'équation (bit infiniment plus grand que tous les autres. Car tous les autres termes s'évanouïroient en comparaifon de celui - là & pourroient être retranches. Alors ce terme ieul feroit égal à zéro , & le plus grand terme de l'équation ne lèroit rien : ce qui eft abfurde. Les plus grands termes font donc au moins au nombre de deux. Mais rien n'empêche qu'on ne prenne deux termes quelconques , & qu'on ne les fuppofe les plus grands de l'équation ; à moins que les conféquences de cette fuppofition ne détruifent la fuppofition même. Qu'on Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 24.63% accurate

&ÎTNE EQUATION. i\$% Qu'on propolè , par ex. l'éq : $xy + y^2 = 0$, Ch vil & qu'on (uppolè d'abord x infinie. On commencera par *
 8r* comparer x^2 & xy , en fûppolant que ces termes font toute l'équation ,
 & qu'e'tant infiniment plus grands que y^2 , ce terme peut être
 impune'ment retranché. On aura donc $xy + y^2 = 0$, ou $xy = -y^2$, &
 d.vifant x^2 par y^2 , donne $x = -y$. Donc x étant infinie, y eft un infini du fécond
 Ordre. Donc les termes xy & y^2 font des infinis du quatrième Ordre, en
 comparaifon delquels x^2 , qui n'eft qu'un infini du premier Ordre ,
 s'évanouît. U n'y a. donc rien d'abfurde à luppofer que xy & y^2 font les
 plus grands termes de l'équation. On peut enfuite comparer xy & x^2 ,
 & fuppofer toute l'équation réduite à $xy - x^2 = 0$, ce qui , tranCpolant
 & divifant par x , donne $y = x$. Donc x étant infinie , y eft infiniment
 petite , & dans cette fuppoftion , le terme y^2 eft un infiniment petit du
 fécond Ordre , qui s'évanouît auprès des termes infinis xy & x^2 . On a
 donc pû faire fans abfurdité cette fuppoftion. Il refte à comparer les termes
 y^2 & x^2 . S'ils font infiniment plus grands que xy , toute l'équation fe
 réduit à $y^2 - x^2 = 0$, qui donne $y = x$ i:a. Mais cette valeur de y ,
 fubftituée dans xy , le change en x^2 . Ce terme x^2 , ou x^2 ,
 qu'on fuppofoit infiniment plus petit que les deux autres xy [=4!x], & x^2 ,
 eft donc infiniment plus grand , puisbue fon expofant [5:2] furpaflè le
 leur [1 J Ainfi la fuppoftion (è détruit elle-même & ne peut fubfifter.
 Suppofons maintenant x infiniment petite. Et fi l'on compare d'abord les
 termes xy & x^2 en les fuppoftion. À PAnalyfe des Lignes Courbes. V
 font Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 24.54% accurate

DES PLUS GRANDS TERMES Ch. vil {ant infiniment plus
grands que $x^m y$, cette supposition ne mène à aucune absurdité. Elle
réduit l'éq : à $af - Sx \ll 0$, qui donne $yz = ai : z xl : 2$. Et cette valeur
substituée dans xzy , le transforme en $a l^2 x 5^2$, où l'exposant d' x [5 : 2
] est plus grand que dans les deux autres termes $*/ [= 4^2]$ & $- mxx$. Or $*$
étant infiniment petite, les puissances d'un plus haut exposant sont
infiniment plus petites que celles d'un exposant inférieur [§. 79]. Donc xly
est infiniment plus petit que ayl & que $- axx$ ce qui est conforme à la
supposition. Mais, si on supposait que le terme $- axx$ soit infiniment plus
petit que les deux autres, on réduirait l'équation à $xry * ay^2 = 0$, ce qui
donne $y = -$. Ainsi $X^m X^4 r > xxy$ & ayx se transforment en $-$ & $+$ •
Ce sont donc des infiniment petits du quatrième Ordre, qui disparaissent
auprès de $- axx$, infiniment petit du premier Ordre. La supposition le
contredit donc à elle-même. j'en dis autant de la supposition, qui établirait
 xxy & $- alx$ pour les plus grands termes de l'équation. Il en refaite $> = ^$,
c'est-à-dire, y infinie, quand $*$ est infiniment petite. Donc le terme $a/$, qu'on
supposait le plus petit, est réellement infiniment plus grand que les autres :
ce qui détruit la supposition. Par tout ce détail il paraît, qu'à supposer x
infinie, l'équation proposée $xxy > \pm ayx - alx = 0$ se réduit à ces deux-ci,
 $x^2 y + ayl = 0$, ou $xx > f < ay = 0$, & $xxy - alx = 0$, ou $xy = 0$: & qu'à
supposer x infiniment petite, elle le réduit à celle-ci seulement, $af -$
 $axx = 0$ ou $y = - ax = 0$. • 82. Mais Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 29.38% accurate

D'UNE EQUATION. iS\$ 82. Mais ce qui a éié facile dans un Exemple, où Ch. vu. Péquation propofée n'avoit que trois termes , deviendrait s' fort pe'uible , fi l'on avoit eu une équation plus complexe, où le nombre des termes engageroit à beaucoup de comparaifons, la plupart infru&ueulès. Dans ces Cas -là, il eft fort commode de fè fèrvir du Triangle analytique , & de placer chaque terme de l'équation dans la Cale qui lui eft aflignée. En concevant ce Triangle couché fur la bande fans x , lorfqu'on fuppofè x infinie ou infiniment petite [on le coucheroit fur la bande fans y fi la fuppofition étoit de y infinie ou infiniment petite] il eft clair que de tous les termes qui le trouvent dans une même bande perpendiculaire , on ne peut regarder comme un des plus grands termes de l'équation que celui qui occupe la plus haute place de cette bande , en fuppofant x infinie , ou celui qui y eft placé le plus bas , en prenant x pour infiniment petite. Car dans tous les termes d'une même colonne , y ayant le même expofant , leur fubordination dépend uniquement des expofants d' x . Donc , x étant infinie , le plus grand terme de la colonne eft celui où x a le plus grand expofant , c'eft-à-dire , celui qui eft placé le plus haut ; & x étant infiniment petite , le plus grand terme de la colonne eft celui où x a le plus petit expofant, celui qui eft placé le plus bas [§§. 78. 79]. V 2 Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 22.81% accurate

if* DES PLUS GRANDS TERMES f. u. ** *> X7 xy *'y x' xy
X* • • «y xy xy x*y x4 » • xy *y xy xyy X» «y xy x>» xy Si rx\ xy' x/ XJf*
xy XJf 1 /// y 1 y1 7 I 8\$. Cette confichération fert déjà beaucoup à
diminuer les nombre des comparaisons qu'il faudroit faire pour difeerner les
plus grands termes d'une équation [§. 8 1]. Mais pour éviter toutes les
comparaifons inutiles , il faut y joindre cette obfervation. C'eft que fi on
compare deux termes quelconques, en les fuppolant d'un même Ordre , &
qu'on mène une ligne droite par les centres des Cafés où logent ces deux
termes , tous les termes qui font dans les Cales dont les centres fe trouvent
fur cette même Droite , feront aufli du même Ordre que les termes
compares. Et que toutes les Cafés , dont les centres font au-deflus de cette
ligne pVoite renferment des termes d'un Ordre fupérieur ; comme , au
contraire , les Cafés dont les centres font au-deffous de la ligne droite ,
contiennent des termes d'un Ordre inférieur. Ainfi, quand on veut comparer
les termes x1 & *V > en Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 27.05% accurate

D'UNE EQUATION. ij7 en les fupposant d'un même Ordre; ils (èront encore d'un C«vn. même Ordre , après divifè l'un & l'autre par une même * 8*! xx x'y* grandeur x*. Donc [-7 =] i & [■ v-la] *?* font d'un même Ordre. L'unité étant une grandeur finie, xy1 eft auflî une grandeur finie. Qu'on la nomme K\ On aura donc $x/ = jR'$, ou $f = \sim$, & $y = \sim = Rx \sim k$. Si on mène une Droite , ou qu'on applique une Régie aux centres des Cafés x1 & */ , on verra qu'elle paffe auflî par le centre de la Cafe x4/* , & , en prolongeant le Triangle, paſſe par les centres des Cafés x'y* , &c. Subſtituant Rx dans ces termes , au lieu de y fa valeur — , ils feront changez en R^*x1 , $R6xz$, Rlx^* , &c , qui font tous de l'Ordre **. Mais toute Cafe , comme x4y' , dont le centre eft au-deſſus de la Règle , contient un terme d'un Or1 » 2 dre ſupérieur. Car , mettant pour y fa valeur $Rx * 9 xy$ eft transformé en $fl^*x4 \sim \sim^*$: 2 — J*V; 2 dont l'expoſant ſurpaſſe celui de x\ Toute Cafe , au contraire , comme xiyi , dont le centre eft au-deſſous de la Régie, loge un terme d'un Ordre inférieur à x2. Car Rx lî ſubſtitue' pour y dans x^*y^* , le change en $R\} x3^*$: 1 r=J?*x*2 qui eft d'un Ordre inférieur à x3. De même , la Règle qui paſſe par les centres des Cafés y* & xy' , paſſe auſſi par le centre de la Cafe xxyx. Qu'on ſuppoſe d'un même Ordre deux quelconques de ces termes , comme xy' & xxyx. Ils feront donc du même Ordre en les diviſant par la même grandeur xxyx. Donc v j xy Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 28.67% accurate

ry8 DES PLUS GRANDS TERMES C\$ \ iu i= »] étant une
 grandeur finie , $-^r$, ou feça * ' $x \sim y \sim x y x$ auill une grandeur finie , qu'on
 peut nommer Rl , & on aura $y = R x$, ou $y = R x '5$. Cette valeur (ubftituée
 dans les termes y , , x' , qui font fur la Régie , les change en $R x$, Jî * J
 ' ^sITx 5, /ixT 5 ==fi2x8'?, & fait voir qu'ils font tous, du même Ordre x .
 Mais , fi on prend une Café dont le centre (bit âu-deffus de la Régie ,
 comme xly^* ; on verra , en écrivant $.Rx " 3$ pour y , que le terme qui la
 remplît eft $[^x'^{'}fi'x1^]$ d'un Ordre fupérieur à $x\%:*$. Qu'on prenne, au
 contraire, une Cafe dont le centre eft au-deffus de la Régie , comme xy^* ;
 & la lubftitution de $R x *5$ à y , change le terme qui remplît cette Cafe en
 $tf4*1*4-'*»*4*7'^*$, qui eft d'un Ordre inférieur . 8:\$ a x 84. 1 l faut , avant
 qu'aller plus loin , démontrer cette propriété du Triangle analytique. Elle eft
 fondée fur ce que les Cafés qui ont leurs centres en Ligne droite font
 remplies de termes où les expofants de x & de y font des progreflions
 arithmétiques. Cela eft évident, quand cette Droite , ou cette Régie , eft
 couchée fur une bande horizontale , ou fur une verticale. Pour rendre
 Texpreffion plus courte, nous apellerons celles-là des Lignes & celles-ci des
 Colonnes. Quand la Régie eft horiiontale , les termes par lelquels elle pafle
 ont tous le même expofant de x , & ceux d'y font les nombres naturels 1 , 2 ,
 3 , 4, &c Quand Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 25.40% accurate

D'UNE EQUATION. 'iy9 Quand la Régie est verticale, les exposants à y font tous Ch. vu. les mêmes, & ceux de x font la progression 1,2,5,4, * &c. Enfiute lorsque la Régie est inclinée aux bandes; si on suppose que, partant du centre d'une Café, elle ne rencontre le centre d'une autre Café qu'après avoir traversé k lignes & / colonnes; il est clair, puisque les Cafés sont rangés uniformément, qu'il lui faudra encore traverser k lignes & / colonnes pour atteindre le centre d'une troisième Café, & encore autant pour parvenir à une quatrième, & ainsi de suite. Donc, comme Texposant de x augmente d'une unité en montant d'une ligne, & que l'exposant de y augmente aussi d'une unité en traversant une colonne de droite à gauche; si le terme qui est dans la première Café est $x^m y^n$, celui de la féconde sera $m+k$ >+ / . . , . . ~ . $m+2k$ $m+il$ 9 . $x y$, celui de la troisieme $x y'$ & ainsi de suite: où les exposants de * font la progr. arithm: $m, m+k, m^{ik}$ &c. & ceux de y la progression Réciproquement, si l'on choisit des termes, comme $m n m+k$ >-+ / m^{ik} «4*2/ , . . $x y > * y^9 * y$ (0% OU« exposants, tant de x que de y, soient en progression arithmétique dont les différences (bient k & / .- tous ces termes iè trouvent dans des Caiès, dont les centres sont (ur une même ligne droite qui traverse en même tems k lignes & / colonnes: ce qui détermine l'inclinailbn de cette Droite aux bandes du Triangle. 85. Car l'inclinailbn de la Régie aux bandes du Triangle, & le raport de k à / dépendent entièrement l'un de l'autre, puisque k & / font le nombre des lignes & k nombre des colonnes que traverse en même tems la Régie. Si k surpasse / , la Régie est plus inclinée aux colonnes qu'aux

The text on this page is estimated to be only 29.17% accurate

160- DES PHTS GRANDS TERMES Ch vu. qu'aux lignes , & coupe une plus grande portion de la 8^{ie} première bande verticale que de la première bande horizontale , à compter ces portions dès la Pointe. C'est le contraire si / surpasse k . En général , puisque la Règle traverse k lignes en traversant / colonnes , elle traversera de colonne en colonne un nombre de lignes exprimé k k par y-, (bit que j- désigne un nombre entier ou un nombre rompu. Si la Règle traverse deux colonnes en traversant une seule ligne , elle ne traversera qu'une demi ligne en traversant une seule colonne.

• 86. Donc, si on tire sur la surface du Triangle analytique deux Droites parallèles , & par conséquent autant inclinées Tune que l'autre aux lignes & aux colonnes ; les Cales , dont ces Droites traversent le centre , contiennent des termes où les exposants de x, & aussi ceux de y , font des progressions arithmétiques, qui ont dans Tune & l'autre Droite la même différence. Ceux de la première _ . . m n m+k n+1 m+2k "-+-2/ Droite étant , par ex. , x y , x / , x y &c. ceux de la seconde peuvent être Réciproquement , si l'on choisit deux suites de termes , x y , x y , x y &c. $x^k y$, $x^{2k} y^2$, &c. où les exposants de x , & aussi ceux de y , font des progressions arithmétiques qui dans Tune & dans l'autre suite aient les mêmes différences ; ces deux suites de termes se trouveront sur deux Droites parallèles. 87. Telle Digitized by Google

L'UNE EQUATION. 161 87. Telle étant la difpofition des termes fur le Ch.vii. Triangle analytique, fi on compare enfemble deux termes quelconques , en les fupposant d'un même Ordre d'infini, Se qu'on applique une Régie fur les centres des Cales où logent ces deux termes : je dis que tous les termes , qui font dans des Calés par les centres delquelles paffTe cette Régie , font auffi du même Ordre. Car leurs expofants font en progression arithmétique [§. 84]. On peut donc reprélenter ces termes par la fuite $x^m y^n$, $m+k$ „ $+ m+2k$ $n+2l$ $m+i$ * n Jril $m+tk$ $n++l$ $x y >^*$ $y ix y >^*$ / $> *****5$,dv. Prenons -en deux termes quelconques, comme $x y$ & $x^J jr$, « fupposons-les d'un même Ordre. Ils refteront d'un même Ordre , après avoir été divifés par une même grandeur $f fc r / *$ » $+ 2^* J l + l l y$ ■ Donc [$m+2k$ $irçT/=$] $1 \bullet$ & $X jr$ l'unité étant eflentiellellement une grandeur finie , $x^{**} y^{\wedge}$, & (à racine cubique $x^* y$, & toutes fes racines & fes puitfances font finies. Ainfi tous les termes qui font fur la Keg/e , $x y$, x^j , $x y >$ &c. n'étant que $x y$ multiplié fucceflivement par les grandeurs finies i , $x^{\wedge} x^{2*jr2/}$, ^{**kj**s} Éfr. font tous du même Ordre. Par la même raifon, tous les termes y^{*} $\%J^{***}y l + l\%$ Introd. à l'Analyfi des Lignes Courbes. X x Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 23.98% accurate

\6i DES PLUS GRANDS TERMES $x^m y^n$, &c. qui sont sur une Droite parallèle à la Régie, sont tous du même Ordre que x^j . Et réciproquement tous les termes qui sont d'un même Ordre sont logés dans des Cafés dont les centres se trouvent sur la Régie ; ou sur une Droite parallèle à la Régie.. k / 88. Puisque x & y est une grandeur finie > 0 on la nomme R , on aura $y^{n+1} x^m$, ce qui détermine le rapport des Ordres d' x & d' y , en faisant voir qu' y est du même Ordre que la puissance d' x qui a pour exposant négatif le nombre $[j]$ de lignes que traverse la Régie, tandis qu'elle traverse une seule colonne [§.85]. En substituant R/x à y , dans le terme ou dans le terme f , on le transforme en « $R^l x^r$ » : ce qui marque que les termes $x^m y^n$, $x^{m+k} y^{n-1}$ &c. qui sont sur la Régie, sont de l'Ordre $l-n$, & que les termes y^k , $x^{p+k} y^{j-k}$ qui sont sur une parallèle à la Régie, sont de l'Ordre $p - k$. 89. On trouvera aussi les exposants de ces Ordres, en examinant quel est le point auquel la Régie, ou la parallèle, coupe la première bande verticale. Si c'est le centre de quelque Café de cette bande, la puissance de x qui est dans ce Café, montre par son exposant quel est l'Ordre des termes placés sur la Régie, ou sur la parallèle, Puisque tous ces termes sont du même Ordre [\. préc]. Mais Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 26.82% accurate

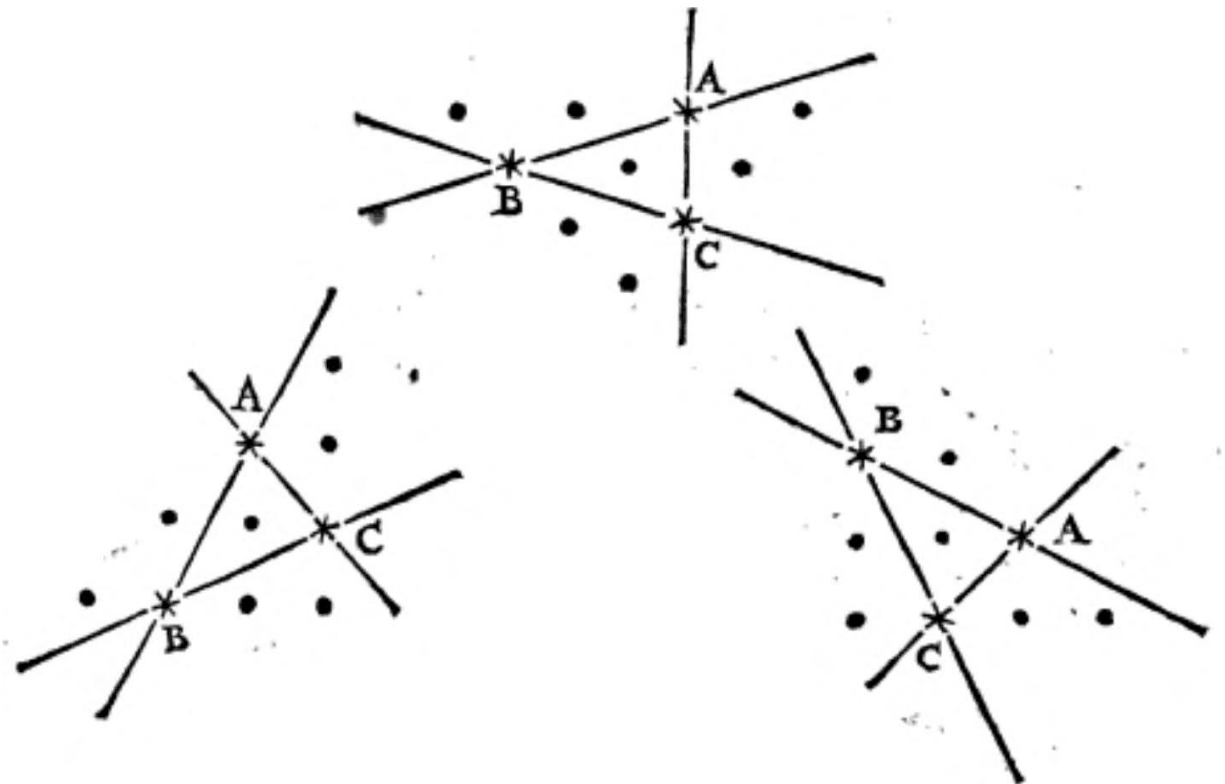
DyUNE EQUATION. 163 Mais si la Règle, ou la parallèle, passe entre les centres de Ch. VII. deux Cafés, le point où elle passe désigne encore l'Ordre de ces termes, dont alors l'exposant est un nombre rompu. Il faut concevoir cette bande verticale, & en général chaque colonne, comme une Droite divisée en parties égales par les centres des Cafés, imaginer que les termes $x^0, x^1, x^2, \dots$ dont les exposants sont des nombres entiers, sont placés sur les points de division, & feindre que les termes, comme $x^{\frac{1}{3}}, x^{\frac{2}{3}}, \dots$ dont les exposants sont des nombres rompus ou mixtes, sont placés sur les points qui divisent les intervalles des centres, dans la même raison que l'unité est divisée par la fraction qui fait, ou concourt à faire l'exposant de x . Ainsi, on concevra $x^{\frac{1}{3}}$ précisément au milieu entre x^0 ou 1, & x^1 ; & $x^{\frac{2}{3}}$ sera placé sur le premier point de la subdivision qui partageroit en trois parties égales l'intervalle entre x^1 & x^2 , &c. Cela bien conçu, si la Régie, ou la parallèle, passe, par ex. entre les centres de x^2 & de x^3 , mais trois fois plus près du dernier que du premier, c'est-à-dire, par le point où l'on doit concevoir $x^{\frac{2}{3}}$, on concluroit que tous les termes placés sur cette Droite, sont de l'Ordre $\frac{2}{3}$. L'exposant d'un Ordre peut être négatif, lorsque la Régie, ou la parallèle, ne coupe point la première bande verticale, mais bien son prolongement au-delà de la première bande horizontale. Cela arrive quand m est positif ou négatif. Alors l'exposant m est positif, ou $p - q$, est négatif. Dans ce cas, on conçoit la première colonne comme une Droite prolongée au-delà de la Pointe, & divisée en parties égales)igitized by Google

1⁴ DES PLUS GRANDS TERMES C«vn. égales à celles qui
 font au-dertus , & Ton attache aux §• j points de divifion les termes
 dexpofants négatifs, x , x^2 , x' , 90. Donc , puifque de deux Droites
 parallèles celle qui ert fupérieure coupe la première colonne en un point
 fupérieur ; tous les termes qui font fur la Droite fupérieure font d'un Ordre
 fupérieur aux termes qui font fur la Droite inférieure. Ainfi la Règle partant
 par les termes m n m^k n^{k+1} m^{-2k} n^{-2k+1} , . - , xy , xy^9 x^1y , &c. qui
 font tous de l'Ordre m — »*/; un autre terme quelconque eft d'un Ordre
 fupérieur ou inférieur félon qu'il eft loge' dans une Cafe dont le centre eft
 au-defTus ou au-dertbus de la Règle. 91. C'est-la' le Principe qui détermine
 les comparaifons qu'on peut faire pour chercher les plus grands termes
 d'une équation [§. Ho, 8\$]. En fuppofant x infinie , on voit qu'il feroit
 inutile de regarder deux termes comme étant du même Ordre & les plus
 grands de l'équation , fi la Régie , appliquée aux centres de leurs Cafés ,
 laide au-defTus d'elle quelque autre terme. Car ce terme [§. préc.] feroit
 d'un Ordre fupérieur à ceux par lefquels parte la Régie. Il feroit donc
 infiniment plus grand que ceux qu'on voudroit fuppofèr les plus grands [§.
 78] ; ce qui feroit abfurde. Et en fuppofant x infiniment petite, la
 comparaifbn de deux termes fera inutile , fi la Règle , appliquée aux centres
 de leurs Cafés , laifTc au-dertbus d'elle quelque terme de l'équation. Car
 quand on voudra fuppofèr que ces deux termes font du même Ordre & les
 plus grands de l'équation , il fe trouvera [§. préc.] que les termes qui font

D'UNE EQUATION, itfy font dans une Cafe inférieure feront
 d'un Ordre inférieur , Ch. vil & par conféquent infiniment plus grands
 [§.79] que ceux ** 9U qu'on a fuppofé les plus grands : ce qui eft
 contradictoire. 92. De - là on déduit naturellement la Régie fuivante pour
 difcerner dans une équation indéterminée les termes qui deviennent
 infiniment plus grands que tous les autres , par la fuppofition d' x ou d' $>$
 infinie ou infiniment petite * . Ayant tracé le Triangle analytique ; on
 placera chaque terme de l'équation dans la Cafe qui lui eſt propre. Ou , ce
 qui dans la pratique eft plus commode , on formera le Triangle avec des
 points difpofés en quinconce, & on changera en une étoile , ou en une petite
 croix , chaque point qui tient la place d'un des termes de l'équation. On peut
 aufſi avoir un Triangle de bois ou d'ivoire, percé de petits trous rangés à
 égales diftances & parallèlement aux côté's du Triangle , & on remplira
 avec de petites chevilles les trous qui repréſentent les Cafés où devroient
 être logés les termes de l'équation. Puis on couchera le Triangle , ou ? on (è
 le reprélèntera couché , fur la bande (ans ſe , ſi c'eſt x qu'on fuppofe infinie
 ou infiniment petite : mais on le couchera fur la bande làns y , ſi c'eſt y
 qu'on veut (uppoler infinie ou infiniment petite. Après cela , ſi la variable
 eft fuppofée infinie , on verra quelles font les Cales pleines par le centre
 deſquelles peut paſſer une Règle fans laitier au-delſus d'elle aucune autre
 Cale pleine. Les termes qui occupent ces Cafcs X 3 font * Newton ,
 Méthode des Fluxions. %. 29 & fuiv. EpiJioU *d Or mmeurgvm poſterior.
 Ta Y L o R , Methodus Incrément. Part. ii. Prop. 9. St'rt.ikg , Line* jf.
 ordinis Ūe. pag. 12. ſ'Gravesande, Elément* Mttbef. univerſ. pag. 233. &
 feq. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 23.88% accurate

66 DES PLUS GRANDS [TERMES CCU Ch. vit font ,lll0x qui
 » "ans cette fuppofuion , font fèuls toute \$ Péqu n. Lt la Droite qui , menée
 le long de la Règle , détermine ainfi ces plus grands termes, s'apellera Une
 Détet-Mtnatrice fupérieure. Il s'en peut trouver plulieurs pour une meme
 équation. Mais fi l'on fuppofe x ou y infiniment petite , on cherchera , avec
 la Régie , quelles font les Cales pleines par le centre delquelles peut palier
 une Droite, (ans laiïTer audeilbus d'elle aucune Cale pleine. Cette Droite ,
 ou ces Droites , car il peut y en avoir plus d'une , le nommeront des
 Vètrmtnatrices inférieures , parce qu'elles déterminent les plus grands
 termes de l'équation : ce font ceux qui occupent les Calés par les centres
 defquelles elles partent. V Exemple I , fera celui de l'équation propofée ci-
 deflus [§. 81] $xy^2 + k^2yx - ax = 0$. Ayant décrit le Triangle avec des points ,
 & converti en e'toiles les points qui repréfentent les Cafés xly , y1 , & x , on
 verra , Qu'on Digitized by Google



The text on this page is estimated to be only 25.17% accurate

D'UNE EQUATION \&) Qu'on ne peut mener par les Cales
pleines que trois Ch. vil. de'eterminatrices AB , B C, CA, defquelles ,
couchant i°. 5-»»« le Triangle fur la bande l'ans x , deux font fupérieures
AB, AC, & une inférieure BC: mais en le couchant 20. iùr la bande fans y ,
la de'terminatrice AB eft fupérieure , & AC & B C inférieures. La
déterminatrice AB donne Péq: $x^2y^2 - ay^2 = 0$, ou $xx - f - \ll y = 0$. La
déterminatrice AC donne $x^2y - axz = 0$, ou $\cdot -y - a/r = 0$. Et la
déterminatrice BC donne $ay - a^x - o^nyy - ax = 0$. Donc par la
fuppofition de x infinie , l'équation propofée eft réduite à ces deux $xx + ay$
 $= 0$, & $xy - aa = 0$, que fourniflent les de'terminatrices AB, AC,
fupérieures quand le Triangle eft couche' fur la bande l'ans x. Et par la
fuppofition de x infiniment petite , l'équation (è réduit à $yy - ax = 0$, que
donne la décerminatrice BC inférieure dans la même pofition du Triangle.
Mais par la fuppofition âj infinie , l'équation eft réduite à $xx + ay = 0$)
donnée par la déterminatrice AB fupérieure dans le Triangle couché fur la
bande fans y. Et la fuppofition d > infiniment petite re'duit l'équation à xy
 $- aa = 0$, & $yy - ax = 0$, que fourniflent les déterminât rices AC, BC
inférieures dans cette même pofition du Triangle: Exemple 2, On propofe
l'éq: $xy^2 + ax^2 + l > x^2y^4$. ex* -f- ddxxy eexx +f'y = 0. -Après l'avoir milé
fur le Triang : analyt r c'eft-à-dirc , après avoir forme le Triangle avec des
points , & change en étoiles ceux qui répondent aux termes de l'équation ,
on verra que toutes les étoiles peuvent être renfermées dans le Pentagone
ABCDE. Il y a donc cinq déterminatrices , qui fourniflent les cinq
équations fuivantes. AB)igitized by Google

The text on this page is estimated to be only 29.87% accurate

i58 DES PLUS GRANDS TERMES Cm. VIL \$.9%. AB donne
 $py+axyx=0$, ou, divifanc par y , $xy+J\sim=0$. BC donne $axyi+xlyl=0$ } ou,
divifant par $xy\backslash x+a=0$. CD donne $=0$, ou, divifant par $xx,yy+cx=zo$. DE
donne $cx^*+cexl=0$, ou, divifant par exl , $x*f\ll f=0$. c P & EA donne $9\ll xx$
 $>^{\wedge}pyz=z0$, ou, divifant par ce , $xx+J^{\wedge}y=0$. Si on fuppolè x infinie, on
couchera le Triangle fur la bande fans x , & on examinera quelles
déterminatrices deviennent fupe'rieures. Cest la feule CD. Donc cette
fuppoftion réduit l'équation propofee à la feule éq: $yy+(x=0$. Et fi on
(ùppofe x infiniment petite, en laiflTant le Triangle dans la même fituation,
on verra quelles déterminatrices font inférieures. Ce font AB & AE qui
donnent P P les éq : $xy + \text{---} = 0$, & $xx + J - y = 0$. Cest donc à ces deux
équations que fe réduit la propofee par la fuppoftion d' x infiniment petite.
Si on veut fuppofer y infinie, il faut concevoir le Triangle couché fur la
bande (àns y , & voir quelles déterminatrices deviennent alors fupe'rieures.
Ce font AB, BC, CD. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 21.85% accurate

/ D'UNE EQUATION. 169 ,, , P , Ck.VII. CD. Les éq: $xy + = 0$, $x^{**} = 0$, Jff + «=sO, 5.,». qu'elles donnent , font celles auxquelles la fuppoſition d*y infinie réduit la propofée. Mais en fuppoſant y infiniment petite , on prendra les de'terminatrices inférieures AE , ED , qui donnent les éq : $g e e x x + ; - j (= 0$, & $oc + — = 0$ pour celles auxquelles lè e e c réduit la propofée par la fuppoſition d'y infiniment petite. 93. Une déterminatrice peut paſſer par plus de deux Cafés , & alors Péquation qu'elle fournit a plus de deux termes. Mais cette équation peut le réfoudre par les Régies ordinaires de l'Algèbre en pluſieurs équations ſimples. Si la déterminatrice paſſe par les Calés $x^n y^n$, $\% n^{\wedge} y i \sim ^{\wedge} \backslash ^m + i k m J ? i l ^{\wedge} [^ g 4 j \grave{c} j | e$ donnera une équation telle que $a x y + b x y - \backslash - c x y * \{ * j x^{**} + 1 * y + 1 * ^{\wedge} — o$, dont les termes qui répondent à des Cafés vuides , auront leurs coefficients a , k > c , ou &c. égaux à zéro. Tous les termes de cette équation étant diviſibles par $x^n y^n$, elle ſe peut réduire à $a + B x^* y + 2^{\wedge} 2 / . , l i ? / , - \_ k l e x y + d x^3 y^3$ $C 7^{**} = 0$, ou, fuppolânt $x y = z, a^{*} + / z - r - r z z \& c = 0$. Soient R, r, p, &c. les racines de cette équation. Elle peut donc ſe decompoſer en ces équations $z — R = 0$, $z — r — 0$, $z — f > = 0$, c-cft-à-dire >, $V - \ll - o) // \_ , = o > , V / k l * p = 0$, &c. qu'on réduit à $y = z R x$, $y = r x$, Introà. à rAnalyſe des Lignes Courbes. Y y1 Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 21.01% accurate

170 DES PLUS GRANDS TERMES ChV11, / i.9} < y — P* & **
ou enfin à $y = R'x$, $y = rx$, $y = p^*x$ It & e. : ce qui convient avec l'éq = x'
trouvée au §. 88; la valeur de la lettre R, qui avoit e'cé prife en général pour
défigner un coefficient quelconque, étant ici déterminée à marquer les
racines R, r, p, &c. de l'éq : $a + bz + czz + \dots$ 94- Ces coefficients R, r
, p, &c. des éq : $\dots$; i.7 — $\dots$; $y = r^*x$, Crc peuvent être
imaginaires. Ils le font tous, lorfque l'éq : $a + kz + \dots = 0$ n'a que des
racines imaginaires : ce qui peut arriver toutes les fois qu'elle eft d'un degré
pair, quand le nombre complet de Tes termes eft impair, lorfque la
déterminatrice paire par un nombre de Cafés impair, à compter depuis la
première de celles qui font pleines jufqu'à la dernière. Mais quand ce
nombre de Cafés eft pair, l'éq ; $\dots + kz + czz + \dots = 0$, étant d'un degré'
impair, a néceffairement quelque racine réelle. En particulier, elle n'en
peut avoir d'imaginaires, lorfque la déterminatrice ne traverse que deux
Cales pleines, qui foient fut deux bandes, horizontales ou verticales,
contigues. Car l'équation étant $ax^2 + by^2 = 0$, ou $ax^2 + by^2 = 0$, [* ou /
n'étant que l'unité, à caufe de la contiguïté des bandes], on aura $a^2 + b^2xy$
 $= 0$, ou $s + bxy = 0$, c'eft-à-dire, — ■ £ / 1, ou y — a 1* 95^ Digitized by
Google

The text on this page is estimated to be only 26.37% accurate

VUNE EQUATION. 171 95. Il se peut que les coefficients $R, r, p, \&c.$ soient Ch. vil réels, & que cependant les valeurs $Rx, rx, f^x \&c.$ soient imaginaires, ou entièrement ou à demi. J'appelle à demi -imaginaire, une racine qui, comme y/ax , est réelle quand on prend x positive, & imaginaire quand on prend x négative; ou qui, comme $y/\sqrt{-a x}$, est imaginaire quand x est positive, & réelle quand x est négative. J'appelle entièrement imaginaire, ou Amplement imaginaire, une racine qui, comme $y\sqrt{-1}$, est imaginaire, quelque valeur, positive ou négative, qu'on donne à x . Puisque les puissances paires d'une racine, positive ou négative, sont nécessairement positives; mais que les puissances impaires sont positives, si la racine est positive, & négatives, si la racine est négative: il est clair qu'une racine impaire est toujours réelle, quelle que soit la puissance dont on tire cette racine: mais qu'une racine paire n'est réelle qu'autant que la puissance est positive. Donc si cette puissance est une puissance paire d'une quantité variable, la racine paire fera réelle, ou entièrement imaginaire, selon que la puissance est prise positivement ou négativement, c'est-à-dire, selon qu'elle est affectée d'un coefficient positif ou négatif. Mais si la puissance, dont on tire une racine paire, est une puissance impaire d'une quantité variable, la racine est demi- imaginaire. Ainsi $I/\sqrt{-1}$ dans l'éq: $y = Rx^{\frac{1}{2}}$ est y/Rx , si $\frac{1}{2}$ est un nombre impair, y est toujours une grandeur réelle: mais si $\frac{1}{2}$ est pair, y est demi- imaginaire, $\sqrt{-1}$ étant impair; & $\sqrt{-1}$ étant pair, y est réelle lorsque R est positif, imaginaire lorsque R est négatif Y 2 96. H Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 25.55% accurate

i7a DES PLUS GRANDS TERMES C&iS.L 96. Il est bon de remarquer touchant l'exposant — $\sim$ de x dans les équ: $y = zRl^*x^*$ que donne la déterminatrice, 1 B. Qu'il est négatif, quand k & $/$ ont le même signe : ce qui arrive quand les progressions arithmétiques $*$, $m - f - 2^*$, & $c + + 2/$, cfo. des exposants de x & de y dans les termes qui font sur la Régie [§. 84] font toutes deux amendantes ou toutes deux dépendantes. Alors la Régie s'éloigne en même tems de la première Bande horizontale & de la première Bande verticale ; elle ne coupe qu'une de ces deux bandes, ou elle part de la Pointe. Dans ce Cas, x infinie rend y [$= Ri:/x$ ou $JR i/ (— 1)$] infiniment petite, & x infiniment petite rend y^* infinie [§. 78. 79] • 2°. Que cet exposant — j est positif, quand $/$ & $*$ ont des signes contraires : ce qui a lieu quand les progr : arithm: « $r, *t + kt m + 2^*$, & c », » $+ /$, « $4^*2/$, & $'*$ font l'une amendante & l'autre défendante : quand la Régie s'approche d'une des deux Bandes extérieures du Triangle en s'éloignant de l'autre : quand elle les coupe toutes deux ailleurs qu'à la Pointe. Dans ce Cas, x & y [$Jfc l'' x'$ ou $(Kx^*)l'$] font toutes deux infinies ou toutes deux infiniment petites. Elles font d'un même Ordre, si $-i = 1$, si $*$ $= /$, si la déterminatrice est également inclinée aux deux bandes. Mais si $-i > 1$, si $*$ $> /$, si la déterminatrice, plu*

Digitized by Go

The text on this page is estimated to be only 25.27% accurate

i D'UNE ÉQUATION. 173 horizontales , retranche une plus grande portion de la Ch vir. , $1/k/y^* > 6$ Ordre inférieur , si $k < 1$, si $k < 1$, si la déterminatrice retranche une plus petite portion de la Bande (ans y que de la Bande fans $x \cdot 3^\circ$. Que si $k = 0$, ce qui arrive quand la déterminatrice est parallèle à la Bande (ans x , alors $y = R' x$ se réduit à $y = R' x$. Donc x infinie ne donne pour y que des valeurs finies. 40. Et par la même raison , quand la déterminatrice , parallèle à la Bande fans y , rend / égal à zéro , on conclura que y infinie ne donne pour k que des valeurs finies , déterminées par les racines de l'équation $a^m y^n + k x Jf + ^7 \#f = 0$ * 9ul j puuque $l = 0$ se réduit , en divisant par $x j$, à $k + -h 97$. Il y a bien des recherches (sur les Lignes courbes où il suffit de connoître le rapport d' y à x , quand ces variables font infinies ou infiniment petites. Mais il en est beaucoup d'autres où il faut aller plus loin , & chercher ce que produisent les termes qu'on a négligés comme infiniment petits en comparaison de ceux qu'on a employés. Il est même souvent très - utile de trouver le rapport d' y à x finies , du moins par approximation. Ceci nous mène naturellement à la Méthode des Séries ou Suites infimes , qui découle (ans peine de ce qu'on vient d'établir. Y 1 98. Une Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 22.29% accurate

f 174 DE LA METHODE cm vu. 98. Une Série est une suite de termes qui fait une *** approximation continue à la racine d'une équation. On la nomme convergente, pour marquer qu'on approche d'autant plus de la valeur de la racine, qu'on prend un plus grand nombre de termes de la Série; en sorte qu'on auroit au juste cette racine, si le nombre des termes de la Série étoit fini, ou qu'elle étoit infinie en nombre, on pût les former. Une Série y au contraire, (croît divergente, quand on s'éloigneroit d'autant plus de la racine de l'équation, qu'on prendroit plus de termes de la Série* Il est clair qu'une Série divergente est trompeuse, ou du moins inutile. Car il vaudroit mieux s'en tenir au premier terme que d'y joindre les suivants. On propose par ex. l'éq; $y^4 - x^2 y^2 - x^2 = 0$. Si on cherche y en x, : c'est-à-dire, si on regarde y comme inconnue, & x comme connue, quoique variable, on trouvera que l'équation a ces quatre racines, X^2, X^2, X^2, X^2 ou $-d - a + x^2 = 0$ & $a y^2 - 1 = 2 a x^2 - 5 x^2 + x^2 = 0$ (P)...-VLV;i HM^^V^+é*"1 à. parce que chacune de ces quatre Séries substituée dans l'équation au lieu de y, en réduit le premier membre à zéro, & par conséquent à l'égalité avec le second membre. Les Séries A, B, C, D (ont donc les valeurs de x, & ces valeurs feroient exactes, si on épuisoit ces Séries. Mais Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 20.97% accurate

DES SERIES. i7quand cela n'est pas possible, on a du roir.s dans ces ŨT/IT. Séries une approximation continue   aux véritables valeurs $>' > 2$, d'y, pourvu qu'elles soient convergentes : ce qui a lieu^ lorsque chaque terme est plus petit que celui qui le précède, & que ces termes diminuent à l'infini. 99. Pour cet effet, on range tous les termes d'une Série de façon que les exposants des puissances de la variable aillent; toujours en croissant ou toujours en décroissant. Car une Série, dont les termes sont dilpos s selon cette Loi, fera   tre convergente, pourvu qu'on prenne la variable assez petite ou assez grande. x- x* x' Ainsi, dans la Série $A \dots x - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} - \dots$ les exposants de x vont en croissant. Si donc on suppose x fort petite, en comparant d'*, on voit que - soit XX une fraction moindre que l'unité, les puissances $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \dots$ de cette fraction font une progression géométrique qui décroît à l'infini, d'autant plus rapidement que XX est plus petite. Si par ex. $xz = \frac{1}{2}$, ou $x = \frac{1}{2z}$, la suite des puissances de $\frac{1}{x}$ fera   tre à l'infini $\frac{1}{x} > \frac{1}{x^2} > \frac{1}{x^3} > \dots$. Si $\frac{1}{x}$ la suite de ces puissances fera n'être, ^, VB^at% &c. Ce qui fait voir que plus x est petite par rapport à a, plus vite décroît la suite des puissances de $\frac{1}{x}$. Donc, si les termes de la Série A sont réglés sur les puissances

The text on this page is estimated to be only 27.07% accurate

17* DE LA METHODE Î Î» ' puiOànce de ~ , comme on voit qu'elle l'est en lui donnant cette forme $X \hat{=} XX X^* IX^4 I x^1$ on pourra toujours prendre * si petite , que chaque terme fera beaucoup plus petit que celui qui le précède , & qu'ils décroîtront à l'infini : ce qui rendra la Série convergente. Au contraire, dans les Séries B, C, D, les exposants d\ vont en décroissant. Il faudra donc supposer x fort grande en comparaison d'à , en sorte que la raison — soit beaucoup plus petite que l'unité. Alors la Série sera convergente , parce que les puissances de cette fraction a a' a* ~x' xx'xt'x*' une progression géométrique qui décroît avec d'autant de vite ne que x en plus grande. Les Séries B, C, D , ayant leurs termes ordonnés félon les puissances de —, comme on le voit en leur donnant cette forme il est clair , qu'en prenant x assez grande , ces Séries feront infailliblement convergentes. Par la raison des contraires , la Série A , appliquée à une valeur d'x plus grande qu'*, & les Séries B, C, D , appli

The text on this page is estimated to be only 27.03% accurate

DES SERIES. *77 appliquées à des valeurs d'* plus petites qu' V_f , feroient di- Ch. m vergentes. §100. On diftingue donc deux fortes de Séries. Les unes font d'autant plus convergentes que leur variable eft plus petite : les autres convergent d'autant plus que cette variable eft plus grande. Dans les premières , qui (e nomment Séries croifantes , ou amendantes , les expofants de la variable vont en croulant. Ils vont en décroiffant dans les autres , qui s'apellent Séries décroifantes ou descendantes. Il eft néceffaire de les diftinguer : car ou les employé à des ufages tres-différens ou même oppofés. b i 101. La forme générale d'une Série eft $Ax - Bx + Cx - Dx + \dots$, où les expofants h , i , k , l , &c. vont en croulant , ou en décroiffant , lèlon que la Série eft afcendante ou dépendante. At B, C, D , &c. font les coefficients des termes fuccellifs. Et comme il eft fort poffible que quelqu'un d'entr'eux foit zéro , avec tous ceux qui le fuivent , il (e peut faire que la Série foit terminée , & alors elle donne la juftte valeur d'y en termes finis. 102. On trouvera (uccelfivement tous les termes d'une Série de cette manière. Pour avoir le premier , on fuppofera x infinie , fi on cherche une Série dépendante , & x infiniment petite , fi l'on veut avoir une Série amendante. Cette fuppoftion réduit la Série au (cul premier terme Car fi la Série eft dépendante , Px^h eft plus grand que tous les autres $/, k^3 /$, &c. & x étant fuppoftée infinie , la puiffance x^h eft infiniment plus grande que les autres x, x^2, x^3 , &c [§. 78], qu'on peut fupplément. à l'Analyfe des Lignes Courbes. Z premier

The text on this page is estimated to be only 19.17% accurate

jjÇ DE LA MPTHOVE CM.vn primer fans erreur. Et fi la Série eft amendante , Texpos- $\bullet \bullet \bullet$ fant h elt le plus petit , & x étant infiniment petite , la h c. , r . , i k / puiſſance x fait difparoître toutes les autres x , $\bullet$, x , &c. Donc la fuppoſition dyx infinie , dans une Série décroiffante , & celle d' x infiniment petite dans une Série h croiffante , la réduit à $y = Ax$. Or ces mêmes fuppoſitions réduifent l'équation propofée à une ou plufieurs équations, telles que $x' = i$ [§.9?] , qui font données par les déterminatrices fupérieures ou inférieures [§.92]. Donc $A=R$ & $A=—j$. De forte que les déterminatrices font connoître le premier terme de la Série , ou des Séries , lorfque l'équation propoſée en peut donner plufieurs. Les termes fuivans (c trouvent de la même manière. S Jk S Que u repréfente la fomme des termes $Bx -f- Cx^4 + Dx^6$ &c. qui fuivent le premier, & on aura $y=Ax -f- \dots$. Cette valeur d'y (ùblituée dans l'équation propofée la transforme en une autre dont les variables font m & x. Qu'on fuppolè , dans cette transformée , x infinie pour les Séries dépendantes , & x infiniment petite pour les Séries attendantes : & les déterminatrices, fupérieures ou inférieures , donneront une ou plufieurs équations telles que $\bullet = ' \bullet / —k'f R ' x$ [§. 91] . Mais les mêmes fuppoſition* d' m infinie ou infiniment petite , réduifent la Série $Bx' -h Cx^4 + \dots$ à $u = Bx'$. Donc $B = RU^*$ & $/= —$ Ainſi les déterminatrices de cette prémière transformée donnent le fécond terme Bx de la Séiic. On

The text on this page is estimated to be only 19.20% accurate

DES SERIES. 175 On transformera de nouveau l'équation, en
supposant $u = zBx' + /$ où $/$ représente tous les termes $Cxk > i$ de cours
des opérations citées & la Série citée terminée. Exemple 1. Vég : $a/ - x'y -$
 $ax^* = 0$ proposée ci-dessus [§.98] étant placée sur le Triangle analyt. &^ ce
Triangle étant couché sur la Bande sans x , on voit qu'elle n'a qu'une seule
détermination inférieure, oui, par Z^2 l« Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 17.31% accurate

i8o J)E L'A METHODE Ch. 711: §. IOJ. I — V y : y * # • • • les
 Cafés yJ & x' , donne Péq: */ — ax> =o, ou ;=rr. C'cit là le premier terme
 d'une Série amendant. Pour avoir le fécond, on fubftituera x+u ky, & l'équation
 fera transforme'e en axi + ^auxx + ^auux + — x* x u — ax* =0,
 ou }/?«xxHh ^autx *{* mm% — *4 — x*u = 0 , laquelle étant placée, à
 fon tour, fur le Triang : anal : a deux déterminatriecs inférieures. L'une qui
 paûe y* ' • * • • par les Cales «' , «//*, uxx eft à négliger, parce qu'elle
 donneroit *=#x, & que ce fécond expofant d'x n'eft pas plus grand que celui
 qu'on a trouve par la première opération. Mais l'autre determinatrice , qui
 paflè par les Cales «xx & x* donne l'èq: iattxx — x+=o, ou *= XX . C'ert-là
 le fécond terme de la Stfrie. On aura le troifieme en fubftituant — + / au
 Heu d'» dans l'équation précédente , ce qui la transforme en x* * ^atxx + * •
 Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 19.55% accurate

DES SERIES. ,g, -/jr=0, ou $34/xj + /x' + u_ . 4, itxx+st^* = 0$. En la mettant sur le Tr: anal; on retrouve la déterminatrice , qui donne $t = Rx$, & qui est par conséquent à rejeter. Mais il y a une autre déterminatrice inférieure , qui passe par $txx \& x^*$, & qui donne $Peq : la/xx-i — o$, ou $/ — s — \hat{i}$. Et c'est le troisième 2jaa 814' XX me terme de la Série. Car $y = x+u$, & $* = — \bullet f/$, & $/ = — fa\&c popc/ = i\hat{e} + J_-^{\wedge}, *r$. L'o. voit qu'il est aisé de continuer cette Série. Excf72plc 2, On propose l'éq : $yy — 2xy > \{ *xx — 2ay$ 4. $ax \hat{a} = o$, de laquelle on veut tirer la valeur $d'^{\wedge}$ en x par une Série amendant. On mettra donc l'équation sur le Tr : anal : & on cherchera les déterminatrices inférieures. Il n'y en a qu'une couchée sur la Bande 6ns x , qui donne l'éq : $jy — 2ay + aa = o$, qui , quoiZ j que Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 18.37% accurate

i82 DE LA METHODE Ch. VIL * * * * • que du fécond degré ,
 n'a qu'une racine , mais double , y — * = o , ou y z=a. On fubftituera donc
 a+a à y, & la transformée fera aa zau+uu — 2*x — 2*x+xx 2aa 2au -f- ax
 4-" aa = o , ou uu ax 2ux > { * xx==ot qu'on mettra auflî fur le Tr: anal: où
 on ne lui trouvera qu'une déterminatrice inférieure , qui donne IVq: uu —
 *x = o , ou u — ^f/ax — =fc ax:i xx:i . i "2 I '2 Ainfi on fubftituera ±za ' x '
 + t à u dans fcq : ** — ax — 2ux+xx=:o , ce qui la transforme en *x± i.*
 i.*fl . \:i t:l 2a tx 4*// — ax rp ia x> — 2 / x -f-xx = o , \22 I."2 ** " l*fl " I-
 4-I *2 ou rtr24 i*w4-<»^f#- * V * — *»+wt==a Celle-ci fèra mife, à fon
 tour, fur le Triangle , & comme deux de fes termes ia/'V* & ^,*r%t+lîi
 n'ont point de Cafés à fe loger, on ks placera f comme on a dit au §. 89]
 entre deux Cafés , fç. le premier for la féconde colonne entre les Cafés /x°,
 ou / , & /x' ; & le ■ fécond Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 20.73% accurate

DES SERIES. ,83 fécond fur la première colonne entre la Café
 x^* & la Ca- Ch. vu. fc x^* . Alors on trouve à l'équation deux déterminatrics
 $\bullet$,oî* ;, dont l'une, qui paOé par tt & /x';2, donne1:2 roit / == Rx , ce qui
est le même expolant que ci-deffus. On la négligera donc , & Ton ne fera
attention qu'à l'autre qui pafle par les Cafés tx1'2 & xl~^1'2 9 donnant «,
1:1 1:1 1:2 1+1:2 req:=fc2* tx =fz2a x — O, ou t—x qui eft le troifième
terme de la Série. Pour avoir le quatrième , on fubftituera x + / au lieu de /
dans la dernière . 1:2 1:2 , 1:2 1+1:2 éq: ±2« rx + tt^z2a x — 2/x + xxzro, &
la transformée fera ±2,,;V*,;3 -2*';2,x,:2 * . i:2 1 + 112 XX + 2SX + SS
=JZ 2a X 2XX 3/x + xx=o} ou =ir 2a'2sx1'2 +// = o. Ces deux termes étant
placés fur le Tr : anal : n'ont qu'une déterminatrice , qui donneroit s=Rx ' .
Cet expofant étant donc moindre que le précédent, ne peut être admis. Ainfi
la Série eft terminée; car on a y a + u= a±y/ ax + 1 = a — √ a x + x. Si
pourtant on vouloir voir ce que donnera cette dernière déterminatrice , ou
fon équation =fc 2SX"*sxX:2 + sj — o y on lui trouvera deux racines; ie.
sx=o, qui termine la Série. 20. r==ï=a*I:V:a ==L2y/ax , & celle-ci»
Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 25.60% accurate

184 DE LA METHODE Ci vil. celle -ci, fubftituée dans $y = a \pm \sqrt{ax + x^2}$ / , donne i' i0i- $y = a \pm \sqrt{ax + x^2}$ / $ax + x^2 = 2y/ax$, ce qui eft toujours $y = a \pm \sqrt{ax + x^2}$. C'eft donc là la vraie valeur d'y: ce qui fe vérifie fans peine , puifqu'en chaflant l'irrationalité , l'éq : $y = a \pm \sqrt{ax + x^2}$ Ce transforme dans leq : propofée $yy - xxy + xx - 2ay = 0$ $ax > \{ < aa = 0$. 1 04. On remarquera ici , 1 °. que fi , dans la fuite des équations que fournirent les déierminatrices fuccdiïves , il s'en trouve quelcunc qui n'ait que des racines imaginaires , toute la Série , que les premiers termes fembloient promettre , devient par- là imaginaire. Car un feu! terme imaginaire rend imaginaire toute la fomme dont il fait partie ; à moins que ce qu'il y a d'imaginaire dans un terme ne foit décrut par ce qu'il y a d'imaginaire dans un autre terme ; ce qui ne peut avoir lieu ici , où x a dans chaque terme un expofânt différent.

20. Que fi parmi les termes d'une Série il y en a quelcun qui foit demi - imaginaire , la Série eft demi-imaginaire; c'eft-à-dire [§. 95] imaginaire en prenant x pofitive, réelle en la prenant négative; ou réciproquement. 30. Que fi parmi les équations qui déterminent les termes fucceflîfs d'une Série , il s'en trouve qui aient plufieurs racines réelles ; alors la Série fe fourche , pour ainfi dire , & fe multiplie en autant de Séries , qu'il y a de racines réelles , chaque fois que cela arrive. Exemple I . On demande la valeur d> en x , par une Série afcendante tirée de l'éq : $x^i + x^a + ayy - 2aly - f = 0$? Mife fur le Tr. anal : couché fur la Bande fans x , elle n'a qu'une déierminatrice inférieure , qui donne l'éq : $ayy - 2*xy + a1 = 0$, dont la racine unique , mais double , eft $y = a$. On fuppofera donc $yz = a^u$, & en fubitiDigitized by Google

The text on this page is estimated to be only 24.18% accurate

DES SERIES. * * * * * 4e # fubftituera cette valeur dans
 l'équation propofée. La transformée xl -J- axl +»*: + auu-=.o^ mile fur le
 Triangle, n'a auflî qu'une de'terminatrice inférieure , qui donne au* * * * *
 * * * * * 4-4*1— :o, dont les racines u—dt:y/ — xx , font abfolument
 imaginaires. On ne peut donc exprimer la valeur d> en x par aucune Série
 afcendante. Car la feule qui pourroit donner cette valeur, l'croit^ — 4 + » =
 4=fc y7 — xx &c. qui eft imaginaire. Exemple 2. Soit propofée l'équation

$$xxy + y^2y - 2axy + mxx = 0$$
, dont on veut tirer la valeur d'y en x par une
 Série afcendante. On la placera fur le Tr. anal: & la de'terminatrice
 inférieure par Tant par les Cafos yy,xy,xx, * * * * * donnera l'équation: ayy —

$$2axy + f. axx = 0$$
, qui n'a qu'une racine , mais double , y = x. On fubftituera
 donc x *f« 0 à y dans l'équation propofée , & on mettra fur le Trian
 l'Analyfe des Lignes Courbes. A a gle Ch. VIW Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 17.92% accurate

i85 DE LA MET H O D E Ch. vu. gle la transformée $x' + x'' + x'''$
 $\ll \gg = 0$. Elle n'a aussi qu'une déterminante inférieure, qui donne l'éq :
 $mu + r x^2 = 0$, laquelle a deux racines $\ll = 4x^2 - \dots$ & $\dots$. On
substituera pour y $-\frac{1}{2}x^2$ dans la première
transformée, & la féconde fera $a^2 x^2 - J + 4x^2 - \dots = 0$,
qu'on mettra sur le Tr : anal : Elle a deux déterminantes inférieures ; Tune
inutile, parce que passant par les Cafés //, $\frac{1}{x^2}a$, elle donneroit $t - Rx^2$.
* où x a le même exposant que dans le terme précédent : l'autre utile, qui
passant par $\frac{1}{x^2} & x$, donnera $1:2 i:z - 1:2 \$ 4-i;2 :0$, OU Digitized by
Google

The text on this page is estimated to be only 24.42% accurate

DES SERIES. 187 X t ===== — . Les trois premiers termes de la Série font 2. a donc . Où l'on voit I*. Que la Se'rie est imaginaire, si Ton prend x positive , parce qu'alors y7 — - est une grandeur imaginaire. Mais si on prend x négative , la Série fera réelle , & alors x* a°. La Série fera double » parce que le terme V — a également le signe & le signe — , l'équation auu -fx* sb o , qui a donné ce terme ayant deux racines réelles H y a donc réellement deux Séries , dont les trois x' XX premiers termes font x y7 — ~ — — pour Tune & x — s/ — - — — pour l'autre. 105. Joignons quelques confédérations nécessaires pour rendre cette Méthode plus abrégée & plus parfaite. La substitution de Ax* ** u à / [§. 102] dans un terme quelconque de l'équation proposée , le transforme en autant de termes qu'il y a de colonnes depuis celle où il se trouve jusqu'à la première inclusivement ; chaque terme ayant sa place sur chaque colonne , & tous ces termes étant situés sur une même Droite parallèle à la déterminatrice qui a donné l'éq : y=zAx) . Car la puissance n de u + Axb étant , [§• 26] A a 3 *"+

The text on this page is estimated to be only 21.04% accurate

188 DE LA METHODE Ch. vil. $n h n - i \gg \gg - t j i 2 h n - z$,
 $n.n - \backslash .n - 2 \S .105. * + n A x u * A x u 4 \ll - * i \ll 2 1. 2. \$ j \text{£} x * h u n *$
 jufqu'à $^x W^$, qui eft le dernier ter. me ; fi on fubftitue cette puiflance $\gg y$,
 dans un terme comme $x y^*$ qui eft de Tordre $m^* \backslash * n h$ [§. 88], & qui le
 trouve fur une colonne précédée de n autres, on transformera en $x u A x ^ u$
 $4^* 1. 2 . 2 w - \backslash - 7 . b n 2$, $n t n - V \sim n h A x u$ cre jufqu'à $A x$, dont tous les
 termes, en regardant // comme) qui étoit de Tordre h , font de Tordre $m +$
 $n h$. Or tous les termes, qui font d'un même ordre, fe trouvent lur une même
 Droite parallèle à la determinatrice [§. 87 J. Donc tous les termes, dans
 lefquels a été transformé $x^{TM} f$, font fur une Droite parallèle à la
 determinatrice qui a donne' $y = A x$. Et il eft clair que le premier terme $* u$
 occupe la Cale où e'toit le terme transformé $x y$, fur une colonne précédée
 de n autres ; que le fécond terme $x'' * u \sim X$ en fur une colonne qui a
 colonnes avant elle; que le troifième $x m + l h u n 2$ eft fur la colonne voifine
 ; & ainfi jufqu'au dernier terme $j f x^{** ^}$ qui eft fur la première colonne, ou
 fur la Bande des puiflânees d' x . Ainfi quand on place $T e' q : x i y t - \backslash - a y i$
 $* i * b x y * \hat{i} * d d x y > \backslash * f * x - o$ lur le Triang : analyt : couché lur la Bande fans
 x , on lui trouve quatre déterminatrices. Il y en a d'abord une horizontale ,
 qui paile par les Cafés Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 18.05% accurate

DES SÉRIES. 159 Ch. VII. §-ioU «y & xxy. Elle donne pour y une valeur confiante [§. 96, i'.l qu'on peut nommer A. En substituant A+u à j dans la proposée, elle (è transforme en $Axx + 4zAux + u^2x + Aia - iA^2$ du $>\{ * lAau + au * A^2bx + 2Abux + Jx yfx + 4eux + -4cWx - 4Aoc + \frac{1}{x} = 0$, où Ton voit que les termes $* \dots * x$) 1 n delapro- $* xtuyx^u, xi y^j$ polée ont v u\ul }u' xy1 v produit j xtf^xk^x x'y f dans la \ xluix% xy \ transfor- / xu yx t . '111 x ' mée. V x Aînfi chaque terme en a donné un à toutes les colonnes qui le précédent, & ces termes fè trouvent sur une Droite horizontale , c'est-à-dire , parallèle à la déterminatrice qui a donné y=zA. La seconde déterminatrice de l'équation proposée par les Cafés f & x'y* , & donnoit y = Ax\ La substitution de Ax + u à y transforme l'équation en $Ax^2 + 2Aux - u^2 - A^2x^6 - A^2aux - A^2atSx + 4au^2 - 4Abx - 2Abux - 4bu^2x + Acx - Acux + AcMx^4 - 4doux^kpx = 0$. Donc le* termes A a 3 xy. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 18.67% accurate

ijo DE LA METHODE Et en plaçant la transformée sur le Tr:
anal: on verra que tous les termes, auxquels un terme de la propofée a été transformé, ont leurs places sur une même Droite parallèle à la déterminatrice qui a donné Péq : ; = ^xl. La même chose se vérifie pour les deux autres déterminatrices de Péquation propofée. La troisième partoit par les Cafés y* & x, & donnoit une équation de cette forme y = Axi:K On substituera donc Axl:t + uà y, & la transformée fera Ax2+2:> + 2 Aux2*1'* + u1x*+A*x + %AX aux2' * +iAaulxX: *+au% + A1bxl+2:i + iAbuxx* 1 ;? * btfx -f Acx2 + 1 :* + cuxx + AMxx+i:* ddux 4*/'* = o. Ainsi les termes *y) (xxuxtxx+-i:tuyxx+x:t (donnent)** '< » ^ ' x J Qx ■ • • Si Digitized by Google

CH. VII.
§. 105.

$$\left. \begin{array}{l} x^2 y^2 \\ y^3 \\ xy^2 \\ x^2 y \\ xy \\ x \end{array} \right\} \text{ ont donné } \left\{ \begin{array}{l} x^2 u^2, x^4 u, x^6 \\ u^3, x^2 u^2, x^4 u, x^6 \\ u^2, x^3 u, x^5 \\ x^2 u, x^4 \\ xu, x^3 \\ x \end{array} \right.$$



The text on this page is estimated to be only 20.42% accurate

DES SERIES. j9i Si orv place cette transformée fur le Tr : anal :
on voit Ch. vn. que chaque terme de la propofée a donné un terme à tou- §•
,0î* tes les coiomnes qui le précèdent, & que ces ternies (ont fur des Droites
parallèles à la déterminatrice qui a donné y s Axl : 1 : mais comme
Texpolant de l'Ordre de y eft la fraction { , il a fàlu , pour placer ces termes
, diviler en trois parties égales les intervalles des Cales contigues lur une
même colomnc [§. 89] . Enfin la quatrième déterminatrice de l'équation
propofée, pafFant par x'y & x, donne y = Ax tt la fubftitution de Ax~l*~*u à
y change la propofée en A' *fr» 2 Au x +*»xx + Aa* x — * 4-\$v4J*«x~*
lAauux— 1 + au> + Ax bx" 1 + lAbu*^ bulx 4. Acx ► f* eux1 + Add +
ddux + px=o. Donc les termes •X"«" , xu , x° u\ x—lul , x—1uix~~\ produi-
l*ul , «r, x~~\ fent \ x' . »\\\ Ici l'on oblérve la même Régie : mais comme
Pexpofint négatif [— 1] de Tordre a1 y a fait naître des termes où x a un
expolant négatif ; il a fàlu , pour placer ces termes , prolonger le Triangle
au-deflous de la Bande fans *L§. 8*], icô.Ces

The text on this page is estimated to be only 25.07% accurate

Ij>2 DE LA METHODE °f. il] 1 °6- Ces Exemp,cs font voir que quand plufieurs terl mes de l'équation propofée font iùr la déterminatrice ou liir quelcune de lès parallèles ; en un mot , quand ils font d'un même ordre ; ils fe transforment en des termes , qui , diftribuez fur une même Droite , fè mêlent & fe logent quelquefois plufieurs enfembie dans la même Cale. Ainfi , dans le i. Ex. du §. pre'c. quand on a employé la déterminatrice horizontale , les termes x^{*jr*} & $cx'y$, qui c'toient fur cette déterminatrice , ont été transformés en $x^{tf>f(2A+0*?uHK^{*}+)x''}$, & les termes bxy^1 , Hdx) , $/x$, qui étoient fur une Droite parallèle à cette déterminatrice, ont donné $bxy^{*} \{iAb \bullet +> dd \} xu \blacktriangleright f- (Ab^{*}Add+f) x$, qui font encore fur la même Droite. Donc , lorfqu'on a plnfieurs termes d'un même ordre , mn , . $m^{*}h^{*}n^{*} — i^{*}mA^{*}zhn^{*} — 2$, , comme $ax y^4 + bx y^4 + cx y^4 + \dots$ jufqu'à $xm^{*}Jtn$, qui font tous de l'ordre $m+nh$ puifque $y [= Axh]$ cil de Tordre h ; la fubaitution de $Ax +u$ à y les transforme en une fuite de termes telle que $ZxM^{*}nh$, qui font auffitouts de Tordre $+$ & où les expofants dV font une progreffion arithmétique dont la différence eu: h , & les expofants d' une autre progr: arith : dont la différence cft i . Les coefficients P , Q^{*} , R , &c de ces termes fe peuvent calculer par une Régie abrégée , pareille à celle du §. 26 y & fondée fur le même principe. Le terme $ax y$, par Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 17.45% accurate

DES SERIES. m par la substitution de u à y , se transforme
 +r $\frac{1}{x}$ tof, w « $m^{\frac{1}{n}}$, w.w — $t \sim m^{\frac{1}{n}}$ $x \ll \frac{1}{n} \frac{1}{x}$ u H T « + 1.2 -
 aA'x u 5 &c. Le terme . $m^{\frac{1}{n}}$ - $\frac{1}{n}$ m A-b n 1 n r y le transforme en bx T
 « 4.2 ! i« a Le terme $x^{\frac{1}{n}}$ en u 0 -f -ytAx m &c. Et le terme $dx^{\frac{1}{n}}$ y 5 en
 «fc**** ^ Donc h somme «V + , + ex y +dx ^* y 5 ére se transforme en
 axm«n + (nsA + b)x m * h m» ~ 1 + (aA* * • 1. 2 w 1 z -y_t_-ATM+2i> _
 » — 2 . ,n.n un 2 n 1. n D'où l'on tire cette Régie. On écrira en première
 ligne tous les termes d'un même ordre , ou même toute l'équation , en
 distinguant seulement, pour plus de commodité, les ordres de ces termes, &
 changeant, si l'on veut, y en u. Je dis si l'on veut ; car on trouvera par
 expérience qu'il est plus simple de ne point faire ce changement , mais alors
 il faut se souvenir que y , qui marque avant l'opération toute la Série , &
 pendant l'opération son premier terme seulement , ne marque , pendant la
 seconde opération , que le second introd. i l'Analyse des Lignes Courbes. si b
 terme Di gitized by Googlej

The text on this page is estimated to be only 22.26% accurate

194 DE LA METHODE Ch. VII. §. lotf. terme, & pendant la troifième opération, que le troifième terme , &c. Ce double emploi d'^ ne caufe aucune équivoque. On écrira donc en première ligne l'équation propoféc, les termes étant rangés lèlon leurs ordres. On multipliera chaque terme par l'expofant cPy & par Ax , & en divi(ant ces produits par y , on aura la féconde Ligne. A celle-ci on multipliera chaque terme par la moitié de l'expolant d'y & par Ax , & divifant tout par/, on aura là troifième ligne. Chaque terme de cette ligne fera mulb tiplié par le tiers de l'cxpofant dry & par Ax. , & divifé par y pour avoir la quatrième ligne. On continuera de même jufqu'à-ce qu'on n'ait plus que des termes fans y. La (brame de toutes ces lignes eft la transformée , qu'on ordonnera en ajoutant les termes qui peuvent s'ajouter & retranchant ceux qui fc détruiifent mutuellement. Ainfi , dans l'équation du §. précéd. fi on veut em• ployer la déterminatrice horizontale qui donnoit l'éq ; xlyl + cxxxy = o , ou y = — c , on aura Az= — c , & b = o. Et l'opération (è fera ainfi: I. Ordre. II. Ordre. m. Ordre. xx yr 4« cx'yb bxyx >±ddxy + px 4* ay% — 2cxxxy — ccx* — 2 bcxy — c dix j *cyy 1 î O 5 >i*ccxx +bux + l*ccy o o î La transformée eft donc xxyx *f«(r — «0**7 + (« — a) x1 * kxyx + (dd — *J + (/ — cdd+ bu) »+• *y. ~~~~

Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 17.87% accurate

• DES SERIES. $i9; — i^{*}cyy + \%^{*}ccy — ac^{*} = o$, où le fécond terme Ce Ch. vu. réduit à — «c», & le troisiéme à rien. *• 10'< Si dans la même équation on veut employer la déterminatrice qui parte par les Cales $fx'; \& p x$, & qui donne $y = — j^{\wedge}$, l'opération fera ainfi : V. Ile. IIIe. 1V« Ordres. $cxly + px + xiyx + ddx y 4^{*} bxyy + ay^{*} P i o 2 i a ?^{*}^{*} <: ex o i o 4 \hat{i}$ ce ccx ccxx Ainfi la transformée eft « $e l^{\wedge} + (/ — /) x - f^{**}$ » * + terme difparoit. 107. On peut tirer de cette obfervation divers moyens d'abrégér le Calcul des Séries. Il (eroit facile d'en déduire une manière allez fimple de calculer la valeur [du terme qui remplit une Cale aflignée après un nombre de transformations quelconque ; de manière que connoûtant Bb t auflî «

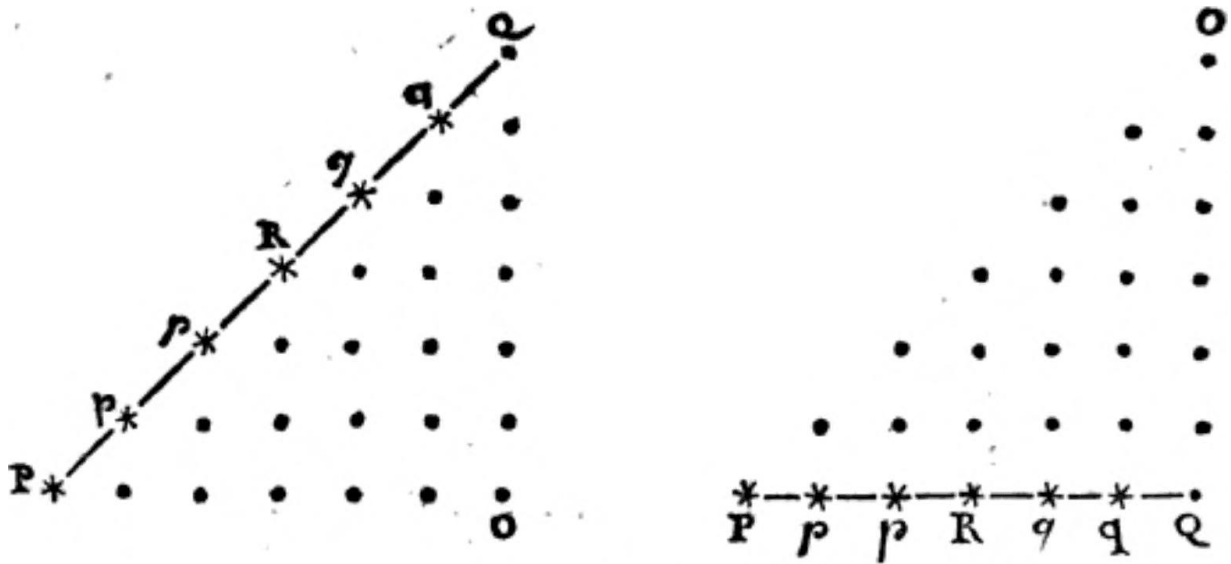
Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 27.05% accurate

DE LA METHODE Ch.vti. auflî par quelles Cafés pafîe la déterminatrice de la dernîe§. 107. re transformc*e , on aura l'équation qu'elle fournit , & par conféquent le terme correfpondant ae la Série , avec beaucoup de facilité. Mais ce n'eft pas ici le lieu d'épuilèr cette matière. Voici une remarque plus néceflaire à nôtre V j rr- c- 1 r m n m^b n~\ m-\-ih n-2 deflein. 01 la fomme ax y bx y -{-ex y &c. des termes d'un même ordre quelconque , eft divifible , une ou plufieurs fois , par y — A>P , qui eft la valeur d'«, la fomme des termes auxquels ceux-ci (è transforment [en mettant u^Ax pour y~\ eft auflî divifible, le même nombre de fois , par u ; puifque ces deux fommes ne diffèrent que par l'expreflîon. Or les termes de la transformée conftitutnt [§. 106] une fuite Px^m uⁿ m^bun—i + m^2hun—2 + &(qu, fc tçrmine par les termes + X^+C»— 2>«* + Tx^^u * Zxm*nb . Cette fuite ne peut être divifible par u , à moins que le dernier terme ne manque , & que Z ne (bit zéro. Elle ne peut être divifible par *» , ou deux fois par «r , fi (es deux derniers termes , T & Z ne font pas zéro. Afin qu'elle foit divifible par u* , ou trois fois par u , il 6ut que X, T & Z foient zéro. En général autant de fois que », ou plutôt y — Ax³ qui eft (à valeur , divifè la fomme des termes d'un ordre quelconque, autant manque-t'il, à la transformée, de termes de cet ordre fur les premières colonnes. Car les termes Z, Y, X , &c. font ceux qui ont leurs places fur la première , feconde , troifième, &c colonnes. Donc, puifque y — Ax^h=o eft une des racines de l'équation que fournit la déterminatrice, y—Ax divife, Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 26.62% accurate

I DES SERIES. 197 au moins une fois, la Comme des termes qui font fur cette Ch. vu. déterminatrice. Ainfi , il manque néceffairement à la trans- w* 107* formée le terme qui devroit être au point où la déterminatrice coupe la première Bande verticale. Et il manquera à la transformée les deux termes dont les places (ont les points où la déterminatrice coupe la première & la dernière de colonne, fi $y - Ax$ divife deux fois la (omme des termes qui font fur la déterminatrice, fi $y - Ax = 0$ eft une racine double de l'équation que fournit cette déterminatrice. Mais fi $y - Ax = 0$ eft une racine triple de cette équation , il manquera à la transformée les termes qui devraient être où la déterminatrice croifè les trois premières colonnes , & ainfi de fuite. 108. Si donc PQ représente une déterminatrice , & que $y - Ax = 0$ foit une racine fimple de l'équation qu'elle fournit , il ne manque à la transformée , fur cette déterminatrice , que le terme qui devroit remplir la Case Q fur la première colonne QO : du moins il ne lui manque pas le terme qui fur la féconde colonne. Pq eft aufli Bb 3 déter- Digitized by Google



The text on this page is estimated to be only 28.94% accurate

DE LA MÉTHODE Ch.vii. déterminatrice de la transformée ; car tous les termes de $><10$ ' la transformée font au-deilbus [ou au-defliis 1 de Pq, comme l'étoient tous les termes de la propofée [§. 109] ; mais c'est une déterminatrice inutile, parce que Pq, étant partie de PQ, a la même inclinaifon que PQ^ aux lignes & aux colonnes. Ainfi PQ^ ayant donné $yz = Ax$, Pq donnerait $u = Bxh$ [§.85]. On ne doit plus employer Pq après avoir employé PQ^ [§. 10\$]. Mais du point q il part une autre déterminatrice, qui porte fur la plus haute [ou la plus baffe] Calé pleine de la première colonne q O, & qui donne une équation par laquelle on détermine le fécond terme de la Série. y Que fi $y - Ax = 0$ est une racine multiple de Péquation fournie par la déterminatrice PQ^, par ex. une racine triple ; alors dans la transformée les Cafés Q^, q, 7, reftent vuides, & la déterminatrice Pp fe termine à la Cale R fur la quatrième colonne [§. pr.]. Il est inutile, par la raifon alléguée [§. 103], de confidérer encore cette déterminatrice, mais il en part une (RS) de la Café R, qui peut (è terminer en S à la première colonne, & c'est la féconde déterminatrice qui donne une équation par laquelle on trouve le fécond terme de la Série. Il peut arriver aufi que le terme S manque, & que la déterminatrice RS (è termine à quelque autre colonne que la première, comme en T ; & alors ce point T donne naiffance à une autre déterminatrice TV ; & fi celle-ci ne va pas à la première colonne, mais le termine plutôt, il part de fon extrémité une autre déterminatrice, & de celle-là peut-être encore une autre &cc. jufqu'à ce qu'on vienne aboutir à la première colonne. Chacune de ces déterminatrices, ayant fon inclinaifon particulière aux lignes Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 26.49% accurate

DES SERIES. 199 o % o 7o o o *— ï £ r* *v . . t*'.
 gnes & aux colonnes , donne un expofant particulier à la Cm. vu. puiflance
 de x dans le fécond , [ou troifième , quatrième, *°8^ &c.] terme : ce qui
 fait que la Série fe fourche en autant de Séries qu'il y a de racines dans
 toutes les équations que fournirent toutes ces déterminatrices. Mais (ans
 trop s'embaraffer de cela , il fuffit de prendre la déterminatrice R r , qui part
 du point R extrémité de la première déterminatrice négligée PR , & de faire
 ufage de toutes les racines de Péquation qu'elle fournit. Une de ces racines
 eft » = o; la somme des termes qui (ont fur cette déterminatrice RT étant
 divisible par «r, puifque RT ne va pas jusqu'à la première colonne qui cil la
 Bande (ans u. Employant donc cette racine pour avoir la transformée
 fuivante, il faudra à u fubftituer 0 + ' [§. 10s] , ce qui n'eft qu'écrire / pour
 u. Ce changement laiflè tous les termes de l'équation dans leurs places.
 Ainfi la transfop» mée fuivante a les mêmes déterminatrices que la
 précédente : & comme on a déjà employé PR & RT , on viendra à la
 détermiinatrice TV , tout comme fi on avoit paffé d'abord de PR à TV , la
 racine «= o de l'équation fournie par RT fartant le même effet que fi on
 avoit néglige RT. Et Digitized by Google

200 DE LA METHODE Ch. vit. Et il en feroit de même , fi la déterminatrice TV , n'abou»>*• tillbit pas à la première colomnc , mais c'toit accompagnée de quelques autres déterminatrices. 109. On voit par -là quelle route il faut fuivre pour calculer les termes irréguliers de la Série, lapelle de ce nom ceux qui font donnés par des équations qui peuvent avoir plufieurs racines , réelles ou imaginaires. Mais il elt difficile que cette efèce de défordre dure long-tems. Car auifi-tôt qu'on fera venu à une déterminatrice , dont réquatiou n'a point de racines multiples [ou dès qu'on employé une racine fimple , fi cette équation en a de (impies & de multiples] il ne manquera , à la transformée , des termes qui ont leur place fur cette déterminatrice , par ex. R S , que le terme S qui devroit être fur la première colonne [§.107.]. La déterminatrice de cette transformée partira donc de la Café T , la plus haute [ou la plus balTè] de la féconde colonne , & portera fur la Ca(ê V , auifi la plus haute [ou la plus baffe] des Cafés pleines de la première colonne. Donc , dans l'équation que donne cette déterminatrice TV, la variable inconnue, u par ex. ne monte qu'au premier degré , puifque T elt fur la féconde colonne qui cil la bande u ; & cette équation n'aura qu'une feule racine , qui fûrement fera réelle [§. 94]. Et dès-lors la Série dévient régulière, pareeque toutes les déterminatrices fuivantes partant du point T , on ne tombe plus dans des équations qui ayent plufieurs racines. Tous les termes fuivans de la Série peuvent même lé calculer avec plus de facilité par la Méthode qu'on va expliquer. 110. Je suppose qu'on foit venu à une déterminatrice , dont l'équation» a quelque racine fimple , & qu'on employé cette racine. Pour faciliter PexprefSon , je la Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 27.05% accurate

DES SERIES. 201 la nommerai la première déterninatrice , en faifant afe&-a€-C« . vil tion de toutes les précédentes , s'il y en a eu quelques- ^<i0" unes, J'apellcrai aufii l'équation qu'elle fournit, l'équation propolée , quoiqu'elle puiflè être une des transformées. Que m défigne l'ordre des termes par lefquels, paflè h cette prémie're déterninatrice, & que $y - Ax = 0$ foit une racine fimple de l'équation qu'elle fournit. En fubftituant $Ax^3 + \dots$ dans la fomme des termes de l'ordre m , celui qui devroit être fur la première colonne (croit x^m [§. 105] : nous négligeons le coefficient , dont il ne s'agit point ici. Mais ce terme manque , puifque $y - Ax$ eft fuppofée divîfer la fomme des termes de l'ordre m . [§. 107]. Le terme x^m , qui fuit, tombe fur la lêconde colonne, & la Café qu'il remplit eft la plus haute [ou la plus bafic] des Cales pleines de cette colonne. Si mzin eft Pexpofant des termes du fécond ordre ; [le figne — eft pour les Séries dépendantes , le figne + pour les afcendantes] , le terme le plus haut [ou le plus bas] de la première colonne fera x^{W-t} . Ainfi la déterninatrice de cette transformée portant fur les $Ca_m - b_m x^m$, n $mz + zn m^* \cdot b$ fes $x^* \cdot x$ donnera $u - Bx^b = Bx$ pour le fécond terme de la Série. La difTérence : qp» des expofants b & b^n du premier Ax & du fécond Bx terme de la Série, eft donc la même que celle des expolants m & du premier & du fécond ordre. Dans toutes les transformées fuivantes, la Cale x reftera pleine , u fe changeant fucceffivement en $/$, $/$, r , httnd. à tAnalyfe des Lignes Courbes. C c & C Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 24.40% accurate

toi DE LA METHODE Ch.vii &c. & toutes les déterminatrices
fui van tes partiront de $* 1,0*$ cette Cafe pour atteindre la plus haute [ou la
plus baflè] des Cafés pleines de la première colonne. Elles portent
fucceffivement fur les diverfes Cafés de cette colonne , parce qu'à chaque
transformation la Cafe par laquelle a pafle la déterminatrice fè vuide [§.
107] : mais, d'un autre côté , chaque transformation remplit quelques
nouvelles Calés de cette première colonne [§. 105]. Ainfi quand on
(ùbftituë , dans la première transfork) j fi mec, Bx 4./ à », les termes du
premier ordre m remphlTent les Cafés x, x^5 ». $* > ' & * i$ & les termes du
fécond ordre mzzzn rempliflènt auflS /es Cales x, x^3 &c. en général x^J [/
marquera un nombre entier quelconque] . Mais la même fùbrtitution dans
les termes de l'ordre m qp p remplira , fur la première colonne , les Cafés ,
 $xm^P + n \% x$ &c en général x^r^J . Si xm^2 le trouve être la Calé pleine la
plus haute [ou la plus baflè] de la première colonne , la troifième
dàerminatrice panera par $x^{TM} \& XM-Jf \sim 2n \}$ & $^otlm rwzt = S:Cxb^z2n$. Et
fi enfuite $x''^? "$ cft la plus haute [oj la plus baflè] des Cafés pleines de
cette colonne , on aura $s z = Vx > \sim * \sim n$, & ainfi les expofants fùccefiifs de
x dans les termes y, #, t, s, &c. de la Série lèroient $by + zn, bz + zan, bz^z$
&c. en progreflîon arithmétique dont la différence eft n. La Série n'auroil
point d'autres termes , s'il n'y avoit dans l'équation propofée point de termes
que ceux des ordres m & mzzzn. Toutes les transformations à l'infini ne
donneroient que des, Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 21.76% accurate

I DES SPRIES. to) des termes compris fous cette cxpreffion générale $x_m := (Z^n C_f^{*} \setminus j$ est un nombre entier quelconque ou même le zéro]. Mais s'il y a dans l'équation proposée des termes d'un autre ordre, dont l'exposant soit $m \leq p$ la Café x_{m-i-p} fera une fois la plus haute [ou la plus basse] de la première colonne. Alors la déterminatrice, qui part toujours de la Café x_i^{**} [ou x_{m-h} , , &,] donnera $\ll Bx^{*-} + * = s/T/$ [ou $/ = Cx^9$ ou $j - Dx \&c$]. Le terme où x a pour exposant t bzip est donc un des termes de la Série. La substitution de $Bx^{p>t}$ à u [ou de $Cx^{s \&c}$] dans les termes des ordres $m \leq n$ remplira, dans la première colonne, les Calés $x_{n-P} * > x^{s' \&c}$. Cette première colonne acquerra donc des termes que représente l'expression générale xw^{*i} Et la déterminatrice portant successivement sur ces termes, donnera à la Série les termes compris fous cette cxpreffion $x^{*^{**}}$. On ne fait ici attention qu'aux exposants. Dans les équations particulières il se peut faire que quelques - uns de ces termes aient le zéro pour coefficient. Il auroit été plus exact de dire qu'il n'y a dans la Série aucun terme qui ne soit renfermé fous l'expression générale $Hx^{jn}jp$ S'il y avoit dans l'équation proposée un quatrième ordre de termes, dont l'exposant fut $m+q$, l'expression générale Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 27.41% accurate

' 204 DELA METHODE /,uo. néralc des termes de la Se'rie (croit
 $Hx \sim \hat{m} \sim \hat{jp} \sim \hat{11}$. ft ainfi de fuite , s'il y a un plus grand nombre
d'ordres. in. Ainfi quand on eft parvenu , dans le calcul d'une Série, aux
termes réguliers y c'eft- à-dire, quand on eft venu à une déterminatrice dont
l'équation n'a point de racines multiples , ou qu'on ne veut employer qu'une
racine fimple de l'e'quation que donne une déterminatrice ; on trouve
aifément la fuite des expofants de x dans les termes fuivants de la Série , en
prenant les expo(ânts m , zp » , m+pi m + q y &c. de tous les ordres des
termes de féqnation , & les retranchant tous du plus grand m [ou étant de
tous le plus petit m] pour avoir les différences Bfpift&c Puis on poléra b ,
expofant du premier terme , qui eft donne' par la première déterminatrice ,
& on lui ajoutera , ou on en retranchera , fuccelfivement les multiples » , 2
» , \$ n , &c. de la pre'mie'ie différence. A tous ces termes on ajoutera
enfuite, ou en retranchera , fuccelfivement les multiples />, 2p ? \p>&c de
la féconde différence ; & à tous les termes déjà écrits on ajoutera , ou on en
retranchera , les multiples q , 7q->xq, &c de la troifième différence. On
continuera de la lorte , jufqu'à - ce qu'on ait épuifô toutes les différences.
Enfin on rangera ces expofants félon leur grandeur. La progreffion
arithmétique qui commence par b & dont la différence eft le plus grand
commun divifèur de » i P > 9 y àrc renferme tous ces expofants. Mais elle
contient aufli d'autres termes , non néceffaires , à moins que la plus petite
différence » ne fbit le commun divifèur de toutes les autres. 1 12. Par cette
Régie, on a la forme de la Série, c'eftà-dire , L fuite des puiffances de x qui
forment fes termes. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 22.48% accurate

DES SÉRIES. 20S Mais il faut de plus avoir leurs coefficients. On les calcule vu. cule aisément en supposant à chacune des puissances de x qui entrent dans la Série, un coefficient indéterminé $A, B, C, D, \dots$ en substituant, dans l'équation, au lieu de y cette Série indéterminée qui en représente la valeur, & en déterminant l'un après l'autre chaque coefficient $A, B, C, D, \dots$ par les équations qui se forment en égalant à zéro chaque terme de la transformée. En un mot, on calcule ces coefficients par la Méthode des indéterminées, que Des Cartes, & après lui tant d'habiles Géomètres, ont employé avec un si grand succès pour la résolution des plus beaux Problèmes. Exemple I. Soit proposée l'éq: $6x^7 - 2x^6 - 11x^5 + 4x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 10x - 1 = 0$. On demande la valeur de y en x par une Série attendante? On mettra l'équation sur le Triangle analytique, & puisqu'on veut une Série ascendante, on cherchera les déterminatrices inférieures. Elle n'en a qu'une, qui donne l'éq: $ay^2 - 11xy + 10y - 1 = 0$, ou $yy - 3x^2 + 2x = 0$, qui a deux racines simples $y = 1$, & $y = 2x$, en général $y = Ax$. Donc $b = 1$. En menant des droites parallèles à la déterminatrice par tous les termes de l'équation $\dots$

• 46 Ce 3 non Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 25.42% accurate

206 VELA METHO D E Ch. vn. tion, on voit quelle est composée de trois ordres. Le 1^{er} premier, qui contient les termes a^2y , s^2x par lesquels passe la déterminatrice, a 2 pour son exposant, parce que cette droite coupe la première colonne au centre de la Case 1. Le second renferme les termes V^2 & T son exposant est 4, parce que la droite qui passe par les Cases j & xy vient couper la première colonne au centre de la Case x . Et le troisième ordre, qui est composé des termes $2x^2y$ & $6x^7$, a, par une raison pareille, 7 pour son exposant. On reconnoitra également bien ces trois ordres, & leurs exposants, en substituant dans l'équation au lieu de y la valeur $Ax^2 = zAx$ ce qui la change en $6x^7 - 2Aix^2 - y^2Vx^2 + 4Aa^2x + 2Sxx - iAs^2xx + A^2afx = 0$, où l'on voit clairement que les deux premiers termes sont de l'ordre 7, les deux suivants de l'ordre 4, & les trois derniers de l'ordre 2. Comme on veut une Série ascendante, on ôtera le plus petit exposant 2 des autres 4 & 7, & on aura les différences 2 & 5. On cherchera donc les nombres compris sous l'expression générale $b^2 + rjn^2 + jp$ ou $1 + \frac{2}{4} \cdot 5$ en posant 1 [h], lui ajoutant les multiples de 2 [u], & ajoutant, à tous ces nombres les multiples de 5 [p]. On aura 1, 5, 7, 9, 11, &c. 6, 8, 10, 12, 14, 16, &c. 16, &c. 21, &c. qui, rangés selon leur grandeur, font, 1, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, &c. La forme de la Série fera donc $y = Ax + Bx^2 + Cx^4 + Dx^7 + Ex^9 + Fx^{10} + \dots$ Qu'on substitue cette valeur de y dans l'équation, & on aura $6x^7 =$

The text on this page is estimated to be only 10.62% accurate

DES SERIES. 207. Ch. Vil $6x^* = s . ; + 6xr - 2xfyy = s zAlx^* \#$
 $-éc - aaxy = aWx^* 2a > ABx6 \# 24MCx \ll \_ éV -f.* \ll 3x^{\wedge} = 4-44l^{\wedge}x^* + 44!2?x^*$
 $* + ^Cx^* + \&c. \bullet + -245XX = 24 'xx - Safxy = - J4j^{\wedge}xx - 345Sx + 545Cx \ll$
 $34^*ZV - - ^Ex^* + \&e. A'xx + 2^{**} ABx^* + 2^*iACx < + -2^*iADx -$
 $> + 2^{**} AEx\% + \grave{U}c. -H4'51x'' -f- * + 2A > BCx^* - \backslash - \grave{a}c. En égalant$
 fucccfllvcment chaque terme à zéro , on aura ces équations $2a1 -$
 $ia\%A + * \$AA - o, \text{ ou } AA - 3^{\wedge} + 2 = 0 SA + ^A - ta'B \gg b2asAB = o, \text{ ou }$
 $AA = \pm A = (2a^*A - \text{ ou } 2^{\wedge}5 - 4B aaBB = (2aaA - iaa) C 6 - iA^* -$
 $\hat{M}\%D^*k2a\%AD = o, \text{ ou } 2AA - 6 = (2aaA - \$aa) a^* D - 2^*\%AC -$
 $alBi + ^C - \hat{i}siE + 2a > AE > \grave{I}2a 244V\hat{I}^{\wedge} 4 4 a^* r 2AB^{\wedge} - 4B \sim - aBt\_is r 16^* V "3 I \bullet$
 $. - - L - - - - , 244y\grave{i} 34^{**} 4^* D g / \_ 4 n a + S. - ^aaA - iaa ^ - S' ''$
 $' S E 2AC^{\wedge}BB.^{\wedge}C - ?aBC m 112 II$ Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 21.58% accurate

208 DE LA METHODE >Hu''' Il y a deux Séries afeendantes
 $y = x + \frac{1}{2}x^2$ Exemple 2. Soit propofe'e l'éq : $x^7 - a^1 x^j$
 $4x^{41} - 45xy^4 - s^*x^{ss} = 0$, d'où Ton demande de tirer la valeur
d'y en x par une Série attendante ? On mettra cette e'a : fjr Je Tr : anal : &
on cherchera les déterminatriecs inférieures. Il n'y en a qu'une, qui donne
l'éq : $a^2 y^2 + 2xy + x^2 = 0$, ou $yy - 2xy + xx = 0$, qui a deux racines
égales, ou une (èule racine double $y = x$. Il faut donc [§. 102, 108]
fubftituer $x + u$ dans Pe'quation propofée, & elle le réduira à x^7
 $\frac{1}{2}x^2 + x^2 + u^2 = 0$, qu'on mettra aufst (ur le Tr : anal : Elle y
a deux déterminatrices inférieures, x1 dont l'une donne l'éq : $\frac{1}{2}x^2 + x^2 = 0$
ou $x^2 = 0$; * # . . . * . * * * / ■ * 1 y . x* & l'autre
donne $\frac{1}{2}x^2 + x^2 = 0$, ou $x^2 = 0$ — L'un & l'autre expolant d'x furpaflê le
précédent : ainfi ces deux déterDigitized by Google

The text on this page is estimated to be only 19.37% accurate

BE S SİRİEF. iop dominatrices font utiles. Mais il fuffit [§. 108] de con- Ch. vu. fidérer la premiérc, qui donne $* = \text{---}^{\wedge} = \text{---}^{\wedge} jC \gg \text{eft} \_ \text{à-dire } * = 3$, & $\text{---}^{\wedge} = \text{---} \sim$. En fubftituant ytfx', ou Cmplement x', dans iëq: $x' + \text{---}^{\wedge} + \text{---}^{\wedge} Va' + rfWss o$, elle fe change en $x7 + *V + *V = o$, où Ton voit trois ordres de termes, dont les expofants font 6, 7, 8, & les différences i, 2. Comme la plus petite divife la plus grande, la fuite des expofants d'x fera la progr: arith: j, 4, 5, 6, &c. dont Je premier terme eft 3 [b], & la différence 1 [>]. La forme de la Série fera donc $* = Ax* + Bx* Hh Cx\ll + \text{---}x < \text{tfv. \&}$ cette valeur d'x fubftituée dans l'équation donne $-x7 = \text{---} \bullet +. x7 + * \gg xV = 4 - JA x* + 2* > ABx > + 2* > ACx,^{\circ} + \&c; -h^{\wedge} BBx'^{\circ} - \text{---} \&c.$ $\text{---}^{\wedge} \text{smt} = \text{---}^{\wedge} Aixt + 2AiABx7 + 2*iACx* + 2AsADx* + 2AiAExlo - \{ - \&c. + 4 \gg CCx \} > + cV < -$. D'où Ton tire, en égalant chaque terme à zéro, $m > A + *'AA = o \text{ : . c'eft-a-dire }^{\wedge} a - \text{---}^{\wedge} ou^{\wedge} i + JB + \text{---}^{\wedge} AB^{\wedge} o \text{ . . ; . . . ; a } \text{---} \text{---} 2? = \text{---} - I$ "W* 444 «, $C + 4'^{\wedge} 4 - 24'^{\wedge} C + 4'flB = 0 \text{ . . . } I C \text{---} - JD + 24^{\wedge} + a4'^{\wedge} D + ;u'5C = 0$. . . $D = \sim \text{---} Dz = \text{---} \sim i JE + \text{---}^{\wedge} A\text{Ç} + SBB + \text{---}^{\wedge} AE + \text{---}^{\wedge} BD + t'CC - o, \text{---} E \text{---} \text{---}^{\wedge} E \text{---} \text{---}^{\wedge} htrod. 4$ İJbmtfk des Vgncs OmUu D d Aînfi

The text on this page is estimated to be only 19.15% accurate

aïo DE L'A MEJH'ODE Ch. vu. Ainfî * s'exprime par deux Séries , à chacune defquellcs ajoutant x, on aura ces deux valeurs d>, y=x — -- ~fX* , , 2X6 , 7X7 , Q X* 5CJ SX* ? + + > & — ? — 3» — 7 — ^ &c. Cette dernière eft précifément celle qu'auroit x* donne la déterminât rice dont l'équation étoit u = — ~{ . Car , en fubftituant x4 à » dans Péq; x7 + «V«+«'xV 4"*** — o, on la change en x7 -+- *V 4* d1jrl, + 'V = o , où l'on voit trois ordres de termes dont les expoïants lbnt 7,8, 10. Les différences font donc 1 , \$, & comme la plus petite divifê la plus grande , la fuite des expofants d'x cfl 4 , 5,6,7, &c. & la forme de la Série y = Ax*>i< Bxs 4- Cx6 &c qui, par la détermination des X* Xi 2X6 AX7 coefficients fe convertit en — — : ; — ■ — &c. a* a? as a Ainfî cette déterminarrice ne donne que- la féconde des deux Séries qu'avoit fourni l'autre. Exemple 3. On demande une Série dépendante , qui donne la valeur d'y en x tirée de cette éq : x1 y 4* 3*x1yi 4- \$alxy + alxx a?xy a*x-\- a? = o. L'ayant mile fur le Tr : anal : on ne lui trouve qu'une déterminarrice fupérieure qui donne Péq : x'y1 +j«y + ?*Vy 4**V = 0 , ou , divifant par x1,/ + ^ayl i*ly 4-* ==0 dont la racine unique, mais triple, eft y — a. On fubftituera donc a + u à y dans l'équation propofée , & on la transformera en xxu% — a?xu 4- *5 =0. Celleci , mife fur le Triangle , a deux déterminatrices fupérieures, dont Tune donne x1 «' — x«=o, qu u a Ht^J15c-;i & l'autre —*'x« 4-4' =0, ou u — Jx — H fùflîra d'employer la première 108] , qui donne Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 20.21% accurate

DES SERIES. 211 * = — i ; fcfubftituant x — i:" à «dans la transformée, ch.vil Si», • * * * * • • • • • * * • • • * • • • • • on la changera en x,i — «V:,+4V ro, où il n'y a aue deux ordres dont les expofants font i & o. Il n'y a donc qu'une différence i ; la fuite des expofants eft — k , — i , — |, — 2 , &c. & la forme de la Série $Ax \sim 1 \cdot 1 \cdot Bx^{-1} \cdot Cx^{-2}$; 1 tfv. Cette Série fubihtuée à », xVaytfxV iAABx"*. iAA&r*+ iAAD*r 1 + 3AAEx"i^-&cm + \$ABB +6 ABC +6ABD >hlACC + Bl +sBBC -a'xuzz- a1Axtr-SBx*—a>Cx-~*—a,Dx'-1 —tfv. donne ces équations $A \sim *'A=o$ c'eft-à-dire $A \sim ^a^..ou A=o$ zAAB — MiB*ai = o B — — {aa. . . B — *s 3AAC+iABB—alC=o . . . C=^=|«Tî' .. C=o S A AD + 6ABC+B1 — a'D = o . . . D~ — ia% ...D—a\ 3 AAE+6ABD+1 ACC+iBBÇ-SE^ . £= rfcgj*'4' . . . E= o &e &c &c On a donc trois Séries dépendantes qui donnent la valeur d'« en x t fçavoir, u = aVt x~~ lU — {aax~ ' — \ai:t x-' 1 — ia'x-1 + î£*71x— j:i * Dd 2 — L Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 15.17% accurate

2J2 DE LA METHODE \$ U1- & u^ aax-1 +al x-1 &c. Cette dernière est justement celle qu'auroit donnée, un peu plus facilement, la féconde déterminatrice qui donnoit tt^{***} Car $* \sim \ll$ substitué à $*$ dans l'éq; $x^{**} - j x m + a < 0$ | a change en $x - ' - S - f *' = o$: ce qui manifeste deux ordres, dont les exposants sont $- i$ & o . Il nVa donc qu'une jaerence i , & la forme de la Série est $Ax \sim 1, t^!$, " $I^T.$ $+ Dx \sim 4$ & t . valeur qui étant substituée à $*$ dans l'équation, $* V = A'x - l + i AABx - l + s AACx - * + 3AADx \sim * Wa - f - 3ABB - f - 6ABC$ donne ces équations ' f.T. $= 7^\circ * = 5^\wedge - 'C = o$, . $m . c - ^ \% 3^C - t - \} ABB - \dots 1? = 10^\wedge$ Donc $*1 1 4, x - 1 4. ? 44 x - , + IQ M, x_4 + 45 > * x '$ Ainsi la valeur cherchée d> en x s'exprime par trois Séries détendantes, $y^{m+m^t} - tl *' . io 5 *' . "$,, $x^* 8x^\wedge - SB^\wedge ^{'+} + 4 + *' + \sim + \sim 113$. AjoûDigitized by Google

The text on this page is estimated to be only 25.82% accurate

DES SERIES. *aj* Ajoutons une Remarque, qui fervira dans la c». vn. fuite. On a vu [§. 1 10] que quand la Série est régulière, *' 11 J* c'est-à-dire , quand on fait usage d'une racine simple de l'équation que fournit la déterminatrice, la différence [»] L des exposants d' x dans le premier & le fécond [A x , B x n] termes de la Se'rie est égale à la différence des exposants [mtm + n] du premier & du fécond ordre des termes de l'équation. Il n'en est pas de même d'une racine^y — Ax =o qui feroit multiple. Si le degré de sa multiplicité est j , c'est-à-dire, si y — Ax divise j fois la somme des termes du premier ordre m , pourvu qu'elle ne divise point la somme des termes du fécond ordre m la différence h — \$ des exposants du premier & fécond terme de la Série Axh + Bx' , &c. sera égale à * , qui est la différence n des exposants des ordres m , & m ^zn divisée par j , de sorte que, dans le fécond terme, l'exposant d'x sera [fsJJqp^-. h Car puisque y~Ax —o est une racine dont le degré de la multiplicité est j , quand on aura substitué Axh >bf* il manquera, à la transformée, les termes qui devraient être aux points où la déterminatrice coupe les > premières colonnes [§. 107] , c'est-à-dire, les termes m m — b m — ih 2 . _ , m — ik j x » * «> x u 9&c. jusqu'au terme x * 9 qui se trouvera à l'extrémité de cette première déterminatrice. C'est donc de ce terme que part la féconde , qui portera sur le premier terme du fécond ordre xW=p* , Dd 3 dont

The text on this page is estimated to be only 27.53% accurate

m 214 DE LA METHODE Ch. VII. . , ^ _ /, f.u}. dont la Caſc ne
fera pas vuide, puifque $y - Ax$ ne divi(c pas la Ibmme des termes du
iècond ordre. Ainſi l'équation, que fournit cette féconde déterminatrice , eſt
de cette forme $x^{TM} \sim jhuJ = Bj x^{TM\wedge}$, ou $J B\}xm \sim * \sim n$ m foit $u - Bxh * \pm /$.
L'expofant du fécond terme eſt donc $b^{\wedge}z^{\wedge}$. Cette Remarque fèrt à difcerner
, fans calcul , ſi une Série qui a fon premier terme re'cl , n'eſt point demi-
imaginaire ; dans le cas où la racine $y - Ax - o$, qui donne le premier
terme , divifant plus d'une fois les termes du premier ordre m , ne divife
point ceux du fécond m $z\zeta m$; ce qui eſt un cas afle* ordinaire. Alors ſi j ,
degré de la multiplicité de cette racine , eſt un nombre pair , & « •
différence des expolants des ordres, un nombre impair; le fécond terme
 $[Bx^* \blacksquare = * = -]$ de la Série eſt à demi imaginaire [§. 95] : il eſt lurcment
réel, ſi / eſt impair ; mais n Se j étant tous deux pairs, il fera ou réel ou
imaginaire , lèlon que les coefficients des termes $x "$ auront ou différents
lignes ou même ſigne[§.9s]. Or c'eſt de ce fécond terme qu'il dépend que la
Série foit réelle , ou imaginaire , en entier ou à demi. Car l'équation qui
donne ce terme , dans le cas dont nous parlons , n'ayant que deux termes ,
n'aura point de racines multiples. Ainſi dès-lors la Série eſt régulière , &
tous fès ter" dès le troiftème font réels [§. 109]. Nous renvoyons à donner
des Exemples pour éclaircir & confirmer cette Remarque , lorſque nous
aurons occaſion Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 28.79% accurate

DES SERIES. aie fion de Pappliquer. [§§. 138. Ex. III. 141. Ex. II &c.] Il est tems de faire usage de tous ces Principes pour la recherche des Branches infinies des Courbes. Nous paflè- q rons enfuite à Pexamen des Points finguliers. CHAPITRE VI IL Des Branches infinies des Courbes. 114. T TNE Branche infinie de Courbe s'eloigne infiniment ou de l'Axe des ordonnées , ou de l'Axe des abfciffes , ou de l'un & de l'autre. Les Branches A , a Pl-Ix« s'éloignent infiniment de l'Axe des ordonnées , mais non f*" "*" pas de celui des abfciffes . • auflî leurs abfciffes infinies ont - elles des ordonnées finies ou même infiniment petites. Les Branches infinies B , b s'éloignent infiniment de l'Axe des abfciffes , & non de celui des ordonnées , parce que les ordonnées infinies ont des abfciffes finies ou infiniment petites. Et les Branches infinies C , c s'éloignent infiniment des deux Axes ; les abfciffes infinies ayant des ordonnées infinies , & réciproquement. On trouvera donc les Branches infinies d'une Courbe T en cherchant quelles ordonnées répondent aux abfciffes infinies , & quelles abfciffes répondent aux ordonnées infinies : Ou en examinant ce que devient l'équation de la Courbe par la fupposition d' x ou d' y infinies [§. 92] : Ou encore, en cherchant le premier terme des Séries descendantes qui donnent la valeur d' v en x , ou d' x en y [1 02]. Car tout cela n'est qu'une même chofe. » 1 5. Mais le premier terme de la Série ne fuffit pas toujours pour s'aflurer de la nature , & de la pofition , ou Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 24.73% accurate

»i6 DES BRANCHES INFINIES Pu ne. ou même de l'existence ,
des Branches infinies : il faut Ch.v:il fouvent aller plus loin , & calculer un
certain nombre de 11 ^termes de ces Séries. Pour être plus bref & plus clair,
je fupposèrai qu'il ne s'agit que d'une Série dépendante qui donne la valeur
d'y en x . Rien de plus aisé que d'appliquer ce que pen vais dire à une Série
qui donneroit la valeur d'x en y. Dans la Série dépendante $Ax^4 + Bx^3 - Cx^2 + Dx + \&c.$ les expofants b, / , k, / , &<. vont en diminuant , de forte qu'à
(ûppofer x infinie , chaque terme eu infiniment plus petit que celui qui le
précède : & à fupposer feulement x extrêmement grande , chaque terme eft
beaucoup plus petit que celui qui le précède, & beaucoup plus grand que
celui qui le fiiit [§. 99] . Chacun de ces termes exprime l'ordonnée d'une
Ligne , Droite ou Courbe , dont les équations , [en nommant x rabfciflè
commune, », / , s9&c les ordonnées] feront $y = Ax^4 + Bx^3 - Cx^2 + Dx + \&c.$
l'ordonnée T de la Courbe propofée étant égale à y + u Si cette Série j +
« 4. / 4. j , eft imaginaire , l'abC ciflè infinie a , dans la Courbe propofée ,
une ordonnée imaginaire , & la Branche infinie que devroit défigner cette
Série eft imaginaire. Et fi toutes les Séries dépendantes que peut fournir
l'équation d'une Courbe font dans le même cas , cette Courbe n'a point de
Branches infinies. Or un feul terme imaginaire rend la Série entière
imaginaire. Si la Série y + + / &c. eft à demi-imaginaire [& pour cela il
fiiffiit d'un feui terme qui le foit] , des deux ablciflès infinies , la pofitive &
la négative , l'une a une ordonnée réelle , l'autre une imaginaire. Et fi
l'équation Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 28.27% accurate

DES COURBES. 217 Cn. vin. ne fournit point d'autres Séries , la Courbe n'a des Bran- Pu ix. j. iij. cnes infinies que d'un côté de l'Axe des ordonnées. Mais si la Série $y = x^2 + c$ n'a rien d'imaginaire , les deux abscisses infinies , la positive & la négative, ont des ordonnées réelles : la Courbe jette des Branches de part & d'autre de l'Axe des ordonnées. Une Série réelle indique ainsi deux Branches infinies , une du côté positif & une du côté négatif. Pour savoir donc précisément le nombre des Branches infinies d'une Courbe , il faut compter au juste le nombre des Séries, réelles & demi-imaginaires, qu'elle peut fournir ; & dans ce compte une Série qui se fourche en deux, trois , quatre , ou &c. fait deux , trois , quatre , ou &c. Séries. Ainsi il est nécessaire de calculer , au moins , tous les termes irréguliers de chaque Série , pour être sûr que la Série ne se fourche plus , & n'a plus de termes imaginaires , ou en entier , ou à demi. Mais dès qu'on est venu aux termes réguliers, la pluralité des racines & les racines imaginaires ne (ont plus à craindre. Il n'est presque pas besoin de connaître ces termes réguliers : du moins il suffit d'en calculer quelques-uns des premiers suivant le but qu'on se propose dans son Calcul. 116. La Série $y = x^2 + c$ étant réelle ; si elle est positive , l'ordonnée de l'abscisse infinie est positive : elle est au contraire négative , si la Série est négative. Et comme le premier terme de cette Série est , lui seul , infiniment plus grand que tous les autres , x étant infinie , c'est le signe de ce premier terme qui décide de quel côté de l'Axe tombe , à l'infini , la Branche que désigne cette Série. Si le premier terme y , ou Ax , conserve son même bitroisième. à l'Analyse des lignes Courbes. E e signe, Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 22.20% accurate

DES BRANCHES INFINIES fc.ix. figne, foît que l*ab(cilè x ait le figne Hh ou le figne — -, Cv.vik les deux Branches de la Courbe , qui s'étendent Tune du §• côté des abfciflès pofitives , l'autre du côté des négatives , ces deux Branches, dis -je, tombent d'une même part de l'Axe des abfciflès ; elle fe jettent dans les angles de fuite des ordonnées de même figne. Mais fi le changement de en — x change le figne du terme Ax de 4[^] en — ou de — en , l'ordonnée de Pabfciflè infinie pofitive a un figne contraire à celui de l'ordonnée de l'abfciflè infinie négative : les deux. Branches infinies (c jettent dans les angles oppofés des coordonnées. La Série y -f u + / +/ &c. étant demi - imaginaire , on jugera par le terme , ou par les termes , demi-imaginaires , de quel côté de l'Axe des ordonnées tombe la Branche qu'elle défigne , & par le figne HH ou — du premier termes Ax de quel côté de l'Axe des abfciflès elle tombe. On faudra donc dans quel angle des coordonnées (è jette finalement cette Branche. Mais fi la Série a plufieurs termes demi -imaginaires » qui foient tels qu'ils donnent Pexclufion aux Branches infinies , les uns du côté des abfciflès pofitives , & les autres du côté des abfciflès négatives : la Courbe n'a alors aucune Branche infinie , non plus que fi (à Série étoit entièrement imaginaire. 117. Il paroît de - là que pour (e faire une juſte idée d'une Branche infinie de Courbe repréfentée par la Série Ax + Bx >f. Cxk 4< Vx + &c. il faut cormoître les Ugnésque repréfentent les équations y=[^]Ax >u — B>x Ce font des Hyperboles , quand les expofants h , i , &*. font Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 23.28% accurate

DES COURBES. *io CH-vrn. font négatifs. Ce font des Paraboles, quand ces exposants $p^* \cdot X \ll \% - t l 7^*$ font pofitifs. Arrêtons-nous un moment à confiderer ces deux fortes de Courbes. ii 8. On nomme Hyperbole la Ligne courbe du fécond Ordre, dont la nature eft exprimée par l'équation $y = \frac{a^2}{x}$, ou $xy = a^2$. Il eft aile d'en déterminer tant de points qu'on voudra. Soit A l'origine, AB l'Axe des absciffes, A D celui des ordonnées. On voit d'abord que l'absciffè AB = i aura une ordonnée BC = a, parce que OC Yéq : $y = \frac{a^2}{x}$ donne $jy = a^2$ quand $x = i$. De même l'absciffè A b = c aura l'ordonnée b c = i, parce que m Vèq : $y = \frac{a^2}{x}$ donne $y = \frac{a^2}{c}$ quand $x = c$. On a donc d'abord deux points C & c de l'Hyperbole. Pour en avoir autant d'autres qu'on voudra, on prendra une absciffè quelconque A P, & on lui donnera l'ordonnée P M quatrième proportionne à AP, AB, & BC; ce qui s'exécute aifément en prenant fur le prolongement de l'absciffè A P une partie P égale à A B [i], & menant par les points Q & C la Droite QC qui coupera l'ordonnée P M au point M. Car les triangles (émbellies QPM, QBC donnent QJ ou AP [x]:BC[a] = QP [i]: V M[y] Donc $y = \frac{a^2}{x}$. Où l'on peut remarquer que chaque absciffè n'a qu'une feule ordonnée, parce que dans l'éq : $xy = a^2$, la variable y ne monte qu'au premier degré [§.41] • Cette conftriiction s'abrège, en confiderant que puifque PQj = AB, auffi QJV1 = C q. Ayant donc le point C de l'Hyperbole, on en trouvera tant d'autres qu'on voudra en menant par C tant de Droites qu'on voudra r,g' 7e Ee 2 QCq,

The text on this page is estimated to be only 29.72% accurate

220 DES BRANCHES INFINIES IX. QC ($j^{\wedge}RCr^{\wedge}Cs$, &c.
 terminées aux deux Axes A B , Ch.viil Au des coordonnées. Et fur chacune
 de ces Droites on \$*118* prendra $QM = Cq$, $Rm = Cr$, $S/a = Cs$, &c. ou
 $qM=CQjrm = CR$, $s/u=CS$ &c. & on aura les points M , m , /* , &c. de
 PHyperbole. On trouvera par ce moyen un grand nombre de ces points , par
 lcfcuels on tracera allez exactement une Hyperbole. 71. 1 19. Plus rabfciflc
 AP augmente , plus l'ordonnée PM diminue. Si AP eft égal à $2=2 AB$, PM
 eft $J\ll t=iBC$. Si AP vaut $\$ = \$ AB$, PM eft ;a = ;BC, & ainfi de fuite. Donc la
 Courbe aproche toujours plus de PAxe des abfcuTes, mais l'ordonnée ne
 devient jamais nulle ou zéro. Quand AP feroit un million de fois plus grande
 que AB, PM feroit un million de fois plus petite que BC , très petite par
 conféquenc , mais non pas nulle. La Courbe CM F s'aproche donc toujours
 plus de la Droite ABP & ne l'atteint jamais : c'ell ce que fignifie le nom
 \$Afymptote , au'on donne à cette Droite. Plus PabfcKTe A p diminue , plus
 Pordonne'e p m augmente. Si Ap eft égale à $\hat{i}AB$, pmeft $\text{---} = 2\gg == 2 BC$.
 StApvaut $\wedge AB$, pmeft $3*=\$BC$,&c. Et lorfque A p devient nulle , quand le
 point p tombe fur l'origine A > l'ordonnée devient --- , c'eft- à- dire , infinie.
 o Donc la Courbe C m E ne rencontre PAxe des ordonnées A D qu'à l'infini.
 A D eft donc une autre Afymptote de l'Hyperbole. En effet , fi l'on confidère
 que $Pe'q : xy = *$ donne $* = y$ » auifi bien que $y = \sim\sim > on$. comprendra
 d'abord que ce qui a été dit des y fe peut dire également des *. L'Hyperbole
 a donc deux Afymptotes , qui font fes deux Axes. 120. Si Digitized by
 Google

The text on this page is estimated to be only 25.15% accurate

DES COURSES. 321 Olviii. 120. Si l'on prend des abscisses négatives Ap, leurs Paires. ordonnées pm font aussi négatives. Car est une grandeur négative. Du reste > il en est des abscisses & des ordonnées négatives, comme des positives. L'éq : $xjk = *$ fait voir que l'origine A est un Centre [§.76]. La Courbe complète a donc deux parties égales & semblables EMF, emf, dans les angles opposés DAB, bAd des Asymptotes, de quels angles ces Branches ne (tiennent pas, & par conséquent ne (se rencontrent point Tune l'autre. Les Anciens, regardant comme deux Courbes ces portions détachées, les nommoient les Hyperboles opposées. Les Modernes les comprennent toutes deux sous le nom d'Hyperbole, parce que ces deux parties ne font qu'une seule Courbe, exprimée par une seule équation irréductible $y = \sim$, ou $x > =$ « [§. 21]. Ici. H n'en est pas de même des Hyperboles conjuguées, àg-ns C'est le nom qu'on donne aux Hyperboles EM*, tiu? de'crites dans les angles DAb, BAd des coordonnées de signes contraires, telles que réunies avec les précédentes EMF, emf, chaque abscisse AP, Ap, positive ou négative, a deux ordonnées égales PAZ, PM, ou p#e, pm, Tune positive l'autre négative; & réciproquement que chaque ordonnée AQ^, Aq, soit positive soit négative, ait deux abscisses Q^A/, Q^fe, ou q M, q m, l'une positive, l'autre négative. En sorte que les deux Droites b B, D d, font en même tems des Diamètres & des Contre - Diamé" très [§ §. 70 & 7 j]. Comme l'équation des deux Hyperboles EMF y emf est $y = -x$, ou $*y = -x$, celle des deux autres EMG, #f*

The text on this page is estimated to be only 20.32% accurate

122 DES BRANCHES INFINIES pl. ix. & = o. L'équation qui
repréfcnte les quatre parties des Cn.vm. Hyperboles conjuguées fera donc
xjy1 — «* = o , pro- *,t,r duit de ces deux éq : xy — -* = o , *>>4<

The text on this page is estimated to be only 24.34% accurate

I DES COURBES. Cn.vni. & = 2 = / , l'équation est $y' \sim \ll x \sim 1$, ou $xy = a$ Pl. ix. S- du quatrième Ordre ; mais on a vû [§. prée.] qu'elle peut se réduire à deux équations du fécond Ordre. Cette gradation des Hyperboles peut aller à l'infini , & toutes les suites de ces Courbes représentées par l'équation générale $y' = ax^k$ ou $y = Ax^k$ s'appelle la Famille des Hyperboles , Pufège des Géomètres étant d'appeler de même famille * les Courbes dont les équations ne diffèrent que par les exposants de x & de y . Toutes ces Hyperboles ont leurs Axes pour Asymptotes à l'infinité. Car dans l'éq : $yz = zAx^m$ * infinie x rend y infiniment petite , & x infiniment petite rend y infinie [§. 78. 79 J. D'où Ton conclut , comme pour l'Hyperbole (impie [§. 119], que la Courbe s'approche d'un côté infiniment de l'Axe des abscisses en s'éloignant infiniment de celui des ordonnées ; & que de l'autre côté elle s'approche infiniment de l'Axe des ordonnées en s'éloignant infiniment de l'Axe des abscisses. 123. La Parabole est une autre Courbe du fécond Ordre , dont l'équation la plus simple est $y = x^2$, ou $y = xx^2$ en prenant m pour l'unité. Les ordonnées $[y]$ sont donc proportionnelles aux carrés $[xx]$ des abscisses. D'où il suit que la Courbe A E va en s'éloignant à l'infini - Kg. 7+. ni de l'Axe AD des ordonnées & de l'Axe AB des abscisses , mais infiniment plus de celui - ci que de celui - là ; parce que l'abscisse AB ou DE $[x]$ étant supposée infinie, l'ordonnée BE $[y$ ou $xx]$ est infiniment infinie. Et puisque l'abscisse $[x]$, positive ou négative, a son carré $[xx]$ * Wolffii Analyf. §. 385. i Digitized by Google

32* DES BRANCHES INFINIES pl. ix. [**] positif, l'ordonnée [y ou xx] (èra toujours positif - Ch.viii. tivo. La Parabole jette donc, dans les deux angles des ordonnées positives, deux Branches infinies AM, Au, avec lesquelles elle embraille, pour ainsi dire, l'Axe des ordonnées AD, à la direction de laquelle la Courbe approche toujours plus de devenir parallèle, sans y parvenir néanmoins qu'à l'infini. Car on peut concevoir la Parabole comme décrite par le concours de deux mouvemens, l'un de la Droite AD, qui toujours parallèle à elle-même glisse le long de AB, l'autre d'un Point A qui s'avance sur cette Droite mobile AD de A vers D. Le mouvement de la Droite AD (èra supposé uniforme, les espaces parcourus Am, An, Ap, Aq, Ar, &c. étant proportionnels au tems que la Droite employée à passer de A D en mb, nD, pD, qD, rD, &c. Le mouvement du Point A sur la Droite AD fera supposé accéléré. D'abord infiniment petit, il augmente continuellement selon la raison des carrés, en sorte que les espaces m M, nN, p P, qQ, rR, &c. décrits dans les tems proportionnels à Am, An, Ap, Aq, Ar, &c. sont comme les carrés de ces tems. Dans cette supposition, il est clair que la direction de la Courbe, c'est-à-dire, la direction du Point qui la décrit, participe de lès deux mouvemens; l'un par lequel il s'éloigne de A B en coulant sur la Droite AD, l'autre par lequel il s'éloigne avec la Droite AD de la première position de cette Droite mobile. Et l'on voit que, de ces deux mouvemens, le second, qui est uniforme & fini, surpasse d'abord infiniment la vitesse naissante du Point A sur la Droite AD; ce qui fait que la direction de la Parabole à son origine est comme parallèle à AB, ou plutôt sur AB. Mais cette vitesse du Point A sur AD allant toujours en croissant, & s'accroissant suivant la progression des carrés $1 > 1 \gg 4 > 9 > 16 \gg$ &c. égale bientôt, & puis surpasse la vitesse de la Droite mobile AD; ce qui rend la direction de

DES COURBES. 22\$ Ch. vin. de la Parabole moyenne entre celles des Droites AB, Pl.ix. §. i»5- AD: mais elle gagne toujours de plus en plus vers la Direction A D , au paralléiifme de laquelle elle tend , & parvient à l'infini , parce qu'à l'infini le mouvement du Point A félon AD eft infiniment plus vite que le mouvement de la Droite A D félon A B. Au refte , ce que nous venons de dire de la Branche A M doit s'entendre également de la Branche Af« , qui lui eft pareille , & même é^ale & femblable fi A D eft perpendiculaire à A B. 124. Il y a plufieurs manières de décrire la Parabole , & de trouver géométriquement autant de lès points qu'on voudra. En voici une aflez fimple , & qui a l'avantage de réuflir auffi bien quand les coordonnées font entr'clles un angle oblique, que quand elles (ont perpendiculaires l'une à l'autre. Sur l'Axe des abfcîfles A C , prenez dès l'Origine A Ftf- 7Sune partie A C égale au Paramètre [c'eft le nom qu'on donne à la Droite confiante a qui règle la grandeur de la Parabole & que nous avons prile pour l'unité] , & menés CF parallèle à l'Axe des ordonnées AD. Cette préparation faite , fi vous voulez avoir l'ordonnée d'une abÊ cuTe quelconque Am[ou An, Ap, &c.] portez fur CF la longueur de cette ablciitè A m de C en /U. La Droite Af» retranche de mZ, menée par m parallèlement à AD, l'ordonnée m M , dont le lbmmet M eft un point de la Parabole. Car les triangles femblables AmM , ACpc donnent cette proportion $Am[x]:mM[^] = AC [*]. \bullet C/4$ ou $Am [xj$. Donc $<^*v=xat$ ou $^=\sim$, qui eft l'équation de la Parabole. Ayant déterminé par cette Confl tru&ion un grand nombre de points M, N, E,P, Qt&c. on tracera aifément la demi - Parabole AEQj & l'autre moitié A M fe décrira de même. Introd. a fAnalyfe des Lignes Courbes, F f 1 2 5 . On Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 25.74% accurate

226 DES BRANCHES INFINIES Pi. ix. «25. On voit par cette description que la Parabole n'a Ch.vii. point d'Asymptote, point de Droite, dont elle s'approche toujours sans l'atteindre jamais. Si on veut lui en supposer, il faudroit en imaginer deux parallèles à l'Axe A D, mais à une distance infinie de part & d'autre. Car il est vrai que les Branches A M, A M de la Parabole s'approchent toujours plus de ces Droites conçues infiniment éloignées, que leurs directions tendent toujours plus à devenir parallèles à celles de ces Droites, & qu'elles coïncident avec elles à l'infini, ce qui est le caractère des Asymptotes [§. 119]. Mais la distance infinie à laquelle on est obligé d'imaginer ces Asymptotes, ne permet pas de les tracer, ou de les aligner, ce qui élit dire que la Parabole n'a point d'Asymptotes. 126. La Parabole ordinaire, ou simple, que nous venons de définir, est, comme l'Hyperbole (impie, mère d'une nombreuse Famille. C'est celle de toutes les Courbes que représente l'équation générale $y = -\frac{p}{m}x^m$ ou $my^2 = x$, en prenant toujours p , qui est le Paramètre $>$ pour l'unité. L'exposant m peut être un nombre entier, ou rompu $[= y]$, mais positif; car s'il étoit négatif, l'équation feroit celle de quelque Hyperbole Si l'on se représente toute cette Famille des Paraboles, Rg.76. décrites sur les mêmes Axes AB, AD avec un même Paramètre $AC = 1$, on verra qu'elles ont toutes un même point commun E. Car à l'abscisse $[x] AC = i$, répond dans chaque Parabole une même ordonnée $[y] CE = 1$ puisque l'éq: $y^2 = x$ donne $y = 1$ quand $x = 1$. De plus, Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 24.77% accurate

DES COURBES. ' «7 c« vin. plqs , fi Pon compare deux Paraboles quelconques , on Pc 5. 116. verra'qUe celle qui a le plus grand expofant h a auflî la plus grande ordonnée , lorlque fable A P furpaffe l'unité ou le Paramètre A C , mais qu'elle a la plus petite ordonnée, quand PabfcifTe Ap eft moindre que le Paramètre , ou l'unité AC. Car (bit $y = x^h$ l'équation de la Parabole A m E M & y celle de la Parabole AiuEM [fl eft fupposé plus grand que h]. Donc , fi Ton prend une abfcifle commune [x] AP ou Ap, les ordonnées b H PAZ, PM, oupmâpiu font entr'elles comme x^h , x . Mais , fi x furpaffe l'unité , la puiffance fupérieure furpaffe l'inférieure x^h . Donc, quand [x] $AP > AC$ [i] » PM [xH] $> VM[xh]$. Et fi [Ap] x eft moindre que Punité [A C] , x eft une fraction , dont la puiffance plus élevée x [pu] eft moindre que la puiffance moins élevée/[pm]. » 127. Entre ces Paraboles (ê trouve la Ligne droite A E F , qui coupe en deux également l'angle D A B des coordonnées. Elle eft repréfentée par Péc : $y = x$, qui réfulte de la fupposition h m , ou $* = /$. Cette Droite eft moyenne entre les Paraboles AmE/V/, A u EM qui ont Pexpofant $h > 1$, ou $h > /$, & les Paraboles AnE#, AvEN, dans l'équation defquelles $b < t$ ou k

The text on this page is estimated to be only 28.99% accurate

228 DES BRANCHES INFINIES PUX- des abfciiTes. Car l'éq : $y=x^k$, ou $k > 1$, est la même CH/mque l'éq : $x=y^k$ ou $k < 1$. Prenant donc x pour y & y pour x , c'est-à-dire, changeant l'Axe des abfciflès en celui des ordonnées & réciproquement, la même équation représènte la Parabole A m E M & la Parabole A n E N qui font, Tune d'un coté, l'autre de l'autre de la Droite AEF. 128. Par ces Remarques on peut (e former une idée d'une Branche de Parabole, de auelque Ordre quelle (bit. Quoiqu'elles différent beaucoup des Hyperboles, ces deux Familles de Courbes font pourtant reprélentées par l'équa/ k v.l $k:l$ r. A h «on commune $y=ax$, ou $j = * x$ foit $y = Ax$ "[en prenant $A=a [1$, & Cette équation défigne des Paraboles, quand $^$ ou JL est positif Elle exprime des Hyperboles, quand cet expolant est négatif. Mais pour connoître le nombre & la position des Branches de ces Courbes, pour favoir dans quels angles des coordonnées elles fè jettent, il faut faire attention & au Paramètre «, qui peut être positif ou négatif, & aux expofants $^$, $/$, qui peuvent être pairs ou impairs. [§.95]. L Si k & $/$ font tous deux impairs, 'x puiflance impaire de x a le même figne que x . Donc $*x [=y$ } aura le même figne que x , fi $*$ est positif; elle aura un ligtf* contraire, fi « est négatif Et y , racine impaire $/ l$ k de y , ayant le même ligne que $y [= *x]$, aura le Pl.X. même figne que x , fi a est positif, elle aura un figne %• 77. contraire, ira est négatif Dans le premier Cas, la Courbe étendues Branches dans les angles DAB, bAd des coordonnées de même figne; & dans le fécond Cas, elle le& Digitized by Google

Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 29.45% accurate

> DES COURBES. Cm.vhi. tes a dans les angles DAB , BAd des coordonnées de $p^*.x$. f' différens signes. Dans l'un & l'autre Cas , les deux Branches font de part & d'autre des deux Axes. IL Si è est pair & / impair, x^* , puislance paire de xy est positive , quelque signe qu'on donne à x . Ainfi $*x^*$ [= /] est positive ou négative, félon que a est positif ou négatif : & y , racine impaire de y , est de même signe que a [= «**], c'est- à-dire, positive ou négative, félon que « est positif ou négatif Dans le premier Cas , la Courbe étend ses Branches dans les angles DAB, DAb Fii- rades ordonnées positives. Dans le fécond Cas , elle les jette dans les angles dAB , dAb des ordonnées négatives. Dans l'un & l'autre , les deux Branches font de part & d'autre de l'Axe des ordonnées , mais d'une même part de l'Axe des abscisses. III. Si k est impair & / pair, x^* , puislance impaire de x , aura le même signe que x . Ainfi « x^* [=== /] fera positive , si « & x ont le même signe ; elle fera négative , si les signes de a & de x font contraires. Et y , racine / k l impaire de y [= etx], (èra imaginaire, si y est négative ; mais elle fera réelle , & aura les deux signes »■ $\bullet$ & — , si y est positive. Donc y est imaginaire , lorsqu'e et & x ont différent signe ; & lorsque * & x ont le même signe, y a deux valeurs égales , mais l'une positive & l'autre négative. Ainfi , a étant positif, la Courbe étend deux Branches dans les angles de fuite BAD, BAd des abscisses positives : mais a étant négatif, la Courbe étend ses Branches dans les angles DAb, bAd des abscisses négatives. Elle est donc toute d'un même côté de l'Axe des ordonnées ^ mais elle se jette de part & d'autre de l'Axe des abscisses. F f ? IV. Enfin,.

Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 27.62% accurate

210 DES BRANCHES INFINIES ru x. I V. Enfin , fi k & / font tous deux pairs , la Courbe Ch.viii. est imaginaire , quand a. est négatif : mais elle a quatre f- ««• Branches réelles , une dans chacun des quatre angles des coordonnées , quand * est positif. Car x^* , puis Oance paire de x étant toujours positive , $*xk[=y]$ est négative , & y , racine paire de y , toujours imaginaire , lorsque a est négatif. Mais lorsque * est positif, $ax[=7]$ est toujours positive, & $y >$ racine paire de y , a toujours deux valeurs égales , une positive , une négative. Donc , * étant positif, chaque abscisse , (bit positive (bit négative, a deux ordonnées , une positive & une négative ; ce qui fait quatre Branches , une dans chacun des quatre angles Fig. 80. des coordonnées. 129. Toute Branche infinie, en s'éloignant de l'Origine , prend insensiblement la nature d'une Branche d'Hyperbole ou d'une Branche de Parabole. Elle en diffère peu à une grande distance; & elle se confond exactement avec elle à l'infini. De-là , toutes les Branches infinies des Courbes se divisent en deux Genres , les Branches Hyperboliques , & les Branches Paraboliques. Les Hyperboles , & par conséquent les Branches hyperboliques ont une Asymptote [§. 119], & les Paraboles & les Branches paraboliques n'en ont point [6. 125] : c'est là leur caractère distinctif. 1 \$0. Quand on a la Série $Ax + Bx^2 + Cx^3 + \dots + Vx^n + c$. qui exprime l'ordonnée d'une Branche infinie , il est aisé de connoître si cette Branche est hyperbolique ou parabolique. * Newtoh, Emaner, Un. tert. ordin. IL 5.

Digitized by Google

Fig. 77.

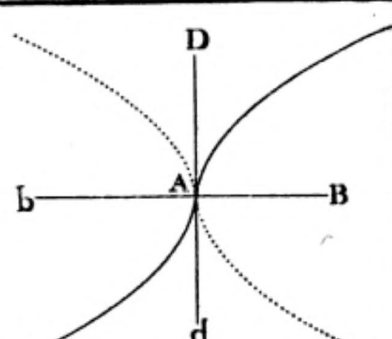
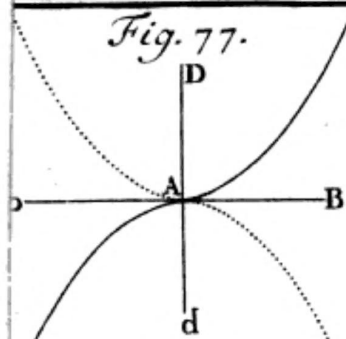


Fig. 78.

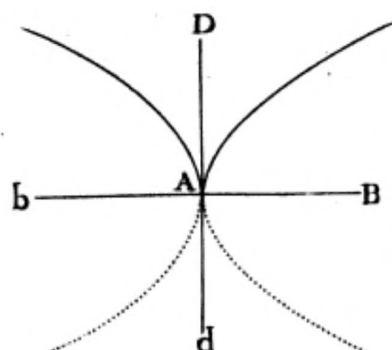
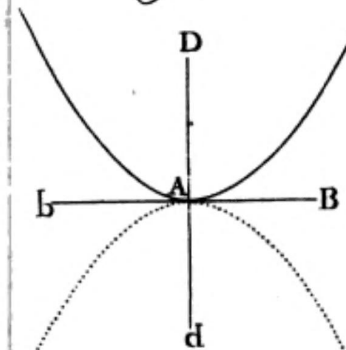


Fig. 79.

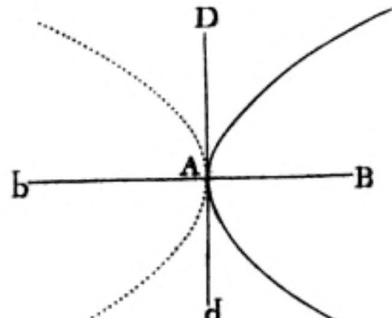
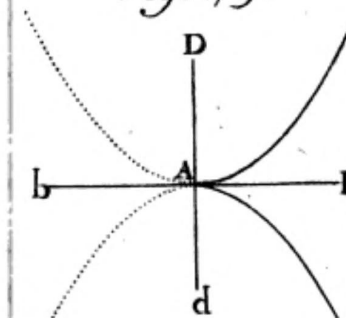
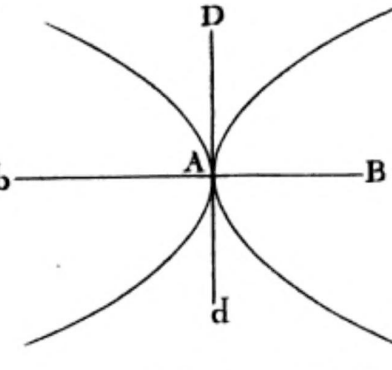
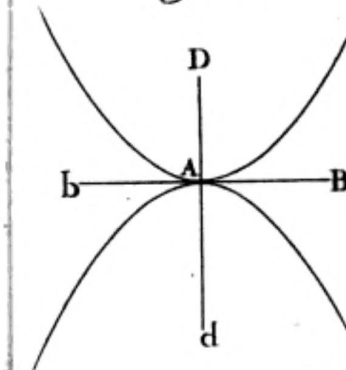


Fig. 80.



The text on this page is estimated to be only 1.00% accurate

Qitiz&a t

The text on this page is estimated to be only 26.71% accurate

DES COURSES. Ch. vin. lique. Qu'on prenne tous les termes de cette Série, où §. ijo. i'CXp0fânt de x est positif ou zéro, & que leur somme soit nommée v. Si la Ligne dont x & v font les coordonnées est une Droite, la branche de Courbe est hyperbolique & cette Droite est l'Asymptote. Au contraire, la Branche de Courbe est parabolique, si la Ligne dont x est M>fciflè & v l'ordonnée n'est pas une Droite. 1 3 1. Je dis i \ que si la Ligne dont x & v font les coordonnées est une Droite, la Branche infinie que représente la Série $v + \dots$ est une Branche hyperbolique, qui a pour Asymptote cette Droite. Car tous les termes suivants, où x a un exposant négatif, font une somme d'autant plus petite que x est plus grande [§. 99], & se réduisent à rien quand x est infinie. Donc l'ordonnée T de la Courbe approche toujours plus de l'égalité avec l'ordonnée v de la Droite, & lui devient égale quand x devient infinie : c'est-à-dire, que la Courbe approche toujours plus de la Droite & le confond avec elle à l'infini. Cette Droite est donc Asymptote [§. 119], & la Branche de Courbe une Branche hyperbolique [§. 129]. Afin que les termes v soient l'ordonnée d'une Ligne droite, il faut que x, dans ces termes, ne passe pas le premier degré [40]. Ces termes feront donc ou zéro, ou une constante B, ou Ax ou $Ax > \{ * B$. S'ils font zéro, c'est-à-dire, si x, dans le premier terme de la Série, a un exposant négatif; l'équation de l'Asymptote est $v=0$, ce qui désigne l'Axe des abscisses [§.40. III. ij Si les termes v se réduisent à JS, l'équation de l'Asymptote $v = B$ indique une Droite qui est Parallèle de l'ordonnée B [j.40. 1 1. §]. Si les termes v ne (ont que le terme Ax y l'éq : $vs=Ax$ donne pour l'Asymptote une Droite qui passe par l'Origine & qui est tellement inclinée aux deux Axes, que le Sinus de l'angle qu'elle fait avec les

The text on this page is estimated to be only 29.02% accurate

I 232 DES BRANCHES INFINIES tL.x, les abscisses, est au Sinus de l'angle qu'elle fait avec les ordonnées, comme A est à l'unité [§. 40. li. i]. Enfin, si les termes de la série font $Ax+B$, l'asymptote représentée par l'éq : $y = Ax + B$, est une Droite qui passe par l'extrémité de l'ordonnée B & de l'abscisse $-\frac{B}{A}$, faisant avec les abscisses & avec les ordonnées des angles dont les Sinus font entr'eux comme A à 1. [§. 40. 1 J. 132. Cette même Branche hyperbolique, qui a une Asymptote droite, a aussi une Asymptote courbe, ou plutôt elle en a une infinité. Car plus on prendra de termes de la Série, plus on approchera de la valeur de T. Donc si on décrit une Courbe, qui ait x pour abscisse, & pour ordonnée y avec un ou plusieurs des termes suivants de la Série, cette Courbe sera une Asymptote de la Courbe proposée, qui s'en approchera d'autant plus à l'infini, qu'on prendra un plus grand nombre de termes après y. Mais aussi l'équation de cette Courbe Asymptote devient d'autant plus composée. Ainsi, comme le premier terme des ceux qui suivent y vaut lui seul infiniment plus que tous les autres [§. 78], la Courbe, qui a pour ordonnée les termes y avec le premier terme qui suit, c'est-à-dire avec le premier terme de la Série où x a un exposant négatif, est proprement celle qu'on nomme l'Asymptote courbe de la Branche infinie représentée par cette Série: & cette Courbe est une Hyperbole. Soit A l'origine; AB, AC les deux Axes; AP [x] une abscisse; PM [T] l'ordonnée de la Courbe proposée Mm; PO [«] l'ordonnée de l'Asymptote droite BCO; PN + l'ordonnée de l'Asymptote courbe Nn [/est le premier terme de la Série où x a un exposant négatif; nous le supposons égal à Cx^k] : Je dis que cette Courbe Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 24.74% accurate

DES COURBES. ajj Cm.viii Courbe Nn est une Hyperbole, dont on peut regarder Pt. xi; §. ij». CO comme l'abscisse, & ON [/] comme l'ordonnée. Car les parallèles AC, PO donnent $AB : BC = AP : CO$. La raison de AB à BC est donnée, puisque l'angle BAC des deux Axes, & les côtés AB [—] & AC [B] du triangle ABC sont donnés. Que $\frac{AB}{BC} = \frac{AP}{CO}$, ou $B : K = A : CO$, exprime la raison de AB à BC. Donc $B : K = A : CO$, Ainsi l'abscisse z est, ou $x = \frac{a}{y}$, & l'ordonnée $y = \frac{b}{x}$. L'équation $xy = \frac{ab}{c}$ CB — $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$ / tion de cette Courbe Nn est donc $xy = \frac{ab}{c}$ ou $y = \frac{ab}{cx}$ qui est l'équation d'une Hyperbole le [§. 122]. La position des Branches de cette Hyperbole - asymptote est déterminée par le coefficient C & par l'exposant j du terme y^j [$= Cx^j$]. Si le coefficient a, à l'infini, le même signe qu' $\frac{1}{x^j}$, les Branches tombent, par rapport à l'Axe des abscisses, au-delà de l'Asymptote-droite : mais elles tombent en - deçà, c'est-à-dire, entre l'Axe & l'Asymptote, si l'on a l'infini des signes contraires. Quant à l'exposant j — y, si j & j sont tous deux impairs, les deux Branches de l'Hyperbole - asymptote s'élèvent. à l'Analyse des Lignes Courbes. G g tomDigitized by Google

The text on this page is estimated to be only 25.88% accurate

234 DES BRANCHES INFINIES Pl. xi. tombent de part & d'autre de l'Axe des ordonnées , & de Cw yimi part & d'autre de l'Axe des abfcuTcs, qui eft ici l'Afympt- $\ddot{r}^{\ast}\hat{e}^{\ast}$ totew droite. Si k eft impair & / pair, les deux Branches tombent de part & d'autre de l'Axe des ordonnées , mais d'une même part de l'Axe des abfcifles , qui eft ici l'Afymptote droite. Si k eft pair & / impair, les deux Branches tombent d'une même part de l'Axe des ordonnées, & de part & d'autre de l'Axe des abfciiTes ou de l'Alymptote droite. Et fi / (ont tous deux pairs, l'Hyperbole afymptote a quatre Branches qui le jouent dans chacun des quatre angles que fait l'Alymptote droite avec l'Axe des ordonnées ; angles que nous apellerons, dans la fuite, les Angles afymptotiques. [§. 1 2 8] . La pofition des Branches de l'Hyperbole - afymptote détermine celle des Branches infinies de la Couioe dont elles font alymptotes : Du moins celles de la Courbe n'auront pas d'autres pofitions que celles de l'Hyperbole. Car il peut fe faire que les termes fuivants de la Série ou multiplient , ou rendent imaginaires les Branches de la Courbe , dont celles de l'Hyperbole devroient être les alymptotes. Mais cela ne fàuroit arriver , fi / eft un des rennes réguliers de la Série [§. 1 09] . Il fera donc convenable , en conlervant le nom d' Hyperbole - afymptote à celle dont l'abiciTe x a l'ordonnée $v'+z$, d'appeller Afymptote - courbe , ou curviligne , la Ligne qui a pour ordonnée tous les termes irréguliers de la Série , en y joignant s'il le faut , autant de termes réguliers qu'il en eft befoin , pour en avoir au moins un , ou l'expofânt de x foit négatif. Mais alors il fe peut bien que cette Courbe ne ioit plus une Hyperbole. 1 3 j. J'ai dit 2°. Que la Branche infinie , repréientée par une Série , dt Parabolique lorfque les termes v [ce font)igitized by Google

The text on this page is estimated to be only 28.36% accurate

DES COURBES. Gu. vm font ceux où Pexpolant d'x est positif ou zéro] n*expri- Pi.xi. §•« U« ment pas une Droite. Ainfi dès que , dans le premier terme Ax , Pexpofant h est un nombre positif différent de l'unité , la Branche de Courbe est parabolique : elle Pest auili lorlque bz=. i , pourvû que Pexpofant i du fécond terme Bx (bit positif, quoiqu'inférieur à Punité. Car foit / = Bx\ Que la Droite AO foit celle dont ifc.t*, PabfciiTe AP [*] a lbn ordonnée PO égale à Ax premier terme de la Série , c'est-à-dire, que la Droite AO fafic avec les ablcifiès AP & les ordonnées PO des angles OAP, AOP , dont les Sinus font - enrreux comme OP [Ax] & AP [xi, ou comme A & i. Soit auffi NAn la Parabole dont PabfciiTe * [A P] a une ordonnée / ou Bx\$ [PN]. Donc prenant par tout OM égale à PN, la Courbe MA m, qui pafle par tous les points M, est celle qui a pour ordonnée Ax +Bx = PO + PN = PO-f- OM=PM. Je dis que cette Courbe est une Parabole , dont on doit regarder AO comme PAXe des ab(l c'uTes. Car nommant z PabfcHic AO, elle est à AP [x~\ en raifon donnée , puifque les angles du triangle APO font tous donnés. Que cette raifon foit exprimée par celle z de K à i. Donc z = À*, ou x = -jp. Et l'ordonnée de la Courbe M A m fera / = — j z , qui est celle d'une Le premier terme Ax de la Série, qui exprime PorGg 2 donnée

Digitized by Google

236 DES BRANCHES INFINIES Pl. XI. donnée d'une Branche parabolique , fait juger de la der- Ch.viie. nière direction de cette Branche. Comme il furpafle infiniraient tous les autres , x étant infinie ; la Courbe eft cenfee avoir à l'infini des ordonnées égales à celles que reprélente ce terme feul. Quand h furpafle l'unité , la dernière direction de la Branche infinie eft parallèle aux ordonnées , & elle eft parallèle aux abfcifles , quand h eft plus petit que l'unité [§. 127 J. Mais lorfque $b=t$, la dernie're direction des Branches infinies eft oblique aux coordonnées , & les finus des angles qu'elle fait avec les ordonne'es & avec les abfciflès font entr'eux comme 1 à A [coefficient du premier terme Ax] \ puifque la dernière direction d'une Parabole eft celle de fon Axe [§.124]. 154. C'eft pourquoi l'on regarde comme Afymptotecourbe d'une Branche parabolique , la Parabole qui a pour ordonnée le premier terme Ax^h de la Série , ou les deux • premiers termes $Ax + Bx'$, lorfque dans le premier , x a l'expofant 1 . Car quoique quelques termes (uivants puik fent encore être infinis , fi x a dans ces termes un expofant pofitif ; de forte qu'à l'infini , les ordonnées de la Courbe & de la Parabole différent d'une grandeur infinie ; cependant comme cette différence eft infiniment moins grande que l'ordonnée parabolique [§. 78] , elle s'évanouît en comparaifon de cette ordonnée , & la Courbe & fa Parabole-afymptote font cenfées coïncider à l'infini. On peut pourtant , fi l'on veut [& il eft même plus exact de le faire] regarder comme Afymptote - curviligne d'une Branche parabolique, la Courbe qui a pour ordonnée la fomme de tous les termes de la Série , dans lesquels x a un expofant pofitif ou zéro. Car dans les termes fuivants x ayant un expofant négatif, ils deviennent très petits quand $.v$ eft très grande , & infiniment petits quand! Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 26.83% accurate

DES COURBES. 237 Ch. vtil quand * est infinie. Donc alors la Courbe & Ton Afymp. Pl. xl S-1! ** tote s'aprochent toujours plus Pun de l'autre , & coïncident à Pinfini. Mais cette Afymptote-curviligne peut n'être plus une Parabole. On diftinguera donc , quand il fera néceflaire , la Parabole-afymptote -, & rAfymptotc-coarbe , ou curviligne . Celle - là a pour ordonnée le premier tenne de la Se'rie , ou les deux premiers , quand l'exposant d' x dans le premier terme est l'unité. L'ordonnée de celle-ci est la somme de tous les termes de la Série , dans lesquels l'exposant d'x est positif ou zéro. Le terme fuivant marque par Ton figne , (émblable ou contraire au figne de l'ordonnée de l'Afymptote-curviligne à Pinfini, que la Courbe tombe en- deçà ou en -delà de cette Afymptote : & l'exposant de x dans ce terme fait connoître fi les Branches infinies exprimées par la Se'rie s'e'tendent d'une feule part ou de part & d'autre de l'Axc des ordonnées , & fi elles tombent d'un même ou de différents côtés de leur Afymptote. C'est la même choie que pour les Branches hyperboliques [§.132], & ici » comme là , il est indifpenfable de faire attention à tous les termes irréguliers de la Série. i§<. Pour démêler (sans confusion tout ce qui- regarde les Branches infinies d'une Courbe dont l'équation est: donnée; il faut, après l'avoir mise sur le Triangle analytique , équaler à zéro son plus haut Rang. Les racines de cette équation ne peuvent avoir que ces trois ou quatre formes $y=0$, $x=0$, $y=j^4x$, ou , ce qui revient au même, $xz=\wedge$. Car si ce plus haut Rang est $y^4 + 0 \cdot x^r + y \cdot v^a + \dots + x^r \cdot v^a + \dots$, on aura, [en l'égalant à zéro & divifant par $x^v \cdot G$] 3 m j f Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 26.37% accurate

2J9 DES BRANCHES INFINIES Pi. XI. v $v-1$ $v-2$ a Cm. $Vin^* x$
 $X X x = 0$, qui a le nombre v Je racines telles que $y \sim^{rz} A M = 0 > -$
 $=fc^'=0$, d'fc ou $y^*zAx = 0$, $y + A'x = 0$, é». Lorfque le plus haut Rang a
une ou plufieurs Cafés vuides du côté de la Bande (ans y , brique », ou » &
4, ou », 4 & *, &c. font zéro, Péq: » $yv + fiXyv \sim l$ &c. eft divifible, une ou
plufieurs fois, par y ; elle a une ou plufieurs racines $y = 0$. De même,
lorfque ce plus haut Rang a une ou plufieurs Cafés vuides du côté de la
Baode l'ans xy lorfque «, ou « & $j8$, ou *, /S & yt &c. font zéro, l'éq: $*yv +$
 $\&xyv^* \&c.$ eft divifible, une ou plufieurs fois, par x elle a une ou
plufieurs racines $x=a$ Mais fi les deux Catès extrêmes du plus haut Rang, /1',
 xv font remplies, toutes les racines de l'équation faite en. égalant ce Rang à
zéro font de la forme $y = A x$, ou $*— A'$ La racine $y = 0$, étant Péquation
de l'Axe des abfciffes; les Branches infinies qu'elle indique auront leur
dernière dire&ion parallèle à cet Axe. La racine $x=0$ mar3ue au contraire
des Branches infinies dont la dernière irection eft parallèle à l'Axe des
ordonnées, duquel l'équation eft $x = 0$. Et les racines $y — Ax=0$ dénotent
des Branches dont la dernière dire&ion eft parallèle à la Droite que
reprélente cette éq: $y — Ax = 0$, c'eftà-dire, à une Droite oblique aux
coordonnées, & dont l'nclinaifbn eft telle que les Sinus des angles qu'elle
fait avec)igitized by Google

The text on this page is estimated to be only 22.52% accurate

DES COURBES. 239 C».vm. avec les abfciffes & avec les ordonnées font entr'eux com- Pl. xi. $\xi|f^*$ me A à t. Si ces Branches font paraboliques , cette Droite cft l'Axe de leur Parabole -afymptote ou parallèle à cet Axe [$\$ \bullet 1 3 3 1 \bullet$ Si ces Branches (ont hyperboliques , cette Droite qI\ leur Afymptote , ou parallèle à l'Alymptote [$\$. iji$], 136. C'cft donc en égalant à zéro le plus haut Rang de l'équation d'une Courbe , qu'on juge de la dernie're direction de les Branches infinies. Elles peuvent avoir autant de dernières directions que cette équation du plus imaginaires, la Couibe n'a point de dernières directions , point de Branches infinies. taxyy — $2ax1 + **x1 = o$. Si on la met fur le Tr: anal : on voit que l'éq : $j\$^* + 2 xlf 4 < x^* = o$ du plus haut $* o * o * o * o * 00^* o o o$ Rang n*a que des racines imaginaires. Car , en tirant la racine quarrée , on a $yy 4'' xx = o$, dont les racines font $^r + xy7 — 1 = 0$, & $y — xy7 — 1 = 0$, toutes deux imaginaires. Donc la Courbe n'a point de Branches infinies. En effet , l'équation propofée n'a point d'autres déterminatrices fupérieures que celle qui traverte le plus haut Rang , puifque les deux Cafés extrêmes de $icRarg/*$ & x^* Sont pleines. Cette équation ne fournit donc point d'audes racines

Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 25.04% accurate

240 DES BRANCHE S INFINIES pi. XL très Séries
dépendantes que les deux qui commencent par Ch.viii les termes $x^0/ - 1$ & $4^{***} - 1$ > donne's par cette x^i déterminatrice. Et dès le premier terme ces Séries font imaginaires. L'équation ne donne donc aucune Série qui puisse représenter quelque Branche infinie. On le rendra très sensible par la Construction de cette Courbe. En regardant Ton équation comme une équation du fécond degré, on trouvera $yy = iax - x^2 \pm 2x/(2a \pm x)$ & $ax^2 - y^2 (ax(2ax - xx))$ & tirant la racine quarrée $y = \pm \sqrt{axzt}$: $r g \gg V(2^*x - xx)$. Chaque abscisse AP[x] a donc quatre ordonnées [y] PM, Paf, Pm, Pjw, les deux premières positives & les deux dernières négatives. PiM, Pm font égales à la Comme $-J - \sqrt{ax - i/(2ax - xx)}$ & $-y/ax - \sqrt{v/(2^*x - xx)}$, & PA/, Pm font égales à la différence $-ax + \sqrt{(2ax - xx)}$ & $+v/tfX - VQzax - xx$, des ordonnées PN, PO, ou Pn, Po de la Parabole NDA dn, dont l'équation est $elt^2 = lxe$, ou $y = z \pm z^2 ax^9$ & du Cercle ADOBod A dont l'équation est $yy = iax - xx$, ou $y = \pm \sqrt{y/(iax - xx)}$. Or comme le Cercle ne s'étend que jusqu'au diamètre AB, & qu'au-delà ses ordonnées font imaginaires, la Courbe AECACeA, ne paiera pas non plus au-delà de l'abscisse AB, & n'aura, comme on le voit par sa Construction, aucune Branche infinie. 117. Lors qu'égalant à zéro le plus haut Rang de l'équation de la Courbe on lui trouve des racines réelles / ces racines font ou $7 = 0$, ou $x = 0$, ou $y = Ax$ & soit $X = A$ 1,5 1. Elle a des racines $x^2 = 0$, lors qu'il manque au premier Rang une ou plusieurs Cafés du côté de la Bande fans. Alors il part de la Cafe pleine qui est la plus voisine

The text on this page is estimated to be only 29.04% accurate

DES COURBES. 2^{Si} Ch. yiii. fine de cette bande une de'terminatrice supérieure, qui pt, *1J7' fournit l'équation par laquelle on a le premier terme Ax^h de la Série [car on ne peut regarder $o [=y]$ comme un terme]. Selon les Cales qui lbnt pleines dans les Rangs inférieurs, cette de'terminatrice aura différentes pofuions qu'on peut réduire à trois. Ou elle est parallèle à la Bande fans x , ou elle tombe au-deffbus de cette parallèle, ou elle refte au - deflus. t. Lorfque la determinatrice est parallèle à la Bande fans *, le premier terme de la Série est Ax^o , ou finalement A [§. 96. § 0]. A Pablciflè x infinie il re'pond une ordonnée finie A , & réciproquement l'ordonnée A a une ablciftè x infinie. Si on mène cette ablciftè de l'ordonnée A t la Courbe s'e'loignant infiniment de l'Origine s'aproche infiniment de cette ablciftè, qui est ainfi Ion Afymp- # tote [§. 119]. Donc, une de'terminatrice parallèle à la Bande fans x indique des Abfciftes - afymptotes +, c'est à - dire des Afymptotes droites parallèles à l'Axe des abfciftes, & par conféquent des Branches hyperboliques. [§.129]. 2. Quand la determinatrice tombe au-deffbus de la parallèle à la Bande (ans x ; elle ne coupe que la Bande fans y , ou bien elle paffe par la Pointe. Alors l'exposant d' x , dans le premier terme de la Série, est négatif [§. 96. i°],

Introd. à l'Analyse des Lignes Courbes. H h ce f M. D e G D a, Ufége de l'And. pag. 5;.

242 DES BRANCHES INFINIES XI. ce qui marque des Branches hyperboliques , qui ont pour Ch.vth. Alymptote PAxe des abfciflès [ξ i j I } * . \$• «373. Quand, au contraire, la déterminatrice tombe au-dessus de la parallèle à la Bande (ans * ; elle coupe , étant prolongée , les deux Bandes extérieures du Triangle , mais elle retranche une plus grande portion de la Bande fans x que de la Bande fans y. Alors x , dans le premier terme de la Série , a un exposant positif plus petit que l'unité [§. 5> ou si elle passe par la Pointe ; elle désigne des Branches hyperboliques , qui ont pour Alymptote PAxe des ordonnées. j. Et si elle tombe au-dessous de la parallèle à la Bande (ans y , coupant les deux Bandes extérieures du Triangle , mais retranchant une plus grande portion de la Bande (ans y que de la Bande (ans x ; elle indique des Branches paraboliques , dont la dernière direction est parallèle à PAxe des ordonnées. 11L Les * M. De Gua\ Usage de l'Analyse. pag. 41. Digitized by Google

DES COURBES. v& Cm.VITL ____ . . y Pl. XI. §. 117. III. Les racines $y = Ax$, ou $* = ^$ ne marquent que la dernière direction des Branches infinies d'une Courbe, sans décider si elles (ont hyperboliques, ou paraboliques. Elles sont hyperboliques, lorsque x dans le fécond terme de la Série $y = Ax + Bx^4 + \dots$ ou lorsque x dans le fécond terme de la Série $k = ^ + By^h$ a un exposant négatif. Elles sont paraboliques, lorsque cet exposant du fécond terme est positif [§§. i §2. 1]. Mais ceci demande d'être éclairci par le détail, & rendu sensible par les Exemples. Nous suivrons la distinction qui vient d'être indiquée & qui nous présente ces quatre Cas. I. Lorsque la déterminatrice part de la Pointe, ou ne coupe qu'une des deux Bandes extérieures du Triangle analytique, (sans être parallèle à l'autre. II. Lorsque la déterminatrice est parallèle à une des deux Bandes extérieures du Triangle. III. Lorsque la déterminatrice coupe inégalement les deux Bandes extérieures. IV. Lorsque la déterminatrice coupe également les deux Bandes extérieures, & que couchée sur le plus haut Rang elle fait avec ces Bandes un triangle isocèle. §8. Cas I Quand une déterminatrice, (sans être parallèle aux Bandes extérieures du Triangle analytique, n'en coupe qu'une, ou parte par la Pointe; elle le trouve supérieure si l'on conçoit le Triangle couché sur une des Bandes, & inférieure si on le conçoit couché sur l'autre. Supposons d'abord que cette déterminatrice laide toutes les Cafés pleines entr'elle & la Bande (sans x; elle (era supérieure lorsque le Triangle est couché sur la Bande (sans Hh^2 , inférieure

The text on this page is estimated to be only 28.30% accurate

a-tf DES BRANCHES INFINIES Pi. xi. x , inférieure lorfqu'il eft couché fur la Bande fans y . Mais , CH.viii.' le Triangle étant couché' fur la Bande fans x , une déterminatrice fupérieure indique les termes qui compofent fèuls toute l'équation , quand on fuppofe x infinie : tt le Triangle étant couché' fur la Bande (ans y , une déterminatrice inférieure parte par les termes que la fuppofition d' y infiniment petite rend infiniment plus grands que les autres. Donc puifque la déterminatrice qui laifle toutes les Cales pleines entr'elle & la Bande (ans x , pafle par les termes qui conviennent à la fuppofition d' x infinie & d' y infiniment petite , les termes par lefquels elle pafle conflituent l'équation de la Courbe , lorfque les abfciffes font infinies & les ordonnées infiniment petites. Cette déterminatrice marque donc des Branches , qui s'éloignant infiniment de l'Axe des ordonnées s'aprochent infiniment de celui des abfciffes , c'eft-à-dire des Branches qui ont pour Afymptote l'Axe des abfciffes. Supplons, au contraire , que la déterminatrice laifle toutes les Cales pleines entr'elle & la Bande fans y ; elle fera fupérieure lorfque le Triangle eft couché fur la Bande fans & Péquation qu'elle donne répond à la fuppofition d' y infinie. Cette même déterminatrice eft inférieure , quand le Triangle eft couché fur la Bande fans x , & fon équation convient à la fuppofition d' x infiniment petite. Les termes par lefquels elle pafle conflituent donc l'équation de la Courbe qui répond en même tems à la fuppofition à y infinie & d' x infiniment petite. Ainfi la déterminatrice indique des Branches infinies qui s'éloignent infiniment de l'Axe des abfciffes en s'aprochant infiniment de celui des ordonnées , lequel eft par conféquent leur Afymptote. On examinera donc de quel côté une déterminatrice qui part de la Pointe du Triangle : ou qui ne coupe qu'une de fès deux Bandes extérieures , laifle toutes les Cales

Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 28.75% accurate

I DES COURBES. '2tf Ci».vm. Cafés remplies par lequation propofée. Si c'eft du côté pL.xi. S-1*8- de la Bande fans x , PAxe des abfciffes eft Afymptote. Si c'eft du côté de la Bande fans y , c'eft l'Axe des ordonnées qui eft Afymptote. Le figne & l'expolânt du premier terme de la Série , lequel eft donné par cette déterminatrice, fait connoître , dans quels Angles afymptotiques s'étendent les Branches de l'Hyperbole- aiymptote dont il exprime l'ordonnée. Si l'équation de cette déterminatrice n'a point de racines multiples , orç qu'ayant des racines multiples & des racines fimples, on (è ferve d'une racine fimple pour calculer ce premier terme j dès-lors la Série eft régulière, & les Branches de la Courbe le jettent dans les mêmes angles que ceux de l'Hyperbole qui eft fon Afymptote. Mais fi l'on employé une racine multiple , la Série n'eft pas régulière dès le premier terme , & il en faut encore calculer quelques - uns , pour avoir l'Afymptote - curviligne dont les Branches infinies font accompagnées de celles de la Courbe. [§. 134]. Exemple I. On demande quelles font les Branchés infinies de la Courbe que repréfente l'éq : $xyy - aay - £' = 0$. •» Cette équation mile (ur le Tr: anal: a deux détermiDatrices AB & AC. Celle-ci paffe par la Pointe: L'autre A © * o o r coupe la Bande fans x & n'eft pas parallèle à la Bande fcns y, Ainfi elles marquent, l'une & l'autre, des Branches Hh j

hyperDigitized by Google

246 DES BRANCHES INFINIES FuXl. hyperboliques. AB , qui laiflè la Café C du côté de la Ch.vtil Bande (ans y , défigne des Branches qui ont pour Alymp- J* Bl* totc l'Axe des ordonnées. Et ACqui laide la Cale B du coté de la Bande (ans x , indique des Branches dont J'Axe des abfciflès eft rAfymptote. La feule vue du Triangle donne ces conclurions. Mais pour s'aflurer de l'exiftence & de la pofition de ces Branches infinies , il faut voir les équations que donnent ces déterminatrices. AB donne $xyy - aay = 0$, ou $x = -\frac{a}{y}$. C'eft le y premier terme de la Série dépendante qui donne $xen;$, « il exprime l'ordonnée d'une Afymptote-courbe , qui cil une Hyperbole (impie d'un Paramètre pofitif ; dont par conféquenc les Branches s'étendent dans les angles des coordonnées de même figne [§. 128. 1]. Et les Branches de la Courbe qui doivent accompagner celles de cette Hyperbole font réelles , puilque Pég : $x y y - a a y = 0$ n'a point de racines multiples. En couchant le Triangle fur la Bande (àns y, on voit que la déterminatrice AB porte fur les plus hautes Calés des deux premières colonnes. Donc la Série eft régulière dès le premier terme. Ainfi la Courbe , à l'exemple de fon Hyperbole -afymptote , jette deux Branches qui s'aprothent à l'infini de l'Axe des ordonnées , l'une dans l'angle des coordonnées pofitives, l'autre dans l'angle des coordonnées négatives. L'autre déterminatrice AC donne l'éq; $xyy - P = 0$, ou $y = \sqrt[3]{P} * x^{\frac{1}{3}}$, qui indique une Hyperbole du troifième Ordre, dont les Branches s'étendent dans les Angles des abfciflès pofitives [§. 128. 111]. EllesembraC fent donc , pour ainfi dire , l'Axe des abfciflès qui eft leur Afymptote - droite , & l'accompagnent à l'infini du côté pofitif Et comme cette équation n'a point de racines multiples ; la Série eft régulière dès le premier terme , & Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 26.59% accurate

DES COURBES. 247 Ch vin. les Branches de la Courbe accompagnent , dans les mêmes Pu xr. 138. angles , celles de l'Hyperbole-
asymptote. La Courbe propolée a donc quatre Branches infinies
hyperboliques : deux desquelles , qui ont pour Asymptote droite l'Axe des
ordonnées , se jettent dans les angles opposés des coordonnées de même
signe ; & les deux autres, dont l'Axe des abscisses est l'Asymptote ,
s'étendent dans les angles de fuite des abscisses positives. Le cours de cette
Ligne est à peu près tel que le représente la Et cela s'accorde très bien avec ce
qu'on peut tirer de l'équation proposée. Résolue comme une équation du
second degré, elle donne $y = \pm \sqrt{4x^2 + 4x}$, « Q QU r devient négative; ce qui n'a
jamais lieu, x étant positive; mais bien a" quand x négative est au-dessus de
[AB], dont l'ordonnée y est égale à — sa: $y = -\sqrt{4x^2 + 4x}$ BC 1v 40 aa L J 20. Que x
étant infinie, y est infiniment petite & a deux valeurs égales , mais l'une
positive R S , l'autre négative Rs. Car x étant infinie , il ne reste dans le
numérateur de la fraction égale à $y^2 = 4x^2 + 4x$ que $y^2 = 4x^2$, qui divisé par $2x$ se réduit à :
 $\pm \sqrt{4x}$. Que x étant zéro, ou plutôt infiniment petite, y a deux valeurs, l'une
finie — , [AD], l'autre infinie + — , qui est positive [AE] quand x est
positive, & négative [AF] quand x est négative » Car si on tire la racine
quarrée $\sqrt{4x^2 + 4x}$, on aura une S6 « — & c qu'on ajoutera iaa & qu'on en
retranchera Digitized by VjOOQlC

The text on this page is estimated to be only 25.09% accurate

2^{te} DES BRANCHES INFINIES Pt.xi. tranchera, pour avoir , en
divisant par 2 x, les deux va- Ch.viii. leurs d'y , — Hh - &c. [AE ou AF]
infinie, & — *~ &c. *% ^ J x aa L J aa [AD] finie. Que fi l'on veut , pour
plus de clarté , décrire la Courbe par points , on le fera aisément en prenant
la valeur d'x, qui est Ainfi (àppolant a = 2 = t>> on aura x= — + — ■ ce qui
donne les valeurs suivantes. y yy Soit yz= 5, 4 , g , 2, i , o , — i, — 2 , — 4,
— 5, — 6,* on aura x=iÀ,ié,2i,4, 12,/»/, 4, o , — \$,-4, — ,4,&c Exemple 2.
L'équation proposée est xxjyy — *.y — &'x=o. En la mettant sur le
Tr:anal: on lui trouve deux déterminatrices , ABy AC9 qui font
alternativement supérieures & inférieures , quand on couche le Triangle sur
la Bande sans y & sur la Bande (ans oc. Elles marquent donc des Branches
hyperboliques , qui ont pour 00*00 0000 0.00 B* *C o Afymptote , les unes
PAXe des ordonnées , les autres PAXe des abscisses. La Série qui représente
les premières a pour son premier terme x==±/j,:1v~l;J , que donne Péq :
xxyy — aly = o fournie par la déterminatrice Ah. Il marque deux branches
qui se jettent le long de PAXe des ordonnées dans les deux angles de fuite
des ordonnées positives. Et ces deux branches de rHyperbole-afymptote
font ied_by Googt

DES COURBES. 249 c«.vm. font accompagnées de celles de la Courbe , puisq. Péq : Pl. xl / .«\$*• xxyy — a*y = 0 n'a point de racines multiples. Il en est précisé'ment de même des Branches qui ont pour Asymptote l'Axe des abscisses. La position de la déterminatrice AC est symétrique à celle de la déterminatrice AB, & l'équation que donne AC est la même que celle que donne AB , en changeant x en y & a en b. La Courbe a donc quatre Branches hyperboliques , dont deux ffc. 8j. FC, DC fuient l'Axe des ordonnées dans les angles des ordonnées positives , & deux DB , HB accompagnent l'Axe des abscisses dans les angles des abscisses positives. Cette conclusion se confirme par la résolution de l'équation proposée. Elle se présente alors sous cette forme $y^2 = \frac{a^2}{x^2}$, ou y a deux valeurs. En prenant x positive, l'une des deux valeurs & y est positive, $y = \pm \frac{a}{x}$

The text on this page is estimated to be only 23.32% accurate

ayo DES BRANCHES INFINIES Pl. XT. $a \pm y / (a' Ab'x^*) r . , , .$
 Ch vin. tement - , font toutes deux pofitives, §. i} a> parce que $a^0 [= J as]$
 furpafle $v'O^* — 4^{***'}$). La Courbe n'a donc point de Branches dans l'angle
 des coordonnées négatives, mais elle en a deux AF, FC , dans l'angle des
 abfciflès négatives & des ordonnées pofitives. Il cil vrai qu'elles ne
 s'écartent pas beaucoup de l'Axe des ordonnées , puilqu'elles deviennent
 imaginaires dès que x eft plus négative que $t \sim j — [AE]$, laquelle abfciflè
 AE a fon V4 bb fon ordonnée $EF = —$. On prouveroit de même , en
 réfolvant l'équation félon l'inconnue x , ce qui donne $x == kl \pm 4\sqrt{}$ que la
 Branche A H B ne s\> 2yy 9 1 Joigne de l'Axe des abfciflès nulle part plus
 quen H, qui t. bb a pour abfciflè $GH = tiz^2$ & pour ordonnée $AG = -r \sim$ D'où il
 paroît que la Courbe eft compofée de deux parties dont la pofuion eft celle
 qu'on voit dans la F'g. 85,8c qu'elle a les quatre Branches hyperboliques qui
 ont été' indiquées par les deux déterminatrices de fon équation mite fur le
 Triangle analytique. Cet Exemple peut luire naître une difficulté apparente.
 Si on cherche la Série qui donne y en x , on trouvera $y = dt : bj -4. — ^z - ^ —$
 $jt \&c.$ dont les terx 2 xx Xb $x^* x$ mes demi- imaginaires femblent indiquer
 que les ordonnées font imaginaires du côté des abfciflès négatives.
 Cependant on vient de voir que la Courbe a deux Branches AF, FC de ce
 côté -là. Mais il faut conûdérer que la. Série Digitized by

The text on this page is estimated to be only 18.79% accurate

DES COURBES. a; i Ch. vhl Série n'est convergente que quand x est fort grande : elle est S-X¹⁸, est divergente & trompeuse, quand x est Micz petite, ce qui est le cas des Branches AFC, dont l'abscisse ne surpasse point AE = —. On a trouvé $\hat{i} > -32$ C Or la racine carrée de $a_6 \bullet + \ll 4^V$ (è peut exprimer par deux Séries différentes, dont Tune (èrt quand $a_6 > +b'x \backslash$ & Pautre quand 4^V La première, qu'on trouve en tirant la racine de $V +$ est $s^* -jT'' t \text{ — } ^i cr^*$. Et la féconde, qu'on trouve en tirant la racine de $^Vx^* Hh^{**} >$ est $2bxW - ^h t/- \text{ — } v x \hat{u} Jt > x y X axz b ^ x CeS ^"CS 4^*V$, ou $x < -^ = AE = Ae$; & R, S, quand $4^*, x'$ ou $x > = AE = Ae$. p $b'x b_6^{**}$. r $y = \text{ — } "T^* \text{ — } r \text{ — } \blacksquare \bullet CTf. J xx a^* a' \text{ ,, } Vx b'x^*, ^*V ^ R....y = + 2bV - + \text{ — } + TTr-l X b^* X JT J zoy ixx Wx^*y x ^ li.2 La$

The text on this page is estimated to be only 18.45% accurate

ap DES BRANCHES INFINIES Pl. xi. La Série P exprime les ordonnées des Branches Cf, ca.vni. CF, fui van t qu'on prend x pofuive ou négative. La Se- S-M8rie Quelle des Branches A?, A F. Et les Séries Rt Scelles uls blanches fB,

The text on this page is estimated to be only 25.04% accurate

DES COURBES. 253 Ch. vin à- dire du côté positif de leur
 Asymptote droite. Et ces Pl. XI. fig. 1)*- Branches d'Hyperboles sont
 accompagnées de deux Branches réelles de la Courbe, puisque l'éq: $x^2y^2 - b^2 = 0$ n'a point de racines multiples. L'autre déterminatrice AC, qui est
 supérieure quand on coupe le Triangle sur la Bande (sans x, & qui par conséquent
 désigne des Branches hyperboliques dont l'Asymptote droite est
 l'Axe des ordonnées, donne pour l'équation de l'Hyperbole-asymptote $x^2y^2 - a^2x^2 = 0$, ou, divisant par x^2 , $y^2 - a^2 = 0$, qui n'a
 qu'une racine, mais double, $y = a$ ou $y = -a$. Elle exprime une Hyperbole
 ordinaire positive, c'est-à-dire, qui jette ses Branches dans les angles des
 coordonnées de même signe. Mais comme cette racine est double, la Série
 n'est pas encore régulière, & il faut en chercher au moins encore un terme.
 On substitue donc $y = u$ dans l'équation proposée, ce qui la
 transformera en $x^2u^2 - ts = 0$, ou $x^2 = \frac{ts}{u^2}$, qui est la même
 Hyperbole qu'on a trouvée pour l'Asymptote courbe des Branches infinies qui
 s'étendent le long de l'Axe des ordonnées. La transformée n'ayant que deux
 termes, la Série est terminée, & l'équation de la Courbe (qui réduit à $h^2y^2 = \frac{a^2}{b^2}x^2$) « D'où il paraît que la Courbe n'a aucune ordonnée du côté des
 ordonnées négatives, & que du côté des positives elle a deux Branches BM,
 DM le long de l'Axe des ordonnées, & deux autres Bm, Dm le long
 de l'Axe des abscisses. On en trouvera l'équation proposée se réduit à $y^2 = \frac{a^2}{b^2}$
 on la construira en décrivant sur les Axes AC, AD deux lignes
 HyperDigitized by Google

The text on this page is estimated to be only 23.44% accurate

254 DES BRANCHES INFINIES flXL Hyperboles, l'une Nn, qui a pour ordonnée $\sim [PN, pn]$, C[^]Jt bb b & l'autre Oo, qui a pour ordonnée $=fc - y^7 - [PO, PO, po, p^*]$. Car si on donne à chaque abscisse AP, ou A p, deux ordonnées P M, IJM, ou p m, p m, dont Tune PM, ou pm, (oit égale à la somme NO[PN-f-PO], ou no [pn + po] des ordonnées de ces deux Hyperboles, & l'autre PAa, ou pw, à leur différence NO[PN — PO], ou no [pn — po] ; les points M, m, M, m, feront à la Courbe proposée MB m, AfDm. Si au lieu de $-h$ on avoit eu $-b^*y$ dans l'équation proposée, la transformée par la substitution de $ax \sim 1 + u$ à y auroit été $x'^* - b^*u - sab^* - 1 = 0$, qui, étant mise sur le Triang : anal : couché sur la Bande l'ans x, a une déterminatrice supérieure qui fournit l'éq: $x'^* - aab^*x' = 0$, ou $u - j \pm z a b b x \setminus$ Comme cette équation n'a point de racines multiples, la Série eu* régulière dès ce fécond terme. L'équation de l'Asymptotécourbe est donc $y = \sqrt{d} = \sqrt{a}$; par laquelle il paroît que les deux Branches de l'Hyperbole $y = \sqrt{a}$ qui accompagnent l'Axe des abscisses, sont fuivies, l'une & l'autre, de deux Branches de la Courbe, qui tombent, Tune en-deçà, l'autre en-delà, des Branches de l'Hyperbole. Ainsî la Courbe a huit Branches hyperboliques, dont le cours est à peu près tel qu'on le voit dans la Fig. 87. On pouvoit prévoir cette différence des deux Courbes Fig. U & 87, presque par la seule inspection de leurs équations mises sur le Triang : analytique. La racine double $x_{jr} - aa = 0$ de l'équation que donne la déterminatrice AC ne divise pas le terme unique A^* , ou b^*y , du fécond

Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 25.93% accurate

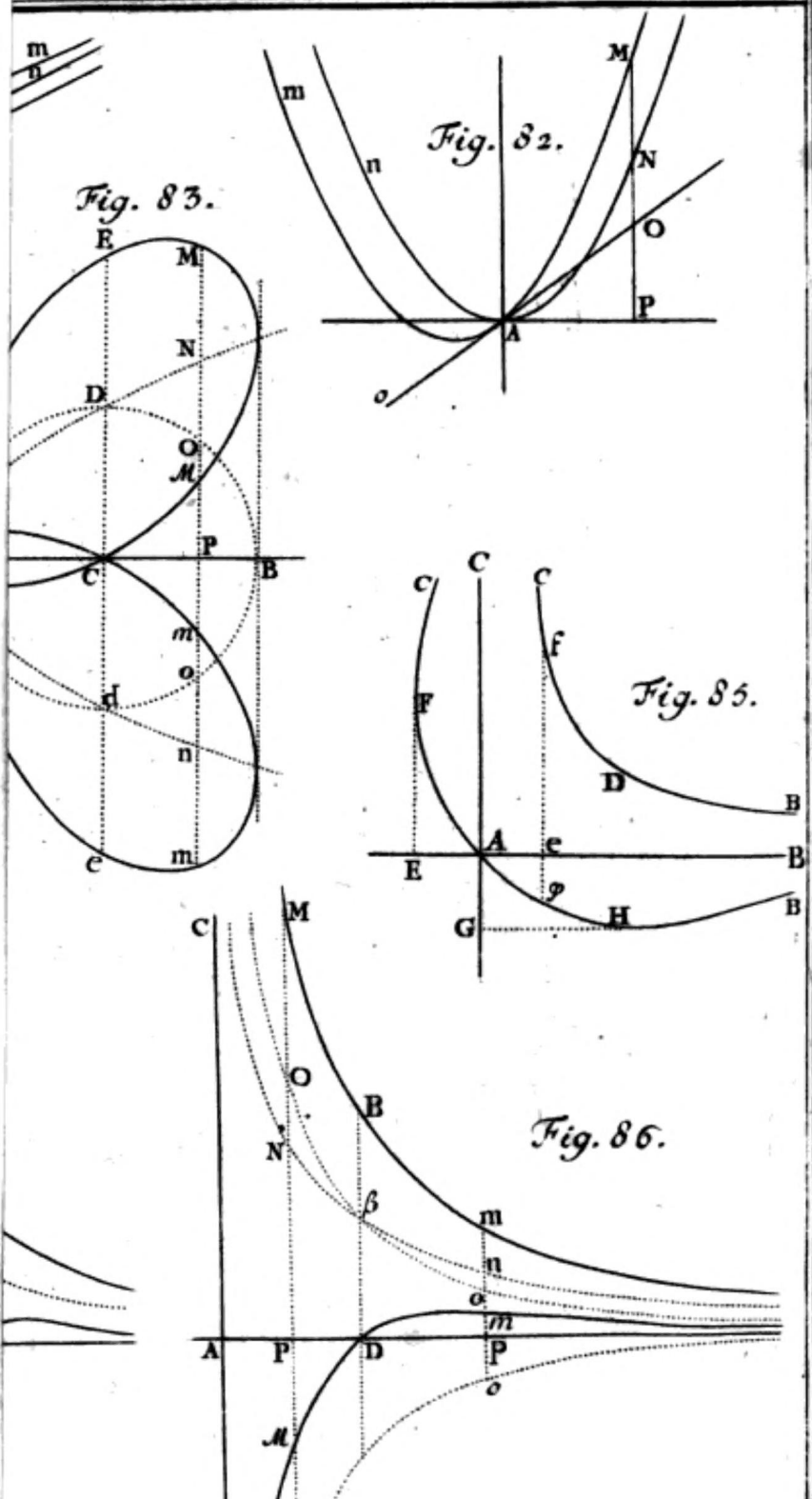
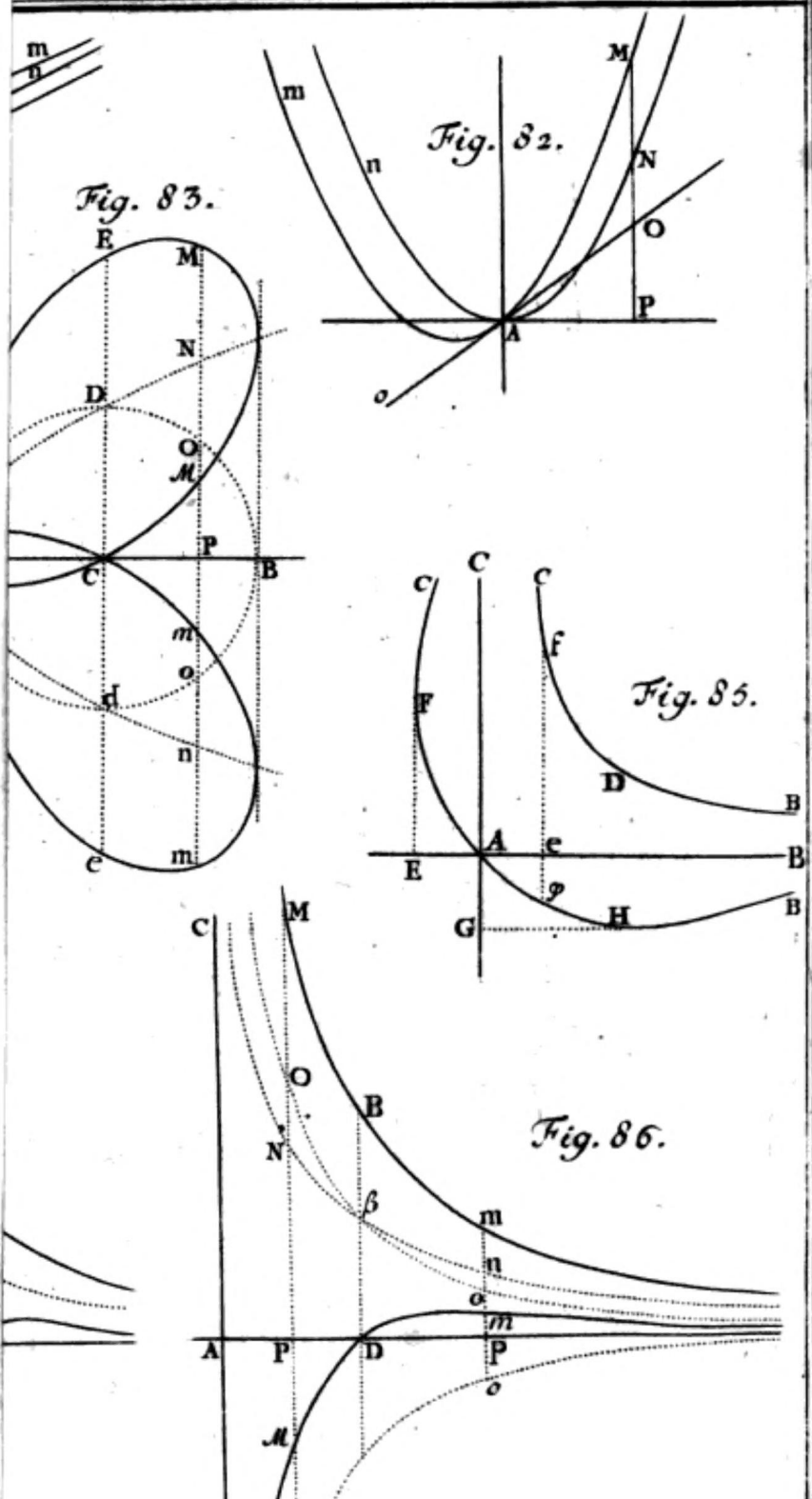
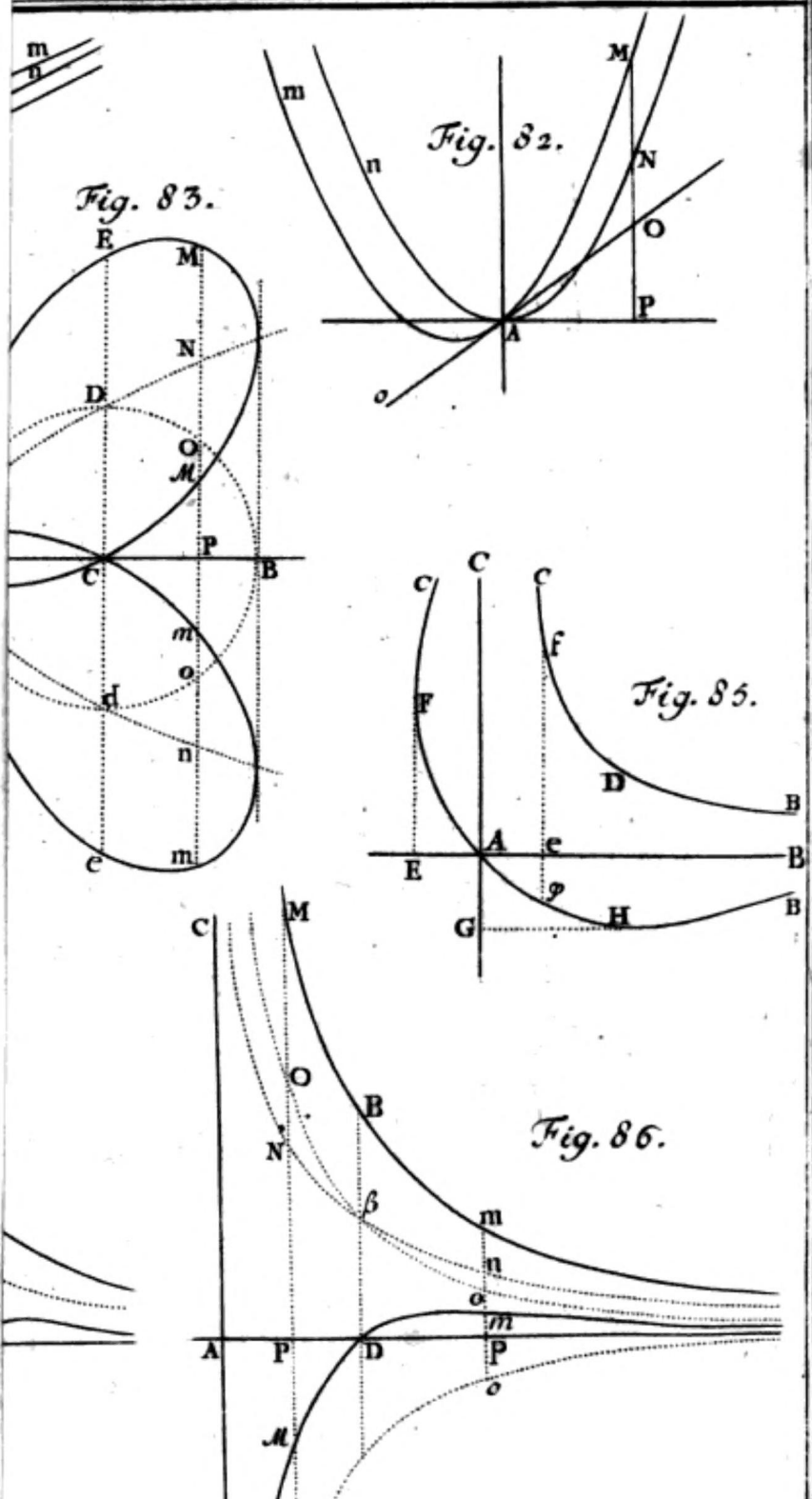
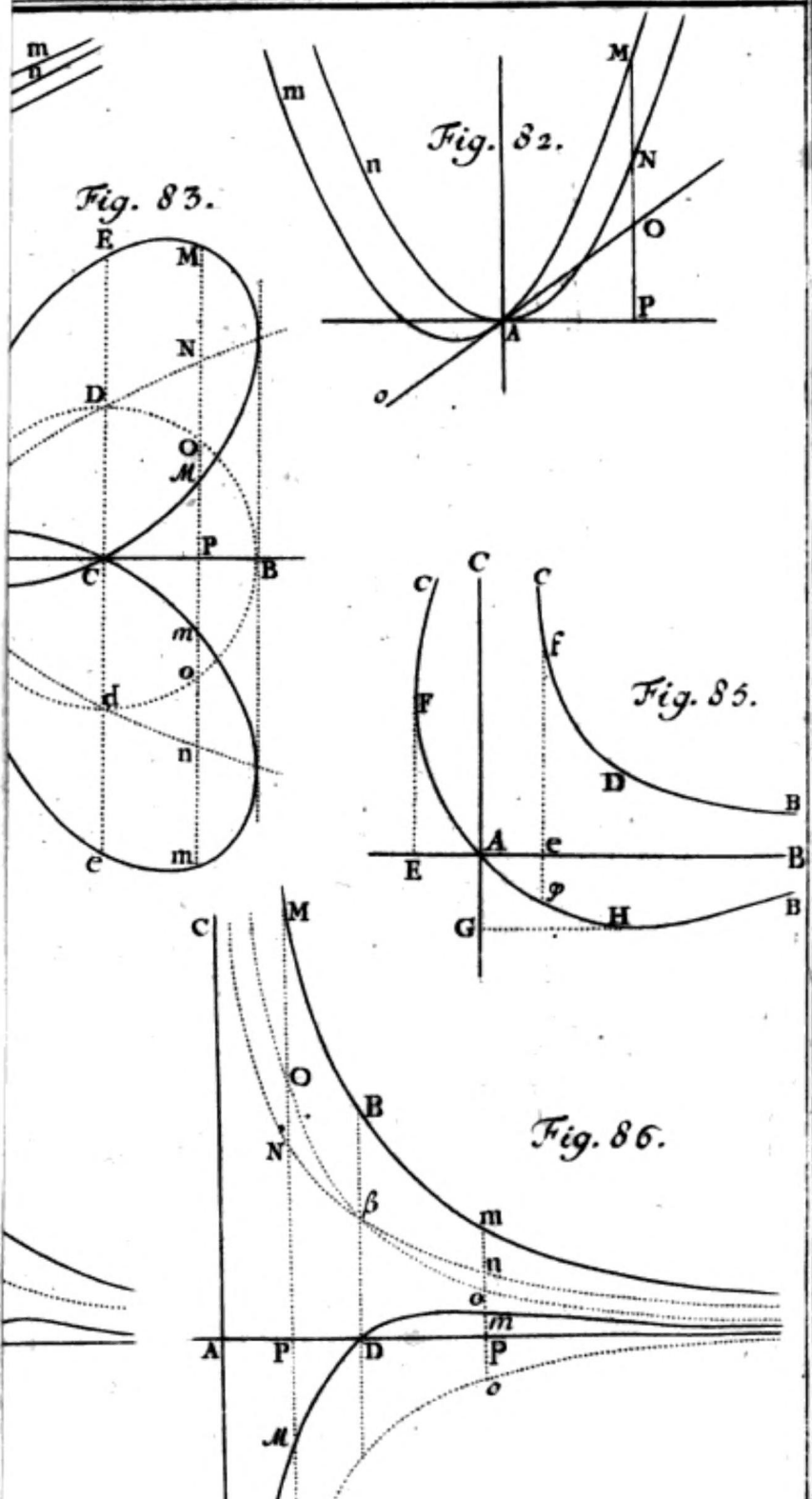
DES COURBES. 25* viil fécond ordre. Donc [§. 1 1\$] la Série qui donne y par x, Pl.xi. J8- aura, ou n'aura pas, des termes demi - imaginaires , félon que la différence des expofants du premier & du fécond ordre eil non-divifible , ou divifible, par l'expofant 2 de la multiplicité de la racine xy — aa =z o , c'elt-à-dire feA A O O O [* O O 000*0 O O O J O O 0 0 I 0 | 0 0 0 ! * 0 0 0 * c 0 0 | 0 oî *C 0 ! 0 | 0 b * *e B* 0 Ion que cette différence eft impaire ou paire. Or cette dif ference eft impaire dans Péq : xly* — 2<>Vji+44x — ■ b* = o , où les expofants des deux ordres font 1 & o. Elle eft paire dans Péq : x'/ — 2alxîy + a*x *> = o> où ces expofants font 1 & — 1. Cela fe voit auffi par la feule infpection du Triangle , en menant la déterminatricc AC & là parallèle qui pafTe par tous les termes f ici par le terme unique B] du fécond ordre. Entre ces deux droites il n'y a , dans la première équation qu'un intervalle ; puifqu'rl n'y a entr'elles aucune Cafe ; mais dans la féconde équation, il y a deux intervalles féparés par une ligne de Cafés vuides. Ainfi la différence des expofants des ordres eft , dans la première équation , 1 nombre impair ; dans la féconde , 2 nombre pair. Donc la première Série a des termes demi-imaginaires , & par conféquent la Courbe n'étend que d'un fcul côté des Branches infinies le long de l'Axe des abfciflès. La féconde Série n'a point de ter- fig. 8*. mes demi-imaginaires , mais elle fera entièrement imaginaire ou réelle , félon que les racines de l'équation de la féconde dàeraainatrice font imaginaires ou réelles. Comme eyes

The text on this page is estimated to be only 24.58% accurate

aç6 DES BRANCHES INFINIES Pt.xi. elles se trouvent ici réelles , la Courbe a quatre Branches Ch.viii. f*\$\$. 87. infinies le long de l'Axe des abscisses, deux du côté positif & deux du côté négatif de l'Axe des ordonnées. Exemple 4. On propose l'éq : $xy^2 - 2abxy - b^2y + aabb - b^2cd = 0$, dont voici la Construction. Une Parabole NCn , décrite avec un Paramètre = sur les Axes CB , CE, étant donnée , avec une Droite DO parallèle à CE , & un Point fixe A : si l'on tire par ce Point A une droite quelconque AN, qui rencontre la Droite donnée en O , & la Parabole en n , N , & qu'on mène par le point O la droite MOm parallèle à l'Axe CB , & par les points N, n, les droites NM, nm parallèles à l'Axe CE , les points M , m , où ces droites se coupent feront à la Courbe proposée. Car si l'on mène par A deux droites AQ^ AB parallèles aux Axes CB, CE de la Parabole , lesquelles rencontrent la Droite donnée DO, l'autre en B l'Axe CB, & qu'en prenant AQ, AB pour les Axes de la Courbe, on nomme AB, a ; AD, b-, BC, qui est négative dans la Figure, c, l'abscisse AP, x, & l'ordonnée PM , ou Pm , y : les triangles semblables ADO , AQN ou Aqn, donneront AD[b]: DO [=rAP, *] : : AQjû Aq [=PM ou Pm, /]: QN ou qn Donc RN[===QN-QR==QN--AB]=5^~4 , ou m [= qr — qn = AB — qn]=/» — Et CR, ou Cr [= CB- BR ou B r=CB-r- PiM ou Pm] — c +y, Ai. si puisque , par la propriété de la Parabole , le rectangle du Paramètre d par l'ordonnée CR ou Cr est égal au carré de l'abscisse RN ou rn [§. i 23] , on aura $dx^e + y = X^{-j} - 4^* a a$, qui se réduit à l'équation proposée

by Google

Digitized by Google



The text on this page is estimated to be only 28.50% accurate

I Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 28.15% accurate

DES COURBES. C*.vin. propofée $xyy - 2abxy + aabb = bbcd$
 -f bbdy. Pu 1XL * ■>* On voit aifément, par cette conftruction , que la
 Courbe aura toujours deux Branches infinies le long de l'Axe des ordonnées
 A D qui eft leur Afymptote : mais elle peut en avoir auflî , ou n'en pas avoir
 , le long de l'Axe des ablettes AB. Ces cas fe diftinguent en examinant fi cet
 Axe A B coupe , touche , ou ne coupe ni ne touche la Parabole. 1. S'il la
 coupe , & que le Point A tombe dans la Pa- %• **• rabole , ce qui a lieu
 quand $BA [s] < Bb [s/cd]$, la l' Courbe a quatre Branches infinies dont AB
 eft l'Alymptote , & elles fe jettent dans les quatre angles des coordonnées.
 2. Si l'Axe AB coupe la Parabole , mais que le Point A "«"•• u tombe hors
 de cette Courbe, ce qui a lieu quand $BA[*j > Bb(V^)]$, la Courbe a auffi
 quatre Branches infinies 3ui accompagnent l'Axe AB ; mais de ces quatre
 Branches, deux s'e'tendent dans l'angle des coordonnées pofitives & deux
 dans l'angle des coordonnées négatives. Si le Point A tomboit fur la
 Parabole, alors $AB [a] = Bb [%/cd]$ & le terme confiant
 difparoîtroit de l'équation , qui feroit divifible par y , & réduite à $xyy -$
 $2abx - bbd = 0$, ne repréTenteroit qu'une Ligne du troifième ordre. g. Si
 AB touche la Parabole , ce qui a lieu quand «*>». $j^* = 0$, la partie de la
 Courbe qui eft au-deiTous de l'Axe A B difparoît , & la Courbe n'a plus que
 deux Branches infinies le long de cet Axe , lefquelles fe jettent toutes deux
 dans un même angle, qui eft celui des coordonnées pofitives , à fuppofer d
 pofitive. 4. Enfin fi A B ne touche ni ne coupe la Parabole , num' «• ce qui
 eft le cas de c négative , ou de BC pofitive , toutes les Branches infinies qui
 accompagnoient l'Axe A B dit Introd. à l'Analyfe des Ugnés Courbeux K k
 paroik Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 23.15% accurate

2*8 DES BRANCHES INFINIES Pt. XII. paroiflènt , & la Courbe ne confèrve que celles qui s'eten- Ch.viil dent le long de l'Axe des ordonne'es AD. 5- M* Tout cela fèdiferne, inde'pendemment de la conftruction de la Courbe , par la feule équation mife fur le Triangle analytique. A Elle a deux déterminatrîces , Tune AB qui a la même pofition que AB dans KExcmplc //, & qui de'figne, ici comme là, [car le Calcul eft le même], deux Branches o hyperboliques qui accompagnent l'Axe des ordonne'es dans les deux angles de fuite des ordonnées pofitives. Mais AC , qui indique des Branches dont l'Axe des abfciffes eft Afymptote, donne l'eq : $xy^2 - 2abxy + (aa - cd)bb = 0$ dont les racines $xy = .ab \pm b y/cd$, préfentent quatre Cas différens ; fans compter celui où $a=z$ V'd, qui réduit l'eq : $xy^2 - 2abxy - bbdy = 0$, ou $xy^2 - iabx - bbd = 0$ à ne repréfenter qu'une Courbe du troifième ordre. i°. Si cd eft plus grande que aay les racines $xy = air cd$, & $xy = ab - b cd$ défignent deux Hyperboles , l'une pofitive , l'autre négative ; dont la première étend fes Branches dans les angles des coordonnées de même figne , & la féconde dans les angles des coordonnées de différens lignes. Ces Hyperboles - afymptotes fe mm i répandent donc dans les quatre angles des coordonnées ; ' & la Courbe les accompagne le long de l'Axe des abfciffes

digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 24.80% accurate

DES COURBES. af9 Chviii. Tes dans ces quatre angles , puifque dans ce Cas l'équation Pt. xn. f. ij8- de la déterminatrice AC n'a point de racines multiples. 2°. Si cd étant pofitive eft plus petite que as , les deux racines $xy = abz \pm zby / cd$, désignent deux Hyperboles pofitives , qui étendent , Tune & l'autre , leurs Branches dans les angles des coordonnées de même Ogne. Donc, puifque l'équation de la déterminatrice n'a point dans ce Cas de racines multiples , les Branches de la Cour- n«m. s. be fuivent celles des Hyperboles le long de l'Axe des abfcifles qui eft leur Afymptote , & le jettent deux dans l'angle des coordonnées pofitives , & deux dans l'angle des coordonnées négatives. j°. Si cd elt négative, les deux racines $xy =: ab^r. b \sqrt{c} d$ ibnt imaginaires. Ainfi les Branches infinies, que la déterminatrice AC fembloit indiquer par fâ pofuion font anéanties par (on équation. La Courbe n'a donc que les 4« deux Branches hypetboliques indiquées par la déterminatrice AB , & qui ont pour Afymptote l'Axe AD des ordonnées. 4°. Si $*=o$, les deux racines $xy — ab^3 = b \sqrt{c} d$ font égales , ou plutôt l'éq : $xxyy — 2abxy^4 * nabb = o$ de la déterminatrice AC n'a qu'une racine double $xy = ab$. Il n'y a donc , pour les Branches dont l'Axe des abfciflès eft l'Aiymptote-droite qu'une Hyperbole pofitive , dont les Branches HI, KL iè jettent dans les angles oppofés des num- *• coordonnées de même figne. Mais , comme la racine $xy ab = a b$ eft multiple ; la Série , dont — eft le premier terme , n'eft pas encore régulière , & il en faut chercher le fécond terme, au moins. On voit (ans calcul, puifque la racine $xy — ab=zo$ eft double, pu i! "qu'elle ne divilè pas le terme unique — $bbdy$ du fecond ordre , & puilqu'il n'y a qu'un intervalle entre la déterminatrice & (à parallèle qui paflè par le terme du fecond ordre ; on voit, disDigitized by Google

The text on this page is estimated to be only 26.27% accurate

a6o DES BRANCHES INFINIES ru XII. je, [§. 113], que !c fécond terme de la Série fera demi - Chz/ttl imaginaire , & qu'ainfi it n'y aura qu'une des deux Bran- &• 'i8chcs HI, ou KL, de l'Hyperbole qui fèrve d'Afymptote à la Courbe. Mais pour l'avoir fi c'est HI, ou KL, qui fait cette fonction, il faut connoître le fécond terme de la: Série. On fubftituera donc $abx \sim 1$ 4« u à y dans l'équation propofée $xxyy - 2abxy - bbdy + aabb = 0$, & on la transformera en $xxuu - abldx \sim 1 - bbd^* - 0$ Celle-ci mife fur le Tr: an : n'a qu'une déterminatrice fupérieure, qui donne $xxuu - ab^*dx \sim 1 = 0$, ou $u = . + S > \sim d^x - ^ = \pm by/a \pm f$. Ce "terme demi îmaginaire , mais double à caufe du figne $zi =$, fait voir que la Courbe ne s'étend que du côté' qfl'indique le figne de la grandeur a bd. Si ce produit eft pofitif , il n'y a que la Branche HI de l'Hyperbole qui fort Afymptote , mais elle eft fuivie de deux Branches mi, Ml de la Courbe , dont l'une mi, défignée par la Série $y = ^ - b^ \& c$ fe gliflè entre l'Hyperbole HI & l'Axe des abfcifles,- & dont l'autre MI, indiquée par la Série $y = ^ + bf \& c$. x x tombe, par raport à l'Axe des abfciflès, au-delà de l'Hyperbole H I. Ces deux Branches m i , M I font furement réelles puifque le'q: $xxuu - ab'dx \sim 1 = 0$ de la féconde déterminatrice n'a point de racines multiples , & que par conféquent la Série devient régulie're dès le fécond terme. Ainfi la Courbe a quatre Branches hyperboliques ; deux , qui ont pour Afymptote l'Axe des ordonnée* , l'accompagnent dans les angles des ordonnées pofitives ; & deux , qui ont pour Afymptote l'Axe des abfciflès , le jettent, le long de cet Axe , dans le feul angle des coorjdonnées pofitives. ?5>. CasIL Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 25.98% accurate

DES COURBES. Ch.vi. 139. Cas 11 Lorsque une déterminatrice est parallèle à pl.xii. M^l* une des deux Bandes extérieures du Triangle analytique, elle est supérieure quand le Triangle est couché sur cette Bande. Si c'est la Bande (sans y, la déterminatrice donne l'équation de la Courbe pour y infinie [§. 96. 40] . Mais tous les termes de cette équation étant sur une Bande parallèle à la Bande sans y, ils contiennent tous une même puissance d'y. On peut diviser l'équation de la déterminatrice par cette puissance, & on aura une équation en x & en constantes, qui a pour racines une ou plusieurs valeurs finies d'*. Ainsi des abscisses finies ont des ordonnées infinies; & les Branches désignées par cette déterminatrice s'éloignent infiniment de l'Axe des abscisses en restant à une distance finie de celui des ordonnées. Les ordonnées infinies de ces abscisses finies sont des Asymptotes de la Courbe, qui jette le long de ces Asymptotes des Branches hyperboliques. Par le même raisonnement, une déterminatrice parallèle à la Bande sans x désigne des Abscisses- asymptotes, dont les ordonnées sont les racines de l'équation que fournit cette déterminatrice. Ces racines peuvent être imaginaires, réelles, ou nulles. Une racine imaginaire exprime une Asymptote imaginaire, qui n'existe point, non plus que les Branches infinies que la déterminatrice (en doit indiquer. Une racine réelle donne la position d'une Asymptote- droite réelle, qui peut pourtant n'avoir que des Branches imaginaires à cause des termes suivants de la Série. Une racine nulle marque une Asymptote- droite, qui, passant par l'Origine, est un des deux Axes. Elle a dore été déjà indiquée par une déterminatrice, qui sans être parallèle aux Bandes extérieures du Triangle n'en coupe qu'une ou passe par le Point [préc.]. E k 1 ExemDigitized by Google

The text on this page is estimated to be only 21.61% accurate

tô DES BRANCHES INFINIES pl. xll. Exemple 1. On propose l'éq : $xyy - dyy - sxy = 0$ Ch. vin. $b^2 x = 0$. Quand on l'a placée sur le Tnang: anal: $'J^* A 0^* 00 B^* * o o ^* C O o$ on voit qu'elle n'a que deux déterminatrices supérieures, toutes deux parallèles aux Bandes du Triangle. L'une AB, parallèle à la Bande (ans y, indique une Asymptote-ordonnée. Son équation $xyy - ayy = 0$, divisée par y , (è réduit à $x^2 = 0$; ce qui montre que cette Asymptote est l'ordonnée de l'abscisse $x = a$. On prendra donc une abscisse AB = «, & par son extrémité B on mènera l'ordonnée indéfinie BC, qui est l'Asymptote indiquée par la déterminatrice AB. L'autre AC qui est parallèle à la Bande sans x , désigne des Asymptotes - abscisses. Leur position se détermine par l'éq: $xyy - axy = 0$ $b^2 x = 0$, que fournit cette déterminatrice. Cette équation a chacun de ses termes divisible par x , & cette division la réduit à $yy - ay = 0$, quia deux racines réelles, $y = 0$, & $y = a$. Elles marquent chacune une Asymptote, qui font les abscisses DE, FG, des ordonnées AD — a & AF = $2a$. Exemple 2. On propose l'éq : $xyy - zby - byy - 2aaxy + b^2xx = 0$. Mise sur le Tr : anal : elle a deux déterminatrices. L'une AB, parallèle à la Bande sans y , indique par sa position des Ordonnées - asymptotes, & par son équation $xyy - byy = 0$, ou, divisant par yy , $x - b = 0$, qui

The text on this page is estimated to be only 26.15% accurate

DES COURBES. Cw.vni. qui a deux racines réelles, $5c=\&$, $x=—$
 b , on voit que iy ynT i* ces Afymptotes (ont les ordonnées des ablciflès
 $AB=\&$, $AC = — h$. A 00*00 o. o * o B* * *C * L'autre déterminatrice $-^C$,
étant parallèle à la Bande fens x , marque des Abfcifles- afymptotes. Son
équation $otxyy — ibxxy bbxx — o$, divisée par xx y fc réduit à $y y — afy +$
 $W = o$, qui n'a qu'une (èule racine, mais double, $y — b=o$. Elle fait
connoître que Pabfciflè DE de l'ordonnée $AD = b$, eft une Afymptotc.
Exemple 3. Si dans cette même équation on change feulement en 4« lt Cgne
— du terme $bbyy$, l'équation que donne la déterminatrice AB, étant xyy
4> $bbyy = o$, ou $xx bb = o$, elle n'a que des racines imaginaires. Ainfi la
Courbe perd les Ordonnées - alymptotes B F, G G, & ne conferve que
PABfciflè-aiymptote DE, donc l'ordonnée elt $AD = b$. F,g. 91. 140. Ainfi la
feule infpe&ton du Triangle analytique, & des déterminatrices parallèles à
Tune ou à faune des Bandes extérieures, fuffit pour établir le nombre & la
pofition des Alymptotes abfciflès ou ordonnées. C'eit que les ordonnées ou
les ablèifles de ces Alymptotes font données par le premier terme de la
Série dépendante qui exprime y en x , ou x en y . Mais pour avoir la pofition
ou Pefpèce des Branches hyperboliques de la Courbe autour de ces
Alymptotes, pour sWurer même de leur exiUenO Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 23.88% accurate

%6i DES BRANCHES INFINIES Pl. xii. existence , il dut chercher le fécond terme de la Série , C*.ynu & , en quelques occasions , des termes ultérieurs. Si le \$-°4 premier terme de la Série est m ou n [m représentera l'ab(cuTe d'une Afymptote - ordonnée , & n l'ordonnée d'une Afymptote -ab laite] , on cherchera le fécond terme de la Série en substituant /w + z à x, ou» + «ày [102] & mettant la transformée sur le Triang : anal : Or cette transformée est précisément la même qu'on auroit en transportant l'Origine sur l'Alymptote [§. 25. IV8.] , transposition qui réduit ce Cas -ci au Cas précédent f §. i\$8] , où l'Alymptote étoit supposée passer par l'Origine. Ainsi cette opération Ce peut envilager , ou comme le transport de l'Origine sur l'Alymptote , ou comme la recherche du fécond terme de la Série. Appliquons - la aux Exemples précédents. Exemple X. On a vû dans l'Ex. 1 du §. préc. que Fig. t9. la Courbe représentée par Téq : $xyy - yy - xxy = 0$ avoit trois Afymptotes , fç. B C ordonnée de l'abfcic fc AB = a, & DE , FG abfcifles des ordonnées AD—* & AF = 2*. Transportons successivement l'Origine sur chacune de ces Afymptotes. 1. Pour la porter d'A en B sur l'Alymptote ordonnée BC, on substituera a**z à x dans l'équation de la Courbe : ce qui la transformera en $zyy - laay - lazy + id1 + 2aaz = 0$. Cette transformée mise sur le Triangle analytique a deux déterminatrices Al>, AC. A A <> *v o o o * o c B o v . * V o C b * C En les comparant avec les déterminatrices AB, AC O igitized by Google

The text on this page is estimated to be only 29.28% accurate

DES COURBES 3. Ch. vin. de l'équation proposée, on voit que dans l'une & dans pl. Xii. *• M* l'autre, AC a la même position, parce que les Asymptotes DE, FG qu'elle détermine, ont la même situation par rapport à l'Origine, (bit qu'on la laisse en A, (bit qu'on la porte en fi. Mais la déterminatrice AB de la proposée a tourné sur le centre A, & a passé en Ah dans la transformée, où elle n'est plus parallèle à la Bande sans y, parce que l'Asymptote BC, qu'elle détermine, est devenue l'Axe des ordonnées, auquel elle étoit d'abord parallèle. Cette déterminatrice Ab donne pour l'équation de l'Hyperbole-asymptote, qui est aussi l'Asymptote-courbe, $xy = 0$, ou $xy = c^2$, à l'Hyperbole ordinaire positive. Donc, les Branches infinies HC, hc de la Courbe, dont CBc est l'Asymptote, s'étendent à l'infini dans les angles bBC, ABC des coordonnées de même signe. 2. On portera l'origine de A en D sur l'Asymptote DE en substituant dans l'équation proposée x à y . Par-là, on la transforme en $xu - 4' - \frac{1}{2}au - auu - axu = 0$, qui placée sur le Triangle analytique a trois AA •A* 0 •A 0 • B* •x 0 R* •c • o C* déterminatrices; AB qui est la même que AB de la proposée, & As, (y, qui ont succédé à AC. AB est réf. tée en place, parce que le transport de l'Origine de A en D n'a pas changé la situation par rapport à l'Asymptote BC qu'indique la déterminatrice AB. Mais AC est devenue double Acy cyt parce que de deux Asymptotes-asymptotes bit $n > d$. à l'Analyse des Lignes Courbes. L 1 qu'elle Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 23.12% accurate

266 DES BRANCHES INFINIES i*1.XIL qu'elle indiquait, Tune DE pafie maintenant par l'Origi- c«.vni.< ne D, & eft l'Axe des abfciflès, l'autre F G lui eft parallèle- f* «4* le. Celle-ci eft définie par la déterminatrice Ac parallèle à la Bande fans x : celle-là par la déterminatrice cy, qui paffe par la Pointe, & fournit l'éq : — axu — =— o, ou ocaz= — a.t à l'Hyperbole ordinaire négative. Ainfi elle marque des Branches infinies 1E, ie, qui s'étendent dans les angles ADE, FDe des coordonnées de figures contraires. Enfin l'Origine eft tranfportée de A en F fur l'Abfl cifte - aiymptote F G, en fubftituant 2 a-\-u à y dans la propofee, ce qui donne la transformée x»« — 4a' — \altt — auu + axu = o qu'on mettra fur le Tnangle analytique. ^ A 0 J*\ 0 0 0 A 0 0 < Elle y conferve la déterminatrice AB qu'avoit la propofee & qui dcTigne l'Ordonnée - afymptote BC, mais la déterminatrice ^Cs'eft brifée en deux Ay, yct dont la première, parallèle à la Bande (ans x, marque l'Ablciflèafymptote DE, & dont la féconde, paflant par la Pointe» montre que l'Axe des abfciflès F G eft aulii une Afymptote. L'équation — 4*' o, ou xu ^=444 qu'elle donne, eft à l'Hyperbole ordinaire pofitive. Ainfi elle indique des Branches KG, kg, qui s'étendent enfin dans les angles GFf, DFg des coordonnées de même figne. En effet, la Courbe représentée par Péq : xyy— *yy— 3*xy — 2alx=:o9 a fix Branches infinies, dilpofées autour de trois Afymptotes Ce, Ec, Gg, de la manière qu'on Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 17.77% accurate

DES COURBES. 167 Ck.vhi. qu'on le voit F/g. 89 , ce dont on peut aisément s'afflTu- Px.. Si rer en considérant. l'équation sous cette forme

$$x^2 + y^2 - i^2 y = 0$$
Exemple 2. Dans VEx. II du §. prie, on a vû que , . la Courbe dont la nature s'exprimoit par féq : $xy^2 - 2bx^2y + 2axy + b^2x^2 - 2b^2y + 2a^2x - 2a^2y = 0$, avoit trois Afymptotes , Ff, ordonnée de l'abscisse AB = & Gg, ordonnée de l'abscisse AC = — b\ & DE, abscisse de l'ordonnée AD=b. 1. On transportera fûcceflîvement TOrigine de A en B & en C, en (ubftituant dans la propofée d'abord $z = x - b$ au lieu de x, ce qui s'exécute atnfî par le §. 28. L'équation ordonnée par y ($xy^2 + y^2 + (-2bx - 2a)x + 2b^2y + 2a^2x - 2a^2y = 0$) à % x O ï O x = b I — , * 2aaby + 2 a a (aa + bb) + fhzyy — ^2aa^bb^zy>^2b(aa^bb)z + zzyy — 2^zz; + bbùz r x=—b A * + 2aaby >4> 2aa{ aa 2%^ (2aa — 4bb)zy >i< 2b(aa bb)z 4« zzyy 2Ûzzy 4< bbzz Si on place ces deux transformées fur le Triangle anaLI 2 lyrique Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 25.09% accurate

268 DES BRANCHES INFINIES Pi. XII lyrique, elles y occupent Tune & Pautre les mènes Calés, c«vm. & ont trois déterminatrices fupérieures. 500*00 o £* * o o * * C P* * * y/C | parallèle à la Bande (àns x , cil (a même que Ta déterminatrice y^C de la propofée, & défigne, comme elle, PAbfciflè- afymptote DE. Mais AB de la propofée s'eft doublée , & eft, dans la transformée Ab & b\$. La première Ab , parallèle à la Bande fansjr, défigne l'Ordonnée -afymptote Gg, fi POrigine eft tranfportée en B , ce qui eft le cas de la première transformée: elle indique POrdonnée-afymptote Ff, POrigine étant tranfportée en C , ce qui eft le cas de la féconde transformée. La féconde déterminatrice £/9, qui fans être parallèle à la Bande fans y coupe la Bande fans x , exprime une Afymptote qui paffe par l'Origine, c'eft Ff, l'Origine étant en B; & Gg, l'Origine étant en C. Cette déterminatrice donne , pour la première transformée , Péq: —2aa6y + 2bzzy = o, & pour la féconde *2aaby — 2bzzy=ioy qui toutes deux fé réduifent à zy=as , équation d'une Hyperbole ordinaire pofitive. Cela montre que les Branches de l'Hyperbole - afymptote , & [puifl que dès le premier terme la Série eft régulière] celles de la Courbe H F, hf; 1G, ig, s'étendent enfin dans les angles des coordonnées de même figne. 2. Il faut préfentement tranfporter POrigine au point D, où PAxe des ordonnées coupe l'abfciflè - afymptote DE. On fubftituera donc u+b à y. LVqua. Digitized by Googl

The text on this page is estimated to be only 21.26% accurate

DES COURBES. 269 c.vin. L'équation ordonnée par * pl. 2 10 I
 O 2 I O O \$ (2^ — 2*)*** — laaux + (—2% + 2*') « i o o i o bbuu * * + 2
 4 4c — 24 UX * * hbuu La transformée »#xx — hbuu — 2 a aux >f<
 2*4 = o , étant mile fur le Tr : anal : conlève la déterininatrice AB A 00*00
 0000 B* * o o o * c qu'avoit la propofée , & qui défigne les Ordonnées-
 aiymptotes F f , G g , qui ont la même pofition par raport à rOrigine D , que
 par raport à POrigine A. Mais la déterminatrice AC de la propofée a changé
 de fituation , & a pris dans la transformée la fituation Ac , où partant par la
 Pointe , elle marque que PAxe des abfâfles DE eft Afymptote. Mais (bn
 équation uuoex — 2aaux 4* 2 a* = o, n'ayant que des racines imaginaires
 ux~aaztzaa√ — 1, fait connoitre que cette prétendue Afymptote DE n'eft.
 accompagnée d'aucune Branche infinie de la Courbe. Ll } Oa

The text on this page is estimated to be only 21.78% accurate

270 DES BRANCHES INFINIES Pl. xir. On peut s'alTurer de la vérité de ces concluions, par la Ch. vin. contruâion de cette Courbe. En prenant pour fon équation $u^2 - 2au - b^2 = 0$ don la transformée $u^2 - 2au + 2a^2 - b^2 = 0$, ce qui porte Ton Origine au point D, & lui donne pour Axes DA, DE; on aura $u^2 - 2au - b^2 = 0$, & tirant la racine quartée $u = a \pm \sqrt{a^2 + b^2}$. On décrira donc sur les Axes perpendiculaires l'un à l'autre DA, DE, l'Hyperbole VRV, vrv, définie par Péc : $xu = aa$, ou $x = \frac{aa}{u}$, & on décrira du centre D, avec le rayon DA $u = h$, le Cercle Eae A. Puis prenant une ordonnée quelconque DQ = u, on tirera l'abscisse A/QM, qui rencontre l'Hyperbole en R, de sorte qu'on a $QR = \frac{b^2}{u}$. Qu'on mène par le point R la droite Tt, parallèle à l'Axe DA, qui rencontre en T & t la circonférence Eae A, on aura donc $DS^2 = QR^2$, & $TS = St = y'CDt - a^2$, $\sim mLM$ r a a $DS^2 = V(\dots)$. Ainsi les abscisses QJA [$\sim + j^2 - b^2$], & QM [$a^2 - VCbb$] sont égales à $J^2 - u^2$ & $u^2 - J^2$ les, l'une à DS Hh St, l'autre à DS — ST, c'est-à-dire, [en menant la Droite DO, qui coupe en deux également l'angle a DE, & donne toujours $SO = DS$ JQM fera égale à $OT = DSHhSt$, & $QA/à = OT = DS - ST$. On voit par cette construction, que les ordonnées Fef, Gcg des abscisses DE — &, Dc = — b sont Asymptotes, mais que DE, indiquée comme Asymptote par l'équation primitive, n'a point de Branches infinies qui

The text on this page is estimated to be only 17.00% accurate

91. DES COURBES. 271 |Tm? 9ui raccompagnent : parce que la Série y — b + ~ (1 PuXIL =fc ») &*• qui défigne ces Branches , eft imaginaire. Exemple 3. Le Ex. du §. préc. étoit celui d'u- ^ ne Courbe défignée par Péq ; xxyy — ibx'y + bhyy — 2*axy 4* £6xx 4« 26^ 4" 2*4&x + 24* — 6* = o , qui n'avoit qu'une feule Aiymptote , (çavoir l'abfciflè D E de l'ordonnée AD = i. Pour connoître la nature des Branches infinies qui doivent accompagner cette Aiymptote, il faut à y fùbftituer b 4« u dans la propofée. L'équation ordonnée par x. (yy— by+bb)xx + bbyy+iVy+is*— b4 2 I O I O 2 1 Q Q 4<(2| — SÊ)*XX4<(24*) MX ^\lbyy 4« 2&') U * i o o 4 o * * 4-2&44'2*+ * 2 4**X +4*' + «»5

The text on this page is estimated to be only 23.28% accurate

7 DES BRANCHES INFINIES ■ Pi. xi. de la propoféc donne, comme elle, $xxuu^{\wedge}bbuu$ 35 o, Cuvin. ou $xx > \{ *bb=o$, dont les racines font $x===dby'$ — h h. §• M* Et Acj qui a fuccedé à AC, donne $muxx — 2a1 ux$ $4 < ab + 4 \ll 24^* = o$, dont les racines $ux — as^{\wedge} \pm z — 2b+ — **$) font auifi imaginaires. Ainfi cette Courbe n'a point d'Asymptotes, à parler exactement. En effet, fi on reloue fon équation en regardant x comme Pinconnuë, on trouvera $x . , aa \pm bV(-*u \sim 4bu - 2bb - ^)$. ces deux valeurs d'x font imaginaires, lors qu'on prend u pofitive : car alors, tout ce qui cft (bus le figne radical cft négatif, [nous fuppofons b pofitive] . Mais fi on prend * négative, le terme $— 4 bu$ fe change en $+4b$; les valeurs d'x peu $a^* \pm LbJ(— uu \pm A.bu — 2bb \sim i$ vent être réelles, & l'éq : $* — bb' — — u$ fe conftruira de cette manière. Ayant décrit fur les Axes perpendiculaires DA, DE, & dans l'angle des coordonnées négatives, la demi - Hyperbole Oo, dont l'équation, en nommant AQ, — u, & QO, — z, eft $uz — aa$ } prenez DA = — t=AC : devez au point A la perpendiculaire AB, & décrivez du centre C, avec un raïon $s^* C \forall — y / \{ 2bb — ^)$ le demi-cercle FHhf. Puis menant du point D une Droite quelconque DH, qui coupe en b la Droite AB, & en h, H la demi - circonférence, abailîez des points h, H les perpendiculaires hq, HQ^, prolongées indéfiniment. Des points o,0, où elles rencontrent l'Hyperbole, vous prendrez fur ces perpendiculaires les parties o m, o m, O M, OM égales à Ab, & les points m, m, M, M feront à la Courbe propofée. Car, fi on nomme

The text on this page is estimated to be only 18.19% accurate

DES COURBES. 27) Ch.viii. $\wedge$ aa f.ii*. DQ.» on aura $Qp = \text{---}$,
 & $QH = y'fQcQF = a^* + \text{---} 2yy \text{---} \wedge$). Donc les triangles femblables DQH,
 DAb> donnant DQj*]: $QH [y/Cr\text{---}un+tfu\text{---}ibb\text{---}*\wedge] =$
 $DA[>]: A\text{---}, ou OM, OjV/[- i\text{---} J, on aura x [= QM ou QA/= QOdr OM = \text{---}$
 $\text{---} : \pm: uu^\wedge bu\ ibb\ i\text{---}i.) \bullet. \dots, \hat{i}_\text{---} > cc$ qui multipliant par u^9 tranfpofânt,
 quarrant, & tranfpofânt derechef, donne l'éq : $xxuu + zaaxu + *4 + \text{---} 4^{**}$
 $+ 2\ 4. a+ \text{---} o$, dans laquelle changeant $4\ll \gg$ en $\text{---} *$, parce que A [$\gg$] , que
 nous avons traitée comme pofitive , eft réellement négative , on retrouve
 précifément l'équation propofée à conftruire. 141. Il n'eft pas inutile de
 remarquer que le Calcul néceffaire pour porter l'Origine fur l'Asymptote
 droite, ou pour avoir le fécond terme de la Série defeendante , s'abrégera fi
 l'on remarque les Cafés par lefquelles doit pafler la déterminatrice : car il
 fuffit de calculer les termes qui rempliffent ces Cafés -là , & on peut s'éviter
 la peine de chercher les autres. Or ces termes fe trouvent aifément quand on
 en ployé la manière indiquée au §. 28, & dont Introà. à l'Analyfe des Lignes
 Courbes. M m nous F*, xn. $\wedge(Df^\wedge\text{---}DCHHCOxCDC + CF \text{---} DQJ=i/(u\text{---}$
 2* Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 24.64% accurate

274 DES BRANCHES INFINIES r^{XIH} . nous avons fait usage dans les Ex. 2 & 5 , du §. préc. CH.viii. Quand on substitue, par ex. $y + \frac{a}{x}$ pour y , l'équation étant $\frac{y^2}{x^2} - \frac{2a}{x} + \frac{a^2}{x^2} = 0$, l'ordonnée par x ; la première ligne donne les termes qui remplissent les Cases xv, xviii &c. jusqu'à $\frac{a^2}{x^2}$, c'est-à-dire la Bande des puissances de x . La seconde ligne donne les termes $\frac{a^2}{x^2}$ & $\frac{a^2}{x^2}$, ou la Bande $\frac{a^2}{x^2}$. De même la troisième ligne donne la Bande « $\frac{a^2}{x^2}$ », & ainsi de suite. Puis donc qu'on cherche une déterminatrice supérieure, il suffira de calculer les termes qui sont les plus hauts dans chaque Bande, ou même seulement dans quelques-unes. Cela se pratique aisément en faisant la substitution. A mesure qu'on calcule chaque terme dans chaque ligne, on écrit un zéro, ou une étoile pour chaque terme qui se trouve nul, & on cesse de calculer dans une ligne, aussitôt qu'on parvient à un terme de cette ligne qui a quelque valeur. Mais cet abrégé se comprendra bien mieux en l'appliquant à quelque Exemple. Exemple I. Soit proposée l'équation $x^2y - Mxy + 2axy - 2aax + a^2 = 0$, qui mise sur le Tr : anal : a deux déterminatrices parallèles aux Bandes extérieures du Triangle. A $\frac{a^2}{x^2}$ o * * C B * * * L'une AC parallèle à la Bande dans x donne l'équation $xy - 2x = 0$ ou $y = 2a$, qui marque que l'abscisse de l'ordonnée $2a$ est l'Asymptote. Pour avoir l'équation de l'Hyperbole-Asymptote, il faut substituer $y + 2a$ à y . On ordonnera donc l'équation par x , & substituant $2a$ à y dans l'équation

The text on this page is estimated to be only 22.20% accurate

-1 DES COURBES. . a7; Chviii. dans 'es termes Tucceflifs, on verra évanouir les deux pré- pl.xiii. /. t4>- miers; ce qu'on marquera à côté par des zéro. Mais le îroifième — zaay+a* fe change en — , qu'on mettra auflî à côté'. Puis on viendra au calcul de la féconde ligne , & comme le premier terme — 2 a") xx y produit uxx qui n'eft pas zéro; on le mettra à côté , 5c le Calcul eft achevé. L'équation ordonnée par x y=** 1 " *\ (j — 2a)xx>*(ay — 2aa)x — laay^a* o o — - \ax 1 o (i)*xx + *xx Car la déterminatrice fupérieure de la transformée donnera L'éq : «xx — jii'rro, palTant nôccliairement par la Calé «xx & par la Pointe , puifque celle-là elt la plus haute Café de la féconde colonne , & celle-ci de la première , en couchant le Triangle fur la Bande (ans x. Le calcul a montré que les Cales x & xx font vuides. o * o • • o • • • * L'autre dc'tcrminatrice AB de la propoféc eft parallèle à la Bande fans y , & donne Péq : xly + axy — saay z=z o, ou x1 4**x — 2aa = o, qui a deux racines xssé , ou x=r — 2 s» Elles défignent les ablcilTès a & — 2a de deux Ordonnées - alymptotes. Pour avoir l'e'quation des Hyperbolcs-afymptotes , il faut fubftituer z*i*at & z — 2a à x dans l'équation propofée. On l'ordonnera donc par y , & elle n'a que deux termes. Le premier s'évanouit , toit qu'on fubftituë a , ou — 2a , à x , puifque a & — 2a M m 2 font Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 21.09% accurate

2j6 DES BRANCHES INFINIES Pt-xlil. font les racines de l'équation faite en égalant ce terme à ch.viil zéro. Mais Tune & l'autre substitution réduit le lecond h «♦»• terme à — 3 a\ Il est inutile de chercher ce que produirait ce fécond terme dans la féconde ligne , puisqu'il a une valeur dans la première. Mais on calculera ce que donne le premier terme , & on trouvera (2x4-*) zy, que x=sa réduit à 4- %azy , & que x — — 2a réduit à — iaiz. On s'arrêtera donc là , puisque la déterminatrice doit pafler par la Pointe , & par la Cafe zy , & on a pour la première transformée +\$*zy — \$ 4) zy yç — - ^ X== 24 o — 34' 0 — 34' 4- i«zy — i*7.y Digitized by Googk

g. 92. Ainsi la Courbe a trois Asymptotes ; 1°. l'abscisse CBc de l'ordonnée AB==2a , qui est accompagnée de deux Branches infinies DC , dc dans les angles des ordonnées positives ; elles sont indiquées par l'éq : $xx = 3a'$ de leur Hyperbole-asymptote : 2°. l'ordonnée FEF de l'abscisse AE==a, suivie des Branches infinies GF , gf , qui se jettent dans les angles des coordonnées de même signe , comme le montre l'éq : $zy = aa$ de l'Hyperbole-asymptote ; & 3° enfin l'ordonnée lHi de l'abscisse AH==—2a, dont les Branches infinies LI , li s'étendent dans les angles des coordonnées de signes contraires, parce que l'éq : $zy = —aa$ de leur Asymptote - courbe est à une Hyperbole

The text on this page is estimated to be only 17.41% accurate

DES COURBES. 277 c«.vm. bole ordinaire négative. Et cela convient entièrement avec PtXiii. §• m«- ce qu'on peut déduire directement de l'équation $propo\_2axx^2 + ax^2 - a^2 = 0$ fée, présentée sous cette forme $y = \frac{a}{x}$. Exemple 2. On propose cette équation : $x^2y^2 - y^2 = 0$ xy — + ahxf + 2kxly 4- «V — iV k + aff Placée sur le Triang: analyt: elle a trois déterminatrices supérieures, dont l'une AB partant de la Pointe, & c 000^00 o O ^ afc o o B* * \Jl O \ o o A * * raillant toutes les étoiles du côté de la Bande fans ^ fait voir que l'Axe des ordonnées est une Asymptote accompagnée de deux Branches hyperboliques qui le jettent dans les angles des abscisses négatives ; leur Asymptote courbe étant une Hyperbole qui exprime l'équation : $xy = -a$ ou $xy = -a$. Mais il s'agit principalement ici des deux autres déterminatrices, qui sont parallèles aux Bandes. La première BC parallèle à la Bande fans y, donne l'équation : $y^2 = (x^2 - a^2) x^2$, qui, [sans compter la racine $x=0$ qui marque pour Asymptote l'Axe des ordonnées, Mm 1 déjà Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 25.60% accurate

oq% DES BRANCHES INFINIES Pl. xii. déjà indiqué par la
déterminatrice AB] a ces deux raci- Ch.viii. ncs $x=4, x=r^{\wedge}$ La féconde CD ,
parallèle à la Bande $s^* l41$, iâns x , donne l'éq : $xl (yy - icy + cc) = o$, qui
n'a qu'une lèule racine , mais double, $y - c$. Il y a donc deux Ordonnées-
alymptotes , dont les abfciflès font a & b , & une Abfciflê-afymptote , dont
l'ordonnée ctt c . Pour avoir les Afymptotes - courbes , on doit fubftituer
d'abord $Z+a$, puis $z+4$)àjt, & enfin «+f à y . Les deux premières fubftitutions
demandent qu'on ordonne l'équation par y . Sous cette forme elle a trois
termes, dont le premier s'évanouît par la fubrstitution de a & par celle de h à
 x , puifque a & b (ont les racines de l'équation qui égale ce terme à zéro. Le
fécond terme , par la fubrstitution de $*$, elt réduit à $-zaacQa - b\sim)y$, &
par la fubrstitution de b il devient zéro. Il n'elt donc pas nceftaire de (avoir
ce que la fubrstitution de a fait du troifième, mais la fubrstitution de b le
change en $blc^* - a'bd' 4^{**}$ ff. On marquera à côté ces grandeurs nulles ou
réelles , & on pafTera à la féconde ligne. Par l'opération qui tire cette
féconde ligne de la première , (on premier terme elt $(jxx - 2(a + b)x +$
 $ab^{\wedge}zyy$, que la fubrstitution de a réduit à $a(a - t)zyx >$ & celle de b à $b(a$
 $- \&)zjr^*$. Il n'elt donc pas néceflaire de pouffer plus loin le Calcul, car
dans la première transformée, la détermnatrice porte fur les Cales zyz & yt
& dans la féconde fur la Cale $z y1$ & fur la Pointe. L'équation ordonnée
par $^{\wedge}$ » $J * 1 + (j^{\wedge}-^{\wedge}a \{a+b\}x^{\wedge}ab') zyy x \sim a o - 2a'c(a-b)y O. Q,+f? -$
 $\sim albdl+a\%f\ + a(a\sim b)zyy, +b(a\sim b)zf$ Digitized by

The text on this page is estimated to be only 24.86% accurate

DES COURBES. 279 Ch. vin. Il résulte que l'Atymptote - courbe de l'Afymptote -or- Pl.xiii. ,41, donnée de l'abfcifle a , a pour son équ : $a \{a - b\} zyy - 2a^2c (a - b)y = 0$ ou $zy = 20c$, laquelle marque que les Branches infinies s'étendent enfin dans les angles des coordonnées de mêmes signes. Et que l'Alymptote-courbe de l'Afymptote ordonnée de l'abfcifle hy est l'Hyperbole représentée par Péquat : $b(a - zy^2) - hblcx - axb dx axb à x - bxcl a^2ff - f alff = 0$, ou $zyy - ^$. Ainsi , selon que cette fraction est positive ou négative , les Branches , qui accompagnent cette Afymptote , le jettent ou dans les angles des abfcifles positives , ou dans ceux des négatives. Pour faire maintenant la substitution de $u + c$ à y , on ordonnera l'équation par x , & alors elle a quatre termes. Le premier s'évanouit , quand au lieu de y on écrit c , & le fécond devient $— (/^ — £)rx$ \ C'est tout ce qu'il faut savoir de la première ligne. Le premier terme de la féconde, qui est $(2^ — 20 «x1$ disparaît aussi par la substitution de c à y . Il faut donc venir au premier terme de la troisième. C'est uhx^0 , qui ne renferme point d'^. Il n'y a donc point de substitution à faire dans ce terme , qui , avec le fécond de la première ligne , donne l'éq . $* «*x! b)c^*xx = 0$, ou $u1x=(a b)cc^9$ qui marque que les Branches de l'Hyperbole - afymptote & , [puisque cette équation n'a point de racines multiples ,] les Branches infinies de la Courbe se jettent dans les angles des abfcifles positives , si $a > b$, ou dans ceux des abfcifles négatives , si a

The text on this page is estimated to be only 18.05% accurate

a8o DES BRANCHES INFINIES xili. LVquation ordonnée par *
 Ca.vni ijJ-icj+W+Mt+tyy+iky)*** (abyy-*add)x+Sff 2 I O HH C 2jv — 20
 **' &* T O o — ^ — t,)cxxx , Si m eft == £ , le terme xl de" la première
 ligne fèra zéro, & il faudra calculer le terme x. Par la fubitution de c à y , il
 lè change en (akc — aadd^x, ou aa{cc — *V)x, puilqu'on fuppoſe a =t.
 Mais fa dèrminatrice qui va de la Cafe uux* à la Café x , palTe par la Café
 «x\ 11 faut donc la calculer. Le terme qui la remplit eft le fécond de la
 lècondc ligne , qu'on trouvera être — — zacuxl. L'équation ordonnée par x
 OP-*04*O *' + (r-2ayy+2acy) xl +aa (yy—dd) x * Jff 2 1 O 2 l o o 4*"(tt
 — dd}x &c. o 2 acuxl &c. «x» tfi. LVquation de rAfymptote courbe eft
 donc *V — «^«x* + an (« — dfj x =5 o , ou ttxx\ — 24«rx + aacc m—
 aadd Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 20.36% accurate

DES COURBES. «Cn.vin — — aadd=zo, qui a deux racines
 $x = \sqrt[4]{a^2 - d^2}$ ou $x = \sqrt[4]{a^2 + d^2}$. Elles indiquent deux
 Hyperboles ordinaires, dont la première étend (es branches dans les angles
 des coordonnées de même signe, & la seconde de même, si $c > d$; mais
 celle-ci les étend dans les angles des coordonnées de lignes contraires, si $c < d$.
 Si $c = d$, le coefficient $a^2 - d^2$ du terme x est zéro. La
 de'terminatrice qui passe par les Points »!x' & $mx^2 + y^2 = 0$ donne alors simplement
 l'équation $2x^2 - 2y^2 = 0$ ou $x = y$ ou $x = -y$, qui n'indique que deux Branches
 infinies, une dans chacun des angles des coordonnées de même signe. Mais
 il part de la Café $ux^2 + y^2 = 0$ une autre de'terminatrice supérieure qui va à la Café
 de la Pointe $Y^2 = 4x^2$ & donne l'équation $2acx^2 + 4a^2y^2 = 0$, ou $ux^2 = y^2$, qui indique
 deux autres Branches infinies dans les angles des coordonnées de même
 signe. L'équation ordonnée par x . $0 = 20 - fa - x^4 - (2yy + 2acy)x + aa$
 $(V^2 - cc)x^2 + 2y^2 + 2HH C^2y - 2c)ux^2 + (-4^2 HH^2 + 0^2 xx^2 + c.o.o,$
 $0, 4 - ax^2 + 2acux^2, c^2v$ Si c est nulle, la Café ux^2 fera vuide, le
 coefficient $-2ac$ étant zéro. L'équation de l'Asymptote - courbe lèra
 simplement $xy = 0$, qui le décomposant Introà. à l'Analyse des
 lignes Courbes* N n en

The text on this page is estimated to be only 14.51% accurate

282 DES BRANCHES INFINIES fcXIIL en ces deux ux— ad =
 o> Si ux >{* ad=o , indique C»*vtî, deux Branches hyperboliques qui fe
 jettent, une dans chacun des quatre angles des coordonnées. Et fi c'elt d qui
 cft nulle , Péquation de Y Afymptote courbe fera uuxx — 2acnx-\- atuc — o
 , qui n'a qu'une Icule racine, mais double , ux — ac=o , laquelle indique une
 Hyperbole qui e'tend (es Branches dans les angles oppofés des coordonnées
 de même figne. Mais cette racine double dit que la Série y=c+*~ &c. n'eft
 pas encore régulière , & il faut , dans la transformée en « & x, fubftituer —
 à «. H faut donc avoir cette transformée. Ainfi on achèvera le Calcul
 comment • . ce ci-deflus. LVquation ordonnée par x (yy — 2Cy+ ce) x* 4*
 (— 2*yy*b2 acy) x* 4« {asyy) x + *% ff; I ^ 2 I 2 O^ HH05 — 2C)*xl
 4*7 i 2*c)uxx >{* (2aay}ux i o i o i + (i)#V — 2au*xl 4« aatSx y = c ' * W
 o o + aac ex *l* a*ff Q—2acuX1-\- 2*MUX , O Dans cette transformée —
 2 * u*xx + aa u*x—* i iMcuxl + 2aaciix + aaccx + a%ff=io , qui a trois
 ordres de termes , il faut fubftituer — C + / à u. On peut faire cetx • te
 fubftitution fucccflivemcm dans les trois ordres , s'il eft. nécef— y Googl

The text on this page is estimated to be only 18.78% accurate

DES COURBES. a8j Ch nu. néceflaire : mais il fuffira de commencer par les deux pré- Pt.xnL miers [$\S$. io $\odot^* \odot \odot \bullet \odot \odot \bullet \bullet \bullet \odot$ $\bullet \bullet \bullet^*$ Elle donne Peq : $//x \gg o$, ou $*sas:3=y$ $Jffx^* \bullet = i = * \Delta V \bullet \bullet \gg$ terme demi-imaginaire. La Série eft donc $y = e^* \sim \Delta'' \{v \sim f, 4\%$ ce qui fait $X x x$ connoître que des deux Branches de l'Hyperbole tt $x \sim ac = o$, il n'y en a qu'une qui ferve d'Alymptote à la Courbe, mais que cette Branche eft accompagnée de deux Branches infinies. Nn 2 On

The text on this page is estimated to be only 21.72% accurate

28* DES BRANCHES INFINIES thXUU On pou voit prévoir
cette Conclu (Ion par la feule inÇ- Ch.viie peclion de la transformée —
 $2a\sqrt{x} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{8}x^4 + \dots$, mile fur le Triangle
analytique. Car la racine double ux — $ac = 0$ de l'équation faite en égalant à
zéro les termes « $V = a^2x^4 + 4a^2x^3 + 6a^2x^2 + 4a^2x + a^2$ » ; * o o * ; * o o * I o o ; * *. 4-
 a^2x^4 du premier ordre, ne divise pas la somme — $2\sqrt{x} + 2ax + a^2$ ff
des termes du fecond ordre. Donc [§t 1 1 1] puifqu'il n'y a qu'un intervalle
entre la de'termmatrice & (à parallèle qui paflè par les termes du fécond
ordre , & que la racine de l'équation fournie par la déterminatrice ert double
, le terme fuivant de la Série fera demi-imaginaire. Donc, &c. 142. Cas lit
Lorfque la déterminatrice fupérieure coupe inégalement les deux Bandes
extérieures du l riangle - analytique, elle donne une ou plufieurs équations
de cette forme $y = Ax^b$ ou $xz = Ay^h$, Texpofant h éiant un nombre différent
de l'unité , j. il feroit l'unité , fi la déterminatrice retranchoit des portions
égales des deux Bandes h l extérieures [•§. 96. 20.]]. Donc Téq : $y = zAx$,
ou $y^5 = x$, car c'eft (bus cette forme que la donne la déterminatrice,
repréfente une Parabole, qui eft l'Asymptote des Branches infinies de la
Courbe , dont l'ordonnée y exprime x par la Série dépendante qui a pour
fon premier terme Ax . Om Digitized by Go

The text on this page is estimated to be only 27.29% accurate

DES COURBES. 285. Cm.vhl On a déjà dit [§. 1\$§] que la dernière direction de puxiii« 5.14*. CC(te Parabole cil l'Axe des ordonnées , quand $h > 1$, & celui des abfcifics , quand $b < 1$. Or $A > 1$, quand la déterminatrice retranche une plus grande portion de la Bande fans y que de la Bande (ans x; & £ dans quels angles s'étendent enfin les Branches de ces Paraboles [§. 128 J. Les Branches de la Courbe le jettent dans les mêmes angles, ou du moins ne peuvent pas se jeter dans d'autres ; car il est possible que les termes suivants de la Série rendent ces Branches imaginaires , ou en tout , ou en partie : ce qu'on n'a plus Heu de craindre lorsqu'on est parvenu aux termes réguliers. . . Au reste , comme les de terminât riecs fupérieures , qui coupent les deux Bandes extérieures du Triangle , font toujours supérieures , foit qu'on le couche sur la Bande fins x, ou sur la Bande fins y\ il est indifférent de chercher y en x, ou x en Mais si l'une de ces deux Séries donne l'cxpolant h rompu , & que l'autre le donne en nombre entier , le Calcul sera plus commode si l'on • préfère ce dernier. Exemple L On propose l'éq: $xyy - ay^* - bx' = 0$. Mile sur le Tr : anal : elle a deux déterminatrices , . qui coupant l'une & l'autre inégalement les Bandes exté- N n 5 ricures • Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 20.99% accurate

a8

The text on this page is estimated to be only 21.98% accurate

DES COURBES. 387 $\ddot{y}$ *Jf ce utile DC, qui donne $\text{réq} ; \text{---}^\circ\text{---}^\wedge \text{---}$
 $\wedge = 0$, ou $\text{---} \text{abx} \sim 1$. Dès le fécond terme, la Série y ; $*$ $\text{---}^\wedge$ fa. a donc un
 expolant négatif. Cet expofant m x eft impair, & ce terme eft précède du
 ligne --- . AinG PAfymptote- courbe eft la Parabole CAE, & les Branches
 de la Courbe tombent en - deçà de cette Alymptote du côté des abfcifles
 pofitives, & en -delà du coté des négatives [§. «34] On tireroit précifément
 les mêmes chofes par rapport aux Branches dont la dernie're direction eft
 l'Axe des abfcifles, en réduifant à $x = \wedge / l^\wedge q$: $*W \text{---} \text{bx}^* = 0$. que fournit la
 déterminatrice AC, & continuant la Série $\ddot{y}$ l'part. qui donne x en y . Mais,
 pour varier le Calcul & nous exercer dans ces réductions, cherchons une
 féconde Série qui donne y en x . Le- premier terme, déduit de Peq: $x'xy$
 $\text{---} \text{bxt} = 101$ eft $y = -\pm z^\wedge$. = $tl: *xl *$, qui défigne la Parabole FA G, dont les
 Branches embrasent, pour ainfidire, l'Axe des abfcifles qui eft leur dernière
 direûion, & s'étendent dans les angles des abfcifles pofitives, puifque x
 négative rend y/bx imaginaire. Cette Parabole -alymptote eft auffi
 l'Afymptote - courbe des Branches de la Courbe, qui ont cette dernière
 direction. Car en fubftituant $\pm^\wedge bx + u^\wedge y$, on transforme l'équation en $r \pm r$
 $2 \ll xxy / \& x^4 - 1 \text{utrxx} m \text{abxy} / b - x^z + r^\wedge \text{abux} \text{Sf} = 3 a^* u \sqrt{bx}^\wedge z \text{mm}^* = 0$, qui
 étant milé fur le Tr : anal : couché fur la Bande (ans $*$ a trois
 déterminatrices : mais la feule qui foit utile & qui donne un expolant plus
 petit que 1, c'eft celle qui traversant les Cales Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 19.70% accurate

a83 DES BRANCHES INFINIES ?lXm' „«2* k J A va i n / . / , .
 ChVIII ux \ & x*, donne l'éq: * 2uxxs/bx ^ abx^bx—o, Cft / * © / 0*0 / * o
 a»c o o o où «±+i^x*-' . L'expofant de ce fécond terme fait voir, parce qu'il
 eft négatif, que la Parabole FA G eft J'Afymptote - courbe & parce qu'il eft
 impair & précédé du figne + , que les Branches de la Courbe tombent
 audeffus de l'Afymptote- courbe. Car le premier terme de la Série ±V^ne
 permet pas de fuppofer x négative. Ainfi la Courbe a quatre Branches
 infinies difpofées comme on les voit dans la Fig. 93 , tracée par points
 fuivant ce Calcul. Soit 4 = 4, & bs=i 1 , ou foit xxyy 4)r' — x1 = o
 l'équation propofée , & fubftituant yz à x, on la transformera en y*zz — 4/
 — yizi = o i ou, divifant par/, en^zz — 4 — z' = o, foit y—± + z, zz Donc x
 [=yz] = 4+ ZZt Aiufi fuppofant «.=i«/, 4, 3 , 2, ;,o, — }, — 1,-1/4» — 2, —
 3,&c. on aura x = m/, 17, 10^(5,4^,2^4, y, 8i,i«/. 7*. — 3, o, a, 7f,&c.
 ôcy==»V-,4l»3^3»3/f.2Vr2,5>i<5i,f«/: 155, 3, o,— i,~2|,&c Oî Ton voit
 que les valeurs pofitives de z, donnant des x & des y pofitives , déterminent
 les points des Branches EIHF, qui font dans l'angle des coordonnées pofi-
 tives ; Digitized b

The text on this page is estimated to be only 29.64% accurate

DES COURSES. 289 Cn.v.m. tives : qu'en particulier , celles qui font prises entre l'infini pt.xin. $\$ \bullet \ll 4^*$ & 2 donnent les points de la Branche F H dès l'infini jusqu'au point H , qui est le plus près de l'Axe A B des abf. ciffes : que celles qui font prises entre 2 & ^{2} donnent les points de l'arc H l compris entre le point H & le point 1 le plus proche de l'Axe A D des ordonnées ; & que celles qui font prises entre 2 & 0 , donnent les points de la Branche I E dès le point I à l'infini. Que les valeurs négatives de z , donnant x ou y négative , déterminent les points des Branches C A & A G , favoir ceux de la Branche C A , quand les valeurs de z font prises entre 0 & $1 - ^4$, parce que dans cet intervalle elles donnent x négative & y positive ; & ceux de la Branche A G , quand ces valeurs font prises dès — l'infini négatif, parce qu'alors elles donnent x positive & y négative. Exemple IL Soit proposée l'éq : $x^3 - 3 y^2 - x^2 - a^2 = 0$. Quand on la place sur le Tr : anal ; on ne lui trouve qu'une seule déterminatrice supérieure AB, qui, coupant inégalement les deux Bandes extérieures , indique des Branches paraboliques dont la dernière direction est l'Axe des ordonnées , puisque la portion qu'elle retranche de la Bande sans y est plus grande que la portion qu'elle retranche de la Bande sans x. 000000 %A 000000 0000* 0000 £* 0 * 0 0 * Inirod. à l'Analyse des Lignes Courbes, O o Cette Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 25.54% accurate

po DES BK ANC HE S INFINIES HXM. Cette déterminatrice donne l'éq : $x' - a^4 y y = 0$, ou Ch.viil; X1 41 $y = rt$: pour celle de la Parabole - afymptote, qui est le Syfteme de deux Paraboles cubiques égales, Tune positive, l'autre négative, lesquelles étendent leurs Branches dans les quatre angles des coordonnées. Les deux racines de Téq: $x^* - s^* y y = 0$ étant racines simples, les quatre Branches des Paraboles - alymptotes feront infailliblement: fuivies d'autant de Branches de la Courbe. Mais si Ton veut avoir PAlymptote - curviligne, il faut calculer encore un terme de la Série, en substituant $x^* rtr a \sim > f u$ à y dans la proposée, ce qui la transforme en — $I^* a x^* = p 244 x' \ll - a + uu + \$ a^* x x - a^4 = 0$. Celle ci, étant mise sur le Tr : anal : couché sur la Bande (ans ac, a une déterminatrice utile CD, qui donne l'équation $o o o o o^* C o o D^* o o o o o^* o o o o o o o o o^* o^* - 3$ ou $u = \frac{1}{3} x$ ou l'exposant * d' x est encore positif. Il faut joindre ce terme au préx* x^* micr, & les éq : $y = H | x, j = M^*$ font celles des Alymptotes curvilignes, à moins que dans le terme suivant, x n'ait encore un exposant positif, ou zéro. On cherchera donc ce troisième terme, d'autant mieux que (on signe & (on exposant marquent de quel côté des Alymptotes tombent les Branches de la Courbe. Pour cet effet» Digitized by G(

The text on this page is estimated to be only 25.10% accurate

DES COURBES. apt Ch.vtii. effet , on (ùbftituera $=p|x^4$ à « dans la dernière equa- pl.xhl tion, & on mettra la transformée $^{\text{naatv?}} \pm =ia^*tx$ — 44// $>i^*la+xx$ — $a6=zo$ fur le Tr : anal : Sa déterminatrice EF donne $z+naatx^* 4- \pm a+xx = o9$ foit $\neq rt f^x$ — où Texpolant d' x eft négatif o o o 000 o of* o o o o o * F 00 o o * o 0000*0* La Courbe a donc quatre Branches infinies , dont la pofuion à l'infini eft déterminée par celles des Afymptotes* curvilignes, que représentent les éq: $v=>i^* jx^a x'$ — — $4^*|x$, & qui fe conftruifent ainfi. Pour la première on décrira fur les Axes A B , A C une Parabole-cubique ADN, dont les abfciffes [A P] x portent les ordonnées [P N] — ; & on mènera par F Origine A la Droite A F tellement inclinée à l'Axe AB , que les abfciffes A P foient les deux tiers des ordonnées P En fuite de chaque ordonnée P N [-] de la Parabole on retranchera N M égale à PQ.[lx], & la Courbe mbABM qui paflê par tous les Points M eft celle que défigne fcq: Cette Courbe eft elle-même une Parabole cubique, dont les abfciffes 2 [AQj font prifes fur la Droite A F & Oo 2 i dont Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 23.54% accurate

292 DES BRANCHES INFINIES FLXIH. dont les ordonnées u
font QM. Car puifque $AP = \sqrt{Ch \cdot vHf}$ & $PQ = ix$, $AQjzl$, qui
 $eft = v / (APi^2 \cdot P.Qk2)$ [on fuppoſe l'angle APC droit; mais quel qu'il ſoit, la
raifon • de AO à AP eſt donnée, & cela revient au même,] AQ , diſ-ſe, fera
 $\sqrt{(i + \{) = i \cdot V \setminus u}$ & $QM[«] = Qf x' 4 \{ * 3 * 4xx - d4 = 0$, ou $(xx - aa)$ ro,
qui a deux racines réelles $xz = a$, $x = -a$. De chacun de ces deux points G ,
 g , partent deux Branches paraboliques $GH \gg GH$; gh , ^oh qui ſ'aprochent
toujours plus des Paraboles ■s. • * Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 27.74% accurate

DES COURBES. 293 CH.viii. les BE, BE, bc, b*, que nous leur avons assignées pour Pt.xm. §. m*. Afymptotes. Car l'ordonnée PH [y] de la Couibe est égale à $— — fx + \sqrt{}$ & l'ordonnée PM [u] de la Parabole est égale à $— — 4^*$. Donc PH surpasse PM d'une quantité $[HM]^\wedge$ &c. qui diminue à mesure que x augmente, & s'anéantit quand x est infinie. Les Branches G H, BM de la Courbe & de la Parabole vont donc toujours en s'approchant, & coïncident enfin. Cela s'ajuste très-bien avec ce que nous montre la résolution de l'équation proposée. Elle se réduit $kyy = x^* — 7ax^* > \{^* — (xx — aa)l (x-f-*)l x(x — a a a a a 9$ ou $y = a$ ■ Si on Prend * Positive & moindre que la somme x sera positive, & la différence $x — a$ négative, & il en sera de même de leurs cubes $(x+*)^3$, $(x —$. Donc leur produit sera négatif, & (à racine quarrée imaginaire. Ainsi les abscisses plus petites que 4 [AG] n'ont que des ordonnées imaginaires. Si on prend $x = a$, on trouve ce qui marque que la Courbe rencontre l'Axe des abscisses au point G. Mais quand $x > a$, $x + a$ & $x — a$ sont positives, & y est réelle & augmente à mesure que x augmente. Donc, dès le point G, les ordonnées, tant positives PH, que négatives PH, vont en croissant: ce qui forme les deux Branches infinies G H, G H. Et puisque la substitution de $— x$ à $-J-x$ ne change rien à l'équation de la Courbe, qui ne renferme que des puissances paires de x il y aura aussi du côté des abscisses négatives deux Branches infinies g h, %h égales & semblables à GH, GH. Oo 2 Exem\ Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 25.59% accurate

ap4 DES BRANCHES INFINIES Pl-XIII. Exemple IIL I. On propose l'équation $ay^2 - 2axy + x^2 = 0$. Sur le Tr : anal : elle n'a qu'une seule racine de déterminatrice (supérieure AB, dont la position indique des Branches paraboliques avec une dernière direction parallèle à l'Axe des ordonnées. L'équation $ay^2 - 2axy + x^2 = 0$, qu'elle donne, a deux racines $ay - x = 0$, $ay + x = 0$, soit $y = -\frac{x}{a}$, $y = \frac{x}{a}$; qui déterminent deux Paraboles ordinaires, l'une positive dont les Branches s'étendent dans les angles des ordonnées positives, l'autre négative qui jette ses Branches dans les angles des ordonnées négatives. Ce sont là les Paraboles-asympotes, & puisque l'équation qu'a fourni la déterminatrice n'a point de racines multiples, il est sûr que la Courbe jette aussi quatre Branches paraboliques, une dans chacun des quatre angles des coordonnées. Mais pour avoir les Asymptotes-courbes de ces Branches, on cherchera le second terme de ces deux Séries en substituant Axx^u à y . Cela transforme l'équation proposée en $ax^4 + (2aA - a^2)x^3 + (2aAx - a^2x^2 - bx^2) = 0$. Le terme $(2aA - a^2)x^3$ s'évanouit, soit qu'on écrive $+^u$ au lieu de A pour la première transformée, soit qu'on écrive pour la seconde. Ainsi, pour l'une & l'autre, la transformée sera

The text on this page is estimated to be only 17.38% accurate

DES COURBES. Ch. vin. amuu 4 (imA — 2a) uxx — ix* = o.
 Quand elle est Pt.xlll. ,4*' tnife fur le Triang : anal : couché fur la Bande
 fans x , fo • détertninatrice utile CD donne Péq : {zaaA — 2a) uxx -kc> = o,
 ou c'eftU-dire o o *C oZ?* o 0000 00*00 fx pour la première Se'rie, & *==
 — — pour la féconde. Comme dans ce fécond terme Pexpofant x n\ pas
 encore négatif, il faudra chercher le troifième , en fnbiHtuant Bx : à u , dans
 la première transformée aaau (2**^4 — 2 *) «xx — bx* = o , ce qui la
 changera en aaBBxx 4« 2aaBtx «+» 44// 4 (2aaA— 2a)txx*t*(20a A3 —
 2*B — O x' = o . Ce dernier terme doit manquer , puifque la Café x1 à
 laquelle fe terminoit la déterminatrice doit refter vuide [§. 1 07] , & on
 trouvera en effet qu'il 2 B eft nul,foit qu'on fubftituë + ± k A & ~{ — ^ à B,
 ce qui eft leur valeur dans la premie're Série ; foit qu'on ecrit & ve pour A
 & pour B , ce qui appartient à la « 44 féconde Se'rie. Mettant donc la féconde
 transformée saBBxx + 244B/X + aatt 4. (2aaA — 2a) txx = o fur le Tr:
 anal: fà déterminatrice utile EF donnera aaBBxx >i*(2aaA — 24) /xx =0 ,
 ou /= —r* \ c'eftN J 1 2aaA—2a à- dire Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 25.65% accurate

29(5 DES BRANCHES INFINIES *-x"1- à-dire pour la première Série; = + £ Cs"™ pour la féconde. • o o o oE* *F 00*0 o o * o o Ainf les équations des Afymptotes - courbes font v =5 sxx . bx bb a. xx bx bb ^ & v= + — ; car le a 4/1 644 a 4a 64a terme fuivant ne peut avoir qu'un expoiant négatif! H eft pourtant bon de le calculer pour connoître la pofition des Branches de la Courbe autour de leurs Alymptotes. Pour cet effet on fubftituera dans la dernière équation C>{*J au bb lieu de / [C vaut — - — , pour la première Série , & b b 4* j— j pour la féconde] ; ce qui la transformera en (aaBB + laaAC — 2*C) xx 4« laaBCx + laaBsx + aaCC * { *2a Cs>*aass-\-(2aaA — 2*)/xx = o, où le premier terme doit difparoître , puifqu; la déterminatricc aboutitToit à la Café xx. Les autres, mis fur le Triang : analyt ; ont une déterminatricc utile , qui donne Péquat : >i*2daBCx-i- (iaaA — 2a) sxx =r o , ou /rr:— ^aaA^ïa^ ' b% = [pour la prémière Série] ^ & [pour la feconde] — . J 5I24X Les kJ by Google

The text on this page is estimated to be only 22.51% accurate

DES COURSES. ap7 Ch.VIII t / $\hat{I}^*X$. bx bb xx bx , bb « ... Les
cq: $v=-$ — — , & $v=$ — $>f$ des Asymptotes - curvilignes (è peuvent contruire
ainfi. Pour la première, qu'on décrive sur les Axes AP, AE , % la Parabole
QAQ , dont les abscisses AP, Ap e'tant x, 2 XX les ordonnées PQ, pq font —
: & qu'on mène par l'Origine A h Droite AT, dont les ordonnées PT, pt font
bx — . Ainfi joignant les ordonnées de la Droite à celles

The text on this page is estimated to be only 23.33% accurate

a9S DES BRANCHES INFINIES PL.XIH. TV = AE = RS] = PQJ puifque QR = PT] = Ch.vhl 7 XX 7aZZ r n i AT» -| ■ * • ' I[^]t = [en mettant pour x la valeur -y.]. L'équation entre les coordonnées EV[z]&VS[*]cft donc u = , qui eft celle d'une Parabole ordinaire [§. f«?-97. Qu'on tranfporte cette Afymptote en S E .S* , en preb b nant AE = — , AF = i li* , menant la Droite EFV, & 64* décrivant fur l'Axe EV des abfcifles & fur l'Axe EA des EF1 ff ordonnées , avec un Paramètre [*J] , la Parabole SES, dont l'équation, relativement aux Axes EV, EA, fera « — 5 ' , mais relativement aux Axes A F , Ae, v = — »+- — . Qu'on tranfporte auflî fur les memes Axes, l'autre Afymptote - courbe se/, en prenant b b l'ordonnée pofitive Ae = - — , PabfcilTc A F b ; tir 044 rant la Droite eFv, & décrivant fur les Axes ev, eA, eF1 ff avec un Paramètre -7-=, r —], une Parabole se/, dont 9 AF L 4 J azz Téquation relativement aux Axes ev , e A fera * = — — . Mais , relativement aux Axes A F , Ae , elle fera v = — — ■ » — 5 + Car/.<. = ^F:AF=ev[2]:AP[N]. Donc , & cette valeur fubftituée dans l'éq :»==la Digitized by Googl

The text on this page is estimated to be only 24.15% accurate

DES COURBES, 299 C|.™ la change en *=- 5İ. De plus ,
ÀF[W]: Ae[^] p^mbbsFP[*— iV*]:Pv[-£— Doncvst— «] ==Ps[_

The text on this page is estimated to be only 22.58% accurate

300 DES BRANCHES INFINIES qui partent ensemble la Comme
 $2^* \setminus$ comme h & $2a$ — CH.vrn; elles donneront une même valeur $a'' x$. La
première don- $f^* 1^{**}$ ne hh — iah — $\%aa$ pour le dénominateur de la
fraction égale à x , & la féconde donne $4/1^* — j^{ah} * \{^* hh — + aa \pm 2ah$
— $\$aa = hh — 2ah — ? \$aa$. On pourra donc Coupler deux à deux ces
valeurs de z , qui donnent une $jj \ll yj \ll y$. même $abfciflè *$, avec différentes
ordonnées & aa . Il est encore aisé de voir que si ces deux aa valeurs de z
font positives, elles ne peuvent donner pour x une valeur qui approche plu*
de zéro, que quand elles font égales chacune à a , ce qui donne $x = — aa^{\wedge} =$
 $0 \ 1 — 2a$. $2a — — \& v = [22 = 1$. Mais cela deviendra plus * * $L aa \ J \ i6rf$
fenfible en fixant les valeurs de a , & de b . Soient, par exemple, $a \sim 1$ & $\pounds$
 $\sim 1 \ 2$, & failant $i, o, — i, — 1, -2, -3, — 5$, &c. $^{*i} > 2 \gg 2\hat{I}, g, 4, 5, 7 > \&c$. on
aura $^{*} = — 3, — — 4, — o, — 2jy > / \gg / , ii4 \}, — j, — \&^{*t} Ci U$ paroît donc
que la Courbe a quatre Branches, dont deux AS, As partent de l'Origine A,
& les deux autres. CS, Cs du point C, qui a pour abscisse $AB = — i \& > \&$
pour ordonnée $BC = — —$. Les points de la Branche AS font donnés par les
valeurs de z , qui font au-de(Tus de 3; ceux de la Branche A s par les
valeurs de z , qui (ont igitized by Google

Digitized by Google

Fig. 92.

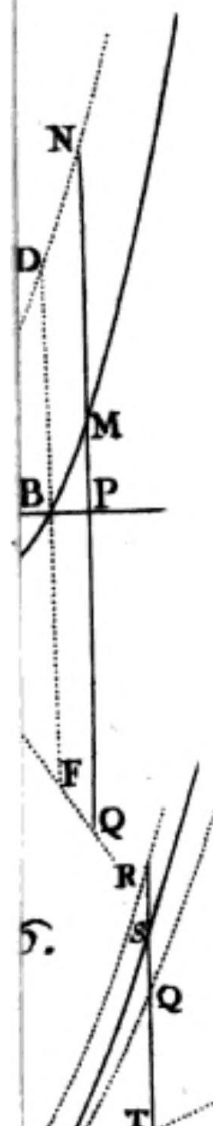


Fig. 93.

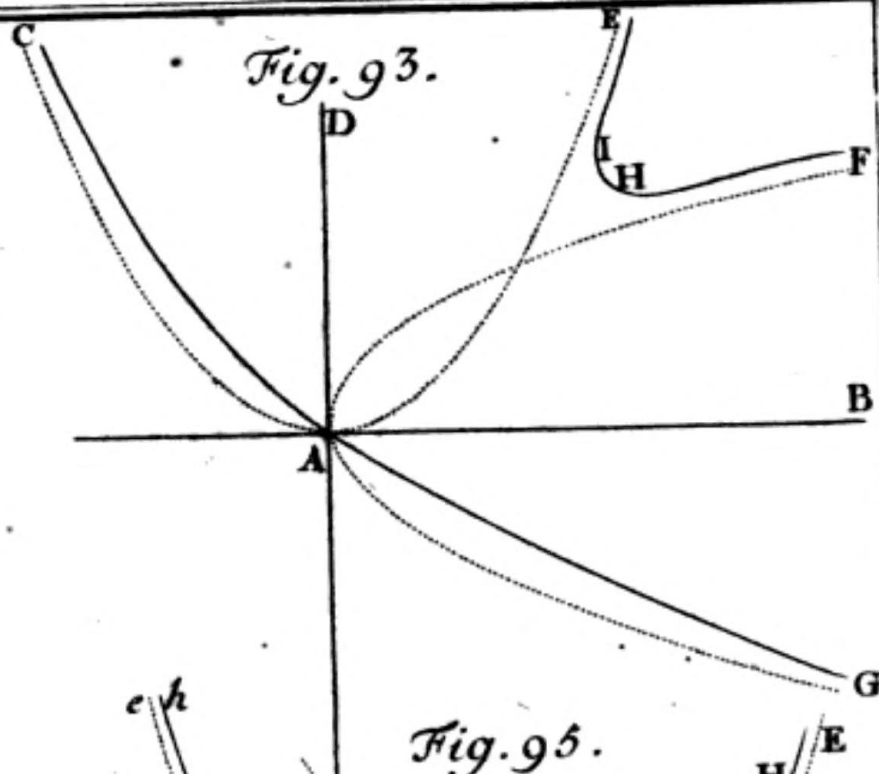


Fig. 95.

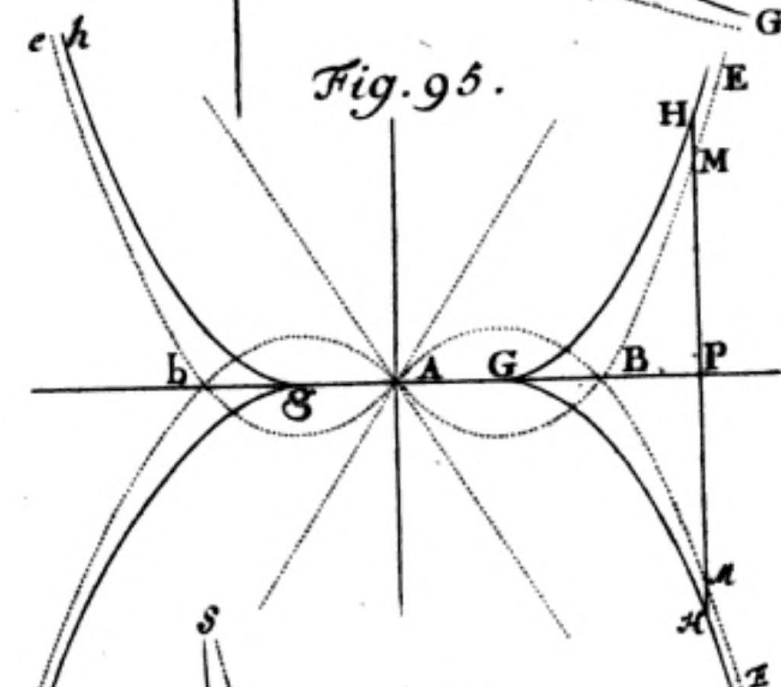
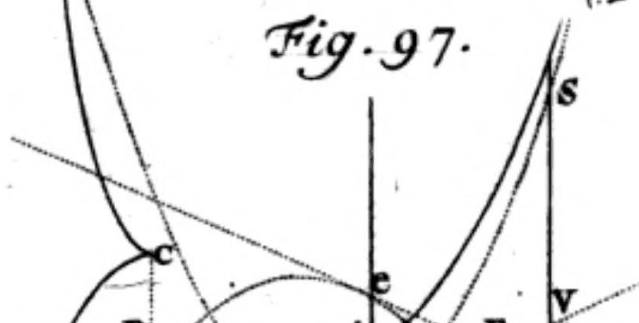
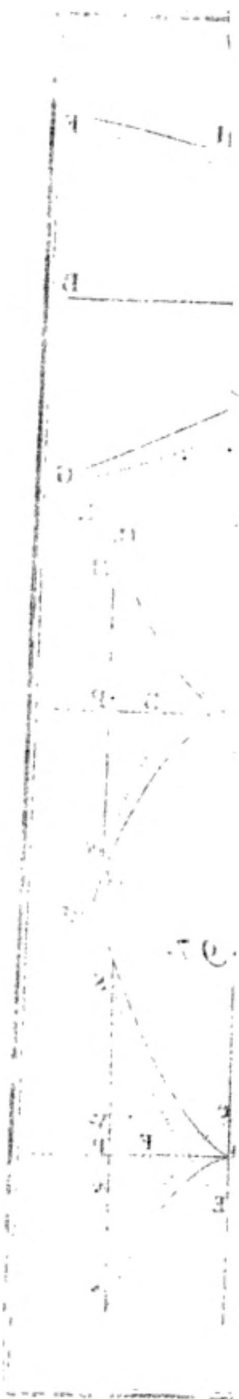


Fig. 97.



The text on this page is estimated to be only 2.50% accurate

1 \



The text on this page is estimated to be only 18.84% accurate

... D E S C O U R B E S. 3:1 Ch.viii font au-defibus de — 1 ; ceux de la Branche CS par les Pl xiil \$. »4*- valeurs de z , qui font entre 3 & 1 , & ceux de la Branche C/ par les valeurs de z prilès entre 1 & — 1. 2. Si dans Péquation propofie on change feulement le flgne du terme — 33c*; alors, quoique l'équation remplif. fe les mêmes Cafés fur le Tr : anal : , la Courbe qu'elle repréfènte eft entièrement différente. Car Péq : aayy — 2Atcly $x^2 = 0$, que fournit Tunique determinatrice fiipérieure , n*a que des racines imaginaires a y — (1 =±r y7 — 2) xx = o. Donc la Courbe n'a point de Branches infinies. En effet, fi Ton transforme fôn équation , comme la X X Z précédente, par la fùbftitution de — au lieu d'^ , on aab \z r -M aura x = ■ = - — [en prenant zz 2az + \$aa zz — 22+ ? toûjours a= 1 & b= 12], où Ton voit qu'il n'y a aucune valeur de z , qui donne x ou; infinie. Et le calcul cy- joint fait voir que la Courbe cfl une efpèce d'Ovale , dont les points de l'arc A E D font déterminez par JJj XJV' les valeurs de z prilès au-deflus de 1 > ceux de l'arc D B ' par les valeurs de * prilès entre 1 & o , & ceux de Tarc B F A par les valeurs négatives de z. Xj s> o> — i, — 2, — ?, &c. -i ii, 2, 3, 4, 5, &c. 6> 5i> 4> 2» Iii> |> &c. 6 r4l> °> 4> — — i|, &c. * 421,, 32 , 12, 4l%, 2Î, &C. Mais fi au lieu de \$x4, ou on avoit eû 4? x4, l'équation de la determinatrice (croit aayy — 2axxy + x*=o, qui n'a qu'une feule racine, mais double ,

The text on this page is estimated to be only 24.64% accurate

302 DES BRANCHES INFINIES pl. Xiv. ay — xx z=l o. Il n'y a donc qu'une Parabole-afymptote Ch.tiii. 5 A S décrite fur les mêmes Axes que ceux de la Courbe , >• «4* *' avec une dernière direction parallèle aux ordonnées. Mais cette racine double fait voir [§. 1 1 j] que le terme fuivant eft demi-imaginaire , puilqu'entre la déterminatrice 6 fa parallèle qui parte par 4e terme b x* du (ccond Ordre, il n'y a qu'un intervalle. La Courbe n'aura donc que deux Branches infinies , toutes deux d'un même côté de l'Axe des ordonnées. Mais pour le voir plus clairement , qu'on fubftituè $V^+ + u$ à y dans la propofée , & elle Ce réduira à $aa u - bx' = 0$, qui, fans être mife fur le Tr; an : donne ces deux racines $n = + \sim y/bx$, & $* = - \sim a y/bx$, lefquelles terminent la Série. Ainfi l'équation de la Courbe eft $r^{\wedge} = r^{\wedge} dr \ddot{i}$

The text on this page is estimated to be only 25.26% accurate

DES COURBES, 30} Cm vin. 4. Si, dans ce même cas, au lieu du terme — $bx^* Pi.xiy. S- 14^*$. J'équation proposée avoit eu — ^{V} , il y auroit cù deux intervalles entre la déterminatrice AB & la parallèle CD, o o o o * A 00*0 J3* o *C Do o o de façon que le (ècond terme de la Série ne fera plus demi-imaginaire, mais imaginaire ou réel [§. 113]. En PCX fubftituant — Hb» dans la proposée aayy — $2^*xxy>k x^* — bhxx = o$, on la transforme en aauu — $bbxx = o$, dont les racines (ont mu $z+z bx = o$ ou «= =fc - . 5C3C ^ V La proposée est donc réductible en ces deux $9yzzz\sim. ^*$ OCX J & $y= — — —$ • Auffi la Courbe est-elle composée de deux autres, qui font de {impies Paraboles, qu'on peut conftruire ainfi. Qu'on donne à Tablciflè Aa[a] les or- % i

The text on this page is estimated to be only 20.27% accurate

jû* DES BRANCHES INFINIES PL-XIV tion fera , = $\sqrt{dr}$. Car
 $Aa|>]: AB$, ou $A b$, $[f] fx = A P [*] : AQj$ ou Aq , $[i]$. Donc $z = \text{---}$, & $u = \text{---}$.
 $[^=]-$. De plus, $Aa[>]:aB$, ou $ab [dr 6] \_ APfxJrPQjOu p^{f-t^j}$, Ainfî pm , ou
 Pm , $[y] = PQJfQM[+^{^^}]$ ou $\text{---}Pq + qmC-\zeta^{^^}$. 4 • Exemple i. LYquation
propofée eir $* 2*xy + + \% + \text{---} 2abxyz + *l*V = o$. Sur le Triang : anal .
elle n*a qu'une de'terminatrice fupérieure AB , qui par (à pofition fait
efpérer des Branches paraboliques, dont la dernière direction eft PA xe des
ordonnées. L'eq : $x^6 + 2bx'yx + bbf \text{---} o$ que donne la de'tero $o o o o o *A$
 $000*00 B* 000* 0*00 m OO* O O o$ minatrice AB ne de'ment point cette
cfpérance : fa racine . double $x' ^by \backslash = oi$ ou lès racines doubles $y = fc x \backslash \text{---} v$
, indiquant une Parabole femi-enbique [c'eft le nom 3ue lui donnent les
Géomètres] qui étend deux Branches ans les angles des abfciffes négatives.
Mais , comme ces racines ib'nt doubles , il faut , avant que prononcer fur les
Branches infinies de la Courbe , chercher le fécond terme igitized by Google

The text on this page is estimated to be only 13.91% accurate

DES COURBES. 30; *3m1? tcmc de la Sérle * cn fubftit"ant $\wedge xV$
 $\text{---}^{\wedge} \text{zu lieu d} > \text{Pl}^{\text{XIV}}$ dans l'équation propofee. En voici le calcul , par la
méthode du §. 106. L Ordre IIe. Ordre IIIOrd. $M4 > i * 2hcy * \%4 + 2^{\wedge} X4$
 $**tfx/ \gg f < ***** O24O 2 O a mO ; \text{---} 2X^* \text{---} tfAx' / + 24h4 O i O 4^{**} > \%'$
 $\text{---} y s \ll \text{La transformée} \text{---} 4 V = b 4^{*} x^{*} y7 \text{---} y - * \text{££} * 4^{\wedge} 4^{*} 6x' = p 4^{**} V \gg$
 $y7 - f \text{---} + a V = o$, étant mife fur le Tr : anal : couché fur la Bande fans x ,
n'a qu'une déterminatrice utile CD, qui donne $\text{---} 4\$xV + 4^{\wedge} \text{£} x + o o o o o^{*}$
 $C oD^{*} o o 0000^{*} 000^{*} 00 00^{*} 0000$ htirod. à fdnafyfi des Lignes Courbes,
 $Q, q = 0$ Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 21.94% accurate

3o<5 DES BRANCHES INFINIES Pt.xi7. =o, ou u-=ziz *l'autre*
*r±: lfox% y/ax~o , ou * = =F 2*

The text on this page is estimated to be only 23.94% accurate

DES COURBES. 307 Oi-Vin. o Px^{XIV}; o o o o ~o o F* o o
 00*00 000*00 00*0000 E ■• la Série $y = \pm xy / -^{\pm} = V ax$ ne change point ,
 encore qu'on lui ajoute l'une ou l'autre de ces deux quantités $= \hat{i} = 2xV'y$, ou
 $= *z2i/ax$. Donc cette Série est complète , & elle est l'équation de la Courbe.
 Ainfi la Conftruction est facile. Car si on décrit sur les axes AB, AE la
 Parabole semi-cubique SAs, dont les xoi; ordonnées (ont $^{\wedge}zx^{\wedge}-y$, & la
 Parabole ordinaire TAt, dont les ordonnées sont ax , & qu'à chaque abscisse
 AP[x] on donne les ordonnées PM[$4 < x y / -j + i/a x$] , PM[$- xV*y - Vax$]
 égales à la somme St, ou Ts, & les ordonnées Pm [$+*Vy - Vm[- xy/j$
 $*hy/ax$] égales à la différence ST, ou ts, des ordonnées de ces Paraboles, on
 aura la Courbe MDABm/wBAd M que représente l'équation proposée $x^6 -$
 $ibx*yy - iabx* 4 \ll bbf labbxf 4* aabbxx = 0$. Mais si l'on fait attention à ce
 que les racines, $y - - V''* = 0$ qui représente la Branche A DM, & Ofi3 y +
 Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 22.04% accurate

308 DES BRANCHES INFINIES *txiii. $y > frxy / \sim > \{4^ax = io$ qui exprime la Branche A d My ^{JJ} multipliées Tune par l'autre , font l'équation rationnelle $yy - - - 2xx\} / £ - 4x = o$; & qu'auffi les deux racines , $y - x^{-j} > \{^* \} / ax = zo$ qui de'figne la Branche ABm , & $y + x Vj - - - V^* = 0$ qui marque la Branche AB/», multipliées Tune par l'autre , donnent l'équaX* A tion rationnelle $j^ - - j + 2xxv / -£ - 4 + j 2^{**} / +^{**} = 0$ de ces deux équations , ou l'équation propofée $^y >^* - 1 2fcx'jçy + x6 - 2 4\$x^* - 2 *£^*xyjr + ^x^* = o$ repréfente le Syftême de ces deux Courbes m AA/, mBABAf. 14\$. Cas IV. Enfin, Iorfqu'une déterminatrice fupérieure coupe également les deux Bandes extérieures du Triangle analytique & fait avec elles un triangle ilbfcele , elle elt appliquée fur le plus haut Rang de l'équation. Les racines qu'elle peut donner font ou $y = o$, ou $x = o$, ou $y - Ax$, foit $x - jj >$ On a parlé dans les §§. précéd. des Branches que défignent les racines $jr = o$, $x = o$; il s'agit prélèvement de celles qu'indiquent les racines $y = Ax$. Leur dernière direction eft oblique aux coordonnées^

igitized by Google

The text on this page is estimated to be only 26.94% accurate

DES COURBES. 505? Ch.vhi. données , & parallèle à la Droite représentée par cette rx..Xiy. I4Î* éq : $yz = Ax$. Et autant de racines de cette forme qu'a l'équation faite en égalant à zéro le plus haut Rang , autant y a-t-il de dernières directions obliques ; quoiqu'il le puifle très - bien faire que toutes ces Branches infinies, ou du moins quelques-unes, soient imaginaires. Pour s'aflurer de l'exiftence , de la nature , & de la pofuion de ces Branches , dont l'équation du plus hauc Rang a fait connoître la dernière direction , il Je préfente deux moyens *. Le premier confifte à transformer l'équation en forte que l'Axe des ordonnées conlervant là poluion , celui des ablcifles (bit parallèle à la dernière direction des Branches , qui eft connue. Alors l'équation eft réduite à quelcun des trois Cas , qui ont e'té détaillés dans les § §. préc. & par les Remarques qui y ont été faites , on jugera de la nature de ces Branches infinies. La manière de faire cette transformation a été indiquée au §. 2 5. 1 1 1°. Soit A B l'Axe des abfcifles , AD ce- r** , 0* lui des ordonnées, AC, ou Ac, la Droite parallèle à la dernière direction de quelques Branches infinies , reprélentée par l'éq : $y = Ax$, de forte que l'AbfcifTe AB [=i] ait l'ordonnée BC ou Bc[= /f] pofitive ou négative félon que le marque le figne \$A. Soient encore AP[x] & PM[^] les coordonnées dont la relation eft exprimée par l'équation propoféc. On la transforme en une autre qui exprime le raport des coordonnées A Q^, ou Aq[z] & Q^M, ou qM[«] , en fublittuant dans la propcfje pz pour x, & qz*{*u pour y , où pz eft AP qz eft PQ^, ou Pq , & u eft QM ou qM. Ainfi les nombres 1 , p , q y défignent le raport des cotés QA , AP , I3Q^ du triangle APQ^ ou qA, AP, Pq du triangle AVQ± Mais Qjq 3 lt * M. De G o a , Ufage de ÎAnul pag. 160. Digitized by Google

310 DES BRANCHES INFINIES Pi-xiv. le triang: $APQ^{\wedge}$, ou APq
 est femblable à ABC , ou ABc . Cn.vnL Donc le raport i , p , q des côtés QA
 ou qA , AP , $PQ^{\wedge}$ ou Pq , est le même que celui des côtés CA ou cA , que
 nous nommerons E , AB qui est i , & BC ou Bc qui est iA . Ainfi $7 = \pounds$.
 Après la transformation, iA on écrira donc $-g$ pour p , & $^{\wedge}$ pour q ; ou, ce
 qui fera plus (Impie, on laiûera p pour marquer la fraftion $^{\wedge}$, & au lieu de q
 on écrira $Apl = Ax^{\wedge} = \sim \sim \backslash$. La valeur de cette lettre $E[\sim y]$ dépend de la
 grandeur de l'angle DAb , ou $AB C$, que font entr'elles les coordonnées : &
 comme cet angle est donné, auffi bien aue $AB[i]$, & BC ou $hc[A]$ -, AC ou
 $Ac[\pounds]$ est aufis donnée. Si G représente le Sinus du complément de cet
 angle ABC , ou ABc , le Sinus total étant i , E fera $^{\wedge}(i^{\wedge}GA + AA)$, où le
 signe $+$ a lieu quand l'angle ABC est obtus, & le signe $-$, quand il est aigu.
 Car fi on abaiflè $A I$ perpendiculairement fur CBc , l'angle BAI fera le
 complément de $AB 1$ ou ABC . Donc $AB [i]$ étant le Sinus total, BI fera le
 Sinus G . Mais [Eucl. 11. 12 & 13] $AC'^{\wedge}AB' - f BC^* - 2CBI$, & $Ac1 = AB^*$
 $+ Bc1 + 2cBI$, c'est-à-dire $EE = i > k AA \pm 2GA$. Quand les angles ABC ,
 ABc font droits, alors $G = 0$ & $EE = 1 + AA$, ou $E = i/(i + AA)$. L'autre
 moyen de connoître la nature & la position des Branches infinies d'une
 Courbe, dont la dernière direction est connue par le premier terme $Ax <$
 d'une Série qui donne y en x , c'est de chercher le fécond terme de cette
 Série, en fubftituant $Ax + u$ à y dans l'équation propose. Ce moyen ne diffère
 prelque point du précédent. Dans 1 oy Google

The text on this page is estimated to be only 24.25% accurate

DES COURBES. 311 Ch.vitl Dans Tune & dans l'autre transformée, u repreTente QM , Pi.xiv. S* H* ou q M, portion de l'ordonnée, comprise entre la Courbe & la Droite AC, ou Ac, parallèle à la dernière direction. Mais au lieu que la transformée précédente donnoit le raport de Q^M , ou q M , [«] à A Q^, ou Aq, [z] ; celle-ci donne le raport de QM , ou qM , ["*] à AP [*]. Ce n'est donc pas proprement Péquation d'une Courbe , puifque QM, ou qM , n'est pas l'ordonnée de l'abfciflè A P. Cependant ce terme u [QM ou q M] de la Série étant connu , il fait juger de la nature des Branches dont cette Série exprime l'ordonnée. Car fi Pcxpofant d'x dans ce fécond terme eft petitif les Branches font paraboliques & leur dernière direction cil parallèle à A C ou A c [§• 1 3 3]• S'il eft négatif, les Branches font hyper boliques , & leur Afymptote droite eft AC ou Ac [§. 1 3 1] . S'il cit zéro, les Branches font encore hypci boliques ; mais leur Afymptote droite eft parallèle à ÂC ou Ac [§. iji]. Et pour avoir la fituation des Branches par raport à cette Afymptote, il faut chercher encore un terme de la Série, dont l'expoiant foit négatif! Exemple I. On propofe Péq : $x^4 - x^* f^* a^* = 0$. Sans la mettre fur le Tr : anal: on voit que ion plus haut Rang égalé à zéro donne Péq : $x^* - x' = 0$, qui a d'aboid une racine double $x = 0$, par laquelle divilant deux fois l'équation, on a $x^1 - y^1 = 0$, qui le réduit à ces deux équations fimples $y - x = 0$, & ; $+ x = 0$. Celles-ci comparées avec la formule $y - y^t f x = 0$, donnent $A = i$, & $A - - 1$. Ainfi donnant à Pabfciflè AB [1] $r > g$. 10\$. " les ordonnées BC= $+i$, & Bc = $- 1$, les Droites AC, Ac, & l'Axe des ordonnées AD font les dernières directions des Branches infinies que peut avoir la Courbe. Celles dont la dernière direction eft AD iè trouvent lans autre Calcul par la déterminatrice de l'équaiioti miic lur le Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 20.81% accurate

5i2 DES BRANCHES INFINIES •Pl. xiv. le Tr ; anal; , qui partant par la Pointe & par la Calé Ch.viil x^*y^* , donne Yéq : — $x'y^{*+**} = 0$. Car, puifqu'elle ie rclout en ces deux $xy^{aa} = 0$, & $xy - 44 = 0$, $00*0^*0000\ 000\ 0\ 0^* t>n$ voit qu'elle indique pour l'Afymptote- courbe de ces "Branches deux Hyperboles ordinaires, Tune pofuive, l'autre négative ; lefquelles par conféquent étendent leurs Branches dans les quatre angles des coordonnées. Et comme cette équation n*a point de racines multiples , on elt afTure' que la Courbe jette aufli une Branche dans chacun de ces quatre angles. Quant aux Branches dont les dernie' res directions (ont A C & A c , on en cherchera la nature , en prenant les abfcifles fur ces Droites AC, Ac. Il faut donc fubrtituer /zàjr&fz-+-«ày, dans l'équation propofee. Selon le j. 30, le calcul s'en fait ainfi, ($* - //ff$)»4 02 o 1 1 —ppuun Après quoi, dans la transformée — $PMI^{o\%4f} - vppquz^* - pputtLZ\ 4\ll a^* = 0$, on lubftituera Ap , c'eft-à-dire $\pm p$ [puilque $A = ^ = 1\ 3$ au lieu de 7, & elle (c convertit en $2p^*uzi - ppTtuzz + ** = 0$, où le terme a^* a difparu, lelou la Remarque du §. 107. Cette £ Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 26.22% accurate

DES COURBES. 31\$ Cn.v. Cette équation exprime la nature de la Courbe relative Pl Xiv. §• «4J. vement aux axes AD, AC, si Ton donne au premier terme le signe —, & relativement aux axes AD, AC, si Ton lui donne le signe + parce que pour la Droite AC, A est = 4* 1, & P=f> « pour la Droite AC, A est = — 1, & /> = — f. Si on suppose que l'angle ABC est droit, alors AC & AC font chacune égale à $\sqrt{2}$ = valeur qui substituée dans l'éq: $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$, la transforme en $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 0$, V2 Il est aisé maintenant de connoître par cette équation ce que (ont les Branches infinies qui ont leurs dernières directions parallèles à AC, AC. Pour juger des premières, on mettra sur le Tr: an: l'éq: $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 2p, uzt$ — $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 0$, & on lui trouvera trois déterminatrices. L'une $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 0$ qui passe par la Pointe & par la Calé uzz> exprime les Branches dont on a déjà parlé, qui ont pour Asymptote l'Axe des ordonnées. L'autre qui passe aussi par la Pointe & par la Cale «zl exprime des Branches hyperboliques qui ont pour Asymptote AC prise pour Axe des abscisses. L'éq: $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 2p, uzt$ ou $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 0$, qu'elle fournit, indique deux Branches dans les angles DAC, dAK des coordonnées de même signe. Et comme elle n'a point de racines multiples, les Branches de la bitroà. à l'Alaiye des Lignes Courbes. R r Courbe Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 23.59% accurate

314 DES BRANCHES INFINIES Fuxiy. Courbe fuivcnt celles de rAfymptote - courbe dans ces Ch.viii mêmes angles. 14>* La troifième déterminatrice travèrle le plus haut rang & donne IVq : — 2p,rtzi — />V/ îzI==o , qui divilec par /r'jvzisâfiO [dont les racines « = o, & z = o marquent les Branches infinies qui ont leurs dernières directions parallèles à l'Axe des abfciflès A C , & à celui des ordonnées AD] le réduit à u = — 2pz . Elle exprime donc des Branches infinies dont la dernière direction fe détermine en donnant à PabclTc 1 une ordonnée — 2pi ou, ce qui eft la même chofe , en donnant à Pabfcifle — P [= Er=AC] une ordonnée — 2 [m Ce], 8c menant la Droite Ac. Ces Branches font donc juftement celles qu'indiquoit la féconde racine y *{* x sas o , du premier rang de la propofee , & qu'il s'agit maintenant d'examiner. L'équation de la Courbe relative aux Axes AD, Ac , • étoit + 2/>'«z' — /«V 4« a* = o. Si on la met fur le Tr : anal : elle y occupera les mêmes Cafés que la précédente , & y aura les mêmes de'terminatrices. Celle qui travèrle le plus haut rang défigne les Branches dont la dernie're direction eft parallèle à A C. Celle qui patte par la . Pointe & par la Cale «:z* , indique les Branches dont PAfymptote eft l'axe A D des ordonnées. Et celle qui pafle auflî par la Pointe & par la Cafe «z1 , marque des Branches hyperboliques , dont PAfymptote droite eit PAxe des abfciflès Ac. Pour PAfymptote - courbe elle donne l'éq : 2p%u zi + *4 = o , ou *= — jp^î > défigne deux Branches infinies qui fè jettent dans les angles dAc , DAK des coordonnées de fignes contraires. La Courbe représentée par Péq : x4 — x"yl + a*=o, a donc huit Branches hyperboliques , dont quatre ont pour Afymptote Paxe DAd des ordonnées , & les quatre autres les Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 22.68% accurate

DES COURBES. }ij Ch. vin. tes Droites AC, Ac qui coupent en deux également les Pl.XIy. §. i43- quatre angles, des coordonnées. On trouvera la même chose par la Méthode des Séries. Des deux déterminatrices qu'a l'équation proposée sur le Triang : analyt : celle qui part de la Pointe & par la Cafe xly est supérieure quand le Triangle est couché sur la Bande sans y. Elle est donc propre à une Série qui donne x en y , & pour le premier terme de cette Série , elle fournit l'éq : — $x^4 - 4ax^3 + 6a^2x^2 - 4a^3x + a^4 = 0$ II est inutile d'aller plus loin ; & Ton voit dans ce (cul premier terme quatre Branches* qui accompagnent l'Axe des ordonnées , en se jettant dans les quatre angles des coordonnées. Les racines de l'éq : — $x^4 - 4ax^3 + 6a^2x^2 - 4a^3x + a^4 = 0$ étant (impies , les termes suivants n'auront point de racines imaginaires , qui détruiraient l'indication de ce premier terme. L'autre déterminatrice donnoit $x^4 - x^2y = 0$, ou $y = \pm x^2$: m , qui représente les deux Droites AC , Ac. En substituant $y = x^2$ dans l'équation se transforme en — $x^4 - 4ax^3 + 6a^2x^2 - 4a^3x + a^4 = 0$, qu'on placera sur le Triang : analyt : couché sur la Bande sans x ; & l'on trouvera une déterminatrice utile, AB , qui donnera l'éq : $2x^3 - 4ax^2 + 6a^2x - 4a^3 = 0$, ou $x^3 - 2ax^2 + 3a^2x - 2a^3 = 0$, Et des lors la Série est régulière. Ses 2X^o $x^3 - 2ax^2 + 3a^2x - 2a^3 = 0$ deux premiers termes $2x^3 - 4ax^2$, dénotent des Branches 2X Rr 2

16 DES BRANCHES INFINIES lu xiy. hyperboliques qui tombent au-delà de leurs Afymptotes Cn.m droites AC, Ac. §. m* Cela est conforme à ce qu'on a trouvé par l'autre Méthode , & à ce qu'on peut lire dans l'équation de la Courbe. D'abord , comme elle ne renferme que des puissances paires de x & de y , l'origine A est un Centre général [§• 75] > & il faut d'examiner la portion de la Courbe renfermée dans l'angle DAB des coordonnées positives. On réduira l'éq : $x^2 - \frac{y^2}{a^2} = 0$, à cette forme $yy - xx^2 = 0$ ou $y = \sqrt{xx}$, expression qui fait voir que chaque abscisse x a son ordonnée y. Si on prend x infinie , xx fera infinie : Si on prend x infiniment petite , y fera infinie. Donc , & à l'abscisse infinie . & à xx ' l'abscisse infiniment petite , répond une ordonnée infinie. Puisque x infiniment petite donne y infinie , l'axe des ordonnées AD est une Afymptote de la Courbe. Et puis que $V (xx + t)$ diffère d'autant moins de x [$\pm g y / x x$] que - est plus petite, ou que x est plus grande, PM [$= \sqrt{xx + t}$] diffère d'autant moins de PQ [$= AP = x$] que x est plus grande, c'est-à-dire , que la Branche de Courbe approche d'autant plus de la Droite AC qu'elle s'éloigne plus de l'Origine. Cette Branche est donc hyperbolique, & AC est son Afymptote droite. Et il en est de même dans les trois autres angles des coordonnées. On verra très distinctement le cours de cette Courbe, en la décrivant par points au moyen de l'Hyperbole ordinaire LI / décrite entre les Afymptotes AB , AD. Car si de chaque point L, I, / de cette Hyperbole , on abaisse sur Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 26.25% accurate

DES COURBES. devra, fur AB, les perpendiculaires LK , lk , /£, & qu'on les prolonge en I , i , / , de forte que les Droites Kl , ki , ki forent égales aux distances AL, Al, A / des points L,l,/, à l'origine A ; les points I , i , i feront à la Courbe dont l'équation est $x^4 - xxyy - 44 = 0$. L'abscisse AK étant x , l'ordonnée K L de l'Hyperbole est $-$, & celle de la Courbe RI, ou AL, est $x/(AR^2 + KL^2) = v/(50c + -)$. XX a 4 Donc $> = v/C$ xx Hh —), ou $x^4 - xxyy + a = 0$. Dans XX cette Construction , il est aisé de voir que la très - petite abscisse Ai, ayant dans l'Hyperbole une très- grande ordonnée kl, l'ordonnée ki [=A/l de la Courbe est encore un peu plus grande , puisqu'elle est l'hypothénuse du triangle rectangle Akl , dont kl est un côté. Ainsi AD est l'Asymptote & de l'Hyperbole & de la Courbe. Et la très- grande abscisse AK, ayant dans l'Hyperbole une très-petite ordonnée K L , aura dans la Courbe une ordonnée K I [as AL hypothénuse du triangle rectangle AKL] un peu plus grande que AK, ou KE , qui est égale à AK, puisque AE coupe en deux également l'angle DAB. Donc AE est une autre Asymptote de la Courbe \ La Courbe complète a donc quatre portions , qui font huit Branches infinies autour de trois Asymptotes droites. Exemple IL L'équation d'une Courbe étant $4x^4 - 6xy^2 + 2x^2y^2 - 4x^2y^2 + ax^2 - V = 0$, celle de son plus haut Rang est $4x^4 - 6xy^2 + 2x^2y^2 = 0$, qui se résout en ces deux- ci $yy - 2xy \pm \sqrt{xx} = 0$, & $4x^2 = 0$. La première est une racine double $y - \sqrt{x} = 0$, & la seconde une racine simple $y = 0$. Les dernières directions que désignent ces racines se tracent en donnant Rr s à Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 21.58% accurate

3i8 D ES BR ANCHES INFINI ES pl. xiv. à rabfcific AB = i , les ordonnées BD = i , & BC=— Ch.viii. f*. »oj. & menant les Droites AD, AC. §■ Pour connoître la nature de ces Branches , on fubftitucra pz à x & 72 Hh* à La transformée eft (4f' ~ 6ff' + M1) *' * + — \$20 20 o H-(12^1 \2pq>)uZx + (4*f)*Z t > I I i l + (12^ 6/»)«S2J 4*(2*)«« ; 0 + (4>*1 où il faut fubftituer + ? pour' /», pour avoir l'équation de la Courbe relativement aux Axes AE, AD, puifque q = Ap , & que ^ — x = o compare' avec y — Ax — o donne ^ = + 1 . Cette (ùbftitution réduit la transformée à 6prf ù + 4/' + 6ap1z* 4- \apnz + 2**// b^—O , qu'on mettra iùr le Tr: an: où fa determinatrice utile AB A * * o o * * * B o o * donne 6/>/rz 4* 6ap'zl = o , ou // • = —y/ — apz , qui cii l'équation d'une Parabole H Ah dont la dernière direction, parallèle à l'Axe des z, c'eft-à-dire, à la droite AD, tend du cote négatif Ad. Et comme cette équation n'a point de racines multiples , il n'y a pas lieu de douter que les Branches de cette Parabole ne foient accompagnées des Branches de la Courbe. Mais kJ by Google

The text on this page is estimated to be only 11.81% accurate

DES COURBES. 3ip Ch.viil Mais la Méthode des Séries rend
cette Conclufion peut- Pt.xr/. §-M5« £tre encore plus (ènfibie. En voici tout
i: Calcul par la Méthode abrégée du §. 1 06. $\hat{J}^{\hat{11}}$ IHOOrd. $c/\wedge 4/-\$*)^{\wedge}+2$
 $x\ 5\ 4.$ iaf 4.4^{***} — $P * o o y ? 2 o 2 o o o * * ^{nxyy-ux'y} + 4axy$ il $1^{\wedge} = x I$
 $o o _ + 4^{**}$ Premie're Transform. $4^{\wedge} 4\ll 5 xj7\ 4^{*} 2ayy -\backslash-\backslash axy\ 4^{*} I II III$
IVOOrd. $j^{*^{\wedge}*} 6x/4^{\wedge}*x^{*} +4/4.4^{*^{\wedge}4-2^{*}}/ 4.$ i- $1\ 2\ xy\backslash\sim axiz izyyV -ax^{\wedge}\wedge ax^{\wedge}-$
 $ax^{\wedge}\wedge ay^{\wedge}- ax\ 6xy\%+6axizso\ \hat{1}\ 4\ o\ \hat{1} — *x — 6*x*r — : 2*xj — 2aax\ o\ o =p$
 $4^{\wedge}xy/ — *x$ Seconde TransC $6xy^{*} =t\ i2*jV — *x+4/ =1= 1\ 2yy^{\wedge} —>*x\ 8$
 $axy + 2^{*}/ =t\ 4^{*^{\wedge}}/ — ax — 2aax + £' = o$, qui étant naife fur le Triang : anal
: donne Péq : $=i= 1\ 2xyy/ — axx — 2^{*}1x = o$, ou $y = dr — - — —$. Ainfi les
trois premiers. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 20.27% accurate

320 DES BRJÛCHES INFINIES xiy. o miers termes de la Se'rie
font sx Ca.vni. o o =+= r-y — — &c. Les deux premiers re#^ 6 V — ax JJ *
* présentent les ordonnées de la Parabole * * J * HAh , & le troifième fait
voir que les Branches de la Courbe embrasflènt celles de la Parabole, qui eft
leur Afymptote -courbe. Pour connoître les Branches dont la dernière
direction eft AC, on fubftituera dans la transformée $(4f^* - 6pqx + *P) z' +$
 $(\bullet 2q^* - 12pf)uZZ + (12f - 6p\}ttuz > b 4\ll J + (iaqx + 44/) zz + 4*7*z < + \bullet$
 $2**\gg - hx = 0$, calculée ci-deflus, — au lieu de q , puilque $qt = Ap$, & que
 $yf = - i$, comme il paroi t en comparant $Pe'q : ^ - iX = o$ avec $Péq : j -$
 $^x = o$. Par là cette transformée eft réduite à $\$ppuzz - 1 \hat{p}uuz + 4\ll' +$
 $^k*ppzz - \hat{a}paz 2*uu - b'' = 0$, qu'on mettra lùr le Tr: anal: où elle a une
déterminatrice $^f\hat{i}$ parallèle à la Bande fans $A * * * o * * * B o o * z$, qui
donne $Péq : \$ppuzz + ^\backslash appzz = 0$, ou $'* = - - \backslash *$. Elle de'figne donc [\$.
139] des Branches hyperboliques dont PAfymptotc- droite eft PabfciiTe FEf
, de l'ordonnée A E — — {a. Pour (avoir la pofition de ces Branches autour
de leur Afymptote, on portera l'Origine d'A en E, en fubllituan*
L'équaDigitized by Googli

The text on this page is estimated to be only 17.32% accurate

3'JS'S CaURBJS, 3ai CwVrà. L'équation ordonnée par * Fi-xiy. é'
 MI* C9pp«ti*4-i"PP') ZZ+C— 1 2puu—îâpu) z 4< 4*'«f« îauu — bl I O *
 $21^{20} + (5>\#0'ZZ \bullet + (— 24^* — 2rf/0/Z + (12^{**4}\ll 4^{**})' o k o k i \setminus 2ptt\%$
 $\setminus 2U >) p2a\} tt o i o + 4" u = — \setminus a o — 2^*lpz — b^* ^9pxtzx > \{i ioaptz^*\setminus a at$
 $-r-\setminus 2ptt7^*—\setminus att + 4"$ ■ Cette Transformée mile fur le Triang : anal: a une
 détcrrainatrice utile AB qui donne \$pprix — $2^*>z=o$, ou $\bullet^* A -^{***} o^{**} o$
 $^{***} B t=—^:$ ce qui marque que les deux Branches liypetv boliques
 accompagnent leur Aiympote F E f dans les angles A E F , g E f des
 coordonnées de même figne. On tire la même choie de la Méthode des
 Séries. Le premier terme étant — $\setminus x$, on calculera le (ècond , &c. par
 l'abrégé du §. 106. Intnd. à PAnalyfe des Lignes Courbes. S s $4^—'$
 Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 11.84% accurate

J2a DES BRANCHES INFINIES ***iy' I II inOrd.CH.v.m. % o o
 tJ> * 2 o 2 o o î/* o * — 6xyy + 6xxy — 2axy ~ ; » ï y = -i* î 0 0 Première
 Transformée 4/ — 1 2xyy 4. çxxy 4« 24/ — 2axy + + ~axx =0. I II III
 Ordre. *- 9**y*b4sx*—\ 2xyy-2axy+4yi>i*2ayt-6i * * o _»4J 0 2 1320 y
 — — ia 2 1 2 I ï — jaax 4« 4-. ï a* o i o — & Seconde Transformée , \$xxy
 — 1 2xyy + io*xy — 2aax '+ *y* — 4*yy + **y — *f=o. 0 La Série
 commence donc par ces *v* trois termes — i x — J 4 4* — -, dont ♦ * * £X
 * * * * ks c*eux Pr^micrs expriment Pordonnée * * * * de rAfymptote
 droite FEf , & le troi5>>>cy — 2aax = o. fie'me marque que les Branches
 de la «--Hf Courbe tombent , du côté négatif aufl y 9* bien Digitized by
 Google

Fig. 99.

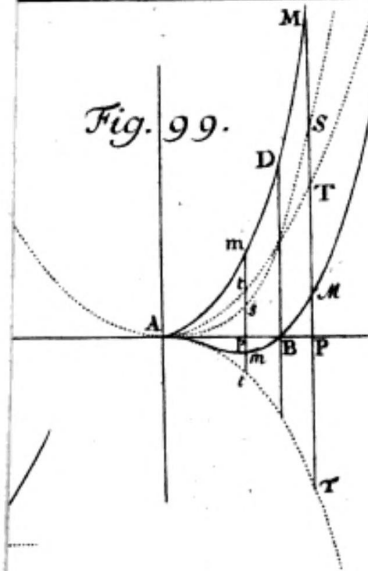


Fig. 100.

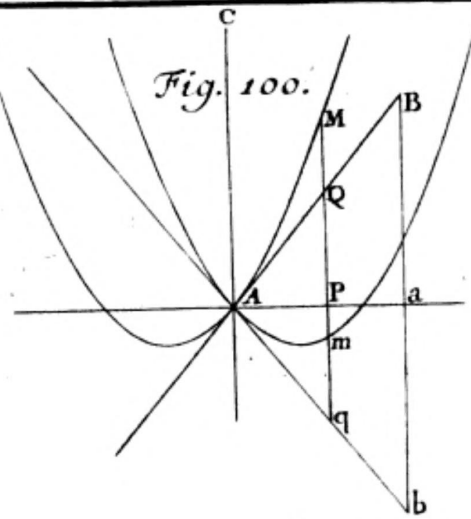


Fig. 102.

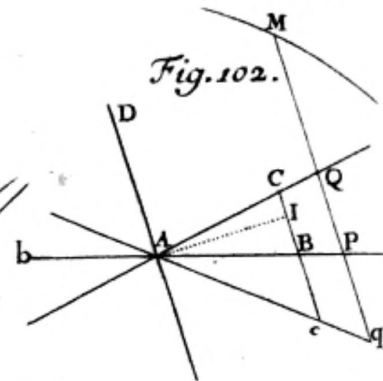


Fig. 103.

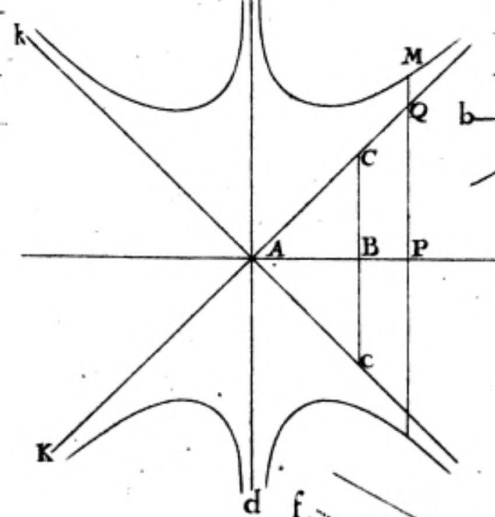
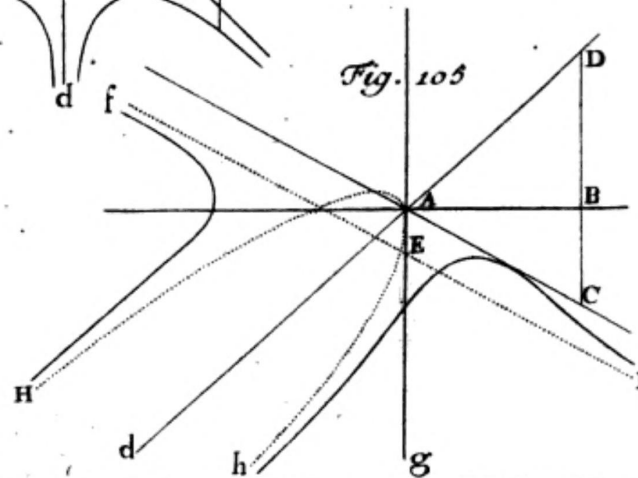


Fig. 105



The text on this page is estimated to be only 23.58% accurate

». $i * i < i \cdot -$, Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 20.97% accurate

DES COURBES. jaj Ch.viti. bien que du côté poiitif , entre
TAlymptote droite & l'A- Pl Xv. S- «41- xe des abfcifles. Exemple IIL Soit
 $y = 2x^4 + x^3 - f^3 \cdot n^3$. 5) $bs \pm$ /. Donc ici , comme dans Il Ex. J, on aura
les dernières directions AC des Branches infinies , en donnant à rabfciflè
 $AB = i$ les ordonnées $BC = +i$, & $Bc = -1$, & menant les Droites AC , A c.
• On tranfportera l'Axe des abfcifles fur ces Droites , en (ùbftituant
 $pzkx \& \zeta z^* \{ *uky. (f4 - a, y + (\% \hat{a} pf - 54p \rangle) s \ll 420 21 t^* * I o o + < 4f)^* , \ll$
 $t^* CO^* 4$ Et mettant £ pour q dans la transformée , elle fèra ou les lignes
fupérieurs font pour l'Axe AC , & les inférieurs pour l'Axe A a Cette
équation mifè fur le Tr : anal : a deux determinatrices. Celle qui traversè le
plus haut Rang défigne la S s 2 demie

The text on this page is estimated to be only 23.39% accurate

E 394 DES BKJNCES INFIMES Pu xv. dernière direâion des Branches infinies qui rriest parallèle, c».vin? ni aux ablcifles , ni aux ordonnées. * * * o o. o * * * o o o o © : L'autre , qui paflè par lès Calés z1 & z1 , donne l'éq : — = o , ou «* = |*/z , qui eft à la Parabole ordinaire décrite, avec un Paramètre z=. \spy fur les Axes AD, AG, ou AD, A c, dans la fituation à eu près où Ton voit les Paraboles EAe, F A f , qui font ;s Paraboles- afymptotes de la Courbe cherchée. Et puifque la racine de l'éq; $4/\wedge z1 — j^{'z}* = o$ n'eft pas multiple, chaque Branche AE, Ae, AF , Af de ces Paraboles eft Afymptote d'une Branche de Courbe. On trouvera la même chofè par la Méthode des Séries. On a déjà le premier terme $\pm x$ des deux Séries dépendantes qui donnent la valeur dy en x : mais on cherchera . encore le fécond , troifième & quatrième terme , puilqu'il faut aller jufques-là pour avoir un expolant négatif. Voici tout le procédé du Calcul [§. 10*]. L 11 Ordres. * o o v 4 a o 2 o o * o o ' $\pm 4x/\wedge F4x> =fc \pm axy$ * o o o o 8 i 1 +tfx*/— $2X* +243C" J4— 2*y+X*=0$ * O O + x-4 Première Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 11.98% accurate

DES COURSES. 3*5 Q*VTTL Première Transformée $y^{+xy*} + 4x^{*}/ + 2^{**}/ = \pm = ?L, xv. o o \# \# \# o \# \# o o^{*} o o o o 4 \ll 1 > 1 - 3 4 x 1 - o I$
II III $4xy - \$4x^{*}dc \$xyl a o \}$ 44 $xy - h y^{*} + 2Axy^{*} 1 4 2 j \pm \&X^{y^{Mi} 4-$
 $I2^{*} \gg V44x4-44xV|4X^{=4} > > V|4Xià:44xyv'^{*} 4-34X \gg 0 7 ^{t5} 4X^{7} \dots +$
 $\hat{i}^{*}xyy - M^{*}1^{*}1 7^{\circ} + 34XV|4^{*} < O s \& \}^{*}xy^{\backslash dx}^{*} .$ Seconde Transf $4^{**}/ = fc$
 $Sx'jVi^{**} = \pm = 4^{*}' 4- 1 2^{*}?V|^{**} \pm 1 \hat{i}^{*}xly + j \acute{e}xWiax + y^{*}J = :4yWl^{*}x +$
 $Vtfx/^{\wedge}xvy^{\wedge}xo o \ll^{*}^{*} ;^{*} o o^{*} o o o o 8X1J^{\wedge}|4X H- 74X V|4X == o I II 1 o$
 $a 1 o 74X V I MX O. 74x^{\wedge}y 9 \{ 4 V i o Ss 3 Troifi^{\wedge}$

The text on this page is estimated to be only 22.48% accurate

être 326 DES BRANCHES INFINIES Pt.xv. Troisième
Transformée $rSr 8 xly y/\backslash *x + db 6* xxy Cg ^ \text{---} y \ll V4* . f.i4, .$ On voit que
dans cette troisième opération , qui doit ...e la dernière, puisqu'elle donnera
à x un exposant négatif , Ton a supprimé une bonne partie du Calcul , qui ne
feroit pas nécessaire. Car la déterminatrice , partant de la Café $x^2+t:2 y$,
portera sur la Café x^* , à moins qu'elle ne soit vaine. Il ne s'agit donc que de
(avoir fin cette Café est pleine , & que! dit le terme qui y loge. Or pour cela il
faut de calculer le second ordre , & on trouve que la Café xl contient le
terme $\text{---} axxx$. On aura donc $Sx^{iax} \text{---} \$? *V=0$, ou $^ =$ pour le quatrième
terme de la Série. Les trois premiers $\pm x \pm y/\{dx^z \backslash ay$ expriment l'ordonnée
d'une Asymptote -courbe , qui se construit ainsi. figUm°6' Par les
coteintes de l'abscisse $AI= la$, & des ordonnées num. ». $AG> Ag j$ de
même g^{ideur} , qtfoli mène Jes $r>0itcs G1H$, glh . Qu'on décrive, avec un
Paramètre égal à $AI^2 1 a \& + aXo \backslash = jJGI>$ une Parabole ordinaire OGN,
sur les Axes GA , GH , avec une dernière direction parallèle à $G H$. Qu'on
décrive au/fin , avec un Paramètre égal à $\text{---} Jip'$ une Parabole $^Sn>$ sur ,cs
Axes gA , gh , la dernière direction étant parallèle à $g h$. Je dis que ces deux
Paraboles sont celles que représentent les éq: $v=x + yfLax \text{---} \backslash a$, & $v=s \text{---}$
 $x+^Lax+ia$. Car fin on nomme GH , z , & HO , ou HN , a , l'équation de la
Parabole OGN, relativement aux coordonnées $G H$, & HO ou HN , est
 $mmssj\text{---}$. Mais, nommant AP , x , & PO Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 20.78% accurate

DES COURBES. 327 C.VTIL PO ou PN, v, on aura AP [x]:
 $GH[z] = Al[>] : \S. i4j- x G 1 Gl.$ Donc $z = -7^{-}$; ce qui étant substitué dans
l'éq; $ttfj - 2iaaz$ | transforme en $uu=z \backslash ax$, ou « = — 32 Gl' * 1 rtVi''*. De
Plus PO, ou PN, [i] = PH[ou PI, foit AP — Al, c'est-à-dire $x - la$] + HO, ou
— HN $\backslash \pm zy \wedge ax \sim \backslash$. Donc l'équation de la Parabole OGN, relativement aux
coordonnées AP, & PO ou PN, est $v = x \pm y \wedge ax - la$. Et de même $v = -x$:
 $\pm V \pm x^4 \ll |4 \ll$ est l'équation de la Parabole ogn relativement aux
coordonnées AP & Po ou Pn. Les Paraboles OGN, ogn font donc les
Asymptotes curvilignes de la Courbe proposée : & le quatrième terme de la
Série, $\pm = * ^$, fait voir que les Branches de la Courbe tombent, par rapport
à l'Axe des abscisses, au-delà des Branches GO, go, & en-deçà des
Branches GN, gn, comme on le voit dans la F/£. io<5. »°. 2, qui
représente le cours de cette Ligne. Exemple IV. Par le seul changement d'un
(igne, l'équation de l'Exemple précédent est changée en celle-ci, $y^* - 2x /$
 $\blacksquare - x^4 \blacksquare + \bullet zaxy1 - 5^*x^4 = 0$ t. Et l'équation du premier rang $y^* - 2x1 /$
 $- x^* = 0$ a quatre racines, deux imaginaires $+x y^7 (1 - y/2)$, $- xy^i -$
 $y/2)$, & deux réelles $+1 - \sqrt{1 + y/2}$. Comme elles nous
menacent d'un Calcul affreux, nous n'appliquerons à cet Exemple que la
Méthode des Séries, & nous employerons la lettre A pour désigner le
nombre irrationnel. $= \sqrt{1 + y/2}$. Il s'agit donc de substituer $Ax > i^* u$
ky dans la proposée. + Mon. de l'Acti. 173 1. pag. 30.

The text on this page is estimated to be only 15.27% accurate

J28 DES BRANCHES INFINIES Pt.xv. r II Ordres. c«.vttl +
 6Alxxux — zA'v* +2 A1 sxl ! o o + 4 A x' « + A — 4^x'* + (^•-SW=o, ou
 u^-ip=AA* = [,«, .mettant . +V*) pour A\ * J^y ' ~ .Ces deux .premiers
 termes de la Série =J=*v'(i+v/0 ^f^O montrent que la Courbe a quatre
 Branches igitized by Google

The text on this page is estimated to be only 26.09% accurate

DES COURBES. 329 Cr.vhi Branches hyperboliques, & ils déterminent la pofuion de Pi.X7, S-i4j. jeurs Alymptotes-droites. Le prémier terme fait voir que fi on donne à l'abfcifle $AB = 1$, les ordonne'es $BC = -j-VX1 HH V2) \& Bc = \text{---} v'C 1 + v7 \gg) > \&$ qu'on mène les Droites AC, Ac, elles feront parallèles à la dernière direction des Branches infinies, & par conféquent à leur Alymptote. Et le fécond terme apprend que fi Ton prend les ordonnées $AE = + \gg ? Y 2 \text{ fr } n a y \& A e = \sim J u 2 \text{ Fi } \backslash * \&$ qu'on mène les Droites EF, ef parallèles à AC, Ac, elles feront les Afymptotes cherchées. On peut aufl, & cela eft plus fimple, prendre Pabfcifte négative $AG = 7^{2 \sim 1^{\circ} a}$, & mener par le point G, les Droites GF, gf parallèles à AC, Ac Car il eft aifé de voir que les Droites EF, ef, fe croifent au point G, éloigné de l'Origine A de la diftance $?^{*} \sim t0s$. Si Ton veut aller plus loin & chercher la pofuion de ces Branches hyperboliques autour de leurs Afymptotes droites, il faut calculer encore un terme de la Série. Soit 2, — Ar a nommé B. Il faut donc fubftituer $5 8^{(1+^{2})} * \{ * t \text{ à } u$ dans la transformée, ou du moins dans les deux premiers ordres de fès termes. Car en confidérant cette équation fur le Triang : anal : on voit qu'il manquera dans $o * * * * o * * o o \ll 0000$ la féconde transformée le terme x^* , & qu'ainfi la détermiIntroà. à PAnaiy/e des Lignes Courbes. T t natricc zed by Google

The text on this page is estimated to be only 18.15% accurate

330 DES BRANCHES INFINIES Puxv. natrice partant de la Cafe xly, portera fur la Ca(è x* , fi Chyiii. elle eft pleine, il s'agit donc de voir il elle Peft , & quel 5 '4ième terme la remplit. I II Ordres. '

^^ B) ! 2 1 1 + UA* — 4^0 Bx%
+2(fiAA—i)Btxx+4ABax" O t O + (ôAA — 2)BBx1 On voit par ce Calcul ,
que la Cale / x* loge le terme (4A1 — 4^)/xJ , & la Cafe x' le terme { {6AA
—i)BB * {<4ABa)x\ La déterminatrice , qui pafle par ces deux Cafe,
donnera donc l==s_ ^4-2)BB+^Bs , 4 A1 — 4A = [puîfque B = ±-W2—* a
—^^ — ^al (<5v4,4 — 2) CW2 4) V: 64^4*4(3 y/ 2 — 4)aa: 8 (4^ — 4)^ *
Ç^V/2^4)C?4 24.^2)^1^/2 2 "±4^2x^(1 + ^2) _ — 154 4« îopîVg _i —
154^24*219 Cette fraction étant pofitive , le figne =p qui la précède montre
que la Courbe tombe , de part & d'autre , entre l'Axe des abfcifles AB & les
Afymptotes droites EF, ef. Car il Ton nomme cette fradion C, la Série fera
pour les franchises de l'Afymptote E F , y = Ax + B — ^ & pour igitized by
Google

The text on this page is estimated to be only 25.09% accurate

DES COURBES. 531 Ch.viii. & pour les Branches de
l'Afymptote ef, 7 = — Ax — Pt.xv. Exemple V. Vea : $x^*y - 2xy + xy^* = 0$, mife fur le Triang : analyt : a trois déterminatrices AB, C B 0***0
0000 000 o o * A AC, BC. Celles qui partent par la Pointe A indiquent des
Branches qui ont les Axes pour Alymptotes. Elles font aulfi indiquées par
les racines $y=0$, $x=0$, de l'équation du plus haut Rang. Les équations que
donnent a ♦ ces déterminatrices, $x^*y - s^* = 0$, ou $y = -$, & $xy^* - 4 -$
 $*+=0$, ou $x = -$, font voir que les Branches infinies qu'elles dc'fignent fè
jettent dans les angles des coordonnées de même figne, le long de l'un & de
l'autre Axe. La determinatrice BC qui traversc le plus haut Rang, donne Tcq
: — $2x' + *y^* = 0$, qui a, outre les racines $at = 0$, $y=0$ dont on vient de
parler, une racine double $y - \# = 0$, qui nous apprend que la Courbe a
encore des Branches infinies, dont la dernière direc- Flg XqS don A D
coupe en deux également les angles BAC, bAc des coordonnées. Mais pour
connoitre la nature de ces Branches, on cherchera encore un terme de la
Série en Tt 2 fubfti

The text on this page is estimated to be only 24.98% accurate

3p DES BRANCHES INFINIES PX..XY. substituant $u + x$ à y dans l'équation proposée, ce qui la transforme en $xu^4 - x^4 = a^4$, qui étant mise sur 14,4 le Triang: anal: a une déterminatrice utile DE, qui donne $0 \leq E^* \leq 1$ ou $0 \leq D \leq 1$ ne s'annule que pour $x=0$, ou $u=0$. Ce second terme de la Série $y=x^4 \sim \dots$ marque deux Branches qui accompagnent de part & d'autre les deux parties AD, de la Droite DAd, qui est la dernière direction & l'Asymptote droite de ces Branches. Ainsi la Courbe a huit Branches hyperboliques autour de trois Asymptotes BAb, CAc, DAd, qui se croisent au Point A, semblable en cela à la Courbe de l'Exemple L En effet, c'est la même Courbe dans une position différente. Car si Ton prend AD pour l'Axe des ordonnées, & la perpendiculaire AE pour celui des abscisses, on aura [à cause des angles demi-droits QAS, QMR] $AP[x] = PS - AS = QR[y] - AS[y]$, & $PMW = PE + RM = QS[\sim] + rm[\sim]$. Et ces valeurs de x & de y , substituées dans l'équation de la Courbe $x^4y - 2x^2y^4 + y^4 = 0$, la transforment en $u^4z - z^4 = 0$, ou $z^4 - u^4 = 0$, qui est l'équation de la Courbe examinée dans l'Exemple L Examined by Google

The text on this page is estimated to be only 20.52% accurate

DES COURBES. Ch.vlīīī. Exemple VI. Soit enfin l'ég : $y^* + 5^*/+$
iox1/ Pl Xv. — $**_{xy}$ — tf

The text on this page is estimated to be only 23.04% accurate

J34 DES BRANCHES INFINIES Pl. xv. Et la première transformée fera $-\frac{1}{2}ay^2 + \sqrt{axy} + CH.vm. \frac{4x}{4} + \frac{4}{4}Vy - m^2 = 0$. En la mettant sur le Tr: $S-1^{**}$ analyt : couché sur la Bande sans x , on lui trouve deux déterminatrices supérieures AB, BC. $o o o o o B o o^{**} o 0^{**} 00 C^{* * *}$ $o o^{*} A$ L'une AB, qui porte sur les plus hautes Cafés des deux premières colonnes, donne $\sqrt{ax^2y} - ax^2 = 0$ ou $y = -\sqrt{x} \cdot B$ n'est pas besoin de continuer plus loin la Série $7 = -d^2$. parce que dès le (second terme elle est régulière. Elle indique deux Branches hyperboliques, qui accompagnent, dans les angles des ordonnées positives, leur Asymptote droite BAC. L'autre déterminatrice BC donne $y^2 + \sqrt{axy} + 4x^2 = 0$, ou, divisant par $\sqrt{x}$, $y^2 + 4\sqrt{x} - \sqrt{x}^2 = 0$, dont la racine carrée $4. 2\sqrt{x} = 0$, se réfute en ces deux CI $\} - + V - 2axy = -y - 2ax$, qui sont imaginaires, quand on prend x positive. Et comme Tune & l'autre est racine double de l'éq : $y^2 - 4y\sqrt{x} - \sqrt{x}^2 = 0$, 011 ne doit encore rien affirmer des termes suivans ; mais on continuera le Calcul en substituant $i^2 = -2$

The text on this page is estimated to be only 12.85% accurate

I Cuvin. §.I4ÎDES COURBES. 3SS Ord. I II PuXV. IV $y + 4^{**}y$
4- 4-I*\>' y. 3. 1 2ax) 111 — 24y» — t#xf 4- — été* 4 2 30 "5> V-2**^1
24X-> 'V-^Mïſial*1* V-2**=F84)> V-24X=R84'X) ■y/-2âx±:\$4y V-24X . I
> 0 * * 5 20 axyl ' 2+a1x1y -f- 24 a*^* 4-84?xl 64'xy o 2 7 î o
X64*x>y/-24X 1 T 2*'x/ O + 20 4l X*^ — 8 4' x% o =fc4.4txV — 24X
Ainfi la (cconde Transformée eft $y^* 3=5^{\circ}/$ — — \6axy1 z\$z %axy%^ —
iax — 2af z^z 8*y V — 2ax + 2oa1xy* =ir 8 axxy V-r-* ax + ay* z±z 3
a*y*V — 2 ax-~-6a*xyz±: 2aix^—2ax — a*bl =o. Sur le Triang; anal: elle
n'a qu'une déterminatrice utile , favoir celle qui eft horizontale , & qui
donne *= 8 axyy — 2ax ztz 8 a *xyy/ — 2ax z+z 2a* xy/ — 24x = o, ou,
divifant par zzzSax^ — 2ax , yy — ay+±aa=zo qui a une feule racine , mais
double , y — à* = o. o o o 000 0000 * * * * * o o * Elle kJ by
Google

The text on this page is estimated to be only 20.24% accurate

356 DES BRANCHES INFINIES Pi.. Xv. Elle marque que +\a eft un troifième terme commun C«.vüil aux deux Séries, qui commencent par — x riry' — 2ax. * Mfc' Mais cette racine[^] — ±* = o étant double, elle oblige à calculer encore le terme fuivant , d'autant mieux que , dans celui-ci , l'exposant dV n'eft pas encore négatif. Et comme il v a lieu de préfumer qu'il fuffira de trouver encore un (cul terme , on cherchera à s'épargner du calcul en fubftituant ka4*y à y , feulement dans les termes des deux premiers ordres. I II Ordre. tt*x?)/-2Mxd£2*lx y⁻²*x²aixtf-2*x-i6*xyl+20Atxyt-6*,xy)Ûc. 2 x 0321 *0%**xy>J-2AX ^fc ^'xy[^]x — 2^aaxy l-\-20a >xy - }a+x s o_ § ; o O J i o 2*4X Le premier ordre fe réduit au (eul terme z+zSaxyt[^]~2axi & le fècond à — \6axyi — 44[^]/ 4* 2*,xj'. Et ces termes étant mis fur le Triang; analyt; on voit que la déo o 000 0000 A* O * * *B O terminatrice paflê par les Cafés xi:tyy & xy⁰% & qu'étant zed by Google

The text on this page is estimated to be only 16.76% accurate

DES COURBES. 337 c«vnt. tant continuée elle traveife la Cale
 t!. Il faut donc exa- Pi~xv. f* miner fi cette Café eft pleine ou vuide. Ce
 font les termes du troifième ordre qui doivent la remplir. On fubftituera
 donc {a *{* y à y dans les termes du troifième ordre de la féconde
 transformée. 111 Ordre. I rfcjjV — zax =p Sayy zax ± jrjfV — 2** 4 3 2 M)
 : i±L\o*f s/—2axz+L\2a lyW — zaxz±z ia%y zax 1 * » t 1 ! y a ylJ—2ax
 6*>V zax ± \ *4 y/ — 2 ax » » * _ Ils (è réduifènt à =fc 5 y* V — laxda*
 y%^ — 2 \axyv\J — 2«x=pi«'jy — zaxd=j:a^ — 2*x* Ce dernier terme ,
 ayant (à place dans la Caîè x,:% (e trouve fur la déterminatrice , qui
 donnera l'équation =+= 8 axy V — ►£« 2/i*xj' db£4V— < 2*x= o , ou ,
 divifant par ^z%axy/—zaxy yy^~%^Taxy~ ilW^0 » dont la racine tîuarre'e
 cft kv/- _ ^/>x °- ^es c*eux Ser'csi f« ax a1 , l'autre Sy7 — ' 8/ — 2a x' '
 Quoique dans ce terme l'expofânt d'x (bit négatif; cependant , comme il cft
 racine double de l'équation qui le intnd. à PAnalyfe des Ugnés Courbes. V y
 donne. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 13.74% accurate

338 DES BRANCHES INFINIES p*.xv. donne , il est nécessaire de continuer le Calcul , en substituant $+y$ à y dans la troisième transformée. Mais pour cela il faut l'avoir complète ; & jusqu'ici nous n'avons que les termes qui ont résulté de ceux des trois premiers ordres. Il faut donc achever la transformation en substituant i^*y à y dans le quatrième ordre: IV Ordre. A., $+ / - 2 4 / * \# y - a 1 h^* S 4 l o + ** / - 4 \ll y + ** y \ddot{4} \ddot{1} 2 I \forall + - a^* y + i a^* 4 *$ Et il en résulte $JJ + - \ddot{1}^* 2 / - |^* y * *$ Réunissant les résultats de ces différents ordres , la troisième transformée complète est $= p 84xyV - **x - i6^*xy\% - 4 \ll 2 5^V \grave{E} SX \& ZSSJfW 2 6X - \grave{C} L \backslash aryxyj - 2ax = * = \backslash a'y^ - 2^*x \text{ zfc } \pounds , *V - 24^* + y 4 - \grave{e}^* J4 - \grave{e} \# > \gg - Ja? / + \pounds 4 > + \pounds^* 5 - = o$. Cette transformée mise (lire le Triang : anal : a , relativement à la déterminatrice CD qui passera par les Cafés xytyy , x y , & oy Google

The text on this page is estimated to be only 19.97% accurate

dres de termes. PJSS COURBES. 539 C£*h & *l t & qui a donné
Véq : y ==trin7~S» M or~ Ft,XVV o o o o o o o o o c* o * * * o * * * *
*D * * * * * U cil probable qu'il ne fera pas befoln d'aller au-delà du terme
que nous cherchons ; c'est le cinquième de la Se'rie. Ainfi nous
commencerons par fiAftituer 3=. a a 2^ JJ3: + y â y dans les deux premiers
Ordres. I H Ordre. « * 1 i A 1 x 2 I O 2 I O O *y/-2*X i _ ° 5 Les termes du
premier ordre fe rdduifent à =c8*xy V-2*x, & ceux du fécond à — 4**x/ —
. Donc la deteroainatrice paflera par la Cale x>:1/ , & par la Pointe , &
donnera Véq : =p84*jV — îax — Jb* =o, ou f — a' bl =f= frx^^Mx % Le
fi6ne — a licu Pour ,a P^mière , & Vv 2 le Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 24.73% accurate

DES BRANCHES INFINIES ri-xv. le signe + pour la féconde des
deux Séries que nous cal- Ot.m culons. Donc pour la première $y = \pm y / \sqrt{ax^2 + 2ax}$ & pour la (èconde $y = \pm y / \sqrt{ax^2 + 2ax}$ > grandeur imaginaire. Car
fi on prend x pofitive , $y / \sqrt{2ax}$ cft imaginaire , & fi on prend x négative ,
 $y / \sqrt{2ax}$ e^ négative , & (à racine eft imaginaire. Ainfi la (èconde de nos
deux Séries a fon cinquième terme imaginaire, & elle-même Pelt
entièrement. Mais la première , qui ne Peft qu'à demi, fè fourche en deux y
 $= \sqrt{4V - 2ax} + \sqrt{ax^2 - 2ax}$ & $y = \sqrt{4V - 2ax} - \sqrt{ax^2 - 2ax}$. a*f Gcs deux Séries,
avec la première $y = \sqrt{ax^2 - 2ax}$ & ci font voir que la Courbe a quatre Branches
infinies , dont &g- 109. deux DB , EC font hyperboliques , & ont pour
Afympto*' te la Droite BAC dont Pordonnée eft le prémiet terme $\sqrt{ax^2 - 2ax}$ de la
première Série. Les deux autres EF, H G font paraboliques, & ont pour
Afymptote - curviligne la Courbe 1 KL , à PabfcitTe x de laquelle répond
Pordonnée que repréfontent ces quatre termes, $\sqrt{ax^2 - 2ax} + y \sqrt{2ax}$
On verra plus clairement la pofition des Branches de cette Courbe, en la
raportant à deux autres Axes , dons Pun eft l'Alymptote droite CAB &
Pautre (a perpendiculaire AN. Alors le point M de la Courbe , au lieu des
coordonnées" AP [x] & PM [/] , aura les coordonnées [z] & QM[«] , dont
les raports s'expriment par les équat : Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 17.51% accurate

DES COURBES. 541 Ch. Via , Z « 0 Z4"«- 1 . c in. Pt-Xy. >.x43.
 équat: $\hat{y} = -\hat{z}^7$ » & $y = z^7$ 5 V3, CUrS qU1 fubftl" tuées dans l'éq : $\frac{1}{5} + 10x + \frac{1}{5} \log x + \frac{1}{5} \log x + \frac{1}{5} \log x - 2ay - Ataxy - b 4ax^4 - 2a x^4 + aaxy^4$. $aax - aab = 0$, ou $(7 4^* *)J - 2^*(> - *) Q + x)^* +$ qui
 (e conftruit ainfi t z Sur les Axes AB, AC on décrira la Parabole DAd, ioy.
 dont le Paramètre eft c, de forte que Pabfcifle AP[z] a * l'ordonnée PO= $\hat{f}$.
 On décrira auffi l'Hyperbole d CNB , cnB , dont l'ordonnée PN , ou Pn , eft
 • Alors donnant à chaque abfciffe AP deux ordonnées PM, Pm égales ,
 Tune à la fomme O n , l'autre à la différence ON des ordonnées de
 l'Hyperbole & de la Parabole , on aura la Courbe cherchée CMDmc. Car
 fon ordonnée [$\ll$] eft égale à $-\frac{J^2 dy}{dt}$ & par conféquent fon équation c z
 eft $zJ - 2czi + 4^* etzuu - ecd = 0$. Mais en la raportant aux Axes EAe ,
 FAf , qui coupent également les quatre angles que font entr'eux les Axes
 CAc, B A b , (on équation fera juftement celle qui a été propoféc dans cet
 Vv j Exemple igitized by Google

The text on this page is estimated to be only 28.17% accurate

342 DES BRANCHES INFINIES PtXV. Exemple. Dans cette construction il est aisé de reconnaître que la Courbe a des Branches hyperboliques MC, me, I4Î* dont CAc est l'Asymptote, & des Branches paraboliques MD, mD, dont l'Asymptote est la Branche AOD de la Parabole dAD: On le reconnaît, dis-je, aisément, en considérant que près de l'Origine, les ordonnées de l'Hyperbole CNBnc remportent de beaucoup sur les ordonnées de la Parabole dAD, & que loin de l'Origine, c'est tout le contraire. 144. Nous finirons ce Chapitre par quelques considérations générales sur les Branches infinies des Courbes & sur les Asymptotes droites. Les Branches infinies d'une Courbe sont toujours en nombre pair *. L'ordonnée d'une Branche infinie de Courbe s'exprime par une Série descendante $Ax + Bx^4 + Cx^k + \dots$ qui est ou entièrement imaginaire, ou demi-imaginaire, ou réelle [§. 95]. Lorsque elle est entièrement imaginaire, la Branche, dont cette Série devrait marquer l'ordonnée, est imaginaire. Cette Série est réelle, lorsque tous les exposants $b, / : , k , \dots$ sont des nombres entiers, positifs ou négatifs, ou des nombres rompus dont le dénominateur est un nombre impair. Alors la grandeur qu'exprime cette Série est réelle, soit qu'on prenne x positive, (soit qu'on la prenne négative. Ainsi cette Série représente deux Branches infinies, une du côté des abscisses positives, une du côté des négatives. Enfin, la Série est demi-imaginaire lorsqu'un, ou plusieurs, des exposants $b, / , k , \dots$ est une fraction d'un dénominateur pair, & d'un numérateur impair. Dans ce *

Stirling, Lin. tert. Ord. Newton. Prop. f. Cor. 3. Mr. De Gua, Usage de l'And. pag. 47. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 29.83% accurate

DES COURBES. 34J c*.vni ce cas, la Série n'est réelle que quand on prend * positif- Pt.xv. 5'144* ve, ou quand on la prend négative. La Branche indiquée par cette Série ne s'étend que du côté des abscisses positives, ou du côté des négatives. Mais en échange, lors qu'on donne à x le signe qui rend réels les termes demi-imaginaires, ces termes ont deux valeurs, une positive & une négative, parce qu'une racine paire a également le signe + & le signe —. Ainsi la Série est double, & exprime deux ordonnées. Il y a donc deux Branches infinies qui répondent à cette Série, & qui sont situées, non pas de part & d'autre de l'Axe des ordonnées, mais toutes deux d'un même côté. Donc, dans tous les Cas, le nombre des Branches d'une Courbe est un nombre pair. 145. II. Toute Ligne algébrique d'un Ordre impair 2, au moins, deux Branches infinies *. Parce que dans toute équation d'un Ordre impair, l'une ou l'autre des coordonnées a (on plus haut exposant impair. Prenons que ce soit l'ordonnée. Donc en la regardant comme l'inconnue, quelque valeur qu'on prenne pour l'abscisse, l'ordonnée aura toujours une valeur réelle, puisqu'une équation d'un degré impair ne peut avoir toutes ses racines imaginaires. Ainsi toutes les abscisses, tant positives que négatives à l'infini, ont au moins une ordonnée réelle. La Courbe a donc au moins deux Branches infinies, une d'un côté, l'autre de l'autre, de l'Axe des ordonnées. 146. III. Une Courbe algébrique ne peut avoir plus de Branches infinies qu'il n'y a d'unités dans, le double de l'exposant de son Ordre. Car * Stirling, Lin, tert. Ord. Newt. Pr. VI. Cor. y.. Mr. Nicole, Mem, de l'Ac. 1725. p. 108. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 29.57% accurate

34* DES BRANCHES INFINIES •Pl-xV. Car en prenant les ordonnées de façon que leur Axe GCfIBL ne foie parallèle à la dernie're direction d'aucune des Brau- S« lâches infinies de la Courbe, toutes ces Branches s'éloigneront à l'infini de cet Axe. Donc leurs ordonnées feront représentées par des Se'ries dépendantes , qui donnent la valeur d'y en x. Or l'équation ne peut fournir plus de pareilles Séries qu'il n'y a d'unités dans l'exposant de la plus haute puissance \$y : parce que ces Séries font les racines de l'équation, où l'on regarde y comme l'inconnue, & qu'une équation ne peut avoir plus de racines qu'il n'y a d'unités dans le plus haut exposant de son inconnue. Et l'exposant de la variable y ne peut jamais (surpasser l'exposant de l'Ordre de la Courbe. Donc on ne lauroit avoir plus de Séries oui donnent y en x , qu'il n'y a d'unités dans l'exposant de l'Ordre de la Courbe. Mais chaque pareille Série ne peut indiquer , au plus , que deux Branches infinies, & pour cela il faut qu'elle soit réelle. Donc, une Courbe ne peut avoir , au plus , que deux fois autant de Branches infinies qu'il y a d'unités dans l'exposant de -l'Ordre de cette Courbe. 147. IV. Une Courbe algébrique ne peut avoir plus d'Asymptotes droites qu'il n'y a d'unités dans l'exposant de son Ordre " . Cette Proposition se prouve par le même raisonnement que la précédente. Si Ton prend les ordonnées de sorte qu'elles ne soient parallèles à aucune Asymptote , l'ordonnée de chaque Branche hyperbolique sera représentée par une Série telle que $Ax + B > \{ Cx^k + \dots \}$ dont les deux premiers termes $Ax > B$ expriment l'ordonnée de l'Asymptote [§. 151]. A sera zéro , si l'Asymptote est parallèle aux *

Stirung , Prop. VL Cor. 7. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 27.29% accurate

DES COURBES. 34; Ch. vin. aux abscisses; B fera zéro, si elle passe par l'Origine; ainsi $Pi.x^y$ §.147. A Se B feront zéro, si l'Asymptote est l'Axe des abscisses» 11 ne fauroit y avoir plus d'Asymptotes droites qu'il n'y a de pareilles Séries. Et l'équation de la Courbe n'en sauroit donner plus qu'il n'y a d'unités dans l'exposant de l'Ordre de la Courbe. Donc le nombre des Asymptotes droites ne peut surpasser les nombres des unités contenues dans cet exposant. 148. V. Lorsque la Courbe a autant d'Asymptotes droites que l'exposant de (son Ordre a d'unités , toutes Ses Branches infinies sont hyperboliques. Car les ordonnées étant prêtes de sorte qu'elles ne soient parallèles à aucune Asymptote, toutes les Séries dépendantes qui donnent la valeur d'y en x , c'est-à-dire , toutes celles qui peuvent exprimer l'ordonnée d'une Branche infinie de la Courbe , commencent par trois termes tels que $Ax^B + Cx + \&c.$ [ou A Se B peuvent être zéro] . Elles représentent donc des Branches hyperboliques [§. 1 § 1] , & la Courbe n'en a point d'autres. En effet, puisque chaque Asymptote droite a. deux Branches hyperboliques , & qu'une Courbe ne peut avoir plus de Branches infinies qu'il n'y a d'unités dans le double de l'exposant de son Ordre ; si elle a autant d'Asymptotes droites qu'il y a d'unités dans cet exposant, toutes les Branches infinies seront hyperboliques. 149. VI. Dans le même Cas, c'est-à-dire, quand une Courbe algébrique a autant d'Asymptotes droites qu'une Courbe de son Ordre en peut avoir ; toute Droite qui coupe toutes ces Asymptotes , & qui rencontre la Courbe en autant de points , est coupée de façon que la (somme des parties interceptées entre la Courbe & les Asymptotes Introà. à l'Analyse des Lignes Courbes* Xx est Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 19.65% accurate

54<5 DES BRANCHES INFINIES 9u xv- eft c'gale à la Comme
des parties interceptées entre les c*.m Afymptotes & la Courbe [§. 65] !
•*«* Car fi Ton prend cette Droite & fes parallèles pour les ordonnées ;
puifqiTelle coupe la Courbe en autant de points qu'il y a d'Afymptotes,
c'eft-à-dire , en autant de points qu'il y a d'unités dans l'expofant de l'Ordre
de la Courbe , l'équation fera telle que le plus haut expolant d'jr fera égal à
l'expolant de l'Ordre. Soit v cet expolant , $y + (4x + by)y^{v-1}$ les deux
premiers termes de l'équation , & $yz = A'x + B + C'x^k$ &c. $y^{A'x} + B'' * C * ^k$
&c $y = A''x + B \gg + C''x^k$ &c. &c. les Séries deicendantes s qui donnent y
en x , tirées de cette équation. Ainfi $y - A'x - B' - C x$ &c. ^so , $y - A'x$
 $- B > - CV^* &c = 0$, $y - A''x - B'' - C''x^{k \&f} = 0$ font les racines de
l'éq: $y^v + (ax + li)y^{v-1} \dots = 0$ & cette équation n'eft autre chofe que le
produit de ces racines , dont le nombre eft fuppofé v. Le premier terme de
ce produit eft / , & le fécond eft $- U'x + B' + C'x' * &c + A''x + B? + Cx^{k$
&t + $A''x + B'' + C''x^{k \&c} y^{v-1} = - ((^' + A'' * A'' &c)x + + + c + c$
 $* o^{k \&c} y^{v-1}$, lequel comparé avec $(ax^{*} \{ * b \} y^v$, auquel il doit être
égal, donne $A' + A' + A \gg &c = a$, $B' + B'' + B \sim &c = ^C + C + C^* = 0$, & tout
le refte pareillement égal à zéro. De même , fi on multiplie les unes par les
autres toutes les équations des Alymptotes droites * Nbvton , Enum. Un.
tert. Ord. II. 2. Stirling , Un. teruOrd. Newt. Prop. X. Cor. Digitized by
Googl

The text on this page is estimated to be only 25.30% accurate

0 DES COURBES. 347 Ça.v.m. tes J — A'x — B'=zo,y — A'x —
 B" = o,y — Anx fc.:XV. :§• 14*- — £'''=0, &c. ce produit exprimera le
 Syftême de toutes ces Droites. Or ce produit a pour Ton premier terme f 9 &
 pour le fécond — (A'x 4* & + A"x + B" + ATx+B" dv)/~ x , ou — «A' +
 Ar+A"&c)x + (B' + B" + B'''&c)»yv—1 = —(ax>{

The text on this page is estimated to be only 24.04% accurate

548 DES BRANCHES INFINIES Pl. xv. résulte auand à x on substitue la valeur de $Pabfctflê$ de Ch.vhl cette ordonnée. Mais $Pabfciflê$ de l'Ordonnée- asymptote * se détermine en égalant à ze'ro la bande entière sur laquelle est appliquée la déterminatrice qui marque cette Asymptote [§.]. Donc cette valeur substituée à x fait disparaître cette bande, & fait évanouir le terme , qui est le premier de l'équation ordonnée par y . Ainsi dans l'Équation, dont les racines déterminent les points où l'Asymptote rencontre la Courbe , l'exposant de la plus haute puissance de y est inférieur à l'exposant de l'Ordre de la Courbe , de deux unités , au moins. Le nombre de ses racines , & par conséquent le nombre des points où la Courbe peut rencontrer l'Asymptote , est inférieur de deux unités , au moins , à l'exposant de l'Ordre de cette Courbe. Soit, par ex. $lyv - f - t > x + 1$ $yv \sim 1 + (pf + dx + eiy^{**} & c = .oy$ l'équation d'une Courbe de l'ordre v. Si elle a quelque Asymptote parallèle aux ordonnées y , il faut que le terme lyv , au moins , disparaisse , / étant égale à zéro, & $Pabfciflê$ x dont l'ordonnée est l'Asymptote , se détermine par l'équation: $ax + b = 0$, ou $x = - \frac{b}{a}$. On aura les ordonnées de cette asymptote , en substituant , dans l'équation de la Courbe , $-\frac{b}{a}$ au lieu de x , ce qui fera évanouir le terme iax^{yv} , qui par l'absence du terme lyv est devenu le premier ; & par l'évanouissement , comme il doit être eaa - r , , de ce terme, $yv - 2$ se trouve le premier. Donc, pour cette asymptote $-\frac{b}{a}$, l'équation ne fera que du degré v - a. Elle ne peut donc»avoir plus de zed by Google

The text on this page is estimated to be only 25.32% accurate

DES COURBES. \$49 Ch.viii de v — a racines; la Courbe ne peut couper fou Afym- Pt.xv. f« x⁵* ptote en plus de v — 2 points. Ainfi une Courbe du fécond Ordre ne peut pas rencontrer (oit Alymptote. Une Courbe du troificme Ordre ne peut rencontrer ion Afymptote qu'en un point: Une du quatrième Ordre qu'en deux , & ainfi de fuite. 151 . VI 11. Une Courbe algébrique ne peut avoir plus d'Afymptotes droites parallèles à (es ordonnées qu'il ne manque de termes initiaux à fon équation ordonnée par y. Car s'il ne manque à l'éq : $ly^4 < (*x-h*)' 1 4?$ ($ex1 + \ll fx-f-0 y'''^2 \&c — o >$ que le premier terme $ly^3 \setminus$ la déterminatrice parallèle à la Bande (ans y , qui indique [§. 1 59] les abfciffes des Ordonnées - alymptotes , travèrant la bande $yv 1$ » donnera l'éq : $ax + b — o$, qui nra qu'une feule racine. Il n'y a donc , en ce cas , qu'une feule Alymptote parallèle aux ordonnées. Mais s'il manque à l'équation de la Courbe fes deux premiers termes , * i yv 4. $(4x - | -0/' — I > k$ déterminatrice travèrfera la ban*. de yv a , & donnera Pég : $oc^* + dx * \{ * e = o$, qui ne peut avoir que deux racines , & ne peut indiquer que deux Ordonnées - alymptotes. S'il manque à l'équation de la Courbe fes trois premiers termes , la déterminatrice travèrfera la bande yv * , & donnera une équation du troifième degré qui ne peut avoir que trois racines , qui font trois abfciffes d'Ordonnées- afymptotes. On voit que ce raifonnement s'applique de la même manière à quelque nombre qu'il manque de termes initiaux. Mais il arrivera fouvent que le nombre* des Alymptotes-ordonnées fera moindre que le nombre des termes initiaux qui manquent à l'équation. i°. à caulè des coëffix j cients 1 Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 24.60% accurate

3jo DES BRANCHES INFINIES Pu xv. cients aic,&c. qui peuvent manquer, ce qui déprime les Ch.vih les équations $ax^m + b = 0$, $cxx > frdx > \hat{e} - o$, & les ré- S* fi* duit à des degrés inférieurs. Si, par ex. /, a, & c font zéros, la déterminatrice, traversant la bande $y \sim x^2$, pourroit donner une équation du fécond degré : mais à caufè de $* = 0$, cette équation (è réduit à une du premier $dx - H' = 0$, qui n'indique qu'une lèulc Alymptote-ordonnée. 2°. à caufè des racines imaginaires qui ne donnent que des Afymptotes imaginaires. j°. à caulè des racines égales, qui ne marquent chacune qu'une (èule Afymptote, quoiqu'elles tiennent lieu de plufieurs racines. 152. IX. Une Courbe algébrique ne peut avoir autant d'Alymptotes droites parallèles qu'il y a d'unités dans l'expolant de l'ordre *. Car prenant les ordonnées y parallèles à ces Afymptotes, il manquera [§. prk.] autant de termes initiaux à l'équation ordonnée par y qu'il y a d'Afytnptotes parallèles aux ordonnées. S'il y a voit autant de ces Afymptotes que d'unités dans l'expofant « de l'ordre de la Courbe, il manqueroit à cette équation fes v premiers termes. Mais le nombre de tous fes termes eft $v + 1$. Il ne lui refteroit donc que le dernier terme, qui ne renferme plus &y. L'équation n'auroit de variables aue x, & ne repréfenteroit pas une Courbe, mais quelques Droites pârallèles [§. 40. II. j]. L'équation devant reprélènter une Courbe, elle aura au moins deux termes, comme $\zeta^* xv'1 + 0xv'2 + Oy + (*xv + f^* xv - 1 \dots + p) = 0$. Alors les abfciflès des Ordonnées - afymptotes font les racines de Péq: $**v \sim 1$ * Stirlikg, ibuL Cor. y &

The text on this page is estimated to be only 22.76% accurate

DES COURBES. 351 VJJJ1 + 0*^''''''* •• + £=0 , que donne la déterminatrice qui Pt,xv' travèrse la bande .y. Ces racines font au nombre de $v - i$, & peuvent, si elles iont toutes réelles, désigner $v - 1$ Ordonnées - asymptotes, c'est-à-dire, une de moins que le nombre des unités de l'exposant v de l'Ordre de la Courbe. Ainsi une Courbe du fécond Ordre ne peut avoir d'Asymptotes parallèles; car c'est n'en avoir point que de n'en avoir qu'une. Une Courbe du troisiéme Ordre ne peut avoir que deux Asymptotes parallèles: Une du quatrième Ordre que trois, &c 155. X, Quand une Courbe a autant d'Asymptotes droites parallèles, qu'il y a d'unités dans l'exposant de son ordre, moins une, elle ne peut les couper. Car dans son eq: $f > *v''I + /9*u*3 \dots + \blacktriangleright Kà** 4- p xv 1 \dots 4* p) = o$, y ne monte qu'au premier degré. Ainsi aucune ordonnée ne peut couper la Courbe en plus d'un point 41]. Et quand cette ordonnée est une Asymptote, la valeur d'jr, qui est ' V, $V 1 - A^_$, *** $v^_{}''''''*~*$ devient infinie, son dénominateur étant zéro, puisqu'on suppose x égale à une des racines de l'éq: $*x^{\circ} \sim ! + /Sx1' 2 \dots 4- £=0$. L'Asymptote ne rencontre donc la Courbe qu'à l'infini, c'est-à-dire, jamais. CHAPIDigitized by Google

The text on this page is estimated to be only 26.76% accurate

3J2 DIVISIONS GENERALES DES LIGNES CHAPITRE IX. •

Divifwns générales des Lignes des cinq premiers Ordres. *Xv- 154. T ES Propofitions établies dans le Chap. précé_Lrf dent fervent de Règles pour former les Divifions des Lignes courbes de chaque Ordre. Leur fondement naturel eft le nombre , Pdpèce & la pofuion des Branches infinies de ces Courbes. Pour commencer par le (ècond Ordre , puifque le premier ne renferme" que la Ligne Droite [§.40], (on équation générale eft $a + by + 4x^4 + dyy + exy + 4x^2 = 0$ [32]. Place'e fur le Triangle analytique , lbn plus haut Rang , qui décide de la dernière direction de (es Branches infinies [§. i\$6] , égalé à zéro , donne l'éq : $dyy + exy + 4x^2 = 0$. Puifqu'elle eft du lècond degré, eÙe peut avoir ou deux racines imaginaires , ou deux racines réelles inégales , ou une feule racine double, Ce qui fait trois Cas. Cas 1. Le premier eft celui ou les deux racines font imaginaires, & il a lieu quand e eft plus petit que $2yJ' Hf$. Alors il n'y a point de Branches infinies [§. On rendra plus fimple l'équation de la Courbe, i°.cn faifant difparoître la bande y , qui eft le fécond terme de cette équation ordonnée par $x^4 + (fx + *)j + xx$

•*

The text on this page is estimated to be only 15.04% accurate

VU SECOND ORDRE. $y^2 - Cx^2 = 1$ ad — $ix = 0$; a^* , en font
évanouir le 1^{er} terme $Pt - Xv$. $S - 1^{**}$ de cette transformée ordonnée par x ,
en supposant $x = 2cd - be$. à $af - ee$ $Z - mf \& tZ\%*$ $\propto 9UI$ $cna \& c$
"équation en $u + v^2$ $zz (4fc - Of - jg^2 - ebc - fbb^2 - ddf - dee = 0) < *UI$ na
Plus que trois termes. Puisque $e < ayV$ le coefficient v^2 du terme zz
est nécessairement positif. Si le troisième terme $(df - ce)$ a $dc^2 \{ *ebc fbb$
a „. $t.e^{-2-2} ddf - dde - C^3 U^0 U^0 Zer^0*$ c'est-à-dire, $Ci a > 0$ ou $= 0$ $Cff^* \wedge$
Courbe est imaginaire, puisqu'il n'est pas possible que deux ou trois termes
positifs soient égaux ensemble à zéro. Mais si ce troisième terme est négatif,
la Courbe représentée par l'équation: $zz^2 - 4fz - 4f^2 = 0$ est
réelle que les $Gc'o(4f - 4f^2)$ mètres appellent Ellipse. L'Ellipse devient un
Cercle, lorsque les coordonnées x & z sont perpendiculaires l'une à l'autre,
& que $df - ee - dde$; ce qui réduit l'équation $zz^2 - ebc + fbb - vtdd$ non à $4fz - fzz$
 $= -jt - s$. 4^e Cas II Lorsque e est plus grand que $2V^2$, $Pcq S$ dyy
4 $cy + xat = 0$ a deux racines réelles inégales, que nous supposons $y -$
 $Ax \sim q$, & $-Ax = 0$. Elles indiquent deux dernières directions pour les
Branches infinies de la Courbe. En substituant six 4^e à y dans l'équation
proposée, on la transforme en une autre à birod. à l'Analyse des Lignes
Courbes % Y y qui Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 23.90% accurate

3J4 DMSIONS GENERALES DES COURBES PuxV. qui manque nécessairement le terme xx [§. 107]. La Ch. ne déterminatrice paflera donc par les Cales ux & x , fi o • • • celle-ci le trouve pleine, & donnera une équation telle que $u = B$. Il faut donc fubftituer B 4- / a « , & 011 aura une féconde transformée, où les Cales xx & x font furement vuides [§. 107] : mais celle de la Pointe ne iàuroit l'être. Car, alors, cette transformée, n'ayant o ♦ o • • • * point de termes fur la Bande x feroit divifible par /. La première transformée feroit donc divifible par * — £=/, & la propofée par $y — Ax — B=u — B = t$. Elle feroit donc réductible à deux équations de cette forme $y — Ax — B=o$, $y — Ax — B'z=o$, & repréfenteroit deux Droites. Donc, fi elle exprime une Courbe, la Pointe renfermera un terme de la féconde transformée» Et la déterminatrice paflant par cette Cafe & par la Café iXy donnera $t=Cx \sim \backslash$ Ainfi la Série eft régulière, & (es trois premiers termes $Ax + B > i * Cx \sim 1$ marquent deux Branches hyperboliques [§. 1 § 1], dont l'afymptote droite a pour équation $v = Ax+B$. . . L'autre racine $y — A'x = o$ donnera pareillement une Série, dont les trois premiers termes $Ax + B' -f- C * x 1$ marquent deux autres Branches hyperboliques, dont l'afymptote droite s'exprime par l'éq : $v'=iA'x - \{-B'$. Ainfi la Courbe a deux Afymptotes droites & quatre Branches hyperboliques qui s'étendent dans les angles afymptotiques oppolés. Que

Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 23.67% accurate

DU SECOND ORDRE. ⁵S Ch. ix. Que fi le terme * manquoit dans la première trans- Pi~xv. S- < reformée , la déterminatrice , qui part de la Café «x, au lieu de porter fur la Café x , auroit pafle par la Pointe , & auroit donné , pour le (ècond terme de la Série , u = Bx — Dans une des Séries y = Ax 4« B + Cx — 1 &c. y = Ax 4*2? 4« C'x~l &c , ou même dans toutes les deux, le lècond terme B , ou B\ auroit manqué : ce qui marqueroit que Tune des Afymptotes droites , ou toutes les deux , pafiënt par l'Origine ; l'ans indiquer d'ailleurs aucun autre changement. On peut exécuter , tout d'un coup , les deux transformations indiquées ci-deflus , en portant l'Origine au point où les deux Afymptotes fe croifent , & prenant les abfciffes fur l'une & les ordonnées fur l'autre. Cette transformation vuidera les Cafés yy% xx, y & x , de forte que l'équation réduite au terme uz & au terme confiant , aura cette forme Puz — Qj=o, ou r/z=^, fous laquelle on reconnoit ? Hyperbole fimple [§. 1 1 3] . Voici tout le Calcul. . En fubflituant [§. 24] m>{*pz *{* rtt à x , & n *{* q z ► f' su à y , dans l'équation générale a 4* h 4* cx 4« dyy 4* exy 4-/xx = o , on la transformera en celle-ci (dss-\-ers-\-frr)uu -{-{-{adqs-^-eqr-^eps^ifpr)uz -{-(-d'jq-^-epq-{-/pp)zz ^ (bs-{-^^29 -\fpp-o : ce qui fait difparoître le terme zz, & Y y 2 donne Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 19.46% accurate

DIVISION GENERALE DES LIGNES ?i. xy. donne aux abfdflès une position parallèle à une Arympto- Cb.œ. te. Mais il faut prendre garde qu'on ne faflè pas les abd ci(Tes parallèles aux ordonnées , [ce qui feroit abfurde] , en faifant les unes & les autres parallèles à la même Afymptote , c'est -à-dire , en faifant la raifon p : q égale à la raifon r:s. L'e'q ; djf -f. ers - \-.frr=: o , ou dqq 4- epq •+■ . fpp~ o , ayant deux racines inégales [puifque dyy + exy -4fioe ass o , qui a , par fupppofition , deux racines inégales , iê change en du + er s *kfr=o , fi l'on écrit / pour y & r pour x, & en dqq^epq+fpp — o , en mettant q pour y & p pour x] ; on déterminera la raifon r; / patTune de fes racines , & la raifon p : q par Pautre , en prenant — = 7 , & 4- — r 2* A •-- 4* 2fmf=o , qui font e'vanouïr les termes * & a, & portent l'Origine fur les deux Afymptotes, c'est-à-dire, fur le Point où elles fe croifent , lequel eft un Centre général [§. 7*]. Ces équations donnent ct= & * = ee 44/ * Et équation de la Courbe fe re'duit à (2dqs + eps+eqr + 2fpr)uz + (a-\ "bn>\ *cm+dn n*f± tnn >{*fmm)=zG , ou [mettant pour / , rtqtpj m leurs valeurs] à — \$d\ec — ^df^uz*^ a(ee — 4/")* + (4* ebc^^fbb) (

The text on this page is estimated to be only 19.62% accurate

DU SECOND ORDRE. Or. JJL (Us III Enfin lorfque $e=2^{\frac{1}{2}}dfy$ l'éq
: $\dot{a}^y \dot{e}xy + Pi$. XV. $fxz=zO$ n'a qu'une (êule racine, mais double , $y+*i/J \sim \ll$
 $= o$, qui indique une feule dernière direction pour les Branches infinies de
la Courbe [§. 136]. Qu'on fubfti— tue — $*v + \ll$ à y dans la propofée, & elle
fera transformée en une équation , où 4 manquera les termes xx & xj [§. 107
]. $o o \bullet * \bullet \bullet$ S'il manquoit aufli le terme $*$, la transformée n'auroit aucun
terme où parût la lettre x , & elle fe réduiroit à une équation telle que $muu +$
 $\wedge u + yr = o$ qui peut avoir $*$ ou deux racines imaginaires , ou deux racines
réelles (Impies , ou une feule racine réelle double. Si les deux racif nés n , U
font imaginaires, / [$= - x y / \wedge + * \text{ ou } + *'$] cft aufli imaginaire , & l'équation
n'exprime que des Lignes imaginaires. Si // , $\gg$ font réelles & inégales $*$, la
propofée fe réduit à ces deux équations fimples $y > b x sj \% - \ll = 0$, $*' =$
 o . Ainfi elle exprime deux. Droites parallèles [§. 40] . Si u & // font égales
, Péquation propofée eft le quarré de $y + xy / \wedge - \ll = \&$ ne défigne qu'une
feule Droite [§. 40]. Mais fi dans la transformée le terme x ne manque pas,
on verra , en la mettant fur le Triangle analytique » Yy^3 que Digitized by
Google

The text on this page is estimated to be only 22.25% accurate

3j8 DIVISION GENERALE DES LIGNES Pl.xv. que la déterminatrice paflera par les Cafés mm & x, & c».ix. quelle donnera une équation telle que $u = -\pm^{\wedge} Bx$. On «ura donc la valeur d> en x par deux Séries dépendantes $f f - *V \sim [+VB* \&c - xy7 j -)/Bx\&c$. qui indiquent deux Branches paraboliques, de part & d'autre de l'Axe des abfcircs, & du côté pofitif ou négatif, félon que B ci\ une grandeur pofitive pu négative [§. Si dans l'équation transformée générale du Cas précéd. on fait $dq > i * epq^{\wedge} fpp = o9$ ce qui fctit difparoître le terme zz , & rend les abfciffes parallèles à la dernière direaion des Branches infinies $|> M S]$, on aura Car $e = 2s/df$, ou $/=^{\wedge}$ » transforme l'éq : $dq + epq eep * /> /> = o$, en $dq + epq J? - \ll r = o$, foit $ddq + depj + \pounds eep = o$, dont la racine quarrée $dq 4 < \backslash ep - o$ donne $y - - Jj^*^{\wedge} a$ verra difparoître en même tems le terme uz , dont le coefficient $idqs 4 < eqr + eps 4^* ifpr$ fe réduit à $- 2des - eer - \backslash - 2des$ e'eil-à-dire, à rien, ee étant égal à $\$df$. Qu'on porte maintenant l'Origine fur la Courbe, en donnant à m & » des valeurs qui raflent difparoître le terme confiant $<*4 - \ll bn + cm - \backslash - dnn + emn \bullet + \ll /W$; : ce qui peut le faire en une infinité de mafr-- $em^{\wedge} : <^{\wedge} (J > b - Aad - \backslash > (2be - Acd)m$) nieres: car on trouve $n = - : \sim, - \sim \bullet$; de forte que prenant pour m une valeur quelconque plus grande que $-$, afin que » ne (bit pas imaginaire, » (êra déterminée. Qu'on détermine enfuite la raifon de / à r par féq : $bs + cr 4 \ll 2 // \ll / 4 < \ll / r 4 < + = ro$, qui Digitized by Googl

The text on this page is estimated to be only 19.14% accurate

DU TROISIEME ORDRE. 3ç9 \$• »fé» ^ difparoître le terme u & donne — — Pixv. c^{em-\\-2fm} . , . — -p-î =i-r. Alors lequation eft réduite aux termes uu & z , & fous cette forme (dss ^ esr -\\- fr^r) uu ^ {bqjf- cp^{*}* idnq -{-etip^{*}{* emq <+• ifmp) z == o , qui [en mettant ^df pour ce, — e pour y, 2 détour /», — * — en — 2 / m pour / , & b-+ em+ 2dn pour r] fe réduit k (dcc — cfo>{* fbb} un — — 2*

The text on this page is estimated to be only 23.96% accurate

360 DIVISION GENERALE DES LIGNES &..XV. féconde
transformée à qui manquent les termes x^* & x^l . oui. h HP o 0
Dans cette transformée , ou le terme x subfifte , ou il man■ que. S'il subfifte
, la de'terminatrice pa(Te par les Cafés $/x^*$ & x , & donne $/ = Cx$ — S'il
manque , Ja dé'terminatrice pafle par Ja CâTe $/x^*$ & par la Pointe, & donne
 $/^Z?x\sim$ Dans l'un & l'autre Cas, la Se'rie eft rcguo . o * o * o . . . * . . o .
. * lière. L'un & Pautre indique une Alymptote droite dont l'équation
eft $v==Ax + B$. Mais les Branches hyperboliques de la Courbe qui donne la
Série $y\sim Ax-\backslash-B$ Hh $Cx —l$ &c. (è jettent dans les Angles afymptotiques
oppofés (1). Et celles de la Courbe qui fournit la Série $y = Ax^4 < B+Dx\sim *$
&c. s'étendent dun même côté de l'Afymptote , mais de part & d'autre de
l'Axe des ordonnées (1). On ne peut pas fuppofer un troifième Cas , où la
Pointe (') Dans Y Enumiration qu'a ces eft fondée fur d'autres prodonnée
Mr. Newton des Lignes priétés que celles des Branches du 3e. Ordre , il
déligne celles - infinies. ci par le nôm \$ Hyperboles defec (1) Ce font les
Hyperboles dérives fans diamètre. Il les détail- feSlives Avec diamètre ,
dont Mr. le au N". c , & en compte fixe/- Newton compte fept efèces au
pcees. La diftin&ion de ces efé- N°. 6. Digitized by Googl

The text on this page is estimated to be only 26.91% accurate

DU TROISIEME ORDRE. 36*1 Ch. ne Pointe refteroit vuide ;
car l'équation n'auroit aucun ter- pL.xv; me fur la Bande làns/, ou fans / , &
feroit paf confe'quent divifible par /= *-r- B =y — Ax — B. EHe
n'exprimeroit donc pas une Courbe du troifie'me Ordre , mais une Courbe
du fécond Ordre avec une Droite dont l'équation (eroit $y - Ax - B = 0$, ou
peut-être même l'aflèmlage de trois Droites. 2. Si le terme xl manque dans
la première transformée, il n'en réfulte point de nouvelles Courbes.
Seulement dans les deux précédentes Séries , le terme », ou B, cft zéro;
parce que l'Origine eft fur PAfymptote représentée , dans ce Cas , par l'eq :
 $y = Ax$. Cas IL Si les trois racines de l'éq : $gy^3 + b - rf + fx^{11} / x1 = 0$ font
réelles & inégales , on fera iùr chacune de ces racines le même Calcul qu'on
vient de faire fur la racine unique du Cas précéd. On conclura donc que la
Courbe a trois Afymptotes droites accompagnées chacune de deux Branches
hyperboliques, qui s'étendent, avec des directions oppofées , ou d'un même
côté de l'Afymptote droite , ou des deux côtés de cette Afymptote. Ce qui
fait trots différens Genres de Courbes. Car ou chaque Afymptote a fes
Branches de Courbe de part & d'autre (') : ou deux Afymptotes les ont de
part & d'autre , la troifième les ayant d'une même part (*) : ou chaque
Afymptote a fes Branches de Courbe d'un même côté (') . A quoi l'on peut
ajouter , fi htrod. à l'Axalyfe des Lignes Courbes. Z z l'on (1) Mr. Newton
les nomre joûter deux , & que ce Genre a Hyperboles redondantes fans dia-
quatorze efpices. mitre , & il en compte neuf efpècfs qu'il dctaille au N°. i.
(') Mr. Newton les appelle (4) Ce font les Hyperboles re- Hyperboles
redondantes avec trois dondantes avec un diamètre, dont diamètres , Ôi il
n'en compte que Mr. Newton compte douze efpè- deux efpices au N°. Mais
Mr. ces au N°. 2. Mais Mr. Stir- Stirlinc a fait voir qu'il y en ung a fait voir
qu'il en faut a- a quatre efpices. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 23.07% accurate

§62. DIVISION GENERALE DES LIGNES Pi xv. Ton en veut faire un quatrième Genre , les Courbes dont Ch. tx. les trois Afymptotes îè croilènt en un feul point (6). 11 (cmble que cette énumération loit imparfaite , & que nous ayons oublie' le Genre , où des trois Afymptotes rune a Tes Branches de Courbe de part & d'autre , les deux autres les ayant d'une même part. Mais ce Cas eft im«fr.no. pollible. Car fi on établit que l'Alymptote AB a lès deux Branches D, E de part & d'autre, tandis que les Afymptotes BC, CA ont leurs Branches F, G, & H , 1 d'un même coté ; on verra que , pour lier ces fix Branches deux à deux , comme elles doivent l'être afin que le cours de la Courbe (bit continu [§.19], il faudra , quelque combinaifon qu'on fafle , qu'une Afymptote foit coupée deux fois par la Courbe; ce qui eft impoffible [§. 150] . Le Calcul démontre auflî l'impoffibilitè' de ce Genre. Car foient $y - Ax = 0$, $y - Ax = 0$) $y - A'x = 0$, les trois racines de l'équation faite en égalant à zéro le plus haut Rang; & Ibient $y - Ax - B - Cx - 1 - Dx - 1 \&c = 0$, $y - Ax - B' - C'x - 1 - Ux \sim^* \&c = Q$ f $y - A'x - Bt/\sim - CKx - \sim 1 - Ly, x - 1 \&C - O$ les trois Séries que donnent ces trois racines. Celles où le terme $x - 1$ (èra zéro défignent les Branches hyperboliques qui s'étendent d'un même côté de l'Alymptote : & celles où ce terme fubfifte marquent les Branches hyperboliques qui fe jettent de part & d'autre de leur Alyrnptote [§. 128]. Or en comparant le produit $y - (A + A + A')xy + \{AA + AA' + AA\}xy - AAA, x' = 0$ de («) Ce Genre contient les croifém en un point. NfiWTON, neuf efpèces cY Hyperboles redon- N°. dmtes dont Us trois Afymptotes fe Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 25.00% accurate

Digitized by Google

Fig. 106.

n^o. 1.

n^o. 2.

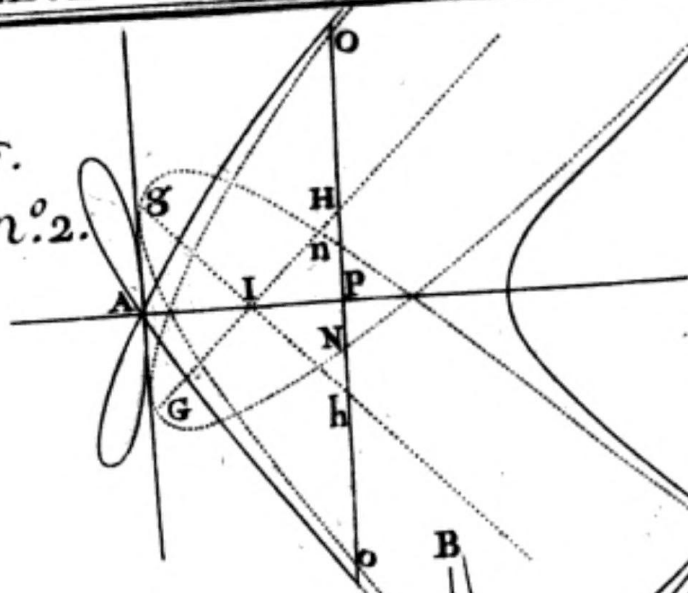


Fig. 108.

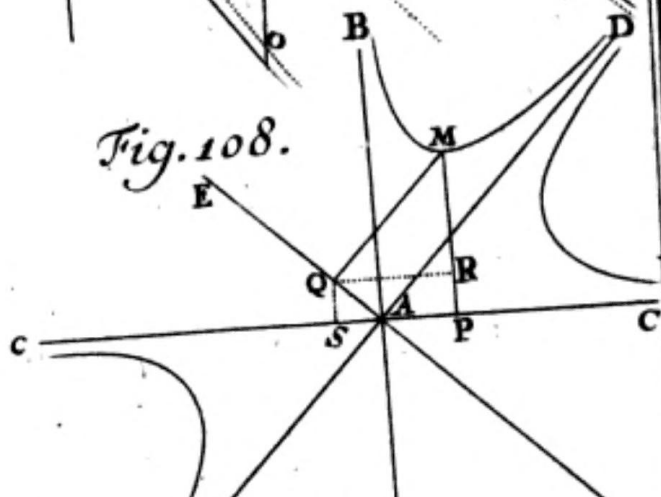
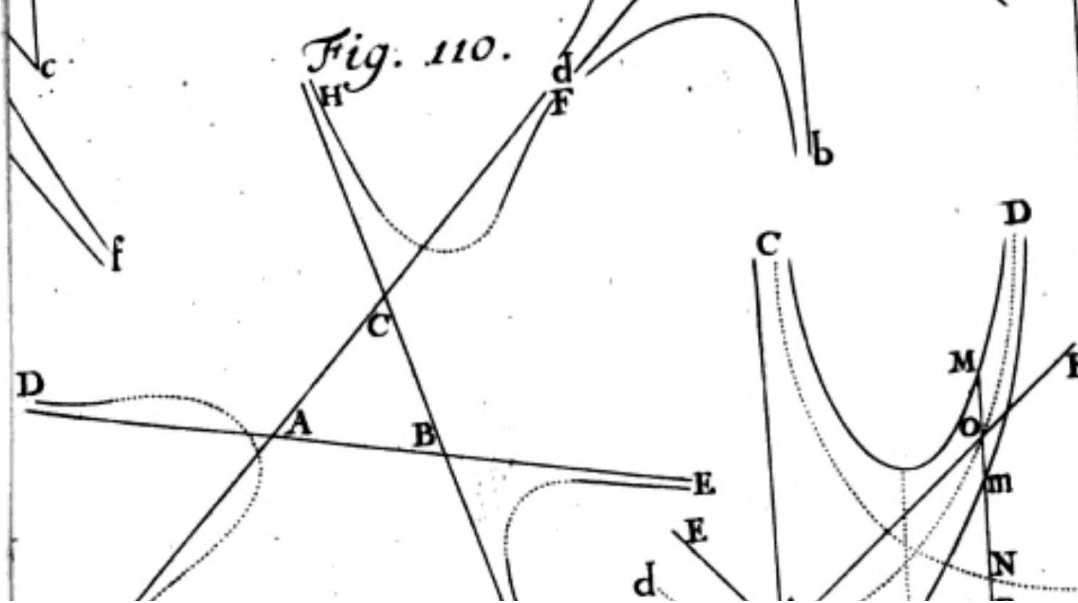


Fig. 110.



* Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 24.69% accurate

DU TROISIEME ORDRE. Ch. ix. de ces trois Séries avec
 Pe'quation propofée Pl.xv. * * Sh £ ? + + '*V + = ° • on trouvera
 $C+C'+C''=0$: ce qui montre que fi deux des trois grandeurs C, C, C'', font
 zéro , la troifième eft auflî néceflairement zéro. Donc fi des trois
 Afymptotes il y en a deux qui ont leurs Branches infinies d'une même part ,
 la troifième a auflî lès Branches d'un même côté. Cas III. Si l'équation du
 plus haut Rang de la propofée a deux de fes racines égales entr'elles ; c'eft-
 à-dire , fi elle a une racine double y — Àx=0 & une racine (impie jr —
 $jfx=0$: chacune de ces racines donnera une Série. Celle de la racine fimple
 défi g ne , comme dans le Cas i , une Afymptote droite , & deux Branches
 hyperboliques qui tombent ou d'un même côté de l'Aiymptote, ou de part &
 d'autre. Pour avoir la Série de la racine double, on fubftituera dans
 l'équation propofée $Ax+fruky$, & on aura une transformée à laquelle il
 manquera les termes x^1 & « x^1 [§. 107]. I. Si le terme x^1 ne manque pas , la
 dtermin.>rice palTera par les Cafés « lx & x^* , & donnera une équation o o
 * * • • • • • telle que $u—\pm iy/Bxy$ & dès lors la Série eft régulière , cette
 équation n'ayant point de racines multiples. Ses deux premiers termes
 $Axz\pm z$

The text on this page is estimated to be only 21.73% accurate

3*4 DIVISIONS GENERALES DES LIGNES pi- xv. la racine
(impie , font deux Genres de Courbes (7) (1). ch.ii. IL Si le terme xl
manque , la déterminatrice traverse **** la Bande x & donne une équation
de cette forme aux1 o o o * * * + |8//x+> = o, ou «** +|0*-f y = o, qui, étant
du fecond degré , peut avoir deux racines imaginaires , ou deux racines
réelles fimples , ou .une feule racine réelle double. 1. Si ces deux racines
font imaginaires , les Séries qu'elles devroient donner font imaginaires : &
la Courbe n'a de Branches infinies que celles qui (ont indiquées par la
racine fimple y — A'x=o: en quoi ce genre refléme aflèz à celui du
premier Cas (*) . 2. Si les deux racines de Péq :

The text on this page is estimated to be only 24.31% accurate

DU TROISIEME ORDRE. 36\$ Ch. ix. que* » <îu* > avec des
 dire&ions oppofces , fe jettent de Pl xv. S. 15 f- part & d'autre de leur
 Afymptote droite représentee par o ■j* • 0 a • * o • • • * l'éq : $v = Ax + B$,
 ou $v = Ax$ Hh Ainfi la racine double y — $Ax = 0$ marque, dans ce Cas,
 quatre Branches hyperboliques autour de deux Afymptotes droites
 parallèles , auxquelles il faut joindre la troifième Afymptote accompagnée
 de deux Branches infinies que deïgne la racine fimple y — $A'x = 0$ (1 0)
 ► On ne peut pas fuppolèr ici , que la Pointe refte vuide : car la (èconde
 transformée n'auroit aucun terme fur la Bande (ans y , ou plutôt (ans / : elle
 ièroit donc divifible par/, & la propofée par^ — Ax — £ [=« — $B = /$]. Elle
 ne repréfènteroît donc qu'une Droite & une Courbe du fécond Ordre » ou
 même trois Droites [§.21]. 3. Enfin, fi $Pe'q; *m* +/3*-+> = 0$ n'a qu'une
 racine double u sa B , on fubftituera $B + /$ à h dans la première transformée ,
 & on aura la féconde à laquelle manqueront les termes x & tx fur la Bande
 x [§. 107]. Mais , par la raifbn qu'on vient d alléguer , la Pointe ne fera pas
 vuide. La déterminatrice partant de la Cale /*x o o o * o o • • • * Zi j portera
 () Ce font les fayperbolifmes de î Hyperbole , dont il y a quatr* effices
 comptées au N°. 9. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 28.13% accurate

3 66 D 1 VISION GENERALE DES LIGNES Ch tx. portera donc
fur la Pointe , & donnera Péq : $y = \pm \sqrt{Cx - 1}$: \$• 'jf. & des ce terme la Série
 $y = A x^4 + B x^3 + C x^2 + D x + E$ est régulière. Elle marque deux Branches
hyperboliques qui avec une même dernière direction le jettent de part &
d'autre de l'Asymptote droite représentée par Péq : $y = Ax + B$. Et ces deux
Branches avec les deux que donne la racine simple $y - Ax = 0$, font les
quatre Branches hyperboliques de ce genre (1 1) . Cas IV. Si l'équation ,
faite en égalant à zéro le plus haut Rang de la proposée , n'a qu'une seule
racine triple $y - Ax = 0$, les Branches infinies n'ont qu'une seule dernière
direction parallèle à la Droite que représente cette eq: $y - Ax = 0$. Et
substituant , dans la proposée , $Ax + u$ à y , on aura une transformée à qui
manquent, fur le plus haut Rang , les termes x^3 , x^2 , x [§. 107]. 1. S'il ne
lui manque pas le terme x^1 , la déterminatrice portera (ur cette Calé & fur la
Cale ul , &c donnera $x^3 = B x^2 + C x + D$: 1 marquent deux Branches paraboliques ,
qui , - fous (") Mr. Newton les appelle désignée par la racine simple a
Hyperbolifmes de la Parabole , & les Branches de Courbe de part il en
déraille cinq espèces au N°. & d'autre , ou d'une même IL. Une de ces
espèces est l'Hy~ part. Mais puisque Mr. Newperbole cubique. ton n'a pas
trouvé à propos de On auroit pû subdiviser ces faire cette subdivision , on a
cm trois derniers Genres, chacun en devoir l'imiter dans une chose deux ,
suivant que l'Asymptote ayez indifférente. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 22.65% accurate

DU TROISIEME ORDRE. 367 fous des directions oppofées , fe jettent d'un même coté Caix. de la Droite parallèle à leur dernie're direction, & qui ett S- "5^exprimée par Péq : $y = Ax$ (*). 2. S'il manque à la transformée le terme xz , & non le terme x , on aura deux déterminatriecs fupérieurs. L'une, qui paflè par »' & ux , donnera $\langle r = zfcVi?x$ La o o o o * * * • • • Série $y = Ax + y/Bx$ &c indique deux Branches paraboliques , qui tendent d'un même côté fous une direction parallèle à la Droite représentée par Vég: $y = Ax$. L'autre determinatrice eft horizontale fi la Cafe x eft pleine, & donne $\langle = \xi'$. Subftituant donc $B+t$ à u , la féconde transformée n'aura aucun des termes x^* , uxx y^*x^{19} x^* & x , & fa determinatrice paflant par la Pointe o o o 0*0 * • • * ■ Se la Cafe txt donnera $/ = C'x \sim^*$. La Série $yzx Ax^*i^* B' + C'x - 1$ &c. qui eft régulière, indique deux Branches hyperboliques , qui , avec une direction oppofée Ce jettent de part & d'autre de leur Alymptote droite exprimée par l'éq : v cas $Ax + On$ ■ (11) Ce font les PatahoUs «fi- L'une d élies eft la Parabole fevergents , dont Mr. NbwTON vu-cubique. compte tinf eftéces au N^* . 12. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 24.16% accurate

\ 368 DIVISION GENERALE DES LIGNES Ch.Ix. On prouveroit, comme ci- defTus [Cas III. 2], que S^*1''' dans cette transformée la Pointe ne peut refter vuide. Et fi dans la première transformée le terme x avoit manque', cela ne donneroit point de nouvelles Courbes. Seulement on auroit $u—o—\&$; l'équation de l'Asymptote droite feroit $v\sim Ax$, ce qui marquerait qu'elle paffè par. * l'Origine. Ainfi les Courbes de ce Genre ont quatre Branches infinies, deux hyperboliques & deux paraboliques, qui ont toutes quatre leur dernière direction parallèle (M). ?. S'il manque enfin à la première transformée le terme ux avec x^1 , elle n'aura qu'une déterminatrice fupérieure, qui, paffant par les Cafs ul & x donnera $o\ o\ o\ 00^* * \dots Bxt:i$. Les deux premiers termes $Ax+BxXi$ de la Série régulière marquent deux Branches paraboliques, lesquelles, fous des directions oppofées, & parallèles à la Droite exprimée par l'éq : $y = Ax$, fe jettent de part & d'autre de cette Droite. Lorfque cette transformée eft la plus compliquée, elle eft $*'+\ll ** -f Pu + y+fx — o$. Qu'on fubftitue $sy -f \gg$ à u & $ry^4 - z^4 \ll m$ à x : ce qui change les coordonnées de manière que l'Axe des abfciffes, & non celui des ordonnées, reffe parallèle à fa première pofition [§.25]: l'équation Ce changera en celle - ci $4- (? \gg + *) /ly^1 *$ Ce Genre ne renferme qu'une feule efpèce de Courbes que Mr. Newton appelle le Trident. N°. 13. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 16.97% accurate

DU TROISIEME ORDRE. jrfo ► f-/z= o, où l'on peut faire i*.
\$»4<» = o , ce qui Ch.ijc donne »= — *. 2°. \$ nxs + 2 ans + (Zs -f-

The text on this page is estimated to be only 25.23% accurate

370 DIVISION GENERALE DES LIGNES Or. ix. qu'on peut
arranger ainfi. Ou \yéq: JE n'a que des ratU 5- 'J6, nés imaginaires [Cas I] ,
ou elle a deux racines imaginaires & deux racines fimples [Cas II] , ou elle
a quatre racines fimples [Cas III] , ou elle a deux racines imaginaires &
une double [Cas IV], ou deux doubler [Cas V] , ou deux fimples & une
double [Cas VI], ou une racine fimpie & une triple [Cas VII] , ou enfin
une feule racine quadruple [Cas VIII] . Cas L Si les racines de l'éq r JE
font routes imaginaires y la Courbe n'aura point de Branches infinies [§. if
 $Ax = s o$, $A' x = o$, on aura , en fubftituant $Ax^{**} m$ à y , une transformée à
laquelle manquera le terme $x \circ I$. Si le terme x^* ne manque pas , la
détermînatrîce horizontale donnera $ux^* — Bx$, ou $u = B$: & fubftituant
 $B^{**}t$ à $re y$ on aura une féconde transformée , à laquelle manqueront les
termes x^4 & x^* . i.Si Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 23.01% accurate

I DU QUATRIEME ORDRE. 371 o o o Ch. ix. * o * o * o I • * • •
o • • 0 • • • • * • • • o 1. Si la Cale x^1 n'est pas vuide , c'est fur elle que portera
la déterminatrice qui part de la Cale $/x^*$, & elle donnera $/ = Cx \sim \backslash$ La Série
re'guliére $y = Ax^4 < B + Cx - 1$ &c. défigne deux Branches hyperboliques
qui se jettent dans les angles afymptotiques oppolés. 2. Si la Calé x^* est
vuide & -la Cale x pleine , c'est for celle-ci que porte la de'terminatrice , qui
donnera $/ = Cx \sim \backslash$ La Se'rie $yz = z. Ax \ll 4-1 B 4-C^* \sim \sim 1$ &c. marque deux
Branches hyperboliques , qui s'e'tendent d'un même côté' de PAfymptote ,
dans les angles afymptotiques de fuite. a 3. Si les Calés x^* & x font vuides,
celle de la Pointe ne fàuroit l'être ; parce que la féconde transformée feroit
divifible par $/$, la première par « — B, & la propofée par $y - Ax - B$, de
forte qu'elle ne repréfenteroit Su'une Droite avec une Ligne du troifième
Ordre. La éterminatrice donnera donc $/ = Cx - 1$; & la Série $y = Ax \sim \backslash -B +$
 $Cx - 1$ &c. indique deux Branches hyperboliques qui tombent dans les
deux angles afymptotiques oppofés. II. Si dans la première transformée le
terme x^1 manquoit , on auroit $*v = o = B$: ce qui feroit voir que
4'Afymptote pafle par J'Orjine , (on éq : $v = Ax + 5$ étant réduite à $v = Ax$.
D'ailleurs tout le refte fubfifte également , & ce vuide de la Cale x^* ne
donne point de nouvelles Courbes. Aaa 4 Aiofi, .Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 24.85% accurate

372 DIVISION GENERALE DES COURBES Ch. ix. Ainfi, fous la dernière direction exprimée par la racî\$. ijtf. ne y — $Ax = 0$ de i'éq : JE , il y a une Afymptote droite avec deux Branches hyperboliques , mais qui peuvent être de trois différens genres. La racine^ — $A'x = 0$, donne aulii une Alymptote droite avec deux Branches hyperboliques , qui peuvent être de trois genres dif. fe'rcns. Donc, en combinant les uns avec les autres, on aura fix Genres de Courbes compris dans ce fécond Cas , lcfquels ont chacun quatre Branches hyperboliques. Cas lit Si Pe'q : /E a quatre racines /impies , on raifonnera fur chacune d'elles comme on vient de faire fur les deux racines fimples du Cas preced. La Courbe a donc quatre Afymptotes de directions différentes , & chacune d'elles eft accompagnée de deux Branches hyperboliques, qui peuvent être de trois différens genres. Il femble qu'en les combinant enfemble on trouvera quinze Genres de Courbes. Mais un calcul femblable à celui qu'on a fait au §. prec. Cas II , fera voir que de ces quinze combinaifons , il y en a fix d'impofTibles. Car Ibient y — $Ax — B — Cx^{\sim} ' — Dx — Z \&c = 0$, y — $Ax — B — Cx^{\sim} l — Ux^{\sim} x \&c = 0$, y — $A'x — B'' — C''^{\sim} - 1 — Wx — x \&t = 0$, Se y — $A''x — hM — Cx^{\sim} ' — jy''yr^{\sim} x dre = 0$, les quatre Séries que fou/niffent les quatre racines de l'e'q : M, Celles où le terme $jc^{\sim} '$ ne manque point defignent les Branches hyperboliques du premier genre ; celles qui n'ont pas le terme $x^{\sim} 1$, mais bien $x^{\sim} 1$, marquent les Branches du fécond genre : & celles du troifième (ont indiquées par les Séries qui n'ont ni le terme $x^{\sim} \sim '$, ni le terme $x^{\sim} \backslash$ Or en comparant avec l'équation propoféc $ay^*^ (ixy^* * \{ * yx \backslash y^* \&c \text{ sil?} .$ le produit des quatre Séries . ,') '« ««mvîjE Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 21.77% accurate

DU QUATRIEME ORDRE. 373 y^* , $(j+4'+A''+\hat{A}'')$ $xy^* +$
 $(jtA, +AA'+AA''+A'A'-t-A'A''+A''A'')^* y'' \&c, n, i$
 $, SAB'+ABH+AB''' + A'B+A't.l'+, \ddot{B}'' ? \dots C AC'+AC' + AC+A'C-\backslash-A'C''-+-$
 $AL''' \} -(C+C'^Cu^C^y^4X\backslash AnC\backslash AHC''^AwC+A', C^AX', i y- \&c \pounds BB'-+-$
 $BB''-t-BB', '+B'B''+B'B''+B'B'' J c An'+AD'' + AD'' + A D + A'b'' + A'D''' n$
 $^n x n' x D^D V- *, U- A''D+a''+A''D''>+A''D+A'''1, '+A''D'' t : . *(D+D+D$
 $+D)x y+< BC + BQ * j^m + gc+ ffc^ gc> > x \sim y \&c$ on verra que les
coefficients de $x'y^*$, xTv^* , $x \text{---}^* y \{ < A''D + A'D' + A''D^* + -A''D'.$ Ainf
ces coérTieients étant égaux à re'.o, on $D A^A4+A'' \_ f A$, aura- $^=l=-^ \text{---}$
Donc $A^A > Aaa$ g ce Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 27.08% accurate

374 DIVISION GENERALE DES LIGNES -Ch. ix. ce qui feroit contraire à la supposition que les quatre racines Ax , $A'x$, $A''x$, $A'''x$ de l'éq : & sont inégales. Ainsi il faut encore exclure la combinaison qui suppose deux paires de Branches du fécond genre, & deux du troisiéme. Donc de quinze combinaisons que présentent trois genres combinés quatre à quatre, en ayant exclu fix, il en reste neuf, qui font neuf Genres compris dans ce Cas III, sc. 1°- Quatre paires de Branches du premier genre. 2°. Trois du premier & une du fécond. 3°. Trois du premier & une du troisiéme. 40. Deux du premier & deux du fécond. 50. Deux du premier, une du fécond, & une du troisiéme. 6°. Deux du premier & deux du troisiéme. 70. Quatre du fécond. 8°. Trois du fécond & une du troisiéme. 9°. Quatre paires de Branches du troisiéme genre. Cas IV. L'équation & ayant deux racines imaginaires une racine double $[y - Ax = 0]$, la Droite indiquée par cette racine double est parallèle à la dernière direction des Branches infinies que peut avoir la Courbe. En substituant $Ax + \dots$ à dans la proposée, on aura une transformée (T), à laquelle manquent les termes x^* & $[x^{\bullet}, 107]$. 1. Si Ta le terme x^* , la déterminatrice passera par $0^{**} \dots$ & x^0 , & donnera $^* = 3 =$

The text on this page is estimated to be only 24.44% accurate

DU QUATRIEME ORDRE. 37; ches paraboliques , qui
 embrasflent pour ainfi dire la Droite Ch. ix. te exprimée par Téq: $y = Ax$. \$•
 »s* II. Mais s'il manque à T le terme x' , la déterminatrice fera couchée fur
 la Bande x^* , & donnera une équation de cette forme $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, ou $y = 0$, qui a , ou deux racines imaginaires, ou
 deux racines réelles (impies , ou une feule racine double. 1 . Si elles font
 imaginaires , la Série est imaginaire par fon fécond terme. La Courbe n'a
 donc point de Branches infinies. 2. Si elles font réelles (impies, »— $B = 0$, u
 — $B = 0$, on fubftituera B^t à » dans T, & on aura une féconde transformée ,
 à laquelle il manquera encore le terme x . La déterminatrice utile partira
 donc de la Café $/x^1$ & paTtera par la Ca(è x ; ou, fi elle eit vuide, parla
 Pointe» qui ne iàuroit être vuide , par la raifon fi fouvent allé o o o o * * o
 * * o . . . * . . . o . . . » . . . * guée. On aura donc $y = Cx^2 - I$, ou $y = Cx^2 - \frac{1}{4}$ La
 racine B donne donc une Série $y = Ax + B + Cx^2 - \frac{1}{4}$ &c , ou $y = Ax + B + Cx^2 - \frac{1}{4}$
 &c. Et la racine B' donne aucune Série $y = jx^2 + Cx - g$ &c ou $y = Ax$
 "4* « Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 24.69% accurate

37\$ DIVISION GENERALE DES LIGNES fCH.ix. $\wedge f' ^\wedge C' j c -'$ &c
 Ainfi la Courbe a deux Afymptotes LJ.ijtf. parallèles representées par les éq
 : $v = zAx * \{ * B , * / = yix 4 - fi'$. Et ces Alymptotes font accompagnées chacune
 de deux Branches hyperboliques , qui le jettent dans les angles
 alymptotiques oppofés , ou de fuite : ce qui, par la combinailon , fait trois
 Genres de Courbes. 3. Si leq : $et * 1 + / 3 * + ? = o$ n'a qu'une racine double « =
 on fublituera à u dans T , & on aura une nouvelle transformée ($\wedge$), à qui il
 manquera les termes $x1$ & $tx1$. Donc la déterminatrice partant de / V portera
 fur la Cafe x , fi elle elt pleine , & dono $o * o o \dots * \dots o$ ncra $i =$
 $\wedge VCx -'$. La Série $y = Ax + JT = fc : VOr''' 1$

The text on this page is estimated to be only 24.59% accurate

DU ÇyUATRIÈME\ORDRK. ": 377 î). Si ces deux racines font imaginaires , la Série est aux. imaginaire par son troisième terme , & la Courbe est §• u*. finie. 2). Si elles sont réelles & simples $\neq Cx \sim 1$, / — . $CmT'1\%$ on a deux Séries $yz = Ax > \{ * B'' 4 \ll Cx - 1$ &c. $y = JP * i * Cx \sim 1$ &c. qui marquent une ligne Asymptote, $[v = Ax + B'']$ avec quatre Branches hyperboliques, étendues , ou dans les quatre angles asymptotiques , si C & C ont des signes contraires , ou deux dans un de ces angles & deux dans l'opposé , si C & C ont le même signe. Si l'éq: $H - cT/x - f - t = 0$ n'a qu'une racine double $t = C''x - 1$, la Série $y = Ax + J3'' 4. C''x -$ » etc. n'est pas encore régulière : mais il faut substituer C^{i+1} à / dans & l'on aura une transformée (X), où la Pointe & la Café xx seront vides. La déterminatrice partant de la Café /V paiera par I9 Café o o o * o o ••00 •••• o •••• * ••• # $x \sim 1$, si elle est pleine , & donnera $j = fcVDx \sim 1$, La Série $y = Ax + B \gg * C''x \sim r^{x-1}$ &c. marque deux Branches hyperboliques , qui se jettent dans un même angle asymptotique , ayant pour Asymptotécourbe une des Branches de l'Hyperbole dont l'équation est $v = Ax + B'' + C''x - \backslash$ Intnd. 4 ? A»*tyfi LiſW QmU:. B b b IV. Si Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 24.13% accurate

378 BirURII GENERALE DES LIGNES Ch. ix. IV. Si le terme x^{-1} manque dans la transformée $X > | \gg t^*$ la déterminatrice traversera les Cafés / & $x \sim 1$, & donne une équation du (ècond degré, qui a ou deux racines imaginaires, ou deux réelles 1 impies , ou une double. On reviendra donc aux raifonnemens précédais , & on conclura , que , (1) . Si ces racines font imaginaires , la Courbe n'a point de Branches infinies. (2) . Si elles font réelles, / = $\mathfrak{x}^* - *$, / — $p^* - 1$, les Séries $y = Ax + B^* + C''x - X + Dx \sim x$ & (. $y = Ax + B'' + C''x - ' * ^D'x^{\wedge} - x$ &c. marquent une feule Afyryptote droite avec quatre Branches hyperboliques , qui fe jettent deux à deux dans les angles alymptotiques oppofés. (\$) . S'il n'y a qu'une racine double $j = D''x \sim *$, la Série $y = Ax + B^* + C''x - 1 + D^*x - i$ &c. n'est pas encore régulière : mais on doit fubftituer JXx 1 + r à s dans Xy & on aura une autre transformée , fur laquelle répétant le même raifonnement , on aura , ou la Série $y = Ax + B'' + Cx - + LTx - 1$ zfcx $y/Ex - *$ &c. qui défigne deux Branches hyperboliques étendues dans un des angles alymptotiques ; ou une Série dont le cinquième terme clt imaginaire , & qui ne donne point de Branches infinies; ouïes deux Séries $y = Ax^{\wedge} Bp + Cx \sim 1 + PV - SfrE^* - '-'$ &c $y = Ax + B'' + C''x - 1 + V'x - \backslash + E'x$ 1 &c. qui marquent quatre Branches hyperboliques étendues deux à deux dans les angles alymptotiques oppofes ; ou enfin une feule Série $y \sim Ax + B'' + Cx \sim \% + D,'x - t * \{ * Evx - 5$ &c. mais qui n'ait pas encore en régie, & à laquelle, par un même raifonnement, on trouve pour fixieme terme, ou $rtr^{\wedge}Fx'''7$, ou un terme imaginaire , ou un terme double $Fx \sim 4$, $FV \sim 4$, ou un terme fimple $FV \sim 4$, lùivi d'un fèptième , qui fera , ou $=t \backslash Gx - 9 >$ ou imaginaire , ou double $Gx - '$, $Gx \sim 5$, .ou

Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 24.74% accurate

DV QUATRIEME ORDRE. 379 ou (impie G**—* mais &c. ce qui 'peut aller à l'infini. Ch.tx. On ne fàuroit donc énume'rer tous les genres des * 'i** Courbes comprîtes dans ce IVe. Cas : mais on peut les réduire à cinq Gaffés. Ie. Celles qui n'ont point de Branches infinies, parce que le fécond, troifième , quatrième, ou &c terme de la Série qui les exprime, eft imaginaire. N°. II, 1. 111, 1). IV, (1). &c. 2e. Celles qui ont deux Branches paraboliques. N\ L 3e. Celles qui ont deux Branches hyperboliques , (bit qu'elles fc jettent de part & d'autre de leur Afymptote qu'elles fcmbent embraiTer, N\ 1 1 , 3 : foit qu'elles le jettent dans un feu! des angles afymptoriques, N°. 111 , j). IV, O). 4e. Celles qui ont quatre Branches hyperboliques autour d'une feule Afymptote , (bit qu'elles fè jettent dans les quatre angles afymptotiques , une dans chacun ; foi t qu'elles le jettent , deux à deux , dans deux angles afymptotiques oppofes. N\ 111, 2). IV, (2; . 5e. Celles qui ont quatre Branches hyperboliques autour de deux Afymptotes parallèles. NMI, 2. » * ■ • Céu V, Si l'cq : JE a Jeux rétines doubles , chaque racine donnera les mêmes variations que celles du précéd. Cas. On les combinera donc les unes avec les autres , & on trouvera les quinze Clartés fuivantes. ic. Les Courbes finies. Combuuùfm de la ie. Claft avec elle-même. 2e. Les Courbes qui ont deux Branches paraboliques. Oafes 1 & 2. j«. Celles qui ont deux Branches hyperboliques. C/. 1 & j. 4e. Celles qui ont quatre Branches hyperboliques avec une feule Afymptote. Cl. 1 & 4. Bbb 2 5e. Celles Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 29.70% accurate

38o DIVISION GENERALE^ DES LIGNES Cn.ix. 5e. Celles
qui ont quatre Branches hyperboliques & f»u*.

The text on this page is estimated to be only 29.59% accurate

. DU QUATRIEME ORDRE. 381 Clartés du IVe. Cas, & on aura les cinq Clafles fuivantes. Ch.Ix. Ie. Les Courbes qui n'ont que quatre Branches hy- 5- istft perboliques autour de deux Afymptotes non parallèles. 2e. Celles qui ont deux Branches paraboliques , & quatre hyperboliques autour de deux Afymptotes non parallèles. 3 e. Celles qui ont fix Branches hyperboliques autour de trois Afymptotes non parallèles. 4c. Celles qui ont huit Branches hyperboliques autour de trois Afymptotes non parallèles , fçavoir, quatre autour d'une Afymptote & deux autour de chacune des deux autres. 5 e. Celles qui ont huit Branches hyperboliques autour de quatre Afymptotes dont deux font parallèles. Cas VIL Si Téq : JE a une racine fimple & une triple , la racine fimple $y - A'x = 0$ indique une Afymptote droite, avec deux Branches hyperboliques. Elles peuvent être de trois genres différais , comme on l'a montré au Cas I. Mais la racine triple étant $y - Ax = 0$, on (ûbftituera Ax^4 n à v dans la propofee , & on aura une transformée (D, dont les Cafés x^4 , ux^* , & «V reOent vuides [§. 107]. 1. Si ta Cafe u^* eft pleine , la déterminatricc traversera $o o^* o \dots * \dots$ les Cafcs u^*x & x' , & donnera $u = Bxt.i$. La Série, dès lors réguliê , $y = Ax+Bxli$ &c. indique deux Bbb 3 Branches Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 26.13% accurate

382 DIVISION GENERALE DES LIGNES Ch. rx. Branches
paraboliques d'un même côté de la Droite ex'•'J*- primée par $y^4 = 4x$, qui est
parallèle à leur dernière direction. I L Si la Café $x\%$ est vuide, mais que x l
ne le (bit pas ; on aura deux déterminatrices, Tune qui parte par «rx1, & l
autre par ax & $x\backslash$ La première donne fei^x , & (à Série $y = Ax \pm y/Bx$ & c.
maro o o o * * * • • • que deux Branches paraboliques, qui embrassent la
Droite représentée par Pécq : $y = Ax$, parallèle à leur dernière direction. La
féconde déterminatrice donne $u - B$, & substituant $B + t$ à « dans 7\ on
aura une transformée à laquelle il manque le terme $x\backslash$ La déterminatrice
partant o o o o o o 0*0 o * 3' . * # • * (* # # O * de la Calé / x^* , portera donc
sur la Calé x , ou, si elle est vuide, sur la Pointe, qui, dans ce cas, ne peut
être vuide, & on aura $r = Cx^{\wedge'}$, ou $aasCsT^*$. La Sétit $y - Ax^{\wedge B} + C$ — 1
& ç. o \ $y = Ax + B + Cx - x$ & c. définent deux Branches hyperboliques d'un
même côté, ou des deux côtés de l'Asymptote droite exprimée par réq:
 $v = Ax * bB$. Ces deux Branches hyperboliques, avec Digitized by

The text on this page is estimated to be only 18.53% accurate

] > U QUATRIEME ORDRE. 383 avec les deux paraboliques qu'indique la première* déter- Ch. ix. minatrice, font quatre Branches infinies dont la dernière* 5* M* direction est parallèle à la Droite représentée par l'éq : $y = Ax$. III. S'il manque à la transformée T le terme « x^1 », elle n'a qu'une seule déterminatrice, qui passe par les Gales *'x « x^1 », si celle-ci est pleine, & donne $* = BV^1$. La Série $y = Ax^B$ est déjà lors régulière, marque $> ' o * \in > O * * \bullet \bullet \#$ deux Branches paraboliques, dont la dernière direction est parallèle à la Droite représentée par $y = r Ax$, & qui se jettent enfin dans deux angles opposés des quatre que fait cette Droite avec l'Axe des ordonnées. IV. S'il manque encore à la transformée T le terme x^* , la déterminatrice traversera la bande x , & fournira une équation cubique, qui peut avoir, T. une racine $o o o o * * * *$ simple réelle, & deux imaginaires, a^* , trois racines {impies, j^o . une simple & une double, ou 40. une triple. 1. S'il n'y a qu'une racine simple $u = s:B$ en substituant $\pm /$ à u dans T, on aura une féconde transformée Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 26.60% accurate

384 DIVISION GENERALE DES LIGNES Ch. ix mée , Su la
 Cale x fera vuide. Celle de ia Pointe ne 5,1 pouvant Tête , la
 de'terminatrice donner $4 / = Cx \sim \backslash o - - \bullet i o o o o o * * * o \bullet \bullet \bullet *$ La Sérk
 $)iz = Ax + B + Cx \sim 1$ cH marque deux Branches hyperboliques étendues
 dans les angles afymptotiques oppofes. 2. S'il y a trois racines, on
 raifonnera de la même manière (ur chacune d'elles , & on conclura qu'elles
 indiquent trois Afymptotes parallèles à la Droite représentée par l'e'q: $y =$
 $six = zot$ & accompagnées chacune de deux Branches hyperboliques , qui (e
 jettent dans les angles afymptotiques oppofés. 3. S'il y a une racine (impie
 $u = B$, & une double $u \sim B >$, la racine fimple donne, comme $n^{\circ}.. 1$ & 2 , une
 Alymptote droite avec deux Branches hyperboliques. Mais pour la double,
 on fubftituera $B' + t$ à u , & on aura unclèconde transformée, à laquelle
 manquent les termes $x Zc/x$. La déterminatrice , partant de laCafe portera o
 $o OOO \bullet \bullet : * * o o$ fur la Pointe , qui ne (àuroit être vuide , & donnera $t =$
 $d = VC'x - *$. La Séïie , dès lors régulière , $j = A*$ Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 27.67% accurate

DU QUATRIEME ORDRE. 38; $\frac{y^2}{C^2} - \frac{x^2}{C'^2} = 1$ &c. marque deux Branches hyperboli- Cm. ques qui embrasent , pour ainsi dire , leur Asymptote, & il y a donc ici deux Asymptotes , accompagnées chacune de deux Branches hyperboliques , mais dont les unes se jettent dans les angles asymptotiques de fuite , & les autres dans les angles asymptotiques opposés. 4. Si l'équation cubique , que fournit la déterminatrice de T, n'a qu'une racine triple il manquera les termes x , tx & rx à la transformée qui résulte de la substitution de u dans T. La déterminatrice, partant de 000 * 000 de la Ca ($\frac{y}{x}$, passera par la Pointe, & donnera $\frac{y}{x} = C'x - \dots$; §. La Série $y = Ax + BT + C'x \sim 11'$ &c. indique deux Branches hyperboliques jetées dans les angles asymptotiques opposés. Ainsi joignant aux Branches infinies qu'indique la racine double de l'éq : JE , les deux Branches hyperboliques marquées par la racine simple , il se trouve sept Clartés de Courbes renfermées dans ce VIIe. Cw. La ie. & la jc. font des Courbes qui ont deux Branches paraboliques & deux Branches hyperboliques. N°. I & III. La 2e. est des Courbes qui ont deux Branches paraboliques & quatre hyperboliques autour de deux Asymptotes non parallèles. N°. II. La 4e. & 7e. font des Courbes qui ont quatre Branches

Introd. à l'Analyse des Lignes Courbes, C C C ches

The text on this page is estimated to be only 17.93% accurate

J85 DIVISION GENERALE DES LIGNES Cl ix. dics
hyperboliques autour 4e deux Afymptotes non pa*> F* raildes. NMV? i &
4. La 5 e. préiente trois Afyœptoces parallèles coupées par une quatrième,
chaque Afymptote ayant deux Branches hyperboliques. N°. IV, 2. Et la 6e.
n'a que deux Afymptotes parallèles coupées par une troifie'me , ayant
chacune deux Branches hyperboliques. N°. IV, j. Cas VIII Quand Teq : m n'a
quW feule rac 'tm druple $y - Ax - 0$; en fubftituant $Ax + u$ à y , on la
transforme en une équat. (T) , dans le plus haut Rang de laquelle , il n'y a
que la Cale »4 qui foit pleine. I. Si, dans le troifie'me Rang, la Café x' eft
remplie, la déterminatrice donnera u^{z+1}/Bx^* , & dès lors» la © o * o • • o •
• • Série $y - Ax \pm z$ &c. eft régulière. Elle indique deux Branches
paraboliques , qui embrasent , pour ainfi dire, la Droite $[y=Ax]$ parallèle à
leur dernière direction. IL Si, dans le troiûème Rang, la Café '*' eft • o o o o
* o • • • * • • • • Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 21.74% accurate

T>V QUATRIEME ORDRE. 3*7 mais non pas la Café on a deux défermratrices , Ch.ix. qui donnent, Tune ussyB'x1 , l'autre u~B. La prémîurc marque deux Branches paraboliques , qui , d'un même côte de fa Droite [y=zÀx~\ parallèle à leur dernie're direction, fè jettent de part & d'autre de l'Axe des {ordonnées. L'autre indique une Afymptote -droite , .dont l'équation eft vzsZAx *i*B , & pour avoir le genre des Branches hyperboliques qui l'accompagnent, on fubrtituc* ra B + / à», & on aura une féconde transformée dont la Café xx fera vuidc. Si la Café x eft pleine , on aura o o 00 00 • O G * O • * • • • O • • * • • • * * = C*— Si elle eft vuide, on aura / = Cx~*. Ainfi ce N°. 11 préfènte des Courbes qui ont deux Branches hyperboliques & deux Branches paraboliques. III. Si , dans la transformée T , il manque au troifiemc Rang les Cafés '*' & mx1 , la déterminatrice paiTéra par les Cafés u* , «'x & x* , & donnera une équation du fécond degré, qui aura ou deux racines imaginaires, ou deux racines réelles (impies , ou une racine double. o o o 00* * • • 1. Si elles font imaginaires, la Série eft imaginaire, & la Courbe finie. Ccc 2 * a.S'il

Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 23.99% accurate

388 DIVISION GENERALE DES LIGNES C«. ix. 2. S'il y a deux racines réelles uu — $Bx = 0$, uu f- 1 j<- $Bfx = z o$, ou $u = \sqrt{x} = y/Bx > »$ ==st yJB' x , on a quatre Séries $y = Ax + y/Bx$ &c. $y = Ax - y/Bx$ &c. $y = Ax + y/B^2x$ &c. $y = Ax - y/B^2x$ &c. qui marquent quatre Branches paraboliques , qui ont toutes leur dernière direction parallèle à une même Droite [$y = Ax$] , qu'elles embrassent. Ces quatre Branches se jettent d'un même côté de l'Axe des ordonnées , à B & d ont le même signe ; elles se jettent deux d'un côté & deux de l'autre , (î B & Bf ont des signes contraires. 3. S'il n'y a qu'une racine double uu — $x^2 = 0$, ou $x = 0$ » la Série n'est pas régulière des ce (ècond terme. On substituera donc $\pm n/B^2x$ {

The text on this page is estimated to be only 25.19% accurate

DU QUATRIEME ORDRE. 589 Elles ont pour Parabole-
 afymptote une des Branches de la Ch. ix. Parabole exprimée par IVq : $v = Ax + y/B''x$. §. ijtf. Mais fi. dans la transformée $^$, la Café xJ;1 fè trouve
 *uide > la déterminatrice couchée fur la Bande x , dont la o o o ■ O1 o o o
 o * * * Café *'x eft vuide , donnera une équation de cette forme *ulx
 $4\sqrt[3]{x+yx} = 0$, OU $etux +/S\sqrt[3]{x+yx} = 0$, qui peut avoir , ou deux racines
 imaginaires , ou deux réelles fimples , ou une double. 1) . Si ces racines font
 imaginaires , les Branches infinies le font auffi. 2) . Si elles font réelles $r=C$,
 $/=C''$, on aura deux Séries régulières dès le troifième terme, $j = Ax^{\wedge}=i/B',x +$
 $C+\sim rx \&c$, $y^{\wedge}Ax+JBx+C' + jj^{\wedge} \&* t$ qui marquent quatre Branches
 paraboliques, dont les dernières directions font parallèles, & qui ont pour
 Aiymp tote- courbe , les unes la Parabole $v = Ax \pm z^{\wedge}B''x - \sqrt{-C}$ 9 les autres
 la Parabole $v = Ax + y/B''x + C$. j)« Mais s'il n'y a qu'une racine ficnple $/ =$
 C'' , la Série , qui commence par les trois termes $Ax^{\wedge}zy/B''x + C''$ n'eft pas
 encore régulière. Il faut fubftituer $C'+s$ à $/$ dans $V > \&$ on aura une troifième
 transformée (X) à laquelle manqueront les termes $x \& /x$. Donc , fi la Ca(è
 js.1***" n'eft pas vuide, la déterminatrice donnera $s \cdot Ccc j z^{\wedge}Dx$ Digitized
 by Google

The text on this page is estimated to be only 20.49% accurate

yjo DMSION GENERALE DES*COURBES Ch. IX. . O ' • S-'''-
 . o o o o o 0*00 • • • * dtz^Dx — l*/B°x , cxptcfTion où Ton ne doit prendre
 qu'une des deux valeurs de rtry'B''*; celle qui fait avec Dx ~ ' un produit
 négatif étant exclue , parce que la racine de ce produit feroit imaginaire. 11
 y a donc deux Séries $y = Ax + y/BTx + C + y/Dx - V^{***} \&c.$ Uy — $Ax + y/$
 $\ddot{y}'x + r — y/Dx - ^B'x \&c.$ ou $y = Ax — y/BTx + C + y/Dx - 1 v'£"x \&\$.$ & $y = Ax$
 $— y/B'x * C* — v7^* — WB'^* \&*•$ qui marquent deux Branches
 paraboliques , dans un même angle , & dont l'Afyroptotecourbe ett une des
 deux Branches de la V^abde $v=s^*$ Que fi la Café x, i de Péq : X fè trouve
 vuide , la déterminatrice paflant par les Cafés $Sx , /x1^*$ & par la o o o 000 »
 0*00 • • • o Pointe, donnera une équation du fécond degré, de laquelle 1 au
 moyen d'un rationnement femblable à celui qu'on vient de faire , on
 conclura > que , (i). Si Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 20.30% accurate

DU QUATRIEME ORDRE. + 391 (1) . Si eñie n'a que des racines
imaginaires, îa Cour- cmx fcc n'a point de franchises infinies. \$.IJ.(!> 2e.
Celles qui ont quatre Branches paraboliques : 2 , 3 e. Celles qui n'en ont que
deux, étendues dans un lêul des quatre angles que fait avec l'Axe des
ordonnéesla. Droite parallèle à leur dernière direction; 3, 0>(s)iv. srii;
Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 23.81% accurate

3>2 DIVISION GENERALE DES LIGNES Ch.ix. 1 V. S'il manque , dans la transformée T , toutes les S- m*. Cafés de la Bande x* j elle aura deux déterminatrices. La o o o o o o o * * * première, qui pafle par les Cafés «4 & u*x, donne a — v'^x, & la Série y — Ax±^Bx &c- qui en réfulte, réfulière dès le lècond terme , indique deux Branches paraoliques, qui embrablènt la Droite [y=:Ax] parallèle à leur dernière direction. La féconde, couchée fur la Bande x y donne une équation du fecond degré « qui prélènte trois Cas. Car i °. Si les racines font imaginaires , la Série Peft auffi. La Courbe n'aura donc que les deux Branches paraboliques indiquées par la première déterminatrîce. a°. Si les racines font réelles & inégales « = on aura deux Séries régulières y = Ax + B 4-, 0c—1 &(. y = Ax^B' 4^C'x— 1 &tt qui marquent deux • o o o 000 0**0 *••••* Afymptotes parallèles , qui ont chacune deux Branches étendues dans les angles afymptotiques oppofés ; auxquelles il faut joindre les deux Branches paraboliques de la première déterminatrice. \$.Si Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 22.77% accurate

DU QUATRIEME ORDRE. 393 \$*. Si lès racines (è réduifent à une feule double Ch.ix. 2T; en fubftituant + / à«, on aura une (êconde trans- §,,J*' formée , qui n'aura fur la bande x que le terme La féconde décerminatrice donnera donc /== =t VC*x~l . o o o 000 0*00 *...#*' La Série $y = Ax + B^* z \pm z^C x \sim 1$ tfr. indique deux Branches hyperboliques , qui embrasent leur Alymptote droite exprimée par l'éq : $v = Ax^B f$, & qu'on joindra aux d^ux Branches paraboliques de la premie're déterminatrice. V. Qu'il manque à la transformée T les Cafés x^* , $ux \setminus r/x$ & $t^?x$ du quatrième rang, les Caîès x' , $ux \setminus$ & ulx du troifième , & la Café xx du fécond , elle aura encore o o o 000 00** deux de'terminatrices. L'une paflânt par «4 & uxt donne $u = Bxi:l$, & fa Série $y \sim Ax + BxKi$ marque deux Branches paraboliques dont la dernière direction eft là Droite $y = Ax$, Si qui le jettent dans deux angles oppofés de ceux que fait cette Droite avec l'Axe des ordonnées. L'autre d 'terminatrice donne $// = \text{£}'$, & par une nouvelle transformée $t^=C'x \sim \setminus$ Sa Série $y = Ax \wedge$ Inirod. à PAnalyje des Lignes Courbes. D d d E 4* < Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 27.66% accurate

394 DIVISION GENERALE DES LIGNES Cb.ix. $B + C'x - 1$
 &c marque deux Branches hyperboliques $/M^*$, étendues dans les angles
 afymptotiques oppofcs. Ces Courbes ont donc deux Branches paraboliques
 & deux hyperboliques. V I. En6n , il peut encore manquer à la transformée
 T la Cafe u x , & alors elle n'a qu'une determinatrice , qui o o o o o o o o o *
 * donne $* = r \pm \sqrt{x}$. Elle indique deux Branches paraboliques, qui
 embrablent la Droite $[y \sim Ax]$ parallèle à leur dernie're direction. On ne peut
 pas fuppofer , qu'avec toutes les Cafés iùppofées vuides , il manque encore
 à la transformée T la Calé x . Car T feroit réduite à la feule Bande fans x , &
 n'exprimerait que ^ quatre Proites parallèles. La propofée ne de'fignerait
 donc que ces Droites , & non pas une Courbe du quatrie'me Ordre. Ainfi
 toutes les Courbes de ce VIIIe. Ou le re'duifent à dix Claflcs. La i c. n'a que
 deux Branches paraboliques. N°. T. La 2 e. a deux Branches paraboliques &
 deux hyperboliques , N°. 1 1. L-a jc. n'a point de Branches infinies, N*. III,
 i , 0,(0. La 4e. a quatre Branches paraboliques , N°. III , 2 , *) > (2). La 5e.
 n'a que deux Branches paraboliques, N°. III,. 3 > î)» O) > Digitized by
 Google

DU QUATRIEME ORDRE. 39; La 6*. a auflî deux Branches paraboliques, N° IV, 1. Ch.ix. La 7e. a deux Branches paraboliques & quatre hyper- §•»!• boliques autour de deux Afymptotes parallèles, N°. IV, 2. La 8 e. a deux Branches paraboliques & deux hyperboliques, NMV, 3. La 9e. de même , N° V. Et la 10e. a feulement deux Branches paraboliques , N°.VI. Ces dix Gaffes fè peuvent , fi Ton veut , réduire à cinq, en réunifiant la 1e, la 5', la 6e , & la 10e ; & la 2% la 8«, & la 9e. 157. 11 paroît que ce lèroit une cholè infinie , que Pénumération de tous les Genres des Courbes du quatrième Ordre poufTée au même détail où nous fbmmes entrés pour les Courbes du troifième Ordre. Mais en Ce bornant aux Clafis générales y dont la divifion eft fondée fur le nombre & le caractère hyperbolique ou parabolique des Branches infinies , on peut les réduire à neuf La ie. Clafie fera des Courbes finies. Telles font celles du Cas I. Cas IV, ClaOe 1 : Cas V, Claf 1 : & Cas VIII, Claf 3. La 3e. cil des Courbes qui n'ont que deux Branches paraboliques , Cas IV, Cl. 2 : Cas V, Cl. 2 : & Cas VIII, Cl. 1 , 5 , 6 , & 10. La 3e. elt des Courbes qui ont deux Branches hyperboliques. Cas IV, Cl. ? , & Cas V, Cl. 3. La 4e. elt des Courbes , qui ont quatre Branches paraboliques fous une même dernière direction , Cas VIII, Cl. 4, ou fous deux différentes dernières directions ; Cas V,C\ 6. La 5 e. eft des Courbes qui ont deux Branches paraboliques & deux hyperboliques , foit que PAfymptote de celles-ci foit parallèle à la dernière diredion de celles - là ; Ddd 2 Cas

The text on this page is estimated to be only 27.47% accurate

39 & DIVISION GENERALE DES LIGNES Ch. rx. Cas VIII, Cl. 2, 8, & 9 : foit qu'elle ne leur fort pas pa«■ lî7' ralièle; Cas V, Cl. 7, UCas VII, Cl. r & ?. La 6e. eft des Courbes qui ont quatre Branches hyperboliques. Elle lè fubdivilè en trois, i°. Celles qui n'ont qu'une Afymptote, Cas IV, Cl. 4 : & Cas V, Cl. 4. 20. Celles qui ont deux Afymptotes parallèles, Cas IV, Cl. 5 ; & Cas V, Cl. 5. *°. Celles qui ont deux Afymptotes non parallèles, Cas II. Cas V, Cl. 10 : Cas VI, CL 1 : & Cas VII, Cl. 4 & 7. La 7e. eft des Courbes qui ont deux Branches paraboliques & quatre Branches hyperboliques : celles-ci i\ n'ayant qu'une Afymptote, Cas V, Cl. 8 : ou 20. ayant deux Aiympotes parallèles, Cas V, Cl. 9 : & Cas VIII, Cl. 7: ou |#. ayant deux Afymptotes non parallèles, Cas VI, Cl. 2, Si Cas VII, Cl. 2. . La 8e. eft des Courbes qui ont fix Branches hyperboliques. Elle a au/fi trois fubdivifions. 1° de celles qui nont que deux Afymptotes, non parallèles, Cas V, Cl. 1 r. 2\ de celles qui ont trois Afymptotes, dont deux font parallèles, Cas V, Cl. 12: & Cas VII, Cl. 6. ?°. de celles qui ont trois Afymptotes non parallèles, Cas VI, Enfin la 9e. eft des Courbes qui ont huit Branches hyperboliques. On en peut faire fept fubdivifions. 1°. Celles qui n'ont que deux Afymptotes, non parallèles, Cas V, r l? * î, *i s T" onc trois Afymptotes, dont deux font parallèles, Cas V, Cl. 14. ?°. Celles qui ont trois Afymptotes non parallèles, Qu VI, Cl. 4. 4°. Celles qui ont quatre Afymptotes, dont trois font parallèles, Cas VU, Cl. 5. 50 Celles qui ont quatre Afymptotes parallèles deux à deux Cas V, Cl. i5. 6°. Celles qui ont quatre Afymp. t0ole^ „llt dcux feu,ement font parallèles, Cas VI, Cl. 5. ll'l qW qU*trC ArymPtotes non parafes., Cm 1 5 8. En Digitized by Googl

I DV CINQUIEME ORDRE. 397 158. En fuivant la même route ,
 & au moyen de aux. quelques abrèges, il paroît qu'on pourroit diftribuer les
 S-1*8* Courbes du cinquième Ordre en onze Qafes. La 1^{re}. des Courbes qui
 n'ont que deux Branches paraboliques. La 2^e des Courbes qui n'ont que
 deux Branches hyperboliques. La 3^e. de celles qui ont quatre Branches
 paraboliques. La 4^e. de celles qui ont deux Branches paraboliques & deux
 hyperboliques. La 5^e. de celles qui ont quatre Branches hyperboliques dont
 les deux Afymptotes feront ou parallèles , ou non parallèles. La 6^e. de celles
 qui ont fix Branches infinies, quatre paraboliques & deux hyperboliques. La
 7^e. de celles qui ont aufH fix Branches infinies, mais deux paraboliques &
 quatre hyperboliques ; autour d'une feule Afymptote ; ou autour de deux
 Afymptotes parallèles ; ou autour de deux Afymptotes non parallèles. La 8^e.
 de celles qui ont fix Branches hyperboliques ; autour de deux Afymptotes
 non parallèles , dont l'une eft accompagnée de deux Branches & l'autre de
 quatre ; ou bien autour de trois Afymptotes , qui peuvent être parallèles ; ou
 dont deux feulement feront parallèles ; ou qui ne feront point parallèles. La
 9^e. de celles qui ont deux Branches paraboliques & fix hyperboliques
 autour des mêmes Afymptotes que dans la Claife précédente. La 10^e. eft de
 celles qui ont huit Branches hyperboliques ; ou autour de trois Afymptotes
 non parallèles ; ou ont. deux font parallèles, la troifième ayant quatre
 Branche* , & les parallèles chacune deux ; ou autour de quatre Afymptotes
 qui ont chacune deux Branches, & dequelles trois peuvent être parallèles &
 coupées par la quatrième ; D d d j ou~ Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 29.29% accurate

398 DIVISION GENERALE DES LIGNES Ch. ix. ou dont deux feulement font parallèles ; ou qui font pa\$.ij8. ra||cles deux à deux ; ou enfin qui ne font point parallèles. Et la h c, eft de celles qui ont dix Branches hyperboliques ; ou autour de trois Afymptotes non parallèles , dont une n'a que deux Branches , & les deux autres chacune quatre Branches ; ou autour de quatre Afymptotes , dont trois peuvent être parallèles , & ayant chacune deux Branches font coupées par la quatrième qui en a quatre ; ou bien dont deux feulement font parallèles & coupées par les deux autres, une defquelles a quatre Branches ; ou autour de cinq Afymptotes, qui peuvent, ou n'être point parallèles , ou n'en avoir que deux parallèles ; ou en avoir trois ; ou en avoir deux couples de parallèles coupées par la cinquième ; ou en avoir trois parallèles coupées par les deux autres auili parallèles. 159. Donc, pour recapituler le tout, I. La Ligne du prémier Ordre a deux Branches infinies .rccYilignes. IL Dans le 2e. Ordre , il y a une Courbe finie, une infinie avec deux Branches paraboliques , & une avec quatre Branches hyperboliques. III. Dans le je. Ordre, il y a des Courbes qui ont deux Branches paraboliques [Genres 12 & 14] ; d'autres qui n'ont que deux Branches hyperboliques [G. 1 > 2 , & 9] ; d'autres qui ont deux Branches paraboliques & deux hyperboliques [G. 7 , 8 , & 1 ?] ; d'autres qui ont quatre Branches hyperboliques [G. 11] ; & d'autres qui en ont fix [G. 3,4, 5,6 & 10]. IV. Dans le 4e. Ordre, on trouve des Courbes finies [Cl. 1] ; d'autres , qui ont deux Branches infinies , ou paraboliques [CL 2] , ou hyperboliques [Ci. 3] : d'autres qui ont quatre Branches infinies, ou paraboliques [C/.4], ou Digitized by Google

DU CINQUIEME ORDRE. S99 hyperboliques [CI.

The text on this page is estimated to be only 27.49% accurate

DES POINTS D'INFLEXION CHAPITRE X. Des Points

Jinguliers : Points multiples , Points d Inflexion & de Serpement. 160. T E nombre, Tefpèce & la pofuion des BranI j ches infinies diftinguent les Courbes des dirTerens Qrdres en leurs Clartés & Genres. Ces Genres Ce fubdivifent en Efpèces par les variete's , qui confident en ce que les Courbes ont de remarquable dans un efpace fini , & qui le réduifent principalement à des Points finguliers. On donne ce nom aux Points qui Ce diliinguent des autres Points de la même Courbe par quelque chofe de particulier. Tout Point d'une Courbe eft fimple ou multiple. On appelle Point fimple , celui qui n'appartient qu'à une feule Branche de la Courbe , & Point multiple , celui qui eft commun à plufieurs Branches. En particulier , on nomme Point double celui qui eft commun à deux Branches ; Point triple celui qui appartient à trois ; Point quadruple , &c. On voit déjà que les Points multiples (ont finguliers. Les Points fimples le font aufli , lorfqu'ils font Points (T Inflexion , ou Points de Serpement. 162. Pour entendre ce que c'eft qu'une Inflexion & un Serpement , & quels font leurs differens degrés ; on confuercra qu'une Droite coupe une Ligne , quand elle Ja travèrfe au point où elle la rencontre , & qu'elle laiffe une partie de la Ligne d'un côté & une partie de l'autre. Cette Droite s'appelle Sécante. Une

Digitized by

The text on this page is estimated to be only 28.89% accurate

ET DE S ERP ENTE ME NT, 401 Ch.x. Une Sécante peut rencontrer la Courbe en plus d'un Pl.xvi. f. au p0int. Si deux Joints de SetUcn s'aprochent infiniment Fun de l'autre , en forte qu'ils (è réunifient & se confondent en un (èul , la Sécante devient Tangente , & les deux Points de feclton réunis ne font plus qu'un feul Point de contaB , ou a" attouchement. Soit, par ex., un Cercle AEB décrit sur le diamètre %m. A B , qui coupe la Circonférence en deux Points A , B , éloignés de toute la distance A B. Si l'on imagine que ce diamètre vient à (è mouvoir parallèlement à lui-même , & qu'il passe dans la situation CD ; les Points de fection se font aprochés l'un de l'autre , car la corde CD est plus petite que le diamètre A B. S'il continué à se mouvoir en c d , les Points de (èaion se rapprochent toujours plus , parce qu'une corde est d'autant plus petite qu'elle est plus éloignée du centre ; jusqu'à ce que ce diamètre étant passé en x£ , il cesse de couper la circonférence , mais il la touche au Point E , où l'on peut feindre qu'il la coupe en deux points infiniment proches l'un de l'autre ; parce qu'en effet couper en deux Points réunis , c'est toucher en un seul Point. Une Tangente est donc censée rencontrer en deux Points la Courbe qu'elle touche , mais en deux Points infiniment proches l'un de l'autre , & coïncidents. Ainsi dans les Courbes du fécond Ordre, la Tangente ne peut rencontrer la Courbe qu'au seul Point d'attouchement ; car si elle la rencontrait en un autre Point, elle fer oit censée la rencontrer trois fois ; ce qui n'est pas possible dans une Ligne de cet Ordre [§. \$9] . 16 y. Mais dans les Lignes des Ordres supérieurs , la Tangente peut encore rencontrer la Courbe qu'elle touche. Si trois Points de féaion se réunissent , la Droite qui passe par ces trois Points réunis , ou infiniment prolongée d'Anahse des Lignes Courbes. E e e ches , Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 25.93% accurate

402 DES POINTS D' IN FLEXION \ Pl. xvi. chcs , touche &
coupe en même tems la Courbe, & le &».x. Point où ils l

ET DE SERPENTEMENT. 403 ch.x. contrer la Courbe en trois Points. Donc les Lignes du Fc Xvi. fécond Ordre ne font pas fufceptibles d'Inflexion [§.59]. Et dans celles du troifième Ordre , la Tangente au Point d'Inflexion ne peut plus rencontrer la Courbe. 1 64. Mais dans les Lignes du quatrième Ordre & des Ordres fupérieurs , une Tangente AB en un Point d'Inflexion A peut encore rencontrer la Courbe, comme en B. Si , par quelque (uppoñtion , la diftance AB devient infiniment petite Ab , la Droite AB ne coupe plus la Courbe elle ne fait que la toucher. Mais ce contaet eft équivalent à quatre interfections , ou à deux attouchemens Amples , infiniment proches l'un de l'autre. L'Inflexion ne paroît plus , quoiqu'elle exifte réellement dans un elpace infiniment petit , & qu'elle (bit (enfible à l'Analyfe , dont la vue , ii l'on oie parler ainfi , eft plus perçante que la nôtre. On donne à ces Points le nom de Points de double Inflexion , ou Points de Serpement * . • 165. De même , le Point de triple Inflexion eft celui dans le contaet duquel fe réuniffent cinq interférations : Et dans l'attouchement du Point de quadruple Inflexion , ou de double Serpement font cenfés confondus fix Points de féction. En général , la multiplicité de l'Inflexion fe compte par le nombre des interférations , moins deux , qui le réuniffent dans le contaet de ce Point-là : & la multiplicité du Serpement par la moitié du nombre des interférations moins deux , qui font cenfées confondues dans le contaet de ce Point-là. 1 66. Il eft aifé de voir que les Inflexions font alternativement vifibles & invifibles > en palñant d'un degré à l'autre * Mr. de Maupeutuis, Mon. de TActd. 1729. p. 277.

Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 25.51% accurate

404 DES POINTS D' INFLEXION l'autre * : que les fimples , les triples, les quintuples, 8c Cn.xv en général celles d'un degré impair , font vifibles ; parce "4 qu'en ce Point-là la Courbe change fa convexité' en concavité, & que la Tangente y eft en même Sécante. Mais que les Inflexions doubles , les quadruples , & en général celles d'un degré pair , (ont invifibles , & ne diffèrent en rien , à la vûc , des fimples Points de la Courbe : ils ne font reconnoiffables que par les effets que leur exiftence produit dans le Calcul. C'eft proprement ces Points d'Inflexion invifible qu'on nomme Points de Serpement. 167. 11 fuit de là , que les Lignes les plus fimples , qui foient fufceptibles d'une Inflexion du degré / , font celles de l'Ordre / + 2 : parce qu'une Droite , qui touche une Courbe en un Point d'Inflexion du degré / , eft cenfé la rencontrer en / *{ *2 Points [§. 165] . Que les lignes les plus fimples , qui foient fulceptibles d'un Serpement du degré' v , font les Lignes de l'Ordre 2v HH 2 [§. 165]. Et que dans les Lignes de l'Ordre t + 2 , ou iv 4« 2 , la Droite qui les touche en* un Point d'Inflexion du degré / , ou en un Point de Serpement du degré v , ne peut plus les rencontrer [§. §9]. t g 8 . On trouvera des Exemples de toutes ces efèces de Points fimples , dans les Sommets des Paraboles dont l'équation eft $y=xh$, b étant un nombre entier & pofitif. I. La Parabole ordinaire $y = xx$ n'a au fommet qu'un Point tout fimple, fans Inflexion, ni Serpement. Auflî, faifant $y = 0$, on a $xx = 0$, qui n'a que deux racines $=0$, $x=0$ s d'où il paroît que TAXe des abfciffes ne * ISfi.de FAtsl 1730. pag. 73, Digitized by Go

The text on this page is estimated to be only 25.46% accurate

ET DE SERT ENTE ME NT. 40; Ch. x. ne rencontre la Courbe au fommet que deux fois, qu'il la PIXVI. \$. 168. touche finalement. II. Mais la Parabole cubique $y = x^3$ a une Inflexion r.g. uy. à l'Origine. C'est pourquoi $y = 0$ donne $x' = 0$, dont les trois racines égales $a' = 0$, $x = 0$, $x = 0$, montrent que la Ligne des abscisses rencontre trois fois la Courbe à l'Origine, qu'elle y est en même tems Tangente & Sécante. On le verra clairement, si, au lieu de l'éq : $y = x^3$, on prend $y = x^3 - bx^2$, qui représente une Courbe que l'Axe des abscisses touche à l'Origine A & rencontre au Point B. Car, faisant $y = 0$, on aura $x^3 - bx^2 = 0$, qui a trois racines $x = 0$, $x = 0$, $x = b$. Ainsi l'Axe rencontre deux fois la Courbe en A, [c'est à-dire, il l'y touche], & une fois en B à l'extrémité de l'abscisse AB = b. Mais si l'on conçoit que diminuant par degrés, le point B s'approche de A, jusqu'à ce que b devenant zéro, B tombe sur A; l'éq : $y = x^3 - bx^2$ deviendra $y = x^3$, dans laquelle la supposition de $y = 0$ donne à x trois valeurs égales $x = 0$, $x = 0$, $x = 0$, parce que l'Axe des abscisses rencontre trois fois la Courbe au Point A devenu Point d'inflexion. Ou bien, qu'au lieu de l'éq : $y = x^3$, on prenne $y = x^3 - bx^2$ — Cette équation exprime une Courbe, qui coupe trois fois l'Axe des abscisses, lç à l'Origine A, & aux points B, b, extrémités des abscisses AB = b, & Ab = b; car $y = 0$ donne $x^3 - bx^2 = 0$, qui a trois racines, $x = 0$, $x = b$, $x = 0$. Si donc b diminue jusqu'à s'anéantir, les points B & b s'approchent de l'Origine jusqu'à se confondre avec le Point A. Alors l'éq : $y = x^3 - bx^2$ se réduit à $y = x^3$, & ses trois racines $x = 0 > x = b$, $x = 0$ (se réduisent à $x = 0$, $x = 0$, $x = 0$; ce qui marque un Point d'Inflexion à l'Origine. Eee 3 m. u Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 26.35% accurate

*od DES POINTS VINTLEKlùH Pi. XVI. III. La Parabole quatre-quarree, $y = x^4$ a un Point Cm.x. de Serpntement , ou de double Inflexion , à l'Origine. i x6%' Car $y = 0$ donne $x^4 = 0$, dont les quatre racines égales $x = 0$, $x = 0$, $x = 0$, $x = 0$ marquent que l'Axe des abscisses rencontrera quatre fois la Courbe à l'Origine : & qu'ainfi ce Point , étant un Point fimple , ell Point de Serpntement. Cela fera rendu (ènfi ble, en fubftituant à Pe'q: $y = x^4$, K 8 réq. $y = x^4 - bx$, qui représente une Courbe , que ' l'Axe des abscisses touche à l'Origine A en un Point d'Inflexion , & coupe en un point B éloigné' de A de là distance $AB = b$. Car $y = 0$ donne $x^4 - bx = 0$, dont les racines font $x=0, x=0, x=0, x=b$. Mais à mefure que b diminue , B s'aproche d'A , avec lequel il le confond enfin , quand b , devenu zéro , rend la racine $x = b$, égale aux trois autres $x = 0$. La Courbe bADB change alors fon e'quat : $y = x^4 - bx$ en celle-ci $y = x^4$ & devient par conféquent une Parabole quarré-quarréc bAd, dont l'Origine A eft un Point de Serpntement , ou de double Inflexion , puifqu'aux trois Points de feo tion que renfermoit déjà le fommet A , il s'y joint encore celui qui etoit en B. Kg- n9' Ori peut auflî, au lieu de $y = x^4$, prendre l'éq : $y = x^4 - (Jbb^{\frac{1}{2}})x$ Elle repre'lente une Courbe , qui coupe quatre fois l'Axe des absciffes , Iç. en c , b , B , & C , extrémités des absciffes $Ac = -c$, $Ab = -b$, $AB = \&$, $AC = c$: car $y = 0$ donne $x^4 - (W + \&)x = 0$ qui a ces quatre racines $x=c, x = -c, x=b, x = -b$. A mefure que b diminuera, les points B & b s'aprocheront de A , & s'y réuniront quand b fera zéro. Alors la Courbe , dont l'équation eft $y = x^4 - ccx$, touche l'Axe des absciffes à l'Origine A , où ce contaël réunit les deux interlêctions B, b, & elle continue à le couper en C , c . Auflî $y = 0$ donne $x^4 - ccx = 0$ Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 21.76% accurate

ET DE SERPENTE ME HT. 407 Ch. x. = 0, dont les quatre racines font $x=0, x=0\}$ xrrf, pLXYli g. 168. $x = -\frac{1}{4}a$; si c devient aussi zéro, les deux Points de lection C , c viennent encore à se confondre avec les deux qui l'ont déjà vu A , & le sommet de la Courbe, qui n'est plus que la Parabole $y = at^4$, reunit les quatre intersections c , b , B , C . C'est donc un Point de Serpente. IV. La Parabole quartre-cubique $y = x^5$, a un Point de triple Inflexion à l'origine : puisque $y = 0$ donne $x^5 = 0$, qui a cinq racines égales à celle-ci $x = 0$. L'Axe des abscisses rencontre donc cinq fois la Courbe à l'Origine, qui n'est pourtant qu'un Point (impie* Si on substitue à l'éq : $y = x^5$, l'éq : $y = x^5 - (M^4 - c^4)x$ on aura une Courbe, qui coupe cinq fois l'Axe des abscisses, sc. à l'Origine A , & aux extrémités B , b , C , c , des abscisses $AB = \frac{1}{4}a$, $Ab = -\frac{1}{4}b$, $AC = \frac{1}{4}a$, $Ac = -\frac{1}{4}c$. En effet, $y = 0$ donne $x^5 - (M^4 - c^4)x = 0$, qui a ces cinq racines, $x=0$, $x = \frac{1}{4}a$, $x = -\frac{1}{4}b$, $x = \frac{1}{4}a$, $x = -\frac{1}{4}c$. Si, dans cette équation, on fait $b = cy$ ce qui la change en $y^5 - x^5 - c^4x^4 + c^4x^5 = 0$ les deux Points de lection B & C se réunissent en un Point de contact, aussi Fig. x** bien que les deux Points b & c . L'Axe des abscisses, qui coupe la Courbe en A & la touche en deux autres Points, est toujours censé la rencontrer cinq fois. Si, au lieu de faire $b = cy$ on eut fait $b = 0$, les deux Points de lection B , b se feroient réunis au Point, de lection A , l'Origine feroit devenue un Point; d'inflexion touche' par la Ligne des abscisses, & l'équation de la Courbe devient $y = x^5 - c^4x^4$. Mais, si l'on fait $A = 0$, les cinq Points de lection se confondent en un seul Point de triple Inflexion à l'origine, & la Courbe devient la Parabole quartre-cubique $y = x^5$ dont l'équation est

On Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 27.83% accurate

408 VES POINTS D'INFLEXION TIXVI. On pourroit fuivre à Pinfini cette manière de faire voir cH x. que ia Tangente au Point d'Inflexion rencontrera la Courbe en deux Points de plus qu'il n'y a d'unités dans l'exposant du degré de leur Inflexion. Et on trouvera généralement que la Parabole, dont l'équation est $y = x^2$, a à l'origine une Inflexion du degré $\frac{1}{2}$, laquelle est visible, si $\frac{1}{2}$ est impair; invisible, si $\frac{1}{2}$ est pair; en quel cas, c'est un Serpement du degré $\frac{1}{2} \times 1 = 1$. 169. Telles sont les singularités des Points (impies. Quant aux Points multiples on a déjà dit [§. 161] que le Point double est celui qui est commun à deux Branches de la Courbe, celui par où elle passe deux fois. Il y a donc cette différence entre le Point double & le Point ordinaire, c'est que, dans le Point ordinaire, la Tangente est la seule Droite qui soit censée y rencontrer deux fois la Courbe; au lieu que toute Droite qui passe par un Point double est censée y rencontrer la Courbe, au moins deux fois. Le Point triple est celui qui est commun à trois Branches de la Courbe, celui par lequel la Courbe passe trois fois. Ainsi il diffère du Point d'Inflexion, en ce que dans celui-ci la Tangente est la seule Droite qui soit censée y rencontrer trois fois la Courbe; au lieu que toute Droite qui passe par un Point triple est censée y rencontrer la Courbe, au moins trois fois. De même, le Point quadruple est celui par lequel la Courbe passe quatre fois. Toute Droite qui traverse un Point quadruple est donc censée y rencontrer la Courbe au moins quatre fois: ce qui fait la différence du Point quadruple au Point de Serpement, dont la Tangente seule est censée y rencontrer quatre fois la Courbe. Ceci Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 29.00% accurate

Digitized by Google

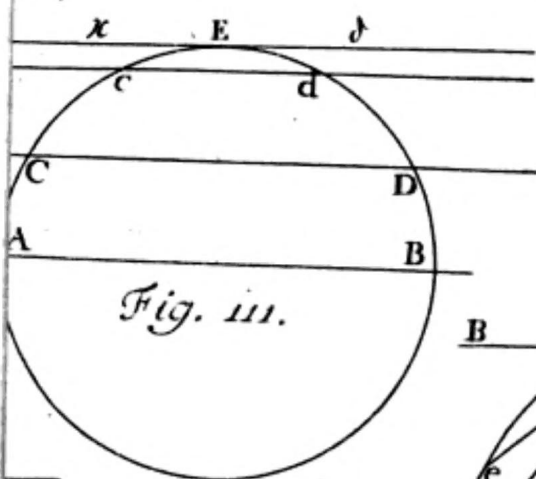


Fig. 113.

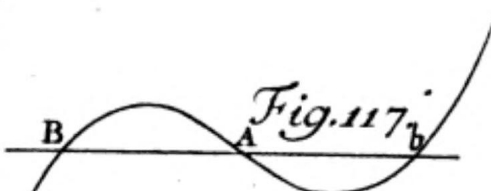
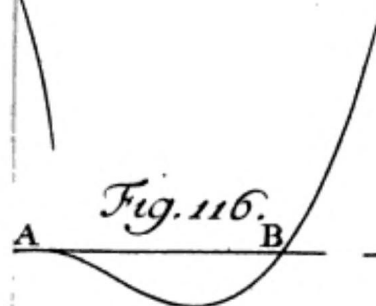
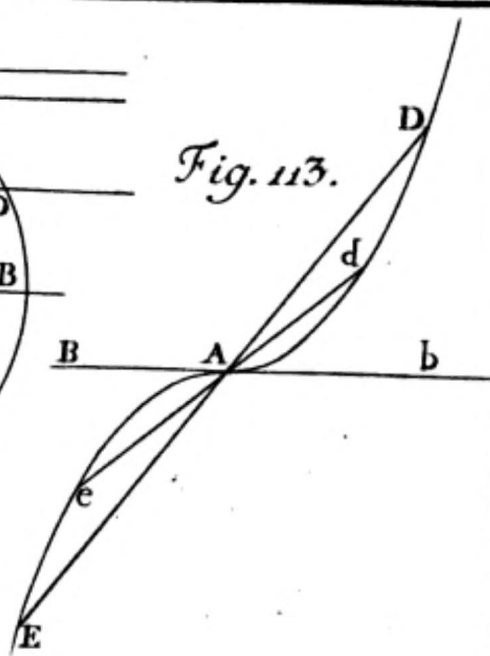


Fig. 119.

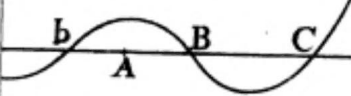


Fig. 120.



Fig. 122.

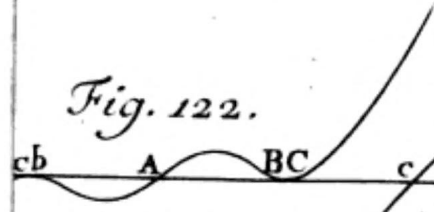
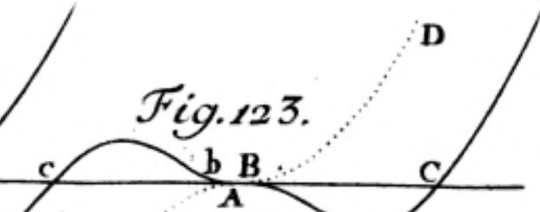


Fig. 123.



The text on this page is estimated to be only 25.00% accurate

Digitized by Goog

The text on this page is estimated to be only 24.44% accurate

DES POINTS MULTIPLES. 409 Ch.X. Ceci s'applique (sans peine aux Points quintuples, & en Pt.XY. §. 169- général aux Points d'une multiplicité quelconque. Ainsi pour (avoir fixé un Point assigné d'une Courbe est un Point multiple, & quel que le degré de (à multiplicité; il faut examiner combien de fois une Droite quelconque menée par ce Point-là, y rencontre la Courbe. 170. Pour cet effet, on supposera d'abord que l'Origine est prise sur le Point assigné, & conservant la position de l'Axe des abscisses, on donnera à celui des ordonnées une position indéterminée. Cela se fait [§. 25. n°. 2] en substituant dans l'équation de la Courbe $z = 0$ $y = xz$; z marquant ici une raïson quelconque, c'est-à-dire, une raïson indéterminée. Mais, comme on ne transforme l'équation que pour (avoir en combien de points la première ordonnée rencontre la Courbe, ce qui (est trouvé en faisant $z = 0$ dans la transformée [§. 15.], on peut faire cette supposition, même avant la substitution, en écrivant simplement y pour yz & x pour xz . Cette substitution se fera donc en écrivant (évidemment / pour y , & x pour x , & multipliant chaque terme par la puissance de z dont l'exposant est égal à la (somme des exposants de x & de y dans ce terme; c'est-à-dire, en multipliant les termes du $B^{\text{ième}}$ Rang par z^4 , ceux du (second Rang par z^3 , ceux du troisième par z^2 , &c. De cette manière l'équation générale $a, x^4 + bxy + cxy^2 + dx^2y^2 + exy^3 + fy^4 - f_1x^3y - f_2x^2y^2 - f_3xy^3 - f_4y^4 = 0$, se change en $(bx^4 + cxy^2 + dx^2y^2 + exy^3 + fy^4 - f_1x^3y - f_2x^2y^2 - f_3xy^3 - f_4y^4)z^4 = 0$. Et cette dernière équation indique par le nombre de ses racines en combien de points une Droite quelconque passant par l'Origine rencontre la Courbe. Utrod. à l'Appendice des Lignes Courbes. Fff Cora. M. T> e G h a, VUgt de l'Ann. pag. 88, 5c f. f Ufuge de l'AmU pag. 88. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 25.69% accurate

DES POINTS MULTIPLES. <*l.xyV Comme on ne cherche ici qu'à savoir combien de fois ChX cette Droite rencontre la Courbe à l'Origine ; ce n'est \$-'7* qu'aux racines « = 0 qu'il faut s'arrêter ; car 1* autres indiquent bien des points où l'ordonnée primitive rencontre la Courbe , mais ces points sont hors de l'Origine [§.15] ; au lieu que les racines égales à zéro marquant que la Droite dont nous parlons rencontre la Courbe à l'Origine , si l'équation n'en a aucune , la Droite ne rencontre point la Courbe à l'Origine : l'Origine n'est pas un Point de la Courbe. Si l'équation n'a qu'une seule racine égale à zéro , la Droite rencontre une seule fois la Courbe à l'Origine, qui est, par conséquent, un Point de la Courbe , mais un Point (Impie. Si cette équation a deux , trois , quatre , ou plusieurs racines égales à zéro > là Droite quelconque , menée par l'Origine , y rencontre la Courbe, deux, trois, quatre, ou plusieurs fois : l'Origine est donc un. Point double , triple , quadruple , multiple. L'éq : $t^4 + \frac{bs}{cr}t^3 + \frac{bs^2}{cr^2}t^2 + \frac{bs^3}{cr^3}t + \frac{bs^4}{cr^4}$ a autant de racines égales à zéro qu'il lui manque de termes initiaux. Elle n'est pas divisible par $u = 0$, elle n'a donc point de racines égales à zéro ; s'il ne lui manque le premier terme a. Elle n'est divisible qu'une fois par u^3 elle n'a qu'une racine zéro ; si , le terme a manquant , elle conserve le terme $(bs + cr) m$. Elle est divisible par $uu - 0$, c'est-à-dire , deux fois par $* = 0$, & par conséquent elle a deux racines zéro ; si les deux premiers termes lui manquent. Elle a trois racines zéro , elle est divisible par $ul = 0$; s'il lui manque les trois premiers termes a , $(bs + cr)$, $(\frac{bs^2}{cr^2} - \frac{bs}{cr} - \frac{bs^3}{cr^3}) t^2$, &c. Mais ces termes font jugement les Rangs horizontaux de l'équation de la Courbe- placée for le Triangle analytique, où l'on a changé x en r , & y en /. Donc , autant . .

The text on this page is estimated to be only 22.65% accurate

t mi DES POINTS MULTIPLES. 411 Ch. X. qu'il manque de Rangs , y compris la Pointe , dans l'équa- Pi.xvn. §. 170. tion d'une Courbe , placée sur le Tr. anal : autant de fois une Droite quelconque tirée par l'Origine est-elle censée rencontrer la Courbe. Ou , ce qui revient au même , le Rang k plus bas de l'équation exprime, par Ton degré , quelle est la multiplicité du Point sur lequel est prise l'Origine. Ainsi la seule inspection de l'équation mise sur le triangle anal : fait connaître si la Courbe passe par l'Origine elle y a un Point multiple, & quel est le degré de multiplicité *.

Exemple /, à un Point simple. Le Point P , la Droite RjAB , & la perpendiculaire PA abaissée de P sur AB, étant données de position ; on décrit par points la Courbe PAM de cette manière. On mène du Point P une Droite quelconque # M , qui coupe en B la Droite donnée AB, & on prend sur cette Droite les parties B M , B m , égales à AB comprise entre la perpendiculaire PA & l'oblique PB. Les Points M, m font à une Courbe, dont on demande l'équation. Qu'on prenne P pour l'Origine , & PA pour l'Axe des ordonnées* , sur lequel abaissant , d'un point quelconque M de la Courbe , la perpendiculaire MQ.» elle sera Perpendiculaire x, PQ étant l'ordonnée^ ; & soit PA — a. Les Triangles (semblables PQM, PAB donnent cette proportion $PQ^2 : QM^2 :: PA^2 : AB^2$ — Donc AB, & BM, qui lui est égale, est — . Ainsi PB* égal, à cause du triangle rectangle PAB , à PA' [as] + AB* [$\sim^2$] , est $O y^2 < x^2$) • Les mêmes triangles semblables PAB, PFM PQM * *

Usage de V An*1. pag. pi. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 21.57% accurate

4" 2>£J T0TNT5 MULTIPLES. ft.xvn. p QM donnent la
propofuion $PA1 : AQ1 = PB1 : BM^*$, c..fc qui s'exprime analytiquement
ainfi , a a: $y y - 2 a y + a a \% (1 \& \text{il il SOC} \sim \sim yy ^ * * xx)$: $-jy >$ ou [
divifant les termes de la 2 e. railbn par y] $y a^* : jy - \hat{a}y + aa=yy > \{ * xx$:
xx, c'eft-à-dire, en égalant le produit des extrêmes à celui des moyens ,
 $aaxxz=y^* 2ay \% 4" aayy > \{ * xxyy 2axxy + ****$, ou [ôtant de part & d
autre aax^* & divifant le relte par y] $y^* - 2ayy + aay + xxy - 2axx = 0$. Si
Ton place cette équation fur le Tr : anal: on verra que la Pointe refte vuide ;
mais que , dans le prémitr Rang , la Cafc y eft remplie. Donc le Point P eft
un des points de la Courbe , mais un Point fimple. * o * o * o * * o Q
'Exemple II, étun Point double. Si , dans la même Cour» be , on prend le
point A pour l'Origine , & AB pour l'Axe des abfcifles , fur lequel la
perpendiculaire MN , abaiffée d'un point quelconque M de la Courbe , fera
l'ordonnée } ? AN l'abfciflè x, & $AP = c (AB + BN) = 2 AB x AN$. Mettait
ddns cette éq : $AN^* + = 2ABx AN$, au lieu de ces Lignes leurs valeurs
analyDigitized by Googl»

The text on this page is estimated to be only 22.88% accurate

DES FOINTS MULTIPLES. 413 Ch. X. , . _ *X ri-
p»-.XVn. /.i7o. analytiques, on aura xx*i

The text on this page is estimated to be only 21.27% accurate

§.170. 4⁴ VES POINTS MULTIPLES. fuxyn. & , en quarrant ,
 $yy = \{ rxrt: x \sqrt{rr - xx} \}$, ou Ch.* $jy - irx = \pm x \sqrt{X^* rr - xx} \}$, &
quarrant encore, $y^* - rxyy + irrx \sim i rrx - x^*$, ou $/^* rx > -y + x^* = 0$.
C'chMà l'équation, de la Courbe , dont le plus b«is Rang , qui confilk dans
le feul terme $rxyy$, eft le troifième Rang. jx6 , Exemple IV ,

The text on this page is estimated to be only 24.90% accurate

DES POINTS MULTIPLES. 41c Ch.x. 4 aaxy. Dans cette équation, il n'y a que deux Rangs; $p^{\wedge}xyn.$ * '7° le fixiétne qui a quatre termes , & le quatrième , qui n'en a qu'un ièul $^{\wedge}aaxxyy$. Auflî voit- on que les quatre feuilles , qui compotent cette Courbe , lè réunifient à l'Origine , & y forment un Point quadruple par le concours de quatre Branches. 171. Demande-t-on d'un Point fitué hors de l'Origine , s'il eft (impie ou multiple , & quel eft le degré de la multiplicité? On pourra le reconnoître en tranfportant l'Origine fur ce Point-là-, cela fe fait [§. 25, »°.4] en menant par ce Point une abicifle & une ordonnée, au'on nommera /»&», & fubftituant , dans l'équation e la Courbe, $m+z$ à x & $n^{*}\backslash^{*}u$ ky. On jugera de la nature du Point en queOion par le nombre des Rangs qui manquent à cette transformée [4- >/•&•■]• Mais on s'épargnera beaucoup: de Calcul , en fuiront la voye abrégée qui a été indiquée au §. 29 ; parce qu'on pourra ne poulTer le Calcul que jufqu'oii il elt néceflaire de le faire pour s'aiTurer de ce qu'on cherche. Car fi l'on fait attention aux opérations preterites dans ce 6. 29 , on verra que x & y reliant dans la transformée au lieu de w & n ; ces lettres x & y ne déilgnent plus des fariables, mais des grandeurs données & déterminées, qui font la b Ici (Te & l'ordonnée du Point dont on cherche la nature ; de forte qu'on fubftituë proprement $x 4< z$ à x & $y + \ll$ à y . La première Ligne , qui eft l'équation même de la Courbe , ne renfermant aucune des deux variables z & $*$,»qui délignent maintenant les coordonnées , elle eft donc le terme qui occuperoit la Cale de la Pointe. Ainfi on fubftituera d'abord dans ce terme , au lieu de x & y , leurs valeurs données $*n$ & » ; & fi cette fuppoftion ne réduit pas ce terme à zéro la Pointe n'eft pas vuide dans la . transDigitized by Google

The text on this page is estimated to be only 27.16% accurate

4i6 DES POINTS MULTIPLES. P_fxyii. transformée : elle a , par
conféquent , un terme confiant C« x. Donc [§.14] la Courbe ne paflé pas
par l'Origine à laquel- s '71, le cette transformée eft relative ; le Point
afligné n'elt pas même un Point de la Courbe , & on ne peut pas demander
s'il eft fimple ou multiple. Mais fi , par cette fubftitution , l'équation de la
Courbe , qui fait la première Ligne de la transformée, eft réduite à zéro; le
Point en queftion apar tient à la Courbe; & pour favoir s'il eft fimple ou
multiple , on fera le calcul de la féconde Ligne. Elle a une partie de fes
termes multipliés par *, & l'autre par z. Elle confituë donc le premier Rang
de la transformée , qui contient la Çafe u & la Cafe z. On fubftituera dans
les coefficients' de u & de z, au lieu de x & y , leurs valeurs m & ». Si ,
après cette fubftitution, l'un ou l'autre de ces deux coefficients fubfifte ; c'elt
une preuve que le premier Rang de la transformeje ne manque pas. Le Point
de l'Origine de cette transméeeft donc un Point fimple , & il n'eft pas -
néceflaire de poufler le Calcul plus loin. . Que fi la fubftitution fait évanouir
les deux coefficients de u & de z , le premier Rang manque dans la
transformée^ Le Point , qui en eft l'Origine , eft donc multiple. Pour
connoitre le degré de fa multiplicité , on procédera au calcul de la troilième
Ligne. Elle renferme les trois termes ut*, uz, zz , qui rempliflènt les trois
Cafés du (ècond Rang. On fubftituera donc , dans les coefficients de ces
trois termes , w & » à x & j> : & fi quelcun de ces coefficients fubfifte , le
fécond Rang de la transformée n'eft pas nul. Donc le Point en queftion eft
un Point double & l'opération eft terminée. Mais fi ces trois coefficients
font zéro , le Point eft plus que double. On calculera donc la quatrième
ligne , qui, renfermant les termes »' , Vz, u'zz & z* , fait le troifième Rang
dp la transformée , ti par U fubftitution de Digitized by Googl

The text on this page is estimated to be only 23.30% accurate

DES POINTS MULTIPLES, 41? Ça. x. de m & n à x & y , ce Rang ne s'évanouît pas. Alors PuXVH. \$. «7*. le Point dont on cherche la nature est un Point triple , & on peut s'arrêter là. Si par la substitution cette Ligne est réduite à zéro , le Point en question est plus que triple ; & on continuera à procéder de la même manière jusqu'à ce qu'on soit venu à une Ligne ou un Rang, qui ne disparaîsse pas par la substitution de m , » à x , y. Le nombre , qui marque le quantième est ce Rang , marque aussi le degré de multiplication du Point proposé. Exemple I. Dans la Courbe * représentée par l'éq: $y^* - \frac{1}{2}xy^2 - \frac{1}{6}y^3 + 48xy - 4x^2 - 64X = 0$, on demande la nature du Point , dont l'abscisse est m & l'ordonnée n (ont Tune & l'autre égales à 2. On posera en première Ligne l'équation même $y^* - \frac{1}{2}xy^2 - \frac{1}{6}y^3 + 48xy - 4x^2 - 64X$; & substituant 2 pour x, & « pour y , on aura $16 - 64 - 96 + 192 - 16 - 128$, ce qui étant = 0 , on conclura que le Point indiqué est un des Points de la Courbe. Pour savoir s'il est simple ou multiple , on calculera le (second Rang. En voici l'opération [§. 29] $y^* - \frac{1}{2}xy^2 - \frac{1}{6}y^3 + 48xy - 4x^2 - 64X$: 0 5; o 2.*i 2:0 1:1 0:2 o; 1 (4 y — 24/ — 24x^4» j 2>4,4^x) * 4- (- 1 2^ 4-4 8/4» 8^-64)25 Substituant dans ce second Rang 2 pour x & pour y , on aura (16 — 96 — 96 + 192 — 16 — 128) z «est- à -dire (o) » + (0)8, Introà. à l'Analyse des Lignes Courbes. G g g Puif* * Sauvion , Mm. de TAcad. pag. 6f. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 19.53% accurate

4i8 DES POINTS MULTIPLES. PL.XVH- Puisque ce fécond Rang est zéro, le Point proposé Ch.x. n'est pas simple, mais multiple. Si Pour favoir s'il est double ou d'une multiplicité supérieure, on calculera le troisième Rang, en continuant l'opération qui a été commencée. (4/— 24/— 24x7+ 1 2M-48x> + (-1 2jvH-48|+8x-64)i |:o |:0 k:k i:o o;| J:o J;o o:± 0:0 (6jrjf-24J'-'« + i6)**+C!îj!Î^))«+(4)M Il est inutile d'examiner si la substitution de 2 à x&^ fera disparaître ce fécond Rang, parce qu'on voit d'abord qu'elle ne peut anéantir le terme (4) zz, où il n'y a ni x, ni y. Ainsi le Point cherché n'est qu'un Point double: &, si Ton n'a point d'autres vues, il n'est pas nécessaire de pousser le Calcul plus loin. Mais si, par curiosité ou pour mieux connaître cette Courbe, on achève la transformation, le troisième & quatrième Rang feront (4^ — 8)*' + (— i2)«wz + (o)«rzz + (o)z' + (i>«* + (o)*,z+. (o>1z1 + (o)«*' + (o)z* qui par la substitution de 2 zy se réduisent à — \ 2uu% + «4: Ainsi toute la transformée est «4 — 12 um% — 52 »»+4ZZ = o. • Cette équation a quatre racines» «^V/(^+r<5+4V/(2ZZ+i2z4^)),ou+v/(4Z+8)4V(2HS)

The text on this page is estimated to be only 21.75% accurate

DES POINTS MULTIPLES. 419 Ch. x. chacune desquelles
indique une Branche parabolique. La racine $u = 4\sqrt{4Z + 8} + \sqrt{(2Z + 8)}$ indique la Branche f D. La racine $u = \sqrt{4Z + 8} - \sqrt{(2Z + 8)}$
*** marque la Branche Fd. La Branche FAE est représentée par la racine $u = \sqrt{4Z + 8} - \sqrt{(2Z + 8)}$; & la Branche f A e par la racine $u = \sqrt{4Z + 8} + \sqrt{(2Z + 8)}$. Ces deux dernières partent par le Point A. Car $z = 0$
réduit les équations de ces deux Branches à $u^2 = 8$, & $u = \pm \sqrt{8}$. Elles ont pour Asymptote courbe la Parabole EAE désignée par l'éq:
 $u^2 = 5(6 - 4^2)z$; & la Parabole D A d'exprimée par l'éq; $u^2 = (4^2 - 4^2)z$
est l'Asymptote courbe des Branches f D, F D : comme on le trouve
aisément par le §. 142. L'équation proposée $y^4 - 8y^2 - 12xy + 4x^2 + 6y^2 >$
 $\{4^2xy - 4^2 - 64x = 0$ représente la même Courbe, mais relativement
au point F, 8c alors le Point double A a l'abscisse F G & son ordonnée G
A égales Tune & l'autre à 2, Exemple II. On propose la Courbe dont
l'équation est $y^4 + x^2 - 2ay^2 + 2axy = 2a^2 - \frac{1}{2}ay^2 - \frac{1}{2}j^2ayx -$
 $Sa^2y^4 - 2^2 = 0$. Et d'abord on demande quelle est la nature du Point dont
l'abscisse est 0, & l'ordonnée n est a. Pour le connaître, on substitue 0 à
x & a à y dans l'équation proposée; ce qui la réduit à $2a^2 - 4^2 - \frac{1}{2}a^2 - 2^2 = 0$. Donc dans la transformée qui représenteroit la Courbe
relativement à l'Origine prise sur le Point assigné, il y auroit un terme
constant. Elle ne passe donc pas par ce Point-là [§. 14]. 29. On demande
ensuite quel est le Point dont l'abscisse & l'ordonnée (ont chacune égale à a,
La substitution de a pour x & pour y réduit l'équation proposée à $4a^4 - 4a^4 + 2a^4 - 2a^4 + 8a^4 - 4a^4 = 0$ Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 19.25% accurate

DES POINTS MULTIPLES. $ivxyij. — 4/1^* — 8rf4 + 2^{**} =] o ,$
on est affuré que le Point c».x. . propose est un de ceux de la Courbe. Mais
eût-il simple ou multiple ? Pour répondre à cette question, on cherchera le
premier Rang de la transformée qui refait en substituant $4 + z$ à x & $a+u$ à y .
Le second Rang que donne la substitution de x à z à x , & de $y+u$ à z ; est $(4/ —$
 $12*1/4447x4 i6*zy — 4alx — 8*5) *4 (4*' + 2ayi + 6ax1 — 4*» z ,$ qui ,
substituant a pour x & pour j , se réduit à $(4*' — 1^{**'} + 4*' 4. ,6$

The text on this page is estimated to be only 18.71% accurate

DES POINTS MULTIPLES. 421 c«x. le troisieme Rang. Cest $(4^x - 4^*)^{**} + (24 > \ll z p^{xyii}. S'171- + (o)^*zz + (4^* + 3^*)^*$: dont aucune substitution ne peut faire disparaitre le terme « $\ll z$, qui a pour coefficient 24. Le troisieme Rang ne s'évanouit donc pas dans la transformée ; mais étant le plus bas Rang , il fait voir que le Point , sur lequel on a porté l'Origine , est un Point triple. On peut s'assurer de ceci en continuant le Calcul de la transformation. Le voici en entier $4.-0, 0.4, J: O, a I > 0:3, 2. 0, I . \bullet I, 1 : O, Q : O]:o, \S:o, i i, J.-o o:J,o:o o:\, |:o, o:\S,J:o Hh (\% -!2-y + 24^* + 844) m -h (6XX + ,.o, \}.o, o.\}, 0.0, \$.0, 0.0 o:J, o.f ;.o, 0:0, o.-o o. j, 0:0 (i)\ll^*4-fo>^* + (o)\ll V-h(o)\ll^*\rangle-Mi)^$ La substitution de $— a \grave{a} *$ & de $a \grave{a} y$, qui ne change rien, comme on a vu, fait voir que les deux derniers Rangs, les réduit à $2auuz - 2az^* + *4 + z4=0$, qui est l'équation de la Courbe relative à l'Origine placée sur le Point triple. Cette équation, résolue comme une équation du second degré, manifeste quatre racines $* = =fc - - * *$ rfcZy'Ca* *i* 2az — zz)j, & donne cette Construction. Du point C, avec un rayon $CA = ay/1$, on décrira un r* Cercle : on mènera deux diamètres parallèles aux coordonnées supposées perpendiculaires l'une à l'autre, & on Ggg 1 prendra. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 21.62% accurate

422 DES POINTS MULTIPLES. Px-xvn. prendra pour Origine le point A déterminé par le raïoiñ c*.*. C A , qui coupe en deux également les angles des coor- f. yu données de différents lignes. A chaque abfciflè comme AP, on donnera des ordonnées PM, PAF, moyennes proportionnelles entre l'abfciflè A P & l'ordonnée du Cercle PN. Puisque AC = av/ 2 , on aura AB = BC — Nommant donc AP, z , & PM, y, on aura C O = B P t=zAP — AB=z — a, & ON = v/(CNx — 03*) = V£Mf — sa* { *2az — zz } = s= V(*a+ z*z — zz) , & PN tsON — PO= — a + y/(aa+ 2az — zz). Donc M£ [«], moyenne proportionnelle entre AP [z] & PN .[-~*+V(**>b2az — zz)], est égale à */(— *z>{ * *V(da + 2éiZ — zz)) . Du côté des abfciflès positives , cette Courbe n'a que deux Branches AMD , A MD ; parce que la moyenne proportionnelle entre l'abfciflè AP positive & l'ordonnée VN négative , est imaginaire. Et on le voit clairement dans l'équation : car les racines ±=V(— ** — Zi/(aa^iaz -zz)) ne peuvent être qu'imaginaires.; ce qui est fous le signe radical étant négatif, quand z est positive. Mais du côté des abfciflès négatives , la Courbe a quatre Branches Ame, Ame t Ame , Ame\ parce que , z étant négative , les racines — vX — az ±zi/(*a + 2az — zz)) qui deviennent ±V(az=£zZ)/(aa — 2az — zz), font toutes quatre réelles, tant que z<éj/2 — a [=BE — BArrAE], Ainsi la Courbe représentée par l'éq : u*+ 2auuz-£z* — 2^z'==o est une espèce de Trèfle, qui a un Point triple en A . L'éq : y4 * x4 — 4.4j» + 2 ayyx + 2rfx' + %aayy Aaayx — 8 + 2a* = 0 représente la même Courbe , en prenant l'Origine sur le centre C du Cercle générateur. Aufli a-t-on trouvé que le Point A, qui a l'ordonnée CB=*, & l'abfciflè BA = — 4, est ua Ppoint triple : que le point D, qui a l'ordonnée CB = * , & Digitized by Google,

The text on this page is estimated to be only 24.21% accurate

DES POINTS MULTIPLES. 423 Ch.x.' & l'abscisse BD:=*, est un Point simple : & que le point Ptxvn. /17t. B, qui a l'ordonnée CB = 4, & l'abscisse — o, n'est pas même un Point de la Courbe. 172. Si le Point proposé se trouve sur l'Axe des abscisses ou des ordonnées, ailleurs qu'à l'Origine ; le calcul sera plus abrégé, puisqu'il s'agit seulement de substituer $w+z$ à x , ou y à y , pour porter l'Origine sur le Point assigné [§. 25] : ce qui se fait commodément par la voye indiquée au §. 28. Car si on ordonne l'équation par x , lorsqu'il faut substituer à y ; ou par y , lorsqu'il faut substituer à x ; les termes & les Rangs de la transposée se trouveront si bien rangés qu'il sera facile de pouvoir, par le calcul seulement jusqu'au point qui est nécessaire. Exemple. On propose l'éq : $y^2 - 2xy + 4x^2 - 6axy - jax^3 - aay^4 - 1Saaxx - 20alx + 8s^2 = 0$, & Ton demande la nature du Point qui est situé sur l'Axe des abscisses à la distance 2 a de l'Origine, c'est-à-dire, du Point dont l'abscisse est 2a, & l'ordonnée 0. On s'agit, pour porter l'Origine sur le Point proposé de substituer $2a$ à x \ on ordonnera donc l'équation $y^2 - 2ay + 4a^2 - 6a^2y - jaa^3 - aay^4 - 1Saaxx - 20aalx + 8s^2 = 0$. Le dernier terme est celui qui, dans la transformée, occupera la Pointe. Il faut donc voir ce qu'il devient quand x devient $2a$. Comme il se réduit à $16a^4 - 6a^4 - 72a^4 - 40j^4 - 8a^4$, c'est-à-dire à $-64a^4$ on voit déjà que le Point assigné est un des Points de la Courbe. Enfin si le terme y manque dans la proposée, il manquera aussi dans la transformée. Il suffit donc, pour savoir si le premier Rang subsiste ou s'évanouit, de chercher le terme ». En voici le calcul Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 23.67% accurate

424 DES POINTS MULTIPLES. Pi.XYIi. $y+(-2x+64x-4\llrf)yy$
 $+(x^*-j_{axi}^*iSSx^{zoSx+ta^*})c\ll x.4g2io4<(43c1-2\backslash axl>k\hat{1}6^*tx-$
 $*2ca^*)z$ La substitution de ta kx dans le coefficient de z le réduit à $32a\%$
 $-84^*4<724^*-20^*J$, ou o . Donc le premier Rang manque
entièrement dans la transformée. Ainsi le Point propolè est un Point
multiple. y On cherchera le fécond Rang, qui a les trois termes yy , yz , zz .
Le coefficient de yy est $-2x+6ax-\hat{aa}$, que la substitution de 24 à x
rend $-8^{*++}124^*-4V=0$. Le coefficient de yz est aussi o , puisque le
terme y , dont le coefficient devrait produire celui de yz , manque dans la
proposée. Il suffit donc de chercher le coefficient de $2z$ en continuant le
calcul commence'. $*(4^*-214x^*4.\$ \&f ftM 204\gg)sII1o24$ écrit au
lieu de x dans ce coefficient $6xx-2i^*x+1844$ le réduit à $244^*-4244+$
 18^*4 , ou o . Ainsi le fécond Rang c|ifparait, & par conséquent le Point
affigné est plus que double. S'il est plus que triple, les coefficients des
termes y^* , yyz,yzz , z^* , du troisième Rang feront tous zéro. Celui de $/$ est
 o , puisque ce terme manque dans la proposée. Mais celui ae/s , qui est $-$
 $4x4^*64$, en écrivant 24 pour x , se réduit à -24 . Donc le troisième Rang
subfiste, & sans aller plus loin, on peut affirmer que le Point proposé est
un Point triple. Mais fi, par curiosité, on achève la transformation, Digitized
by Google

The text on this page is estimated to be only 17.97% accurate

DES f OINTS MULTIPLES. 42; S. 17». j 1 o 4 \$ 2 10 4< (— 4*
Hh 6 *)yy* + (43** — 2 1 rfx'+j 20*') s 4 o I \ k o — 2yyzz Hh (6** —
2i*x4< i8**)zz o 'fi o 4« (4X — 7*)*' . * <=> + *+ on trouvera que
l'équation de la Courbe , l'Origine étant portée fur le Point triple , eft / —
2*yyz — 2/z* + sz* H- z*=to. Cette équation a quatre racines $y = 3 = ^{(*z +$
 $zz = t: z ^{(44+ 4z))}$ qu'on peut conftruire ainfi. Avec un Paramètre =*> on
décrira la Parabole NBAT, dont $r^{.nf}$. BA (bit la dernière 'direction : &
prenant i'abfciflè BA égale au Paramètre , on aura les ordonnées Ac , AC
auiH égales au Paramètre. On mènera la Droite BC qui achève le triangle
uolcele BAC , & prenant le point A pour l'Origine, on donnera à chaque
ablcfle AP [z] des ordonnées PM , PA/[;] & PM, PA/[— t] égales aux
moyennes proportionelles entre rabfciflè AP & les parties ON, QN »
comprifes entre la Droite BCQ , & la ParaÈoleNfctf. Car, puifque AP — Z ,
BP [=AB + AP ~\ = * + z9 & , par la nature de la Parabole • PN = y/(** +
z). De plus PQj = BP]=+z. Donc QN = a + z + V(44+4z), & 0^=4 + 2 —
+ Ainfi PM, ou Paf [y] , moyenne proportionnelle entre A P & QN f OU
Q.tf, eft =:=4=v/(4Z+ZZ=l=ZV/(Af + #z)). Il paroît , par cette conftruâion ,
que la Courbe , du Intnd. à PAnslyfe des lignes tourbes. H h h côté
Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 22.80% accurate

426 DES POINTS MULTIPLES. Pl. xvii. côté des abscisses négatives, n'a que deux Branches AmB , c^*x , AwB , qui font une Feuille, & dont les ordonnées p m , $7^*p/w$ font moyennes proportionnelles entre l'abscisse négative p & la partie qn interceptée négative entre la Droite BC & la Parabole BnC . Ces Branches sont représentées par les racines $\pm y/(az + zz - z\sqrt{(aa^4 + 2z)})$ 1 ou, z étant négative, $(-az^* - zz + z\sqrt{(aa^4 + 2z)})$. Les deux autres Branches, qui représenteroient les racines $\pm \sqrt{VC^2 + 2z + z\sqrt{(aa^4 + 2z)}}$, ou, z étant négative, $\sqrt{(-az^* + zz - z\sqrt{(aa^4 + 2z)})}$ sont imaginaires; le Calcul démontrant aisément que la grandeur sous le signe radical est négative ou imaginaire; d'ailleurs la moyenne proportionnelle entre une abscisse négative Ap , & une interceptée positive q , ne peut être qu'imaginaire. Mais j du côté des abscisses positives, la Courbe a quatre Branches, dont deux AAf , AAf font la continuation des deux Branches Am , Aw , exprimées par les racines $\pm \sqrt{X^2 + zz - z\sqrt{(aa^4 + 2z)}}$ & dont les ordonnées PM font moyennes proportionnelles entre AP & Q^t . Les deux autres Branches AM , AM sont représentées par les racines $\pm \sqrt{(4Z + zz + z\sqrt{(aa^4 + 2z)})}$ qui, du côté négatif, sont imaginaires, & leurs ordonnées PM , PM sont moyennes proportionnelles entre AP & QN . Le Point A , où (se coupent les trois Branches AAf , AAf , MAA est donc un Point triple, comme le Calcul l'a fait voir. 17\$. Les principes établis dans les §§. précéd. donnent la Solution de ce Problème: L'équation d'une Courbe étant donnée, trouver si cette Courbe a des Points multiples, quels ils sont, & où'ils sont? Pour trouver les Points doubles, on procédera comme si on

* UfAge à l'Anal., pag. 258. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 27.69% accurate

DES POINTS MULTIPLES. 4*7 c«x. fi on vouloit transformer l'équation en fubftituant [§.171] pLxvn. *»7J. $x+2S$ à $y+t^k y$: mais on n'ira pas plus loin que la féconde Ligne , qui donne les termes u & z . On égalera leurs coefficients à zéro , ce qui , avec l'équation propofée, fait trois équations. Pour connoître les Points triples , on joindra aux trois e'quations, qui donnent les Points doubles, celles qui naît fènt en égalant à zéro les coefficients de z , & z^2 . Et pour cet effet , il faudra pouffer le Calcul de la transformation jufqu'à la troifième Ligne. On trouvera de même les Points quadruples , en formant , outre les fix équations précédentes , les quatre que donnent les coefficients de z^3 , uz , uzz , z^4 égalés à zéro. Et ainfi de fuite. De forte que comme on a 6, 10, 15 , ou &c. équations pour déterminer deux inconnues x , y , le Problème eft plus que déterminé ; & fera fouvent impoffible ; parce qu'il le peut fort bien que la Courbe propofée n'ait aucun Point multiple , ou du moins aucun Point de la L'Analyfe fournit les Régies néceffaires pour déterminer ces inconnues au moyen de tant d'équations , lorfque leurs valeurs font réelles. Ce qu'il y a de plus fimple , c'elt de voir d'abord fi la Courbe a quelques Points multiples. On les trouvera en combinant trois équations , fç. la propofée & les deux que donnent les coefficients de u & de z égalés à zéro. S'il paroît par-là que la Courbe a des Points multiples , on cherchera le degré de leur multiplicité par les Régies des § §. 170 , ou 171 . Or pour combiner enfemble les trois équations indiquées, on cherchera la valeur d' x ou d' y par l'équation la plus commode des trois ; on fubftitucra cette valeur dans les deux autres ; & on cherchera les racines communes à ces deux équations. Elles donneront les valeurs d' x qu'on fuppoſe. Hhh 2 ou Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 23.07% accurate

428 DES POINTS MULTIPLES. Pvxvn. ou d'y qui répondent aux Points multiples. Mais si ces CaX> équations n'ont aucune racine commune, ou si elles mé- §.i7j. n'ont à quelque absurdité, le Problème est impossible, & la Courbe n'a aucun Point multiple. Exemple I On demande si la Courbe représentée **•• par l'éq : $xy + xyy - s^2 = 0$ a quelques Points multiples r On calculera le premier Rang de la transformée qui naît de la substitution $dx + zax$, & de $dy + az$. Ce Rang est $(xx + 2xy)u^2 + (2xy + yy)z$. On aura donc trois équations à remplir, 1°. le coefficient d' u égalé à zéro, 2°. le coefficient de z égalé au même à zéro. $2xy - a^2 = 0$. 2°. $xx - 2xy - a^2 = 0$. $2xy - a^2 = 0$. La 1re. donne $y = \frac{a^2}{2x}$, ou $y = -\frac{1}{2}x$. Zéro (substitué pour y dans la 2e. donne $-a^2 = 0$: ce qui est absurde, puisque a est une grandeur donnée. Et $-2x$ substitué pour y dans la 2e, la réduit à $xx - 4xx = 0$, ou $-3xx = 0$, c'est-à-dire, $x = 0$: valeur qui substituée dans la 1re. donne aussi $-a^2 = 0$: ce qui est absurde. Il est donc impossible de trouver des valeurs d' y & d' x , qui satisfont aux équations à remplir. Ainsi la Courbe n'a aucun Point multiple. Exemple II On propose l'éq : $y^2 - 2xy + a^2y^2 - 4a^2xy - a^2y^2 + a^2x^2 = 0$: & l'on demande si la Courbe qu'elle représente a quelques Points multiples. Le premier Rang de la transformée étant $(jx')^2 - 4xy + 2a^2y + a^2x - a^2y^2 + (2xy - 2a^2y - a^2x + 2a^2x^2)z$, on a ces trois équations à remplir. 1° $x^2 - 2sxy + a^2yy + a^2xy - a^2y^2 - 4a^2xx$ eu $(x - ty + Cx - a^2y^2)z = 0$. 2°. 2°ly Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 21.58% accurate

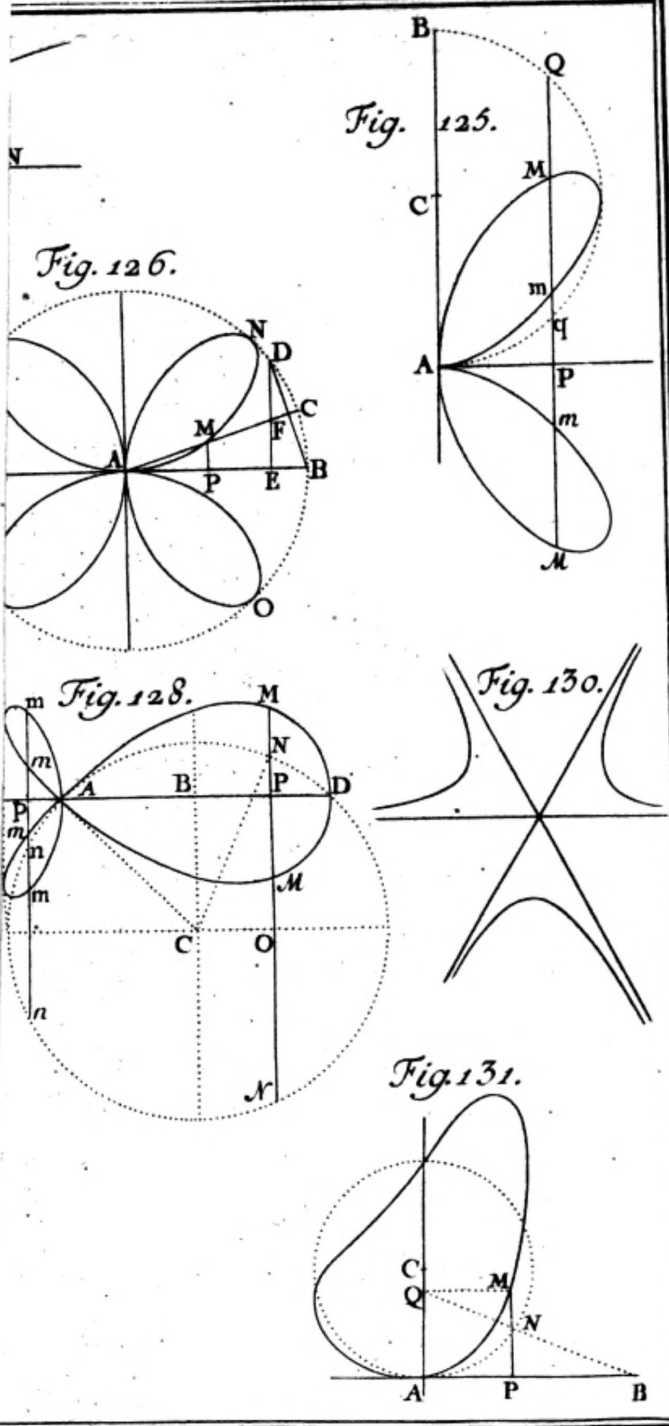
DES POINTS MULTIPLES. w » Ch.X. 2°. 2x> — 4axy + 2a4y + M4x — a\ fucvlt |. » 7J. ou (x — ay2y>h(x — *) * a = o 3°. ixyy — 2ayy+aay>i<2aax=:o. La féconde lè peut divifer par x — a , & le quotient eft j — + aa. Elle a donc ces deux racines x = a , & j, — , . En fubftituant a pour x dans la propofée on la réduit à a+ = o , ce qui eft abfurde : cette racine ne donne donc aucun Point multiple. De même, fubftituant - ^ pour y dans la propofée , elle Ce réduit à — {a* *i*aaxx = Oy ou * = ±4. Donc j T = — -] = a. Mais ces valeurs fubftitues dans L a(* — *)J la \$c. équation , donnent a1 — 2a* +4* =o , ou 4* =o , ce qui eft encore abfurde. Cette racine aufTi ne donne donc aucun Point multiple. Ainfi la Courbe n'en a aucun. Et c'eft ce que fait voir là conftruction. Ayant décrit du centre C, avec un raïon CA = ia9 un Cercle dont ,51' on mené la Tangente A B = a ; on prendra fur cette Tangente une abfciffte AP = x , & on lui donnera l'ordonnée^* M [y] , égale à la droite A retranchée de l'Axe des ordonnées par la droite B qui , partant du Point fixe B , pafle par le Point N où P M rencontre la circonférence du Cercle. Car les triangles fèmblables BAQ» BPN donnent BA [a]i AQ^ou PM [y] = BP [x] : PN[i4 — V (i** — **) parla nature du Cercle]. Donc iaa — — * *) = *y — xy > ce qui , tranfpolant, quarrant , &c. revient à l'équation propofée xy — 2axy* >{* aayy -1 asxy + aaxx — a* y=, o. • * Hhh 7 E*mDigitized by Google

The text on this page is estimated to be only 21.77% accurate

430 DES POINTS MULTIPLES. Exemple III \\ s'agit de la Courbe représentée c« *• par Péq : $y^4 - 4x^2 + 4yxx - a^2y - 4x^5 + 7x^4 - 8x^3 - S^4 - o$. On demande si elle a quelque Point multiple.? On commencera le Calcul de la transformation néces. faire pour porter l'Origine sur un point quelconque. Le premier Rang fera de sorte que les trois équations qu'on a à remplir, sont $1^\circ. V^4 + 4V^3 + 6V^2 + 4V + 1 = 0$, $2^\circ. 4y^3 + 12y^2 + 4y + 1 = 0$, $3^\circ. 4y^3 + 12y^2 + 4y + 1 = 0$, ou prenant le quart, $y^4 - 4x^2 + 4yxx - a^2y - 4x^5 + 7x^4 - 8x^3 - S^4 - o = 0$, ou prenant auflî le $J^4x + 4yxx - a^2y - 4x^5 + 7x^4 - 8x^3 - S^4 - o = 0$. quart, La 2° . de ces équations se divise par $y^4 - 4x^2$, & donne au quotient $yy^4 - 2ayx^4 - 2aax^2ayx - yyx - 2aax^4 - 2a^2 = 0$, ou 2° sa o , ce qui est absurde. Ainsi cette racine ne donne aucun Point multiple. Il n'en est pas de même de la racine $y = -a$. Cette valeur substituée dans la 1° & dans la 3° . équation, les réduit à $x^4 - 6x^3 - 8x^2 - 7x - 8 = 0$, & $x^4 - 6x^3 - 8x^2 - 7x - 8 = 0$. Pour avoir les racines communes à ces deux équations, on divisera l'une par l'autre, & le reste est $om(kx - 24x^4 - 8x^3 - 7x^2 - 8x - 8)$, divisant la féconde, (à la diviseur commun. Sa racine unique est $x - az = 0$. On examinera donc, si les valeurs $x = a^2y = -a^2$ (satisfont aux trois équations qu'on a à remplir. Et comme elles satisfont, on est sûr que la Courbe a un Point multiple, sc. celui dont l'abscisse est a & l'ordonnée $-a$. • Ce Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 24.67% accurate

Digitized by Google



The text on this page is estimated to be only 0.50% accurate

uigiuzt vO

The text on this page is estimated to be only 22.71% accurate

DES POINTS MULTIPLES. 431 X. Ce Point n est que double.
 Car si on passe à calculer Pl.s H* le fécond Rang , on trouve d'abord (6yy
 $4^* j^2 a y + 2xx)uu$, ou, mettant ■ — a pour y & a pour * , (— 4aa)au : ce
 qui fait voir que le fécond Rang ne disparaît pas. ■ Mais si on achève le
 Calcul , on trouvera pour l'équation de la Courbe , relative à l'Origine portée
 sur le Point double", $u^* \backslash aau + 4 autz > \{^* 2 uu + 4 az^* \blacktriangleright f - s4 = 0$.
 Cette Courbe se peut décrire en faisant rouler un Cercle autour d'un autre
 Cercle égal. Soit AEA un Cercle r'" décrit du centre C, "avec le rayon CA =
 a. Si l'on fait rouler autour de lui un Cercle e'gal ME M; chaque Point de (a
 circonférence , comme M , décrira une Courbe A M AfA . Soit A le point de
 la circonférence fixe sur lequel e'toit appliqué le point M , dans la première
 position du Cercle mobile . De là , supposons qu'en roulant il ait passé dans
 la position ME M. Donc l'arc EM, qui a été appliqué sur l'arc EA , lui fera
 égal. Ainsi les angles "ACE, MDE sont égaux, & le Triangle CDE est
 isocèle , aussi bien que A F M. Par conséquent A M & CD sont parallèles.
 Donc AH, perpendiculaire sur CD, est parallèle à E G , qui lui est au/ssi
 perpendiculaire , & E H est égale à AG, moitié de A M. De plus, les
 triangles rectangles ACH, CEI sont semblables, & même égaux, leurs
 hypoténuses AC, CE étant égales. Donc CH & C I sont égales. Cela posé ,
 soit l'abscisse A P = z , l'ordonnée PM = *. Donc AM = $y/(AP^4 - PM^4) =$
 $v/(zz)$ Le rayon C A est Soit Cr = CH . = /. Donc EH = AG = $4 - /$, & $AG[2^*$
 $- 2/] = r AM + **)$ « Ainsi j = * — { VCz z . De plus, les triangles
 semblables CEI, AMP donnent CE [*]: C[s ou a — $i\sqrt{(zz^* \ll)}$]
 $= AM[^(zz+**)]: AP [z]$. Donc $*z^* =$

The text on this page is estimated to be only 18.44% accurate

432 DES POriVTS MULTIPLES. PL.XVH. ou $2az - f. zz + uu =$
 $2a \vee (zz \ll **) \gg \& \text{quarrant } 4 mzz e \ll. 1 \ll 4**' + 4'' 4 4* 2 ZZ* \ll + *4 = r$
 $4**ZZ 4* 4*OttU, \S \bullet \gg 7* \text{ foit } *4 + 2zz \ll * 4- z* 4- 4* \gg *z 4- 4*z' \text{ ---}$
 $40suu=o$. Exemple If. On demande quels Points multiples a la Courbe
représentée par Péq: $x^4 - *y^4 - 2**1.y^4 - 4*x, + 3 aayy + 44**? ^{aaxx} - a*$
 $y r = o$. Le premier Rang de la transformée qui réiulte de la fubftitution de y
 $+ *$ à y & de $x-f-z$ à x , eft ($- 4 \gg 2 4x' + 6aay + ^{aax} - 0*4'' (4*' + 4**? +$
 $I2*xx + 4 H - 8 44*) z$. On a donc à remplir ces trois équations, 1 e. $X4-$
 $4y' 4 < 2rf*X^4 - 4/*X, 4 - \$4^+ 4*4^{^^} 2e. \text{ --- } iayy 4 > 24*x - f - \$44y 4 < 4*4x$
 $- 4* = o$ 3e. $^x' + ^{axy} 4 < i24xx + 4iW|'4 - Zaax = t o$ La 3e. eft divifible par ,
& donne au quotient $xx \ll 2*x - f 4jr$. Elle a donc deux racines $4 x 4. 44 =$
 $o, XX - 4 - 24X$ ou $x=r - 4$, & $xx ^ 2 ax > i* ay z == o$ t ou $_y = - ^ - ..$ Si
on fubftituc — a pour x dans la 2e. on aura — $%*yy + 6étay - \$4* s=o$, ou
 $- \$4(4 - j)* = 0$, foit $y^2 = 4$. Ces valeurs de x , & de y , miles dans la $i*$.
équation rendent fon prémier membre égal à zéro. Donc la Courbe a un
Point multiple, qui a pour abfcifle — 4 & pour ordonnée + 4. Mais il faut
examiner Ci l'autre racine $7 = - *x^4 - g \ll *$ n'en fournit point d'autres. Cette
valeur d'y fubftituée dans la ic. & 2 e. équations les change en $(x^5 \ll 6ax\%$
 $+ 144^ 4 < i6 \ll 'x'4 \ll 94V + 245x); 44 ssa o \& (jx^4 \ll 1 24x' 4 \ll 1 6aaxx +$
 $84*x + 44) : 4 \sim o$. Divilant celle-là par celle-ci, le refte eft — $\$44(xx^4 - 24*$
 $> i*aa) y$ qui, égalé à zéro, donne $x = ^ < - 4$. C'eft la même valeur qu'on a
déjà trouvée, & qui, fubftituée dans Digitized by

The text on this page is estimated to be only 24.11% accurate

DES POINTS MULTIPLEX i'itj. dans $yzz - 2ax$ donne $7 = 4$.
Ainsi cette fonction de racine de la gc. équation ne donne pas d'autre Points multiples que la première. On connaîtra le degré, de (à multiplicité en continuant le calcul de la transformation. Le second Rang est (— %ay^{iaa}) $u > \sqrt[4]{4ax^4 - 2aa} u + z + (6xx^2ay - 4ax^2i) Z^3$, où, mettant — a pour x & a pour ; , tous les termes s'évanouissent. Donc le Point est plus que double. Mais si on cherche le troisième Rang , on aura d'abord (— a)u⁰ ; ce qui montre que ce Rang subsiste , & que , par conséquent , le Point cherché est un Point triple. L'Origine étant portée (sur ce Point , l'équation de la Courbe le réduit à $z^4 + 2auzz - au^2 = 0$, qui a quatre racines $z = \sqrt[4]{au} \sqrt[4]{aa + au}$, & , qui se peut construire ainsi. Ayant décrit , avec un Paramètre $Ft - ine = a$, la Parabole NC#, dont l'Axe des ordonnées est CQj on prendra sur cette Courbe le point A , dont l'ordonnée CB & l'abscisse BA font toutes deux égales à a. Ce Point A étant pris pour l'Origine , on mènera la Ligne des ordonnées PAp parallèle à CB , & on donnera à chaque ordonnée AP [«] des abscisses PM [z] & PAif[— z] , moyennes proportionnelles entre ÂP & PN. Car , puisque AP [»] ^{^rBQ^}, $CQ = CB + BQ = a + a$, & QN , par la nature de la Parabole , $= \sqrt{(aa + au)}$. Donc $PN = — a = t$

The text on this page is estimated to be only 17.48% accurate

434 DES POINTS MULTIPLES. Plaque tionelle entre une grandeur poitive AP & une négative Ch. x. XVUI P N. Mais du côté des ordonnées négatives , la Courbe * 17* a deux feuilles A m m, Amm, qui fc nouent en A & y font un Point triple. Exemple V, On demande fi la Courbe repréfèntè'c par Téq; ie. a quelque Point multiple? En fubftituant dans cette équation $\frac{H-r}{ay}x + z$ à x , on trouvera que les coefficients de « & de z dans le premier Rang , égales à zéro , donnent les équations «S & ?e. i e $^{typex} - \frac{ay}{K} - \frac{ayyx}{.} - 4*yx* - f-i vaoyy + \frac{6aayx + \$aaxx}{12} * ^ - 144' * - \$*4 = o$. 2e. $\frac{4}{*} + \ll X90j - Sayx - \pm axx + \$ \frac{aay}{>} * 1 6^{**}x - 1 2 a5 = 0$. 3e. $syyx - \frac{ayy}{.} - Zayx + 1 \& MJ - f 1 c^{***} - 1 44' = o$. _ . . $2yy - 84V4 - 744 o$ Cette 3'. équation donne $* = g_4j + \$aa'$ ■ & cette valeur fubftitue'e dans les deux autres transforme la 1e. en $\frac{.}{.} - \frac{6ay}{7} 4*1054* / - \$ - ?20^' = o$, & la 2e. en $\ll / - 2 8 * / + 1 < ^$

The text on this page is estimated to be only 21.73% accurate

LES POINTS MULTIPLES. Ch.x. $i6(y^* - 6ayx + 2a^2y - 8^*)$ qui diviè exactement le Pianchr $f^* '73$ - troifième. C'est donc ce quatrième refte qui contient les XV1U# racines communes aux trois équations à remplir. L'équation qu'il fournit $y^* - v - 6ayy^4 < 12 a^1 y - Sa^* = 0$, quoique du troifième degré, n'a qu'une racine $y - 2 a = 0$, dont cette équation est le cube. Donc si la Courbe a quelque Point multiple, ce ne peut être que sur l'ab(cille de l'ordonnée $y = 2 a$. Et pour s'afflurer de sa juste position, on substituera $2a$ pour y dans l'éq : $— ^ ^ iaa a$ & on trouvy $— 4^*y + saa$ vera $x = — a$. Comme ces valeurs $— a$ & $2a$, de x & de y , (libltitues dans les trois équations à remplir, font évanouir leur premier membre, on peut conclure affurément que le Point, dont l'ab(cille est $— a$ & l'ordonnée $2a$, est un Point multiple. On trouvera le degré de sa multiplicité en continuant le Calcul de la transformation. Le fécond Rang est $(6yy - f - xx 2447 - 44X 4« i«aa)uu + (+yx - 8 ay - 8 ax 4« 1 6aa)uz 4^* iyy - 44^4*544)27$, , que la substitution de $— 4$ à x & de $2a$ réduit à $(o)^*« 41 (o)^*z 4^* (44)zz$. Ainsi, ce fécond Rang ne disparaît pas, on fait que le Point en question n'est qu'un Point double. En effet, si on poursuit jusqu'au bout le calcul de la transformation, on réduira l'équation de la Courbe à $u^* \bullet - uuzt, - 6 auuz 4'' 44z^2 = 0$, qui (è construit ainsi. On décrira du centre C, avec un rayon $CA = 4«$, le HCercle ANDN, & sur le rayon CA, comme diamètre, le Cercle $A^C^$. On prendra le point A, où ces Cercles se touchent, pour Origine, & ayant mené NN perpendiculaire à l'ab(cille AP [z], on partagera en deux également en M & M, les parties NN, NN interceptées entre les deux circonférences. Les points M, A/, font les 2 ceux Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 14.73% accurate

436 DES POINTS MULTIPLES. ■ PtàwcHi ceux de la Courbe.
 Car $PN = v/(APx PD) = i/C \text{ } \%az \text{ } r \text{ } v \text{ } XVHL \text{ } \_Z2)$, & $P^{\wedge} = \wedge APxPC) =$
 $\wedge 4^{\wedge} \_ \wedge VDon; / \wedge$ du côté positif, $PM = +iv/(8^*z - Z2) + i\sqrt{(4\langle z - zz), \&$
 $PA = +iv/(8^{\wedge}z - zz) - i\sqrt{(4^*z -$ du côté négatif, $PM = - Iv^{\wedge}C - zz) -$
 $1^{\wedge}(4^*2 - zz), \& PM = - W(**z - zz) + i^{\wedge}(4ifZ\_zz);$ en général » =
 $= !riv/(84Z - zz): \pm : J^{\wedge}(4^*z - zz).$ Donc $** = \{ (Saz - zz) + \pm (4^*5 - zz$
 $) \text{ rt } .^{\wedge} s \text{ } 2iMZ2, I2 + \bullet z4)$, foit $- 6auuz + 5 > **zz + zz^* \langle - 3^{\wedge}z, +$
 $iz + = 8^{\wedge}zz -^{\wedge}z' + iz4$, & enfin $6auuz \text{ } 4 \langle **zz + zz \langle \rangle = 0.$ Il est manifeste, par
 cette équation & par la construction qu'on vient d'en donner, que la Courbe
 a un Point double à l'Origine A, où les Branches M A M, M A M viennent
 se toucher. Exemple V I. On propose la Courbe représentée par l'équation $j^4 + x^4$
 $- laayy - 2hbxx^{\wedge}b^{\wedge} = 0.$ Et on demande si elle a des Points multiples. Le
 premier Rang de la transformée étant $(4/4aay)t^4 + (4rx -)z$, on a ces trois
 équations à remplir, $1^{\wedge} / > + *4 - 2aayy - 2hbxx + V = 0$ 2. $4y^*^{\wedge}aay =$
 0 3e. $4x' - 4.bbx = 0$ La 2e. a les trois racines $y = 0, y = za^9^{\wedge} = r -$ Et la 3e,
 a aussi les trois racines $x = 0, x = b, x = -h.$ On combinera donc les trois
 valeurs A* y avec les leurs d'x; ce qui fait neuf combinaisons. Digitized by
 Google

The text on this page is estimated to be only 19.36% accurate

DES POINTS MULTIPLES. 4J7 Ch.X. $x=0, 7=0 > . \wedge o-|\sim o- o-$
 $o-f-\wedge^*=o$; ce qui est absurde. $\$ \bullet m- x=P, .v==4 J$ Ces valeurs! $-4-fco-2*4- 0$
 $4-\$+=o->$ ce qui est absurde, à d' x Se à y\ 44H-o- $\wedge$ -3-j- $\wedge$ + $=o$ Moins que *
ne soit ; substituées V . , . . - — h. $x=1 \setminus > y=* \setminus$ qu'à Tiôn" $< 4I \pm i^{\wedge} r^{\wedge}; \pm^{\wedge} =^{\circ} ?$ ce
qui est absurde. y h. y o\ changent / 0 $4^4-0 -2^{\wedge} 4. \wedge + \wedge - 0$. «a- *, $\geq$, -*) \

$**+b*-2* < -2b++b^{\wedge}$ ofct qm est absurde Il paraît donc que, hors le cas où a =
b) la Courbe Plancm n'a que deux Points multiples, qui répondent à Cordon-
XVII $< née > = o$, & aux abscisses $x=i\}$ $x \sim - b$. C'est aussi ce que confirme
l'examen de la Courbe. Son équation > marque que les Axes sont en même
temps Diamètres & Contrediamètres [§. y 6]. Elle se peut réduire à $y^2 = fc$
 $v/(mm = fc / (*4 - (*x - W)1))$. Chaque abscisse x aura donc quatre
ordonnées, tant que $x y/(MM + bb)$, y est imaginaire. On voit par - là , &
on verroit encore lii 3 plus Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 20.22% accurate

I 438 DES POINTS MULTtPLÈS. Planche plus clairement par un détail , mais un peu long , que la ùtX *xvliL Courbe a la figure de deux cœurs qui fe pe'nétrent Pun l'autre par la pointe , & (c croifent en B & b qui font les deux Points dout les que nous a donné le calcul. Ce même calcul fait voir que quand a — 6t les points ftf-iJ'-.C, C extrémités des ordonnées $AC = 4$, $AC = -a$, font encore des Points doubles. Dans ce cas , la Courbe en a quatre ; & elle eft compofée de deux Ovales qui fe croifent en B, C, b, C. Mais il faut remarquer que cette Courbe n'eft pas, comme la précédente, une Courbe fimple : c'eft Paftemblage de deux Courbes , chaque Ovale étant une Ligne du fécond Ordre. Car l'équation propofée, réduite, par la fuppoftion de $a=by$ à $y+x^2 - 2aayy - 2aaxx + *4 = 0$, fe décompofe en ces deux $y) + *y \sqrt{2 + xx} - aa=0$ & $yy - xyy/2 > \backslash *xx - aa = 0$. Donc [§. 21], la Courbe qu'elle représente eft compoféc de deux autres. Exemple VII On demande les Points multiples de la Courbe reprélentée par l'éq : $x^4 - 2ay* - l**yj 1 - 2aaxx 4 4 . - z o$? Les trois équations à remplir (ont 1 e. $*4 - 2ayl - 3aayy - 2aaxx 4 \ll /*4z=:o$ 2e. $- 6ayy - 6aay = 0$ 3e. $4Xl - 4*cx=o$. La 2e. a deux racines $j=o$ & $^r= - a$, & la 3e. trois $x = 0$, $x = - a$, qu'on combinera les unes avec les autres. $x=0$, Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 20.04% accurate

DES POINTS MULTIPLES. 439 Ch. X. $x^2 = y^2$) Ces valeurs ($7'' \sim \sim \pm 4! = 0$ » CC est absurde $x^2 = y^2$ Q(substitutions) 44 Q Q $2a^2 \setminus j^4 \sim o$ $x^2 = 4, j = -4$ /propose la $V^4 + 2 < 4''' 34^{\wedge} < 4 +', 4 = 0$ » cc qui est absurde. $-4,^{\wedge} = y$ $\setminus k^* M - 2^* + - i^* 4 - 2rf^* - H^4 = o >$ ce qui est absurde; il ne peut donc y avoir que trois Points multiples ; un , p«-anck» dont l'abscisse est o , & l'ordonnée — a ; un , dont l'ab- XvII1, fciiXe est a & l'ordonnée o ; & un, dont l'abscisse est — a & l'ordonnée o. » Ces Points ne sont que doubles. Car le fécond Rang de la transformée est (— 6ay — $aa^{\wedge} uu$ H~«(o)«z 4« (6ax — $2^* 4$) zz; que la substitution de o pour x & — a pour y réduit à 3 «0*0 — 2aazz\ que la substitution de « pour x & de o pour $^{\wedge}$ change en — $\%aa uu^{\wedge} aaiz$; & que la substitution de — a pour x & de o pour y transforme encore en — 3 aaurt + $4^{**} 22$. Donc aucune de ces suppositions ne faisant disparaître le fécond Rang , les trois Points multiples de la Courbe ne sont que des Points doubles. L'équation de la Courbe $x^4 - iaaxx + a^* - 2ayt 4^* i^* <^* yy$ se réduit en ces quatre racines $x = d = i/(aa \pm z y \sqrt{2ay + 3aa})$ Si on fait $jy = o$, on aura $x \sim r^* r$ a a = $\pm a$. Qu'on prenne donc les abscisses AB ^ 137. « Ab = — a \ B, b feront des Points de la Courbe, & mes Points doubles. Si on fait $y = \{a$, on aura $x = \pm \sqrt{a^2 - 2ay + 3aa}$ & o. Ainsi prenant l'ordonnée AC = i^* , le Point C est un de ceux de la Courbe, aussi bien que les Points D, d, extrémités des abscisses CD = $\pm ay/2$, & Cdr: — 2. Les racines $\pm \sqrt{a^2 - 2ay + 3aa}$) désignent les Branches BC, bC, qui se terminent au Point C j ces racines de va

The text on this page is estimated to be only 26.20% accurate

440 DES POINTS MULTIPLES. m ■ Planche devenant imaginaires, quand $y > k^*$. Mais les racines Ch. x, xvii/. rt $*i + ^\vee T 2ay +$ dcfignent les Branches B D , $> \bullet$ «if b d j qui lont paraboliques & vont à l'infini. Du côté des ordonnées négatives, fi Ton prend $y = -$ on aura $5c = \# = y / ^{aa} ^{r.a} v^C \$aa - 2d \ll)) - \pm 4^2$ & o. Prenant donc l'ordonnée AE = $- a$, le Point E appartient à la Courbe ; il en est même un Point double. . Et si à cette ordonne'e AE on donne les deux abscilTes EF = $+ * v/i$, Ef = $- a <]$ 2 , on aura encore deux Points de la Courbe , F , f . Enfin , si Ton fait $y = - \{ a$, on aura $x \sim \pm \vee (aar \pm 2 \backslash a \vee (\hat{iaa} - = ^a$, de forte que l'ordonnée AG = $- \{ a$ n'a que deux absciltes G H = $+ < *$, Gh = $- a^9$ & ces absciflès lbnt des limites ; car les ordonnées plus négatives que A G n'ont que des absciflès imaginaires. On voit par- là que la Courbe est compolee de deux Branches paraboliques , qui se nouent aux Points B , b , E , qui ont été aflignés par le calcul 174. C'est encore par le Principe du §. 170, qu'on peut reToudre ce Problème *. L'équation d'une Courbe étant donnée , trouver les conditions qui donnent des Points multiples à la Courbe ? Ce Problème n'a lieu que quand l'équation renferme plusieurs lettres qui désignent des grandeurs confiantes. Lorsqu'elle n'en a qu'une , comme dans prefque tous les Exemples précédents , l'augmentation ou diminution de ce Paramètre ne produit que des Courbes femblables , qui toutes , ou n'ont aucun Point multiple , ou en ont le même nombre. Mais quand l'équation renferme plusieurs confiantes , il arrive fouvent que certains raports de ces confiantes donf Ufage de V Ami. pag. 240. Digitized by Googli

DES POINTS MULTIPLES. 441 CS.X. donnent à la Courbe des Points multiples que d'autres pianoïi 5. 174- raports leur refluant. xwlUm Pour déterminer ces raports , on fera les mêmes équations qui ont été indiquées au §. préc. Mais les opérations qu'on fera sur ces équations , au lieu d'aller à déterminer les variables x & y , iront à les exterminer ; afin qu'il reste des équations entre les quantités constantes , qui expriment leurs raports propres à donner des Points multiples , ou qui manifestent l'impossibilité des Points multiples dans cette Courbe. Ainsi , puisque l'existence des Points doubles donne trois équations [§. préc], desquelles il n'en reste qu'une quand on a éliminé x & y ; l'existence des Points doubles Celle des Points triples fournit six équations , qui se réduisent à quatre quand on a éliminé x & y : l'existence d'un Point triple dépend donc en général de quatre conditions. De même , celle d'un Point quadruple dépend de huit conditions ; celle d'un Point quintuple de treize conditions ; &c. Celle d'un Point d'une multiplicité du degré n , de $n-2$ conditions. Cela n'est ainsi qu'en général , & n'empêche pas que, dans plusieurs Cas particuliers , des équations qui renferment plusieurs constantes ne puissent être telles que, quelque supposition qu'on fasse , les Courbes qu'elles représentent auront toujours des Points multiples, ou n'en auront jamais. Exemple /. On demande, si la Courbe CMBmr*. a des Points multiples , où ils sont , & ce qu'ils sont ? Sa construction est telle. Sur le diamètre A B du Cercle ANBn , on prend à volonté un Point C , & menant une infinité de perpendiculaires à PA nalyse des Lignes Courbes. Kkk dicul Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 24.02% accurate

DES POINTS MULTIPLES. Pi anche diculaires à ce diamètre ,
 comme NPn, qui coupe le Ch.x. XVUL diamètre en P & la circonférence en
 N, n; on tire par s'tl*' C les droites CM, Cm parallèles à AN, A n. Les
 Points M , m font des Points de la Courbe. Si on nomme l'abfcifle A P , x ;
 l'ordonnée PM,; le diame'tre AB, a ; fà partie AC , b\ on aura CP = x — b ,
 & , par la nature du Cercle , PN = %/APxPB = sj (ax — xx). Les triang :
 (cmbl : APN , CPM , donnent APl[xx]: PN* [*x — xx] — CP* [xx — ibx +
 bb~}: Pml[j1]. Donc, multipliant les extrêmes & les moyennes, & divilânt
 par x, xjyy + x' — (zb + *) xx t^(^bb'** iab} x abb — o. Pour favoir en
 quel cas cette Courbe peut avoir des Points multiples r on cherchera le
 premier Rang de la transformée qui reTulte de la fubftitution de y *h " à y ,
 &dex-fzàx. Ce Rang eft (2xy)u +(yy+ i xx — 2 (ib + a) x + (J>b + 2*b})
 z . On aura donc , y compris la propofee , ces trois équations à remplir , 1e.
 xyy + x' (2b 4< a)xx ^ (bb+ 2ab) x abb = o 2c.yy»{* gxx 2(2& ++ (^ +
 2tff)=o xy=z o. La ge. donne , ou x = o , ou y as o , c'eft-à-dire , que les
 Points multiples de la Courbe , fi elle en a , (ê trouvent ou fur l'Axe des
 ordonnées ou fur celui des abfciflès. Qu'on fafle d'abord x = o , & Ton aura
 les Points multiples qui (è peuvent trouver fur la Ligne des ordonnées. En
 fubftituant o pour x dans les équations 1e & 2« , on les réduit à — M = o &
 bb 4* 2ab = o , qui ne peuvent s'accorder qu'autant que b eft =o. Mais cette
 valeur de b , fubftituée dans la propofee , la change en xj^-fx' — axx = o ,
 réductible en ces deux - cy xssso, & yy+xx — *x = o. La première défigne
 l'Axe Digitized by Googl

The text on this page is estimated to be only 26.05% accurate

DES POINTS MULTIPLES. 4» Ch.x. PAxe des ordonnées [§.40, 111,2] & la (éconde le Cer- Planche 5« '74- cle ANBn. Le (yfteme de ces deux Lignes , qui fe tou- XVHL chent en A , y forme un Point double. Mais c'eft- là un Cas particulier , qui n'elt compris qu'incidemment dans l'équation de la Courbe propofée. On peut donc alTurcr que , hors ce Cas-là , la Courbe n'a aucun Point multiple fur l'Axe des ordonnées. Voyons fi elle en a fur l'Axe des abfcifles. C'eft la féconde racine) = o de l'équation 3 e , qui les indique. Cette valeur d'y fubftitue'e dans les e'ouat : 1*. & 2 e. les change en $x^4 - (2^4 - 4ab)x^2 + 4a^2b^2 = 0$, & en $xx^4 - (4^2 + 2a^2)x^2 - 4abx + 4a^2b^2 = 0$. La Courbe aura donc quelque Point multiple , fi on peut trouver une valeur d' x , qui (àtisfaflè en même teins à ces deux équations. Que fi elle n'y fatisfait qu'au cas que « & b ayent certain raport , ce raport eft la condition qui donne à la Courbe un ou plufieurs Points multiples. Il faut donc chercher le divifèur commun de ces deux équations. On trouvera , par les régies ordinaires , que Tune & l'autre eft divifible par $x^2 - b$, qui , égalé à icro , donne $x = b$. Donc 1 quelque fuppolltion qu'on fàflè touchant le raport d'à Si b , la Courbe a un Point multiple à l'extrémité de l'abfciffè b c'elt-à-dire en C. Et on verra ailément que ce Point eft un Point double : ce que la ConP truction géométrique de la Courbe rend auifi fort fenfible. Exemple II, On propofè Pe'quatîon (emblable , mais plus générale , $xyy + ax^4 - bxx^2 + cxx^2 - d = 0$, & l'on demande quel doit être le raport des quantités conf tantes a , b , c , d , afin que la Courbe représentée par cette équation ait quelque Point multiple ? Kkk a Les Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 26.54% accurate

Planche XVILL «4 DES POINTS MULTIPLES. Les trois équations à remplir feront i e. $xyy + ax^4 - bxx^3 + cx^2 - d = 0$ Ch. X. S 174. 2e. $y^2 + iaxx - \frac{1}{2}bx^2 - c = 0$ 3 e. $2xy = 0$. Cette dernie're donne $x=0$, ou $y=0$, c'est-à-dire, que les Points multiples, si la Courbe en a, ne peuvent se trouver que sur l'Axe des ordonnées ou sur celui des abscisses. La supposition de $x = 0$ change la proposée en $d=0$. Donc, si la Courbe a des Points multiples sur l'Axe des ordonnées, il faut que $d = 0$. Alors l'équation de la Courbe est $xyy^2 + bxz^2 + cx = 0$, qui se résout en ces deux $x=0$, & $y^2 + \frac{1}{2}axx + c = 0$. Elle exprime donc l'Axe des ordonnées avec une Courbe du second Ordre. Ces deux Lignes se coupent en deux points situés aux extrémités des ordonnées $\pm \sqrt{-y' - c}$ & $\pm \sqrt{-y' - c}$; grandeurs qui ne seront pas imaginaires, si e est négative: & ces deux interférences peuvent être regardées comme des Points doubles. du Système de ces deux Lignes. La supposition de $y = 0$, qui donne les Points multiples sur l'Axe des abscisses, change la proposée en $ax^4 - \frac{1}{2}bx^3 + cx^2 - d = 0$, & l'équation 2e. en $3ax + bx - \frac{1}{2}c = 0$. La Courbe aura donc des Points multiples, si ces deux équations ont quelque racine commune. Ainsi il faut voir quelle relation de $m\%$ $b\%$ & d peut leur donner une racine commune. On la trouvera en divisant la 1e. $Zteac^2 - 9abfc - 162 aabc^2 - 2434'^4$, ou, divisant Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 14.00% accurate

. I I I

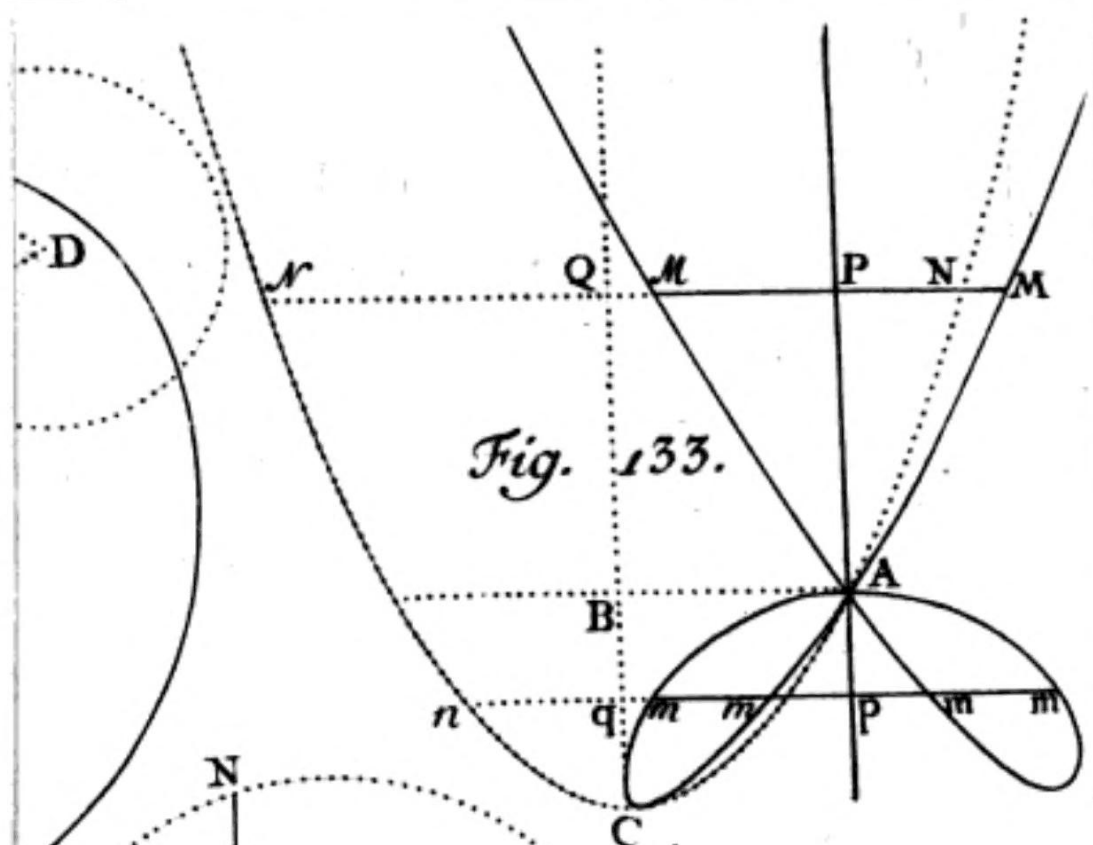


Fig. 133.

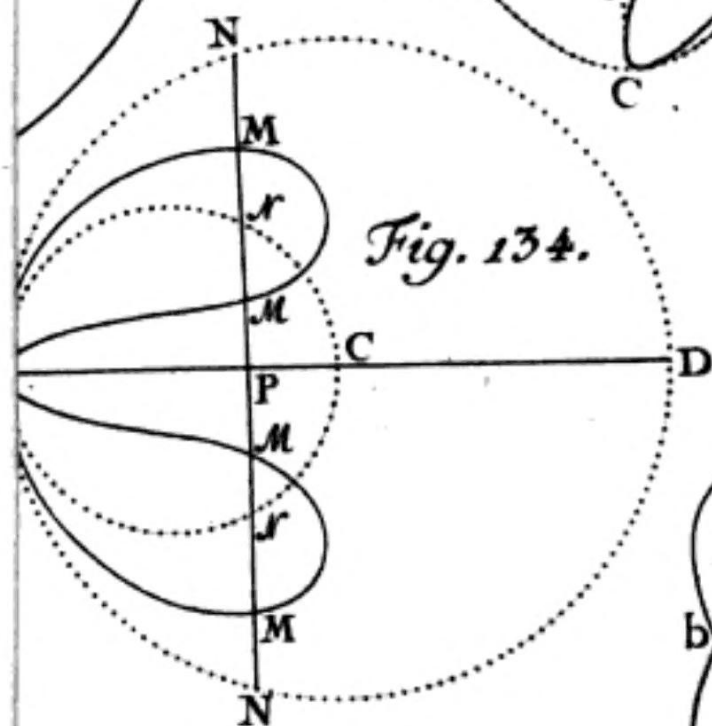


Fig. 134.

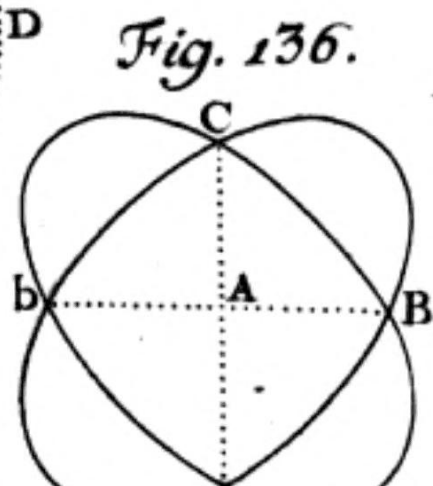


Fig. 136.

igitized by Google

The text on this page is estimated to be only 25.79% accurate

DES POINTS MULTIPLES. w Ch.x. d'ivifant par 94, $4^{\wedge}$ — bbcc — $\sqrt[4]{abcd + 4\&V + 2\text{-jaadd Phkchk} \bullet \bullet \cdot 7}$ Si les équations 1c. & 2e. ont quelque racine commune, y xvm* étant = 0, ce reste doit être = 0. C'est donc Toquât: $40c1 - hbcc - 1 \sqrt[4]{abcd} 4^{\wedge} Pd tj^{\wedge} 2 yaadd - o$, qui exprime la relation des coefficients a, b, c, d, propre à donner à la Courbe un Point multiple. Ce Point sera sur l'Axe des abscisses, à l'extrémité de l'abscisse $k \sim 9fiy 6aa - zbb$ qui se déduit de l'éq: $x^{\wedge} + x^{\wedge} \dots 2^{\wedge} = 0 >$ racine commune des équations 1c. & 2e. Ce n'est qu'un Point double; car si on cherche le fécond Rang de la transformée, on trouvera d'abord $(-x)^{\wedge} at$, qui ne s'évanouit que par la supposition de $x=0$; supposition qui, comme on la vu, change la Courbe en une Ligne du fécond Ordre combinée avec une Droite. Si on fait attention que la supposition $x^{\wedge} = 0$ marque que les Points multiples, si la Courbe en a, se trouvent sur l'Axe des abscisses, & qu'elle change la propriété en

The text on this page is estimated to be only 22.66% accurate

I 44<5 DES POINTS MULTIPLES. PUNCHS Exemple III Mais si l'équation de la Courbe C« x. XVII^e - avoit été $xyy + ey + ax + 4x^2 = 0$, les trois équations à remplir feroient 1^e. $xyy + ey + x' + for'' + fx + = 0$ 2^e. $2y + e = 0$ La 2^e. donne $y = -\frac{e}{2}$, qui est une équation à l'Hyperbole. C'est donc sur une Hyperbole que l'on doit trouver tous les Points multiples que la Courbe peut avoir. Cette valeur de y substituée dans les équations 1^e. & 2^e. les transforme en $ax^2 + 4x + e = 0$, ou, multipliant par x, $x^3 + 4x^2 + ex = 0$, & + $ax^2 + 2bx + c = 0$, ou, multipliant par xx, $x^4 + 4x^3 + ex^2 = 0$. Il faudroit donc chercher quels sont les rapports de a, b, c, r, qui donnent à ces deux équations des racines communes; & ces racines détermineroient la valeur de l'abscisse, ou des abscisses, qui répondent aux Points multiples de la Courbe. Mais sans s'engager dans ce Calcul, qui feroit un peu long, on voit que la résultante de ces équations est justement celle qui résulte quand on multiplie successivement les termes de la première par la progression arithmétique : 5, 2, 1, 0, — etc. D'où l'on peut conclure que la proposition a des Points doubles, quand l'équation $x^4 + 4x^3 + ex^2 = 0$ a des racines égales. Je dis des Points doubles. Car si l'on cherche le second Rang de la transformée, on trouvera $(x)/z^2$ $Hh(2y)^2z^4 + (3rfx + e)'sz$, ont les coefficients égaux à * Voyez Newton, Méthode linéaire tert. Ord. §. I V. * Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 26.37% accurate

DES POINTS MULTIPLES. 447 Ch.X zéro , donnent $x = 0$, 0 ,
 $\sqrt{Mx^b} = 0$. Donc $fc = 0$; pl. xix; • §• »74- & ces valeurs , substituées dans
les équations à remplir , donnent $\sqrt{a} = 0$, $\sqrt{b} = 0$, & $\sqrt{c} = 0$; ce qui réduit la
proposée à $xyy + ax^2 = 0$, réductible en ces trois équations $x = 0$, $y = \sqrt{xV}$
 $\sqrt{a} = 0$, $y^2 - f - xy = 4 = 0$. La première représente l'Axe des ordonnées : les
deux autres sont imaginaires , quand a est positive ; mais quand a est
négative , elles représentent deux Droites passant par l'Origine. Dans ce cas ,
le Point triple est à l'Origine sur le concours des trois Droites que représente
l'éq : $xyy - ax^2 = 0$. Exemple IV. On demande en quels Cas la
Conchoïde a des Points multiples ? La Gonchoïde se construit ainsi. Hors de
la Droite AB, qui (on nomme la Régie, on a pris un Point fixe P, F 3. 13*.
appelé le Pôle , duquel on mène à la Règle une infinité de Droites , comme
PC, PE , &c. qu'on prolonge toutes également, en sorte que $CD = EF = \&c.$
La Courbe FDH , qui passe par les extrémités de tous ces prolongements ,
est la Conchoïde supérieure. Si on avoit pris , de l'autre côté de la Régie, des
parties Cd, Ef, &c. égales à CD, EF; les Points d, f, &c. auroient été à la
Conchoïde inférieure. Ces deux Courbes n'en font qu'une seule, exprimée
par l'équation qui se forme en considérant la ressemblance des triangles
PCE , PFQ elle donne cette proportion $QC : CP = FE : EP$. Donc , en
nommant CP , abaisse perpendiculairement du Pôle sur la Régie, a; CD, ou
EF, b\ l'abscisse CQ^*; & l'ordonnée QF, r, on aura $x = a$; $b = z$ $b = -EP$.
Ainsi $PF = PE + EF + \sqrt{b^2 - a^2} = - C^2 * ! X X + x)$ Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 23.24% accurate

44* } f DES POINTS MULTIPLE* Puxix. +5C). Mais $PF^{PC} + QF1$. Donc $h \sim \{*** 2mx " 4-XX\} = 4*4 < 2^f + 9CX + J^$, OU $jyxX + X + + 2 *X* + **_{xx} - \text{£} *_{xx} - 2^x - = o$. C'est dans cette équation qu'il faut chercher si la Conchoïde a des Points multiples. On aura ces trois équations à remplir i c. $yyxx + x* * 24x' + (mm - bb) xx^2 Mbbx^aabb = o$ 2e. $2xxy - o$ 3e. $2X\text{£}K - f - 4*, -h \& *xt + 2 \{mm - bb\}x - 2abb - o$ dont la 2e. donne $x=o$, ou $y=o$. La supposition de $x=o$ change la 1e. en $-Mabb = o$, & la 2e en « $-2abb z=z o$. De l'une & de l'autre il résulte $m=o$, ou $b=o$. Si on fait $4r=o$, le Pôle tombe sur la Règle, & l'équation se réduit à $4 < ** - bbxx - o$, qui se décompose en $x=:o$, $x=o$, & $yy* \setminus *_{xx} - bb=o$. Les deux premières expriment l'Axe des ordonnées, & la troisième un Cercle décrit du centre C avec un rayon $CD = b$. Il coupe l'Axe des ordonnées en deux Points qui font des Points doubles. Mais ce Cas n'appartient pas à la Conchoïde. Si on fait $b=o$, on change la proposée en $yyxx - x^4 + 2ax* + **_{xx} = o$, qui se décompose en $x=o$, $* = o$ » $yy Hh xx + 2 a x + mm = o$. Les deux premières indiquent l'Axe des ordonnées, & la troisième n'exprime que deux Droites imaginaires $y V - i + x^4 = o$, $yV - i - x - m = o$. Ainsi la supposition de $* = o$ ne nous apprend rien touchant la Conchoïde, finon que cette Courbe n'a aucun Point multiple sur l'Axe des ordonnées. La supposition de $y = o$ réduit l'éq: ic. à $x^4 + 2mx + (aa - bb)xx - 2Mbbx - a^b = o$, & l'éq: 3e. à $4* * uigi$:ed by Google

The text on this page is estimated to be only 25.52% accurate

DES POINTS MULTIPLES. 449 Ch. x. $4x^2 + dax + 2(aa-bb)x - 2bb = 0$. Cette fecon- Pl. xix. S- »74- de e'tant celle qui refaite de la première multipliée, terme à terme, par la progr : arith : 4, 1, 1, 0, & divisée par x y marque que la Courbe aura quelque Point multiple quand l'éq : $x^2 + 20x^2 + (aa - W)cx - 2abx - aabb = 0$ aura deux racines égales. Or elle les a toujours, puisqu'elle est divisible par $xx + 24x + 44 = 0$, ou $(x + ay = 0$. Donc la Courbe a un Point multiple à l'extrémité de l'abscisse négative $x = -*$, c'est-à-dire, au Pôle, & cela quelque rapport qu'il y ait entre a & b. On trouve la même chose en cherchant la racine commune des deux équations que donne la supposition $dV=0$. Et on prouve sans peine que ce Point est un Point double. On le voit aussi par la Construction de la Courbe. Mais si le prolongement CD étoit pris plus petit que la distance PC du Pôle à la Régie; on pourra être surpris de voir que le Point P, où est le Pôle, (bit F' 14# un des Points de la Courbe, quoiqu'il ne passe aucune Branche par ce Point-là. Il appartient pourtant à la Courbe par son équation. Car si Ton fait $y = 0$, pour avoir les Points où la Courbe rencontre l'Axe des abscisses PD, on aura $x^4 - 2ax + aax - bbxx - 2ab : x - rf = 0$, soit $(xx + 2ax - f)(xx - M) = 0$, qui a quatre racines $x = b = 0$, $x + b = 0$, $x^2 + a = 0$, $x + a = 0$. La racine $x = b = 0$, ou $* = 6 = CD$, marque le Point D. La racine $x + b = 0$, ou $x = -f = x = Cd$, désigne le Point d, & la racine double $x^2 + a = 0$, ou $3c = -a = CP$, indique le Point P, qui est par conséquent un des Points de la Courbe. On verra dans les Chapp. suivants, assez d'Exemples de ces Points fixes & détachés du reste du contour de la Courbe, à laquelle pourtant l'équation démontre qu'ils appartiennent. On y parlera de leur origine, de la manière de les reconnaître. a Pjilalyfe des Lignes Courbes. LU tre Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 22.81% accurate

4yo DES POINTS MULTIPLES. Pi.xrx. trc , d'afligner leur place & le degré' de leur multiplicité. Ch.x. Exemple f\ On propose la Courbe dont voici la Construction , k& on demande en quel Cas elle a des Points multiples? Sur le plan d'un Cercle décrit du centre C , avec le * ,4f* rayon CN , on a tracé la Droite AB. D'un Point fixe A pris sur cette Droite , on mené des Droites AN à la circonférence i & a baillant NP perpendiculaire sur AB, on donne à Pablcifl A P des ordonnées P M , P M égales à AN. On aura l'équation de cette Courbe en nommant a , la perpendiculaire CF abaissée du centre C sur la Droite A B ; b , la portion A F de cette Droite , comprise entre le Point F & le Point fixe A ; r , le rayon CN ; x , Pabfcifl AP ; y y l'ordonnée P M = A N . Car on aura PN = AN* — AP1) = V(yy — **) ; EN = PN — PE = V(yy — xx) — CE = AP — PF=x — b-, & le triang. rec"t. C E N donnera CN1 [rr]= CE* [xx — 2tx 4« bb~] + EN* [yy — xx — 2a^(yy xx) •+» ad~]. Soit , pour abrégér, ce =.aa + bb — rr , & Ton aura yy — 2bx>{*cc = 2a\/(yy—xxy), ou, quarrant & tranfpofant , / — ttbxxy + (+bb + 44*) xx + (2cc — 40a)yy — 4 ha v + c* = 0. On aura donc , pour l'existence des Points multiples , ces trois équations à remplir. ie. y* — *bxxy 4* (4** 4*44* — 4*0 J> • — 4&»+f* = o 2e. 4/ — 8% + (4*<* — 8 4rf);=o g*. — 4% + (8W+8**)* — 4^=0. U »'» donne m = t ^- V; * . & ectte Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 21.10% accurate

DES POINTS MULTIPLES. 4Ç1 eux. te valeur A'* fubftituée dans la a«. la transforme en $4/Pi - M. ' \bullet n^* + < 4\langle - 8^*,) = 0$, soit $2 \text{ £ } * 2$
 $44 \wedge ((m - 2 aay - xs. o, \text{ qui a trois racines, } y = o, y = s 2^* 1 - \langle), \& j = -$
 $ViM'b *** - **)\$$ soit $yx=o, \wedge \wedge r+VC + + > J = - 4 < rr)$, en mettant pour
 $f f$ fi valeur $44 + W - rr. r hf$ La première racine $.7=0$, donne $x[-$
 $2yb+2aal= J^iL. \&$ ces valeurs $d^*x \& d>$ mifes dans la propofée, la
 changent en $Hff+S^* - \wedge 7 - o> \langle bit 44^*4 = o. H y$ aura donc quelque
 Point multiple fur l'Axe desabfcioes AB, lorſque 4, ou o, feront^ égaux à
 zéro. §i $c = o$, & par conféquent $[=44 + rr] - o$, ou $aa + bb = rr$ i ce qui
 revient à dire, fi le Point A eft pris fur la circonſérence du Cercle, [& pour
 cela il faut que la Droite AB coupe le Cercle, que CF ſoit moindre que le
 raïon CN;] alors l'équation fera réduite à $tfxyy u- 4 rrx - 44)7 = o$. La
 Courbe repréſente en ng. M* quelque forte une belace, les deux Ovales,
 dont elle étoit compofée, venant ſe réunir à l'Origine A, où elles forment un
 Point double; ce que Péquation mêmrit de la Courbe manifefte [§. 1 70].
 Mais fi $4 = 0$, fi la Droite AB paſſe par le centre C, l'équation propofée ſe
 réduit à $f - 4^*J>7 + éj>bxx + 2ccyy - 4bcex + c+ = o$. Cette grandeur
 eft le quarré de $yv - 2bx 4\langle$ ſe $s = o$, qui repréſente une Courbe du LU 2
 fécond Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 25.60% accurate

4J2 DES POINTS MULTIPLES. Pr. xix. fécond Ordre, fçavoir une Parabole MI M, dont l'ordon- Ch. x. r'S- mj. née PM = AN [y] a fon quarré égal au re&angle du s"174. Paramètre 2b[AiJ & de l'abfciflè 1P=AP — 1A = ce ce x — y ; en prenant A 1 moitié de A H f -j] troifième proportionnelle de AC [>] & de A G [c] = V(AC1 — CGI)=^(** — rr). Donc , à proprement parler, la fuppoftion de a=o ne donne pas de Points multiples : mais comme, au lieu de la fimple équation à la Parabole, yy — 2bx + cc=o, elle préfente le* quarré de cette équation ; on peut dire qu'elle exprime deux Paraboles égales & femblables , exactement couchées Tune fur l'autre , & dont tous les Points font, en quelque forte, Points doubles. En effet, fi] on cherche le premier Rang de l'équation transformée de y* — ' A^xyy *i* 4&fax 4-« iccyy — qbccx + c* = o , on trouvera (4/ %bxy + 4Ccy}u+(+ byy + %bbx — àfxc) z , dont les deux termes s'évanouiflènt dès qu'on prend des valeurs de x & de y qui font évanouir le terme de la Pointe , c'eft-à-dire , la propofée. Car la propofée eft le quarré de yy — 2bx + cc , le coefficient d'« eft cette même grandeur multipliée par 4jy , & le coërbcient de z, cette même grandeur multipliée par — 4t. Donc ces trois termes s'évanouiflènt en même tems ; c'eftà-dire, que tout Point de cette Courbe eft un Point r double [§. 171]. Les deux autres racines jfsaedb >/(2aa+ 2 bb — «) de l'éq : y* — My — 2aay >{

The text on this page is estimated to be only 22.83% accurate

, LES POINTS MULTIPLES. 4Ç3 Ch.x. multiples fur la Droite indéfinie CF abaiffée perpendicu- $Pi \sim xix$. * lairement fur A B du centre C. * **• '«». La fuppoñtion d'à = o donne , comme on vient de le voir, Péquation quarrée d'une Parabole, dont tous les Points , & par conféquent ceux qui fe trouvent fur la Droite C F , font Points doubles. Niais la fuppoñtion de $r=o$, ne change rien à Péquation de la Courbe. Seulement c c , qui e'toit = $44 + bb - rr$, vaut préléntement a a -\b b. Si on met cette valeur au lieu de c c , Péquation fera $y^* - A\&x)y - 2(aa - bb)yy + ^{(aa ^bb)xl - 4(44 * * + \{aa$ Cette équation (èmbles repréfenter une Courbe. Il eft pourtant clair par la Conftru&ion , qu'elle n'exprime que deux Points détachez M , m. Car , quand le raïon $r = o$, le Cercle (è réduit au Point C , qui étoit fon centre , & toute la Courbe (è réduit aux Points M* , m , dé- F£» M* terminez en prenant $FM=AC = Fm$. Et c'elt aufli ce qu'on peut déduire de l'éq ; $y^* - ^{.bx}yy - 2 \Ç a a - bb)yy + 4 (aa 4 < bb \} xx - 4 (44 + bb) bx > i < (aa + bby = 0$. Si on la réfout comme une équation du 2e. degré, on trouvera $yy - 2bx - aa + bb - z \pm 24 (x - b \} y / - 1$: ce qui marque que toutes les abfciffes ont des ordonnées imaginaires, hors l'abfciffe $x = b$; parce que celle-là feule rend zéro la grandeur $x - b$, qui multiplie la quantité imaginaire $y / - 1$. On peut donc regarder l'éq : $y^{\wedge} - ^{bx}yy - 2(44 - M) yy 4 * 4 (aa + bb) xx - -4 (aa + bb)bx > *(aa + bby \bullet = o$ comme réductible en ces deux $^{\wedge} - 2(\pounds - H * v / - 0 * HH C * + * V - 1 y = o$ Scyy - 2 (b - 4 s / - 1 (6 - 4v / - i)s = o, ou $yy - 2/x + // = o$, Se yy. - 2gx + £g = o, en faifant a

The text on this page is estimated to be only 20.56% accurate

4J4 DES POINTS MULTIPLES. Pi.xix.£ font imaginaires ; mais qui font pourtant cenfêes fe Oti Kg- 144. couper en M & m . Car elles font cenfees fe couper aux * '** Points ou elles ont une même abfcifle & une même ordonnée. Or à l'abfciflè commune $x = \xi$, les ordonnées de Tune font $r \pm V(2bf - ff) = +V(f(2b - /)) = r. \wedge i/dib + si/ - i)(b - V - i)) = 4/(MHh * 0$, celles de l'autre font $r \pm V(2é\xi - \xi g) == t:V'(\xi (26 - \xi)) = - = Ain^*$ ii ces deux Paraboles imaginaires font cenfees fe rencontrer aux Points M, m, où elles ont une même abfciflè (Te A F = 6, & des ordonnées égales $FM = + V(bb + aa)$, $Fm = - s/(bb > fraa)$). De cette manière , à ces Points M, m, ce qu'il y a d'imaginaire dans une de ces Parabolés eft rendu réel par ce qu'il y a d'imaginaire dans l'autre. Exemple V 1. On demande quelles font les Lignes du fécond Ordre qui ont des Points doubles ? L'équation générale des Lignes du 2^e. Ordre eft $a - fby + cx^2dy + exu > \{ * ic > key + 2fx \} z \setminus = o$ Si le Point de l'Origine eft un Point double . les deux premières lignes de cette équation s'évanouiffent [6. 1 70]. Donc toute l'équation eft réduite à $auu + euz + fi iz = o$, qui fe peut décompofer en ces deux , $\ll^+ + 2^+ = 0$, $W^* + zVtt = o$ [où $j^* - i \pm yS\%7Z4\text{fl} \& ^+ = \bullet 2 y d$ $\hat{e}V'\hat{e}T^{\wedge\wedge}$ Ce\$ deux é(îualions> fi & $V/3 \bullet \bullet$ ne Digitized by Googl

The text on this page is estimated to be only 26.66% accurate

DES POINTS MULTIPLES. 4^{jj} Ch. x. ne font pas imaginaires ,
représentent deux Droites qui ?L. xsy[m \$• '74- paflent par POrigine. Donc
la feule Ligne du (êcond Ordre qui ait un Point double est le Syftcme de
deux Droites qui se coupent en un Point , auquel on prertd l'Origine des z &
des u. Aucune Courbe du fécond Ordre ne peut donc avoir de Points
doubles ; mais tous leurs Points font fimples. De même, fi Ton cherche
quelles Lignes du jc. Ordre ont des Points triples; on trouvera, qu'après la
fubltitution de $x+z$ à x , & de $^+ *$ à $^+$, & fuppofant que les trois premières
lignes de la transformée dilparoiffent [§. 171], elle est réduite au feul
troisième Rang," qui fait une équation , $g u^* + buui 4^* "zz 4- /z1 = o$,
réduûible en trois autres de cette forme « $v^+ + zvy$ » = o , « $V^+ + Zv//3 = o$,
 $uyjg Hh zy/y = o$, qui représentent trois Droites qui (e coupent en* un même
Point , sur lequel on a porté TOrîgine des u & des z. Donc la feule Ligne du
\$c Ordre qui puiffent avoir un Point triple est le Syftême de trois Droites qui
(e croient en un Point. Les. Courbes de cet Ordre ne peuvent donc avoir
aucun Point triple. On prouvera de même que les Courbés du 4e. Ordre ne
peuvent avoir aucun Point quadruple ; & en général ou'une Courbe d'un
Ordre quelconque ne (auroit avoir des Points dont la multiplicité ait le
même expofant que l'Ordre de la Courbe. 175. Cela (e prouve aufli par ce
Principe [§. jo], Qu'une Droite ne peut rencontrer une Courbe en plus de
Points qu'il n'y a d'unités dans l'expofant de fon Ordre. Car fi une Courbe de
l'Ordre v avoit un Point dont la multiplicité fut du degré v , toute Droite qui
pafleroit par ce Point-là feroit censée rencontrer la Courbe en v points t§. 1
69] . Donc une Droite , qui pafleroit par ce Point. & par un autre Point
quelconque de la Courbe , feroût censée Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 27.80% accurate

4J<5 DES POINTS MULTIPLES. pl. xix. ccnfce la rencontrer au moins en $v+1$ points; ce qui est Ck.x. impossible. Il est donc impossible qu'une Courbe de l'Ordre v ait un Point multiple du degré v . » . 176. Il suit de ce même Principe, Qu'une Courbe du 3e. Ordre qui a un Point double , ou une Courbe du 4e. Ordre qui a un Point triple , ou , en général , une Courbe de l'Ordre v qui a un Point multiple du degré $v - 1$, ne peut avoir aucun autre Point multiple ; pas même double. Car si elle Pavoit , la Droite menée par ces deux Points , feroit censée rencontrer la Courbe , au moins , en $(v - 1) - 2 = v - 3$ Points [§. 169] : ce qui est impossible, la Courbe n'étant que de l'Ordre v [§.59]. 177. Il suit encore , Qu'une Courbe du 5e. Ordre ne peut avoir deux Points triples ; ni une Courbe du 6e. ou du 7e. Ordre, deux Points quadruples, &c. ni en général, une Courbe de l'Ordre $2v - 1$ deux Points multiples du degré v . Car la Droite qui passeroit par ces deux Points feroit censée rencontrer la Courbe en $2v$ Points au moins [§. 169]; ce qui ne se peut , la Courbe n'étant que de l'Ordre $2v - 1$ [§. 59]. Plus généralement, une Courbe de l'Ordre v , ou d'un Ordre inférieur, ne peut avoir deux Points multiples, de degrés tels que leurs exposants ensemble fassent un nombre plus grand que v . 178. Si l'on considère, Qu'on peut toujours faire passer une Courbe du 2e. Ordre par cinq Points donnés [§. g 8], & qu'une Courbe du 2e Ordre ne peut rencontrer une Courbe de l'Ordre v en plus de $2v$ Points , [§. 46] , on conclura , Qu'une Courbe de l'Ordre v ne peut avoir cinq Points , dont les degrés de multiplicité fassent ensemble plus de $2v$ unités. D'où Digitized by Google

BES POINTS MULTIPLES. 4⁷ Cm.x. D'où il fuit, Qu'une Courbe du 4e. Ordre ne peut Pl.xix. S- »7* avoir quatre Points doubles. Car la Courbe du 2e. Ordre , qui pafleroit par ces quatre Points doubles & par un cinquième Point fimple de la Courbe du 4e. Ordre , feroit cenfée la rencontrer neuf fois ; ce qui ett impoffible , puifqu'elle ne la peut rencontrer qu'en huit Points. Et par la même rai Ion , Qu'une Courbe du 5 e. Ordre, qui ne peut avoir qu'un Point triple [§. 1 76] , ne peut avoir avec ce Point triple plus de trois Points doubles. Qu'une Courbe du 6e. Ordre ne peut avoir quatre Points triples , ni même trois Points triples & deux doubles. Qu'une Courbe du 7e. Ordre ne peut avoir cinq Points triples , ni un Point quadruple avec trois triples & quelque autre multiple , &c. 179. De ce qu'on peut toujourns faire pafler une Ligne du \$e. Ordre par neuf Points donnees [§. \$8] , & de ce qu'une Courbe du je' Ordre ne peut rencontrer une Courbe de l'Ordre v en plus de \$v Points [§.46] : il fuit qu'une Courbe de l'Ordre v ne peut avoir neuf Points, dont les degrés de multiplicité faflent enfemble un nombre plus grand que \$u D'où l'on déduira , Qu'une Courbe du 5 e. Ordre ne peut avoir plus de fix Points doubles. Qu'une Courbe du 6e. Ordre , qui ne peut avoir deux Points quadruples , ne peut avoir , avec un Point quadruple , plus de fix Points doubles ; ni , avec deux Points triples, plus de cinq Points doubles ; ni même , avec un Point triple, plus de fept doubles. Qu'une Courbe du f. Ordre ne peut avoir , avec un Point quadruple & deux Points triples , plus de quatre Points doubles ; ni avec quatre Points triples , plus de quatre Points doubles ; &c. bitrod. à PAnalyfe des Lignes Courbes, M m m 1 80. On Digitized by-Google

The text on this page is estimated to be only 27.74% accurate

4*8 DES POINTS MULTIPLES. Pt.xix. 180. On tirera des Conclurions femblables de ce qu'u- Or. x ne Ligne du 4e. Ordre , qu'on peut toujours faire pafler 5 ,8°* par quatorze Points [§. \$ 8] , ne peut rencontrer une Ligne de POrdre v qu'en 4V Points [§.46] ; de ce qu'une Ligne du 5e. Ordre, qu'on peut toujours faire pafler par vingt Points , ne fauroit rencontrer une Ligne de l'Ordre v y qu'en 5 « Points , &c. Le réfultat de toutes ces Conclurions , pour les huit premiers Ordres des Courbes , fe trouve dans la Table fuivante, où chaque colomnc marque le plus grand nombre de différens Points multiples qu'une Courbe puiflè avoir. On y voit , par ex. qu'une Courbe du 5 e. Ordre ne peut avoir que , ou 1 Point quadruple , ou 1 Point triple & g doubles , ou * Points doubles. Mais il faut remarquer qu'abfolument parlant , ces Concluions ne (ont que négatives. Ainfi la dernière colomne indiquant qu'une Courbe du 8e. Ordre ne peut avoir plus de 2 1 Points doubles , il ne s'enfuit pas qu'elle en puitTc avoir ce nombre. Car la preuve que nous employons ne prouve que nmpoffibilité d'aller au-delà, & non la poffibilité d'aller jufques-là. Cependant , comme l'expérience fait voir , dans les Ordres inférieurs , que les Points multiples des Courbes peuvent aller jufqu'aux bornes qui leur font aflignées dans cette Table ; il en réfulte un Préjugé bien légitime pour conclure qu'il en eft de même dans les Ordres fupérieurs. Les Courbes du fécond Ordre ne peuvent avoir que des Points Amples. Les Courbes du troiftème Ordre ne peuvent avoir que 1 feuJ Point double; « In Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 19.32% accurate

Cm.X. f. ito. DES T01NTS MULTIPLES. Les Combes du quatrième Ordre peuvent avoir . I Point triple 1 1 Points doubles. Les Courbes du cinquième Ordre peuvent avoir Point quadruple triple — doubles. Les Courbes du fixième Ordre peuvent avoir Point quintuple iS9 I • # 1 • I • î I • I • ë • • • 2 I il • 6 i S 7 quadruple triples doubles. Les Courbes du feptième Ordre peuvent avoir t i 9 i 'i4 h 4 2 IO .1 12 Point sextuple quintuple quadruple triples — — doubles. Les Courbes du huitième Ordre peuvent avoir 'S 3 8 2 IO 3 i 416 2 2 8 2 1 10 2 14 1 5 2 1 7 1 2 13J1J '7 \6 43 2' I io*,i8 21 Point feptuple sextuple quintuple — ■ quadruples ——— triples — — - doubles. Mtnm i CHAPIDigitized by Google

The text on this page is estimated to be only 27.75% accurate

The text on this page is estimated to be only 27.19% accurate

DES TANGENTES. 461 Ch. xl. fois la Courbe au Point double.
 20. Quand les deux Pi.xJX. 5.181. Branches se touchent Tune l'autre. Alors la Tangente de Tune est aussi Tangente de l'autre : elle est donc censée rencontrer la Courbe au moins quatre fois. La Tangente d'un Point triple est censée y rencontrer la Courbe au moins quatre fois : deux fois , la Branche qu'elle touche , & une fois chaque Branche qu'elle coupe. Mais si la Branche touchée subit , au Point de contact , une Inflexion ; ou si les Branches qui passent par le Point triple s'y touchent les unes les autres , la Tangente du Point triple est censée y rencontrer la Courbe plus de quatre fois. Et il en est de même , en général , des Tangentes des Points multiples.
 182. Un Point d'une Courbe étant pris pour l'Origine , & l'équation de la Courbe étant donnée relativement à cette Origine , on trouvera la Tangente , ou les Tangentes de ce Point , [car s'il est multiple , il en a plusieurs , & régulièrement il en a autant qu'il y a de Branches qui passent par ce Point-là] , en donnant à l'Axe des ordonnées une position indéterminée , comme on l'a fait au §. 170 ; c'est-à-dire , en substituant dans l'équation de la Courbe, x pour x & y pour y . Alors le terme de l'éq: $a + \{ \frac{f}{f-r} \} u + (\frac{f^2}{f^2-r^2} + \frac{r}{f-r}) u^2 + \frac{4}{3} \frac{f^3}{f^3-r^3} u^3 + \dots$, qui reste le premier , marque par l'exposant de #, combien de fois une Droite quelconque , partant par l'Origine , rencontre la Courbe en ce Point-là; ce qui fait connoître la simplicité ou multiplicité de ce Point [§. 170]. Mais la Tangente rencontre la Courbe en ce Point au moins une fois de plus qu'une Droite quelconque [§. préc.] . Donc lorsque la Droite indéterminée , qui passe par l'Origine , est déterminée à être Tangente , l'éq : $a + (bs + cr) u + \dots = 0$, aura M mm 3 au;

46* DE LA METHODE Pl. xix. au moins, une racine $\neq 0$ de plus que pour toute autre c . il position de cette Droite. Il manquera donc à l'équation $4x^6 + \dots = 0$, un terme de plus au commencement. Ainsi, pour déterminer la Tangente, on égalera à zéro le terme de l'éq: $ax^4 + \dots = 0$, qui par l'évanouissement des autres le trouve le premier; & cette Egalité déterminera le rapport, ou les rapports, de s à r , qui fixent la position de la Tangente, ou des Tangentes. Les termes de l'éq: $ax^4 + \dots = 0$ ne font autre chose que les Rangs horizontaux de l'équation de la Courbe mise sur le Triangle analytique, dans laquelle on a changé x en r & y en $\frac{y}{x}$. On peut donc dire, en conservant x pour r & y pour $\frac{y}{x}$, que pour avoir la Tangente, ou les Tangentes, du Point qui est l'Origine, il faut égaliser à zéro le plus bas des Rangs horizontaux de l'équation mise sur le Triangle analytique, & construire la Droite, ou les Droites, représentées par cette équation. Elles feront la Tangente, ou les Tangentes requêtes *. i8j. On voit, en général, qu'on aura autant de Tangentes qu'il y a de Branches qui passent par l'Origine, c'est-à-dire, autant qu'il y a d'unités dans le degré de la multiplicité de ce Point. Si le Point, qui est à l'Origine, est un Point simple, le plus bas Rang de l'équation fera le premier Rang 170 J, & ce Rang égalé à zéro donne, pour déterminer la Tangente, l'éq: $by^m + \dots = 0$ qui ne représente qu'une seule Droite. Aussi un Point simple n'a qu'une seule Tangente. Si le Point de l'Origine est un Point double, le second Rang est le plus bas de l'équation. Egalé à zéro, il donne l'éq: du second degré de l'Ampl. pag. 95. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 28.83% accurate

DES TANGENTES. 45j Ch. xt. gré $Jyy+cxy+fx x=0$, qui a deux racines $yy/d+ pl.xix.$ ^ «cfc;^— ^ *=a Ces racines peuvent exprimer deux Droites qui partent par l'Origine , & qui feront les deux Tangentes du Point double. En général , le Point qui eft à l'Origine e'tant d'une multiplicité dont le degré eft / , les Rangs inférieurs manquent dans l'équation jufqu'au Rang / , qui égalé à zéro , donne une e'q : $gy hxy 1 + ... + Ix — o$, du degré / y qui peut fe re'foudre en / racines du premier degré , telles que $Ay >\backslash^{**}x=0$, $By Hh \$x = o$, $O+>x===0>$ Chacune de ces équations reprélènte une Droite qui paflè par l'Origine [§. 40 } . Et ces Droites font autant de Tangentes du Point multiple. Il en doit avoir ce nombre -là , parce qu'H eft le concours de / Branches qui peuvent avoir chacune (à Tangente, On verra , dans la fuite > les exceptions que font à cette Régie les racines égales & les racines imaginaires. 1 84. On remarquera en partant , parce que c'eft un Cas fort commun , que quand l'équation qui détermine les Tangentes a une racine $y=0>$ l'Axe des abfciflès touche la Courbe , cet Axe étant repréfente' par l'éq : $y = o$ [§. 40, 111.] , & qu'au contraire la Courbe eft touchée par l'Axe des ordonnées , quand Xêquation tangentielleU a une racine $x=0$, qui repréfente cet Axe. Or l'équation tangentielle a une racine $y = o$, quand il manque au plus bas Rang le terme (ans y y & elle a une racine *=o , quand il manque à ce Rang le terme (ans x. Donc Pabfence du terme (ans y , on du terme (ans x y dans le plus bas Rang de l'équation , fait voir qne la Courbe touche l'Axe des abfciflès , ou celui des ordonnées , à fbn Origine* i*5. Les

Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 27.10% accurate

DE LA METHODE pl. xix. 185. Les autres racines, telles que $Ay + x^2 = 0$, de c^{xi}. l'équation tangentielle, se confluent, i°. Ou en donnant à l'abscisse A une ordonnée — «, & menant par l'Origine & l'extrémité de cette ordonnée, une Droite, qui iêra la Tangente désignée par l'éq : $Ay + x^2 = 0$. L 40- n] • 2°. Ou en donnant à l'ordonnée « une abscisse — Ay & menant une Droite par l'Origine & par l'extrémité de cette abscisse. 1°. Ou en prenant une abscisse égale à A & une ordonnée égale à x, ou seulement une abscisse & une ordonnée proportionnelles à A & x, joignant leurs extrémités par une Droite, & lui menant par l'Origine une parallèle. On peut aussi, si l'on aime mieux, ou si cela fournit une équation plus commode, mener la perpendiculaire à la Courbe, c'est-à-dire, à la Tangente de la Courbe, en construisant l'éq : $ay - x^2 = 0$. Car il est aisé de voir que, supposant les coordonnées perpendiculaires l'une à l'autre, les Droites représentées par les éq : $Ay - x^2 = 0$, & $ay - x^2 = 0$ font aussi des perpendiculaires l'une à l'autre. Or cette éq : $ay - x^2 = 0$ (est construite, 1° ou en donnant à l'abscisse et l'ordonnée — A. 20. Ou en donnant à l'ordonnée A l'abscisse — m. j°. Ou en menant par l'Origine une parallèle à la Droite qui passe par l'extrémité de l'abscisse a & de l'ordonnée — [§.40, 11J. Exemple L On demande quelle est la position de la Droite, qui touche à l'Origine la Courbe représentée par l'éq: $yy + xx = 1$

The text on this page is estimated to be only 24.81% accurate

DES TANGENTES. Ch. xi = 0. On prendra donc l'abscisse $AE =$
 fc , & on lui § 18f- donnera l'ordonnée $EF = *$; ou bien on donnera à Por- F^*
 14 * donnée $AG = -c$, l'abscisse $GH = -by$ & la Droite $F A H$ menée par
 l'Origine A , & par le Point F , ou par le Point H , fera la Tangente requise.
 On peut aussi prendre l'abscisse $AE =$ & l'ordonnée $AG = r - cy$ & la Droite
 AF , menée par l'Origine A parallèlement à EG , est la Tangente requise. La
 Courbe $ABDA$ représentée par l'éq : $yy^2 = kxx + by - fx = 0$ est un Cercle
 décrit sur la corde AB du centre C éloigné de cette corde de l'intervalle
 $CK = ik$. Car Posons : $uu + vvv = s^2 c + \sqrt{bb}$, qui exprime le rapport des
 coordonnées CP [«], PM [z], & du rayon $CA = y / (CK^2 - KA^2) = \sqrt{X^2 +$
 i^2} transforme en $yy^2 + xx^2 - by - cx = 0$, par la substitution de $* =$
 $if[AE - AK = EK]$ au lieu de z [CP], & de $j^2 = i^2 + [ME^2]$

The text on this page is estimated to be only 23.48% accurate

4<5<\$ DE LA METHODE tu xix. Exemple IL On demande
 quelle est la position de c*xl la Tangente de la Courbe représentée par Téq :
 $y^2 - 2ax + 2a^2yx + a^2y^2 = (aa - bb)xx$; — o. H* *\$* Cette Courbe
 est la Conchoïde , POrigine ayant été prise au Pôle P. Si on la place sur le Tr
 : anal : on verra que la Pointe & le premier Rang restent vides. Le fécond ,
 qui est le plus bas , étant donc égalé à zéro , $00*0* 0*0* * o * o o$ donne
 Péq : $a^2y^2 - (aa - W) x = 0$, qui se résout en ces deux $ay + xy/\sqrt{bb - aa} = 0$
 $<0=0$, & $ay - xy/(bb - aa) = 0$, lesquelles se construisent en donnant à
 PabfciflTe PC = a les ordonnées CG = $-r\sqrt{bb - aa}$ & Cg=r — $\sqrt{bb - aa}$.
 Or cela s'exécute sans peine , en décrivant du centre P , avec un rayon
 $PG = Pg = b = 3 CD$, une circonférence qui coupe la Règle en G & g. Les
 Droites PG , Pg font les Tangentes des deux Branches qui se croisent au pôle
 P. Exemple III Quelles sont, à POrigine, les Tangentes de la Courbe dont
 l'équation est $y^2 - 2yixx + fx^2 + lay^2x - 5^2xJ = 0$? C'est celle dont nous
 avons déterminé les Asymptotes au §. 14\$, Ex. III. Le plus bas Rang de
 cette équation mise sur le Triangr * o * o * 0*0* 000 o o aolr Digitized by
 Google

The text on this page is estimated to be only 25.60% accurate

DES TANGENTES. Ch. xt. anal: est le troisiéme, qui , étant égalé à ze'ro , donne Pl.xix. f. i8j. $2nyxx - = 0$. Cette équation tangentielle a trois racines $x=0$, $yy/2 - = 0$, y & menant dès l'Origine des Droites aux extrémités de ces ordonnées. 1 86. Si le raport de x à y , ou plutôt de r à / , qui détermine la position d'une Tangente, fait évanouir, dans l'éq : $a^{bs} + cr^{utb^{dssJfCsr} *^{frr}}) uu \& c == 0$, non seulement le terme qui se trouve être le premier [§. 182], mais encore un ou plusieurs des termes suivants : c'est une marque que la Tangente rencontre la Courbe à l'Origine en deux , ou un plus grand nombre de Points , qu'une Droite quelconque. Donc, si le Point est simple, la Courbe y subit une Inflexion , simple ou multiple. Si le Point est multiple ; il se peut faire que la Branche touchée y subisse quelque Inflexion : mais il (è peut bien aussi que deux ou plusieurs Branches le touchent en ce Point là [§. 181]. Mais ces Cas sont faciles à discerner, parce que plusieurs Branches qui (è touchent n'ont qu'une Tangente commune. Donc , lors que l'équation tangentielle donne autant de Tangentes qu'il y a de Branches qui passent par un Point multiple , on voit que ces Branches ne se touchent pas. Si une de ces Tangentes rencontre (à Branche plus de deux fois à l'Origine , il faut que cette Branche ait quelque Inflexion au point de contact Le degré de cette Inflexion se connoit par le nombre des termes au-delà du premier, que fait "évanouir le raport de r à / , déterminé en égalant ce premier terme à zéro. Il n'en fait évanouir qu'un , c'est une Inflexion non 2 simple, Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 27.89% accurate

tf\$ DE LA METHODE Piuxix. (impie, & la Tangente en* en même tems Sécante [§. Ck.xl S'il difparoit deux termes après le premier , le Point tou- ** ,i5* che' eft un Point de Serpement [§. 161] , & ainfi de fuite. De (brte que la Tangente coupe la Courbe, fi le nombre des termes, qui s'évanouit Tent au-delà du premier , eft impair ; elle ne la coupe pas , fi ce nombre eft Pair On voit ici, comme au §. 182, que les termes de l'éq : $a + (Ar + '0* + \&c = 0$ font les Rangs horizontaux de l'équation de la Courbe mife fur le Trranal: & transformée par la fubftitution deràx&de/àju C'eft donc par le nombre des Etangs fupérieurs au plus bas Rang , que fait évanouir la fubftitution d'une des racines de l'équation tangentielle , qu'on juge du degré d'Inflexion que fubit , au Point d'attouchement , la Branche touche'e par la Droite que défigne cette racine. Les Rangs , que la fubftitution aune racine fait évanouir étant divifibles par cette racine ; on examinera, en remontant de Rang en Rang , combien de Rangs , fupérieurs au plus bas, peut divifer chaque racine de l'équation tangentielle; & par le nombre de ces Rangs on connoitra le degré de. l'Inflexion de chaque Branche de U Courbe a à l'Origine Exemple T. On demande la nature du Point fitué * ^Origine de la Courbe reprélentée par l'éq : $x^* - axy' - bby = 0$. C'eft une des elpèces du Trident défini au §. 155, G*/ IV, 2. Cette équation a trois Rangs , chacun d'un feul Terme. Le plus bas eft le premier Rang. Donc l'Origine eft un Point fimple [§. 170]. Egalé à zéro, il donne l'éq: $- bbyz = 0$ qui n'a qu'une feule racine $yz = 0$. Donc la Tangente eft l'Axe des ablciflès [§. 184J. Cette racine fublituée dans le fécond Rang , — a xy , le fait dil^ • paroître* Ufage

The text on this page is estimated to be only 23.92% accurate

DES TANGENTES. ' 4tf9 Ch. xi. paroître. Donc le Point , qui est à l'Origine , est un Plxix. \$. i85. pQ-nt d'Inflexion. Mais le troisi me Rang , x^* , ne disparaît pas. C'est donc un Point d'Inflexion simple. Exemple II On propose l'éq: $x^2y + bxy - ax^0 > k^*hy - aax = 0$ & Ton demande la nature du Point qui est à l'Origine de la Courbe qu'elle représente. Flg, 147,, Le Rang le plus bas est le premier Rang!, aby aax qui égalé   zéro, donne $by - ax = 0$; ce qui fait voir que le Point de l'Origine est un Point simple , dont la Tangente est la Droite , qui fait , avec les abscisses & les ordonnées , des angles dont les Sinus sont entre eux comme a & b. Si Ton substitue , dans le second Rang $bxy - ax$, au lieu d'y fa valeur -j , prise dans l'eq; $by - ax = 0$ on le réduira   $axx - axx$, ou zéro. Ou, ce qui revient au même, on voit que le second Rang $bxy - axx$ est divisible par le premier $by - aax$, k qU0x tient étant — . Donc la Courbe a un Point d'Inflexion à l'Origine. Mais c'est une Inflexion simple. Car le premier Rang $*ty - aax$, qui divise le second $bxy - axx$, ne divise pas le troisi me xyy . Exemple III \\ s'agit de la Courbe représentée Pl.xx. par l'éq : $xyy - aby$ Hh $axx = 0$, 14*» Le premier Rang, qui est le plus bas, égalé   zéro , donne $aby - aax = 0$, ou $by - ax = 0$: ce qui détermine la Tangente [\$.185]. Et comme, indépendamment de toute substitution ,. le second Rang manque J te Point de l'Origine est un Point d'Inflexion , mais d'Inflexion simple, puisque le troisi me Rang n'est pas divisible par la racine $by - ax = 0$ du premier, Nnn 3 Exempt . Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 20.59% accurate

470 DE LA METHODE ,Pl.xx. Exemple IV. On propose la Courbe exprimée $C \ll -xt \text{ Fis}' 1+y'$ par l'éq : $y^* > b^2 xxyy + x + a^2 f - \hat{u}^2 axxy + a^2 ayy - Wy = 0$. Le premier Rang , $- 8 a^2 y$, égale' à zéro , donne $y = 0$. Donc l'axe des abscisses touche la Courbe à l'Origine [§. 184], qui est un Point simple [§. 170]. Cette valeur d' $\hat{u}$, substituée dans les Rangs supérieurs, fait disparaître le fécond , $4^2 Zaayy$, & le troisième , $- 4^2 / - 4. axxy$, mais non le quatrième $y^* + 2 x xyy + x^2$ Le Point en question est donc un Point de double Inflexion , ou de Serpement.

Exemple V. Quel est le Point situé à l'Origine de l'éq $y^* - a^2 ayy - 4^2 axxssz = 0$? Le plus bas Rang est le fécond. L'Origine est donc un Point double. Égale' à zéro, il donne $yy - xx = 0$, réductible en ces deux équations $y - x = 0$, $y + x = 0$. Il y a donc deux Tangentes qui partagent chacune en deux également l'angle des coordonnées. Le troisième Rang manque , indépendamment de toute substitution. Mais les valeurs d' $\hat{u}$, fc. $+^2$, ou $-^2 x$, substitués dans le quatrième Rang , ne le font pas disparaître. Donc Tune & l'autre des deux Branches , qui se croissent à l'Origine, y subit une Inflexion simple.

Exemple VI On propose l'éq : $x^2 - 2 ax^2 + 2 ttaxx - ay^2 - a^2 ayy = 0$, & l'on demande la nature du point qui est à l'Origine de la Courbe qu'elle représente. Puisque le plus bas Rang est le fécond , ce Point est un Point double. L'éq : $2^2 axx - a^2 ayy = 0$, qui se termine (es Tangentes , est réductible en ces deux , $x^2 - y^2 = 0$, $x^2 + y^2 = 0$. On aura donc les Tangentes AM, AN des deux Branches , en donnant à l'ordonnée $AQ = \sqrt{2}$, les abscisses $QM = r$, $QN = -1$. La première

The text on this page is estimated to be only 17.75% accurate

1 Planche. XIX. gafc EZg Digitized by Google

Fig. 140.

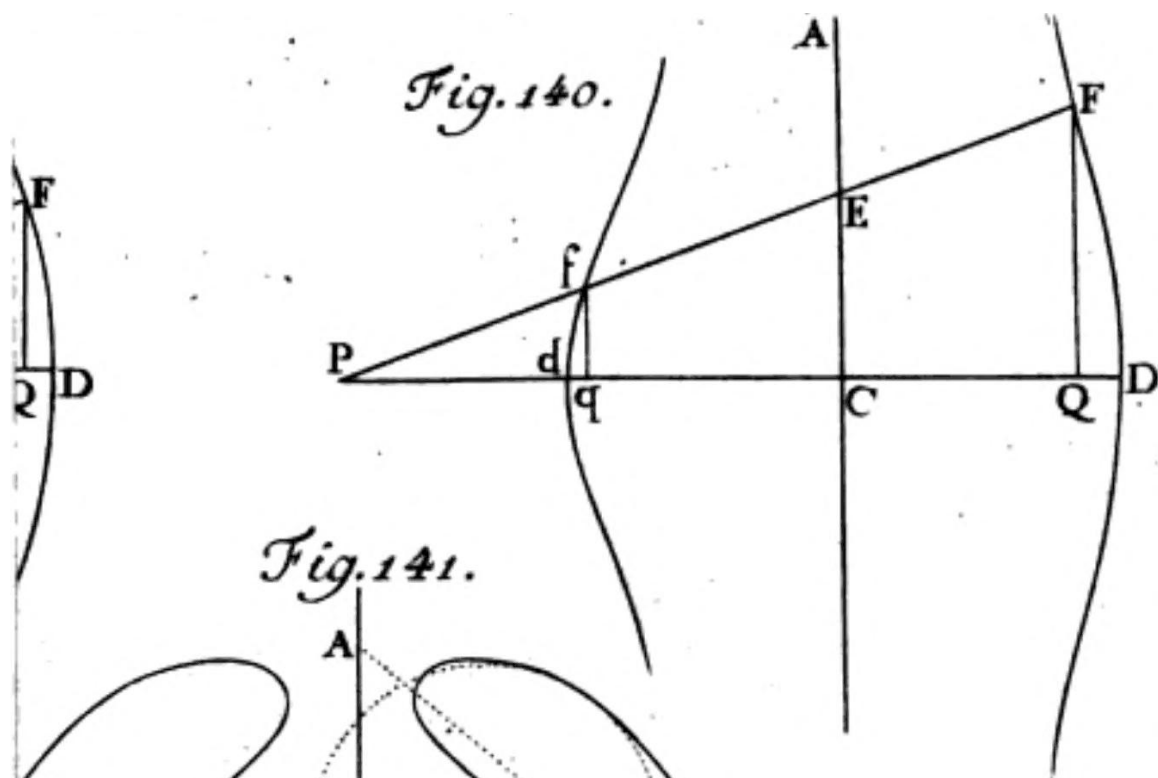


Fig. 141.

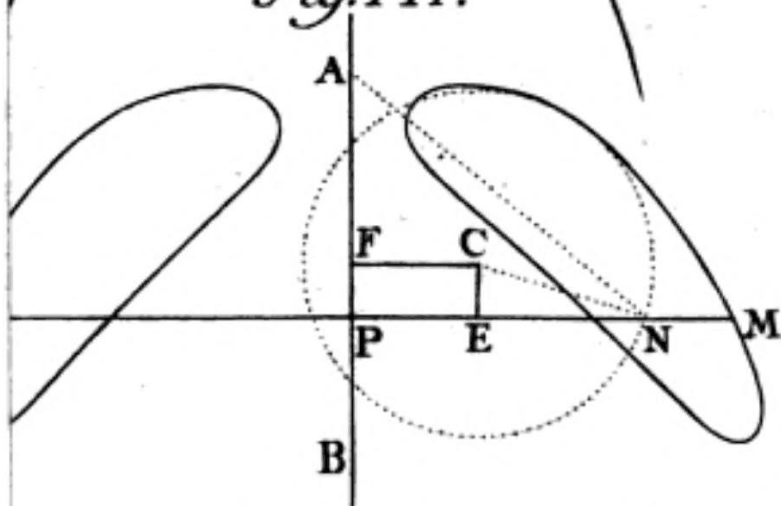


Fig 142

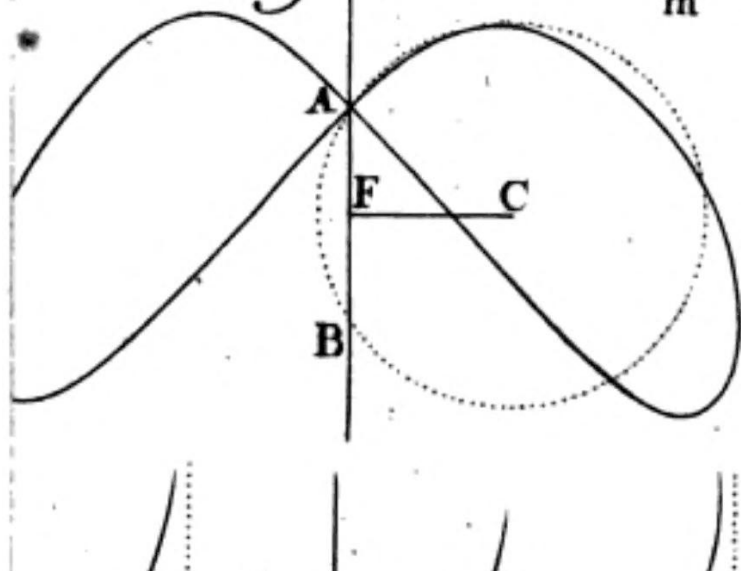
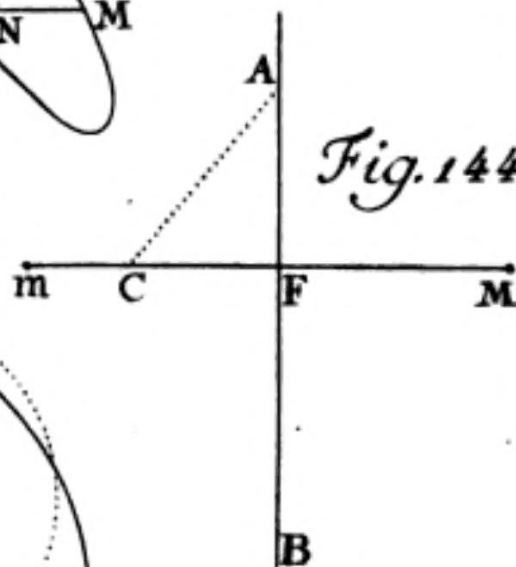


Fig. 144.



Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 25.32% accurate

DES TANGENTES, 471 Ch. xi. re valeur d'y , qui est xy/i , substituée dans le fécond Pl.xx. §. 5- Rang , — $2axii/2$ — $ayi >$ ne le fait pas disparaître. Ainsi la Branche touchée par A M ne subit aucune Inflexion au Point A. Mais la féconde valeur d'y, qui est — $\sqrt{2}$ fait disparaître le fécond Rang , quand elle y est substituée. Donc la Branche , que touche AN , est infléchie au Point A. Exemple VJL On demande si la Courbe représentée par l'équation $y + xy - 6a^2yy + aax^2 = 0$, subit quelque Inflexion à son Origine. * 134 Le fécond Rang étant le plus bas , le Point de l'Origine est un Point double. Ses Tangentes sont déterminées par l'équation $aaxx=0$, qui a deux racines égales $x = 0$, $x = 0$. Donc les deux Branches qui passent par l'Origine , y ont une Tangente commune , qui est l'Axe des ordonnées. Elle s'y touchent donc l'une l'autre : & cette Tangente commune est censée y rencontrer quatre fois la Courbe [§. 181] . En effet , la valeur 0 d'x réduit toute l'équation à $y^2 = 0$, qui a quatre racines égales à $y = 0$. Donc, de ce que cette valeur d'x fait disparaître le troisième Rang, — $6axyy$, on ne doit pas conclure qu'il y a une Inflexion à l'Origine , mais seulement que deux Branches s'y touchent. Ce qui est assez évident par la Construction de la Courbe donnée au §. 187. Si le Point, dont on cherche les Tangentes & les Indexions, n'est pas l'Origine; on l'y transportera , en substituant $y - fr$ à y, & $x + z$ à x , dans l'équation proposée , comme il a été pratiqué au §. 171. C'est-à-dire > qu'ayant posé l'équation donnée en première ligne , on calculera la féconde , qui contient les termes a & z. Et la substitution des valeurs de x & y dans les coefficients

Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 27.46% accurate

472 DE LA MÉTHODE Pl. xx. de ces termes ne les fait pas évanouir tous deux, ce pre- Cr.xl mior Rang donnera l'équation tangentielle. f. ttj. Exemple. On demande la Tangente d'un Point quelconque d'une Courbe du iècond Ordre, exprimée par Péq : $a+by + ex + dyy >\{ *cxy 4-/xx = o$. On a vu [§. 174 , Ex. VI] que le premier Rang de la Transformée de cette équation , est $(6+2 dy x)u + ((+ ey + 2fx) z \cdot Ce ^{anS}$ égalé à zéro est l'équation tangentielle , d'où résulte [§. 185] cette Conftruâion. *\$*• A P étant l'abscisse x , & P M l'ordonnée y , on prolongera celle-ci en Q^, de sorte que M Q soit égal $+ 9 * \backslash * 2fxy$ & on mènera par le Point M, la Droite MN parallèle à AP , & égale à $b + ex + zdy$. On tirera la Droite QN , & par le point M on fera parallèle M R , qui fera la Tangente. 1 S 8. En général, pour mener la Tangente d'un Point simple quelconque M d'une Courbe , dont l'équation est donnée: On prolongera, au-delà du Point M, l'ordonnée PM & on appellera pM. On multipliera chaque terme de l'équation par l'exposant de la puissance de l'abscisse, & on divisera tous ces produits par l'abscisse même : puis on prendra M égale à ce quotient , sur le prolongement de l'ordonnée si le quotient est positif , sur l'ordonnée même s'il est négatif. De même , on multipliera chaque terme de l'équation de la Courbe par l'exposant de la puissance de l'ordonnée , & on divisera tous ces produits par l'ordonnée : puis on prendra MN égale à ce quotient , sur le prolongement de l'abscisse si le quotient est positif, sur l'abscisse même s'il est négatif. Enfin on mènera la Droite QN , & la parallèle M R , qui fera la Tangente requise. Ainsi, l'équation donnée étant l'équation générale des Lignes Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 20.81% accurate

DES TANGENTES. 47\$ Cm. xt. Lignes du \$e. Ordre, a + by + cx - ^dyy ^ exy ^ fxx + Pj^xX, \$*|B8, gyl > { * hxyy + ttxy + lx1 = 0 , on doit prendre MQj= c+cy-+- 2/x + byy + 2/xy 4- 3 / * x , & M N = 6 4- 2 \ * ixx. Dont la raifon eft , que fi on porte TOrigine du Point A au Point M , en (ubftituant , dans l'équation , y 4" " à y & x 4* z à * , le premier Rang de la transformée fera [§. 29] (H 2) + ^ -4« %gyy + ihxy 4*) « 4- (* 4- * y 4*2/^ + kyy 4" 2 rvjp 4-g/xx)z. Ce premier Rang eft l'équation de la Droite qui touche la Courbe au Point M [§. 182] , u & z étant les coordonnées. Mais M R , parallèle à QN » eft la Droite que représente cette équation [§. 185 , ou §. 40 , 11]. Donc MR. eft la Tangente de la Courbe au Point M. 1 89. Si on prolonge la Tangente M R jufqu'à-ce qu'elle rencontre en R la Ligne des abfciflès , ou en r la Ligne des ordonnées la partie PR , ou pr, de ces Lignes qui eft interceptée entre la Tangente rMR , & l'ordonnée MP, ou Pablcille Mp, fc nomme la Soûtangente. C'eft l'ulàgc des Géomètres de déterminer les Tangentes par la grandeur des Soiitangc rites. On voit , en effet , que le Point M étant donné , la pofition de la Tangente eft donnée par celle du point R , ou du point r, c'eft-à-dire, par la grandeur de PR, ou de pr. Or la Soûtangente PR eft la quatrième proportionnelle à MQ, MN & MP, & la Soûtangente pr eft la quatrième proportionnelle à MN, MQ^ & M p . Donc , pour avoir PR , on multipliera la fraction ^■j-^par M P , & pour avoir p r , on multipliera la fraction jçj-^Par M p. Le Numérateur MN de la première fraûion eft l'équation même de la Courbe , dîvifée par l'ordonnée MP , après que chaque terme aura été multiplié bttrod. à r Analyfe des Lignes Courbes, O O o par Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 23.32% accurate

47i DE LA METHODE ft. xx. par rexpofant de l'ordonnée. Mais comme il faut cnfuîte c«xt M N ^* *^ multiplier cette fradion — , ou Ion numérateur MN , par l'ordonnée MP ; la divifion par MP cft conopenfée par cette multiplication. On peut donc omettre Tune & l'autre, & divifer Amplement par MQ^ce qui réfulte quand on multiplie chaque terme de l'équation par l'expofant de l'ordonnée. De même , puifque M elt l'équation divifée par Pab&iflè AP > après que tous fes termes auront été multipliés par l'expofant de l'abfcîûe ; on peut , & cela fera ordinairement plus commode , au lieu de diviler par Fabfciflè le dénominateur de la fraction , multiplier par cette même abfciflè le numérateur, ou, ce qui eû la même chofe , la fraction. On aura donc la Soûtangentc fur l'Axe des abfciflès r en multipliant , par Pabfciflè , la fraction qui a pour numérateur la fomme des produits qui Ce font quand on multiplie chaque terme de l'équation de la Courbe par l'expofant de l'ordonnée dans ce terme -là , & pour dénominateur la fomme des produits qui réfultent quand on multiplie chaque terme de l'équation par l'expofant de Fabfciflè dans ce terme -là. Mais fi on renverfe cette même fra6Kon , en mettant le numérateur à la place du dénominateur & réciproquement ; on aura , en la multipliant par l'ordonnée ,. la Soûtangente fur l'Axe des ordonnées. Ainfi, dans les Lignes du 2e. Ordre t PR *y + 'xy + adyy ^ k + ex+*dy & tx + exy >i*2fxx c *{b 2fxx+bx/ ^2hczy +3/»' = b Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 23.86% accurate

DES TANGENTES. Ch. xI. $+ 2dy + ngy + 2bxy + ix^* - 'tx + exy$
 $4\ll 2/xx + Axjff 4^* gix'jr -j- g hy + e xy 4- 2 ^ r-j- rjj 4< g/x4^* ^2 4<$
 $2txy^*k 1 Ixx r^*cx^*2dy+igyy + 2hxy + txx^*' K 06 1061110$ dans les Ordres
 fupérieurs. 190. On peut auflî , (ans s'afteindre à multiplier les termes de
 l'équation de la Courbe , d'abord par les expolants de l'ordonnée , enfûite
 par ceux de l'abfcifle , les multiplier fucceflîvement par deux progreffions
 arithmétiques quelconques , dont la différence lera l'unité. Ainfi la Régie
 pour calculer la Soûtangente foit celle-ci. On ordonnera l'équation de la
 Courbe félon les dimenfions de l'ordonnée , & on multipliera lès termes par
 une progreffion arithmétique , dont les termes croiflent ou décroiflènt de
 l'unité' , comme les expolants des puiÊ fances de l'ordonnée. On dilpolèra
 enfuite la même équation (clon les puiflances de l'abfciflè , & on multipliera
 lès termes par une progr : arithm : dont les termes croiflent ou décroiflènt
 de l'unité , comme les expolants des puiflances de l'abfciflè. On divifera le
 premier de ces deux produits par le lècond, & on multipliera cette fraction
 par l'abfciflè , pour avoir la Soûtangente far l'Axe des abfcifles. Ou bien , on
 divifera le fécond de ces produits par le premier , & on multipliera cette
 fraction par l'ordonnée , pour avoir la Soûtangente fur l'Axe des ordonnées.
 % Cette Régie, par la variété des progreffions arithmétiques qu'on peut
 choifir , fournit une infinité d'expreffions pour les Soûtangentes , entre
 lelquelles il eft bien difficile qu'il ne s'en trouve quelcune qui (bit (impie, &
 d'une Ooo a conf. 1

The text on this page is estimated to be only 18.84% accurate

47<5 DE LA METHODE &> xx. conftru&ion commode ; parce que le zéro peut être un c*.n des termes de ces progrcfliions , qu'on fera tomber fur le § IJOr terme qu'on voudra de l'équation. Il fuflîra, pour la démontrer, d'en faire l'application à un Exemple. Choififlons l'équation générale , $a+by^4< ex^4- dyy + exy + fxx = o$, des Lignes du 2e. Ordre. Si on l'ordonne par y, on aura $a c x \bullet +> fxx , -f\acute{e}^{\wedge\wedge}f. exy, >^{\wedge}dyy—o$, dont les termes étant multipliés par la progrelîion $m\% tn + i , tn + 2\backslash>$ il vient $4**wx+w/xx + i + (»+O'x;-f.t>-i-3)<07*$ Qu'on l'ordonne enfuite par x , & qu'on multiplie Tes termes par la progreflîon », $w+ i , w-f-a$, on aura $na+nby^4* \ll A* + (»+i)(x+(»4.i)a)+(» + 2)/xx$, Je dis que la Soûtangente fur l'Axe des abfciffes fera $TM*+w^{\wedge}rfxx>j<(m>\{<\hat{i}\}fa +(^4- 1$ $yxy**r(m+2)dyy n\grave{a}'-\backslash- nb) -f- ndyy 1)cx 1 >xy -K»+2) /xx * 1$ exprime la Soûtangente fur l'Axe des ordonnées. Car fi on multiplie l'équation propofee par $x*y»$, on aura $a x*y»^4* \pounds x»/' +» + * x»+« y» + ^x1» ^*»+»$ $4. <\bullet xH" +fx**xy*sss o$ qui repréfente la même Courbe avec les deux Axes [§.20]. Si on cherche la Soûtangente par cette équation , félon la Régie du §. préc. on aura pour celle de l'Axe des abfciffes $**x*ym \backslash nbxy»V* 4.$ $(»+i>x»+y»+WxV+*4(j»P)^yi4i \{ \{ \ll fs) / ^ \}$ qui. divifant le numérateur & le dénominateur par $x"»/»$, fe réduit à $\sim * * 0»t? + "g* 2) \grave{a}yy + (m+ 1 >xy na + »ty + (\ll 4. 1) + , , ^ - (, , f 0**/* 55 2) / x x x$ précifement comme on la trouve par la Régie du préfent On x Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 23.85% accurate

DES TANGENTES. 477 Ci.xi. On trouvera le même accord, en cherchant la Soûtangen- $p^{\sim}xx$. *•*** te fur TAXe des ordonnées. « 191. Cette Régie , ou celle du §. 1 88 , donnera toujours la Tangente d'un Point (impie quelconque d'une Courbe dont l'équation est donnée. Mais si le NuméraMN teur & le Dénominateur de la fradion , se trouvent devenir égaux à zéro , par la substitution des valeurs de x & de y pour un Point donné ; ces deux termes , qui font les coefficients de « & de 2 dans le premier Rang de la Transformée qui naît de la substitution de $y + \epsilon$ à y & $x + \delta$, étant zéro , ce premier Rang disparaît , & par conséquent , le Point assigné est un Point multiple [§. 171]. Ses Tangentes , car il en a au moins deux qui peuvent à la vérité coïncider , ne fauroient être déterminées par une équation du premier degré [§. 18\$]. il faut donc procéder à chercher le (second Rang de la Transformée ; lequel est égal à zéro donne une équation du (second degré, composée des termes un , $\#z$, zz ; dont, à moins que les trois coefficients ne soient zéro, on déduira deux valeurs de z , ou par lesquelles on déterminera les deux Tangentes. Exemple I. On propose de trouver les Tangentes de la Courbe représentée par l'équation : $y^4 - 6ay^3 + 4a^2y^2 - 4a^3y + a^4 = 0$ Si on substitue $y + \epsilon$ à y & $x + \delta$ à x dans cette équation , le premier Rang de la Transformée sera $(4 - 12a\epsilon + 12a^2\delta - 4a^3\epsilon^2 + 4a^4)z$, lequel , égal à zéro , détermine la Tangente de chaque Point de la Courbe , qui fera un Point simple. En supposant $\epsilon = 0$ on trouvera

Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 21.16% accurate

478 DE LA METHODE xx. posant $y = 2a$, l'équation proposée se réduit à — $8x^4 + 4x^3 - 16x^2 + 16x - 16 = 0$ » qui a deux racines $x = 1 \pm \sqrt{a^2 - 2y}$ $x = z - a^2/y$. D'où il paroît que Pordonnée $AB = 2a$ deux abscisses $BC^+ + V^+a$ & $Bc = -$ 'Hyjiyjiy moyennes proportionnelles entre $AB[2a]$ & $BD [a^2/2]$. Si on cherche les Tangentes de la Courbe en ces Points C, c, on substitue $2a$ à y & $t = \sqrt{2a^2 - y^2}$ à x , dans le premier Rang de la Transformée, ce qui le réduit à $(a^4 - 72a^2 + 56t^2 - 16t^4 + 16t^2V^2)z$, ou $(o)^2 + (o)z$. Ainsi les Points C & c font des Points multiples. Pour en avoir les Tangentes, il faut donc chercher le fécond Rang de la Transformée [$\frac{1}{2} 8j$], qui fera $(6y^2 - t^2ay^2)u^2 + (o)nz + (-6x^4 + 4x^3)zz$, ou, mettant pour y & x leurs valeurs $2a$ & $\pm \sqrt{2a^2 - y^2}$, $(2t^2)(8a^2 - t^2)zz$. Ce Rang, égalé à zéro, a deux racines $t = -r - 2Zy/\sqrt{2}$, & $t := -az\sqrt{V}$. On déterminera donc les Tangentes des Points C, c, en donnant aux ordonnées des prolongements CE, ce, égaux à $2a\sqrt{y^2 - 2a^2}$, ou moyens proportionnels entre $2AB [4a^2]$ & $BD [4a^2]$, & prenant, sur les Droites FG, fg parallèles aux abscisses, les parties EF, ef, égales à 4 , & les parties EG, eg égales à ~ 4 . Les Droites CF, cf, CG, cg font les Tangentes cherchées. $r = \sqrt{2a^2 - y^2}$. Exemple IL si on cherche les Tangentes de la Courbe dont la nature s'exprime par l'éq : $xy^2 - 2ax - a^2x - 4a^2 = 0$; on trouvera pour le premier Rang de la Transformée, $(2xy + 2a^2)u - fr^2(jy - 2ax - 4a^2)z$, lequel, égalé à zéro, donne l'équation qui détermine les Tangentes de tous les Points simples de la Courbe. Mais si Ton cherche la Tangente du Point M, quia l'abscisse $AP = -a$ & l'ordonnée $PM = 4$, [ce Point est un de ceux de la Courbe, puisque, mettant, * Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 21.35% accurate

DES TANGENTES. 479 Ch. xl tant, dans son équation, — s pour
 se & 4 pour y, on pt.xx* 0* 19U)a réduit à 0=0], on trouvera pour le
 premier Rang, (— iaa 4« 2m)« >*(aa 4. 20a — 3*0) z, ou (o)u 4- (o) z;
 ce qui n'apprend autre chose finon que le Point M est un Point multiple. On
 calculera donc le fécond Rang de la Transformée, & on trouvera (x)uu +
 (2y°)uz 4«(— *)zz, ou, mettant — a pour x & a pour yy — auu^2auz —
 azz. Ce qui étant égale à zéro donne uu — 2«2 + zz=0, soit u — z =0. D'où
 Ton voit que les deux Tangentes du Point double M coïnci-» dent, & que
 cette double Tangente coupe en deux également l'Angle des coordonnées.
 Exemple III. Les Tangentes de la Courbe définie par l'éq: x4 —
 2aaxx — +ay% -f-*4 = 0 se déterminent par l'équat: -| = ^-^~^*X » se
 forme en égalant à zéro le premier Rang (— \2ayy) u -f(4*' — 4**x)z de la
 Transformée. Mais si l'on fait j = 0, on réduit l'équation de la Courbe à x*
 — 2aaxx + a* — 1 o, qui n'a que deux racines > mais chacune double, x
 — a = 0, x4«*=q. Donc les abscisses AP = a & Ap == — a ont des
 ordonnées zéro. Si on cherche les Tangentes de ces Points P, p, en mettant
 0 pour y & .,., tt 4.x1 — ±aax ii= a pour x, dans l'équation — = 2, on r l z
 \2aay la réduit à - = - . La valeur de cette fraction étant z o indéterminée, on
 n'en fauroit conclure autre chose si ce n'est que le premier Rang (— \2a\y) «
 + U*' — 4***)* de la Transformée disparaît, ou se réduit à (o)#+(o)z; &
 que par conséquent P, p sont des Points doubles. On cherchera donc le
 fécond Rang > qui fera (— V2ay}uu + (o) «35 Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 20.71% accurate

480 DE LA METHODE tt. xx. + (o) u% + (6xx — 24a) zz , ou
mettant à= « pour * Ci.lt & o pour (o)»«+(o)»z+ (4^)zz. Ce Rang, égale' à
zéro, donne z=0. D'où Ton conclura que les Tangentes des Points doubles P
, p font les ordonnées mêmes PM, pm. « 192. Si Pévanouiflément des
coefficients de u, z, & de irar , uz , zz , fait difparoître le premier & fécond
Rang de la transformée ; c'eit une preuve que le Point dont on cherche les
Tangentes eft un Point triple. On calculera donc le troifième Rang , & oe
Rang , égalé à zéro , donne une équation du je. degré, dont les trois racines
déterminent les trois Tangentes du Point triple. Mais fi les coefficients des
termes u% , uuz , «zz ,z', qui compofènt le troifième Rang , déviennent tous
zéro par la fubftitution des valeurs de x & de y qui conviennent au Point
affigné ; ce Point eft quadruple , & pour avoir (ês Tangentes , il fcut égaler à
zéro le quatrième Rang , qui contient les termes «+, «'z, uuzz , *z' , z4; &
ainfi de fuite. tig. isa. Exemple* On propofé la Courbe repréfentée par Téqu :
 $y^* - 4*yW2 + \$***yy - 2xxyy * \{ * ^{axxy}^i + 6axyy - 1 i^*axy^*J^2 +$
 $2X^* - 1 oaxi + 1 qjtdxx - 2«'x==? o/j$. Si Ton cherche en général la
Tangente de cette Courbe pour un Point quelconque , on trouvera que le
premier Rang de la Transformée donne cette équation $(4/ - \sqrt{2ayyy}/2 4^*$
 $\sqrt{6a*y - * \backslash xxy > \backslash * ^{axx}^2 4^* \sqrt{2axy - 1 2aax \backslash j^2 }) zz 4« C - \hat{u}fXyy +$
 $\wedge axyy/2 *h 6ayy - 1 2aayyj2 4< Sx' - l0ax\% + 2\%a sx - 2a1)z$. Mais fi
l'on demande en paiticulier la Tangente du Point qui répond à rabfcilTe a &
à l'ordonnée a 1/2, [car s (ubftitué pour x dans Péquation propofée la change
en $y^* - 4*^2-11 2aayy - 8*V2 + 4*4 = o$, qui n'a qu'une feule racine, ■
Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 19.23% accurate

DES TANGENTES. ' 4S1 f<(o)«3z + (— 2 4)z'. *Ge :Rang
 égalé à zéro donne , en divilant par — 24, z' — uuz= o , qui a trois racines
 z=o, eBf, z = — * , dont la première fait connoître que l'Axe des ordonnées
 cil une Tangente , & les deux autres indiquent des Tangentes qui coupent en
 deux également les angles des coordonnées. 19?. Il seroit inutile de
 multiplier les Exemples. Mais il est à propos de remarquer , que, (clon le
 Principe du §. 1 8r> , ce même Calcul nous "met en état de juger si un Point
 , assigné ailleurs qu'à l'Origine , est un Point d'Inflexion simple, double,
 triple, ou &c. par le nombre des Rangs supérieurs à celui qui a donné
 l'équation tangentielle , lesquels s'évanouissent par la substitution des
 valeurs de » & z; ou ce qui revient au même, par le nomIntroà.à fdxalyfe
 des lignes Courbes. P p p bre Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 21.79% accurate

482 DE LA METHODE Pl. xx. bre des Rangs que cette équation peut diviler. » deux ordonnées, égales Tune à 44, l'autre à — 4 a. On demande si ces Points (ont Points d'Inflexion ? On cherchera d'abord l'équation tangentielle générale , qui est — (k2ay)u + (\$x* — 6ax) z = o , qu'on rendra particulière à ces Points, en mettant pour x la valeur 4*, & pour y les valeurs de 40. Par cette substitution elle se réduit à =p %omu 4-. 2^aaz=-o , ou u =+: \$z = o. Donc, en ces Points , la position de la Tangente est telle que le Sinus de l'angle qu'elle fait avec les ab(cis(Tes est triple du Sinus de l'angle qu'elle fait avec les ordonnées. Ensuite, pour savoir si ces Points sont Points d'Inflexion , on calculera le fécond Rang de la Transformée , qui est — (*)uu ^{(o)w+(jx - — 1 a) zz y ou , mettant 4 a pour x , — atm + yami. Or ce. Rang est divisible par l'équation tangentielle »=pjz = o, ou , ce qui est la même chose , il di/paroît si au lieu de * on substitue (à valeur =fc ;s, prise de l'équation tangentielle. Donc les Points dont il s'agit ont une Inflexion. Mais c'est une Inflexion simple , puisque le troisième Rang de la Transformée ne confine que dans le seul terme z* , qui n'est pas divisible par u r«: 15t. Exemple IL Soit la Courbe exprimée par PéquL xxy — bbx — a* = o . On en détermine la Tangente en général par l'éq : (xx) u (2xy — bb) z= o , qui fournit le premier Rang de la Transformée. Mais si on prend l'abscisse #== — , à laquelle répond l'ordonnée y=t E^=-]— — , , l'équation tangentielle se réduit XX c, 4 ». . .

- . . • _ pour Digitized by Google

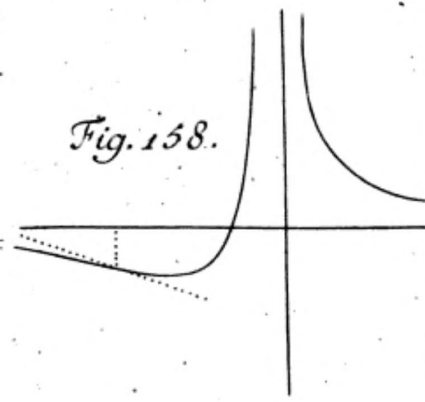
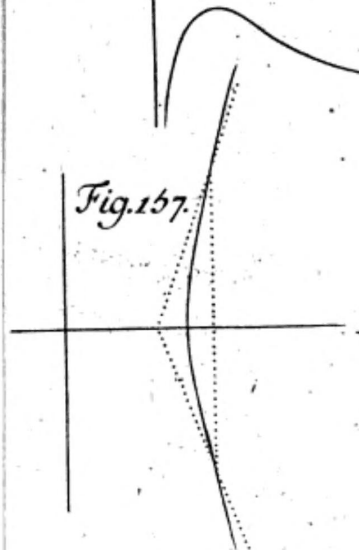
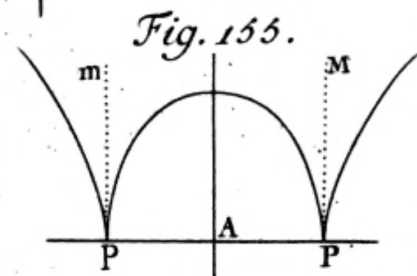
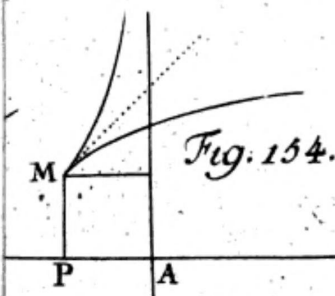
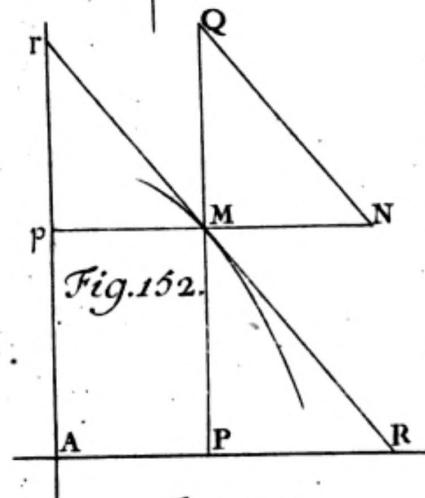
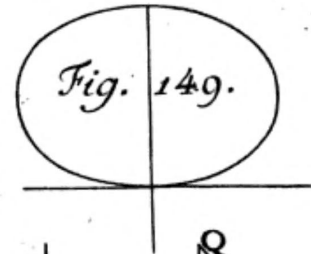
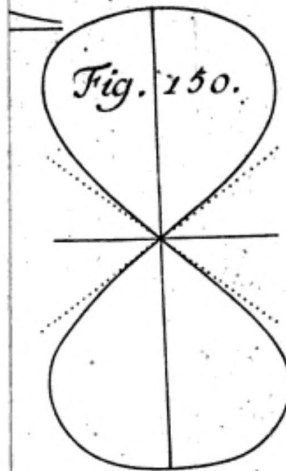
The text on this page is estimated to be only 17.40% accurate

DES TANGENTES. N 4*3 İTîî* Pour ce ^olnt-h , à ~- u 4* { z = o , ou z + ^jr- « ?L* = 0. On demande, fi, à ce Point , la Courbe a une Inflexion r On cherchera donc le fécond Rang. C'est (o)*« + (2x)«z-H^zz, qui s'évanouît quand on écrit — — pour x , — ^ pour > , & p- » pour z; ou, ce qui revient au même, ce Rang (o)** (2x)*z + 0)zz, en mettant pour x Se y leurs valeurs, fe réduit à — ~ m% — ~* zz , qui est divisible par ié27 a6 quation tangentielle z >b u = o . Donc le Point afligné a une Inflexion. Mais c'est une Inflexion fimple ; puisque le troifié'me Rang qui n'a que le feul terme * z z , n est pas divisible par l'équation tangentielle. Exemple III. La Fig. 149. est celle de la (be defignée par Péq : y* 4- 2xxyy + x+ — 4 a y1 — Cour♦f. Uayy — ^y — o [§. 1 86. Ex. IV]. On demande quelle est la Tangente & la nature du Point qui a o pour abscille , & 2 a pour ordonnée j? U est aife' de voir que ce Point elt un de ceux de la Courbe. Le premier Rang de la Transformée est (4^' + qxxxy I2*yy — 44XX-J- \ 6aay — 8*')»•+•(4x^+ -4x' — « &axy) z, lequel, mettant o pour x & 2 n pour y , donne l'équation tangentielle (8*») u.^ (o)z ==0, ou 8 a au = 0, dont la racine u~o montre que la Tangente est parallèle aux abscisses. Le fécond Rang (6yy~i-2xx — I2ay + %aa}tm +(^~^) uz * C 6x* — 4/îy) zz , ou , écrivant o pour x & 2 * pour ^ , (%aa)tttt 4-(o)*a + (o)zz , foit %aatTTT , dhparoit quand on P p p 2 fubftituë

The text on this page is estimated to be only 18.52% accurate

484 DE LA METHODE ¶l. xxi fubftituc à « fa valeur o. H en eft de même du troifié- Cb.xi -x If — -a §'»*J' me Rang($4j^{\wedge} - 4^*$) «' -f (J) uuz + (" _<.) *zz 4-(4*)z'> ou*, $4^{\wedge} \ll J + 4/i \ll 2ii$. Mais le quatrième (i)w4 *4/ (2 ~)uui z 4* (1)z+ ne dilparoît pas par la lùbllution de o pour u. Donc puifque l'équation tangentielle $\# = 0$ divife les deux Rang fupérieurs à celui qui donne cette équation , & ne divife pas le troificme, le Point dont il s'agit eft un Point de Serpenteront. • Exemple -I-V On demande la nature des Points . de la Courbe exprimée par l'éq : $y^* - 4a\} 1 - \%aayy + 4X^* tg. ijj?. _ - \%tsxxy/2 -4- 8^*4 = o$, qui font fur l'Axe des abfciffes. Si on fait $y=.o$, on réduit l'équation propofée à $4X^4 - \%aaxx\sqrt{2} -+-8^*4=o$, qui a deux racines doubles, $x = + * \sqrt{V}^* i^* = - a \sqrt{V}2$. Pour avoir les Tangentes des Points qui répondent à ces abfciffes & à l'ordonnée zéro, on transformera l'équation de la Courbe [§. 1 87] , & dans le premier Rang ($4/ - \sqrt{2}ayy - \sqrt{6}aay)u + (i6xJ - i6aax\sqrt{2})z?$ on mettra o pour .y & $z^{\wedge}yV2$ pour x, ce qui le réduit à $(oJ \ll -H(o)z$. Les Points, dont il eft queftion , font donc des Points doubles ; & pour en avoir les Tangentes , il faut calculer le tecond Rang ($6 y y - 1 2ay - Saa) uu -4-(o)\#zHh(24^{**} 8///\gg v/2)^z$ de la Transformée. En mettant, dans ce Rang, pour x & z leurs valeurs, on a l'équation tangentielle — $\%aaau - \sqrt{i6}aaizy/z \sim o$, ou un — $2ZZV/2 = o$, dont les racines $u - z^{\wedge}2^{\wedge}2=0$, «fz^ro déterminent les Tangentes. Mais puis qu'on demande fi les Branches, qui fe croifent en ces Points doubles , y font infléchies; , on cherchera le Rang fupérieur, qui eiYle troifième , ($47 \gg - 4^*)^* + (o)uuz + (0) \gg zz + (i6x)z'$, ou, mettant o pour y & $z+ZMy/y/i$ pour x, — $^{\wedge}au\%^{\wedge}xzi 6a 'yV^* \gg$ & l'on examinera ce que ce Rang devient , quand , au. Digitized by

I Digitized by Google



Digitized by Gooqli

The text on this page is estimated to be only 24.43% accurate

DES TANGENTES. 48< Crt.xr. au lieu de « on substitue les valeurs y ou z dans l'équation tangentielle. On trouvera que si dans $4x^2 + y^2 = 1$, on substitue $4x^2 + y^2 = 1$, ce Rang s'évanouit, mais si l'on substitue $z^2 + y^2 = 1$, il se réduit à $2x^2 + y^2 = 1$. Au contraire, si, dans l'équation $4x^2 + y^2 = 1$, on substitue $z^2 + y^2 = 1$, on a une Inflexion. Au reste les Inflexions des Branches A B, a b, sont simples. Car le quatrième Rang (t) // $z^2 + y^2 = 1$. (o) $z^2 + y^2 = 1$, ne disparaît point, lors qu'à u on substitue $z^2 + y^2 = 1$, mais il se réduit à $2x^2 + y^2 = 1$. 194. Les mêmes Principes mènent à la Solution des Problèmes inverses de ceux qu'on vient de résoudre. Tel est celui-ci. L'équation d'une Courbe étant donnée, trouver les Points de cette Courbe, où la Tangente fait, avec les abscisses ou avec les ordonnées, un angle donné. Pl. XX. L'Angle PMR, que la Tangente PR fait avec les ordonnées, ou l'angle pMr qu'elle fait avec les abscisses, dépend du rapport des côtés P M, P R du triangle PMR, ou des côtés pM, pR du triangle pMr, c'est-à-dire, du rapport des droites M Q, M N, lequel est le même que celui des variables u, z dans l'équation tangentielle générale Ppp 3 de Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 23.86% accurate

486 DE LA METHODE §t.xxi. de la Courbe [§. 187]. Si donc cet angle PMR , ou Cn.xi pMr, est donné , le rapport de u à a- est donné. Qu'on exprime ce rapport donné par les lettres h : l. On substituera donc dans l'équation tangentielle b pour u & / pour z , & on aura une équation , qui , avec celle de la Courbe , détermine les valeurs de x & de y , c'est-à-dire , la position du Point, ou des Points, cherchez. Un (eul Exemple éclaircira cette Règle. On demande figi 160. les Points de la Courbe désigné par Pég : $aayy + bbxx - aabb = 0$, où l'ordonnée est à la foûtangente comme h à /. L'équation tangentielle est $(2aay)u \gg (2bbx)z = 0$, ou, mettant h pour u & / pour s, $2aaby \leq 2bbx = 0$; ce qui donne $y = - \frac{h}{x}$. Substituant cette valeur dans l'équation de la Courbe , on la transforme en $b^2 II - j^{xx} + bbxx - aabb = 0$ d'où l'on tire $x aab M \_ bbl - \frac{bb}{l} \text{ Donc } ^{--} = [x =]:7? y/ibbl +) ' *lé " - 1 sl(bbl+aabh) ' aa bb$ Ainfî x: y — — aab :bbl= j : -j- . Si donc on mène dès l'Origine une Droite qui fasse avec les Axes des angles tels que $x : y = - : ^$, cette Droite rencontrera la Courbe aux Points demandés. Mais si l'équation proposée eut été $aayy - bbxx - aabb = 0$; on auroit trouvé , par un Calcul (emblable , $K = ^{Mi} - aabb) > \& y^{vm} ^{hT}$; valeurs qui deviennent impossibles , quand $aabb > bbl$, quand $b:l > b:a$. On ne fauroit donc mener à cette Courbe aucune

The text on this page is estimated to be only 28.67% accurate

DES TANGENTES. . 4S7 Ch. xl aucune Tangente , qui fâTe
avec les abfcîfles un angle Pl.xxl plus aigu que celui que fait la Droite
représentée par 1 cq: 1

The text on this page is estimated to be only 27.28% accurate

488 DES PLUS GRANDES ET DES PLUS PETITES $P_i \sim x X_i$.
donne cette équation, n'a aucun terme dans z . Ch. xi Afin pour avoir les
Maxima ou les Minima des ordonnées S^* données, on cherchera le premier Rang
de la Transformée qui résulte de la substitution $dy + u k y y + dV + z$ à $\#$, &
on égalera à zéro le coefficient de z dans ce premier Rang. Cette équation
combinée avec celle de la Courbe, donnera les valeurs de x & x' , qui
répondent aux Maxima & Minima d'ordonnées. Et pour avoir les Maxima &
Minima d'abscisses, on égalera à zéro le coefficient de x dans le premier
Rang de la Transformée, & on combinera cette équation avec celle de la
Courbe, pour avoir les valeurs cherchées de x & y . Ceci suppose que les
coefficients de $\#$ & de z ne s'évanouissent pas ensemble. Car si les valeurs de x
& de y , qui rendent l'un de ces coefficients égal à zéro, font aussi
disparaître l'autre; le Point est un Point multiple [§. 171], dont l'ordonnée
ou l'abscisse ne sont pas des plus grandes ou des plus petites, ou ne le sont
que par hasard. Il faut donc examiner si la supposition qui anéantit un des
deux coefficients de u ou de z , n'anéantit point aussi l'autre. Il faut encore
examiner si la racine 0 , ou $z=0$, ne divise point le second Rang. Car alors le
Point trouvé feroit un Point d'Inflexion f §§. 1 8

The text on this page is estimated to be only 25.26% accurate

ABSCISSES OU ORDONNÉES. 489 Cn. xi coordonnées, étant un Point ordinaire ou un Point de pl.xxj. §. t^ee. Serpente ment , ce Point est un Maximum ou un Minimum. Il n'est ni l'un ni l'autre , mais un Point d'Inflexion visible , si la racine $y=0$, ou $z=0$, divise un nombre impair de Rangs supérieurs à celui qui a donné l'équation tangentielle. Faute d'avoir fait attention à ces deux Remarques , des Géomètres ont pris pour des Points de Maximum ou de Minimum , des Points qui n'ont pas ce Caractère , mais qui étoient ou des Points multiples ou des Points d'Inflexion ; & d'un autre côté , on a élevé des Objections contre une Méthode semblable à celle que nous proposons ici , lesquelles s'évanouissent par ces considérations. Exemple I. On demande les Maxima ou les Minima de la Courbe exprimée par l'éq : $yy+xx^2+by-ax=0$. Si on substitue $x=y^2$ à x & $y=u$ à y , le premier Rang de la Transformée sera $(2y-f-b)u + (2x-a)z$: Le coefficient de z , égalé à zéro, donne $x = f^2$, & cette valeur de x , substituée dans la Proposée , la change en $yy^2+by-af=0$, d'où l'on tire $y = -\frac{b \pm \sqrt{b^2+4af}}{2}$. Ces valeurs de y , substituées dans le coefficient de u , ne le font pas disparaître. Donc l'abscisse $x = f^2$, & les ordonnées $y = -\frac{b \pm \sqrt{b^2+4af}}{2}$, donnent deux Points M, m, qui sont les Maxima des ordonnées. Pour avoir ceux des abscisses , on égalera à zéro le coefficient de u . Il donne $y = -\frac{b}{2}$. Cette valeur (substituée dans l'équation de la Courbe , la transforme en $xx-ax-\frac{b^2}{4}=0$, d'où l'on tire $x = \frac{a \pm \sqrt{a^2+b^2}}{2}$. Et ces valeurs , substituées dans le coefficient de z , ne le font pas évanouir. Donc l'ordonnée $y = -\frac{b}{2}$, & les abscisses $x = \frac{a \pm \sqrt{a^2+b^2}}{2}$ = QN , btford. à l'Analyse des Lignes Courbes. q &

The text on this page is estimated to be only 23.88% accurate

490 DES PLUS GRANDES ET DES PU/S PETITES Pt. xxi & x
 $= \pm * \text{ — } i t / (\acute{e} J +) = Qn$, donnent deux Points ch. xi N , n, qui font les
 M.txima des abiciffes. Mais il faut, pour cela, que ces quatre Points M, m,
 N , n , ne (oient pas des Points d'Inflexion ; comme en effet ils ne le font
 pas. Car le fécond Rang de la Transformée, qui eft «w-J-zz, ne peut fe
 divifer par Je premier , qui eft $(2 \} 4 - ^) u 4 - (2 * 4 - a) z$, quelque
 fupposirion qu'on fafle fur les valeurs de y & de x. On fait d'ailleurs qu'une
 Courbe du fécond Ordre ne fauroit avoir d'Inflexions [§. 16\$]. Et comme la
 Courbe en queftion eft un Cercle , [§. 1 85. Ex. I] , on peut aifément s'at
 furer que le Calcul a véritablement déterminé les plus grandes abfciffes &
 ordonnées. Exemple II Quels font les Maxima & les Afmima de la
 Parabole représentée par l'éq : $a y . \text{ — } x x = o$. Le premier Rang de la
 Transformée eft $(\text{ — } a) u \text{ — } (2 x) z$. Le coefficient de z , égalé à zéro ,
 donne $x = 0$, qui fubftitue' dans la Propofée donne $y = zO$. Comme ces
 valeurs d'x & d'y ne font pas évanouir $(\text{ — } *)$ le coefficient d'/y, on conclura
 qu'à l'Origine , la Tangente eft parallèle aux abiciffes : ce qui eft, en 3uelque
 forte , un Minimum d'ordonnées ; puifque l'ordonnée y eft zéro, & qu'il n'y
 en a point de négatives. Mais le coefficient au, égalé à zéro , donneroit $a = 0$
 : ce qui eft atfurde. Donc la Parabole n'a point de Tangente parallèle aux
 ordonnées. Elle n'a donc point de plus grande , ni de plus petite abfciffe.
 Elles vont , * en effet , depuis le zéro en croiffant jufqu'à l'infini pofitif , &
 en décroiffant, jufqu'à l'infini négatif tig- itff. Exemple III. On propofè la
 Courbe que repreiènte l'éq : $xxy \text{ — } a \backslash y \text{ — } ibx = zO$. Le Digitized by Googld

The text on this page is estimated to be only 23.38% accurate

ABSCISSES ET ORDONNÉES. 491 Ch. xi. Le premier Rang de la Transformée étant $(X^2 - 2\sqrt{y}Z + Pl. x^2 i. 196. 4.(2\sqrt{7} - bb)z$; si on cherche les Maxim* d'ordonnées , on égalera à zéro le coefficient de z , & on aura $bb x = \sqrt{y}$. Cette valeur , substituée dans l'équation de la $b^* b^* t$ Courbe, donne $ayy - \sqrt{y} = 0$, ou $\sqrt{y} = -y/(bA: 4^*)$. Donc $x[-] = -1/iabb$. Ces valeurs , substituées dans $xx - iay$, coefficient d' z , ne le font pas évanouir. Ainsi le Point qui a pour coordonnées $i \gg 1, + x = -\sqrt{y}/iabb$, & $y = -y/ -$, n'est pas un Point multiple , mais un Maximum d'ordonnées , pourvu que ce ne soit pas un Point d'Inflexion. On cherchera donc le fécond Rang de la Transformée, ou du moins le coefficient du terme z $z >$ auquel ce Rang (est réduit par la valeur d' z prise dans l'équation tangentielle $z=0$. On trouvera que ce coefficient est jy , & qu'ainsi il ne s'évanouit pas par la substitution de $- \sqrt{y}$ à y . Donc le Point trouvé n'est pas un Point d'Inflexion , mais un vrai Maximum d'ordonnées. Pour avoir les Maxima ou Minima d'Ordonnées , on égalera à zéro , $xx - zay$, qui est le coefficient d' z , & x on aura $y = -a^2$, valeur °. qui transforme la Proposée en $3C^4 X + 2a^4 a - \sqrt{y} = 0$ ou $x + z = \sqrt{y}abbx$, qui a deux racines , $x = 0$, $x = Z/4^*bb$. Ces valeurs substituées dans l'éq. -j - donnent, la première $y = 0$, la féconde Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 20.48% accurate

492 DES PLUS PETITES ET PLUS GRANDES Pt. XXI. i 9 h*
 ru vt $y = y/ -$. Et ces valeurs , substituées dans $j^2 Xj$, — 66, ne le font point
 disparaître. Substituées aussi dans le fécond Rang , que l'équation
 tangentielle $z = 0$ réduit à $auu = 0$, elles ne le font pas évanouir. Donc
 l'Origine , où $x=0$, & $y = 0$, & le Point où $* = sj^2 bb$ & $jr = ^$ —, ne font ni
 des Points multiples, ni des Points d'Inflexion , mais de véritables Mi mm a
 d'abscisses. Exemple IV, On veut chercher les Maxima ou Minima. \6e. Minimum
 de la Courbe désignée par Péq : $a/ > \{ * bx^* - f'x = 0$. Le premier Rang de
 la Transformée est $\{ ^{ayy} \} u + (ibxx - S) z$. Si on égale à zéro le
 coefficient de a , on aura $x = rtv/^ >$ & par l'équation de la Courbe $y = —$
 V'^{rjji} valeurs qui réduisent l'équation tangentielle à $rfc: \gg ^{^^} = ro$ ou $* = 0$.
 Donc les Points qui ont , Pun pour abscisse $+ y7^$ & pour ordonnée $+ ^{^b}$;
 l'autre Pour abscisse $— V-j$ & pour ordonnée $—$ ont leurs Tangentes
 parallèles aux abscisses. Ces Points ne font pas Points d'Inflexion. Car le
 fécond Rang de la Transformée , réduit , [puisque $u = 0$,] à $(s6x)zz$, ne
 disparaît pas, lors qu'à x on Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 25.53% accurate

ABSCISSES ET ORDONNÉES. m substitue + ou $-y/j-y$ Ce font donc des Maxima PtXXI« d'ordonnées. Mais, si on égale à zéro le coefficient d' x^j , pour avoir les Naxima ou Minima d'abscisses, on trouvera $y = 0$, & par l'équation de la Courbe $bx^j - cx = Q$, qui a trois racines $x = 0$, $x = \sqrt[3]{Q/b}$, $x = -y'$. Ainsi l'Axe des abscisses rencontre la Courbe à l'Origine & à l'extrémité des abscisses $+y^j - y \gg -\sqrt[3]{y^j}$ & ces Points ne font pas multiples, puisque ces valeurs de x n'anéantissent pas le coefficient $bxx - c$ de z . Donc dans ces Points la Tangente est parallèle aux ordonnées. On ne doit pourtant pas encore affirmer que ce font des Maxima ou Minima, puisqu'ils peuvent être Points d'Inflexion visible; ni le nier, avant que de (avoir si ce ne (ont point des Serpente mens. On calculera dans le fécond Rang de la Transformée, réduit au terme uu , & on trouvera (3 que $j=0$ fait disparaître. Ainsi les Points alignés font Points d'Inflexion. Et ce ne font pas des Serpente mens; car le troisième Rang Ça) ne s'anéantit point, par la substitution des valeurs c/at & d'^j . Les Points en question (ont donc des Points d'Inflexion visible, & non pas des Maxima ou des Minima d'abscisses, quoiqu'ils aient leur Tangente parallèle aux ordonnées.

Exemple Jf. On propose la Courbe, que les An- H* *W ciens ont appelée Gfblide, dont l'équation est $xyx^* - iaxx + iaax a1 = 0$. Le premier Rang de la Transformée est $(2xy)a + ($

The text on this page is estimated to be only 23.66% accurate

494 DES PLUS GRANDES ET DES PUIS PETITES Pl. xxi cîent
 de % , $yy + $xx - 6ax + $44 = 0$; & fubftituant , Ch. 30. dans l'équation de
 la Courbe , au lieu de x^4 , (à valeur $$x = 44$, on aura $-$x^4 + 6axx - $44x$
 $+ 3c' laxx$ J? $iaax - a1 = 0 = (x - -ay (- 2x - 4)$, qui a trois racines x
 $- - £4$, xzr: a , $x = a$, La première fubftituée dans $yy > \backslash * gxx - 6ax * \{ *$
 $344 = 0$, donne $yy \sim - 6/44$, où y eft imaginaire. Ce Point n'eft donc pas
 même un des Points de la Courbe. On pourroit le nommer un Maximum
 imaginaire , mais la confidération de ces Maxima n'aboutit à rien , que je
 lâche. L'autre racine $x = a$, qui eft double , fubftituée dans $y y 4 \ll 3 xx - 6$
 $4 * 4 - $44 = 0$, donne $jy - 0$, & cette valeur d'jr anéantit le coefficient icy
 de u . Donc elle indique un Point multiple à l'extrémité de l'abfcifte $x = a$.
 On connoitra les Tangentes de ce Point multiple, en cherchant le fécond
 Rang , qui eft $(x) uu 4 < (2^u) u^0 + (?x - j-i)zz$, & y fubftituant à x & y
 leurs valeurs a & 0 , ce qui le réduit à auu . Puisque ce Rang ne s'anéantit pas
 , le Point en queftion n'eft qu'un Point double [§. 17 r], & en l'égalant à
 zéro , on a une équation, qui n'a qu'une (èule racine double $= 0$. D'où l'on
 conclut [§. 181] que ce Point n'a qu'une Tangente, mais qui touche deux
 Branches. Ainfi , quoique cette Tangente foit parallèle aux ablettes , Je
 Point qu'elle touche n'eft ni un Maximum , ni un Minimum d'ordonnées.
 197. La re'solution du Problème de Maximis & Minimis eft une des plus
 utiles & des plus agréables inventions de l'Analyfè. Elle fert à trouver , entre
 une infinité de grandeurs qui ont entr'elles un raport déterminé par une Loy
 confiante & qui peut s'exprimer par une équation, celle qui eft la plus
 grande, ou la plus petite, & en général celle qui remplit le mieux certaines
 vues. Toutes ces grandeurs , ou ce qui en réfulte fuivant

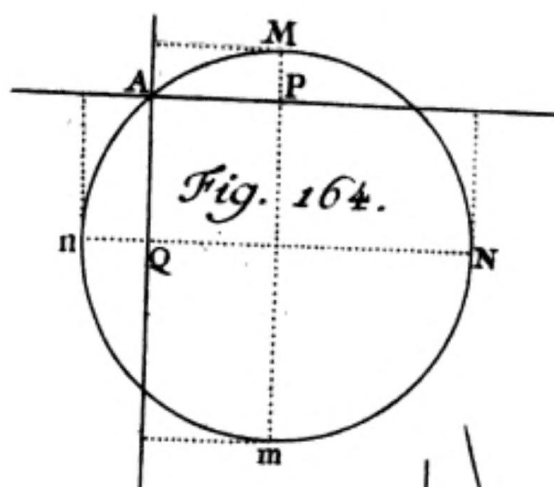
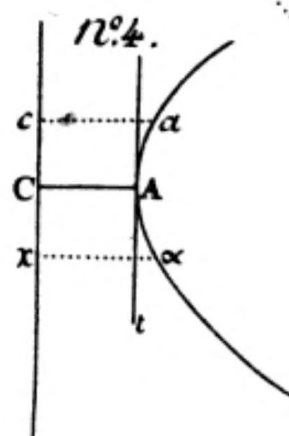
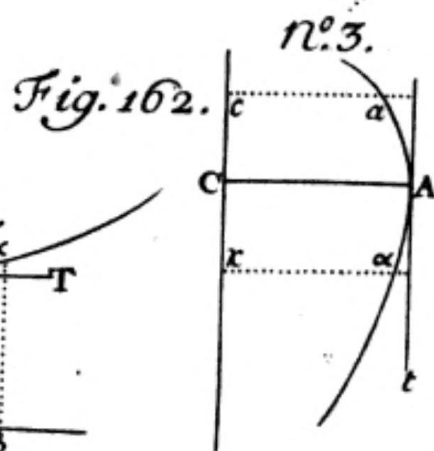
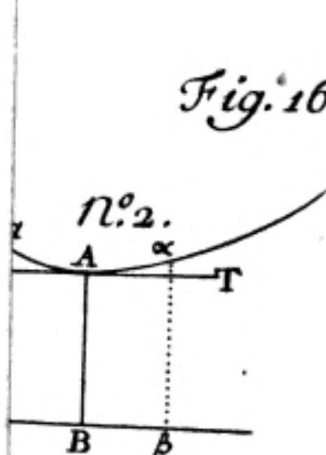
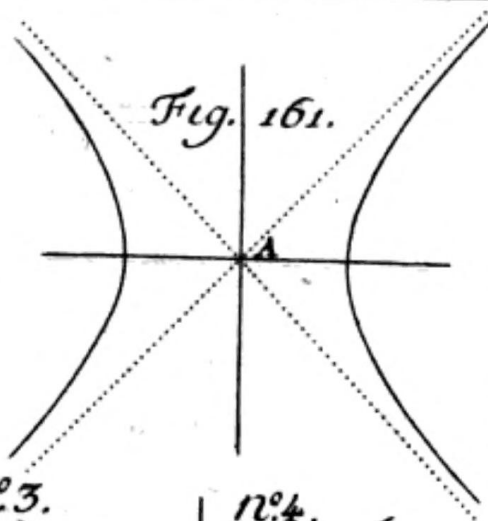
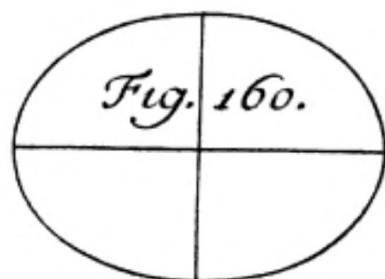


Fig. 166.



Fig. 167.



The text on this page is estimated to be only 22.00% accurate

Digitized by Gqpgffc

The text on this page is estimated to be only 25.12% accurate

ABS CISSES ET ORDONNEES. 49 j Ch. xi. vant le but propofé , peuvent être repréfentées par les plus anciennes ordonnées d'une Courbe , qui fera algébrique fi la Loy xxii. de leurs rapports s'exprime par une équation algébrique ; & il ne s'agit que de déterminer la plus grande ou la plus petite de ces ordonnées. Ceci s'éclaircira par deux Exemples , l'un très fimple , l'autre un peu plus compofé. Exemple I* On demande quel eft le plus grand Rectangle qu'on puiffe inferire dans un Cercle donné ffc 16t. ADBE. Soit QRST le Rectangle cherché. Si on mène les diamètres AB, DE parallèles aux côtés du Rectangle , il eft clair qu'ils le diviieront en quatre Rectangles égaux & femblables , tels que C P Q^N . Donc le quadruple de CPQ^N eft le plus grand Rectangle qu'on puiffe inferire dans le Cercle : c'eft un Maximum. Et C P QN eft mefuré par le produit de CP & de PQ^ qui font les coordonnées perpendiculaires du Cercle , l'Origine étant prife au centre C. Soit r le rayon, x l'abfciffè CP, l'ordonnée PQjcra $V(rr - xx)$ [§. 7]. Ainfi $xy'O - xx$, produit des coordonnées CP, PQ^, repréfente le Rectangle CPQN, & fon quadruple $4xy/(rr - xx)$ le Rectangle QJIST. Cette grandeur $4xV(rr - xx)$ doit donc être la plus grande entre lès (emblables , c'eft-à-dire , qu'on cherche la valeur d' x qui rend $\pm x)/(rr - xx)$ un Aftwrum. Pour la trouver , on fupposera une lettre y proportionne à $4xy'(rr - xx)$, égale, par exemple , à $4x^{(rr x^*)}$ & on iminera ,a Courbe CMB reu préfentée par l'éq : $y = >$ ou $*W \sim rrx + x^4 = 0$, deforte que l'ordonnée PM fera proportionelle

Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 24.94% accurate

DES QUESTIONS Pianchi nelle au Re&angle QRST dont le côté OT parte par c*xi. xxii. l'extrémité P de l'abscisse CP[x]. Ainsi l'abscisse CP qui donne la plus grande ordonnée PM, détermine le plus grand Rectangle QRST. Pour avoir cette abscisse, on transformera l'éq : $ay^2 - rrx^2 = 4x^4$ = 0, en substituant $x^4 = z$ à x & $y + u$ à y . Le premier Rang de cette Transformée est $(2ay)u - (2rrx + 4z)z$. Egalant à zéro le coefficient de z , on aura $4x' - irrx = 0$, qui a trois racines $x = 0$, $x = +\sqrt{r}$, $x = -\sqrt{r}$. La première, substituée dans l'équation de la Courbe, donne $y = 0$. Mais cette valeur d'y fait aussi évanouir le coefficient dV dans le premier Rang de la Transformée. Elle marque donc, non un Maximum, mais un Point multiple à l'Origine (§. 171]. Les deux autres valeurs d' x , $\pm\sqrt{r}$ substituées dans la proposée, donnent $y = \pm\sqrt{r}$ ou $y = -\sqrt{r}$. Cette valeur d'y n'anéantit point le coefficient d'#. Elle donne donc le Maximum M, dont l'ordonnée PM = $\sqrt{r}$, & l'abscisse CP = $\sqrt{r}$. Ainsi le plus grand Rectangle qu'on puisse inscrire dans un Cercle, c'est le Carré. Car CP [x] étant $\sqrt{r}$ PQ^ [$\sqrt{r}$ - xx)J est aussi $\sqrt{r}$. Donc CPQN, & par conséquent QRST, est un Carré. Ce qu'on démontre aussi facilement dans la Géométrie élémentaire. ** 169 Exemple II Les deux Points A, B étant donnés à égales distances du centre C sur le diamètre HI du demi-cercle HLI ; on demande quel est le Point E de la demi-circonférence, duquel menant les trois droites EA, EC, EB, la différence des angles AEG, BEC est la plus grande ? Soit Digitized by Gqggjf

The text on this page is estimated to be only 21.32% accurate

DE MAXIMIS ET MINIMIS. 497 Ch. XL. Soit E le Point
cherché, & Ci on mène la Droite EF, Plah<-« qui fait avec EC l'angle CEF
égal à CE A, l'angle FEB xxUfera la différence des angles AEC, BEC; &
doit par conféquent être un Maximum. Mais comme la grandeur d'un angle
ne (è calcule pas aifément, & que le plus grand angle a le plus grand Sinus
& réciproquement, on cherchera le Point E, qui donne l'angle B E F dont
le Sinus eft le plus grand. Abaiflânt du Point B fur EF la perpendiculaire
BG, elle eft le Sinus de l'angle BEF, BE étant le Sinus total. Il faut donc que
la railon de BG à BG BE, ou la fraction g-g foit un Maximum. Soit le raïon
CE = r, CA ou CB=*, CD[PabfciflTe du Point cherché E] =x, fon ordonnée
DE = $\sqrt{(rr - xx)}$. Soit de plus CF = /. Donc AE .,: VCAD1 +DEI)=
 $\sqrt{r^2 - x^2}$, BE= $y/(BD + DE)$ = $J(aa + rr - 2*x)$, EF =
 $\sqrt{(FD + DE)} = \sqrt{(r^2 - x^2)}$. Et puifque CE coupe en deux également
l'angle AEF, on aura [Eucl. VI. §] AE: EF=s AC:CF, ou AEI:EF,==ACI:CFi,
&, mettant les valeurs analytiques, $aa^4 * rr > i^* 200c : rr^4 * // - 2xt - aa:tt$
ou, égalant le produit des extrêmes à celui des moyennes, $aatt^4 \ll rrtt +$
 $2axtt z=z, aa rr -f. aatt vaaxt$, foit $2axtt - 2 aaxt z=aarr - rrtt$, &, divifânt
de part 8c d'autre, par $a^{*ty} 2axt = arr - rrt$, ou $/ - . -$, $a rr - - - . 2 a$
 $a x m ; .$ Donc BF [4 — t] = ■, & EF: $rr + 2ax L J rr + 2ax C. -1 aa + rr^4 *$
 $2ax . , - rr^{tt} - 2xt]z=.$, , st r\ BG étant per~ Qrr^{*2ax} r pendiculaire à E
F, les triangles rectangles BFG, DFE, qui ont l'angle commun .F, font
femblables, & donnent cette proportion $EF^* [aa + rr + 2ax t^]$. ED* r—
— Xici bitrod. à l'Analyfe des Lignes Courbes. R r r = BF* Digitized by
Google

The text on this page is estimated to be only 18.72% accurate

49« DES QUESTIONS FxxT =BP [, : BG*. Donc BG'=f^T^ fcl .
 BG* 4/rrxx 41V Bbr=r\^4Hrr+2^)(^+n' 2ax) r* * — x. — _ . — j£ qui doit
 être un Maximum. Car (*4 + rr)* 4

The text on this page is estimated to be only 22.14% accurate

DE MAXIMIS ET MINIMIS. 499^e Ctr. xi. — $zaaxx + rr(aa^*i < rr)$ — o . Ainfi lès quatre racines p^kche^{**7} font $x = , Ma — + irr), pcHLj x = Hr« V(\ddot{i}^+ —), x = — VC\hat{i}^f —)$ • Les ordonnées qui répondent à ces abfcifles, font $\hat{^:}^*, \hat{^:}^*: , > = — , , y = -y$. Les deux premières abfcifles & les deux premières ordonnées donnent deux Maxima ; les deux dernières donnent deux Mirùma , comme on le voit par la Figure de la Courbe tracée dans la F/g. 170. Mais ces Mimma n'appartiennent point au Problème propofé , & ne viennent ici que parce que l'équat : $\hat{^} sa 4rrxx — 4X —$ reprêTentc toute la Courbe. Pour la Queftion propoféc , il fuflît d'en confidérer la portion 2ui eft comprilè dans le Cercle HLI , puifque le Point , devant être pris fur la circonférence , ne peut avoir une abfcifle CD plus grande que le raïon. Les Maxim* cherchez (ont donc ceux qui ont l'abfciflTe $x = +$ ou $— >/(\aa + irr)$, & qu'on peut trouver ainfi. Qu'on décrive (ur le raïon C 1 le quarré C 1 N L ; qu'on mène la diagonale CN , & qu'on prenne fur cette diagonale, la partie' CM égale à AL, hypothenulè du triangle A CL, qui a pour bafe AC [a] , & pour hauteur C L [r 1 En fuite , qu'on abaiflè du Point M fur le raïon CI la perpendiculaire MD. Elle coupera la circonférence au Point cherché E. Car CN [Va rr]: Cl[r]=CM IVC ** + rr): CD [v" Ci" Hhi"-) J . On trouve de même , dans 1 autre quart de cercle HLC, le Point e, qui eft le Maximum dont l'abfciflc Cd= — $V^{\hat{i}}^{**}$ Rrr 2 198. Cei Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 25.68% accurate

5C0 DES LIMITES Pl*kchi 198. Ces deux Exemples fumTent pour faire enten- Cs.xl x*11' dre la manière d'employer cette Méthode dans les Cas . où on doit rappliquer. Les Livres qui en traittent en font pleins , & il est aisé de s'en proposer un grand nombre. Remarquons seulement que la détermination des Maxima & des Minima sert beaucoup dans l'examen du cours d'une Ligne , parce que ces Points , lors même qu'ils n'ont rien de singulier en eux-mêmes , ne laissent pas d'être des Points remarquables de la Courbe rapportée à Ses Axes. Car c'est à ces Points que viennent se réunir deux Branches de la Courbe, & souvent ceux où l'une des coordonnées cesse d'être réelle & devient imaginaire , ou réciproquement. Ayant donc trouvé les Maxima & les Minima d'abscisses , on peut les regarder comme des limites, entre lesquelles prenant des abscisses, on examinera quelles (ont celles dont les ordonnées (ont réelles , & puisque le cours d'une Courbe est continu [§. 19] , on fera voir que toutes les abscisses , qui se terminent dans le même intervalle , ont aussi des ordonnées réelles. Que si , au contraire , une seule abscisse d'un de ces intervalles a des ordonnées imaginaires , toutes celles du même intervalle ont aussi leurs ordonnées imaginaires. Et il en est de même , mutatis mutandis , des Maxima & Minima d'ordonnées *. « 70. Le tu Exemple sera celui de la Courbe que nous avons déjà considérée au §. précéd. Ex. II. Son équation est $4x^4 - Ax^3 - ax^2y + (aa + rryy = 0$. Puis qu'y n'y monte qu'au premier degré , chaque abscisse a une ordonnée : mais pour avoir les abscisses de chaque ordonnée , on cherchera les Maxima & Minima d'ordonnées. On a trouvé ci-dessus que c'étoient les Points qui ont pour abscisses & pour ordonnées $x = rfc$; $VC \hat{=} a + * R$ ol l e , Mm. de l'Acad. 1703. pag. 1 ja. . Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 24.53% accurate

DES ABSCISSES ET DES ORDONNÉES. §1. $V + \sqrt{rr} = x = tv/G + \dots$ & $J = \dots$. On se partagera donc l'Axe des ordonnées en quatre intervalles. Le premier depuis l'Origine, ou le zéro, à l'infini du côté négatif. Le second depuis l'Origine jusqu'à l'ordonnée $y = a$. Le troisième depuis l'extrémité de l'ordonnée $y = a$ jusqu'à l'extrémité de l'ordonnée $y = \dots$. Et le quatrième depuis l'extrémité de cette ordonnée $y = \dots$, jusqu'à l'infini du côté positif. On prendra une ordonnée dans chacun de ces quatre intervalles, & on examinera combien elle a d'abscisses. Ainsi prenant du côté négatif $y = -a$, l'équation de la Courbe se change en cette égalité $\dots$ $4x^4 - \dots = 0$, ou, divisant par $4a$, $x^4 - \dots = 0$, qui n'a que deux racines réelles, comme on le voit par le f 60, ou finalement par la résolution de cette équation à la manière de celles du second degré. On lui trouve quatre racines, deux réelles $z \pm i\sqrt{44} + y/(ir^* + i^{**})$ & deux imaginaires $\dots < 0 \dots = \sqrt[4]{4 + i^{**}} >$ Donc du côté des ordonnées négatives, chaque ordonnée n'a que deux abscisses, la Courbe n'a que deux Branches. Si on prend, du côté positif, dans l'intervalle entre 0 & a une ordonnée $y = a/9$ l'égalité fera $x^4 - (rr - f - \dots) x^2 - f - i C r / + aa Y = 0$, qui a quatre racines réelles $x = \pm \sqrt{2rr + aa} \pm \sqrt{f - i C r / + aa}$. Donc les ordonnées positives moindres qu' a ont quatre abscisses : la Courbe, dans cet intervalle, a quatre Branches. Dans l'intervalle entre a & y , on peut prendre pour y donnée Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 16.87% accurate

yoa DES LIMITES $PiJ^{TM}a Aa . r! t, ru \hat{u} \text{ ,, Ch. XL xxii.}$
donnée $\hat{=s-} + \text{---} 4$, & 1 équation de la Courbe ferag .pī. changée en cette
Egalité' $x^4 \text{---} (kaa + rr > \text{<---} + Wr^{aay} (\text{---} 4-f i) = o$, dont toutes les
racines $VC i \wedge \sim \wedge (\sim + * ' * \sim)$) font r^* imaginaires. Car la grandeur « ---
 $ia^* + lr^*$;, qui cl\ fous le figne radical , eft eOentieliement imaginaire , » /
 r^4 étant la négative du quarré de $\hat{a} a$. Donc , dans l'intervalle entre les
ordonnées a & --- , il n'y a point d'abfcifles & par conféquent point de
Courbe. Ce qui fait voir que les extrémités des ordonnées a font des
Maxima, & les extrémités des ordonnées y des Minima. Qu'on prenne enfin
, au-delà de la limite , une ordonnée a + ; & , pour cette ordonnée , l'Egalité
fera $*4 \text{---} \{aa + rr + \text{£} \} xx + k(irr + 4ay i) = o$, qui a quatre racines réelles
 $+J(\hat{a}a + \text{---})$, & $=fc 2 4^* \sqrt{G^{**} + rr + \sim}$. Donc dès l'ordonnée $\hat{a}$ jufqu'à
l'infini , chaque ordonnée a quatre abfciflès. Ainfi la Courbe a fix Branches
infinies, deux du côté négatif Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 24.14% accurate

DES ABSCISSES ET DES ORDONNÉES. 503 Ch:xl négatif & quatre du côté positif, dequelles il est aidé de PtANe« \$.u>8. voir, par les §§. 141 & 142, que deux font Paraboliques, & deux Hyperboliques, ayant pour Asymptotes les ordonnées des abscisses $z \pm r$, le long dequelles se joignent aufl les deux Branches qui se jettent du côté des ordonnées négatives. Exemple II Si on cherche les limites d'abscisses & d'ordonnées de la Courbe désignée par l'éq : $xy^2 - 2y^2 - ax^2 = 0$ on aura, pour le premier Rang de la Transformée., $(x^2 - 4)^2 + (a^2 - 4x^2) = 0$. Qu'on égale à zéro le coefficient d'a, pour avoir les limites des abscisses, on trouvera $y = 0$; valeur, qui change l'équation de la Courbe en $x^2 - 4 = 0$, qui n'a que deux racines réelles $x = 2$, & $x = -2$. Ainsi les limites des abscisses sont 2 & -2, auxquelles répondent les ordonnées 0, & a, comme le fait voir l'éq : $y = 0$. Donc l'Origine A, & le Point D [qui a pour ordonnée DC = a & pour abscisse CA = 2a] font les Points de la Courbe dequels la Tangente est parallèle aux ordonnées. Qu'on prenne des abscisses hors & entre ces limites 2 & -2. Qu'on prenne d'abord, par ex. $x = 1$ & l'équation de la Courbe sera transformée en $ay^2 - 2y^2 - a = 0$, ou $ay^2 - 2y^2 - a = 0$, qui a deux racines réelles $y = 1$ & $y = -1$. Donc chaque abscisse négative a deux ordonnées : la Courbe jette deux Branches infinies du côté des abscisses négatives. Qu'on prenne ensuite une abscisse entre 2 & -2, comme,

The text on this page is estimated to be only 23.03% accurate

504 DES LIMITES Plahche me , par ex. a ; ce qui transforme l'équation de la Cour- Ch.xt. XXUî been[^] — \ay[^] ^4 = 0 , dont les racines[^] zfc S- >»*• — 7 font imaginaires. Donc toute ablciflê pofitive, moindre que 2 a , n'a que des ordonne'es imaginaires , & la Courbe manque entièrement entre l'Axe des ordonnées & l'ordonnée CD. Enfin fi on prend une abfcide plus grande que 2 s , comme 4a , on réduira l'équation de la Courbe à y y — %ay 4< 2*tf = o , qui a deux racines réelles, 44 ==^14. Donc toute abfcifle plus grande que 2 m a deux ordonnées. Ainfi il part du Point D deux Branches qui s'étendent à l'infini du côté pofitif. On aura les limites des ordonnées , en égalant à zéro le coefficient de z , ce qui donne x = — , & par la fubftitution dans la Propofée a * = — 8 y , qui n'a qu'une feule racine y= — *a. Il n'y a donc qu'une limite, AE = — {a, dont l'abfcifle EF = — a [puifque yz=z — ia donne x[= — l — — 41] touche la Courbe. Qu'on prenne deux ordonnées de part & d'autre de cette limite — i a, par ex. a & — *, & l'équation de la Courbe le réduira à ces deux Egalités xx — ax — 2aa = 0, & .yx+ mx + 2aa — o. Les racines 2a & — 4 de la première font réelles : Les racines — ia^=^a√ — 7 de la féconde font imaginaires. Donc toute ordonnée qui dclend au-defifous de AE = — {a n'a point d'abfcifles. Mais toute autre ordonnée a deux abfciffes réelles. Ce qui s'acorde très-bien avec ce qu'on peut démontrer d'ailleurs fur le cours de cette Ligne. *** ,7i; Exemple III. Les limites de la Courbe défignée par IVq : x\yy — aaxxy >fré>f =zo fe déterminent en égalant Digitized by Googl

The text on this page is estimated to be only 21.82% accurate

DÈS ABSCISSES ET DES ORDONNÉES. foy Ch. xi. lant
 fuceflîvement à zéro les coefficients d'« & de s dans Planch< /. iy8. je
 premier Rang de la Transformée , qui est $(2x^2y - x^2L \text{ suixx}^\circ)u + (\$xxyy - 24axy)z$. L'éq : $2X^2y - d^2xx = 0$, qui donne les limites des abscisses, a
 deux racines, aa x as o , & $y = -$. La première suppose y infinie , ce 2 K
 qui montre que l'Axe des ordonnées est une Asymptote [§. r\$8]. L'autre,
 substituée dans l'équation de la Courbe , la réduit à $* = ^$, d'où Ton tire $y [=$
 $-] = \text{ti } 2X \text{ ép}$. Ainsi l'Origine A , & l'ordonnée CD [= , qui a son abscisse
 $AC = \sim]$ sont les limites des abscisses. Si on prend, au-delà de la première
 limite, $x = -b$, on aura l'Egalité $yy + ^ - W = 0$, qui a deux racines réelles
 $\sim \text{""}^{\wedge} v'(*4*4*4 \backslash$ Donc toute abscisse 2b négative a deux ordonnées. Si on
 prend , entre les deux limites , $* = -^7 >$ on a " aura l'Egalité $yy - -^4,$
 $-_0$, dont les racines $L^{\wedge}1 x \sim$ sont imaginaires. Donc la Courbe manque
 entre l'Axe AB & l'ordonnée C D. Enfin, si on prend, au-delà de la seconde
 limite, $x = -^$, on aura l'Egalité $yy - \text{irj}f\ll^*$ a deux racines réelles $-x -r$.
 Donc au-delà de Por10 b Introà. à l'Analyse des Lignes Courbes. S s s
 donDigitized by Google

The text on this page is estimated to be only 20.65% accurate

50£ DES LIMITE/ FtâxcBi i^TuiéZ CD \z Ceurbe 2 dtîX
franches infinies. Ch.xi xxii. L'g'q. .XXjyy — $2^{xy} = 0$, qui détermine les
limites $s^* l, f^*$ des ordonnées, a trois racines $^=0$, $x = 0$, & $x = 2—$, Les
deux premières indiquent que les Axes font des Afymptotes , & la troifième
donne, par l'équation de la Courbe , $y =$, d'où Ton tire $x = ^-$. Ainfi
POrigine A & le point E , [dont rabfciflê BE & l'ordonnée $AB = ^rJ$ font les
limites des ordonnées. Qu'on prenne, hors de la première , $y = — b$; on
aura l'égalité — $P = c + + *' >$ qui n'a [§.5P. V. i] qu'une feule racine réelle.
Donc toute négative n'a qu'une abfciflTe. Si on prend, entre les deux limites,
 yss^j^p , on aura l'Egalité — — — = $o\ xx-f-x^*$, qui a racines réelles [§.
59. V. § j; Donc toute ve, moindre que AB, a trois abfciflcs. Mais fi on
prend , au-delà de la féconde limite A0, $y = *-py$ on l'Egalité — $p^o-^^Hg$,
qui n'a [§. 59. VI. 1] qu'une» racine réelle. Donc les ordonnées pofitives ,
plus grandes que A B , n'ont qu'une abfciflTe. Cela s'acorde parfaitement
avec ce qui a été déterminé d'une toute autre manière [§.22] fur cette
Courbe. Exemple. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 21.34% accurate

DES ABSCISSES ET DES ORDONNÉES. J07 Cn TO, Exemple IV. Joignons encore l'Exemple de la * 19 ' Courbe que représente l'éq : $y^* - 2axy - \frac{a}{x} + x^4 = 0$ dont les ordonnées sont $y = \frac{a}{x^2}$, o, o, $\pm a^{1/2}$. C'est hors & entre ces limites qu'il faut prendre des abscisses, pour voir quels sont les intervalles où elles ont des ordonnées réelles, quels sont ceux où elles en ont d'imaginaires. Qu'on prenne d'abord une abscisse plus grande que $2a = AC$, comme $x = a$, & l'égalité $y^* - 2aay - \frac{a}{x} + x^4 = 0$, qui résulte de cette supposition, n'ayant que des racines imaginaires $\pm iy/(\pm j y^7 - 5) > 0$ on conclura qu'au-delà de l'ordonnée DCd, la Courbe manque entièrement. Qu'on prenne ensuite une abscisse $x = \sqrt[4]{a}$, moyenne entre $2a = AC$ & $4^{\text{th}} = AB$, & on aura l'égalité $y^* - 2aay - \frac{a}{x} + x^4 = 0$, dont les quatre racines sont : $a^{1/4} \pm i^{1/4}$ sont réelles. Donc les abscisses, qui finissent entre B & C, ont quatre ordonnées. Après cela qu'on choisisse une abscisse $x = a$, positive, mais moindre que $AB = \sqrt[4]{a} > 0$ & l'égalité $y^* - 2aay - \frac{a}{x} + x^4 = 0$, qui lui convient, ayant deux racines réelles $\pm \sqrt[4]{a} (1 \pm \sqrt[4]{a})$ & deux racines imaginaires $\pm i \sqrt[4]{a} (1 \pm \sqrt[4]{a})$, on conclura qu'entre l'Origine A & le Point B les abscisses n'ont que deux ordonnées. Sss 2 U Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 19.90% accurate

508 DES LIMITES Planche H en est de même des abscisses entre l'Origine A & le Ch. xi XXII Point b. Car si on prend une abscisse $x = -a$, négative, & moindre que $Ab = -a\sqrt{1}$, on aura l'Égalité $yy + 2*ayy - 24* = 0$, qui a deux racines réelles ± 1 à $y'C = i \cdot kV$ & deux racines imaginaires $\pm i \cdot v''$ ($-i$ Mais si l'on prend une abscisse $x = -4y^7 1$, entre $Ab = -\sqrt{7}*$ & $Ac = -2*$, l'Égalité $y^* 4 \ll 244^{11} - f \cdot 4 + = 0$, n'ayant que des racines imaginaires $\pm zs$ s/i $-y/i^y/O$ » voit voir 4UC & Courbe manque dans l'intervalle bc. Elle manque aussi dès le Point c jusqu'à l'infini du côté négatif : comme on le voit en prenant une abscisse $x = -34$ plus négative que $Ac = -24$; l'Égalité qui en résulte, $y^* + 6aayy + 544* = 0$, n'ayant que des racines imaginaires $d = 4 > / (-g \sim ? V - S)$. La Courbe est donc toute comprise entre b & C. Ses abscisses, qui se terminent entre b & B, n'ont que deux ordonnées ; celles, dont l'extrémité tombe entre B & C, en ont quatre. Pour déterminer les limites des ordonnées, on a l'éq : $2ayy - 6mx + 45c'z = 0$. Si on substitue, dans l'équation de la Courbe, y sa valeur $\%ax$ tirée de cette équation - ci, on aura $-15x^4 - 12aaxx + 0$, dont les racines sont $x=0$, $x=0$, $x=\pm j\sqrt{15}$ $=$ à peu près $\pm 1.6n$, $x = -\{ay/-5 \sqrt{15}\}$, mais $2 \pm i \cdot \sqrt{15} =$ à peu près 1.0754 , Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 21.06% accurate

DES ABSCISSES ET DES ORDONNÉES. Soit $U^{\pm}$ auxquelles répondent les ordonnées $y = 0$, $y = \pm \sqrt{WC^2 - 1}$ à peu près 1.875^* , $y = \pm \sqrt{WC^2 - 1}$ % grandeur imaginaire, $y = \pm \sqrt{WC^2 - 1}$ $^5^*$) auflr imaginaire, $y = \pm \{ y' (r \pm j \text{ t f i l S }) \}$, 2 à peu près 0.872^* . Ainfi les limites des ordonnées font 1.875^* , 0.872^* » 0 , 0.872^* , 0.875^* , les mêmes du côté négatif que du côté positif. En effet, comme l'équation n'a point de puissance impaire d'y, l'Axe des abscisses est un Diamètre [§. 70]. Il suffira donc de prendre, dans leurs intervalles, des ordonnées positives; parce qu'on fera le même jugement de celles qu'on prendroit dans les intervalles des ordonnées négatives. Soit donc $y^2 = 2^*$, une ordonnée plus grande que $1.875^* = AF$. L'Egalité qui en résulte est $y^4 - 8^*x - 16a^* = 0$, ou $y^4 - 8^*x - 16a^* = 0$. Cette équation a d'abord deux racines imaginaires [§. 60], puisque 27 fois le carré de -8^* , plus 8 fois le cube de $-16a^*$ fait une grandeur positive, $+1512^*$. Mais les deux autres racines sont auflr imaginaires. Car si on calcule le coefficient a de l'équation marquée P dans ce même §. 60 on trouvera auflr une grandeur positive, $> \{ 892^* \}$. Donc les quatre racines de l'Egalité $y^4 - 8^*x - 16a^* = 0$ sont imaginaires. Ainfi la Courbe manque au-delà de la limite FH. Et comme elle manque, par la même raison, au-delà de fh; elle est toute comprise entre les limites FH, fh. Soit ensuite $y = *$ une ordonnée moyenne entre Sss et Ar = Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 18.27% accurate

5«a DES LIMITES Penche $AF = 1.875^*$ & $AE = 0.872^*$, & on aura l'Egalité $x^4 - 2ax - msxx + x^* = 0$, ou $x^* = -s^{**}$ §. 191 $3^{**}xx - f\# +$. Si, par les coefficients de cette équation on calcule ceux de l'Egalité $x^3 - 3z + ?zz + z$ marquée P au §. do, on aura $a = z - \frac{1}{2}$ Ce coefficient négatif fait voir que l'Egalité $2ax - iaaxx + x^* = 0$ a deux racines réelles & deux imaginaires. Donc les ordonnées, qui se terminent entre FH & EG , ou entre fh & eg , ont chacune deux abscisses. Enfin, si on prend l'ordonnée ia , plus petite que $AE = 0.872^*$, on trouvera l'Egalité $x^4 - a^2x^2 + x^4$, d'où Ton calcule pour l'égalité P , $ax^2 + x^2 + x^2$, dont les trois coefficients $1, 3, 1$, étant tous trois positifs, il suit [§. 60] que l'Egalité $x^4 - a^2x^2 + x^4 = 0$ a ses quatre racines réelles. Donc, toutes les ordonnées plus petite que AE , ou Ae , ont chacune quatre abscisses. De tout cela il est aisé de voir que la Courbe est finie, & composée de deux Feuilles, dont l'une a presque la figure d'un cœur. De l'Origine A il part une Branche AH , qui va au Point H , Maximum d'ordonnées, dont l'abscisse $HF = w^{\frac{1}{3}}$ & l'ordonnée $FA = V$ De là elle passe au Point D , Maximum d'abscisses, qui a pour abscisse $AC = 2^*$, & pour ordonnée $DC^{\frac{1}{2}}$, Elle vient ensuite au point r , l'ordonnée $DC^{\frac{1}{2}}$, située à l'extrémité de l'abscisse $AB = \frac{1}{2}$. Son cours Bd est précisément le même au-dessus de l'Axe des abscisses. Mais à l'Origine A elle se relève au-dessus de cet Axe du côté des abscisses négatives; passe par le Point G , Maximum d'ordonnées

Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 24.07% accurate

DES ABSCISSES ET DES ORDONNÉES. JM d'ordonnées, dont l'abscisse $G E = \frac{W^2}{2}$, & «m* 2 l'ordonnée $E A = W t \sim ? + V_i V$) ; va 2 2 de G en b , Maximum d'abscisses , qui se trouve à l'extrémité de l'abscisse $Ab = \frac{ay^2}{2}$; & décrit enfin, sous l'Axe des abscisses, un arc semblable à bGA. 199. On propose de trouver & de déterminer les Points d'Inflexion d'une Courbe dont l'équation est donnée. Il est clair par les §§. 186 & 19g, qu'il ne s'agit, l'Origine étant portée sur un Point quelconque , que de déterminer x h y , de sorte qu'il y ait un de ceux de la Courbe » 20. que le premier Rang de la Transformée divise le fécond. On (satisfait à la première condition , en posant l'Equation de la Courbe [§.171]. Et pour satisfaire à la seconde , si l'on a le premier Rang, & si l'on a le second , on posera l'éq : $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ Car z , il reste ($\frac{d^2y}{dx^2}$ étant égalé à zéro, divisé par z, & multiplié par $\frac{d^2y}{dx^2}$ donne $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$. On aura donc deux équations , par le moyen desquelles on déterminera l'abscisse x & l'ordonnée y de chaque Point d'Inflexion , si la Courbe en a quelcun. Mais comme ces Points peuvent être de double , triple , &c. Inflexion , il faut voir si le premier Rang de la Transformée , qui divise le fécond , n'en divise point d'autres. S'il divise un nombre impair de Rangs successifs, le Point aura une Inflexion visible ; mais elle est invisible , c'est un Serpement , si le nombre des Rangs successifs , à commencer par le fécond , qui sont divisés par le premier , Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 20.27% accurate

jii DES FOINTS Planchs eft un nombre pair [§§. 16\$, 186, 19 \$].
ⁿ. XXI1? Il faut encore examiner, il les valeurs d' x & d' y , S-»* qu'on a
trouvées, ne font point telles, qu'elles rendent $|8 \text{ \& } y$ égaux, chacun, à zéro.
Alors le Point, qu'elles déterminent, eft multiple. Or les valeurs d' x & d' y
qui donnent $j8=so$, Si $y=0$ rendent néceffairement $i@y-\{ -Jiyy=0$. Ainfi
les mêmes équations, qui don-* nent les Points d'Inflexion, donnent aufli
les Points multiples; mais non pas réciproquement. Et c'eft par -là qu'on les
diftingue. Exemple I. On demande, fi la Courbe définée par l'éq: $x^4 <$
 $bxx -f- aay z= o$, a des Points d'inflexion, & où ils (ont fitués ? En
fubftituant $x-j-z$ k x & y^{*u} à y , h premier Rang de la Transformée (êra
(ad) $u > \{ * (\$xx * \backslash * ibx)z$, & Je /econd $\{p\}uu * i * (o) \ll z 4 * ()zz$. On aura
donc $0 = il) > = \$xx 4 < 26^*$, + $> = o$ fe réduit à $(jx + ^)^{\wedge} = 0$, d'où l'on tire $x = -$
 $|ô$; valeur, qui fubftituée 2&1 dans l'équation de la Courbe, donne $y=z$. — •
— La Courbe propofée n'a donc qu'un feul Point d'inflexion, dont l'abfciffe
eft — $\backslash b$ & l'ordonnée $:=^{\wedge}$. Ce Point n'eft pas multiple, puifque ces valeurs
d' x & d' y n'anéantiffent ni $\& [=zaa]i$ ni $y [= \$xx + 2bx]$. Et ce n'eft pas un
Point de Serpement, ni d'inflexion multiple, puifque le premier Rang
 $*f < (\$x5c -+-2 \& *)z$, réduit ici à $aau - \backslash bbz$, ne divifè pas le troifième $(p)ul$
+ $Co) \gg^z + (o)lif2J1 + (^)z$. Planche • Exemple II On propofe la Courbe
que repréfente l'éq: $ax^0 > fr bf -f- c 4 = 0$, & on demande où font fitués

Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 26.67% accurate

Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 18.76% accurate

D'INFLEXION. $\text{fig. } \blacksquare$ Ch. xi. situés les Points d'Inflexion qu'elle peut avoir ? Planche §. Les deux premiers Rangs de la Transformée sont $XX1IL (\hat{i}^*) + (M\hat{i},)2 \& (?Ay) \lll 4 - (o)^*z - f(5^*)z^3$. L'équation, qu'il faut combiner avec celle de la Courbe, est donc $\$ by (\$ a x^1)^* + \$ax (3 by^1 y = o = 2 yaabx^*y > i^* 2jabbx^* ,$ ou , divisant par $2-jab , + Jsçr^* = o$. Si on ôte cette équation de celle de la Courbe multipliée par xy il reliera $fSyrzro$, qui a deux racines $x=o$, & $xy = o$. La première substituée dans la Proposée donne $by^* > f \ll 4 = o$, ou $\wedge rss \text{ — 'V.4-' } \wedge \text{conde donne } \blacksquare \text{ — } o$, ou $5c = \text{ — } csl \text{ — } >$ Ainsi la Courbe a deux Points d'Inflexion, l'un à l'extrémité de l'ordonnée $AB = \text{ — }$ Vautre à l'extrémité de l'abscisse $AC = b \text{ — } c y/L$. Car il est aisé de voir que ces Points ne sont ni Points multiples, ni Points de Serpement. Exemple III Soit proposée la Courbe, dont l'équation est $axyx^* \backslash bx^*y + 4 = o$. On demande, si elle a des Points d'Inflexion ? On cherchera, pour cet effet, les deux premiers Rangs de la Transformée. Ce sont $(2x^2 + txx) \ll -JC ayy + 3bxy) z \& (ax)uu 2aj \bullet + \ll 2bx)uz + \{by^*\}zz$. Donc $S = 2^*xy 4^* bxx, y = jéxj, i^*2bx)(s2axy \wedge bxx) (ayy + 2^*xj0 \gg + \bullet ax(ayy 4 < 2^x7)l = 0 = \text{ — } \text{ — } 6^*abxxy\% \text{ — } \hat{o}abbx'yy \text{ — } j \& 'x4; = 0$, qu'il faut combiner avec la Proposée. Cela se peut faire en diverses manières. On peut, par ex. multiplier la Proposée par $\text{ — } \text{ — } labxy \text{ — } ibbxx$, & ôtant le produit $\text{ — } ic^*aayy \text{ — } btrod.$ à l'Analyse des Lignes Courbes. LTt 3 $fabxy 0$

The text on this page is estimated to be only 19.16% accurate

$y^4 + DES + T^4 + N^4 + S^4 + F^4 + v^4 + t^4 + r^4 + E^4 + V^4 + a^4 + l^4 + x^4 + y^4 - V^4 + b^4 + h^4 + ** - \hat{1}^4 + *^4 - 6^4 + \acute{e}^4 + x^4 + y^4 -$
 $\&\&^{**} c, !i \hat{o} a a b x y \hat{o} a b b x' y y 3^{\wedge} = 0$, le reste $g c^4 a a y y + i c + a b x y + i c^* b b x x$
 fera aussi $=0$, & divisant par $\$ t f l^{\wedge} 1 + 4^{\wedge} - r^{\wedge} 2 x 1 = 0$, équation qui n'a que
 des racines imaginaires $*y = z b x (- i^{\wedge} i y' - ' ?)$ • La Courbe n'a donc aucun
 Point d'Inflexion* Exemple IV[^]. L'équation proposée est $x y y^4 + = 0$. Elle
 représente deux Courbes allées différentes, selon que 4 & b ont les mêmes
 ou différents signes. Si a & b (ont parfois cette équation représente la
 Courbe 177. définie au »°. 1, & elle exprime aussi la même Courbe, mais
 dans une situation renversée, »°. 2, lorsque a & b sont tous deux négatifs.
 Cette même équation exprime une autre Courbe, nos- 3 & 4, lorsque $*$ & b
 ont différents signes. Le n°. 3 marque & position, quand $*$ est négatif & b
 positif Sa position est celle du n°. 4, quand $*$ est positif & b négatif On
 demande les Points d'Inflexion de ces Courbes ? Les deux premiers Rangs
 de la Transformée étant $(2x^7)^* + (yy+2ax)z$ & $(x) y > *Z^4 - (*) ZS$,
 l'équation à combiner avec la Proposée fera $*(2x^7)^* -$ — Qu'on ajoute
 cette équation à $\$ x y^* + \$ - 3^{**} x' - g^{\wedge} j f = 0$, produit de la Proposée par
 $j j y \blacksquare - 3^?*$, on aura $^{\wedge} j^{\wedge} + j m^* - j^{\wedge} x z = 0$. De cette équation multipliée par
 x , qu'on ôte la Proposée multipliée par $i b >$, il restera $^{**} x^* - 6^* \& V -$
 $3^{\wedge} = 0$, qui a quatre racines $+) \sim$, & $+ - y V 1 2) -$. Les deux premières
 sont réelles, & les deux autres imaginaires Dy

The text on this page is estimated to be only 21.90% accurate

D'INFLEXION. eij Ch. xi. autres imaginaires , quand a & b , ont le même signe 1 Piamcm parce qu'alors la fraction — en* positive , & , par la raison contraire , les deux premières sont imaginaires & les deux dernières réelles , quand a & b ont des signes contraires. Ainsi , pour la Courbe des «°« i & 2 , on prendra les abscisses AB & Ab égales à + & à — v^a -mais pour la Courbe des tti*- 3 & 4 , on prendra les ab(1 ciOès AB & Ab égales à + & à — $\sqrt[5]{5 - \sqrt{i}} > 4$ Les ordonnées de ces abscisses rencontreront ces Couibes dans leurs Points d'Inflexion. On verra que ces Points ne sont ni multiples , ni Serpentelements , en cherchant la valeur de leurs oî données. On a trouvé ci-deflus $\frac{ax^2}{y} = c$, ou $y^4 = b^4 \pm aaxxz = z$ [en mettant pour xx Ses valeurs ($\frac{r \pm rv}{i^2}$) —] = $(4 \pm r - i) abty$ soit $jp^{\wedge y/U^{\wedge -}}^{\wedge -}$ Ces valeurs d'x & d'y (ùbftituées dans le premier Rang de la Transformée $(2*7)^* + (yy + 2*x)z$ ne l'anéamiflènt pas. Donc les Points qu'on a déterminés , ne (ont pas multi* pies. Et comme ce premier Rang ne peut diviser le troisième $(o) \ll '(1) uuz (o) \gg zz + (o) *$, ce ne sont pas des Points de Serpentelement. • Exemple V. Quels sont les Points d'Inflexion de la Courbe, dont l'équation est $x^4 - aaxx + a'y = 0$? » 7* Les deux premiers Rangs de la Transformée étant $(4*) \gg + (4*' - 2**x)z$, & $(o)* \ll *Ko)^*z + \{6xx - aa\}zT$, l'équation, qui détermine les Points d'Inflexion, fera $(\ll xx - \#*)^* + : = 0$; d'où l'on tire $x = Ttt 2^{\wedge W\hat{i}}$ Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 15.17% accurate

p6 DES POINTS PtAKCHE rt^l, & par l'équation de la Courbe
 $y^2 = x^3 + 2x^2 + x$ Exemple V L Déterminer les Points d'Inflexion de la
 Conchoïde, donc l'équation est $xy^2 = x^3 + 2x^2 + x$ — — $2x^2y =$
 $aabb = 0$ [§. 1 74. Ex. /Kl. Le premier & le fécond Rang de la
 Transformée font $(3x^2y)' + (2x^2)'y = 6xy + 4x' + 2y'x$ & au fécond Rang,
 $(4x^2y)' + (2x^2)'y = 8xy + 4x' + 2y'x$ Donc féquauott pour détenu *Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 19.91% accurate

jy INFLEXION. çî7 Ch. XI. terminer les Points d'Inflexion est /(
 $b + t x + 2 dy y - s = 0$, soit $bbf - bce + ccd^{4^*} = 0$ $c x + dy y^{txy+fx^*} = 0$ y
 d'où retranchant le produit de la Proposée par $4^{4^*} - ee$, lequel est zéro, il
 restera $bbf - bce^{4^*} - tcd - cc)a = 0$. Afin qu'une Ligne du fécond
 Ordre eut des Points d'Inflexion, il faudroit que les coefficients de (on
 équation eussent entr'eux la relation qu'exprime cette Egalité, $bbf - bce^{4^*} -$
 $(4^{4^*} - f^4) = 0$ » c'est-à-dire, que a fut égal à $b^4 - pcj^{dd} \wedge jorpf$ } ue a
 ceste $ya^{ur} \wedge j^{4^*} - 4 df - ec$ tion du fécond Ordre ne désigne pas une
 Courbe, parce que ses racines sont essentiellement imaginaires. Car en
 $bbf - bce + c^2 d$. Résolvant l'éq : $\sim - V^o J 4^* + \langle yy + + /xx = 0$, on trouve
 $a/x \text{ Hh}' = \pm \sqrt{.7 + \sqrt{.7}} \sqrt{1 > \sqrt{4^*} - 4^*} \gg 0$ » Or le carré $(j + \sqrt{y})$ est
 nécessairement positif. Précédé du signe $-$, il est donc essentiellement
 négatif, & sa racine carrée est absolument imaginaire. 200. On fait au 0^e
 résoudre tous ces Problèmes, directs & inverses, par la Méthode des Séries.
 Soit $M/4$ m une Courbe algébrique quelconque, dont $4^*, 7^*$ la nature soit
 donnée par une équation entre les coordonnées $AP[x]$ & $PM[jrJ]$. Pour
 trouver la nature d'un Point quelconque M de cette Courbe, on portera
 l'Origine de A en P , de sorte que PM soit la première ordonnée. Dans cette
 vue, on substituera dans la Proposée « à y & $x-i-z$ à x [$\$. 2^{\circ}$], & l'on aura
 une Transit $t \$. 4^*$ formée Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 21.56% accurate

DES TANGENTES &c. PI. AKCHE formée en u & z, où *
représente une ordonnée quel- Cru, XXIII. conque pm, & z l'abscisse Pp
comptée dès l'Origine P. S-100, La lettre x, qui reste dans la Transformée,
comme une constante, exprime la Droite AP, comprise entre l'Origine
primitive A & l'Origine nouvellement prise P. La lettre y, qui ne le trouve
plus dans la Transformée, (servira, dans l'occasion, à désigner la première
ordonnée PM. Ainsi x & y désignent ici des constantes, mais en telle sorte,
pourtant, qu'elles indiquent que les Calculs qu'on va faire sur un Point
donné M se peuvent également appliquer à tous les Points de la Ligne M^m.
Si, dans cette Transformée, on cherche les valeurs de u en z, par des
Séries amovables; ces Séries expriment les Branches de la Courbe que
rencontre l'ordonnée PM, & les représentent d'autant plus exactement que z
[Pp] est plus petite [§. 100]. Ces Branches (ont réelles, & les Séries qui les
représentent sont réelles: Si une de ces Séries a un terme imaginaire, elle
est imaginaire, & la Branche qu'elle exprime est absolument imaginaire,
c'est-à-dire, imaginaire de part & d'autre de l'ordonnée PM: Mais si une de
ces Séries a un terme demi-imaginaire, elle est demi-imaginaire, & la
Branche qu'elle désigne manque seulement d'un côté de PM, de l'autre côté
elle est double [§. 95]. ■ ■ \. ■ Il faut donc pour connaître la nature du
Point M, calculer tous les termes irréguliers [§. 109] des Séries af-
fectées que fournit la Transformée en u & z, & ce qui est encore nécessaire
pour s'en servir à la fourche & en donner plusieurs. Mais, laissons le détail
de ces irrégularités aux Chapitres suivants, supposons que la Série ci-
dessous est régulière dès son commencement. Alors la forme est $u = A^{Bl} * Czz + Bx^{t-}$
ét. ■ > Et 1 Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 20.66% accurate

LES TANGENTES §c. 5*9 C»xl. Et cette valeur étant fabBicuce dans l'équation , on déter- planchk minera ies coefficients A.h.CyD.&c. en égalant fuccel- ^xui. fivement à iero chaque terme de cette nouvelle Transformée [§. 112}. 501. Dans cette Série, le premier terme A est ^gal à l'ordonnée PM [j] de labiciilè AP[*]. Car, taitànc 9 s= o , la Série m — A^Bi &c, le réduit i u~ A. Et a[P"p] = o réduit l'ordonnée pm[«] à la première ordonnée PM[j>]- Donc A=y. Le fecond terme Bz détermine la pofuion de la Droite MO, qui touche la Courbe au point M. Car fi on mène par ce Point M l'abfciflè QM n , qui rencontre en n l'ordonnée p m , prolongée s'il le faut ; on aura p n as= PM = A. Donc mn = pm- — pn = — A = Bz »* Czz + Pz' &c. La Série tronquée de fon premier terme A , exprime donc la différence mn de la première ordonnée PM & d'une autre ordonnée quelconque pm. Cette différence mn détermine la pofition de la Sécante Mm^ qui retranche de la Courbe l'arc Mm m. Qu'on prenne , fur l'abfcilTe MQ,, la partie MN égale à l'unité, & qu'on mène par le point N la Droite Nr parallèle à la Sécante M m , elle retranchera de l'ordonnée P M , prolongée s'il* le faut , une partie Mr égale à JB + Cz-f- Dzx &c. Car à caufe des parallèles Mm , Nr , on aura Mn ou Pp[z]: mn[Bz + Czz4■i>z, + &c]= MN[i]: Mr [J9 + C + D c ■ \. Maintenant, fi on imagine que la Sécante Mm vienne à tourner fur le Point M; quand elle aura paffé dans la fituation Mw , elle ne retranchera de la Courte que l'arc M^e, d'autant plus petit que f* approche plus de M. De forte que, continuant à tourner , la Sécante Mm, ou M/u , devient Tangente , lorfqu'elle eft venue dans la fituation MO, où le fécond Point t* y qu'elle rencontre , coïncide avec le premier M : une Sécante:.

Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 27.87% accurate

yao DES TJNOENTES tñ. ii.a,che cante devenant Tangente ,
lorfque les deux Points de axi XXUI- Section tombent l'un fur l'autre
[§.162]. Si Ton con- M91çoit aulil que la Droite Nr tourne fur le Point N ,
avec la même viteflè que Mm fur M, en forte que ces deux Droites Nr, Min
reftent toujours parallèles Tune à Pautrc; & que Nr vienne dans la fituation
NR, quand la Sécante Mm devient la Tangente MO ; on déterminera cette
fituation NR, [& par conféquent celle de la Tangente MO, qui fui eft
parallèle] en prenant M R égal à B coefficient du fécond terme de la Série
 $A + Bz + \&c.$ Car la Sécante M m devient Tangente , au moment où le Point
m tombe fur M, au moment où $Mn[z]$ devient zéro. Mais quand z devient
zéro, Pexpreflîon générale de Mr, qui eft $B + Cz + Dz^2 + \&c.$ fe réduit à B.
Donc , fi on prend , fur IWCifTe, $MN = 1$, & , fur l'ordonnée , $MR = B$, &
qu'on mène la Droite NR; elle fera parallèle à la Tangente MO. Ou , fi l'on
veut , & ce qui fera généralement plus commode , puifque B eft
communément une fracîion , qu'on peut repréfentef par ; on prendra , fur
Pabfcieue MQ^x une partie Mr égale à 0 , & fur le prolongement de
l'ordonnée une partie Mp égale à y , & la Droite tf fera parallèle à la
Tangente MO. Car, puifque Mr[0] eft à Mp[>] comme MN[1] à MR [B ou
Z ;], pp eft parallèle à N R , qui eft die même parallèle à MO. Donc p eft
parallèle à MO. Le troifième terme de la Série $An^* Bz^* \{ * Cz^t + \&r$ indique
la pofition de la Courbe par raport à (à Tangente. Car puifque $MR = B$, les
triangles femblables NMR, MnO donnant NM [t]: $MR[B] = Mn[z] : nO$, on
aura $nO = \< Bz$. Mais $m n = Bz + Ci^* -f Dz ' \&c.$ Donc mO Digitized by
Google

The text on this page is estimated to be only 26.63% accurate

DES TANGENTES &c, p. c. «. $xr. m O = m n - nO = Cz^* + Dz^*$
 &c. Cette Série i %. *oi. qUand * est infiniment petite , se réduit au premier
 terme x^{111} CV. Donc le signe , 4^* ou $-$, de ce terme fait connoître de
 quel côté de la Tangente passe la Courbe. Elle passe entre la Tangente &
 l'Axe des abscisses , lors que le ligne du troisième terme Czz est différent de
 celui du premier A, Elle passe au-delà de la Tangente , quand le premier &
 le troisième terme de la Série ont le même signe. Ainsi , lorsque dans
 l'équation d'une Courbe on substitue d'abord $x + z$, puis u à y , & ensuite
 $A 4 \ll Bz + Cz \gg bDz'$ &c à «, ou simplement $A^*Bz + Cz^*$ &c à 5 &
 qu'égalant à zéro, i°. tous les termes où l'on ne voit point de z ; a°. tous ceux
 où l'on ne voit que la première puissance de z ; \$°. ceux où l'on voit zz , &c.
 on fait autant d'équations pour déterminer les valeurs de //, By Ct Dy &c :
 on connoitra par ces valeurs l'ordonnée PM d'un Point quelconque M , la
 position de la Tan- , gente MO , celle de la Courbe M^m par rapport à (à
 Tangente , &c. Mais les divers Cas , qui peuvent (être présenter, demandent
 quelque détail. 202. Le premier terme A de la Série $A + Bz + Cz^* + \dots$
 représente l'ordonnée PM de l'abscisse AP . Si la Courbe passe par l'extrémité
 P de cette abscisse , l'ordonnée PM est zéro. Donc , mettant dans la Série la
 valeur particulière AP de x , on trouvera $A=0$. Et réciproquement, si l'on fait
 $A=0$, on aura une équation , dont les racines x sont les abscisses par
 l'extrémité desquelles passe la Courbe , c'est-à-dire , on aura les Points , où la
 Courbe rencontre l'Axe des abscisses. Si au contraire l'ordonnée PM [y ou A
] est une Asymptote , l'abscisse AP [x] a une ordonnée infinie. Donc ,
 mettant dans la Série , pour x , la valeur particulière AP , on trouvera $A=00$.
 Et réciproquement , si l'on introduit à l'Analyse des Lignes Courbes. Vu u on

The text on this page is estimated to be only 28.50% accurate

y22 DES TANGENTES &c. planche on fait $A=0$, [& pour cela il faut que A soit une Ch. xl xxij. fraction, dont on puisse égaier le dénominateur à zéro], M^{**} on déterminera les abscisses dont les ordonnées sont Asymptotes. Ce terme infini dans une Série, dénote quelque impossibilité, quelque absurdité dans les suppositions qui ont été faites. Cette absurdité consiste en ce qu'on a supposé que le premier terme de la Série est une grandeur finie A. Car si Ton prend pour la Série cette forme générale $u = A + Bx + Cx^2 + \dots$ que z infiniment petite réduit simplement à $u = A$, on verra que, A étant finie, A peut être infinie, si h est négatif [§. 79]. Donc, quand on suppose, ou pour le premier terme de la Série qui donne « en z, & que quelque valeur particulière de x donne A infinie; c'est une preuve que, pour cette valeur d'x, Az^h n'est pas le premier terme de la Série, mais qu'il doit être précédé de quelque terme qu'on avoit omis, & où l'exposant de z est négatif. On pourra donc, mettant pour x cette valeur particulière qui donne $A=\infty$, chercher, par les Régies des §§. 102, 108, la Série de cette équation, & on trouvera que dans son premier terme z a un exposant négatif; forte que, z étant infiniment petite, u est infinie. 203. Le 2^e terme, Bz ou $\frac{B}{z}$, de la Série générale donne, comme on a vu, la position de la Tangente. Les valeurs particulières de x & de y, qui rendent y nul, font connoître qu'aux Points qui répondent à ces coordonnées, Mp [, tombent sur l'abscisse. De même, les valeurs particulières de x & de y, qui font $\frac{B}{z} = 0$, indiquent les Points de la Courbe, où Mr [0] étant Digitized by Google*

The text on this page is estimated to be only 27.99% accurate

DES TANGENTES &c. 523 Ch. xi. étant nulle, tp, & là parallèle MO, tombent sur l'or- planchi 5 le'- donnée. xX11L Ces Points, où les Tangentes sont parallèles aux abscisses ou aux ordonnées, sont les Maxima ou minima des ordonnées & des abscisses, si ce ne sont pas des Points d'Inflexion. Donc les valeurs particulières de x & de y, qui donnent $y = 0$, indiquent les Maxima ou Minima des abscisses; & celles qui donnent $\frac{1}{3}z = 0$, marquent les Maxima ou Minima des abscisses; à moins que ce ne soit des Points d'Inflexion [§. 196]. À moins encore que les mêmes valeurs de x & de y, qui donnent $y > 0$, ne donnent aussi $\frac{1}{3}z = 0$. Alors Mr Mp étant nulles, les deux Points v & p coïncident avec M, de sorte que la position de rp, & de (a parallèle MO, n'est pas déterminée par ce moyen. D'où l'on conclura que le Point M est un Point multiple. Pour en comprendre la raison, il faut se rappeler la Méthode, indiquée au §. 112, de calculer les coefficients A y By C, D, &c. En substituant $A+Bz + Cz^2 + \dots$ à u, on réduit l'équation à quelques termes & Séries ordonnées par z. Tous les termes (sans z font en fait le premier terme, lequel égalé à zéro se trouve être précisément l'équation proposée, si ce n'est qu'on a écrit A au lieu de y. C'est pourquoi A se trouve égal à y [PM], comme on l'a remarqué [§. 201]. Le second terme est composé de ceux où z a pour exposant l'unité. Sa formule générale est $(\frac{1}{3}B - y)z$, d'où Ton tire en l'égalant à zéro, $B = y$. Mais si $y = 0$, cette équation se réduit à $0B - 0 = 0$, qui n'apprend rien sur la valeur de B. Il faut donc passer au troisième terme, qui comprend ceux où l'exposant de z est 2. La forme générale du coefficient est $\frac{1}{6}C - \frac{1}{2}By + \frac{1}{2}A^2$. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 22.12% accurate

ja\$ DES T^NG ENTES &c. FtâNCHB ficient de zz eft jSC — fBl
>h tB — Ç, qui égalé à zéro c»xl xxiil fêviroit à déterminer C. Mais quand
/3 = o, C difparoit, & l'équation le réduit à

The text on this page is estimated to be only 29.19% accurate

DES TANGENTES &c. \$2\$ Cm.xi Mais si ce terme Cz^* manque, C étant zéro, la Série $Pi-*$ »cb« $CV + Dz^*$ &c se réduit à $Dz^* + Ez^+$ &c. dont le pré- $xxm = m$ le terme Dz^* vaut lui seul infiniment plus que tous les autres. C'est donc du signe -f- ou — de ce terme, que dépend la position de la Courbe par rapport à la Tangente. Or, dans ce terme, l'exposant de z étant impair, le signe change quand à $4-z$ on substitue — z . Donc si d'un côté de l'ordonnée la Courbe tombe au-dessus de la Tangente, de l'autre côté elle tombe au-dessous. Le Point est donc un Point d'inflexion. On connaît donc les Points d'Inflexion d'une Courbe, par les valeurs particulières de x & de y , qui font évanouir le coefficient C du troisième terme Czz de la Série générale. Bien entendu pourtant, que ces valeurs de x & de y , qui font disparaître C , n'anéantissent pas en même temps le coefficient D du 4^e terme. Car alors le premier terme de la Série, qui exprime la valeur de mO , lèverait Ez^* , où z a un exposant pair. La variation du signe de z ne fait donc point varier le signe de Ez^4 . La Courbe, de part & d'autre de l'ordonnée, tombe donc d'un même côté de la Tangente. Le Point M n'est donc pas alors un Point d'Inflexion, mais un Point de Serpentelement^ A moins que ces mêmes valeurs de x & de y qui anéantissent C & D , ne fassent aussi disparaître E : en quel cas le premier terme de la Série qui exprime mO , est Fz^3 où z a un exposant impair. Donc alors M est un Point de triple Inflexion, qui est une Inflexion visible. On voit en général, que si, dans le terme qui fait Bz , z a un exposant pair, le Point M est un Point simple, ou d'Inflexion invisible, c'est-à-dire, de Serpentelement Mais si, dans ce terme, z a un exposant impair, le Point M est un Point d'Inflexion visible. Vu 3 2os. Tout 1 Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 29.24% accurate

y25 DES TANGENTES uc. planche 205. Tout cela est également vrai, lors que le terme Ch.xl XXIII; Bz manque, y étant zéro & /3 n'étant pas zéro. Ce Cas §• est celui des Maxima & Minima des ordonnées [§. 20\$]; à moins que ce ne soit le Cas d'un Point multiple ou d'un Point d'Inflexion. C'est une Inflexion, l'orCque dans le terme suivant, qui est le premier terme où z a un exposant plus grand que l'unité, cet exposant est un nombre impair, ou une fraction dont le numérateur & le dénominateur sont impairs, parce que le signe de ce terme change avec celui de z. C'est un Point multiple, quand l'exposant de z est une fraction de numérateur impair & de dénominateur pair, parce qu'alors ce terme est demi-imaginaire, c'est-à-dire, imaginaire d'un côté, & double de l'autre [§. 95 J. Mais quand l'exposant de z dans ce terme est un nombre pair, ou une fraction de numérateur pair & de dénominateur impair, le Point M est un vrai Maximum ou Minimum d'ordonnées. On connoitra si c'est un Maximum, ou un* Minimum, par le signe du coefficient de ce terme qui est le premier où z a un exposant plus grand que l'unité. Car si son signe est le même que celui de A, la Courbe passe au-delà de la Tangente; l'ordonnée P M est plus petite que les deux ordonnées voisines, M est un Minimum. Mais si le signe de ce terme est contraire à celui de A, la Courbe tombe entre l'Axe & la Tangente; P M surpasse les ordonnées voisines, M est un Maximum. 206. Que si le terme Bz est infini, ce qui arrive lorsque la Tangente, parallèle aux ordonnées, rend Mr [j3], c'est-à-dire, le dénominateur de la fraction [= B] p égal à zéro: c'est une marque [§. 202], que, pour ce Cas particulier, la Série n'a pas la même forme $A + Bz$ Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 28.69% accurate

DES TANGENTES &c. 5*7 ch. XL 4< Cl1 &c que dans le Cas général : mais qu'avant le planch* terme £3 n doit y en avoir un, ou plufieurs, qui ont XXIII été' omis. On fubftituera donc à x & y leurs valeurs particulières ; on cherchera le premier de ces termes par la Méthode des §§. 102 , 108, & on jugera, par foa expoiant , de la pofition de la Courbe par raport a là Tangente, qui eft l'ordonnée. Car ce terme , qui , à fupposèr z infiniment petite , vaut lui l'cul plus que tous ceux qui le fui vent , exprime la différence de la première ordonnée PiM [A] & de l'ordonnée infiniment proche $p m$, dont la valeur eft exprimée par toute la Série. Si , dans ce terme , l'expofant de z eft une fraction de numérateur & de dénominateur impair ; Ton ligne change en changeant $+z$ en $-z$. La différence de $P M$ & des deux ordonnées qui l'avoifinent , eft donc pofitive d'un côté , négative de l'autre : $P M$, ordonnée & Tangente de la Courbe au Point M , eft donc plus grande qu'une de fes ordonnées voifines , plus petite que l'autre ; M eft donc un Point d'Inflexion. Si , dans ce terme , z a pour expofant une fraction de numérateur pair & de dénominateur impair, le terme conferve là valeur , foit qu'on donne à z le figne $-f$, ou le figne $-$. La différence de PM & des ordonnées voifines eft donc la même de part & d'autre : PM eft ou plus grande , ou plus petite , que les ordonnées qui la touchent. Le Point M eft donc un Maximum , ou un Minimum d'ordonnées, quoique l'ordonnée (bit Tangente. Donc , en ce Point M , la Courbe change de cours, fa xsq & rebroufle, pour ainfi dire, en arrière. Au/fi les Géomètres nomment -ils ces Points, Points de Rcbrouffement . On en parlera plus en détail dans la fuite , & on verra quelles exceptions fouffre cette Remarque , par les irrégularités des termes qui fuivent dans la Série. Mais quand Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 26.50% accurate

p8 DES TANGENTES àe. fi.4NCHH M est un Point de rebrouffement , on voit s'il est un C $\ll$.xc XXIU. Maximum , ou un Minimum d'ordonnées , par la difpa- s* rké ou la parité' des lignes du premier & du fécond terme de la Série. Enfin, fi dans le fécond terme, [A, lors même qu'il lèroit zéro , étant compté pour le premier] l'expolant de z est une fraction de numérateur impair & de dénominateur pair; ce terme est demi-imaginaire. Ainfi, d'un côté de l'ordonnée Tangente , la Courbe n'a que des ordonnées imaginaires ; de l'autre elle en a deux , une plus grande & une plus petite que PM , à cause du signe ambigu J= de ce (ècond terme. M est donc une limite , où les ordonnées d'imaginaires deviennent réelles : c'est un vrai Maximum ou Minimum d'abfcifles. Et on décidera s'il est l'un ou l'autre , en examinant de quel côté de PM les ordonnées font réelles , de quel côté elles font imaginaires. Exemple I. On propose l'éq : $syy + x' + bxx$ Pg. ,g|. =o, Elle représente deux Courbes différentes , fçavoir la Courbe $\gg^{\circ}$. i , quand b est positive , & la Courbe $n^{\circ} 2$, quand b est négative. On suppose a toujours positive. En substituant u pour y & $x + z$ pour x , l'équation sera transformée en $auu^4 + (x' + bxx) + (2bx)z + (x^4 - 4x^2z + z^4) + z^4 = 0$, où mettant $A + Bz + Cy$ D11 &c pour u , on aura $éuuu^4 + laABz + mACzz + 2aADz + c. + aBB + z^2BC + x^2Sz = +lxxlz + i^2bxy + 2bx$ + 3^2$ Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 21.93% accurate

DES TANGENTES éV. yap Ch.XI. + J Je > + 3 * ? 7X .
 PLANCBI + z 1 = & pour chercher les valeurs \$A, B, C, D> &c. on aura
 ces équations $aAA+x^* + bxx=o$ 2a AB + \$xx + zbx == o 2^C+ + ?* + * —
 o La première , qui détermine la valeur <¥A , eft précifément la même
 chofe que l'équation propoféc ay y x* -f-£xx = o, en écrivant A pour jr. Elle
 donne donc yf=y [S-aoi]. La valeur d' ^ , prifè dans cette équation , eft x%
 4« £x* V7- — qui eft zéro, i6. quand x=o, 2°. quand x = — 6 . Donc la
 Courbe rencontre PAxe des abfcifles , & à TOrigine A , & à l'extrémité B
 de I Wriflè A B Cette même valeur d'A ne devient infinie que quand x eft
 infinie. Car on ne peut la rendre infinie en égalant fon dénominateur à zéro ,
 puifque ce dénominateur eft une quantité finie a. La Courbe na donc aucune
 ordonnée alymptote, & lès ordonnées ne font infinies que quand les
 abfcifles deviennent infinies. La valeur de B fe détermine par la 2 e.
 équation 2a AB Hr1 + 2^x = o , qui donne B = — ? ** = — ?X*2~^y2*X>
 Puuque A-=y. Cette valeur détermine en général la Tangente. Car fi on
 prend , fur Fabbitrod. à FAnalyfe des Lignes Courbes. X x x feifle Digitized
 by Google

The text on this page is estimated to be only 24.28% accurate

7⁰ DES TANGENTES &c. Planche fciffë menée par un Point quelconque de la Courbe , une Ch. xi. xxhi. p0rtion égale à 2 a v , & fur le prolongement de Pordonnée , une portion égale à — (gxx-J- zbx) , cVft-à-dtre , fi on prend fur l'ordonnée dès (on fommet une portion égale à \xx-\-ibx , & qu'on joigne les extrémitez «le ces deux parties par une ligne droite , elle lèra parallèle à la Tangente [§.201]. On aura les Maxima & les Minima des ordonnées > en égalant à zéro le numérateur de B. Cette éq: \$xx + 2bx=o a deux racines, x = o & \b*. La première le raporte à un Point double , car cette valeur d'x , fubftituée dans l'équation de la Courbe , donne .y=o, ce qui anéantit le dénominateur de B [§. 203] . Nous reviendrons bientôt à ce Point double. L'autre racine x ss — \h % tnife dans Péquation de la Courbe , la transforme en ayy -h^b1 = °> °"où "on tire >=±f éy'— — racine imaginaire , quand b eft pofitive , mais réelle quand £ eft négative. Ainfi la Courbe »°. 1 n'a ni A/*x'imum ni Minimum d'ordonnées. Mais la Courbe »°. 2, a deux Points M, m, dont Tablcifle commune eft AP = — \ b y pofitive puifque b eft négative , & dont les ordonnées font PM + f W — - , & Pm= — ïbJ ; lelquels Points font des Afaxima. Car i°. ce ne font pas des Points multiples. Les valeurs de x[— fi] & de ^[ztfV], qui anéans * tilTentlc numérateur, \$xx-f-2&c, de B, nanéantilTent pas fon dénominateur 2ay. 20. Ce ne font pas des Points d'Inflexioa Car ces mêmes valeurs d'x , d'y , & de B, n'anéantiflent point C Ce coefficient eft donné par la 3e. équation 2aAC+aBB Digitized by Googl

The text on this page is estimated to be only 24.47% accurate

DES TANGENTES 6c. j}i ca.xî. + ? *HH* = o, ou, mettant — \h pour x & o pour B, Planch* §. 166. b XXIII on a $2^{*C} - \text{£} = o$, foit C= Mais \$°. ce font des Maxima. Car C=— ^, donnant .c produit AC * à ±, grandeur n*fe, puif- ' que £ eft ici négative & a pofitive, le figne de C eft différent du figne d y*. Donc [§. 205] les ordonnées P M, P m furpa lient celles qui en font les plus voifines de part & d'autre, les Points M & m font des Max'tma d'ordonnées. On déterminera les Maxima & les Minima d'ablcifiès, en égalant à zéro le dénominateur iay de B. La valeur o, oui en réfulte pour y, mife dans l'équation de la Courbe donne $x > kx = o$, dont les racines font $x = 0$ & $x = -b$. La prémie're porte, comme on l'a vu, à un Point double dont nous parlerons tout à l'heure. L'autre, donnant B infinie, & défignant le Point B où la Courbe rencontre l'Axe des abiciflès, peut y donner un Maximum ou un Maximum d'abfcifTes. Pour en juger, on mettra [§. 206], dans la Transformée nnu $4\ll xl 4^{*} bxx + (3XX 4- zbx) Z (? x - f\ll b) zz + z^{*} = io$, au lieu d'x fa valeur — b, qui apartient au Point B, & cette Transformée fe réduira à $auu > \backslash^{*} bbi - 2bzz + z^{*} = 0$; d'où tirant [§. 102] la Série afeendante qui donne « en 2, on aura $u = -\pm^{*}bsj - - 2 y^7 - -$ &c Cette Série, ou plutôt ces deux Saies, (ont imaginaires quand 2 eft pofitive, elles font réelles quand 2 eft négative. Donc [§.206], la Courbe n'a ni ordonnées, ni Branches, du côté pofitif de B mais du Xxx 2 côte

Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 22.39% accurate

§ 2 DES TANGENTES &c. Planché côté négatif elle a deux Branches qui touchent l'ordonnée Cn. xfc XXIII« au Point B. Donc , dans la Courbe «*. i , où B est du côté' * î0* négatif de l'Origine , ce point B est un Minimum d'abscisses. C'est au contraire un Maximum dans la Courbe n . 2 , où B tombe du côté positif de l'Origine. On déterminera les Points multiples de la Courbe, en égalant à zéro le numérateur & le dénominateur de B, Le dénominateur 2ay égalé à zéro, donne $y = 0$ ce qui transforme l'équation de la Courbe en $x'^2 = x^2$, Le numérateur, égale à zéro , donne $x^2 + 2c = 0$. Et comme ces deux équations n'ont point d'autres racines communes que $x = 0$, on conclut que la Courbe n'a qu'un seul Point multiple , qui est à l'Origine , où $x = 0$, & $y = 0$. Ces valeurs de x & y substituées dans la 2e. équation des coefficients, $2aAB + jxx + 2^x = 0$, la réduisent à $0B + 0 - 0$ qui ne détermine rien. Mais , substituées dans la 3e. équ : $2aAC^r + BB + x^4 = 0$, elles la réduiront à $4c^2 = 0$, d'où l'on tire $c = \pm \sqrt{0}$ — Où l'on voit que B a deux valeurs , parce que l'Origine est un Point double. Ces valeurs sont imaginaires dans la Courbe «*. i , où a & b sont positives. • Donc l'Origine de cette Courbe , quoiqu'un Point de la Courbe , & même un Point double , n'a point de Tangentes. Ce Paradoxe s'explique en considérant que par ce Point il ne passe aucune Branche de la Courbe mais que c'est un de ces Points isolés , dont nous avons déjà donné un Exemple en parlant de la Conchoïde [§. 174, Ex. IV\ , & dont nous parlerons plus au long dans la suite. Mais le Point, qui est à l'Origine de la Courbe »°. 2 , a y deux Tangentes déterminées par l'équ : $J3 = \pm t y^7$ — — , 6 étant Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 23.53% accurate

DES TANGENTES &c. 573 Ch. xl étant négative & * positive.
 Il en refait cette ConQruc- Pianc»» * don. Qu'on prenne l'abfcioe AE =;
 — 1 , & les ordon- xxlll J b nées AD= + v/ — 7» Ad = — V — — , ou, ce
 qui est la même chose, AE= — AD = 4*^ — aï, /i H — - — y/ — ah , & les
 Droites ED, Ed (èront parallèles aux Tangentes. Ou bien , qu'on prenne
 l'abfcioe Ac=i, & qu'on lui donne les ordonnées eF=4« l y y/ — — , ef= —
 v7 ; ou qu'on prenne Ae , cF = + V — a&> cf= — V — ab, & A F, Af feront
 les Tangentes. Veut-on favoir de quel côté de ces Tangentes tombent les
 Branches de la Courbe qui partent par le Point A; il faut chercher la valeur
 de C, qui convient à ce Point. On la trouvera dans la 4e. équation des
 coefficients $2^{\wedge} + 2^{\wedge}+1=0$, que A = o & B = —ty — - réduisent à $C=z^{\wedge} 1$ Le
 signe — , devenu supérieur , fait voir que la Branche touchée par G A F
 tombe dessus (à Tangente ; & le signe + , inférieur, montre que la Branche
 touchée par gAf tombe au-dessous de la Tangente. Ainsi les Branches de la
 Courbe embrassent les jambes de Pangle G A g , & font embrass. fée par les
 jambes de Pangle FAf. On aura les Points d'Inflexion de ces Courbes , en
 faisant $C=o$ [§.204]. Alors la 5e. équation des coefficients se réduit à $aBBH^{*}$
 $^{\wedge} + b = oy$ ou , [mettant pour B la valeur générale, prise dans la 2e.
 équation, JTf ^ à ,(ig±i?y»fr? x + à=o9 foit $9ax^{*}+i2abx> + é^{*}abbvx 4« 1$
 $2aaxyy + /ytabyy = o$. Que dans cette équation, Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 17.09% accurate

554 TANGENTES tfv. Planche tion , on mette , pour ayy, fa
 valeur — x^1 — fxx , prife Ch.xi. XXIII, dans l'équation de la Courbe , on
 aura $9ax^4 - 12x^3 + \text{fi}^{\text{abbxx}} - 12x^4 - 1 \text{abx}^* - \text{abbxx} = 0 =: -$
 $3\#x^4 - \text{abx}$ dont les racines font $x=0$, & $x = -\text{b}$. La racine $x = 0$
 donne, comme on a vû, les Points A & B , qui n'ont point d'Inflexion. Mais
 la racine $x = -\text{b}$ donne , par l'équation de la Courbe , $\sim$ qui eft
 imaginaire , b étant négative , mais réelle & double , b étant pofitive. Ainfi
 la Courbe »\ 2 n'a aucun Point d'Inflexion. Mais la Courbe »°. 1 en a deux
 N, n, dont PabfciiTe commune clt $AC = -\text{b}$, & les ordonnées $CN =$
 $4\text{ff}y/ -$, & $Cn =: -\sqrt{7} -$. fig. 18*. Exemple IL Soit propofée la Courbe
 , dont l'équation eit $/ + i^*yy - \text{Sayy} - \sqrt{2}axy - 4^*xx - f - 4^*wx$ En
 fubftituant u pour & $x+z$ pour x, dans cette équation , elle fe transforme en
 $a' + \text{S}^*x + \text{i}uuz - \text{anu} ! \text{taux } 12\text{auz } \text{Saxx} - \%axz \text{Sazz} < + \bullet \text{Saax } 4^2 = 0$.
 Et mettant, dans cette Transformée, la Série $A+Bz + Cs^*$ & c pour «, on
 aura» pour déterminer les coefficients, ces équations , $A^4 - 1x^{\text{AA}} - 1a^{\text{AA}}$
 $- 12axA - \text{axx} + 4^*4x = 0$. $(\text{SAA} + 6xA - 6aA - i2ax)B + \text{AA} -$
 $i2aA - - \%ax - f - j\text{aa} = 0$. $(i\text{AA} + 6xA - 6aA i2^*x)C - f(\text{Sy}^4 + \text{Sx} - \text{la}^{\text{BB}} *$
 $(6A - 12a)B - 4/4 = 0$. $< (\text{SAAHh } 6x^4 - 6aA - - 12^*x)Z? - f$
 $(\text{tfytf} + \text{tfx} - 6^*)f?C + (<5^ - I2^*JC^* B, + sBB = 0$. La conformité de la
 première avec la Propofée montre que $A \sim y$. Comme la valeur & A tirée de
 cette équation

The text on this page is estimated to be only 21.36% accurate

DES TANGENTES &c. 535Cm. xi. cette équation n'est pas une fraction, puisque le premier puissance 6- terme de l'équation cubique $A^4 - (x - a)^4 = 4axx - 4a^2x$ ses ordonnées n'ont point d'écart, on ne fauroit rendre At ou yy infinie en égalant (on de'nominateur à zéro. Ainsi la Courbe n'a point d'Ordonnées asymptotes, & ses ordonnées ne deviennent infinies que quand les abscisses font infinies. Mais, en faisant $A=0$ on a $4axx - 4a^2x = 0$, dont les racines font $x=0$ & Donc la Courbe rencontre l'Axe des abscisses à l'origine A, & à l'extrémité B de l'abscisse $AB = a$. En mettant y au lieu de x, la féconde équation des coefficients donne $B = -\frac{1}{2}ay$. ce qui donne en général les Tangentes de la Courbe. Si on veut, par ex. la Tangente du Point B, on mettra, dans cette valeur de B, a pour x & 0 pour y, & on aura $B = -\frac{1}{2}a^2$ • on prendra donc, sur l'ordonnée, $BC = \frac{1}{2}AB$, & AC fera parallèle à la Tangente BT. Les Maxima & Minima d'ordonnées (c trouveront en égalant à zéro le numérateur de 2J. De là on tire $y = \pm \sqrt{4a^2 - x^2}$ & cette fraction substitué à x dans 8 a 7 la Proposée, la change en $9y^2 - 5a^2 - 12aay - 6a^2y + 16a^2 = 0$, qui (è peut diviser par $y - 2a$, & donne au quotient $9y - 3aay + 4a^2 - 8a^2 = 0$. Ainsi l'équation, qui donne les limites des ordonnées, a cette racine $y - 2a = 0$, & les trois que renferme l'équation : $9y^2 - 3aay + 4a^2 - 8a^2 = 0$, dont deux font imaginaires [§. 59. 111. 1] & la troisième réelle, & à peu près $y - 2a = 0$ se rapporte à un Point multiple» Car Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 22.55% accurate

y³S DES TANGENTES Ûe. Planche j »j ? ff— 1 24^y► f,4*',
 Ch. XI. xxiii. Car mettant 2 a pour y dans 1 eq : *= 9J£ ^ , lC6. elle fe réduit
 à x = — a. Et ces valeurs à peu près , & pour ordonnée PM=^=î~ a à peu
 près, eft un Maximum d ordonnées. Si on égale à zéro le dénominateur %yy
 + 6xy — 6ay — \2ax de B9 on anra , pour déterminer les Points de la
 Courbe où la Tangente eft parallèle aux ordonnées , une équation qui a deux
 racines , y = 2 a , &) + 2x = 0. La premie're racine donne le Point multiple
 indiqué cy-dclîus , & dont nous parlerons plus amplement. La lècondc
 réduit l'équation de la Courbe à 4x} 4« Haxx »+. 4/>ax ~o dont les racines
 font x = o , & x= — a. Celle-ci fe raporte au Point multiple , & l'autre
 donnant v[= — 2x]=o, marque qu'à l'Origine l'Axe des ordonnées eft
 Tangente. Pour avoir la pofition de la Courbe par raport à cette Tangente ,
 on mettra , dans la TransDigitized by Gooool

The text on this page is estimated to be only 22.62% accurate

DES TANGENTES &c. H7 Ca, xt. Transformée en u & z, o pour x, ce qui la changera en Pi anche h —]t marque , comme nous l'avons dit , un Point multiple. Pour en connoître la nature , on fubftituera — a pour x dans la Transformée en u & z , ce qui la change en »' 4< \$ uui — 6auu — 1 iau — 4*22 + 1 iaa -f- 1 2aaz — 8*' = o. Si on cherche [§. 102] les Séries afcendantes que fournit cette équation & qui donnent « en 2, on trouvera u s= 2a + (4a)*& &c. L'Ordonnée DE, de Pabfciflê AD = — *, eft donc égale à 2a. Et les ordonnées voifi- * * nés la fiirpaflent de la quantité (44)» z» ou ^4*22 > qui eft toujours pofitive, quelque figne qu'on donne à z. Le Point E eft donc un Minimum d'ordonnées , quoiqu'en ce Point la Tangente touche la Couibc. En un mot , ce Point E eft un RebromTement [§. 206]; qui eft un Point double, puifque deux Branches de la Courbe viennent s'y toucher. Il ne nous refte qu'à voir fi la Courbe a quelque Point d'Inflexion. On les détermine en faifant C=o, Cette fuppoftion réduit la 3e. équation des coëflkiens à j(; + x — M)BB^6{y~'2a)B — 44 = 0. Qu'on y mette pour B fa valeur — ■y<~ r J r 3^y4-6xy 6ay — nax & on aura une équation qui fe requit à — %ixy* — 27}* 4. 504**/+ 1\$4y4 4* 192a1 x'y — t o\$oa*xy' — 2%Saly* 4- i92a1x1 + ta 484**7+ 2 164V — \$\$64+x+ 484*7 — Introd. à Pybiahje des Lignes Courbes, Y y y 4841 Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 24.75% accurate

538 - DES TANGENTES &c. PLÂNCHi 48[^]=o. De cette équation on peut ôter le produit Ch. xl x*111 de la Propofée / + J*J7 — î*yy — \2axy — 44xx + §• x0*' 4**x=o par — 2jyy — \$64x — -jiay — 7244 , lequel produit eft zéro, & le refte divifé par 4844, eft x* + xlj +2**y — — ", = o, ou (x-f-^yxCx-h ^ — 4) = o. La racine *4*4 = o de'iigne , comme on Ta vû, le Point double E. Et la racine x=4 — y9 (ubftituée dans l'équation de la Courbe , la réduit à 2 y1 + 8*xy — Ss*y =0, ou2)() — 2a)" = o . La racine y = 2 a (è raporte encore au Point double E . Mais la racine y = o donne x [= 4 — y] = 4. Le Point B , que ces coordonnées indiquent , eft véritablement un Point d'Inflexion. Car fi, dans la 3e. équation des coefficients, on met o pour y ou A, 4 pour x, & — ± pour B, elle fe réduira à — i2aaC = o , c'eft-à-dire C=o. Mais ces mêmes valeurs , fubftituées dans la 4e. équation , la réduifent à — 12 aaD + £ = o , ou D = . Donc, o 1 44 au Point B, C eft zéro & D n'eft pas zéro : ce qui eft le caractère d'un Point d'Inflexion. [§. 204] . CHAPIDigitized by Google

The text on this page is estimated to be only 24.00% accurate

Digitized by Google

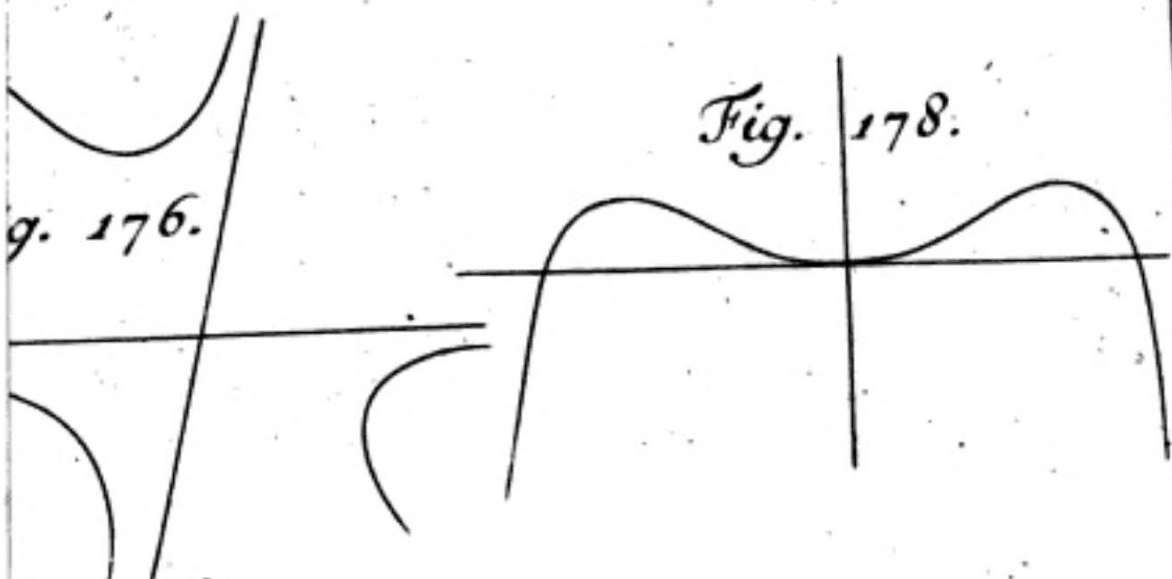


Fig. 177.

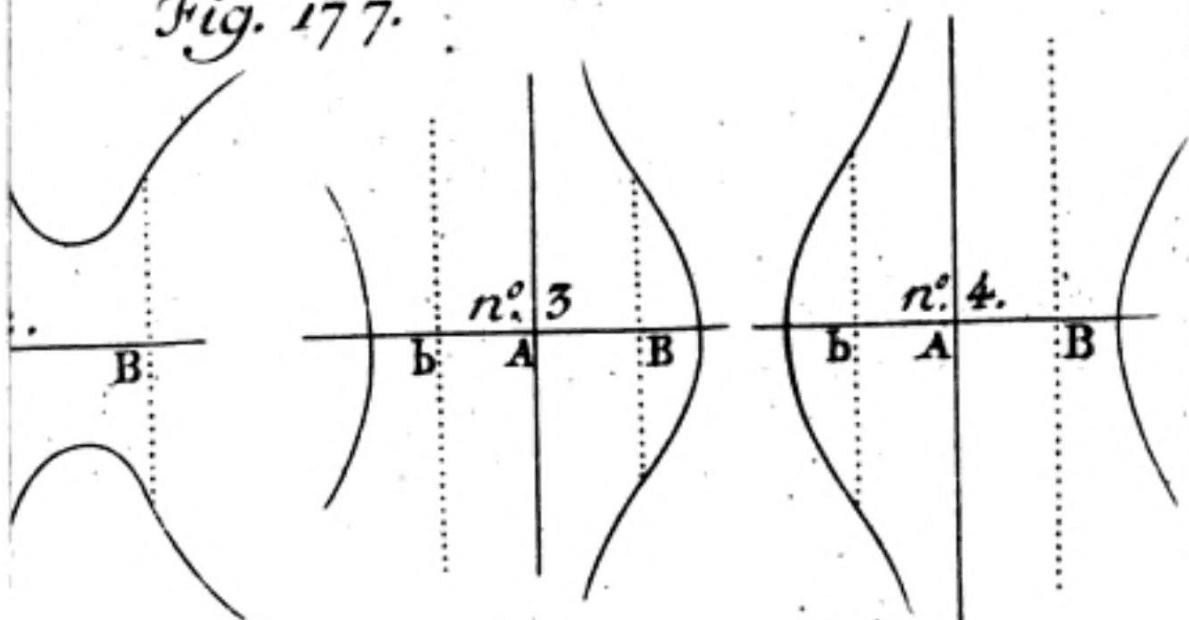
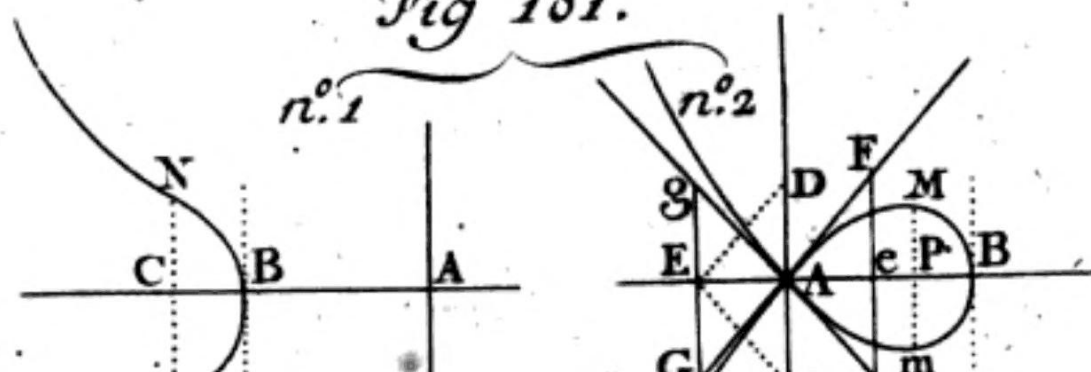


Fig 181.



The text on this page is estimated to be only 2.50% accurate

I \

The text on this page is estimated to be only 29.36% accurate

(U9) CHAPITRE XII. De la Courbure des Lignes courbes en leurs différents Points. 207. T A détermination des Tangentes d'une I 4 Courbe indique quelle est (à direction en chacun de ses Points. Mais , pour en connoître parfaitement la Nature , il faut (avoir de plus combien la Courbe s'écarte de cette direction ; il faut (avoir mesurer sa courbure. Car une même Courbe n'est pas également courbe par tout ; elle ne s'écarte pas toujours également de (à Tangente ; elle ne fait pas avec cette Droite des angles de contact égaux en tous ses Points. C'est le Cercle seul qui a par tout la même courbure, & qui est par -là très -propre à mesurer la courbure des autres Courbes. D'autant mieux que , quoiqu'un même Cercle soit également courbe en tous ses points , les différents Cercles ont des courbures différentes , & réciproquement proportionnelles à leurs rayons , ou à leurs diamètres. Si on courbe circulairement deux Droites égales , mais qu'on taillât de l'une une circonférence entière, & de l'autre une demi - circonférence ; celle-ci fera deux fois moins courbe que celle-là , mais au lieu le Cercle dont elle fait la demi-circonférence a un rayon double du Cercle dont l'autre Ligne Planch fait toute la circonférence. En général , soient ABU , Jx/v? ab deux Cercles inégaux, dont les rayons AC, ac^-'Sj soient entr'eux en raison de m à n -, & qu'on prenne sur ces Cercles des arcs égaux AB , a b ; je dis que l'arc AB est moins courbe que l'arc ab dans la même raison Y y 2 que Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 29.43% accurate

5T40 DE LA COURBURE Planche que le raïon AC est plus grand que le raïon ac; de forte Ch. m xxiv. qUe f, l'arc aD a une courbure de m degrés, minutes, & 1C7, ou parties, Parc A B a une courbure de » degrés, minutes, ou parties proportionnelles. Car, si on prend l'arc A 0 semblable à l'arc a b, cet arc A/3 est à l'arc a b, comme la circonf. ABD à la circonf. abd, ou comme le raïon AC au raïon ac, c'est-à-dire, comme m à ». Donc ab étant égal à AB, A/3 est aussi à AB comme m à ». Ainsi A/3, (semblable à a b, étant un arc de m degrés ou parties, AB est un arc de » degrés ou parties. Donc la courbure de ab est à celle de AB comme m à ». On voit donc, que dans une même étendue ab, AB, les Cercles abd, ABD ont des courbures qui sont entr'elles comme m à », ou comme AC à ac, c'est-à-dire en raison réciproque de leurs raïons ou diamètres. Ainû il est aisé de comparer la courbure de différents Cercles, en comparant leurs raïons ou diamètres. Et par conséquent pour comparer la courbure des différentes Courbes, ou celle d'une même Courbe en différents Points, il ne s'agit que de trouver le Cercle, qui a la même courbure qu'une Courbe donnée en un Point donné: c'est-à-dire, le Cercle, qui, touchant la Courbe au Point donné, s'applique si bien à cette Courbe, qu'entre elle & le Cercle on ne puisse faire passer aucun autre Cercle. Car comme, en augmentant ou diminuant le raïon d'un Cercle, on diminue ou augmente (à courbure par tous les degrés possibles; s'il n'y a aucun Cercle qui approche plus de la Courbe que le Cercle trouvé, on peut conclure que le Cercle a la même courbure que la Courbe en ce Point-là. J'excepte le cas, où la courbure d'une Courbe est plus grande ou plus petite que celle d'aucun Cercle. On en parlera dans la suite. sc^RepreDigitized by Go(

The text on this page is estimated to be only 28.76% accurate

DÈS LIGNES COURBES, y4x Ch.xit. 208. Reprenons la Figure du §. 200, où PM [y] est Pianch» §.108. Pordonnce d'un Point afligné M de la Courbe M^m , Pp $x^l[z]$ une abicitfè quelconque comptée dès l'Origine P, & * dont l'ordonnée pm est exprimée par la Série $A^k Bz + Czz + D/S$ &c. On a vu que le 1^{er} terme A de cette Série représente l'ordonnée PM ou la partie p n de l'ordonnée pm, que le 2^e terme Bz exprime la partie nO, comprise entre Pabcliflè QjVin & la Tangente MO, & & que le reste de la Série $CV + Dz^*$ &c. désigne la partie Om comprise entre la Tangente & la Courbe [§. 201]. Qu'on imagine un Cercle Mmih, qui touche au Point M la Courbe Mf

The text on this page is estimated to be only 21.66% accurate

542 DE LA COURBURE plabche diverfes Courbes, par la raifon
 inverfe des raïons de cour- Caxn, *XI/- bure en ces différens Points. \$• *> *
 209. Pour calculer le raïon de courbure , on fuppolera d'abord le Point m à
 une dillance finie de M. En prolongeant pm jufqu'à-ce qu'elle rencontre en i
 la circonférence Mmh, on aura [Eu cl. III. 36] le reclangle fous mO & Oi
 égal au quarré de MO. Donc Oi== Mais MOl = Mnl+nOl=zz-hBB2z, &
 mO mO =a'+D*>à*. Donc 0. = ^+7^7*,== 1+BB Maintenant , fi on fuppoſè
 que le Point m vient coïncider avec M, PabfcitTe z [Pp] deviendra zéro, &
 Pexl 4< BB preflion ^ , — -r de Oi [qui dans ce cas eft MI] L JJz, Ce 1
 /* BB deviendra --^ — . Ainfi, M 1H étant le Cercle de même courbure
 que la Courbe M p m au Point M , la chorl + BB de MI eft égale à — ç — ;
 ce qui fuffit pour déterminer le diamètre M H , & par conféquent aufli le
 centre K de courbure ; (ça voir , en menant par I la Droite I H parallèle aux
 abfciffes , & qui coupe en H la Droite M H perpendiculaire à la Courbe.
 L'on peut aufli , fi l'on veut , calculer le diamètre MH, en confidérant que
 les triangles MnO, MI H font temblables , tous les côtes de l'un étant
 perpendiculaires à tous les cotés de l'autre. On aura donc Mn [z]:MO[z v'O
 + BB)] = Mi [1+/? J : MH tftfHgSid*?] , diamètre Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 20.47% accurate

DES LIGNES COURBES. 545 c« xti diamètre de courbure.
 Donc le raïon de courbure MK planchi 5 eft - A , & le centre de courbure K
 2 C cft déterminé , puilqu'il eft fur la droite M H perpendiculaire à la
 Courbe , & à la diftance donnée MK du Point M. Exemple I. On propofe
 l'éq: $yy - axxx = 0$, qui repréfente l'Hyperbole, fi b eft pofitive , ou
 ,8JPElliple, fi b eft négative [§. 154]. ' Qu'on fubftituë , r,g.iZ6% dans cette
 équation, u à y & x + z à x , on aura la £ b b Transformée $uu - ax - azxx$
 $- 2 - xz$ Tz% c ce = 0. Si on cherche la valeur d'« en z par une Série de
 cette forme $ft = A \{ *Bz > i *Czzi \}$ &c. on trouvera $ac > \{ * zbx -$
 $^f+4/gfe<,v+4^xx - \backslash bcy y 1 \}$ »+« BB &c. Donc la Droite MĪ , dont
 Pexpreflion eft — , rt . . , . , aacc + A.abcx + Ajbbxx + 4*07 . r cft ici égale
 à — 2 T > TT* —IJ > 9UI fe 0 aacc 4* 446; x + ^bbxx — \$bcyy * réduit [
 en mettant y y pour ax + — xx , c'eft- à - dire , C Jbcyy pour ^x+4^] à — 2
 *4"+ y sa — 2^ — 8 Le figne négatif montre que cette Droite MI doit être
 prilê fur l'ordonnée MP , au lieu quo dans la Propofition générale on la
 fuppofoit prife fur fon prolongement. Le raion de courbure MK , qui eit 9 jç
 > fera Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 24.91% accurate

544 DE LA COURBURE $\frac{d^2y}{dx^2}$ fera $\frac{d^2y}{dx^2} + 4\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ c, fff dcur
 négative , parce que la Courbe , qu'on avoit fuppofé, dans la Propofition
 générale, tourner là convexité vers l'Axe des abfciffes , tourne dans cet
 Exemple (à concavité vers cet Axe. On peut donc comparer la courbure de
 ces Courbes dans leurs différents Points. Ainfi à l'Origine, où $y = 0$, le
 Raïon de courbure eft $\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - 2cc + bc^2}}$ à l'extrémité de l'ordonnée jss il eft $\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - 2cc + bc^2}}$ • grandeur, qui fera imaginaire
 dans PElliplè , où h eft négative , fi $b > 2c$. Aufii voit-on, par le calcul ,
 que l'ordonnée ia n'a que des abfciffes imaginaires quand $b > c$, & , à plus
 forte raïfon, quand $b > 2c$. Mais pofons que $b < c$. Alors la courbure à
 l'Origine eft à la courbure du Point qui eft à l'extrémité de l'ordonnée $\frac{1}{r}$,
 comme $\frac{1}{r} + \frac{dy}{dx} \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{2} \frac{d^3y}{dx^3}$ eft à $\frac{1}{r}$, ou comme $(2 \frac{dy}{dx} \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d^3y}{dx^3})$ à
 $\frac{1}{r}$. Rexemple IL L'éq: $y^2 = x^2$, qui exprime en général toutes les
 Paraboles & les Hyperboles [§. 128] , fc transforme, par la fubftitution de $y = xz$,
 ou $y^2 = x^2z^2$, pour y & de $x + z$ pour x , en $z^2 + Czz + \frac{1}{2}z^3 = x^2 +$
 $béoh-H > \frac{1}{2}h^2 \sim \frac{1}{2}V^2$. $2H \sim 2 \frac{1}{2} \frac{H^2}{V^2} \sim T^2 a^5$, ct)j ce qui donne, fans
 calcul, i. 2 Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 20.58% accurate

DES LIGNES COURBES. 5^{te} ch. xii " - , , . . 2^h — 2 § dv. Donc
 $=MI[l \pm f =] 1 \text{ } \text{ } ^X \text{ } xxiy. \text{ } ax \text{ } l. \text{ } a \text{ } soc \text{ } *T \text{ } * \text{ } h h f i / i ' x \text{ } h h \text{ } g \text{ } , \text{ } \& \text{ } \text{le raïon de}$
 courbure $M K = 4X^2$ Supposons qu'on ne cherche la courbure qu'à
 l'Origine, où $x=0$; il y a plusieurs Cas à distinguer*. L'exposant b peut être
 positif, ou négatif. S'il est négatif, la Courbe est une Hyperbole : s'il est
 positif, c'est une Parabole. Et dans ce dernier Cas, b est plus grand, égal, ou
 plus petit que l'unité. i. Quand $b > 1$, l'exposant $2b - 2$ est positif. Donc la
 (supposition de x infiniment petite rend bax^2 infiniment petite ou zéro ; le
 numérateur de la fraction $(\frac{y}{x})^{2b-2} = \frac{y^{2b-2}}{x^{2b-2}}$ se réduit à 1 , $\frac{Cbb - h}{ax^2}$ & la fraction elle-
 même revient à $\frac{T - m - TT}{Q - b - h} ax^b$ qui est toujours positive. Aussi
 la Parabole tourne-t-elle (à convexité vers l'Axe des abscisses [§.127]. Mais
 , x étant toujours infiniment petite, x est infiniment petite, finie, ou infinie,
 selon que $2 - b$ est positif, nul, ou négatif, [§. 79] ; c est-à-dire, selon que
 b est plus petit, égal, ou plus grand que 2. Donc le rayon de courbure, à
 l'Origine de la Parabole, lequel est Introd. à l'Analyse des Lignes Courbes.
 Z z z défi* * Anal, des b^{tes} fin. petits. §. 87. 88. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 20.91% accurate

I DE LA COURBURE Planche 2 h Cb.XU xxjv. défini par la fraction $\frac{h}{h^2 - b}$, est infiniment petit, si $h < 2$; fini, si $h = 2$; infini, si $h > 2$; & la courbure étant en raison inverse de Ton rayon [§. 207], est infinie, finie, ou infiniment petite, suivant que $b < 2$, ou $= 2$, ou > 2 . 2. Quand $h = 1$, l'éq : $y = ax$ ne représente qu'une Droite, dont la courbure est infiniment petite, ou plutôt nulle. Aussi trouve-t-on le rayon de courbure infini; le dénominateur de la fraction qui exprime sa valeur, étant un multiple de $h^2 - b = 1 - 1 = 0$. 3. Quand $h < 1$, mais pourtant positif, l'exposant $2b - 2$ est négatif. On peut réduire l'expression $(1 - \frac{h^2}{b^2}) \sqrt{(1 + \frac{b^2}{h^2})}$, en multipliant les deux termes de la fraction par $x^2 y^2$: $x^2 y^2 = x^2 \frac{h^2}{b^2}$. Donc le rayon de courbure à l'Origine, qui se trouve en supposant $x = 0$, sera $\frac{b^2}{h^2}$ (si $b = h$ on a $\frac{b^2}{h^2} = 1$) = $(\frac{1}{h})^2$ = $\frac{1}{h^2}$. grandeur négative, puisque $b < 1$. Et cela doit être ainsi, puisque ces Paraboles sont concaves vers l'Axe des abscisses [§. 127]. Ce rayon est infini, fini, ou infiniment petit, selon que $x^2 \frac{h^2}{b^2} = 1$ est infinie, finie, ou infiniment petite, c'est-à-dire, selon que b est < 1 , ou > 1 . Ce qui s'accorde

Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 27.97% accurate

DES LIGNES COURBES. 47 Ch. xii. corde avec ce qu'on a vu au §. 127 , que les Paraboles Planche * 10* concaves vers l'Axe des abscisses font les mêmes que celles XXIV' qui font convexes vers cet Axe , qu'elles font feulement dans une situation renversée ; ou , ce qui est la même chose , que les Paraboles dont l'équation est $y = ax^2$ font les mêmes que celles dont l'équation est $y = ax^2$, en prenant pour les abscisses des unes les ordonnées des autres , & réciproquement. . 4. Enfin si h est négatif, l'équation $y = axh$ représente les Hyperboles , dont le rayon de courbure s'exprime par l'expression $\frac{1}{r} = \frac{1}{a} \sqrt{1 + \frac{h^2}{a^2}}$ positive , parce que toutes les Hyperboles tournent leur convexité vers l'Axe des abscisses. 2^e o. Ces deux Exemples suffisent pour faire voir la manière de mesurer en un Point donné la courbure d'une Courbe donnée. Mais nous ne devons pas quitter ce sujet , (sans dire un mot de diverses Questions qu'on peut proposer sur cette matière. 1. On peut demander , par ex. En quel Point une Courbe donnée a une courbure donnée ? Cette courbure ne peut être donnée que par le moyen du Cercle qui a précisément ce degré de courbure. Et ce Cercle est donné par son rayon. On égalera donc au rayon [donné l'expression générale du rayon de courbure de la Courbe proposée; & cette équation, combinée, s'il le faut, avec celle de la Courbe , déterminera le Point cherché. Ainsi , si l'on demandoit le Point de l'Hyperbole ou de l'Ellipse, représentée par l'équation $xy - ax - by = 0$ (§. 2^o préc. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 24.81% accurate

54\$ DE LA COURBURE Planche préc Ex. /], dont la courbure est la même que celle du ch.xh xxiy. (jerc|c décrit avec un rayon r: On égalera à r Pexpref. §•»' fion générale du Rayon de courbure de ces Courbes , qui est (aacc ^bc+cQ yy) y/ (aacc + g&c + fp yy) 2 a ac' 9 on aura — laac^r =. (**c c + 4(bo+cc *)yy) y7 (aacc *f« 4(&f 4*f)J9f +4(^+«)j'/),i* ce qui, en quarrant & extraiant la racine cubique , donne 4ttvV*r ~**«-h4(*< + ")^ . Donc ^as=t=| /<^!^>), Cette grandeur devient imaginaire , i°. quand — *4*v/4*r;' est négative, [c'est-à-dire , quand r < i*] & b-\-c positive, [c'est-à-dire, quand b est positive , ou même négative, mais. c , & quand r > ia. Ainfi PELLIPfe , dans l'équation de laquelle b > c , n'a nulle part une courbure plus grande que celle du Cercle qui a pour rayon an. II. On peut demander , en quels Points d'une Courbe (a courbure est infinie ? Ce fera aux Points où le rayon de courbure est infiniment petit ou nul. On égalera donc à zéro Tcxpreflion générale du rayon de courbure de la Courbe proposée , & par cette équation , combinée , s'il le faut , avec celle de la Courbe , on déterminera les Points où la courbure est infinie, c'est-à-dire , plus grande que celle d'aucun Cercle donné. Telle est à l'Origine la courbure de toutes les Paraboles exprimées par Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 26.11% accurate

DES LIGNES COURBES. 549 Ch xii par l'éq : $y = ax^h$ lorsque h tombe entre 2 & ∞ . Piamcm 212. 111. On peut aussi demander en quels Points une Courbe a une courbure nulle , ou infiniment petite ? Telle est à l'Origine la courbure des Paraboles représentées par l'éq $y = a^*x^2$ lorsque h est > 2 , ou étant positif]. Le rayon de courbure

Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 18.90% accurate

îjo DE LA COURBURE V%S? . a Ç i 4- bbaax2""2) y/ (i +
 bbaax2*—2) g*3* X3U^- courbure eft - , - _S-*»jC i tbhhaax2** 2V : * b a
 . Soit ce raïon apellé r. On demande quelle eft la valeur cTx qui rend r un
 Minimum : car il eft bien clair , par la nature des Paraboles , qu'il n'y a point
 de Maximum , puifque leur courbure va en à l'infini , dès qu'une fois x a
 pallé certain terme. On a donc l'éq : (i + hhaax2b — i) ax* 2r , ou quarrant ,
 i tfribbaax2*' 2 + , *V*«*- * b'a'x6*-6 «x2*— * rr, qui repreïente une
 Courbe , dont x eft Pablciflê , & r Pordonne'e. Il s'agit de trouver Pablcifle
 qui a la plus petite ordonne'e. Pour cela , on cherchera le premier Rang de la
 Transformée qui refaite de la fubftitution de x + z à * , & der + «àr. Ce Rang
 eft 4«(— zbh(b — i) *s a x2*~* r)«+((-6yb6a{*bbaax2h — 2Y • (6 — 2)
 (*-i)' ■ D'un autre cote , Pécq: (i + fWa* — "2), : i = A(* — 1)sxb — 2ri mon(*
 (*hhaax2h 2) » tre que rr = , ; valeur qui , comparée bby-iyaa* * avec
 Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 25.95% accurate

DES LIGNES COURBES. 55i 2b 2 vi Planche /. avec la précédente , donne $(i + bbaax\ 2\ y\ vv,; \text{ ou } C\hat{i}^* - ?)^{(i + ^2/; ""3)'} i + bbaax2b - 2 \& - 2 (20 - ly\&osa^*$ ce qui détermine la valeur d'#. L'expofant $2^{--} 2$ d'x , dans cette équation , e'rant un nombre pair, il en re'fulte pour x deux valeurs égales , mais l'une pofitive , l'autre négative ; ce qui convient à la forme des Paraboles , qui ont des Branches (èmbables de part & d'autre de l'Axe des ordonnées. Ces valeurs d' x font imaginaires , quand h tombe entre 2 & £ , parce qu'alors le numérateur $h - 2$ eft négatif , & le dénomi0 nateur $zb - 1$ pofitif, ce qui rend la fraction $7-7 - ^{77} - r ^{(2/0 - \)hhaa$ négative, & fa racine du degré pair $2b - 2$, qui eft la valeur d'x , imaginaire. Mais ces valeurs d'x (ont réelles quand $b > 2$, ou h Ex. J1*0.4]î

The text on this page is estimated to be only 26.77% accurate

/ 552 . DE LA COURBURE XXW 11 w"-4]i lequel est un Minimum , quand $a+ \rightarrow J^{\wedge}/^{\wedge} h h/ta$. La racine de cette équation est toujours réelle , parce que la fraction $2t^{\wedge} hbaa$ est toujours positive. La Figure des Hyperboles fait voir auili que leur courbure diminué de part & d'autre, à mesure qu'elles s'approchent de leurs Asymptotes. Elles ont donc un Point où leur courbure est la plus grande & le rayon de courbure un Minimum. ■ - 214. Ce 2 ou $< i$, la courbure à l'Origine est infiniment petite. Ces courbures infiqs & infiniment petites varient cntr"e|les par des degrés infinis. Si on suppose b successivement égal à 2 , 3 , 4 , 5 , &c. on aura une suite de Paraboles, Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 26.64% accurate

DES LIGNES COURBES. SSS o.xn. bolcs , dont la première a, à l'Origine, une courbure fi- planchi \$• »'•• nie , la (èconde une courbure infiniment petite , la troifié- XXIVme une courbure infiniment plus petite que la (èconde , la quatrième une courbure infiniment plus petite que la troiûeme , & ainfi de fuite à l'infini. Car fi Ton fuppoſe que AM eſt la Parabole défignée par Péq : $y=ax^h$, & FiS* 1P~ A m la Parabole exprimée par Péq; $y=bx^k$, deforte que l'abſſiſſe AP e'tant $x>$ les ordonnées PM, Pm foient $ax \setminus bx^h \setminus$ ces ordonnées feront entr'elles comme a à b. Donc, b étant ſuppoſé plus petit que a , P m eſt plus petite que PM; la Parabole Am, dont le Paramètre b eſt plus petit, embrablè la Parabole A M , dont le Parame'tre a eſt plus grand; elle eſt moins courbe. On peut donc, en diminuant le Paramètre à l'infini , avoir une fuite de Paraboles , dont la courbure , à l'Origine , ira toujours en diminuant , & cela (ans changer Pexpofent b. Mais fi l'on patte à un plus grand expofant , on aura une autre (iite de Paraboles, dont la plus courbe, à l'Origine, fera moins courbe que celle de la préce'dente fuite , qui a la plus petite courbure. Car fi AQ^eſt une Parabole dont l'ordonne'e PQ^foit tx^{*1} , on aura Pm: PQ = $\frac{bx^{*1}}{ax^{*1}}$ ~I z=b:cx= c :x. Quelque petit que foit b & quelque grand que foit c , la fracYton — fera finie , & on pourra prendre Pablciflè AP [x] plus petite que — . Alors PQ ièra plus petite que Pm. C'eſt-à-dirc , que b Parabole AQjiont l'expoiant eſt $\frac{1}{h}+1$, embrablè la Parabole A m dont Pexpofant eſt h , quelque petit que foit le Paramètre b de cette dernière , & quelque grand que foit le Paramètre c de la première. Intn d. à l'Analyſe des Lignes Courbes, A a a a Ainfi

Digitized by Google

jj4 DE LA COURBURE Flanche Ainfi , chaque expofant donne
 une fuite Infinie de Pa- Ck.xii. *W» raboles , dont les courbures , à
 l'Origine , vont en dimi- \$• II* nuant à l'infini , à melûre qu'on en diminue
 le Paramètre . Et , en paflant d'un expofant à l'autre , la courbure chan. ge
 infiniment. Bien plus , entre les expolants confè'cutifs par ex. 2 , \$, on peut
 en interpofer une infinité ... 2 \ , 2|, 2t 2 î , 2 ï , 25, 2 f . . . qui donneront
 de nouvelles fuites de Paraboles , dont les courbures varient , dans chaque
 expofant, félon la variation du Paramètre, & infiniment d'un expofant à
 l'autre. Et entre ces expofants interpofés , par ex. 2 f & 2 1 , on en peut
 interpoler de nouveau une infinité d'autres ; de forte que toutes ces
 courbures, infiniment petites, ont des variétés infinies. 11 en eft de même
 des courbures infinies qu'on voit à l'Origine des Paraboles dont l'expofant h
 tombe entre 2 & | , ou Amplement 2 & 1 ; car celles dont l'expofant tombe
 entre 1 & i font les mêmes que celles dont l'expoiant tombe entre 2 & 1 [\$.
 1 2 7] . Si on fuppofe b égal fûcceffivement à 2 ou \> (, f, £, & C. on aura
 des fuites ide Paraboles de différens expofants , dont celles de la première
 fuite ont toutes, à l'Origine , une courbure finie, mais qui augmente à l'infini
 à proportion de leurs Paramètres ; ce qui fait que ces courbures varient félon
 toutes fortes de raifons données. Celles de la féconde fuite ont, a l'Origine ,
 des courbures infiniment plus grandes que celles de la première fuite ; mais
 quoiqu'infinies , on peut, en variant le Paramètre , les faire varier félon
 toutes fortes de raifons données ; enforte néantmoins que la Parabole de la
 féconde fuite qui eft la moins courbe , l'eft plus que la Parabole de la
 première fuite qui eft la plus courbe. Il y a donc ici , comme dans les
 courbures infiniment petites , des fuites de Paraboles dont les courbures ,
 dans une même fuite , varient par tous les degrés imaginables , en variant le
 Paramètre ; & dont la variation devient

The text on this page is estimated to be only 25.76% accurate

DES LIGNES COURBES. Si x devient tout à coup infinie, si on passe d'un exposant à l'autre, en conservant le même Paramètre. Et entre ces puissances, on peut en interposer une infinité d'autres, & encore d'autres entre celles-ci, & ainsi de suite à l'infini. 215. On se fera donc une idée plus exacte & plus complète de la courbure des Courbes, en regardant chacun de leurs Points comme le sommet d'une Parabole. Cette manière de les considérer suit naturellement, de ce qu'en portant l'Origine sur un Point quelconque de la Courbe, ce qui rend son abscisse x & son ordonnée y infiniment petite, la Série ascendante $y = Ax^h + Cx^k + Dx^l + \dots$ qui donne y en se, le réduit, par l'évanouissement de tous les termes qui suivent le premier [§. 102], à $y = Ax^h$, qui est l'équation d'une Parabole, [§. 126], Car l'exposant h ne peut être que positif; puisque s'il étoit zéro, ou négatif, l'ordonnée primitive y ou Ax^h (croît ou finit ou infinie, x étant infiniment petite. La Branche de Courbe représentée par la Série $y = Ax^h + Bx^k + \dots$ ne passeroit donc pas par l'Origine : ce qui est contraire à la supposition. L'exposant h est positif, lorsque la déterminatrice, qui donne le terme Ax^h , coupe les deux Bandes extérieures du Triangle analytique [§. 96. 20.]. Ainsi après avoir porté l'Origine [§. 29] sur le Point de la Courbe dont on veut chercher la courbure & la nature, on placera l'équation relative à cette Origine sur le Triangle analytique, & on mènera toutes les déterminatrices inférieures qui coupent les deux Bandes extérieures du Triangle. Le nombre des équations, semblables à $y = Ax^h$ qui donnent ces déterminatrices, est le nombre des Branches, réelles ou imaginaires, qui passent par l'Origine. Conséquemment, il exprime le degré de la multiplicité du Point situé à l'Origine. Aaaa 2 216. L'éq; digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 26.63% accurate

SI* DE LA COURBURE Planche 2 1 6. Vég : $y = Ax^h$ de chaque Branche déterminera ch.xh fa direction , c'est-à-dire, celle de la Tangente à l'Origine. Si $h > 1$, ce qui arrive quand la déterminatrice retranche une plus grande portion de la Bande (ans y que de la Bande fans x, [§. 96. ; la Branche touche à l'Origine l'Axe des abscisses. Car quand $b > 1$, y/x^b , est infiniment plus petite que x , celle-ci étant infiniment petite [§, 79]. Donc la Courbe , à l'Origine > s'éloigne infiniment moins de l'Axe des abscisses que de celui des ordonnées : elle est comme collée sur l'Axe des abscisses, qui est la Tangente. Si $h < 1$ y ce qui a lieu quand la déterminatrice retranche une plus petite portion de la Bande fans y que de la Bande l'ans x [§. 96. 20] la Branche touche , à l'Origine , l'Axe des ordonnées. Car $b < 1$ rend x infiniment plus petite que x^b , ou $Ax^b > y$, soit y [§. 79]. La Courbe , à l'Origine , s'éloigne donc infiniment moins de l'Axe des ordonnées que de celui des abscisses : elle s'applique pour ainsi dire , sur le premier , & le touche. Mais quand $h = 1$, c'est-à-dire , quand la déterminatrice coupe le Rang inférieur retranche des portions égales des deux Bandes extérieures du Triangle ; le rapport de x infiniment petite à y infiniment petite est un rapport fini de 1 à A y la Courbe partage l'angle des coordonnées,, (à Tangente est oblique aux ordonnées & aux abscisses , & l'équation $y = Ax$ détermine (à position [§. 183]. 217. Si l'exposant b est différent de l'unité , le premier terme de la Série $Ax^h + Bx^{h-1} + \dots$ fera connoître quelle est la courbure de la Branche à l'Origine. Elle est finie , quand $b=2$ ou f : Elle est infinie, quand b tombe entre 2 & 1 : Elle est infiniment petite , quand h est , ou plus grande que 2 , ou plus petite que 1 [§. 209. Ex, JJ], Dans Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 25.28% accurate

DIS LIGNES COURBES. $\wedge 7$ C«. xn. Dans ce même cas , le premier terme Axh fait aurti PtAKcm *• l|7- connoître la position des deux parties de la Branche deçà xxlv & delà de l'Origine. Mais pour cela , il vaut encore mieux prendre l'équation que donne la déterminatrice , sous la forme $y = *3ck$ qu'elle présente d'abord, que (bus la forme $y = Axh$, à laquelle elle se réduit, en faisant $A = k \& h - j -$. On a vu [§. 128] que cette équation $y = c^x$ représente toutes les différentes Paraboles, dont les deux Branches ont di verses situations , i °. suivant la nature des exposants $> k'$, / , qui sont pairs ou impairs; 20. suivant la nature du Paramètre «, qui peut être positif ou négatif. La Table que présente la Fig. 188 , rappelle ce qui a été dit dans ce §. 128. Elle présente quatre dispositions différentes , tirées de la parité ou imparité de k & / , lesquelles se subdivisent chacune en quatre autres , (elon que k est plus grand ou plus petit que / , & suivant que * est positif ou négatif. La première disposition , qui est celle des deux exposants impairs , donne tous les Points d'Inflexion visible , d'un degré plus ou moins élevé , & en général d'un degré égal à la différence de k & / diminuée d'une unité. Car l'éq : $y' = * * h$ étant mise sur le Triangle analytique , il manquera autant de Rangs, entre le Rang où est y1 & celui où est *x*, qu'il y a d'unités, moins une , dans la différence de k & / . Donc , cette différence diminuée d'une unité exprime le degré de l'Inflexion du Point qui est à l'Origine [§. 186]. Mais , k & / étant tous deux impairs , leur différence est paire , & diminuée de l'unité elle devient impaire. L'Inflexion est donc visible [§. 166]. La seconde disposition , qui est celle où le plus grand exposant est pair & le plus petit impair, donne les Points ordinaires , & les Points de Serpement ou d'Inflexion Aaaa 3

Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 23.75% accurate

DELA COURBUR E Planchi invifible , de tous les degrés. Car l'Inflexion s'il y en a Ch.xii xxiv. une ^ fera ^ couïm» dans la difpofition précédente , d'un * *17' degré qui s'exprime par la différence de k & / diminuée de l'unité. Ainfi, k & / étant l'un pair & l'autre impair, leur différence, qui eft impaire, dim'uée d'une unité fera un nombre pair. L'Inflexion eft donc invifible [§. 166] : c'eft un Serpement. La troifième difpofition eft celle où le plus grand expofant eft impair, & le plus petit pair. Elle donne des Points de Rebrouflèoaent[§. 206] de tous les degrés , félon que le plus petit expofant eft 2 , 4 , 6 , 8 , 1 c , ou &c Le Rebrouflément du premier degré eft un Point double , celui du fécond degré un Point quadruple , &c : le Rang le plus bas étant le fécond , ou le quatrième > &c. [§. 171] . Les Branches , qui viennent (e terminer à ces Points de Rebrouflément, y peuvent fubir des Inflexions, mais invillbles , parce que leur degré , [qui eft toujours la différence de k & / diminuée de l'unité] eft un nombre pair , & que les Inflexions d'un degré pair font invifibles. [166]. La quatrième difpofition, qui eft celle des deux expofants pairs , donne une équation réductible , & qui peut être regardée comme la reduplication de l'une des trois précédentes. Quand a eft pofitif , le Point que donne cette difpofition eft comme le Point de contacl de deux Paraboles adolles l'une contre l autre. Mais quand * eft négatif, Jes Paraboles font imaginaires , & le Point qui répond à cette fuppoftion eft un Point ifolé , invifible , fans courbure ; lequel pourtant appartient à la Courbe , parce que lès coordonnées ont entr'elles le raport qu'exprime l'équation de la Courbe. 218. Mais , lorfque $h=z$ 1 , le premier terme A^* de la Série ne détermine que la direction de la Branche à fon Digitized by Google

DES LIGNES COURBES. jyp c«.xil fon pafTage par l'Origine, ou la pofition de fa Tangente. pLamch« 5. «ip. a proprement parler , Pe'quation $y = Ax$ ert l'équation XXIV de la Droite qui touche la Courbe à l'Origine , & qui toucheroit aufli toute autre Courbe tracée par l'Origine , & ayant en ce point - là la même direction. Dans cette équation , x & y n'étant que des infiniment petits du premier ordre , elle n'exprime que leur raport ; mais elle ne manifefte pas les différences infiniment plus petites qu'il y a de Courbe à Courbe , & qui ne deviennent fenfibles que ouand on defeend à des infiniment petits de quelque ordre inférieur, comme on le fait quand $ou < 1$. Ainfi pour connoître, en ce Cas -là , la courbure de la Courbe ; pour choifir entré toutes les Paraboles , qui peuvent avoir la même Tangente , celle qui £ identifie , pour ainfi dire » avec la Courbe , & que les Géomètres nomment (à Y ar aboie ofta/atrice , il faut, ou continuer la Série $yz = zA^* + \&c.$ & en chercher le fécond terme, ou prendre les abfciffes fur la Tangente en conlervant la. pofition des ordonnées. Ces deux Méthodes reviennent prefque au même. On donne à l'Axe des abfciffes une pofition quelconque , (ans changer l'Origine ni l'Axe des ordonnées , en mettant dans l'équation de la Courbe p^2 pour x & qz^u pour y [§. 25. 111]. Soit AB l'Axe des abfciffes x , AD Kg. ap» celui des ordonnées y , AC la Tangente à l'Origine A. Cette Tangente eit donnée par Péc : $y = Ax$, que donne la déterminatrice qui traverse le Rang inférieur , enforte que l'abfciffe AB [1 J de cette Droite AG porte l'ordonnée BC [A]. On veut raporter la Courbe AM aux, coordonnées AQJz], QM[*]. Les lettres il fif exprimant le raport des côtés QA , AP , PQ^ du triangle APQ. & QA étant z , AP eft $p\%$ & PQ, qz . Mais $x = AP = z \& PM[j] = PQj > z + QMO\}$. 11 faut donc fubftituer />» à x , & $qz + u$ à y . Les triangles Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 24.95% accurate

5\$0 2>£ LA COURBURE Plawche glcs APQj ABC étant
femblables , la raifon p\q : i des Oh.xh. W- côtes AP , PQ., QA du triangle
APQ^eft la même que la 8raifon des côtes AB[i] : BC[y*].- CA[E] du
triangle ABC. Ainfi />=, & f=-*- = ^ . Après la fubftitution on écrira donc g-
pour p & ^ pour f ; ou , confervant la lettre p pour défigner la fraction -^r,
on A i écrira Ap au lieu de ^ [= ^ = -^x ^- = Ap] . La valeur de E [A C]
dépend de l'angle ABC, ou APM, des coordonnées. Si G eft le Sinus du
complément de cet angle, i étant le Sinus total, Elèra =y/ (AA± 2AG + i) ,
le figne + ayant lieu, quand l'angle A PM eft obtus, & le figne — , quand il
eft aigu [§. 14\$]. Si APM eft un angle droit , G = o & E=y/(AA>b 1)• Le
§. jo donne la manière de faire commodément la fubftitution
de/>zàx&defz+*àjy. Et Ton démontre par la Remarque faite au §. 107 ,
qu'autant de fois que Péq : y — Ax = o , ou y * x = o , foit q y — ■ />x=o,
diviè un Rang quelconque de la Propofée, autant manque -t- il de termes au
Rang homologue de la Transformée , du côté de la Bande fans y . Donc ,
puisque y — Ax—o eft au moins une racine fimple du Rang inférieur, il
manquera au moins dans la Transformée le terme que ce Rang devrok avoir
fur la Bande fans u, 11 partira donc de ce Rang une déterminatrice oblique ,
qui donnera l'équation de la Parabole olculatrice de la Courbe à l'Origine.
Mais fi cette racine, y — Ax = o eft double , triple, ou multiple , du Rang
inférieur ; fi elle divife au/Ti , une ou Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 25.14% accurate

DES LIGNES COURBES. 561 Ch. XII. ou plusieurs fois, quelques-uns des Rangs immédiatement Pi Axent §. supérieurs ; il manquera à la Transformée deux , trois , ou XXIV plusieurs termes du Rang inférieur , Se un ou plusieurs » termes des Rangs supérieurs. Par cet évanouissement , la déterminatrice inférieure prend une situation oblique, & donne l'équation de la Parabole osculatrice , d'un degré plus ou moins élevé. On trouvera la même chose par la Méthode des Séries. Car Pordonnée PM étant exprimée par une Série qui donne la valeur d'y en x, le premier terme Ax exprime la partie PQ comprise entre l'Axe AP & la Tangente AC , dont il détermine par conséquent la position ; « les termes suivants représentent la partie QM interceptée entre la Tangente & la Courbe. Mais AP [x] étant infiniment petite, tous les termes qui suivent Ax se réduisent au second terme de la Série. Donc ce terme donne l'expression de QM : ce qui suffit pour déterminer la position & la courbure de la Branche A M. Mais si l'on veut exprimer la nature de A M , par une équation parabolique ; il faudra prendre pour abscisse t non plus AP[x] , mais $A^2 = -x = \pm x$. On y mettra donc , dans le second terme de la Série qui représente QM, au lieu de x la valeur pz ou g a, & égalant ce terme ainsi transformé à une variable * , on aura l'équation parabolique qui exprime le rapport des coordonnées A Qj QM , tout près d'un point quelconque A de la Courbe. Exemple I. L'éq: $xx + yy - 4y = 0$ représente la circonférence ADB, décrite, sur la corde AB [x] , du centre C éloigné de cette corde de l'intervalle hitroà. à

PAAnalyse des Lignes Courbes. Bbbb CK Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 26.24% accurate

T6i DE LA COURBURE Planche CR [ia]. On demande la
 Parabole osculatrice au point Ch. xii xxi/. a , où l'on a pris l'Origine t \$• La
 Série amendant , par laquelle l'équation proposée donne la valeur d'jf en x ,
 est $y \sim x - Ma''^{bb} xx^{\wedge} \&c$, dont le premier terme $-g x$ exprime la partie
 de l'ordonnée $PQ^{\wedge}$ comprise entre l'Axe AP & la Tangente $AQ^{\wedge}$ ("i bb le
 fécond terme $-xx$ marque la partie QM comprise entre la Tangente $AQ^{\wedge}$
 & la circonférence AM , dans la supposition d' x infiniment petite. Ce terme
 est négatif, parce que de part & d'autre de A , la Courbe rh A M tombe au-
 dessous de la Tangente tAT. Mais , sans avoir égard au signe , si on égale à «
 ce terme transformé par la substitution de -1 à x ou $-rrzz$ à xx 1 [car
 $E=y/(AA>i* i)$, parce que l'angle des coordonnées est droit, & $V(^{\wedge}+i) =$
 $v/(^{\wedge}y^{\wedge})$, parce que $A=.g9$ le premier terme Ax de la Série étant 4 -, aa + bb
 bb zz T«] , on aura « $= -^{\wedge} * ^{\wedge}+44" = -j$ pour l'équation de la Parabole
 osculatrice du Cercle au point A. Ou il est à remarquer que le paramètre h de
 cette Parabole , est la corde ou ordonnée primitive AB. On aura
 précisément la même chose par le Triangle analytique. Qu'on y place
 l'équation proposée $xx + yy - ax^4 = 0$, elle n'aura qu'une déterminatrice
 inférieure, qui traverse le premier Rang, & donne l'équation $-ax.^{\wedge}=0$,
 ou $yz=jx$. Donc $A=\sim$. Et si l'on substitue Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 18.43% accurate

DES LIGNES COURBES. 5[^] C«.XO. * O * . Planch* §. »ii. _ %
^ xxiv. o ftituë pz à x & r/z, + ,v à y , on aura Péquation (pp + ff)zz +
2fuz+i*uu+(bf — ap[^]z[^]busszo, ou , (/P + f?)ZZ + (— ap+bq[^]z 02 01 2f
uz+ bu ■ . 1 * o mettant Ap [= ^] pour 7 , (1 + ^)/>/zz * 2 j/r«z _ _ . aa
»+« 2a ^uu+Çap — apiz+bu[^]zo, (bit - ~ ppzz + ~[^]pu% + uu +bu = o. Cette
Transformée , étant miiè fur le Triangle anak la café z refte vuide & la
déterminatrice inau 1 bb férieure paflant par les Cafés u & zz donne — j[^]—
ppzz . aa + bb zz eft à la Parabole ordinaire [§. 12\$] , mais dont le
paramètre— Ç^{^^}bPypp cft néêalif> Parce 9ue branches AM, Am, tombent
du côté négatif de l'Axe tAT des abfciflès. Ce paramètre , au refte , (è réduit
à — b, en mettant pour pp fa valeur ËË = éia[^]bbt Bbbb 2 Donc Digitized by
Google

The text on this page is estimated to be only 26.07% accurate

56 DE LA COURBURE Flanc h b Donc un Cercle ABD étant donné, & l'Origine A étant prise à volonté sur un Point de (à circonférence, on aura la Parabole osculatrice en ce Point-là, si on mène la Tangente AT, & une corde quelconque AB. Car la Parabole décrite du sommet A, avec le paramètre AB, sur les Axes AT des abscisses & AB des ordonnées, est la Parabole demandée. Réciproquement, le paramètre d'une Parabole ordinaire AM étant donné, on trouvera le Cercle osculateur, ou le Cercle de même courbure que la Parabole à l'origine A, en prenant, sur l'Axe des ordonnées, AB égale au paramètre, & élevant BD perpendiculaire à AB, qui rencontre en D la droite AD perpendiculaire en A à l'Axe des abscisses AT. Car AD est le diamètre du Cercle de même courbure. En effet, le Cercle ABD de même courbure que la Parabole en A au Point A, s'identifie, en quelque sorte, avec elle en ce Point; de sorte que l'arc infiniment petit AM est commun au Cercle & à la Parabole. Qu'on mène par M l'ordonnée QN, qui coupe la circonférence en M & en N. Et par la nature du Cercle, le carré de la Tangente AQ est égal au rectangle sous QM & QN. Mais, par la nature de la Parabole [§. 22 J, le carré de l'abscisse AQ est égal au rectangle sous l'ordonnée QM & sous le paramètre. Donc le paramètre est égal à QN, ou AB; puisque AM, étant un arc infiniment petit, QN & AB, qui sont infiniment proches l'un de l'autre, sont égales. Ainsi, lors qu'on aura trouvé la Parabole osculatrice d'une Courbe en un Point quelconque, on aura le Cercle de même courbure, (sans recourir aux Séries, par lesquelles nous l'avons trouvé au §. 2c 8. Mais ceci suppose que la Parabole osculatrice est une Parabole ordinaire, dont la courbure, à l'Origine, est finie. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 19.22% accurate

DES LIGNES COURBES. y C* XII. nie- Car fi la courbure d'un Point de la Combe, ou de P«ANcm §. m». fa Parabole ofculatrice , eft infinie ou infiniment petite, xxlv« on ne fauroit trouver un Cercle de même courbure [§. Exemple IL Soit propolée Teq : $\frac{y^4}{4} + y^2 = x$, qui repreTente une Courbe, rigt qui a quatre Branches hyperboliques , dont les Axes lbnt les Afymptotes j 38 J. La Se'rie amendante, qui donne y en x, eft $y = \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$ Le premier terme $\sqrt{x}$ qui de'tertermine la pofition de la Tangente , donne $A = \sqrt{x}$, & par conféquent $E = V(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}) = \frac{3}{2} + 2\sqrt{x}$ Tr . $x^* a' t > 1$ V • Le fécond terme $\frac{1}{2\sqrt{x}}$, égale a », après 2 44 avoir mis -g pour x , donne , pour la Parabole ofculatrice à l'Origine, l'éq: $(9 + 12^2 Hh 8G, G)^{\wedge} \ll z^0$ qui eft du quatrième degré , & défigne que le Point de l'Origine eft un Point de Serpement f §. 168 , III , ou §. 2 17] d'une courbure infiniment petite [§. 209. Ex. //]. Selon l'autre Méthode , l'opération fe fait ainfi. L'éq ; $y^4 + 4y^2 = x$, J' — $y^2 = \frac{x}{4}$ — f 0 > mife fur le Tr : anal : a pour unique de'terminatrice inférieure celle o * * * o 0000 000 * * qui Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 20.01% accurate

566 DE LA COURBURE Picore qui traverse le premier Rang , & donne l'équation — $*W_j \text{ Ch. } xh \text{ xxiy. } x \text{ Jy } \S.z,t. -f^{***} = o, o \backslash xy = \sim$. En substituant pz à x , & , l'équation proposée se transforme en $(/y' V_i + ^\wedge, f) Z + * (1p^0 * V^* — J^\wedge / > * V + < — * V^* * z — 4'^2 = o$, ou, mettant $^\wedge [=f]$; pour f , $-Cz4 + A^\wedge \gg — a^* u^0 f2 = o$. Cette Transformée étant mise sur le Triang : anal : on verra que la déterminatrice inférieure $o * o o * o o o o o o . o * o o . paOc$ par les Cafés u & $z4$ & donne l'éq; $-.4^* \gg * V — -, , 2V^* 2r \text{ tf} V2t = o$, ou $\ll = 3 = ^\wedge = : [\text{ en mettant pour } * \text{ fa Valeur } i^\wedge — i^\wedge]^\wedge ZGG)^* > * = 5^*$, comme par la Méthode des Séries. 2i s». Mais lorsque le Point situé à l'Origine est un Point multiple , il peut fort bien arriver que pour connaître sa nature il ne suffira pas de chercher le premier & le fécond terme de la Série , qui représente une Branche partant par l'Origine. Les termes suivants y peuvent apporter de grandes modifications. Car le Point de l'Origine étant Digitized by Googl

The text on this page is estimated to be only 16.68% accurate

yy. \y<j\$s. -4 ■air >.l . impair impair pair |i * » / pairs eritif t ce
négatif ^positif > HK ocpçtittf *nejatif '■ r j 1 pair pair pair impair pairs
Digitized by Google

Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 28.71% accurate

DES LIGNES COURBES. s6j Ch.xil étant fupposé multiple ,
l'équation qui donne le premier p^k ch. M'* terme de la Série, a plusieurs
racines [§. 185]: elle peut donc avoir des racines égales , qui produisent des
termes irréguliers [§. icq] , lesquels peuvent faire que la Série , qui d'abord
sembloit unique , le fourche & devienne multiple • ou bien qu'elle devienne
imaginaire , soit entièrement', soit à demi L§. 104]. De forte qu'une
Branche, qui sembloit, à ne consulter que le premier ou les deux premiers
termes de la Série , étendre un Rameau de part & d'autre de l'Origine , peut ,
à cause des termes fuivants , en jetter deux ou plusieurs de part & d'autres ,
ou n'en jetter que d'un côté , ou devenir imaginaire. Il est donc nécessaire ,
pour avoir une idée complète d'un Point multiple d'une Courbe , d'avoir
non-seulement le premier ou fécond terme de toutes les Séries amendant
que peut donner son équation, mais encore de continuer ces Séries jusqu'aux
termes réguliers , auxquels quand on est parvenu , on n'a plus à craindre
qu'une Branche , qui paroît simple , soit réellement multiple , ou d'icelle
paroît entièrement , ou d'un des côtés de l'Axe des ordonnées. Les
Exemples qu'on va donner dans le Chapitre suivant , éclairciront a(Tez ce
qu'on vient de dire. CHAPIDigitized by Google

The text on this page is estimated to be only 23.11% accurate

CHAPITRE XIII. Des différentes espèces de Points multiples dont peuvent être susceptibles les Courbes des premiers Ordres. §. 220. Des Points doubles. *xxv!* fUAND "Origine est un Point double, le plus bas Rang de l'équation mis sur le Triangle analytique est le second Rang, $dy^2 + exy + fxx$. Ce Rang égalé à zéro donne une équation du second degré, qui a deux racines. Si elles sont imaginaires, les deux Séries qu'auroit pu donner la déterminatrice qui passe par le second Rang (ont imaginaires. L'Origine est donc un Point conjugué, ou ifole, Point invifible, détache du contour de la Courbe, & qui pourtant lui appartient, parce que ses coordonnées ont entr'elles la relation exprimée par l'équation de la Courbe. Tel est le Pôle de la Conchoïde, lorsqu'il n'y a point; aucune Branche de cette Courbe. Voyez 4. 174. Çx. IV, & ci-dessus Ex / . n^o. 2. * 1^{er} il. Si les racines de l'éq : $y^2 + vx + xx = 0$ sont réelles & inégales, qu'elles soient $y = Ax$ & $y = A'x$. Elles représentent deux Droites qui touchent la Courbe à l'Origine [\$.i8j], & les deux Séries $y = Ax + \&c$, $y = A'x + \&c$. expriment deux Branches qui partent par l'Origine, & qui s'y croisent sous un angle fini, mesuré par celui que font leurs Tangentes. L'interlèvement de ces Branches fait le Point double, qu'on nomme par cette raison, Point de Seffion

Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 27.32% accurate

DES POINTS DOUBLES. S69 Ch.xIII. Se&ony ou cChter/eff/on , Point de Croix , & auffi Noeud Buncak [§. 10]. xxv' Ce Point varie par les Inflexions & Serpentelements de fes Branches. Cest un Noeud /impie , quand (es Branches n'ont aucune Inflexion au point où elles (e coupent. Telles font les Branches de la Conchoïde , quand elles panent par le Pôle f §. 174. Ex. IV. Voyez auſſi ci - deſſous , Ex. I. n°. § 1 . Dès le troiſième Ordre les Courbes font ſuſceptibles de ce Nœud , où la Tangente n'eſt cenſée rencontrer la Courbe que trois fois [§. 181]. Si Tune des deux Branches , qui ſe coupent , a une Inflexion au Point de Croix [comme §. 186. Ex. VI] , on le nomme Noeud avec une Inflexion. Et ſi cela arrive aux deux Branches, [§. 186. Ex.V] c'eſt un Noeud avec deux Inflexions. Ce n'eſt qu'au quatrième Ordre que les Courbes commencent à être ſuſceptibles de ces Points -là, où la Tangente eſt cenſée rencontrer quatre fois la Courbe [§. 181]. Si Pune des Branches ſerpente au Point de croix , on l'appelle Nœud avec un Serpentelement , & ſi les deux Branches y ſerpentent , Noeud avec deux Serpentelements , ou enfin Noeud avec Inflexion & Serpentelement , ſi une des Branches ſerpente & que l'autre ſoit infléchie au Point où elles ſe croiſent. On voit de-là les noms qu'on peut donner aux Nœuds , dont les Branches ſe croiſent au Point de croix des Inflexions ou des Serpentelements de degrés ſupérieurs. Et quant à l'Ordre des Courbes ſuſceptibles de ces Points -là, on voit qu'il ſera, au moins, le 4^e , ſi l'on a une Inflexion [ſous laquelle on comprend auſſi le Serpentelement] de la Branche , qui la ſubit au plus haut degré , le 4^e degré / [§. 181]. Tout cela ſe diſtinue aſſez, en examinant combien de Rangs, en remontant depuis le plus bas, ſont diviſés - Introd.à l'Analyſe des lignes Courbes. Ce ſont ſans Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 21.96% accurate

570 DES POINTS DOUBLES. Plakche fans interruption par l'une ou l'autre des racines j — Ax Ch-Xe xxv- =0,7 — $A'x$ — o [§. 186]. S.» Ou bien , en cherchant le (ècond terme des Se'ries $y=v4,*4-$ &c. $y=. A'x +$ &c. On le trouve, en subftituant à y d'abord $Ax-\backslash$ -tt y & enfuite $Ax + u$, dans Inéquation de la Courbe. Dans les transformées, le terme xx manque , parce que $y=Ax$, $y = A'x$ font des racines de l'éq : $dyy + exy 4* fxx = o$, mais le terme ux ne manque pas , parce que ce (ont des racines ilmpJes [§. 107]. La determinatrice , qui donne le terme «, partant de la Café //x, pallera donc par la Cafe xl , ou, fi elle cft vuide, par x^* , ou, fi celle-ci cft encore vuide , par xs &c. Elle donnera donc une équation telle que $u — \blacksquare * * * r^{isa^} rj$ * * 0 o o . • 1 ., : ' ... ' n ? : '(.:ïl .jh fififij »V • 0 Bx:, ou $u = Bxi$, ou $u — Bx+$, &c. Si Texpolant de x , dans ce fécond terme , eft 2 ; la Branche que repréfente cette Série ne tobit aucune Inflexion. Si cet expolant eft ou un nombre impair; elle fubit.une Inflexion vifible. Si c'eft 4 , ou un nombre pair plus grand que 2 ; la Branche lèrpente. Et le figne $4<$ ou — du coefficient B , fait connoitre de quel côté de leurs Tangentes tombent les Branches qui. font le Nœud , . de quel côté elles tournent leur concavité. Voyez ci-defTous Ex.I. n\ 3. Ceci fuppose que, dans l'équation propolee , le terme dyy ne manque pas. S'il manque , la Café xy ne fera pas vuide, puifqu'alors le lècond Rang, réduit à fxx , donneroit Peq:/* $x=o$, dont les deux racines $xz=z$ o,xrro, 1 ieroient Digitized by Google»

The text on this page is estimated to be only 25.94% accurate

DES POINTS DOUBLES. 571 Ch.xiii. lèroicnt égales , & nous les fupposons inégales. Ainfi , de plaho* 5. *»• la Café xy il partiroit une déterminatrice , qui partant par x^7 la Calé y^* , ou y^* y ou ys , &c. donneroit $x = \ll /$, ou $3i = \ll >$, ou $x = y$, &c. qui marque que l'Axe des ordonnées touche une Branche , fans Inflexion , fi Pexpor (ànt d^{ert} 2 ; avec une Inflexion in vifible, fi c'eft un autre nombre pair ; ou avec une Inflexion vifible , fi c'eft un nombre impair [§. 186]. 111. Si Péq ; dyy 4^* e xy ** fxx — o a deux racines égales , c'eft-à-dire, une lêule racine double $y > / d^{**}$ x\Zf=o9 le Point double eft formé par deux Branches qui (è touchent , & qui ont , au Point de contact , une Tangente commune, dont Péquation eft cette racine double. Voilà pourquoi l'équation qui la détermine eft du fécond degré , parce qu'il y a deux Branches , & en quelque forte deux Tangentes; mais cette e'quation n'a qu'une racine [double] , parce que ces deux Tangentes coïncident & n'en font qu'une. Les deux Branches, dont le contact fait le Point double, peuvent fè terminer à ce Point, ou palier au-delà. Elle s'y terminent , quand les Séries qui les repreTentent font demi-imaginaires; & alors ce Point eft un Rebroufetnc.it \ elles vont au-delà, quand ces Séries font réelles ; & alors ce Point-est une Ofiulation. Il y a plufieurs fortes d'Ofculations. Quand les Branches qui fe -touchent tournent l'une contre l'autre. leur convexité , comme deux Cercles qui (è touchent en dehors ; on dit que ces Branches fe hatfent , & leur contael le nomme proprement Qfculathn. Quand ces deux Bran- ng. 191. ches tournent leurs convexités d'un même côté , comme (deux Cercles qui fe touchent par dedans ; on dit qu'elles sembrafent, & leur contaa fe nomme Embrasement. ' Si mune des Branches fufit une Inflexion vifible & l'autre non, elles fe baifent d'un côté & s'embraflênt de l'autre ; ce qui Cccc 2 fait Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 23.80% accurate

rig. 19 1. 572 DES POINTS doubles: v PtANCHt fait une Ofculation avec inflexion , ou pour abrégé , Ofcu- Ch.xtiii. xxv. jirfixio». Si les deux Branches ont une Inflexion visible, 'y4# qu'elles s'embrassent des deux côtés , c'est un Embrasement Ftg. 19\$, avec Inflexion , ou une Embra'Jirflexion. Ajoutez, les Ofculations imaginaires , qui (ont des Points i foies ; mais ditlérens de ceux que nous avons indiqué au N°. I. de ce §. en ce que ceux-là manifestent leur nature dès le premier terme de la Série , lequel est imaginaire ; au lieu que ceux-ci ne le découvrent que par les termes suivans. En sorte que, quand on cherche leurs Tangentes , comme elles sont données par le premier terme de la Série , on les trouve réelles , quoique les branches de la Courbe soient imaginaires. Il y a aussi deux sortes de Rebroussement. L'un, qui est le Rebroussement proprement dit, est une demi-Ofculation formée par deux Branches qui tournant leurs convexités Tune contre l'autre , se terminent au Point de contact. L'autre, qui est un demi-Embrasement , est formé par deux Branches qui tournent leurs concavités d'un ffc. même côté & se terminent où elles se rencontrent. On peut le nommer Rehroussement en bec, ou simplement Bec. On discernera toutes ces . sortes de Points doubles , en continuant la Série $y = -x^4 + c$. On substituera f f donc $-xy^7 + Jj$ +«, [ou faisant $-Vj=A$] Ax^*u à y dans la proposée , & on aura une transformée , où la Cafe de la Pointe & celles du premier Rang manqueront comme dans la proposée. Mais de plus les Cafés xx & «x feront vuides , y — $Ax = 0$ étant une racine double du iêcond Rang [§. 107]. La déterminatrice inférieure partira donc de la Cafe uu. . i. Si la Café x' est pleine , ce qui arrive quand y— Ax ne

Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 22.36% accurate

DES POINTS DOUBLES. 57? Ca.xni. ne divifè pas le troifième Rang de la propose [§. 107]; planchs 5- la déterminatrice parte par les Cafés uu & x5 , & donnera x*v* * o o O o . . (: . 1 «ne équation qui a deux racines demi - imaginaires , u = + x y/Bx , u = — x^i? x . Les Séries j :=y4x + x y/Bx &c , y = Ax — x\Bx ért. marquent que ia Tangente [reprentée par l'équat : y=zAx] eft touchée par deux Branches qui tombent de part & d autre [ce qui eft indique' par les termes -\-xy/Bx, — x^-fix] & fè jettent d'un côté feulement de l'Axe des ordonnées [fç. du coté positif, fi B eft positif , & du côté négatif, fi B eft négatif]. Le Point eft donc un Rchoujement tel que ceiui qui eft à l'Origine de la Parabole exprimée par Véq: yy = *xi [§.417]. Voyez ci-defious , £x. /. »°. 4. Ce Rebrouflement eft le feul Point double à fimple Tangente, qui puiflè convenir aux Courbes du troifième Ordre. Car fi, dans leur équation, la Cale x1 étoit vuide, la transformée feroit divifible par u , & la propofcé par y — Ax[=*'\, Elle ne reprélenteroit donc plus une (impie Couibe f §. 21]. 2. Si la racine y — Ax = o divifè le troifième Rang r & non le quatrième , de la propofée ; il manquera dans la. transformée la Cafe x' , & non pas x4. La déterminatrice
• • • • * • • • * o *. o o Cccc j infeDigitized by Google

The text on this page is estimated to be only 24.57% accurate

574 J>£J POINTS DOUBLES. Planche inférieure paflè alors par les Cales uu , ux & x4. Ainfi ck.xiii. XX/* elle donne une équation du fécond degré^ qui a deux ra- f* »*• cincs u = Bxl , «=flV. On a donc deux Séries, jrz= Ax+Bx* &c. y=Ax>^Bxl &c. Il le peut faire que B & B' ibient imaginaires. Alors les deux Séries , & les Branches qu'elles repréfontent , & XOfculation de ces Branches , tout elt imaginaire. Voyez Ex. IL n°. 6. Si B & B font des grandeurs réelles de différents ftgnes , les Branches de la Courbe tombent de part & d'autre de la Tangente commune , elles font adoflees Tune contre l'autre : elles font une véritable Ofculation. Voyez Ex. IIn". i & 2. Si B Se B' (ont des grandeurs réelles inégales de même ftgne , les deux Branches tombent d'un même côté de la Tangente & font un Embrafement. Voyez Ex. II. n°. 4. Mais , quand B & B font égales , on ne peut encore rien décider fur la nature du Point double , parce que la Série Ax + Bxl (*rc. n'eft pas régulière, il faut donc fubftituer Bxx + t à u dans la première transformée, & on en aura une féconde, où il manquera le terme confiant & les termes x, xl , x* , x\ / , /x, tx\ La déterminatrice partant de la Café // , traversera donc fa • • • • o • • • 00 * 00 o Café x5 , fi elle n'eft vuide , & donnera une équatio» qui aura deux racines, /sss-j-VCxl , /= — y/ Cxs , ou / == ± xx VCx . Dans la double Série y = A x B xx l zfcxxv/Cx . » • (»."

Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 24.21% accurate

DES POINTS DOUBLES. 17J Ch.xiit. ^n xxy/Cx &c , le troisi me terme demi- imaginaire fait PLANCIFl \$,%xo. voir qUC les ' ordonnées ne sont réelles que d'un coté de xxy. leur Axe. L'En brafiement , d fign  par les deux premiers termes, nYft donc qu'un demi - embraillement , un Bec. Voyez Ex. III y & IV, r. Mats fi la Caie x' de la féconde transformée est vuide; la d terminat ee traversant les Cafés //,/x', x6 donnera une équation dont les deux racines ,J=: Cx1 , / = CV , fourmiflent deux Séries y = Ax + Bx1 + Cx% &c , y = Ax*Bx +C'xi &c Si C & C sont imaginaires ; les Branches sont imaginaires, & PEmbrai ement, aul i imaginaire, se réduit à un Point conjugué. . . Si C & C' sont réelles & de différents signes; le Point double est un Embraflement. Voyez Ex. II, né 5 , & Ex. IV, né. 2. . . Si C & C sont réelles , de même signe , & inégales ; le Point double est encore un EmbraiTement , plus intime. Mais, fi C = C, la Série y=Ax + Bx1 + CxJ &c. n'est pas encore régulière. On fubstituera donc CV -W à / dans la féconde transformée , pour en avoir une troisi me , donc la déterminatrice inférieure , partant de la Cale //, paTera par la Cale x7 , fi elle n'est vuide, & donnera f — -± ^Dx7 = idfc x% y/Dx. Il y aura donc deux Séries y = Ax + fix1 -f Cx' + x' ^Dx &c. y = Ax+Bxx 4-CV — x^Dx &c. qui, à cause du terme ztxyUx demi-imatoinatre , défignent un Rebrouflement en Bec. Ou , fi la Cafe x7 est vuide , la déterminatrice inférieure paflera par //, /x4 , x* , & donnera une équation à. deux racines j=0x\ j=Z7x% fur lesquelles on fera les mêmes confid rations que ci-deflus. Cela peut aller à l'infini , mais la Méthode ne varie point. Et il n'en résulte jamais que des Embraffemens , soit réels, soit imaginaires, ou des Rebrou (Tements en Bec.   Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 27.20% accurate

j75 DES POINTS DOUBLES. planche \\ est le plus souvent aidé de connoître, ûns calcul, fi Chtiii xxv' le Point double est un Embrassâent ou un Bec. C'est " $\langle \rangle$ " lorsque la racine double $u = Bx$, de l'équation que donne la déterminatrice de la première transformée, ne divise pas la somme des termes du fécond ordre, qui (è trouvent sur une Droite parallèle à cette de'terminatrice. Alors [§.113], fi Pexpolant 2 de la multiplicité de la racine $*$ $= Bx!$ divise la différence des expolants du premier & du fécond ordre, c'est-à-dire, fi cette différence est un nombre pair, [ce qu'on connoît, (ans calcul, lorsque le nombre des intervalles, qu'il y a entre la de'terminatrice & la parallèle qui pafte par les termes du fécond ordre, est un nombre pair] : alors, dis-je, les deux Séries n'ont point de termes demi-imaginaires : elles (ont toutes réelles ou toutes imaginaires : elles défignent un Embrassement, réel ou imaginaire. Mais, au contraire, elles défignent un Bec, elles ont un terme demi- imaginaire, lorsque le nombre des intervalles entre la déterminatrice & (à première parallèle est un nombre impair, lorsque la différence entre les expolants du premier & du fécond ordre est impaire; c'est-à-dire, lorsque cette différence n'est pas divisible par l'expolant 2 de la multiplicité de la racine $Bx1$ de l'équation que fournit la déterminatrice. [t§. n] Voyez Ex HZ, & IV, i. Tous ces Points peuvent être trouver sur des Courbe* du quatrième Ordre & ceux qui fuivent n'appartiennent qu'à des Courbes des Ordres supérieurs. Si la racine double $y - yfx = 0$ du fécond Rang divise le troisième & le quatrième, mais non le cinquième ; il manquera à la Transformée les Cafés x' & x^* , mais non xJ , & il faut distinguer deux Cas. Ou la Café « $x1$ est pleine, ce qui a lieu quand $y - A^*$ ne divise le troisième Rang qu'une fois ; ou elle est vuide, ce qui

Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 27.28% accurate

DES POINTS DOUBLES. 577 Ch. xtil qui a lieu quand $y = Ax$ divilè plus d'une fois le troifiè- Planche §. «o. me Rang [§. 107 J. xxv. Quand la Calé u x1 est vuide , la de'terminatrice , pat(ànt para1 & x5 , donne $y = \pm \sqrt{Bx} = \pm x1 \sqrt{Bx}$. La double Série $y = Ax$ d= xy/Bx &c. marque un Rebrouflement à double Inflexion. Cette Inflexion , quoiqu'invisible , diltingue , dans le Calcul , ce RebroulTement du fimple Rebrouiement , n°. 1. Voyez Ex. VI. Quand la Cale uxx est pleine, il y a deux déterminatrices inférieures. L'une, qui pafle par «* & «x1 , donne « = $Bx \setminus$ L'autre, qui parte par uxl & xJ , donne « — $Bx \setminus$ On a donc deux Séries, $y = Ax * \sqrt{Bx}$ &c $y = Ax + B'x$ &c. La première marque une Branche qui tombe toute d'un même côté de la Tangente. La féconde marque une Branche qui croilè (à Tangente au Point de contact, comme la Parabole exprimée par Téq : $y = \sqrt{x}$ [§.217]. Le concours de ces deux Branches, qui ont une Tangente commune au Point où elles fe croifent, forme une Ofculinflexion. Voyez Ex. V. Ces deux Points peuvent convenir aux Courbes du cinquième Ordre : ceux , dont on va parler , ne conviennent qu'aux Courbes des Ordres fupérieurs. 4. Si la racine double^ — $Ax = 0$ du fécond Rang, divHè le troific'me , le quatrième , & le cinquième , mais non pas le fixieme; il faut aulii diftinguer deux Cas, (èlon Introà.àrAn*lyfc de s Ligne s Courbes. Dddd que • • • • o • • 00 * o o * o o • • • • o • • * o * o o o o

o Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 26.03% accurate

j78 DES POINTS DOUBLES. Fi anche que cette racine divifè le troifiètne Rang une ou plufieurs ûi.m xxy. fois. •** • o o • o •* o • 0*0 • € O O * o o * o o 00 00 O ' o Si elle ne le divifè qu'une fois , il manque à la Transformée la Cafe de la Pointe , & les Cafés *, x* , x* , x4 , x5, u9 & ux. Il y a donc deux déterminatrices , qui paflent, Tune par uu & «x1 , l'autre par «x1 & x*. La pre'mie're donne mz=.Bxx , la féconde » = £'x4. On a donc deux Séries , $y=zAx^{< Bx1}$ & $y=zAx + B'x^*$ &c. Les expofànts pairs de x dans le fécond terme marquent que chaque Branche tombe toute d'un même côté de la Tangente commune [§«2r7]. Ainfi le Point double cft une Oñulation , ou un Émbraflement , fçavoir un EmbralTement quand B & Bf ont un même figne , une Olculation quand ils ont différens fignes. Mais fi $^{\wedge} — Ax$ divifè plus d'une fois le troifième Rang de la propofee ; il manquera encore à la transformée la Cafe ux\ & il n'y a qu'une déterminatrice , qui paûant par les Cafés uu , ux% , & x* , donne une équation du fécond degré, dont les racines foient $uz=zBx1$, $u = B'x\$ En failânt fur ces racines les mêmes confédérations qu'on a faites au n°. 2 , on verra , Que fi B & B font imaginaires , le Point double eil un Point ifolé. Que s'ils font réels & de différens fignes, les Séries $y = Ax > i^* Bx\%$ & $f. y = zAx + \&c.$ marquent une OftulADigitized by Googl

The text on this page is estimated to be only 28.31% accurate

DES POINTS DOUBLES. 579 Ofculat'ton femblable à celle de deux Paraboles cubiques , Pianchi §. *»o. qUi à la vue ne diffère prefque pas des Olculations indi- xx7, quées ci-deflus, à moins que B & B' étant fort inégaux, les deux Paraboles ne diffèrent beaucoup en courbure. Voyez Ex VU 2. 19 Que fi B & B font réels , de même figne , mais inégaux, les Séries $y = Ax > \{ * Bx1 \text{ \&c. } y = Ax + B'x^*$ érc défignent un Embrasement avec hjkxion. Voyez Ex, VII I. Fig> Et fi B=B , la Série $y = Ax + Bx^*$ \&c. n'eft pas encore régulière , il faut la continuer. Mais , par un raifonnement tout femblable à celui qu'on a fait au »°. 2 de ce §. on s'affurera que le Point double ne peut être qu'un Bec , ou une Embraffinflexion , ou un Embrablément imaginaire. Ainfi Ton peut affirmer , Que les Courbes du fécond Ordre ne peuvent avoir de Points doubles [§. 174. Ex. VI]. Que celles du troifième Ordre ne font fufceptiblcs que du Point conjugué, du Nœud fimple, & du Rebrouflment. Qu'avec ces trois fortes de Points doubles , les Courbes du quatrième Ordre peuvent avoir le Nœud avec une ou avec deux Inflexions, l'Olculat'ion réelle & imaginaire, l'Embrablément , & le Rebrouftement en Bec. Ajoutez , pour les Courbes du cinquième Ordre , le Nœud avec un ou deux Serpentements , le Nœud avec Inflexion & Serpentement , & POlculinflexion. Et , pour les Courbes du fixième Ordre , le Nœud avec une ou deux triples Inflexions , le Nœud avec une triple Inflexion & un Serpentement , le Nœud avec une triple & une fimple Inflexion , & PEmbraflîn flexion. Il feroit aifé, mais fuperflu , de poufler ce détail plus loin. La méthode eft générale , & l'on peut fuivre cette Dddd 2 énumeDigitized by Google

The text on this page is estimated to be only 26.54% accurate

580 DES POINTS DOUBLES. pi anche énumération autant qu'on le voudra , ou autant que des ch.S!l xxy. vues particulières le demanderont. Il ne refte donc qu'à éclaircir tout ceci par des Exemples. U Exemple I. eft propre à faire mieux connoître tous les Points doubles dont les Courbes du troifième Ordre font lufceptiblestk. «• Vé[^]: *yy — *J-K[^] — f)« + *«=o reprénum. i. fente une Courbe compofée d'une Ovale , placée du côté des abfcifles négatives, dont le diamètre AC eft égal à c, & de deux Branches qui vont à l'infini du côté des abfcifles pofitives, partant du Point B éloigné de l'Origine A d'une diilance AB=f. On le voit clairement en donnant à l'équation cette forme $y = \pm \sqrt{(x - b)^2 - c^2}$: y² / i = $\pm \sqrt{(x - b)^2 - c^2}$ — x(x⁴0« *)• Car on y voit c\u*y a deux valeurs égales , mais dont l'une eft pofitive & l'autre négative ; lefquelles , x étant pofitive , font imaginaires tant que x — b eft négative , c'eft-à-dire, tant que $x < b$ [A B] , & qui deviennent réelles dès que $x > b$ [A B] . Mais x étant négative , x — b eft auffi négative; ainfi le produit $xx(x - b)$ eft pofitif, & $x(x - b)(x + c)$: a eft une grandeur du même figne que $x + f$, c'eft-à-dire, pofitive fi x [négative] c [AC]. Mais lel'on que le produit $xx(x - b)(x^4«*)$: a eft pofitif ou négatif, y qui en eft la racine quarrée , eft réelle ou imaginaire. Donc , du côté des abfcifles négatives, la Courbe ne s'étend pas au-delà de l'abfciflè A C , & là forme eft celle d'une Ovale , qui , non plus que le refte de la Courbe , n'a aucun Point double [§.175]. 2. Si, dans cette équation, on fait $c = 0$ elle fe réduit à $yy - x^2 + fxx = 0$. Le diamètre de l'Ovale devenant zéro , C tombe fur A , & l'Ovale eft réduite à un (impie Point conjugué*, lequel, quoiqu'invisible, & détaché du 1 Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 26.98% accurate

DES POINTS DOUBLES. 581 Ch. xi 11. du refte de ia Courbe , ne laifle pas de lui appartenir. Car Planchi \$. *xo. g on fait y — o ; on réduit l'équation à — *' 4« hxx xxv' = 0, quia trois racines, x = o, x=o, x = £. Donc [§.15] la Courbe rencontre trois fois l'Axe des abfciflès , une fois en B & deux fois en A , où cft le Point conjugue'. Ainfi , quand on met l'équation fur le Triangle analytique , le vuide de la Cafe de la Pointe & du premier Rang montre qu'il y a un Point double à l'Origine. Mais fi on veut en chercher la nature par la pofition de fes Tangentes , on trouvera , en égalant le fécond Rang à zéro , 000* — * — o — * — o o o Péq: ayy + £xx=o , dont les racines, étant imaginaires, ipji marquent un Point fans Tangente , fans direction , un num- *4 vrai Point ifolé. [ci-delTus , n\ 1]. Qu'au lieu de c, on fafle b=o, Péq: ayy — xi + (£ — Oxx + ^ = ° réduit à ayy — x' — cxx = 0; AB[£] devenant nulle, B vient tomber fur A; les deux Branches de la Courbe viennent s'attacher à l'Ovale, qui ne fait plus qu'une Feuille, liée aux Branches, non par une Ofculation , comme on pouroit d'abord le croire, mais par un fimple Nœud. Car en cherchant les Tangen- mm: ites de ce Point , on en trouvera deux , déterminées par Péq: ayy — fxx=so, qui a pour racines ^y7*— — xyV = 0, & y\ja *i* x\]c = o. On les conftruira, en prenant AF= — √ a, AEr^+v7' & Ae= — ^c, & menant AD, Ad parallèles à EF, eF. Quoique la fimple vue de la Figure fàfle auez connoître de quel côté les Branches de la Courbe tournent leur concavité ; on peut s'en afTurer démonftrativement par le Dddd 2 lecond Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 23.23% accurate

\$8a DES POINTS DOUBLES. *xx" fecond terme de la double
 Série / = d = xy < On fubfti- ^i? tuera donc = t * + u Ay dans l'éq : ayy — x» —
 cxx := o, & on aura la transformée auuz±i zux*Jac — x' = o. Celle-ci mife
 fur le Triang : anal: a une dàermio o o * « « o o o o natrice inférieure qui
 donne ±iuxsjac — x% = o, ou XX a = ±^j^ . Les Séries, qui expriment les
 Branches qui fe croifent en A, font donc y = + xy/ — | — &c. € XX y — —
 xy/~ — ~^ja~c &c ; par où l'on voit que la Branche touchée par A D tourne
 en haut (à concavité , & que la Branche touchée par A d la tourne en bas. Le
 fécond terme de Tune & de l'autre de ces Séries , renfermant la féconde
 puifTance de x , on en conclurra [ci-deflus , »°. 11 1 que le Nœud eft fimple
 : ce qu'on peut conclure aufii de ce que les racines yy/a — x\c = o , jV*
 ~hx\c=o du fécond Rang , ne divifent point le troifième, qui n'a que le lêul
 terme x' f §. 1 86 J. 4. Dans cette même Courbe , il elt clair que a re/lant
 toujours le même, plus* diminué, & plus diminuent aufli le diamètre AC de
 la Feuille & l'angle DAd des Tangentes rig. ipp. au Point double. Si donc c
 diminue à l'infini & devient mum. 4. z^ro ^ pe'q : ayy — x* — cxx = oi
 réduite à ayy — x'=o, ne repréfente plus que la Parabole femicub'tque , où la
 Feuille dilparoit, & les deux Branches venant à fe toucher, forment

Digitized by Googl

The text on this page is estimated to be only 24.40% accurate

DES POINTS DOUBLES. j§j Ch.xiii. forment un Point de Rebrouflément. Au/fi le Rang infé- Planchi i.»»o. ricur ^ quj n'a qUC |e tcrmc ayy ^ donne, étant égalé à xxv* zéro , une équation qui a deux racines égales y — o , jy=o; ce qui marque la coïncidence des deux Tangentes. Et la valeur, -z^xsj - , demi-imaginaire de jr, indique le Rebrouflément [ci - deflus, «MIL i]. Exemple IL On a vu au \$. \%/6. Ex, VI; un Nœud avec Inflexion , & Ex. V > un Nœud avec deux Inflexions. Des Exemples de Nœud avec Serpement & triple Inflexion n'auroient rien de plus inftru&if. Mais on aura des Exemples d'Embraflement & d'Ofculation , tant réelle qu'imaginaire , dans la Courbe , ou plutôt dans les Courbes , que défigne l'éq : $x^+ - ax*y - *yl + (- M *)yy = 0$, fuivant les dirtérens ra ports de a à b. En mettant cette équation fur le Triangle analyî. o o o o * * o * o * o o o o le Rang le plus bas , qui eft le fécond, n'a que le lèul terme $(4/f - bb)yy$, qui égalé à zéro a deux racines égales $y = 0$, y ss o , lefquelles marquent que l'Origine eft un Point double [\$. 1 70] , dont la Tangente unique eft l'Axe des abfdflès [§.184]. Mais la determinatrice inférieure donne l'éq : $x^+ - axxy* \backslash (aa - i>l>)yy = Q$, qui xx a ces deux racines $y = - \frac{f}{t}$, -, -x — • . y X X - — r. Elles font l'une pofitive & l'autre négative, bi*b — iaa), c'eft-à-dire , fi *

The text on this page is estimated to be only 21.81% accurate

584 DES POINTS DOUBLES. Planché elles font toutes deux positives, mais inégales, si $aa > bb$ caXin. xxv. & $bb > \{aa$; positives & égales, si $bb = z \backslash aa$; imaginai- §• res, si $bb < \backslash aa$. Donc [ci - deîus, »°. 111 , 2] , l'Origine de la Courbe est une Olculation réelle, quand $b > a$, & une Olculation imaginaire, quand $b < \backslash a^{\wedge}$. C'est un EmbraîTement, quand b tombe entre a & k^*yJl - Mais quand issiV? , il faut, pour déterminer la nature de ce Point double, chercher le fécond terme de la Série $y = \dots = t^* cfo$ - On trouve que ce fécond terme est $\pm l^{\wedge} i^{\wedge}$. Et la Série $^{\wedge} = ^{\wedge} \pm 4^{\wedge} yj^{\wedge}$ d.figne un EmbraOement. Tout cela se voit ténfiblement en examinant les divers contours que prend la Courbe désignée par l'éq : $x^* - *xly - éyl + (a^* - 66)jp = 0$, à mesure qu'on change le rapport d'a à b . 1, D'abord, si on suppose $a = 0$ ou infiniment petit par rapport à b, les termes multipliés par a s'évanouiront, & l'équation le réduira à $x^* - bbyy = 0$, qui désigne deux Paraboles égales adoflTécs Tune contre l'autre, leurs équations étant $xx - by = 0$, & $xx + = 0$. Elles se eig. 100. baillent à l'Origine A, qu'on peut regarder comme un num- Point dWculadon. ■ * 2. Si $* > 0$, & / (iff ^ . T V ($ay + bb - |**$)), dont il y en a toujours deux imaginaires, fç. $ztrv^{\wedge} irfy - yy / (ay - \backslash bb - \backslash aa)$ } quand on prends positive, & $^{\wedge} - y / ^{\wedge} ay + y^{\wedge} ay > \{ *bb -$ quand on prend y négative. Car, y étant positive & $b > ay$ $ay - \backslash bb$ est $> aa$: donc $ay + bb - \backslash aa > \backslash an$, & $y / (ay > \{ \pm a : ainfi > v / (^J'' + 'bb - liayi \& \{ ay - yy / \{ ay + bb - | - m)$ est une grandeur Digitized by GoOgje.

The text on this page is estimated to be only 25.52% accurate

DES POINTS DOUBLES. j8j Ch.xiii. deux négative , dont la racine quarrée eft imaginaire. Et, Planche \$.mo. y étant négative, OU $1/ - \{aa\}$ eft imaginaire, ou elle eft réelle. Si elle eft imaginaire » $\pm y^7 (* * > 4 \ll \sqrt{v/(\wedge + \wedge - I^*)})$ eft auffi imaginaire. Si $v^{\wedge C^{\wedge}} + W -$ eft réelle ; comme on la prend pofitivement , on aura , en la multipliant par y négative , le produit $yVCay + bb - \backslash aa^{\wedge}$ négatif, lequel ajouté au produit auflî négatif $\{ay$ fait une (bmme négative, dont la racine quarrée eft imagiaaire. Ainft la Courbe n'a que deux Branches $2\text{£}, t^{*TM'}$ du coté des ordonnées pofitives & deux autres Branches du côté des négatives. Les premières vont à Pin6ni ; les autres , qui s'écartent d'abord l'une de l'autre , fe rapprochent enfuite , & fe réunifient au Point B extrémité de bb l'ordonnée $AB = t - - a$. La Courbe eft donc compose d'une Ovale AB , & de deux Branches paraboliques dont l'Alymptote eft la Parabole DAd déignée par l'équation $x^* - ayi = 0$ [\$. 142]. Ces deux parties de la Courbe (è joignent à l'Origine A par une Ôfculation. La Parabole ofculatrice de l'Ovale eft celle dont l'équation eft $xx = G^* - y/(bb - \backslash aa)\}y$. Celle des Branches CAc a pour équation $xx = (\{a 4^* v^{\wedge C} bb - \backslash aa)\}y$ [\$. 2 1 8] . Le Paramètre de la première eft pofuif , celui de la dernière négatif. Ainfi , les deux Paraboles fe baifent au Point A ; & il en eft de même des portions de la Courbe , qui ont en A la même courbure que les Paraboles ofculatrices. j. Plus a augmente , plus diminue le diamètre AB $\text{£} - - a$] de l'Ovale. Il s'anéantit quand $as=b$. Alors »«*. î; l'Ovale (è réduit à un fcul Point, mais non pas ifolé, puiË au'il eft traversé par les Branches CAc , fur le contour defquelles il le trouve en A . Il eft invifible , parce qu'un Introd . à PAnalyfe des Lignes Courbes. E c e c Poin t Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 24.07% accurate

586 DES POINTS DOUBLES. Pi anche Point eft fans étendue; mais il y eft réellement, Se le cal- Chxiil xxV. cul fait voir que le Point A , qui ne femble à la vue qu'un s* m Point fimple , eft véritablement un Point triple. Car la luppofition de' $a=b$ réduit Péq : $x^4 - axly - a y^4 (aa - bb)yy = zO$ à $x^4 - ayCy *y' = 0$, qui, mile lur le Tr : anal : n'a point de plus bas Rang que le troi» 0000* * o * o 000 o o o • ficme : donc POrigine eft un Point triple. Quand on en cherche les Tangentes , on trouve , pour les déterminer , Péq: $ayl 4^{**}x^4 = 0$, qui a une racine réelle $y - o$ & deux imaginaires $jy = tx > / - 1$. La première donne pour Tangente l'Axe des abfcifles : & les deux autres indiquent que le Point A , quoique triple , n'a qu'une Tangente ; parce qu'en effet il ne pafle par A qu'une icule Branche qui travèrfe un Point fans Tangente. Mais ce n'ert pas ici le lieu de parler des Points triples. Fig. ico. 4. Soit $a > b$ & $\hat{V}$, c'eft-à-dire, loit bb moyenmm. 4. ne entre aa & \aa , l'Ovale recommence à paroître, mais du côté des ordonnées pofuives , & renfermé entre les Branches CAC. On le voit par Panalyfc de Péq : $x^4 - ax^2y - \hat{u}f *i*(aa - bb^{yy}o$, & par l'examen de Tes quatre racines $x = \diamond = \sqrt[4]{\hat{a}y \pm y \sqrt[4]{aa - bb}}$. Elles font toutes quatre imaginaires , lorfque y eft négative. Cela eft évident, lorfque $^{(ay^{bb} - \backslash^{**})}$ eft imaginaire, c'eft-à-dirc, quand y négative furpafle \a — — . Mais cela eft vrai encore , quand y eft plus petite. Alors $i/(ay > \{ *bb - \backslash aa \}$ étant réelle, $ka + i/\hat{ay} + bb$ Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 20.56% accurate

DES POINTS DOUBLES. * 587 Ch Xïl — fait une forme positive > dont le produit par y plaque §. no. négative est négatif. Ainsi les racines carrées $\sqrt{y^2 - 4xy + 4x^2}$ sont imaginaires. Les deux autres racines $y/(y \pm \sqrt{y^2 - 4xy + 4x^2})$ le font aussi, puisque $4x^2$ étant > $4xy$ $4x^2$ sera positif > $4xy$: car $4x^2$ négative diminue $4xy$. Donc $\sqrt{y^2 - 4xy + 4x^2}$ est une grandeur positive, qui multipliée par y négative fait un produit négatif, dont les racines carrées $\sqrt{y^2 - 4xy + 4x^2}$ sont imaginaires. On voit donc que les ordonnées négatives n'ont que des abscisses imaginaires. Mais du côté des ordonnées positives, les racines $y \pm \sqrt{y^2 - 4xy + 4x^2}$ sont toujours réelles. Car $4x^2 > 4xy$ fait que $4x^2 - 4xy + 4x^2$ est toujours positif, & sa racine positive, qui est réelle, ajoutée à $\pm y$ fait une forme positive, dont le produit par y positive, est positif, & a ses racines carrées $\sqrt{y^2 - 4xy + 4x^2}$ toujours réelles. Elles représentent les Branches CAC. Mais les racines $y/(y \pm \sqrt{y^2 - 4xy + 4x^2})$ ne sont réelles qu'autant que $y < 2x$. Alors aya, Ainsi les Branches représentées par ces deux racines font une Ovale, dont le diamètre AB = a — est pris du côté des ordonnées positives. Cet Ovale fait avec les Branches CAC un Embrassement à l'Origine A. Eeee 2 La

The text on this page is estimated to be only 22.73% accurate

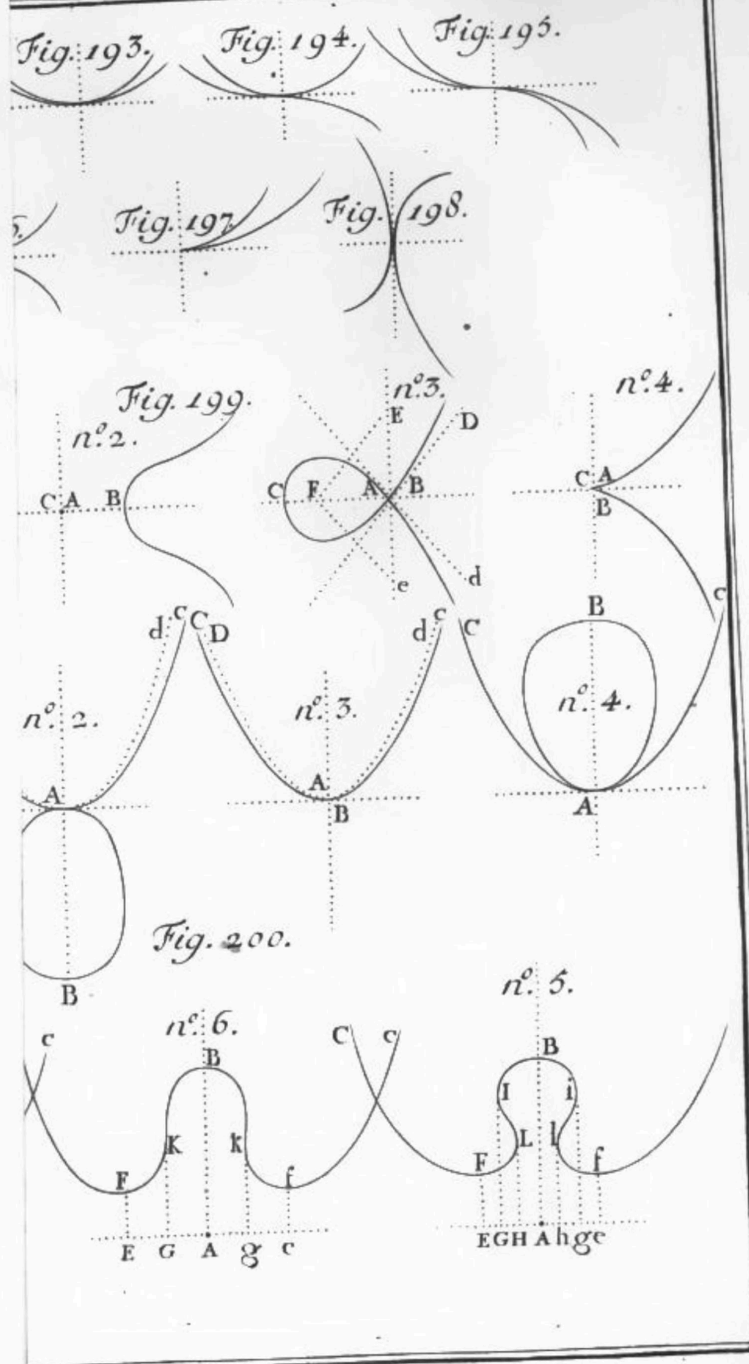
j88 DES POINTS DOUBLES.' Plahche La Parabole ofculatrice de l'Ovale a pour équation $C||Xni\ 3^{\wedge}CY\ll---&$ celle des Branches g. m CAc , $xx^{\wedge}Grf-fVC^{\wedge}---[\S\bullet\ 2,8\ J-$ Lesdeux Paramètres font pofitits , mais celui de la Parabole olculatrice des Branches infinies eft plus grand que celui de la Parabole ofculatrice de l'Ovale. Donc cette Parabole cmbrafle l'autre [$\S.$ 214] , & confe'quemment les Branches cmbraflTent l'Ovale. 5. Si Ton fait $b=z\{a^{\wedge}\%$, ou $M=r\{ll$, la figure de la Courbe refte à peu près la même. Seulement le contact des Branches infinies & de l'Ovale eft plus intime , parce que les Paramètres $\pounds\ll=\pm=\wedge(66---|^{**})$ deviennent égaux entr'eux & à ia. 6. Mais ce contact eft fur le point de ceflèr. Car pour peu qu'on diminué b , de façon qu'il devienne $\langle i^{*}\ v7^{*}\rangle$ les deux parties de la Courbe qui font d'un côté de l'Axe des ordonnées , reliant unies l'une à l'autre, le détachent de celles qui font de l'autre côté , & qui refent auflfi unies entr'elics; elles s'en détachent, dis- je, vers l'Origine en confervant leur continuité vers l'autre bout de l'Ovale , laquelle difparoît & lé trouve rompue , $*iJi00'$ 9uo,cîuc k Courbe confèrve un cours continu. On le voit par l'examen des racines $x==fcry'(i^{*}y\ \blacksquare\pm zy/\{ay\ 4^{*}\ bb---\aa\})$, qui font toutes quatre imaginaires quand y eft négative, & même quand elle eft pofitive, mais $\la\ \&\ s---$, *Oa le voit encore plus fenfiblement en cherchant les Max/ma & Minima de x & de* Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 23.36% accurate

DES POINTS DOUBLES. y8p ChXIH. de y. Ceux de y font
donnez [§.196] par l'éq : 45c' Planchs $\wedge \cdot x o$. $\_2^{*xy} = o$, qui a deux racines x
— o & $xx = \{ay\% xxy$. La première x = o donne $\wedge = 0$ & y = a — — ; ce
qui défigne le Point double de l'Origine, dont nous parlerons tout-à-l'heure ,
& l'extrémité B de l'ordonnée pribb mitive $AB = *$. La féconde $xx = | a y$
donne i° . A y = o & $x := r o$, qui (ê raporte àùfli au Point de l'Origine, & 2° .
 $y \sim a — \sim = EFz = ef$, & $x = \pm zij(iaa — — ta) = AE = Ae$. U y a donc trois
Maxima de y , qui font les Points B, F, f. Ceux de x font détermines par l'éq:
 $*xx — z(aa — bb)y — \%ayy$, «foii l'on tire ' = $J \sim * '=GI = gi$, P^our ,cs
Points I, i, des A/««;«, & $y = 5^{**} - 6bb \sim WWb - 2^{**}) 9^{*} = H L = h 1$, pour les
Points L , 1 , des Mnùma. Quand $bb = \backslash aai$ les valeurs de Gl , HL, & gi, hl
deviennent égales entr'elles & à *a. Alors , les deux Points 1 & L , i & 1 de
Maximum & de Minimum (è réunifient en un feul point d'Inflexion K, k,
[»". 6] le- Bg.ioo. quel difparoît avec les Maxima & Minima de x , lorf. que
 $b b < f m$ a rend imaginaires les valeurs d'y $5aa 6^{\wedge dry} (3bb — 2 sa) . . —$
— 2 qui déterminent ces Maxima & Mini ma [n^o. 7 J. Dans toutes ces
Courbes le Point de l'Origine eft un Point de la Courbe. Car dans l'éq : x^{*}
— $axxy — <^{*} / + — M)yy = o$, il n'y a point de ut me tout confiant [§.14].
Mais dès que le Point ne Eeee j fe Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 24.67% accurate

590 DES POINTS DOUBLES. Planche fc trouve plus fur le contour de la Courbe [$\ll'.5,6,7$]. Ch.xiil JP^{oo}. C'est donc un Point ifolé. Cependant, si on en cherche #• "a les Tangentes, on trouvera, pour les déterminer, l'éq: $(aa - bb)yy = 0$, dont les racines $y=0, y=\sqrt{bb/aa}$, ne sont pas imaginaires, mais égales; ce qui semble indiquer une double Tangente qui (eroit l'Axe des abscissés. Mais quand on cherche ou la Parabole osculatrice, ou le fécond terme de la Série [§. 218], on trouve $\{a \pm zy / (M - \sqrt{bb})\}$ grandeur imaginaire quand $bb > aa$. Ce Point est donc une Ofcularion imaginaire [cy[^]-defTus, III, 2]. Exemple III. On a vu dans l'Ex. préc. n° 5> que quand $bb = aa$ l'équation, qui le réduit à $x^4 - axxy - ay^2 - aayy - t = 0$, désigne une Courbe composée de 2m^{""} deux Branches infinies AC, Ac, & d'une Ovale AB embrassée auili étroitement qu'il est possible par ces Branches, puisqu'il la Parabole osculatrice de l'Ovale au point A est la même que la Parabole osculatrice des Branches. Mais si, dans cette équation, on change le terme ay^2 en axy , on aura une toute autre Courbe, & dont l'Origine est un Rebroussement en Bec. Dont la raison est, que dans la Série ascendante $y = \dots$ &c, que fournit l'éq: $x^4 - ax^2y - ay^2 + \dots = 0$ il n'y a aucun terme imaginaire, ou demi-imaginaire; ainsi les Branches qui s'embranchent d'un côté de l'Axe des ordonnées s'embranchent auili de l'autre côté, & font un Embranchement complet. Au lieu que la Série $y = \dots = \sqrt{4xxVax^2 - 8x} \dots$, $X^2 - M^2 Mxy^2 - aa x a^2 \sqrt{aayy - t}$ a des termes alternatifs demi- imaginaires: ce qui montre que les Branches qui s'embranchent d'un côté



The text on this page is estimated to be only 17.50% accurate

r Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 24.10% accurate

DES POINTS DOUBLES. jot 4 Ch.xiu. côté de l'Axe des ordonnées manquent de Pautrc côté , & Plakch* \$, *to. ne f0nt qu'un demi - EmbraiTement , c'clt-à-diie un Bec. XXVI« On remarque cette différence dès le fécond terme cie la Série ; & on pouvoit l'apercevoir fans calcul , en mettant fimplement ces équations fur le Triang. anal. Car elles o © o ont une même déterminatrice , qui donne , pour Tune & l'autre , Téq : — $4x'jr + x^* \alpha o -$, dont la racine [double] $0 — ^ = 0$, ne divife point le terme unique du fécond Ordre — ay^* ou — ax^*y . Mais dans la première équation il y a deux intervalles, entre la déterminatrice & fa première parallèle , au lieu qu'il n'y en a qu'un dans la féconde équation. Donc [§. 1 1 ? , %ou ci - devant 111 , 2] la Série que fournit cette féconde équation eft demi-imaginaire, au lieu que celle que fournit la première eft ou réelle ou imaginaire. Ainfi la féconde indique un Bec , & la première un EmbraiTement , ou réel ou imaginaire. Et Ton a vu [Ex. prêc. n\ 5] qu'il étoit réel. On s'aiTurera parfaitement que la féconde Courbe a un Bec à fon -Origine, en refolvant l'éq : $x^* — ax'y — X X axyl * \alpha yy = o$. Car on trouvera $y — — fc$: ce qui défigne deux Branches représentées par les racines $y = . — ^7 — & v = , — "■ , .$ On voit, en les examiDigitized by Google

The text on this page is estimated to be only 23.16% accurate

y92 DES POINTS DOUBLES. Planche examinant , qu'à l'Origine ces Branches ont l'Axe des Ch.xiil VL abscissés pour leur Tangente commune, [parce que x S- 1^* estant infiniment petite, y qui est $t \sim i$ » est encore $\frac{1}{2} A$! — \ UX infiniment plus petite] ; que là elles s'embrassent dans l'angle des coordonnées positives, [parce que x est tant fort XX petite & positive , , — ■ — — & — font toutes deux positif! $\sqrt{x}$, la féconde surpassant un peu. la première]; mais que du côté des abscissés négatives elles manquent entièrement, [parce que x étant négative, $t^2 x^9$ & conXX fréquemment $t a \_ \_ ax > 0$ est imaginaire J. Ainsi ces Branches forment à l'Origine un Rebroussement en Bec En continuant cet examen , on voit que la Branche XX Hg. toi. ACc, désignée par la racine $y = La^{\frac{1}{2}}$ s'éloigne à l'infini des deux Axes, comme fait la Parabole $y^2 = XX - x$, ou $ayy = x^2$, qui est (on Asymptote. Mais la # xx Branche AED , que représente la racine $y = -t$; — $i \frac{1}{2} \sqrt{a} - y^2 x$ s'éloigne infiniment de l'Axe des abscissés , & non pas de celui des ordonnées , puisqu'elle (c glisse le long de l'Asymptote droite BD , ordonnée de l'abscisse AB = ia. Car $x = \sqrt{a}$ rend $y = s \ll t = \sim = \sim - J$ infinie. L'abscisse étant plus grande que AB, l'ordonnée est négative ; parce que le diviseur $\sqrt{a} - sj \& x$ est négatif. D'abord l'ordonnée est infinie Bd , mais elle décroît fort rapidement jusqu'au point f [qui a l'abscisse AF = $\frac{1}{2} a$ & l'ordonnée Ff = — $\frac{1}{2} \sqrt{a}$], après quoi elle

recomDigitized by Google

The text on this page is estimated to be only 19.67% accurate

DES POINTS DOUBLES. m oocm. recommence à croître en s'approchant de ion Afyrrptote p.anchi $10'$ courbe, qui est l'autre Branche Ae de la Parabole ayy $XVI = *$. En forte qu'on peut dire que la Branche hyperbolique AED le continue au delà de l'infini, c'est-à-dire du côté négatif, par la Branche aulî hyperbolique df, & enfuite par la Branche parabolique fc. Exemple IV. On propose la Courbe dont la r^* . i., nature s'exprime par l'éq : $x^4 - y^4 - 2axy + sxy = 0$, & Ton demande la nature du Point qui est à l'Origine ? L'équation étant mise sur le Triang : anal, a, comme la précédente, une déterminatrice intègre donne l'éq : $ayy - 2axly = 0$, qui n'a qu'une raane, mais double, $ay - xx = 0$. Il y a donc à l'Origine un Embralement, réel ou imaginaire, ou un Rebroulement en Bec. L'on s'adore que c'est ce dernier, parce que la somme des termes «e/ + x'; du fécond Ordre n'est pas divisible par la racine que la déterminatrice n'est éloignée que d'un intervalle de fa parallèle qui parte par ces termes [§. 11?, ou ci-dessus III, aj. Ou, si l'on aime mieux, on cherchera le fécond terme de la Série, en substituant à y; ce qui donne la Transformée $auet + axuu - xxw + ixV - \text{htro}\% \text{àPA}^*lyfc$ des Lignes Courbes. Ffff +2/ Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 25.35% accurate

w DES POINTS DOUBLES. $P_{xxvT} + \sim j - a^{\circ} >$ qui P,acée » à
fon tour » fur lc Tr' ? anal a une déterminatrice inférieure , qui donne
l'e'quat : $ooooo * oooo * * 00**0 0*00 * oooo I o 2*5 XX y/ 2X$
aaim »+« — as o , ou $u = 3 = ;$, terme demiimaginaire, qui dénote un Bec.
La Série $^{\wedge} = \sim rt ** \sim 7a 2 * \&c$ fait voir que les x positives n'ont que des j
imaginaires, à caulè de la radicale $y/ - 2x$: mais les x négatives ont deux y
réelles , qui donnent , à l'Origine, deux Branches , lesquelles s'embraflTant
forment un Bec, dont l'Axe des ablciflès eft la Tangente. Remarquez que ce
qu'on dit ici, que les abfctflès positives ont des ordonnées imaginaires, ne
doit s'entendre que des abfcides plus petites que a. La Série, donnée par une
déterminatrice inférieure , ne fert que pour ces abfcifles : elle feroit
divergente & fautive , fi on vouloit l'appliquer à des abfcifles plus grandes.
2. Si dans l'équation précédente on change feulement le figne du terme axyy
; alors on trouve bien la même déterminatrice, qui donne la même équation
& la même racine $ay - xx = 0$. Mais prélèvement la fomme — axyy + x*y
des termes du (ècond Ordre eit divifible par cette racine , le quotient étant
— xy . On ne peut donc pas employer

The text on this page is estimated to be only 20.34% accurate

DES POINTS DOUBLES. 595 Ca.xiiL employer ici (ans
embarras la Règle du §. 1 1 j , & il vaut planche f. no. mieux chercher le
fécond terme de la Série, en substituant 31X7 L 9C9C -j -f- u à y dans la
Proposée : d'où résulte la Transformée aautt -\> axuu —~ xxttu x'# — o , a
aa 9 qui étant mise sur le Triang. analyt a une déterminatrice 000000*
0000*0 00**0 0*00 * o o o o qui donne aauu + x'u = 0, ou * = (— i=t W\$) -
m. La double Série est donc $j = \sqrt{x} + (- i \pm Ws) \sim a \text{ à } f c \$$ & comme dès le
troisième terme elle est régulière , on voit qu'elle n'a aucun terme ni
imaginaire , ni demi-imaginaire. Ainsi les deux Branches qui le touchent à
l'Origine, y font un Enlacement complet [ci-*fc»°î« défias ULsj*
Exemple V. On trouvera un Exemple tiOfculinflexion dans la Courbe
désignée par Péq : 0%jy — labxxy *04* — x' =0. Elle se peut réduire à
cette forme $yz=z(bz \pm y/(bb^4 < 4x))$ — , qui fait voir que chaque abscisse,
a deux ordonnées, Tune positive + + Ffff 2 *x)> Digitized by
Google

The text on this page is estimated to be only 21.50% accurate

596 DES POINTS DOUBLES. Planche * XX CitXII. xx/i. *x))
 — , autre négative (& — + ^> toutes \$.tl0. deux réelles à l'infini , & qui
 donnent les deux Branches infinies AC , A c , dont l'Asymptote courbe est la
 Parabole indiquée par l'éq : $a^* y y = x^2$. Ces deux Branches se baillent à
 l'Origine , & y font une demi-osculation touchée par l'Axe des abscisses.
 Quand on prend x négative ; les deux valeurs ($bz \pm zy / (bb + ax)$) - de y
 , sont positives tant qu'elles sont réelles, parce que $y / (bb + ax) < y / bb$, ou b ,
 lorsque x est négative ; mais ces racines deviennent imaginaires, quand
 $\sqrt{Qbb+ax}$ est imaginaire, bb quand x négative surpasse — . Ainsi l'ordonnée
 B D de bb l'abscisse négative AB = — — , est une limite qui sépare & les
 ordonnées réelles des imaginaires. On l'auroit trouvée également par la
 Méthode de Maximis [196 1 , qui donne pour le Maximum d'x le point D,
 dont l'ordonnée b b* est AB = — — , & l'ordonnée B D = , & pour le
 Maximum à y le point d , dont l'abscisse d b = — $\hat{s}$ & l'ordonnée Abse^
 Cette partie de la 25* \$125a Courbe, qui tombe dans l'angle des abscisses
 négatives & des ordonnées positives , confond donc en une feuille ou
 fleuron ADdA, dont les Branches font à l'Origine un demi - Embrassement ,
 qui avec la demi-Osculation des Branches infinies CAc forme une
 Osculinflexion. C'est aussi ce qu'on trouvera par nos Méthodes. L'éq : $a'yy$
 $— 2abx*y — x' = 0$ mène sur le Tr.- anal: a deux déterminatrices inférieures,
 dont Tune donne $a'yy — 2*bxxj — 0$, » Digitized by Go

The text on this page is estimated to be only 21.22% accurate

DES POINTS DO dp LE S. \$97 CH.XÎH lime1 9 ,, , , , Punch.
f.txo. =o, ou $\wedge = -jj-$, & l'autre — $2abxy - x^2 - o, xxv1, o o o o o * o o o$
 $o o 00*0 * o o o o o$ ou $y = r \cdot U$ y a donc deux Séries; Tune, dont J 2 40 ai
le premier terme est — x^1 , exprime les Branches C Ad ; l'autre, dont le
premier terme est — $j^{\wedge *} >$ défigne les Branches cAD ; & ces quatre
Branches forment POfcuInflexion , qu'on voit à l'Origine [ci - deflus I1L j
]. Exemple VI. La Courbe représentée par l'éq : «j. xJ 4- éx* — a'yy = o ,
confiste en deux Branches infinies AD, Ad, qui se baifent à l'Origine A où
elles ont l'Axe des abscisses pour Tangente commune , & de là s'étendent à
l'infini du côté positif , ayant pour Asymptote la Parabole définie par l'éq :
 $* > / = xJ$. Mais ces Branches continuées du côté négatif , y forment une
Ovale ou Poire AFBfA. Car en donnant à l'équation cette $x^* x b$ forme y sa
 $d = - \sqrt{-}$ » on voit i \ que l'Axe des abscisses est un Diamètre , chaque
abscisse ayant deux ordonnées égales , une positive & une négative ; i \ que
prenant l'abscisse x positive, l'ordonnée^ va en augmentant à l'infini ; mais \$
°. que prenant x négative, y devient imaginaire dès que x négative surpasse
b , parce qu'alors $x^4 * h$ Ffff 1 clt Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 25.09% accurate

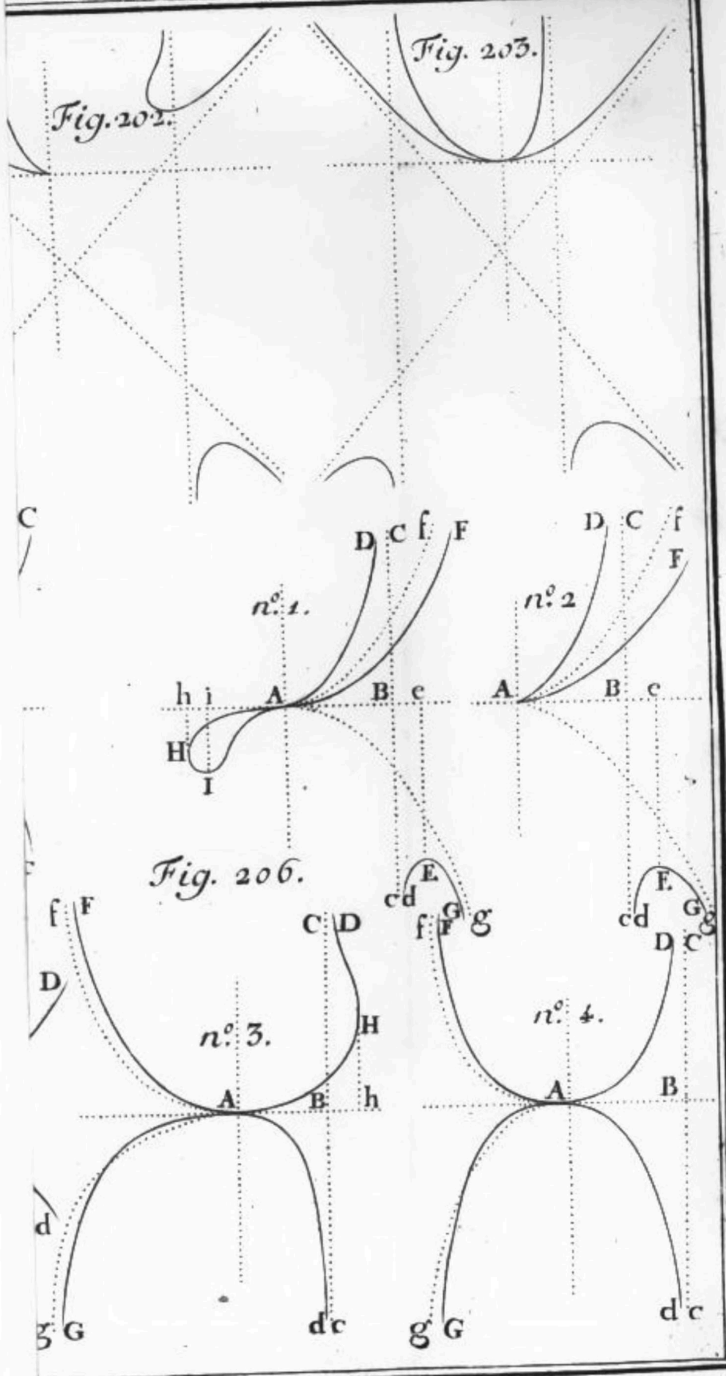
jS>8 DES POINTS DOUBLES. Planche est une grandeur négative. Ainsi la Courbe , de ce côté, Ch.xih XX^L ne s'étend pas au-delà de AB = 6. Si on cherche la S*** nature du Point qui est à l'Origine , on trouvera , en mettant l'éq : $x' + \text{£}x^4 - a*yy = 0$ sur le Triang : analyt; o o o o * o o o o * o o o o * o o o o o que la de'terminatrice inférieure donne $\text{£}x^4 - **j^{\wedge} = 0$, qui se décompose en ces deux $xx - ay$

The text on this page is estimated to be only 22.67% accurate

ch.xhl Exemple VJL On trouve dans les uouros re- * ~- "7T
 présentées par $\dot{y} = c'yy - < \text{DES POINTS DOUBLES}$. S99 trouve dans les
 Courbes re- ?L^^\n i=ro des Points d'Ofculation , de RebrouTement en Bec
 , »• & d'Embraflement , formés par le contad} de deux Para- X,J# 4* boles
 cubiques [ci- deflus III, 4]. Ces Courbes ont [§§. 139. 142] deux
 Afymptotes, Tune Droite, qui est Pordonnée CBc de Pabliite AB=* ,
 déftgnée par Péq : $c'yy - cixiyx = 0$, ou $f' = 5c'$, soit $x = c$; Pautre
 curviligne , qui est la Parabole (èmicubique f A g , indiquée par Péq : abx^6
 $- cix^*yz = 0$ ou $yy = * - x$ Si on cherche les Maxima [§• iptf]> on
 trouvera, pour ceux de x, Péq: . $x = c$ [qui ne défigne que PAfymptote Ce]
 & lèq : $M^*xl = ^{ab} \text{ marcluc } ^{uc} c^* > \text{olnt H d}^* \text{ont IWciflc Ah} - c'y/ - \&$
 l'ordonnée Hh= -7 , g N , est un Maximum de x. Pour ceux de v, on
 trouve les Points E, I, qui ont pour abfciflTes $x = * v'$ & pour ordonnées $y =$
 $-4 - \text{£} - 21/a b = e E$, $y = -a - b^* \{ * 2 \backslash Zab =: ''$. Enfin, on trouve
 pour le Point qui est à l'Origine , l'éq : $c'y1 - (4 + b) c + x^0y + abx^* = 0$,
 qui (è décompofe en ces deux équations $c'y - \ll ax^0 - 0, cly - fcx' = 0$,
 qui font Pune & l'autre à la , Parabole cubique. Donc , fi a & b font de
 même figne , la forme de la .Courbe est à peu près telle qu'on la voit au »\ 1
 , compofée de deux parties détachées, dont Pune dEG a deux Branches
 infinies, une hyperbolique Ed & une parabolique Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 23.04% accurate

600 DES POINTS DOUBLES. pla»ch* qucEG; & dont l'autre
DAIHAF a au/fi deux Bran- cm JQW*. ehes infinies , une hyperbolique AD
& une parabolique AF, & de plus un Fleuron AHIA, auquel elles fc joignent
en + A P^r un fjr.br affement avec h flexion. Ce Fleuron , dont la plus
grande abfciflè eft A h =s= — C^a~*b~ * 'a P'US Sran



The text on this page is estimated to be only 15.86% accurate

»••.- 4 * i t !) ' • <: i Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 26.36% accurate

DES POINTS TRIPLES. $\text{toi Cu XIII} - \text{Zfc} / \text{fW}$ triples. La diviſion des Points triples eſt fondée ſur les mêmes Principes que celle des Points doubles. En ſuppoſant un. Point triple à l'Origine » la Café de la Pointe & celles des deux premiers Rangs ſont vuides, en forte que le plus bas Rang de l'équation eſt le troiſième $g y^4 < h x y^4 - f x^2 y^4 + \dots$ [§.170], qui, égale' à zéro, fait une équation du troiſième degré, par laquelle on déterminera les Tangentes du Point triple. I. Si lès trois racines ſont réelles & inégales, c'eſt un Point à trois Tangentes. Trois Branches ſ'y croiſent, & y ſont des Angles finis, meſurés par ceux des Tangentes. Ce Point ſe nomme Point triple d'Interſection, ou Double-Scindé II ſe diviſe, comme le ſimpſe Nœud, par les Inflexions & Serpente-ments de ſes Branches. Il peut n'avoir -point d'Inflexions; il peut en avoir une, deux, ou trois; & de même un, deux, ou trois Serpente-ments; ou il" peut avoir une Inflexion, & un ſeul deux Serpente-ments, ou deux Inflexions & un Serpente-ment : variétés qui ſe multiplient, quand on ſuppoſe une triple Inflexion, &c. Le Double p Nœud (ans Inflexion peut ſe trouver dans les Courbes du quatrième Ordre; parce que \ Tangente d'une de ſes Branches n'eſt cenſée la rencontrer que deux fois, & chaque autre Branche une fois : ce qui fait en tout quatre fois. Mais ſi une Branche eſt infléchie as Point de ſeclion, la Tangente eſt cenſée rencontrer la Courbe cinq fois : ce Cas ne J'eut donc commencer à avoir lieu que dans les Courbes du cinquième Ordre. Et ſi l'une des Branches (èrpente, ſa Tangente eſt cenſée rencontrer la Courbe fix fois : ce qui ſuppoſe une Courbe au moins du fixième Ordre. En ge'néral, quand une .Branche ſubit une Inflexion du degré /, ſa Tangente eſt ^ Introà, à l'Analyſe des Lignes Com bes. G g g g cen* Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 24.93% accurate

tQ2 DES POINTS TRIPLES.^ PtAwcHt cenfee la rencontrer / 2
fois , & les deux autres Bran- Ch.xih. XXW* ches 2 fois ; deforte que la
Courbe qui a un Point triple de cette forme eft au moins de l'Ordre /-+ 4.
Ces Formes fe difcernent en examinant combien de Rangs confécutifs ,
fupérieurs au troiûe'me , font divifibles par chaque racine de Pe'q : gy% +
bxy* 4* /xlj -f- /*' =0 1§.|8

The text on this page is estimated to be only 25.97% accurate

DES POINTS TRIPLÉS. 60j Cn.xnt me au §. préc. quelle est la nature du Point double cjué 5fJf!*e § "f- forment les Branches d'une même direction , & on bonnoitra par-là la nature du Point triple. 1. Si, par ex. la racine double du troisième Rang ne divise pas le quatrième [& ce Cas est le seul de ceux que nous examinons ici , qui puisse avoir lieu dans le quatrième Ordre des Courbes : autrement l'équation , divisible en entier par cette racine ; ferait réductible] ; alors le Point triple [§. 220. 111. 1] est un Rebroussement traversé par une Branche de direction différente , laquelle Branche ne peut , dans le quatrième Ordre , avoir d'Inflexion , ni dans le cinquième de Serpement ou d'Inflexion d'un degré supérieur &c Voyez ci-dessus Ex. I. §.4. Ex. II. • 2. Si la racine double du troisième Rang divise le quatrième & non le cinquième ; le Point triple confit [§. 220. 111. 2] en une Osculation, réelle ou imaginaire, un Embrassement , réel ou imaginaire , ou un Bec , traversés par une Branche de direction différente, laquelle peut être sans Inflexion , ou avec Inflexion , ou avec Serpement , &c* Et c'est dès le cinquième Ordre que les Courbes sont susceptibles de ces sortes de Points triples , dont on distinguera la nature en continuant les Séries que fournissent les deux racines de l'équation tangentielle : calcul dont la Remarque du §. 11 g peut souvent dispenser en bonne partie. Voyez ci-dessous Ex. IV. g.. Mais ce n'est que dans le sixième Ordre, ou dans les Ordres supérieurs , qu'un Rebroussement à double Inflexion, ou une Osculinflexion [§. 220. 111*3 J Peut être traversée par une Branche de direction différente. Voyez ci-dessous Ex. V. IV. Enfin si l'équation $gy^* > \backslash^* bx)y - \backslash -ixxy = 0$ n'a qu'une seule racine triple $y \backslash g + x \neq 0$, soit $y = Gggg$

* Ax Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 21.02% accurate

The text on this page is estimated to be only 20.95% accurate

DES POINTS TRIPLES. Cof i). Si clic ne le divilè qu'une fois ,
 ii manque au qua- vLAKChz 5» trième Rang de la transformée la Cafe x4 ,
 mais non la xx /il Cale ux* , & alors il y a deux déterminatriecs inférieures,
 qui donnent $u = \pm x \sqrt{Bx}$ & $u \sim B'x$ \ Les Série* • • * o * o o o o o . o o o
 $yz = zAxziz x^Bx$ & f> $ysszAx + B'x1$ & e. «arquent un Rebrouflèment
 [§.220. III, 1] traversfé par une Branche (ans Inflexion , & fous la même
 direftion que celles qui font le Rebrouflèment. Voyez cj-deflbus Eç. VL 1.
 2). Si la racine y — $Ax == .o$ divife plus d'une fois le quatrième Rang , il
 manque à ce Rang , dans la transformée, la Café ux% , & la déterminatrice
 paflant par les * + • o < * o o o 000 00 o Cafés *' & x5 , donoe une équation
 cubique, qui a deux racines imaginaires, & une réelle $u = y/Bxi = xy/Bxx$.
 La Série $yss^Ax 4^* xyB^{**} \&^{**}$ marque une Branche avec Inflexion [§.217]
 ; mais la triplidté du Point cft invifible. On la peut fûppofèr formée par
 l'Yvanouïflement «Tune Feuille. Voyez ci-deflbus Ex. VL 2. Gggg 3 Ces
 Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 20.28% accurate

605 DES rOJNTS TRIPLES. xîm? Ces deux fortes de Points
 triples Peuvent convenir Ch.xiil xx/ii. a^x Courbes du cinquième Ordre.
 Ceux qui fui vent font. \$• »«• rclervez aux Ordres (upérieurs. g. Quand la
 racine triple du troifiécne Rang , divife le quatrième & cinquié-tie , mais
 non le fixième ; il faut distinguer le Cas , ou elle ne jdivilê le quatrième
 Rang qu'une fois , de celui où elle le divife plufieurs fois. i). Si elle ne le
 divife qu'une fois , la Cafe *x» refte pleine dans la transformée , qui a deux
 déterminatrices , d'où Ton tire les équations $u = zîzxiJBx$ & $w = BV$. Les •-i
 • . . . • • ♦ • * • • • • o • • • * o * o o o * o o o o o Séries $y = Ax$ rfc: x
 y/Bx &c. $y — Ax + Bxl$ &c. marquent un RebroufTemerit traversé , fous
 une même direction , par une Branche infléchie au Point de contad. Voyez
 ci-defTous Ex. Vil. i. 2). Si la racine[^] — $Ax \sim o$ divife plus d'une fois le
 3uatrie'me Rang de la propofée, la Cafe ux1 eft vuide ans la transformée ,
 dont la exterminatrice' intérieure , paflànt par les Cafés »' , *x4, & x* ,
 donne une, • • » • * • • • • o • • c o * o o o 000 00 0 équation Digitized by
 Google

The text on this page is estimated to be only 24.02% accurate

DES P01WTS TRIPLES. Ccy Gh.xiii. équation cubique, doutées trois racines foient tiz= Bx' y ptAnmt « = BV,« = BV. xxvn. i)). Deux de ces racines peuvent être imaginaires. Alors on n'a qu'une Série $\wedge = ytf^* *h Bx1$ &c, & le Point triple est formé par l'adhérence d'un Point conjugué à une Branche sans Inflexion. Tel est, en particulier, le Cas où les deux Cafés uxxx & $*x^*$ sont vuides. Voyez ci-deiTous Ex. Vil 2. 2). Si les trois racines Bx^* , &xl, £V sont réelles & inégales; on a trois Séries, qui ayant le même premier terme $Ax >$ marquent trois Branches qui se touchent en un même Point sans Inflexion; foit qu'elles s'embraflent toutes trois, ce qui a lieu, quand B, B', B" ont un même ligne; (bit qu'une des trois baife les deux autres, ce, qui a lieu quand une des grandeurs Bt B\ B" a un (igné contraire à celui des deux autres. \$)). Si de ces trois racines deux sont égales, la troi^e fième designe une Branche (ans Inflexion, qui palTc par un Point double, de même direction, indique" par la racine double, lequel peut être un Embraflément, réel, ou imaginaire, ou demi- imaginaire, c'est-à-dire un Ribrouflcment en bec. Ces Cas se déterminent, & on prouve qu'il n'y en a pas d'autres, par une fuite de raifbnnemcns femblable à celle qui a été employée au §. préc. 111. 2. . $\wedge$)VEnfin, Il ces trois racines (ont égales, on ne peut encore rien décider sur la nature du Point triple: mais il faut, dans la transformée en u & x, substituer $Bxx > i^*t$ à u; ce qui donnera une féconde transformée en / & x, dont la déterminatrice, partant delà Cafe /', fournira une équation cubique, iùr laquelle répétant le raisonnement qu'on vient de faire, on trouvera te û jours que le Point triple est, ou un Enbraflerrert de trois Branches, ou un Embraflément imaginaire traversé par une Branche de même direction, ou un Embraflément demi- 1

The text on this page is estimated to be only 18.50% accurate

by ou $bb + 2ay - yy > bb$, c'est-à-dire, $2ay - yy > 0$, ou $2ay > yy$, (bit $2 > y$. Par conséquent, du côté des ordonnées positives, la Courbe a une Feuille, dont la longueur est $AB \sim za$. Mais y étant négative, les quatre valeurs de $\sqrt{by + r^2 y^2 / (bb - 2a - yy)}$ toutes quatre réelles, tant que $\sqrt{(bb - 2ay - yy)}$ est réelle; parce que b , ou $y^2 bb$, surpasse nécessairement $\sqrt{bb - 2ay - yy}$. Or cette grandeur est réelle, lorsque $bb - 2ay > 0$ ou que $bb > 2ay$, (où $\sqrt{(bb + aa)} > a + y$, ou $y < y/C$ $bb + aa$) $- a$. Donc, du côté des ordonnées négatives, jusqu'à l'ordonnée $AC = \sqrt{aa + 'M'}$ $- a$ il y a quatre abscisses x qui forment les deux Feuilles AD , A d. Ainsi l'Origine A est un Point triple d'intersection; CV est ainsi ce que montre (équation mise sur le fr. anal. -• . ■ : - - \ Son Digitized by Google»

The text on this page is estimated to be only 18.67% accurate

DES POINTS TRIANGLES. 609 CH. xrn. Son plus bas Rang donne
— arfj'+a&x^o, qui a trois pla«c™ b b xxvii. racines j> = o, ^=-r-*v~ >^=
— *V ~« La première, indique une Tangente parallèle aux abscisses : c'est
celle de la Branche dAD. Les deux autres montrent des Tangentes obliques
aux coordonnées : ce sont celles des Branches BAd, BAD. Pour favoir si ces
Branches ont quelque Inflexion & de quel côté de leurs Tangentes elles
tombent, on cherchera le second terme des Séries y = o & c% > cVf. y==z
— xy/—&6. Celui de la première Série (& c'est proprement le premier
terme, car on ne compte pas o pour un terme) est donné par la
déterminatrice inférieure, qui traverse les Cafés*1/ & x4, donnant Téq; k4
+ zbxxxy = o, ou y = — ~Ê; Ce terme indique que la Branche dAD est (ans
Inflexion, & qu'elle tourne (à concavité vers les ordonnées négatives. s • • t
'.-1 —t.' ,';>: t - •■ «OOO* t * Q * ° 000 o o o Pour avoir le second terme
des deux autres Séries, on substituera ±x/- *bm iy, dans la proposée >44«
4— <• 4a4 b b 2syi + 2^x** = o., & la transformée x4 =i= ix'mi/— + —
xxflf*=fc4X«rV"~+***"4^**r::î=^5ai,V^ Introd. s l'Analyse des Lignes
Courbes. Hhhh — M» Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 18.55% accurate

,1 ! . 6i xx *°nt voir ,es Branches BAd, BAD tombent, par raport à leurs Tangentes , du côté des ordonnées pofitives , de manière qu'elles n'ont aucune Inflexion [ci-deflus , I.]. 2. Si dans l'équation propofée on fait $x = 0$, elle fe réduit à $44 - x^4 - 12y^2 = 0$. Alors l'ordonnée AC 407' [$= \sqrt{44 + r^2}$] devient Zéro, aufi bien que fes. abfcifles CD, Cdfit^C — at>+ b (aa + bb)). Les deux Feuilles AD, Ad, s'évanouiffent , & les Tangentes des Branches BAd , BAD [désignées par les éq : $y = + \sqrt{44 - x^4} - 12y^2$ & $y = - \sqrt{44 - x^4} - 12y^2$] de $fc = 0$ réduit à $ssro, ^{—}$ »] , fe confondent avec PAxe des abfcifles, Tangente de la Branche d AD. La Courbe fe réduit donc à une fimple Ovale A B , qui garde pourtant à fon J** 10 ' Origine A des vertiges de la double Eeuille. Car cette Origine eft toujours un Point triple , pùique dans fon éq : $y^2 Hh x^4 - 2sy^2 = 0$, le plus bas Rang eft le troifième. La Tangente de ce Point elt donnée par Péquat : — $24y^2 = 0$, qui a trois racines égales $y = 0$, $y = 0$ % $y = 0$ > Et comme cette racine triple du troifième Ra.ig ne Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 18.50% accurate

DES POINTS TRIPLES. 6u CWii. ne divise pas le quatrième la
triple de ce. Point m*^t I "1- est invifible [ci-deflus IV. i]. xxi 3. Mais
fi , dans la même équation $y^* + x^* = a^* + Flg, 10^?t 2fecl_y=0$, on fupplè
a — o\ alors AB [24] le réduit à rien, & la Feuille ABA difparoît.
L'ordonnée AC $[y/(aa+bb) - if]$ devient égale k.b , aufli bien que les
abfcifles CD, 'Cd[:±V(— ab + b y/(*a+bb)) J. La Courbe n'a plus que les
deux Feuilles AD, Ad , qui le Fuz- *°9joignent en A par un Point triple
forolè d'un Rebrouflèment dAD . traversé par la Branche dABD fdus *ine
autre direction. La nature de ce Point fe lit dans Téq : ? + ** + a^xly==o ,
mise fur le Tr. anaL Car elle y a deux. * o o o * '00*0 - • • /« '• "V • -v. 0 0 0
00 o il 'terminât riefs inférieures, qui donnent , l'une afocN-f-à* o, foit^= —
l'autre 2*xy+jf4==o. foit xss= — j V7"" T* La première marque une
Branche fans Inflexion » touchée par l'Axe des abfcifles,, & tournant (à
concavité du coté des ordonnées négatives. La féconde indique deux
'Branches qui font un Rebrouflèment touché par l'Axe des ordonnées [ci-
deflus iM. 1]. 4. Dans cette dernière équation , le fimple change- ' ment du
ligne du terme x*, lui fait reprélènter une Courbe très différente. La
précédente; étoit finie f- celle -ci a f^ lIOf quatre Branches infinies &
hyperboliques , dont les Alymptotes le croifent au point B, extrémité de
l'ordonnée AB =s — i*[\$. i4\$]» L'Origine eft ici, comme dans la Hhhh 2
dernière Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 19.85% accurate

.6x2 POINTS1 TRIPLES, . Planch« dernier e Courbe , un Point triple formé par un Rebrouffe- cma, $X3^{VI1*}$ menf traverse d'une Branche (bus une autre direction ; l ««• usais ici c'en la convexité de cette Branche qui eu tournée vers le Rebrouflcment , au lieu que là c'étoit (a concavité'. — La déterminatrice , qui dcfigne cette Branche, donnoit là ici elle donne }=[^] jy C'en toute la différence de ces deux Points» Exemple IL Si Ton veut un Rebrouflément travers, fous une dire&ion différente , par une Branche infléchie, on en trouvera un Exemple fort fimpfe dans la Kg. ait. Courbe qu'exprime Péq : $y'-M^4 - bxxyx = 0$. Elle confine en une Branche infinie CA, infléchie à l'Origine A , qui forme dans l'Angle des coordonnées pofitives une Feuille A D E A , puis rebrouflânt du Point A dorme une féconde Branche infinie A F G qui fubit en F une. féconde Inflexion. Les Branches infinies AC , AFG , font paraboliques & ont pour Afymptote courbe la Parabole cAg définée par Péq $1 y 1 - f - aoc^* = 0$ [§. 1 42]. Les Maxim a de la -Feuille, font les Points D, E, qui ont pour ordonnées Ad — [^].ÎZ*, Ee = ^{*}v/-[^], & pour abfciflès Dd = itfi\$5 , Atœ[^]~[^][i 1*]. Si l'on cherche la nature du Point A on trouvera que c'est un Point triple , puifque le plus bas Rang de l'équation mile fur le Tr. anal, eu k troifième , qui confine dans le fèul terme — bbxyy . Ce terme égalé à zéro a deux racines , une fimple $x=0$ & une double $y = 0$. Donc l'Axe des ordonnées ne touche Qu'une Branche de la Courbe & TAxe des abfciflès en touche deux. Mais puifque la racine $* 3 = 0$, divife Je quatrième Rang $+*x^4$, & non le cinquièV.t.» Digitized by GoOgi

The text on this page is estimated to be only 18.59% accurate

jySS POINTS TRIPLES. (U5 :C*»a me /, la Branche que touche
 l'Axe des ordonnées fubirP**»*"» ****"• une Inflexion au Point A [§. i8
 indique un Point de RebrouûeBierit touché par l'Axe des absciffes [d-
 deflufHL r]. , . • • 00000 0000* 0*00 000I " Exemple III. i/eq: y — <0%
 reprefente une Courbe compofée de deux Branches paraboliques AB, AC,
 étendues dans les angles des coordonnées de différents fignes, & touchées à
 l'Origine par l'Ovale AD qui forme avec ces Branches une Oftulhjiexim. La
 longueur de cette Ovale eft $AD = b$. Ainfi faifant $e = 0$ l'Ovale difparoît
 & ne corrlêrve que ces Branches infinies. Mais alors l'Origine eft un Point
 triple formé par l'adhérence d'un Point ou d'une Ovale infiniment petite à
 une Branche infléchie. Cela eft marqué par l'équation tangentielle $yi + xty =$
 0 qu'on trouve en mettant l'équation fur le Triangle anal. Elle a une racine
 réelle $y = 0$, qui donne pour Tangente l'Axe des abfciffes, & deux
 imaginaires $y = \pm \sqrt{-1} x$, qui marquent le Point adhérent [ci-deflTus, H].
 Et comme la racine réelle $\Delta = 0$ eft cenfée divifer le quatrième Rang qui
 manque, la BranHhhh 3 che >i». Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 22.51% accurate

6i4 DES POINTS TRIPLES. Plauchb chc de la Courbe fubit une Inflexion à l'Origine. Ceft Ch.XGL X*VIL aulfi ce que déûgne la Se'rie qui repréfente cette Branche ** t%u [§.217]. Elle commence par le terme j-donné par la déterminatrice qui traversc les Cafés xxy & x{. 00000* 00000 * o * o o o O t o o o Exemple I V. L'éq: xJ — ay++2bx'y ^acxy* Fis.n*. =o repréfente di ver les Courbes, qui ont toutes deux num.ui. Branches paraboliques AC, DF [§. 14a]. Mais elles diÉpL IV. fèrent extrêmement , près de l'Origine A , ("don le raport des grandeurs a , b , c. Si on cherche la Tangente de ta , Courbe en ce Point-là , on égalera à zéro le plus bas Rang, qui confîne dans le (êul terme acxyx , & comme cette équation a une racine fiénple x=o & une double ^=0, on conclurra que les deux Axes font Tangentes. Mais pour déterminer la nature de ce Point , on mettra l'équation fur le Tr. anal. Elle a deux déterminatrices , dont l'une o o o o* o * * o o * o 0*00 000 donne l'éq : — = o , ou relative à la c Branche que touche l'Axe des ordonnées. Elle fait voir que Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 24.10% accurate

DES POINTS TRIPLAS, 61\$ • Çm-xiil que cette Branche est l'ans
Inflexion à POrigine, & qu'elle punch» \$•»!• tourne là concavité vers les
abscisses positives lorsque c est xxyU. positif, & vers les abscisses négatives
quand c est négatif. C'est la Branche BADE [n°A & \V] ou BADE [«', Il &
111]. L'autre déterminatrice, relative aux Branches que touche l'Axe des
abscisses, donne l'éq : $acx^2 + zbx^2y > fr x' s o$, ou $41 x^4 = o$, qui a deux
racines. Si $*c > hb >$ ces racines sont imaginaires, & les Bran- n ches, que
devroient toucher l'Axe des abscisses, se réduisent à un point adhérent à la
Branche BADE [$\gg^* ; !$]. Si $a c = b b$, les deux racines sont égales, & les
Branches qu'elles désignent forment un Bec EEF [$\gg^\circ$. 11] traversé par la
Branche BADE. C'est un Bec & non un Émbrassement ; parce qu'entre la
déterminatrice, qui passe par les termes xyx , x^2y & x^3 , & la parallèle qui
passe par les termes, ou plutôt par le terme du fécond Ordre, il y a trois
intervalles [§. 1 1 3 & ci-dessus III, 2]. Si ac est positif & $< bb$ les
racines de l'éq : $acx^2 + fcibx^2$ } 4

The text on this page is estimated to be only 20.47% accurate

I 616 DES POINTS TRIPLES. PijTv" s'en convaincre auflî, en
 fcifiant $* = ^J \& yz = ^9 fuP$ " pofitions qui transforment Péquation propofée en
 $— — — H — = o$, foit « $* i - 2i^* + sc = o$, laquelle défigne une Courbe du
 quatrième Ordre. Ffc. m. Cette Courbe a deux Branches paraboliques bc, ef,
 '* dont l'Alymptote courbe eft la Parabole cubique exprimée par Téq : $uu —$
 $— = o$, ou $**u = z^9$, & deux Branches hyperboliques ba, ed, dont
 PAfymptote droite eft PAxc des abfciffes & PAfymptote courbe l'Hyperbole
 ta? — — +ac — oy ou $uz^9 = .a^* c$ d'un paramètre pofitif quand c eft
 pofmf [»*. i, 2, \$] & cfun paramètre négatif quand c eft négatif [»°. 4].
 Cela (uffit pour donner quelque idée du cours de cette Courbe ; furtout fi on
 ajoute qu'elle rencontre l'Axe des ordonnées dans les Points indiquez par
 l'éq : $*w + zhu^4c = ro$, à quoi le réduit fon équation, quand on fait $z = o$.
 Ainfi la Courbe ne rencontre point PAxc des ordonnées, lorfque èobb,
 parce qu'alors [n\ 1] les racines de Péq : $r/u + 2bu > \{ *4c = o$ font
 imaginaires. La Courbe touche cet Axe, quand $4c — bbt$ ce qui rend égales
 ks racines de cette équation [n\ % J, La Courbe coupe fon Axe en deux
 Points, lorfque acabit, parce qu'alors Péq: $uu > b^2 bu > \{ *4c = o$, a deux
 racines inégales, & ces deux Points font d'un même côté de POrigine [»°. 4].
 %], lorfque 4 f eft pofitif, les deux racines étant alors de même figne; au
 lieu que ces deux Points font de part & d'autre de l'Origine [»'. 4] quand 4^f
 eft négatif, les deux racines ayant alors différents fignes. Cetic > Digitized
 by Google

The text on this page is estimated to be only 20.64% accurate

T>R\$ PÔltfTf TRIPLES. 6if Ch.xiii. Cette Courbe du 4e. Ordre étant décrite , on décrira Planchk \$• *«• par (on moyen celle du 5 e. Ordre reprélentée par Péq : $Xxv1L xi - ay^4 < 2bxy^2 - acyx = 0$, en prenant , fur la première > une abicille quelconque Z & lbn ordonnée // , & donnant, pour la féconde , à Pabfciflc $x[= -]$ Pordonti ' z née $yf = - 1$ » U (croit facile d'en donner une Confy L aaJ tru&ion géométrique : mais elle n'eft pas néceflaire ici. Il fuffit de voir quelles parties de la Courbe du 5 e. Ordre font produites par les diverfès parties de la Courbe du F*' tl* quatrième. D'abord , 1 °. fi celle - ci ne rencontre point l'Axe des n , ^ , ordonnées , la Branche infinie a b produit la Branche finie A B. Car fi Pon prend z infinie , puifqu'à l'infini la Branche ab fe confond avec fon Afymptote courbe dont Péquation eu $uz = a^2$, on aura $y I = - = - = - 1^2$ rtrt aaz aazJ ac . r . à o r , $1Z uz^0 a^2 c - 1 = -$ infiniment petite , & $x = I - = - = - 1$ z r a azz azz 4 — infiniment plus petite encore. Donc, au point de la 7jZ Branche ab qui eft infiniment éloigné de POrigine , répond le point A fur POrigine où la Courbe touche PAxe des ordonnées , puifque x elt infiniment plus petite que y. Mais , fi Pon prend z finie , u le fera aulfi , & de même $x [= ^]$ & y $[z=U^{\sim}]$. Par ex. le point b duquel l'ordonnée b g eft $z=\sqrt{ac}$, & PabfcifTe $Og:=V(2^{**6} *i^{*2}a^{\acute{e}u})^3$ donne le point B, dont PabfcifTe $A/3 y\{2acc>\}^{*} 2bcy/ac\}$ & Pordonnee $pB - v 1 - .$ a bitrod. à PAnalyfe des Lignes Courbes. Iiii Ainfi Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 25.37% accurate

6;8 DES POINTS TRIPLES. planche Atnfi toute la Branche infinie ab ne donne que la Bran- Cn.xm xxvii. che finie A B. Mais la Branche infinie b c , dont les abf- §• ciflès & les ordonnées croiflènt à l'infini , produit la Branche infinie B C , dont les coordonnées vont auffi à l'infini. Il en eft de même des Branches DE, EF produites par les Branches de, e f ; avec cette différence que les coordonnées z & u des Branches de , cf étant négatives» u Z les abfcifles x[=—] des Branches DE, EF feront pofitives , & leurs ordonnées y [= —] négatives. Ainfi dans ce ir. Cas la Courbe du 5e. Ordre CBADEF n'a que deux Branches infinies ABC , DEF qui partent toutes deux de l'Origine A. Ce Point A eft pourtant un Point triple, mais fa triplicité cit. invifible» *.%&n. 20. Si la Courbe du 4e. Ordre touche en e fon Axe des ordonnées , les Branches abc produifènt , comme dans le Cas précéd. la Branche ABC. Mais la Branche de produit une Feuille DEY,. Car le point d infiniment éloigné donne , comme ci-deflus * le point D où la Courbe touche l'Axe des ordonnées. Et le Point e , où l'abfcifse z eft nulle, ou infiniment petite, & l'ordonnée u [Oe] finie, donne à la Courbe du 5e. Ordre une abldffe * MZ uZZ [= —] infiniment petite , & une ordonnée y [= —] infiniment plus petite. Le point e donne donc un Point E , où la Courbe touche l'Axe des abfcifles. Ainfi la Branche infinie de produit une Feuille DEE. Et la Branche infinie e f produifant , comme cy - deflus , une Branche infinie E F touchée en E par l'Axe des abfcifles , la Courbe CBADEEF a, à l'Origine, un Point triple qui confifte en un Bec EE F traversé par la Branche BADE e direaion différente. 3 • M Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 25.96% accurate

DES POINTS TRIPLES. 619 Oi.xm. j*. Si la Courbe abcdef coupe l'Axe des ordonnées $\text{ff}''5\text{Je S-} \langle \rangle''$ en deux points i, l, d'un même côté de l'Origine, on flgt MJ. verra, comme dans les Cas précédents, que les Branches $\langle \rangle''$. j. abc produisent la Branche ABC, que la Branche d i pro- & IIL duit la Feuille DEi, & que la Branche If produit la Branche infinie LF. Mais Tare iel produit un Fleuron IAEDL. Car les points i,l, dont les abscisses sont infiniment petites & les ordonnées finies, donnent, comme cideffus, les points I, L, dont les abscisses sont infiniment petites, & les ordonnées infiniment plus petites; c'est-à-dire, des Points où la Courbe touche, à l'Origine, l'Axe des abscisses. Et les autres Points, comme e, dont l'abscisse z [Oh] est positive, & l'ordonnée »[hc] négative, donnent des Points E, dont l'abscisse *[-] & l'ordonnée y [= —] sont négatives, ce qui produit le Fleuron IAEDL. Ainsi l'Origine de la Courbe CBADELDEALF est un Point triple, qui consiste en un Embrassement traversé par une Branche de direction différente. 4°. Enfin, si la Courbe abcdef coupe l'Axe des ordonnées de part & d'autre de l'Origine O, la Courbe v' C1ABI LEDLF a, à l'Origine, un Point triple formé par une Osculation traversée par une Branche de direction différente. Car les mêmes raisons que ci-dessus font voir que les Branches infinies i c, If, produisent les Branches infinies IC, LF, & que les Branches infinies abi, led, produisent les Feuilles ABI, LED. Exemple V. On trouve une Osculation traversée par une Branche de direction différente dans la Courbe que représente l'éq : $x^4 + a'xyy = 0$. En la mettant sur le Tr. anal, elle a trois déterminatrices inférieures, qui donnent ces trois équations, lui 2 a y

The text on this page is estimated to be only 19.69% accurate

6x> DES POINTS TRIPLES. Piahcm *Y 4. alxyy-as o , a'xyy HH
 = o , & >= — T»&^= • La m m Ad * 000000* 000000 * o o * o 0*00 000 o
 o o ffr.xi4. première marque une Branche fans Inflexion BAHG, touchée
 par l'Axe des ordonnées & tournant à concavité vers les abscisses
 négatives. La féconde indique une Branche , auflî fans Inflexion , G H F E ,
 touchée par l'Axe des abscisses , & tournant à concavité' vers les ordonnées
 négatives. Et ia troifième defigne une- Branche infléchie BCDE, touchée
 auffi par l'Axe des abscisses. Ces trois Branches forment ainfi une
 Ofculinflexion traversée par une Branche de direction différente. [ci-deflus
 III. 3]. On s'affliirera que ces Branches ont bien la pofition indiquée par les
 équations des déterminatrices , en analyfant l'équation de cette Courbe de la
 même manière qui a été employée dans PEx. préc. Si on fiibftituë — à x, &
 ii? à y dans la propofée x6 4. *ay*+aax'y -f^ao, on la transformera en «r'z +
 wz1 4<<'*4-*4=o, qui repréfente une Courbe du 4e. Ordre [n\ 2] , laquelle
 a quatre Branches hyperboliques [§. i?8"). Deux ba, efgh ont pour
 Afymptote droite l'Axe des abscisses , & pour Afymptote courbe
 l'Hyperbole dont Péq : eft $uz1^{^^} \text{£} = 0$, ou $u = \text{---} -v$. Deux autres bc, ed ont
 pour ; Alymjv Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 27.30% accurate

DES FOINTS TRIPLES. 621 c«.xm. Afymptote droite l'Axe des ordonnées, & pour Afymptote Planc«* courbe PHyperbole défigne'e par Péq : «'5;+ a1 *=o , XXV». ou $z = \frac{1}{x}$. Ainfi fa Courbe a, à peu près, la figure qu'on voit ici [»°. 2]. Son ordonne'e primitive Of eft — 4. Et le Maximum e des abfciffes eft déterminé par Pabfcifle Oi, racine de Téq: $4(2' + «')' + * & *' * 8 = 0$ » & par l'ordonnée ie = — — -1^— Cette Courbe [»°. 2] (èrt à décrire l'autre [»°. 1 J , en prenant dans la première une abièiflè quelconque z & ion ordonne'e u , & donnant , pour la féconde , à PabCrifle $x [= \frac{1}{z}]$ une ordonne'e y [= — Z]. Sans entrer ici dans un détail , qui feroit fuperflu après ce qui a été dit dans l'Ex. préc. il luffira de remarquer que la Brandie abc, infinie de part & d'autre, produit la Feuille ABC, qui touche , au Point A , les deux Axes : que la Branche infinie def produit le Fleuron DE F , dont les deux Branches touchent , au Point A , l'Axe des abfciffès : & que la Branche infinie fgh produit la Feuille FGH, qui touche les deux Axes au Point A. La Courbe entière eft donc compofée de trois Feuilles ABC, DEF, FGH; , ou de trois Branches BAHG , (jHDE , & EFACB, qui forment à POrigine une Ofculinfkxion traversée par une Branche de direction différente. Voici maintenant des Exemples de Points triples dont les trois Branches ont au Point de contaû une même dire&ion. Et d'abord, Exemple l^L i. Un Rebrouflément DAE, touché Ftg. ïïf par une Branche BAC , (ê voit à POrigine de la Courbe reptéfentée par Téq : $aay^* - bvïy^4 \ll *s = o$. Son cour» liii 1 confifte Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 27.30% accurate

6i2 DES POINTS TRIPLES. Planche confifte en une Branche BAC, qui étendue à l'infini dans Ck.xui xxyil j>ang|e ç\es abfciflès négatives & des ordonnées pofitives, ••■H touche à l'Origine A l'Axe des abfciflès, forme dans l'angle des coordonnées pofitives un Fleuron A CD A & revient toucher l'Axe des abfciflès en A, d'où rebrouflant en A E, elle fe jette à l'infini dans l'angle des abfciflès pofitives & des ordonnées négatives. L'Asymptote des branches infinies eft la Parabole $a1/ + *' s=0$. Les Points principaux font, le Maximum C des abfciflès $18b\%$ qui a pour abfciflè $Ac==$, & pour ordonnée $cC = \sim^{TM}4\hat{I}$ te Maximum D des ordonnées, qui a pour S j abfciflè $Dd=-$ & pour ordonnée $Ad = \text{---}$ mais $24? * r 27^{\wedge}$ fur-tout l'Origine A qui eft un Point triple, dont les trois Branches font touchées par TAXc des abfciflès. Car les Tangentes font données par l'équation du plus bas Rang $*y=0$, qui n'a qu'une racine triple jr $\text{---} 0$. Et comme cette racine divife, mais une feule fois, le quatrième Rang fans divifer le cinquième $*'$, on conclura [ci-deflus IV, a, i)] que ce Point A eft un Rebrouflè-r ment DAE, touché, ou traversé par une Branche BAC de même direction. C'eft aufli ce qu'on voit bien clairement en mettant Féquation fur le Tr. anal. Car elle a deux déterminatr[^] o o o o o * o o o * o * o o o o o 9 o ? i ces

Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 26.11% accurate

DES POINTS TRIPLES. 623 c«jnn. ces inférieures , qui donnent
les éq : **/ — — 0 §•»*'• X x1 XXV1L ou j = =±=—

The text on this page is estimated to be only 22.43% accurate

62* DES POWTS TX1PLES. Flanchi réelles, qu'autant que $a^{\wedge}Py$ est positive, c'est-à-dire, $Cn.m \text{ XK/II}$. ♦ C i»r jufqu'à l'ordonnée $Ad[y] = \text{---}$ p. Dans cet interval- ? le, elles font toutes deux positives & donnent le Fleuron ACDA, dont les Maxima D, C font déterminés par leurs ordonnées $Ad = \text{---}^{\wedge}$, $CG = \text{---}^{\wedge}1$, & par leurs abscisses d $D = \sim$, $A c = \text{---}^{\wedge}$. Ainsi le Point 9b triple de l'Origine est un RebrouflTement DAE touché par une Branche infléchie BAC. C'est aussi ce qu'on peut conclure de nos Principes Car Péquation du plus bas Rang bly' $\text{---} o$, n'a qu'une racine, mais triple, $j=0$. Donc à ce Point; il n'y a qu'une Tangente pour les trois Branches de la Courbe, & cette Tangente est l'axe des abscisses. La racine triple divisant, une (eule fois, le quatrième Rang 2 aaxly, & divisant au/fi, ou étant censée diviser, le cinquième Rang qui manque, mais non pas le sixième Rang x6; le Point triple, doit être un RebrouflTement traversé par une Branche infléchie [ci-deffus IV, Mais on le voit encore mieux en mettant Péquation sur le Tr. anal. Elle a deux déterminatrices inférieures qui donnent les éq : $\text{---} r b\%f \blacktriangleright f \gg 2aax*y o$, ou $y \blacksquare v, ax, 2x \text{ ---}, . x\}^{\wedge}T^{\sim}b^* \& =^{\circ} >$ ou $y \text{---} \text{---} 77\hat{a} > \text{dom}$ la première marque le RebrouflTement & la féconde la Branche infléchie qui le touche. 000000* O O OOO o 000*0 * o o p • . 0 &c. Exemple Digitized by Google

Fig. 208.

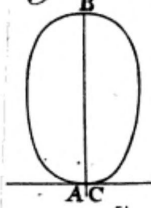


Fig. 209.

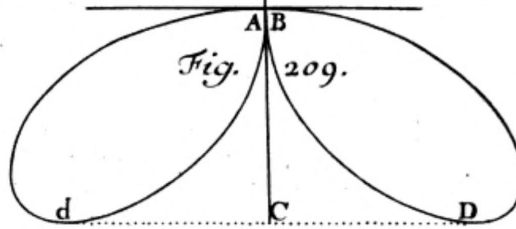


Fig. 211.

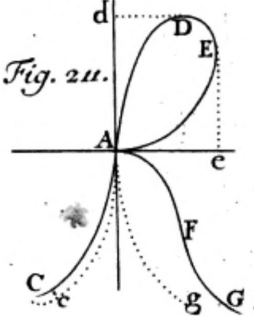


Fig. 210.

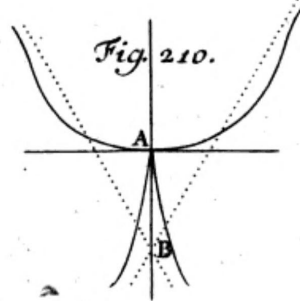
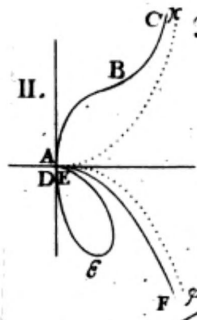
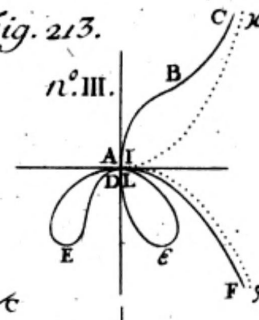


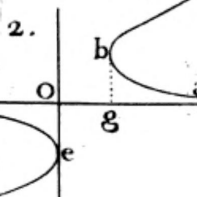
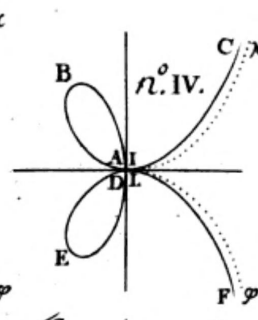
Fig. 213.



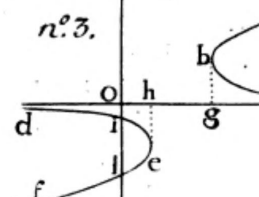
n.º III.



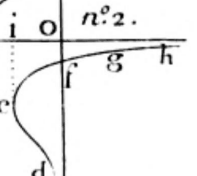
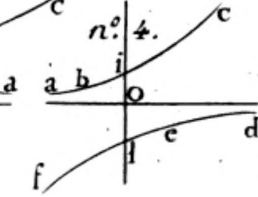
n.º IV.



n.º 3.



n.º 4.



n.º 2.

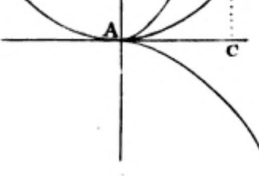


Fig. 215.

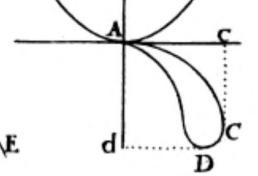
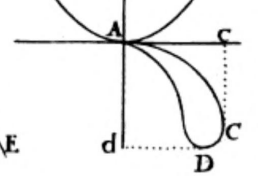


Fig. 216.



The text on this page is estimated to be only 25.25% accurate

DES POINTS TRIPLES. 62\$ cuoit Exemple VIII. Les Courbes que défigne Péq : $J''JJ \cdot xx \cdot xiy^* \_ ayi \_ ^ yxxyx > \{ *cx*y + dx^6$ fourniiTent des Exemples Flgt II7* de tous les Points triples dont il eft queftion, ci-deflùs »x.»]. IV, \$, 2). Qu'on fubftituë dans cette équation xxu à y , $4*f,<5$, & qu'on divife la transformée par x^6 , on aura $xuuz=z$ au1 $>i<$ bu* $*i*cu+d9$ équation qui repréfente des Courbes du troifième Ordre . Elles ont quatre Branches hyperboliques , dont deux ba , g h ont pour Afymptote courbe l'Hyperbole exprimée par Péq : $xuu = d$ [§. 158], ce qui fait voir qu'elles embrablent l'Axe des abfciffes , qui eft leur Afymptote droite, fe jettant du côté négatif, fi d eft négative [»°. 1,3,5]; du côté pofitif , fi à eft pofitive [»°. 2 , 4 , 6]. Les deux autres Branches hyperboliques de, g f , ont pour Afymptote droite l'Oblique e f défignée par Péq : $x=av-\backslash b$, & pour Afymptote courbe PHyperbole ordinaire [§. 14?]. Ces Courbes rencontrent leur ordonnée primitive en autant de points que l'éq : $au\% * \backslash bux \wedge cu \wedge d$ —o a de racines. Ce qui fait fix Cas principaux. 1 °. Celui où les trois racines font réelles , inégales & num* de même figne : alors les trois points b , c , d , ou la Courbe coupe l'Axe des ordonnées , font d'un même côté de l'Origine. 20. Celui ou ces trois racines étant réelles & inégales, nwm' u il y en a une d'un ligne & deux cKun autre figne : alors, des trois points b , d , g , il y en a un d'un côté de POrigine , & deux de l'autre. Celui où il y a deux racines réelles & égales, & *am' J# une troîficme réelle de même figne: dans ce cas, la Courbe touche l'Axe des ordonnées en d , & le coupe du même côté de l'Origine en b. 4°. Celui où la troifième racine a un figne différent de celui des racines égales: alors la Couibe touche l'Axe Introà. à PAnalyfe des Lignes Courbes. K k k k des Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 23.44% accurate

626 DES POINTS. TRIPLES. des ordonnées d'un côté en b , & le coupe d'un autre côté Gk.xiil XXVIU- de l'Origine en g. Sj. 50. Celui où les trois racines font égales : alors la Courbe touche & coupe l'Axe en un même Point b d , qui est un Point d'inflexion. 6 6°. Celui où il n'y a qu'une racine réelle & deux imaginaires ; en ce cas la Courbe ne coupe qu'en un Point g l'Axe des ordonnées. le palTc fous filence quelques variétés , qui pourraient livier ces Cas, mais qui ne font pas eflentiellles. On peut, par le moyen de ces Courbes du je. Ordre, décrire géométriquement celles du 6e. que définit l'éq; $x^3y^4 = ay^4 + bx^2y^3 + cx^4y^2$

The text on this page is estimated to be only 27.27% accurate

DES POINTS TRIPLES. 627 ^{^i}? CSne: 1X1315 ,or[^]onn[^]c y des
P0,nts E> F cft [***=] xxvñ. Aînfi les quatre Branches hyperboliques de la
Courbe »°. r* 1 , produifent les quatre Branches paraboliques de la Courbe
n°. I . Mais les deux arcs , qui font entre b c , & cd, produifent les Fleurons
BBC, CCD, dont les Branches touchent l'Axe des ablcifTes à l'Origine ;
parce qu'à l'ablèifle x infiniment petite des points b , c , d , répondent des
ordonnées // finies Ob, Oc, Od : mais à une pareille ablciflc , dans l'autre
Courbe , repondent des ordonnées y [= xxu 1 infiniment plus petites que
Pablcidè x. La Courbe produite eft donc compofee de quatre Branches
paraboliques & de deux Fleurons. La Courbe abede fgh du n°. 2 produit la
Courbe n.t.& 11 ABCDE FGH du n\ II. qui, avec un feul Fleuron BCD
produit par l'arc bed , a quatre Branches paraboliques , BA, GH, DE, G F
produites par les Branches hyperboliques ba, g h, de , gf. Les deux
premières ont pour Afymptote courbe la Parabole femi-cubique «B» : les
deux dernières la Parabole cubique iB? . La Courbe ABCDE FGH du n\ III ,
produite par la & l'IL Courbe abede fgh du \$, a auflî quatre Branches
paraboliques BA, GH, DE, GF produites comme dans les Cas prece'dens &
ayant les mêmes Afymptotes. A ces Branches (c joint un Fleuron BCD ,
produit par l'arc bcd. La Courbe ABE FGH [»°.IV1 produite par la Cour- «
4.0IV. be abe fgh [»°»4] n*a point de Fleuron, mais feulement les quatre
Branches paraboliques , qui paflent toutes quatre par l'Origine, & y touchent
l'Axe des abfcifiês. La Courbe ABE FGH du n\ V, produite par la Courbe
abc fgh du »°. 5 , eft auflî l'ans Fleuron, & a les quatre Branches
paraboliques BA, GH, DE, G F : mais il n'y a que la ie. & la \$e. qui partent
par l'Origine. Kkkka 11 Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 27.28% accurate

628 DES POINTS TRIPLES. Pl^{*}kciie U en eft de même de la Courbe ABE FGH du »°. VI, dextt xxviii. produite par la Courbe abe fgh du n°. 6, fi ce n'eft \$-U1' & \ que ce font les Branches GF. G H qui partent par l'Origine. Ainfi la Courbe du »°. 1 dégène're en celle du n°. 111, quand le Fleuron CCD difparoît, & celle-ci, par Tévanouiffement du Fleuron BCD dévient la Courbe du V. De même la Courbe du »°. H, fe change en celle du w°. IV, quand le Fleuron BCD fe réduit à rien, & la Courbe du »°. I V fe transforme en celle du n3. VI, quand le Bec ABE fe retire & s'émouOè. Toutes ces Courbes ont à l'Origine un Point triple. Celui du n°. I eft un EmbralTement de trois Branches : celui du »°. II un Embra(Tement & Olculation ; celui des »°. 111 & 1 V un Bec touché par une Branche qui TembraCfe ou le bailè : enfin ceux des n°. V & VI n'ont qu'une Branche, mais on peut fuppofer au n\ V les Fleurons du n. 1 devenus infiniment petits, & au »°. VI un Point adhérent. Tout cela fe lit dans l'éq ; $x'yy = ayl + bxy' - + tx*y * dx*$ mife fur le Tr. anal Elle a deux déterminatrices o o o o o o * o o o * * o o o * o o * o o o o o o o o fupérieures, qui donnent les e'q $\hat{a}y* = x'/ & xly'' - dx*$, ou $y \sim \sim > J = \text{---} * \sqrt{dx}$, des Paraboles afymptotes des Branches infinies» Elle a aufli une déterminatrice *

Digitized by Googl

The text on this page is estimated to be only 23.46% accurate

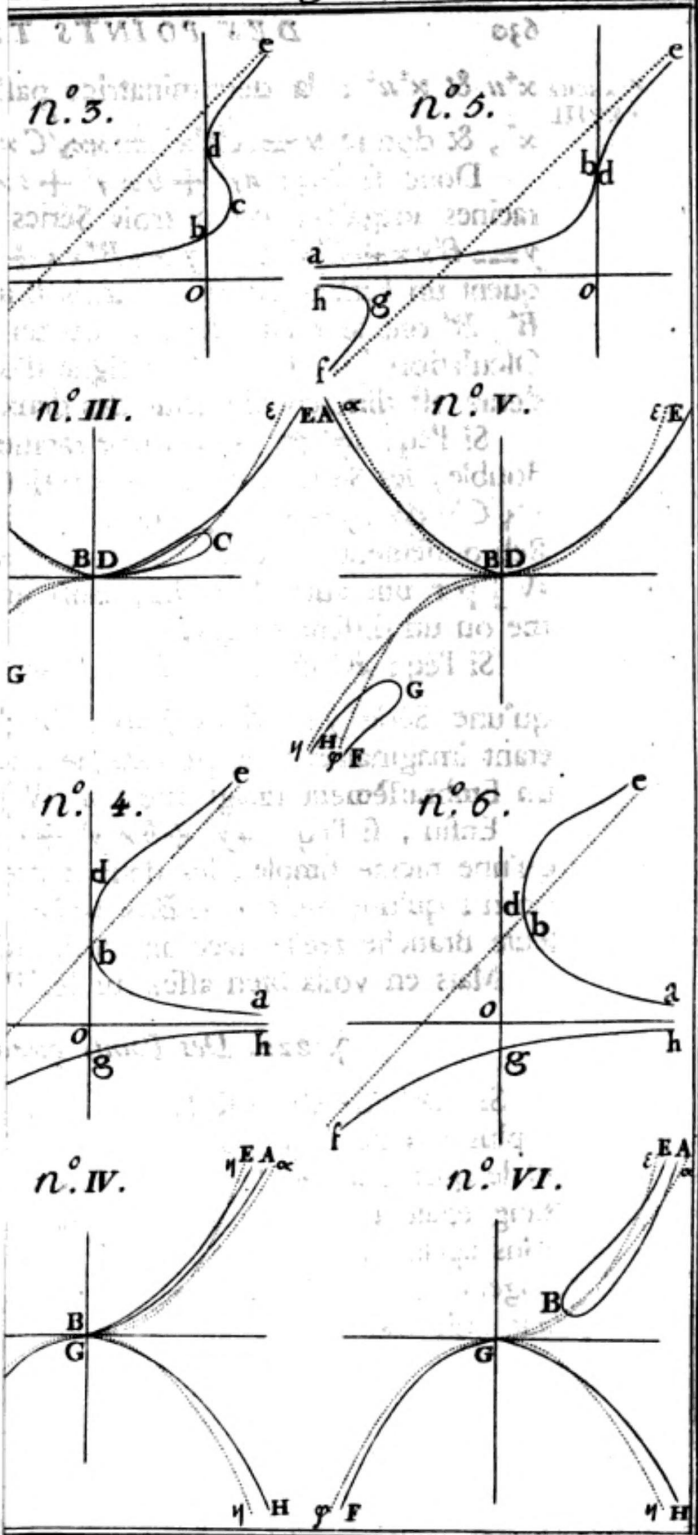
DES POINTS TRIPLES. 629 Ca.xill. trice inférieure qui donne l'éq : $af^4 \ll bxxyy^4 * cxAy dx^* Flanchk = 0$, dont les racines sont réelles ou imaginaires, égales XXV11L ou inégales, de même ou de différents signes, à l'imitation de celles de l'éq : $atf - \backslash -huti + en^4 < à = 0$, en laquelle elle se transforme par la substitution de xxu à y . C'est donc ici le Cas du n°. IV, §, 2) ci - deffTus, & pour démêler les différents Points qu'il renferme, il faut chercher le fécond terme des Séries y — $Bx1$ érc. dont le premier terme est donné par l'éq: $*y^0 \ll + \bullet bxxyy > \{ *cx*y^4 dx^6 = 0$. On substituera donc Bxx Hh^* à / dans la piopofée, & on mettra la transformée sur le Tr. anal. Le seul terme xlf remplira les Cafés $*V, x5\#$ & $x7$ [§. 105] : mais les termes f , $x'yy$, $x*y$, $x6$, qui étoient sur la déterminatrice, laifleront vuides, ou la seule Cale x' , ou les deux x^* , $x4$ », ou les trois $x6$, $x*u$, $V \gg 1$; félon que Bx^* est une racine simple, double, ou triple de l'éq : $*f + 5xy + \ll 4$

The text on this page is estimated to be only 24.30% accurate

630 DES POINTS TRIPLES. π anc h ex4// & *V : la
déterminatrice pafle par les Cafés *' & ch.xdi XX/I11 * , & donne $u = fax^7$
 $= xxjCx$. 5* lll Donc fi Véq : $ay\% + b x^*/ + cx+y+dx^* = o$ a trois racines
inéégales, on a trois Séries $y = Bxx + CV \&c$, $jy = B'xx + CV \text{ tfv}$, $y = fl'x^* +$
 $CV^{\wedge}$, qui marquent un Embrablément de trois Branches [$\gg^{\circ}$. I J , fi B , i>' ,
B" ont le même figne ; ou un Embraflement & une Ofculation [$\gg^{\circ}$. 11] , li
le figne d'une de ces trois grandeurs eft différent de celui des deux autres. Si
Péq : $4jf^{\wedge} = o$ aunc racine fimple & une racine double, les Séries font
 $y = Bxx > \{ *Cx\% \&c$ y $y = B'xx + xWCx \&e9y = B'xx - *VC^* \&* \bullet$ ce qui
marque un Rebrouflément en Bec , embrafTé [n". 111] ou baifé [$\gg^{\circ}$. IV]
par une autre Branche , lèlon que BolB ont un même ou un différent figne.
Si Péq : $ays \&c = o$ n'a qu'une racine triple , il n'y a qu'une Série $y = Bxx 4^*$
 $xx \setminus Cx \&c$, les deux autres étant imaginaires : ce qui défigne une Branche
réelle avec un Embraflement imaginaire [$\ll^{\circ}$. V] . Enfin , fi l'éq : $a y^1 \bullet \setminus$

The text on this page is estimated to be only 24.00% accurate

Digitized by Google



The text on this page is estimated to be only 5.00% accurate

1 !! 4 . V 4 I ; i

The text on this page is estimated to be only 29.23% accurate

DES POINTS QUADRUPLES. 631 O Xin. Cas I. Si Pég : E a
Tes 7#rf/r* MfÂw réelics & inéga- Pianchh §.***• les \ le Point quadruple a
quatre Tangentes & quatre xxvIII Branches qui (c croifent à angles finis , &
forment un Point quadruple d'interfeïïion , un Triple- Nœud , ou Double
Point de Croix. Ce Point peut avoir une , deux , trois , ou quatre Branches
avec Inflexion ou Serpement de tous les degrés. Mais fi quelque Branche
a une Inflexion du degré / , la Courbe fera au moins de l'Ordre /-t-5 , Earce
que la Tangente de la Branche infléchie eft cenfée 1 rencontrer en r+2
points, & les trois autres Branches en \$ points, ce qui fait t+\$ points. Ainfi
dans le cinquième Ordre aucune Branche d'un Triple- Nœud ne peut être
infléchie, & dans le fixième Ordre aucune ne peut (erpenter. Voyez ci - de
flous £x / , 1. Au refte ici , comme dans les Points doubles & triples , on
connoitra de quel côté chaque Branche tourne la concavité , en cherchant le
fécond terme de la Série qui la repréfente , & dont le premier eft donné par
une racine de Pég : É. Css II Si des quatre racines de Pég: E, deux font
imaginaires & deux rf elles inégales ; ceHes-ci défignent deux Tangentes &
deux Branches qui font un Point de Croix y & celles-là marquent un Point
invifible pofé fur Pinter(e6Uon des Branches qui fe croifent , & dont
aucune ne peut être infléchie dans le cinquième Ordre, ni (erpenter dans le
fixième. Voyez Ex. I. 2. Cas III. Mais fi les quatre racines de Pcq : E font
imaginaires ; le Point quadruple eft conjugué. Voyez Ex. I. \$. Cas IV. Si l'éo
: E a une racine double & deux /impies ; le Point quadruple eft formé par le
concours d'un tfarud avec un Point double à directions coïncidentes , lequel
fera [§. 220, 111] ou un Rebrouflément , ou un Bec, ou un Embraflement ,
ou une Ofoulation réelle ou imaginaire , ou une Ofculinflexion , ou une
Embraffinflexion , ou &c. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 27.01% accurate

6§2 DES POINTS QUADRUPLES. planch- &c. Mais, à s'en tenir aux Courbes du cinquième & du sixième Ordre; 1. Si la racine double du 4e. Rang ne divise pas le 5e. ce Point double fera un Rebroussement [§.220, III, 1], qui devient Point quadruple à cause des deux Branches qui le traversent, & de laquelle aucune ne peut être infléchie dans le cinquième Ordre. Voyez Ex. I. 4. 2. Si cette racine double divise le 5e. Rang & non le 6e, le Point quadruple peut être une Osculation réelle ou imaginaire, un Embrassement, ou un Bec, traversé par deux Branches, qui peuvent être infléchies, mais qui ne peuvent se croiser, dans le sixième Ordre des Courbes. On déterminera la nature du Point double qui concourt à former le Point quadruple, par les Régies du §. 220, III, 2. Voyez Ex. II t. Cas V. Si l'éq : E a une racine double & deux imaginaires; celles-ci n'indiquent qu'un Point adhérent au Point double à directions coïncidentes; ce qui en fait un Point quadruple. Voyez Ex. / 5. & Ex. II 2. Cas VI Si l'éq : E a deux racines doubles, le Point quadruple n'a que deux Tangentes, & il est formé par le concours de deux Points doubles dont chacun a sa direction particulière. Sans passer le sixième Ordre, on a cinq de ces Points [§. 220. III. 1.2], qui, combinés deux à deux, font quinze espèces de Points quadruples renfermés dans ce Cas. Voyez Ex. L 6, Es. II 3, Ex. V, & Ex. VI. Cas VII. Si l'éq ■' E a une racine simple & une racine triple; ce Point quadruple est formé par un Point triple à directions coïncidentes traversé par une Branche de direction différente. La Branche est désignée par la racine simple, & le Point triple par la racine triple [§. 221, 1 V]. En se renfermant dans les cinquième & sixième Ordres, il peut être, 1. D'une

Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 24.92% accurate

DESFOINTS QUADRUPLES. 63\$ Ch.Xitl r. D'une trîplicité invifible , refultante de l'évanouiffement de quelque Feuille : ce qui a lieu quand la racine xxix. triple du 4e. Rang ne divife pas le 5e. [§. 221. IV. t J. Voyez ci-deffous Ex. I. 7. 2. Un Rebrouffement touche par une Branche : ce qui arrive quand la racine triple du 4e. Rang divife une fois le 5e. fans divifer le 6e. [§. 221. IV. 2. 1)]. Voyez cideffus Ex. III. 1. 5. Un Point d'une trîplicité invifible , réfultante de l'évanouï (Tement d'une Feuille adhérente à une Branche infléchie : c'eft le cas où la racine triple du 4e. rang divife plus d'une fois le 5e. fans divifer le 6e. [§. 221. IV. 2. 2)]. Voyez ci-deffus Ex. III. 2. C*s VIII. Enfin , fi Péq : ξ^* n'a qu'une feule racine quadruple y — $Ax = 0$ le Point quadruple de l'Origine n'a qu'une feule Tangente, dont la fituation eft donnée par l'éq: y — $Ax = 0$. En fubftituant dans la propofée $Ax + u$ à y , on aura une transformée, dans le 4e. Rang de laquelle il n'y aura que la Cale u^* qui (bit pleine. 1. Si la racine $\wedge$ — $Ax = 0$ du 4e. Rang ne divife pas le 5e. de la propofée, la Café xJ reftera pleine dans ; transformée; & la déterminatrice inférieure donnera «4 = $\xi x f$, ou $\wedge = \sqrt{Bx}, = \pm x \sqrt{Bx}$. La Série $y = z Ax \pm zxy/Bx$ &c. indique un Rebrouffement ; mais qui eft Point quadruple, parce qu'il eft cenfé renfermer quelque Feuille évanouiffante. Voyez Ex. I 8. • • • • • 0 0 0 0 0000 0 0 0 0 0 0 httrûd.àPAR.alyfe des Lignes Courbes. LUI Les Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 21.84% accurate

634 DES POINTS QUA DRUPLES. pt anche Les Courbes du cinquième Ordre font fufceptibles de Cr.xih xxix- ce Point ; mais ceux dont on va parler ne peuvent con- S'avenir qu'aux Courbes du fixième Ordre , ou des Ordres fupérieurs. 2. Si la racine quadruple du 4e. Rang divife une fois le 5e. & non le 6e. il manquera à la transformée la Cafe ocf , mais non les Cafés r/x^4 & Ainfi elle a deux déterminatrices inférieures, qui donnent « $*$ = $\xi \gg x^4$ & $ux^* = \xi'^{**}$, foit $u = xy/Bx$ & $u = B'xx$. H y a donc $\bullet \bullet \bullet \bullet \bullet *$ $\bullet \bullet \bullet \bullet *$ $o * o o o o 0000$ &c. î deux Séries $y = Ax + x^Bx$ &c. $y = Ax + Bfxl$ &c. qui définient deux Branches (ans Inflexion , lesquelles s'embraflent ou fè baifent , (èlon que B & B' ont le même figne ou des fignes oppo Ces. Le Point de contact de ces deux Branches eft cenlé quadruple, parce que lYq: $\#4 = Bux^*$, ou « $' = Bat^4$, renferme deux racines imaginaires avec la racine réelle $* = \sqrt{v/B^*}$ > Voyez Ex. III. g. Si la racine $y = Axr = 0$ divife plus d'une fois le 5e. Rang, l'ans divifèr le 6e. de la propofée; la déterminatrice inférieure de la transformée p a liera par les Cales $*^4$, $\gg 2x'$ & $x^6 y$ & donnera une équation du fécond àè $\bullet \bullet \bullet \bullet \bullet *$ $\bullet \bullet \bullet 00 \#0000$ &c. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 26.92% accurate

DES POINTS QUADRUPLES. 6^{te} Ch. xiit. gre, qui a deux racines $u = \pm \sqrt{x^2 - Bx}$, $u = \pm i \sqrt{x^2 + Bx}$. §. ***. Il y a donc deux doubles Séries $y = Ax^2/Bx$ & $y = y^2/x = x^2/Ex$ &c. Voyez ci-dessus Ex. IV. Mais il faut remarquer, i^2 . Que si B & B' sont imaginaires ; les deux Séries (ont imaginaires, & l'Origine est un Point conjugué, qui ne diffère que dans le Calcul de celui qui a été indiqué au n°. ill de ce §. 2°. Que si B & B' sont des grandeurs réelles & de différens signes, le Point quadruple est formé par deux Rebroussements opposés au sommet ; ce qui fait, à l'œil, comme une Osculation, avec cette différence pourtant, qu'ici les Branches de même courbure sont de part & d'autre de la Tangente commune, au lieu que dans l'Osculation elles sont d'une même part. 3°. Si B & B' sont des grandeurs réelles, inégales & de même signe ; le Point quadruple est formé par quatre Branches qui forment un double Rebroussement, c'est-à-dire, un Rebroussement renfermé dans un autre Rebroussement de même sommet & de même Tangente. 4°. Enfin si $B = B'$, la Série $y = Ax^2/Bx$ &c. n'est pas encore régulière. Il faut chercher un nouveau terme, en substituant dans la transformée $d^2 = x^2/Bx + \dots$ à u . La valeur de $\dots$ peut être fort diversifiée, mais elle ne donnera qu'un double Rebroussement, ou un Bec ; ce qui sera facile à distinguer par le troisième terme de la Série, & souvent (sans calcul par la Remarque du §. 1) On ne peut, sans sortir du sixième Ordre, au-delà duquel nous ne voulons pas aller, supposer que la racine quadruple du 4^e. Rang divise le 6^e. parce qu'alors toute l'équation seroit divisible par cette racine. Ainsi venons aux Exemples. LUI 2 Ext m

The text on this page is estimated to be only 22.59% accurate

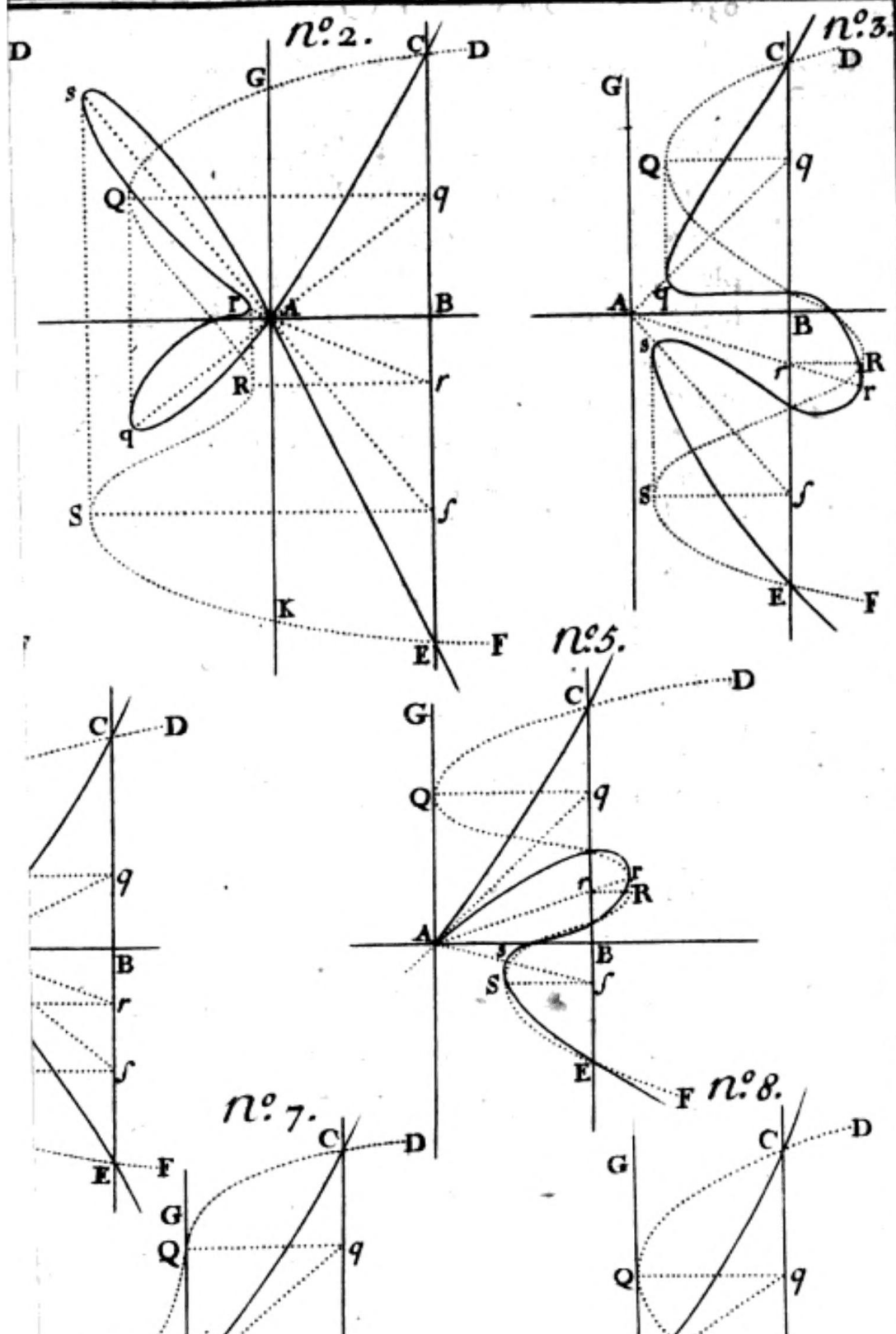
xxu. 118. I. ($\gg\langle$ VES rOJNTS QUADRUPLES. , Exemple I.
 Les Courbes désignées par l'éq : $x^4 = c \cdot 4x^4 + 5j'x^4$ et , fournissent
 des Exemples * de tous les Points quadruples dont les Courbes du
 cinquième Ordre (ont fufceptibles. En luppofant $y = xu^9$ on transforme
 cette équation en $x = a + 6 \cdot 44^{**+1} \gg 4 < TM^*$, qui reprélêntc une Courbe
 du quatrième Ordre , laquelle a deux Branches paraboliques , & coupe l'Axe
 des ordonnées en autant de points qu'a de racines réelles l'équat: (F)... a -f
 bu c u' 4-# 4«

The text on this page is estimated to be only 27.38% accurate

VES POINTS QUADRUPLES. $u y j y P l \hat{a} N C I \gg C c ' V J I ' R a i e s :$
car P se transforme en $J?$, quand on fait $u \sim \%$ xxix. Donc, comme les quatre racines de P définissent les quatre Points G, H, I, K où la Courbe productrice coupe l'Axe des ordonnées, de même les quatre racines de Q marquent que quatre Branches de la Courbe produite passent par l'Origine A , & y forment un Triple-Nœud [ci de flus, Cash]. 2. Si les eq: P & Q ont deux racines réelles inégales & deux imaginaires; la Courbe productrice ne coupe pas l'Axe des ordonnées qu'en deux Points G, K , & la Courbe produite ne passe que deux fois par A . Elle y forme un simple Nœud, sur lequel on doit concevoir un Point adhérent, puisque l'Origine est un Point quadruple [ci de flus, Cas II], g. Si les eq: F & n ont que des racines imaginaires; la Courbe productrice ne rencontre point l'Axe, $H t m^*$ & la Courbe produite ne passe point par l'Origine. L'Origine est pourtant un Point de la Courbe, puisque $x=0$ & $y=0$ satisfont à son équation. Elle est même un Point quadruple, puisque son plus bas Rang est le quatrième f §. 170]. C'est donc un Point quadruple conjugué [ci de flus Cas III.] 4. Si les eq: P & Q ont deux racines simples & une double; la Courbe productrice coupe deux fois, & touche une fois l'Axe, & la Courbe produite passe deux Branches $C A q$, $s A E$ par l'Origine, & elle y a, outre cela, un Point de Rebroussement $q A s$ [ci de flus Cas IV, 1]. 5*. Si les eq: P & Q ont une racine double & deux imaginaires; la Courbe productrice touche (ou coupe) l'Axe, & la Courbe produite n'a, à l'Origine, qu'un Rebroussement $C A r$, auquel est supposé adhérer un Point, qui le rend Point quadruple [ci de flus, Cas V.] LUI 2 6. Mai* Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 22.36% accurate

Digitized by Google



The text on this page is estimated to be only 19.57% accurate

Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 26.14% accurate

DES POINTS QJJA D RU P L ES. 639 O.xm. cher, ou 4*. ne le point rencontrer. Et fuivant la nature planchb S- des racines de Péq : rH- <&-f-«z = o , il en cft de même Xxxpar raport à l'Axe des abfcillTes. Ces quatre différentes pofitions , par raport à chaque Axe , combinées enicmble, font (eize Cas repréfentés dans les 16 »"• de la Figure , où l'on a joint les Courbes du fixième Ordre produites r's' x-9' par celles du fécond. 5>?.ns entrer dans un détail , long mais facile , on verra , par un Raifonnement femblable à celui de YEx. IV. du §. précéd. , que les Courbes des 1 & 5 ont , à l'Origine , une Olculation traversée par deux Branches de direction différente : que celles des 2 & 6 , y ont un Embraffement auTi traversé par deux Branches : celles des \$ & 7 , un Bec traversé de même , & celles des »SJ- 4 & 8 , un Point traversé pareillement par deux Branches. Que les Courbes des tp*- 9 , 1 o, ii, & 12, prélèntent un «RebrouiTement combiné avec une Ofculation , un Embrablèment , un Bec , & un Point : & qu enfin les Courbes des *•»• 1\$, 14, 15 & 16 , donnent POfculation, TEmbraiTement , le Bec, & le Point, combinés avec un Point, de forte que ce dernier eft un Point quadruple conjugué. C'elt préciïément ce que donne Péquation mife (ur le Triang. anal. Son plus bas Rang égalé à zéro donne Fe'q: • 000000* 0000*0 * * * o o 0000 &c. tx*y* 4« dxy* + cy* = o , qui a toujours une racine double y =0, qui divife le 5'. Rang ax+y une fois, & outre cela elle a les deux racines de l'éq : (F) ...cxl + dxy + cyy^LOY analogues à celles de Péq: (QJ...c+di>i— o. i.Si Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 26.05% accurate

6\$Q DES POINTS QUADRUPLES. Puncni i. Si ces deux racines (ont inégales & réelles [comme Ch.xiil (Jx*' dans les 3 premiers de la Figure], c'ert le Cv S* m y' ci -de (Tus. Deux Branches de direction différente traversfent une Ofculation , réelle , ou imaginaire , un Embraflément, ou un Bec. ^ C'eft une Ofculation réelle , quand les racines de Péq : " * x6 + ax*y r**y = o donnée par la déterminatricc inférieure , ou , ce qui eft la même choie , quand les racines de Péq : (R) . . . ** + ax*y &qr* = o , analogues à celles de Péq: . . uu + au+c — o font réelles & de différents lignes : ce qui a lieu quand la Courbe productrice coupe l'Axe des ordonnées de part & d autre de POrigine. n.t.&6. C'eft un Embraifement , quand les racines des éq: R & S (ont réelles , & de même figne , mais inégales : ce qui arrive quand la Courbe productrice coupe l'Axe des ordonnées en deux points d'un même côté de l'Origine. n.}. & 7 C'eft un Bec , quand les racines de R & S font égales , c'eft-à-dire quand la Courbe productrice touche l'Axe des ordonnées. w.4.c>8. C'elt une Ofculation imaginaire, quand les racines de R & S font imaginaires : ce qui a lieu quand la Courbe productrice ne rencontre point l'Axe des ordonnées. «. n, m, 2. Si les racines des éq : F & font imaginaires, la *\$ à- 16. Courbe productrice ne rencontre point l'Axe des abfciifes, & on eft dans le Ou V , ci-deffus. Un Point invifible adhère à une Ofculation réelle [»°. i \] , ou à un Embraffement [»°. 14], ou à un Bec [1 5] , ou à une Ofculation imaginaire [n°. 1 6] , luivant que les racines des ou Digitized by Goofflc

The text on this page is estimated to be only 21.93% accurate

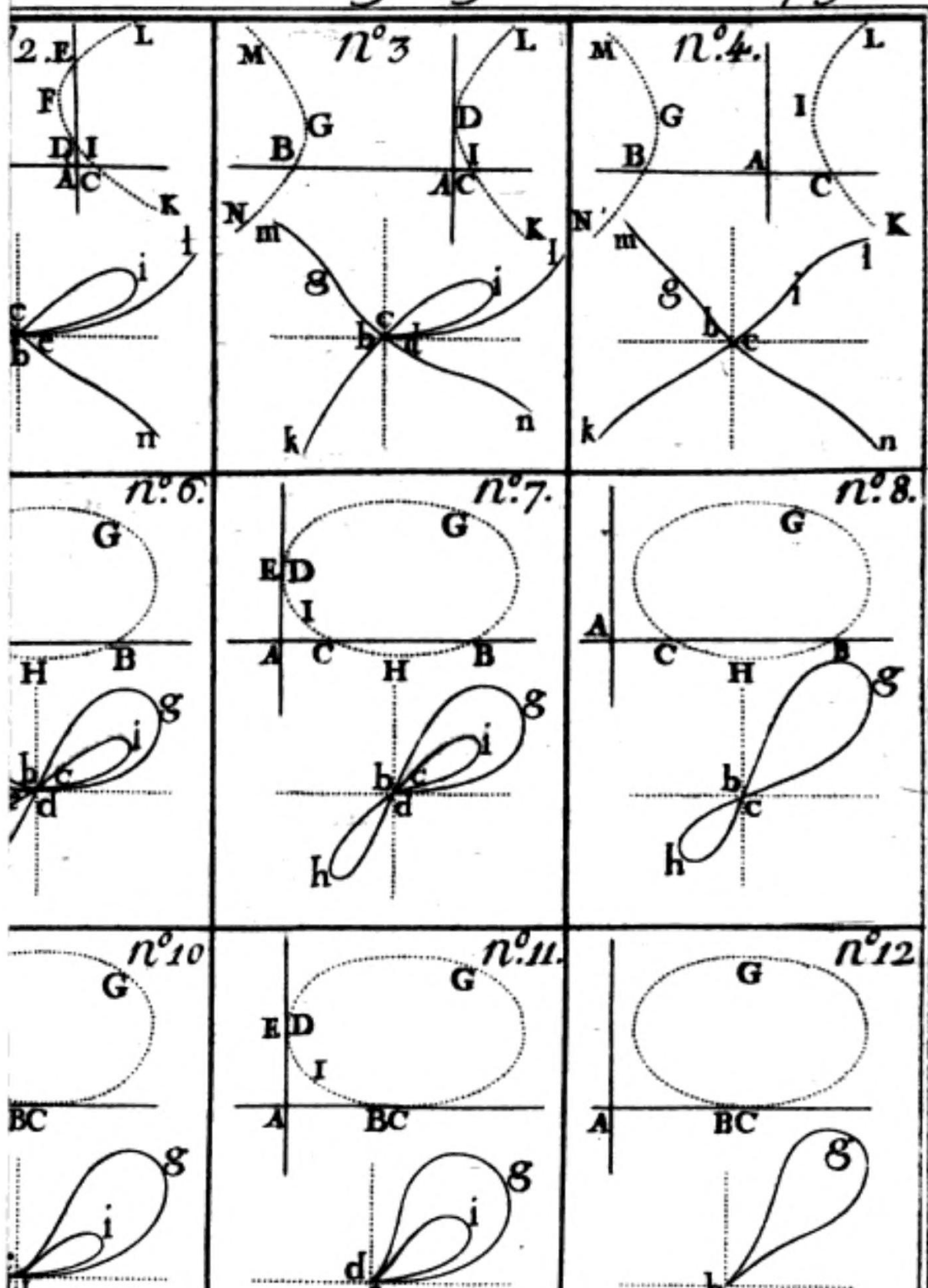
DES POINTS QUADRUPLES. 641 Ch.xiii. ou le coupe d'une même part [n°. 14], ou le touche [»'. pcanhb >. x»i. 1 ^ J 9 ou ne le rencontre point f »°. 16 J. 3 sx\$. Enfin, fi les racines de P ou de ^ font égales, la lt*' 11 9' Courbe productrice touche PAxe des abiciflès , & on a ,,.9.t0m une partie des Points mentionnés au Cas VI, ci-deflus. it.&n. L'équation du plus bas Rang a deux racines doubles y==o &)V*+*Vc =<*. La première divue le 5e. Rang ; la ièconde ne le divifè pas. Ainfi celle-ci défigne un Rcbrouflément [ci-deflTus Cas IV. 1 J. L'autre [Cas IV. 2] marque une Olèulation [»°. 9], ou un Embraillement [»°. 10], ou un Bec [n° 1 1 j , ou une Ofculation imaginaire [«°. 12], félon que les racines de R & S font ou de différents lignes , ou de même f?gne , égales , ou imaginaires ; c'eft-à-dire , félon que la Courbe productrice coupe de part & d'autre [»°. 9] , ou de même part [»°.io], ou touche [»\ 1 1] t ou ne rencontre pas [n\ 1 2] l'Axe des ordonnées. Exemple 11 L Joignons à ces Courbes celles que pMHCHi donnent les mêmes Courbes productrices , quand l'Origi- xxxi. ne eft prile fur un de leurs points. Cela fait trois Cas **0, principaux, i°. Ou la Courbe coupe lès deux Axes , [«"•i,2,\$], 20. ou elle touche l'Axe des ordonnées [«"•4, s] , s°. ou elle touche l'Axe des abfciflès 7]. Dans le premier Cas, il manque à l'éq: uu+au ► W-f-^z4<*zz = o de l'Exemple précéd. le terme c ; dans le fécond Cas, il manque les termes c Se au-, Si dans le troifième , les termes c & dz. Ainfi la Courbe produite fora repréfentée, dans le premier Cas, par l'éq : x* + ax+y + dxy% 4, { *ey* = o , & dans le troifième par x* > { * ax*y 4< ey+ = o. i . La première de ces trois équations appartient au Cas VU 2 9 ci-delTus. Le 4C. & plus bas Rang dxf +ef M*> égalé à zéro, a une racine fimple ^x4*^ = o, qui ne Introd, à PAnalyft des Lignes Courbes. M m m m diviiê • Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 22.32% accurate

6 & DES POINTS QUADRUPLES. Planche divisée pas le 5e. Rang ax^2y , & une racine triple $y=0$, qui divise une fois le 5e. Rang & ne divise pas le 6e. x^2 . Donc le Point de l'Origine est un Rebroussement touché par une Branche C c'est ce que désigne la racine triple 3 & traversé par une autre Branche [qu'indique la racine simple]. « $\llcorner$ » 4 $\hat{=}$ 2. La féconde équation appartient aussi au Ou VII y $\$$, cy-dessus. La racine simple $dx + ey = 0$, & la racine triple $y = 0$, du 4e. Rang (ont toutes diviser, tant de fois qu'on voudra, le 5e. Rang qui manque, & ni l'une ni l'autre ne divise le 6e. x^2 . Il y aura donc, à l'Origine, deux Branches infléchies, dont celle qui touche l'Axe des abscisses, désignée par la racine $y = 0$, a un Point triple formé par l'évanouissement d'une Feuille. En effet, les Courbes 7, $\$$ de la Fig. 219, dégénèrent en celles des 4 & 5 de cette Fig. 220. par l'évanouissement des Feuilles cid, qui disparaissent avec les grandeurs s & c . Kum.t.7. 3. Mais la troisième équation appartient au Ou VIII $\gg$ 2, ci-dessous. Le 4e. Rang cy^2 égalé à zéro, n'a qu'une racine quadruple $y = 0$, qui divise une fois le 5e. Rang sx^2y & non le sixième x^2 . Donc l'Origine est un Embrouillement [n°. 6] ou une Osculation [n°. 7]. 3. L'Exemple IF fera pris de l'éq: $+ ax^2y' + y^2y'' = 0$. On peut construire les Courbes qu'elle représente, en la réduisant à $2y^2z + f^2z = 0$, par la substitution de y à x , & de S à y , ' Cette équation- ci représente une Courbe du troisième Ordre, qui a [§. 142] deux Branches paraboliques, dont l'Asymptote a pour équation $uu + cz = 0$, & deux Branches hyperboliques li, 139 j, dont l'Asymptote droite est l'ordonnée de l'abscisse $y = 0$, & l'Asymptote courbe l'Hyperbole désignée par l'éq: $u (z + m)^2 - f^2 = 0$. Cette même Cour

The text on this page is estimated to be only 19.80% accurate

1 I Digitized by Google



The text on this page is estimated to be only 22.50% accurate

i l % I l i » i

The text on this page is estimated to be only 23.91% accurate

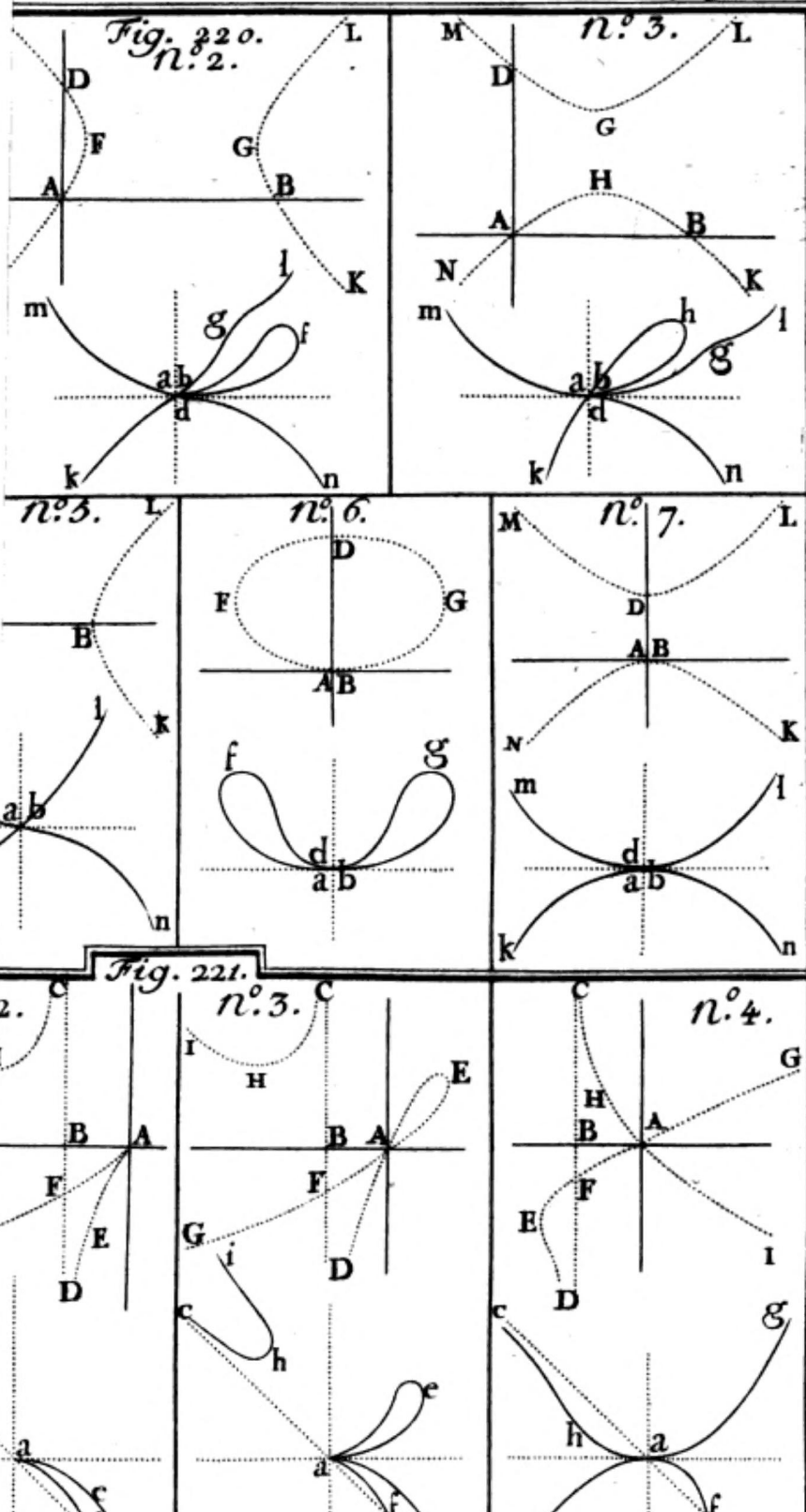
DES POINTS ~QV j4 DRUFLES. 643 Ch. xi 11. be a , à fon
Origine , un Point double , fui van t la nature pla*** §. »»» duquel là forme
varie confidérablement. Le plus bas Rang , XXXL qui eft le fécond , égalé à
zéro , donne a un— $2buz*fa rzz=0$, équation du fécond degré, qui a deux
racines imaginaires fi $bb < m$, deux racines égales fi $bb=\pm=dc$, & deux
racines inégales $C\ bb>sc >$ de même ou de différents fignes félon que m &
 c font de même ou de différents fignes. Dans le ir. Cas, l'Origine eft un
Point conjugué [§. ifem. 220. 13, & la Courbe eft compofée de deux parties
fé- Mttm' '* parées CHI, DEFG, aveau Point ilblé A. Dans le ad. Cas,
l'Origine eft un Rebrouflément [§. wm. *. 2 20.111. 1 J, & la partie DE va
jufqu'à l'Origine en A, d'où elle rebrouflè en F G. Dans le 5e. Cas, POrigine
eft un Nœud [§.220. II] , ^ que fcit la partie DAE A F G, en donnant une
Feuille AE. Et dans le 4e. Cas , l'Origine eft l'interfècïion des ««m. 4.
Branches CAI, DEAG, qui fe croilènt en A [§.220. II]. Maintenant , fi l'on
cherche quelles Courbes font produites par celles-là, en donnant à chaque
abfciflè *[-= une ordonnée $y [=^$], & dont par conféquent l'équation eft
 $\gg* + x'y - 2 b xy 4$. Mcy+æo , on verra par le même raifonnement qui a
été fait au §. préc. Ex. IV, 3ue l'Afymptote ordonnée CD des Courbes
productrices evient dans les Courbes produites une Afymptote oblique cd ,
qui coupe en deux également les Angles des coordonnées de différents
fignes : que les Branches hyperboliques ED, CH produifènt les Branches
hyperboliques ed , ch; & les Branches paraboliques FG, HI , les
paraboliques fg , hi. Et quant à l'Origine, on verra que celle Mmmm 2 du
Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 23.05% accurate

644 DES POINTS QUADRUPLES. Planche du »°. I est Ut Point
 Conjugué , Ceile du W°. 2 Uil Bec, CaXIIIi xxxi- ce||c du n°. 3 un double
 RebrouiTeinent , & celle du n°. 4 deux Rebrouflements oppoles. Or c'est
 précifcment ce qu'on tire de la Règle du Cas VIII y 3 , ci-deflus. Car c'est à
 ce Cas que fe raporte l'éq : $x^6 + xsy - 2bx^0y^* + acy^*s = 0$, puilque fon
 plus bas Rang acy^* égalé à zéro n'a qu'une racine $y=0$, mais quadruple, qui
 divife deux fois le 5e. Rang $- 2bxy$, fans divifer le 6e. $x^6 + x^*y$. La
 déterminatnce donne Péq : $a cy^* - 2 b xy \cdot \ll j . b+d(bb - jik) >+ \ll x = 0$,
 qui a deux racines $yy = \&yy = Jx^*$. ac 00000** 000*00 * o o o o 0000 &c.
 r»«m*i ^es racincs *ont imaginaires, fi $bb < ac$, & l'Origine ' est un Point
 conjugué ICasVIII J, i° ci-deflus], *um. x. Elles font égales, fi $bb=ac$ t &
 l'Origine [Cas VIII 3. 4°] est ou un Bec ou un double RebroufTemer. On
 voit que c'est un Bec , parce qu'entre la déterminatrice qui paiTe par les
 termes du premier ordre y^4, x^0yx, x' , & fa parallèle menée par le terme
 unique du fecond ordre $x'y$, il n'y a qu'un intervalle , & que ce terme xsy
 n'est divifible par aucune des deux racines / $r^{\wedge} = x y / j$ - de l'équation de la
 déterminatnce , [§.1133. $1 \cdot b^{\wedge} \sqrt{(bb - ac^*)} \dots ?$. Les racines $yy = - x'$ de
 la détermmaac trice font réelles , inégales & de même ligne , lorfque
 $bb > acy$ Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 22.00% accurate

Digitized by Google



Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 25.83% accurate

DES POINTS QUADRUPLES. CH. XIH. $bb > ac$, & que a & c ont le même signe. Alors POrigine- Piakchi ne est un double- Rcbroufflement C Cas VIII, ? , ?°. ci- XXXIdeflus] . * Xli: Enfin ces racines sont réelles, inégales, & de différents "«»>. 4 figures, quand a in c ont des signes différents. Alors l'Origine est un Point quadruple formé par deux Rcbroufflements opposés au sommet _ Cas VIII, ci -deflus]. Si dans la même équation, lorsque $ac = bb$, il y avoit Piancwb eu un nombre pair d'intervalles entre la déterminatrice & xxxiiL fa parallèle menée par les termes du fécond ordre, la Courbe au lieu d'avoir un Bec à POrigine, y auroit eu un double - Rcbroufflement [Cas VIII, g, 40. ci -deflus]. Si, par ex. au lieu du terme xsy , on avoit eu — $axy^* 000000^* 0^*0^*00^* 0000000000$ &c. [-f- axy^* donneroit une Courbe imaginaire], la Série aux xx a roit été $y = \pm \sqrt{fcx} - j d = -g > -y$ &c, où le double signe des deux premiers termes marque quatre Branches qui font un double - Rebroufflement à l'Origine. On le voit encore en réduisant l'éq : $x^6 - axy^* - ibv^?yx^4 - bby^* = 0$ à cette forme $y = \pm \sqrt{z} x y / g^{\wedge}, ax$, qui fait voir que la Courbe a quatre Branches, deux paraboliques A E, A F & deux hyperboliques AC, AD. Les premières, indiquées par les racines $y = \pm \sqrt{xy} / ^{\wedge}$, ont pour Afymptote la Parabole définie par l'éq : $y = z^{\wedge} = X) / -$ — ; y ax Mmmm 3 ou Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 25.92% accurate

646 DES POINTS QUADRUPLES. plawche ou ay* =x\$. Les dernières, indiquées par les racines y r= c*.m xxxiii. x j, tu. $\pm xy/\wedge - \wedge jgx9$ ont Pour $\wedge fymPtotc \wedge ro" c$ l'ordonnée CBD de rabfcifle AB = bb ■ ê RS' Exemple V. Les mêmes Courbes du troifième Oj-fc. dre qui ont lèrvi à conftruire celles du frxième dans YEx. près. en donneront d'autres , fi on porte l'Origine fur un autre point de l'Axe des abfciflès , comme à l'extrémité de l'abfciflè kO=d. Cette tranfpofnion s'exécute en fubftituant t + d à z dans Péq: $auu \wedge utn - ibuz + czz = o$ de cette Courbe. La transformée [en faifant, pour abrèger , a + d =/*] lèra fuu $4* uut - ibut - 2bdu + ctt + 2tdt - \wedge - cdd = zo$. Ce qu'il importe de confidérer ici, ce font les Points où ces Courbes rencontrent l'Axe des ordonnées. On les détermine par Péq : (P) . . . fuu — ibdu + cdd = o, à laquelle le réduit l'équation de la Courbe , quand on fait / = o. Cette équation , quand / & c ««1. j. om différents fignes, a deux racines réelles de différents fignes, & , dans ce Cas, les Courbes coupent l'Axe des ordonnées en deux Points M, N, fitués de part & d'autre de l'Origine. Mais quand, /" & c ayant le même ligne, fi < kk% "y. iV- * $\wedge uat*on ?$ a deux racines réelles, inégales, de même ligne, & les Courbes coupent l'Axe des ordonnées en deux Points M , N , placés d'un même côté de l'Origine. Elles Tù touchent leur Axe des ordonnées en un (èul Point E, lorfque Péq: P n'a qu'une racine double, ce qui a lieu quand $TM.4 * .fi = bb$. Et elles ne rencontrent point leur Axe des orlUl6, données quand $>f> bb$, parce qu'alors les racines de Péq : P font imaginaires. Chaque Courbe donnant ainfi quatre Cas différents , les quatre Courbes en donneront fetze, repréfentés dans les leize de la F/£. 22 j , avec les Courbes du fixième Ordre, Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 20.93% accurate

I DES POINTS QUADRUPLES* 647 Cu.xm. drcj qui fc
 conftruifent parcelles du troifième, en donnant S* à PabfcHfe x [= %]
 l'ordonnée = Leur xxxiT équation eft donc /x< — */6x'/ — ibdx*y + 4.
 zftdxy* 4< r/dWx1/ = o, qui naît de la fubftitution de Û- à/,&de^<[==^r]à *
 dans l'eq : fuu 4» uut — x 9 y t 2yut — 2bdu + ctt + 2cdt+cdd == o. Ces
 Courbes ont les mêmes Branches infinies & les mêmes Afymptotes que
 celles de TEx. ^r&M Mais on trouvera , comme dans l'Ex. IV du §. précéd.
 qu'à l'Origine les Courbes des »°. 1,2, 3,4, ont une Ofculation imaginaire;
 celles des »°. 5, 6, 7,8, une Ofculation réelle ; celles des »°. 9, 10 , 1 1 , 1 2 ,
 un Embraflement; & celles des »°. 1 g , 14, 15, 16, un Bec; combinés avec
 une Ofculation réelle dans les , 5 , 9 , 1 g, avec un Embraflement dans les"
 »°. 2 , tf, 10, 14, avec un Bec dans les »°. 3 , 7 , 1 1 , 1 5 , & avec une
 Ofculation imaginaire dans les »\ 4, 8, 12, \6» Et ce font là tous les Points
 quadruples indiqués dans ce §. Cas VI: Ci ce n'eft que les deux Becs ,
 combinés au «°. 15, n'en font qu'un feul , parce qu'ils tombent précifément
 l'un fur l'autre. Cela eft exactement conforme aux Règles. Si l'on met fur le
 Triang: anal: Péq: fx6 + fx'y — 2jbx%yy — zhdx*y + Jfty? + 2fcA%xy* +
 cddxxyy as o fon plus bas 00000** 000**0 * * * o o 0000 &c. Rang
 donnera l'éq : ffcy* — sfidxy* + cddxxyy = o , qui a deux racines doubles y
 =0 & /> +dx = o> qui indi-it deux Tangentes. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 25.20% accurate

648 DES POINTS QUADRUPLES. Pi anch La première est l'Axe même des abscisses, & le premier Cu.xm' xxxil terme de la Série relative aux Branches qu'il touche (è tire §• de l'éq : $fx^6 - abdx^*y + cddxxy = 0$, ou (QJ) . . $fx^* - 2bdxxy - cddyy = 0$, que donne la déterminatrice*, & dont les racines sont analogues à celles de Pe'q : (P) . . . fuu — ibdu + cdd = 0 mentionnée ci-dessus. Si les racines de ces eq : P & Q sont réelles & de différents signes, le Point touché par l'Axe des abscisses est une Osculation réelle [i , s , 9 , 13] : si elles sont réelles, inégales, & de différents signes c'est un Embrassement [2,6,10, 14] : si elles sont égales, c'est un Bec [«"• 3,7,11,15], parce qu'il n'y a qu'un intervalle entre la déterminatrice & (à première parallèle, & que la racine double [$bxx - cdy - 0$] de l'éq : $Q^$, qui dans ce Cas devient $bbx^* - 2kdxzy - cddyy = 0$, ne divise pas la l'bmme $fxsy - ?fbxiyl - 2fcdxyx$ des termes du fécond ordre [§. 2 1 1] : enfin, si les racines des éa : P & $Q^$ sont imaginaires, les Branches que l'Axe des abscisses devrait toucher sont imaginaires > & sont une Osculation imaginaire [»"-4, 8, 12 & 16]» L'autre racine/y $4 < dx = 0$, ou $y = -y$ ne donne que la position de la Tangente oblique. Pour connaître la nature du Point qu'elle touche, on cherchera le fécond terme de la Série, en substituant dans l'équation proposée : $fée - p - HH^* & y$. La transformée (/ — d) $x' 4 - fx f# 4^* 2bdx^*u - 2fbx^%uu fñu^* - 2/cdxu 1 - f - cddx^*u^* = 0$, étant mise sur le Triangle analytique la déter- 00000** 000**0 * * * o o o o 00 &c. minatrice Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 18.04% accurate

DES T OINT S QUADRUPLES. 649 Ch. xiii. minatrîcc donne
Péq: ($\frac{1}{2} \sqrt{4ac - b^2}$) ou $\left[\frac{1}{2} \sqrt{4ac - b^2} \right]$ $\frac{1}{2} \sqrt{4ac - b^2}$ = 0, ou $\left[\frac{1}{2} \sqrt{4ac - b^2} \right]$ $\frac{1}{2} \sqrt{4ac - b^2}$ = a
] $\frac{1}{2} \sqrt{4ac - b^2}$ + «Wr'ii fJ^T + = 0, qui a deux racines $u = \pm \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{4ac - b^2}}$ Si elles font imaginaires
, ce qui a lieu quand $bb < ac$; la Courbe est une de celles des $\gg 1, 2, j, 4$,
où les Branches que devroit toucher la Tangente oblique font imaginaires.
Si elles font réelles & de différentes signes, ce qui a lieu quand $\frac{1}{2} \sqrt{4ac - b^2}$ ont
différents signes; le Point touché par la Tangente oblique est une Ofculation,
comme aux $\gg 0, 5, 6 > 7 \gg 8 - 1 \cdot 1$ Si elles font réelles, inégales, & de même
figne, ce qui a lieu quand $bb > ac$, « & * ayant le même figne ; le Point que
touche la Tangente oblique est un Embrassement, $\gg 9, 10, II, 12$. Si elles
font égales, ce qui a lieu quand $bb = ac$ la Tangente oblique touche un Bec,
 $\gg 1 j, 14, 15, 16$: car il n'y a qu'un intervalle entre la déterminatrice & (à
proportion mière parallèle, & la racine double $u = p = 0$ des termes du
premier ordre ne divise pas la somme $\frac{1}{2} \sqrt{4ac - b^2} = \frac{2}{bx} - \frac{2}{cdxM1}$ des
termes du second ordre. Mais on remarquera que dans le $\gg 15$, la
Tangente oblique cesse de l'être. Car, dans ce Cas, $fi = bb$ & $bb > ac$.
Donc $fi = ac$, $\neq a$, & $d \left[\frac{1}{2} \sqrt{4ac - b^2} - a \right] = 0$. L'éq: $\frac{1}{2} \sqrt{4ac - b^2} = 0$, qui détermine la
position de la Tangente oblique, se réduit donc à $fy = 0$, ou $j' = 0$, qui
montre que cette Tangente se confond avec l'Axe des abscisses. Exemple
V^L AinG pour avoir des Exemples de tous les Points quadruples qui le
rapportent au VI Cas ci-dessus. à l'Analyse des Lignes Courbes. N un n dessus.

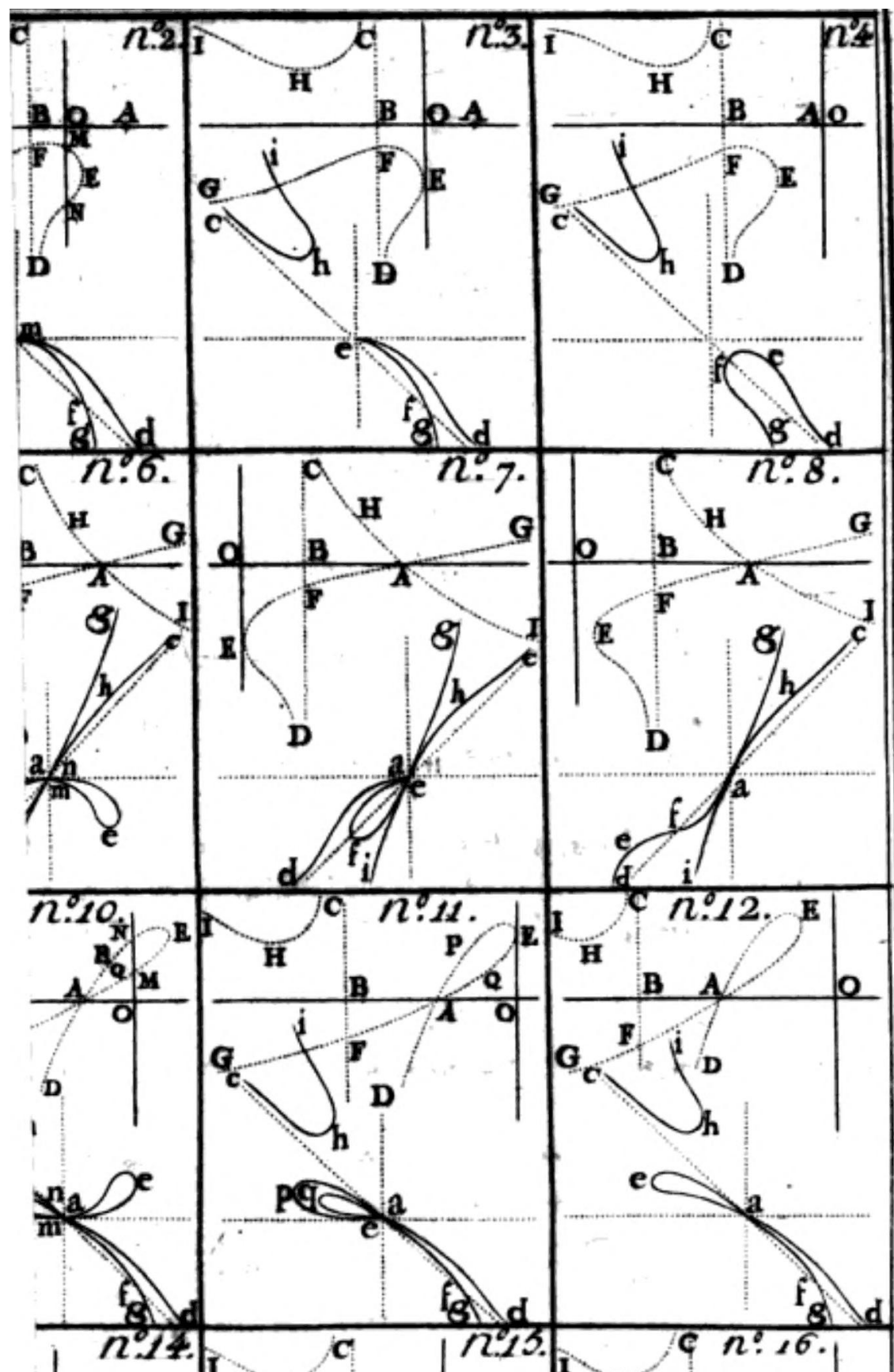
Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 24.39% accurate

6so DES POINTS QUADRUPLES. . Planche deflus , il n'en faut plus qu'un, (av. du Point où <è combinent c» xirt xxxiii. deux Becs fous des directions différentes. L'éq: $*ax* - \frac{1}{2}m. 2aax*y + \{ * a abbxxy 2abbxy* \}$ ► fc bby6 === o nous le fournira. Quand on la met fur le Tr : anal : J'équation de fon plus bas Rang, $sabbxyy^o$, montre par fes deux racines doubles $x = o$, $y = o$, que ta $* o o o o o * 0*00*0 00*00 0000 000 o o o$ Courbe touche à l'Origine tes deux Axes. La déterminatrice relative aux Branches touchées par l'Axe des abP cifles , donne Péq : $aabbxyy - 24*bx*y + aax* = o$, qui a une feule racine, mais double, by — $xx = o$. Le Point eft donc un Embranchement, ou un Bec [§.220], & on conclura que c'eft un Bec , parce qu'il y a trois intervalles entre la déterminatrice & fa parallèle menée par le terme — $2MxyA$ du fécond ordre, lequel n'eft pas divifible par la racine by — $xx = o$ [§. 1 1 3 & 2 2 o .]. Un raifonnement pareil fera conclurre que l'Axe des ordonnées touche aufi un Bec. Ainfi l'Origine eft un Point quadruple formé par le concours de deux Becs fous deux dirions différentes. On le vérifie par la conftru&ion qu'on peut faire de cette Courbe , en mettant dans fon équation S pour x. Cette fubftitution la transforme en $z'yy - 2aaz+y + Sbbzz - 2*4bb7y + Sbbyy = o$, qui exprime une Courbe du huitième Ordre, mais facile à conftruire , puifque dans fon équation y ne monte qu'au fécond degré. Les raciDigitized by Google

The text on this page is estimated to be only 14.67% accurate

Digitized by Google



The text on this page is estimated to be only 14.50% accurate

: j L Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 27.86% accurate

DES FOINTS QUADRUPLES. 6\$ §. racines $\wedge = \wedge$ g« f « mieux encore xxxm. en z, font voir que cette Courbe Rçn'a que deux Branches hyperboliques AGE, AFD, qui partant de l'Origine A, où elles forment un Rebrouflment, s'étendent le long de l'Axe des abfciflès AB, qui est leur Afymptote droite, ayant pour Afymptote courbe une ' (tflb Branche de l'Hyperbole $y = \frac{1}{x}$ [§. 1 j8]. Au moyen de cette Courbe on conftruit la propofee, en prenant l'ordonnée AC = $\frac{1}{a}$ y & menant l'abfcifle indéfinie CQj_ Car fiparun Point quelconque M de la Courbe AMEDNA, on mené une ordonnée MP prolongée jufqu'en Q^où elle rencontre Pabfcioe CQ^, & qu'on tire par les Points A la droite QAM prolongée jufqu'en m où elle rencontre rabfciflè prolongée M/t«m du Point M, on aura un Point m de la Courbe cherchée.. Les triangles (êmblables QPA, Ajum donnant A/u ou PM [$>$] *.f*m [*] = QP ou AC [a] : AP [z], on aura $z = \frac{1}{a}$, & cette valeur, fubftituée dans l'e'q : $z^6yy - laabtfy^* \leq aïbbzz - 2a4bbzy^4 \leq aïbbyy = 0$ de AGEDFA, la transforme en $aax - 2aabx^*y + aabbxxyy - 2abbxy^* + bbys = 0$, équation de A g A f A. Cette conftruction fait voir aflèi clairement que la Courbe AgAfA a deux Becs à fon Origine. Car fi on fupposè les Points H & I infiniment proches de A, c'est-à-dire HK infiniment proche de AC ; AL est infiniment plus petite que KL: donc auffi ht cil infiniment plus pente que An, & il infiniment plus petite que A/. Ainfi les deux Branches Ah, Ai touchent l'Axe des ordonnées & forment un Bec hAi.

Nnnn % Et Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 21.80% accurate

rfp DES JOINTS QUADRUPLES. Pr*Kc,«i Et fi on fuppoſe les
 Points M, N infiniment éloignés de A , ChXih xxxiii. c'eft.à-dire
 MQInfiniment éloignée de AC, PQjcra infi- §• niment plus petite que AP:
 donc Â(* (èra infiniment plus petite que m«, & Av infiniment plus petite
 que nr. Ainſi les Branches Am, An touchent PAxe des abſciſſes, & forment
 un fécond Bec m An. 223. C'eſt par les mêmes Principes qu'on pourroit
 détailler les diverslès eſpèces de Points quintuples. En ſc renfermant dans
 les* Courbes du fixième Ordre , qui ſont les plus ſimples qui peuvent avoir
 un Point quintuple, on en trouvera onze eſpèces, dont les Courbes
 définies par Péq: $x^6 = x^4 - bx^2y - f - ex' / + dx^2y^2 + exy^2 - ff$ ſe fournifſent
 des Exemples. Ces Courbes ſe peuvent construire comme celles du §. préc.
 Ex. /. En ſubſtituant xu à y , leur éq : (è ſe transforme en $x^6 - ax^4 + bx^2 - cux^2 + dux^4 - ex^6$
 du* 4/«* >* ſe y qui exprime une Courbe du cinquième Ordre, à deux
 Branches paraboliques, dont l'Aſymptote eſt définie par Péq; x^5 , & dont
 par conféquent Pune va du côté des abſciſſes poſitives, & l'autre du côté des
 négatives. Cette Courbe rencontre (on Axe des ordonnées en autant de
 points que Péq : (P). . . a $x^4 + cux + dnx^2 + fui = y$ ou Téquatlon
 analogue (Ô) . . $ax^5 + bx^2y^2 + cx^2y + dxy^2 - fexy^4 + fy^6 = 0$, a de
 racines réelles. Appliquant donc ici les conſidérations faites au §. préc. Ex.
 L iur un mm. t. Exemple tout (èmbable, on diſtinguera onze Cas. 1. Celui
 où les éq : P & Q^ont cinq racines réelles. Alors la Courbe productrice C
 QR S T D coupe PAxe des ordonnées en cinq points G, H, I, K, L; & la
 Courbe produite CAqArAfAtAd paſſe cinq fois par POrigine,. ſous cinq
 directions différentes , faiſant un Quadruple mm. 1. Narud, & quatre
 Feuilles Aq, Ar, Af> A t. 2. Celui où les éq : P & iLont trois racines réelles
 & deux imaginaires. Ici la Courbe productrice ne coupe PAxe

The text on this page is estimated to be only 21.30% accurate

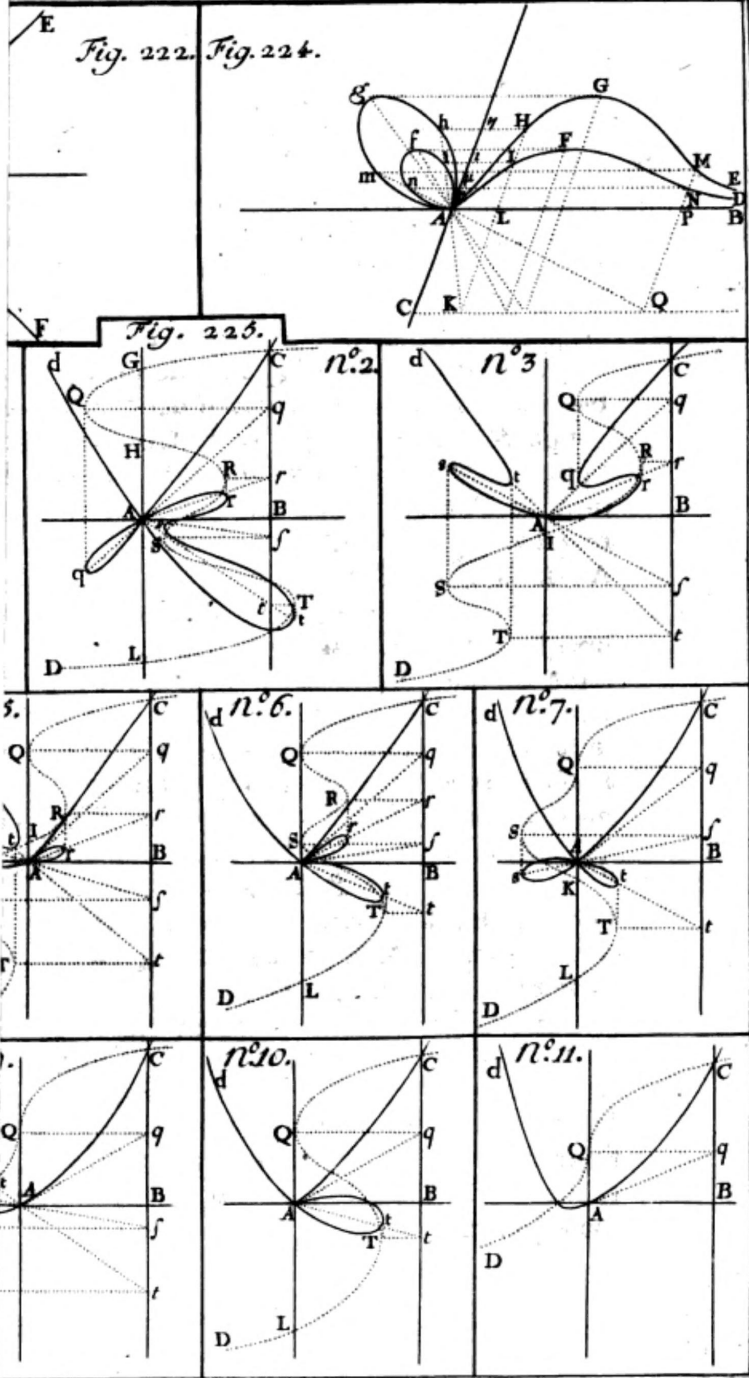
DES POINTS QUINTUPLES. 6SJ • • * "i ■ * Cn.xm. PAxe des ordonnées qu'en trois points G; H, L; & la r«»NrMK * »»• Courbe produite ne parTe que trois fois par POrigine , fous f X*JIL trois directions différentes, faifent un Double - Nœud & deux Feuilles Aq, ArftA. Cependant le Point A cft quadruple, parce que fur le Double-Ner/td , on doit concevoir un Foin: double invifible> indiqué par les racines imaginaires de IVq : SL. \$. Dans le Cas où les éq: F & Q^ont une feule racî- nam. j. ne réelle & quatre imaginaires , la Courbe productrice ne coupe qu'en un (èul Point 1 l'Axe des ordonnées, & la Courbe produite ne pa (te qu'une fois par POrigine A. Mais on doit concevoir fur cette Branche un Point quadruple invi/fble, indiqué par les quatre racines imaginaires de Péq: Q, . 4. Si les éq : P & Q, ont une racine double & trois ■«*• 4. fimpres réelles ; la Courbe productrice touche Ton Axe une fois en R, & le coupe trois fois en G, R, L,&!a Courbe produite fait h POrigine un Triple-Ncrrtd avec un Kebrouffement. 5. Si les éq: P & Q. ont une racine double & une fimple, 1. réelles. & deux imaginaires; la Courbe productrice touche ion Axe en le coupe en T. La Courbe produite a à POrigine un Rebrouffement traverse dyune Branche de direction différente , avec un Point double inviftble , indiqué par les deux racines imaginaires de Péq : 6. Si les éq : P & jsjjont deux racines doubles & une mm. 5. fimple ; la Courbe productrice touche fbn Axe deux fois en S , & le coupe une fois en L. Et la Courbe produite a à POrigine deux Rebrouffement s de directions différentes traversès pat une Branche fous une troiftème direction. 1 7. Si les éq: P & Q^ont une racine triple & deux dm- num.7. pics ; la Courbe productrice coupe fon Axe des ordonnées en K & L, & le coupe & touche cnQ^Point d'InNnnn 3 flexion.

Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 28.62% accurate

Ctf DES POINTS QUINTUPLES. planche flexion. La Courbe produite fait à l'Origine un Double- Ch.xiil Xxxiu. tfxuJ^ dont une Branche CAf a, au point A, une tri- 5- *»> *»' />/tf//«m.io. 10. Si les éq: P & Q_ont une racine quadruple & une fimple; la Courbe productrice coupe PAxe des ordonnées en L, & le touche en par un Point de Serpement. La Courbe produite a, à l'Origine, une Branche qui traverse un Point de Rebrouffement cenfé renfermer trois Feuilles évanoui James. Carpuifque le Point deSerpement G eit cenfé renfermer les trois finuofites , GQH, H RI, 1SK de la Courbe »°. i , qui y font devenues infiniment petites, le Rebrouffement CAf eft aulli cenfé renfermer les trois Feuilles Aq, Ar, Af devenues infini—
- • ■* ment petites. H. Digitized by G<

Digitized by Google



The text on this page is estimated to be only 28.25% accurate

4 Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 22.93% accurate

DES POINTS QUINTUPLES. 6\$; CH.xm. n. Enfin, si les éq: F & X ont une seule racine $p^{\wedge}nch$. 5"J* quintuple; la Courbe productrice coupe & touche l'Axe xxxijl des ordonnées au Point Q^de double Inflexion. Et la i%5' Courbe produite ne passe qu'une fois par l'Origine A: mun* lu mais ce Point est un Point quintuple d'une multiplicité invisible, qui renferme virtuellement quatre Feuilles évanouissantes. Car comme le Point de double Inflexion O est censé renfermer les quatre sinuosités GQJi, H RI, 1SK, KTL de la Courbe n9. i, qui font devenues infiniment petites, de même le Point A de la Courbe produite renferme les quatre Feuilles Aq, Ar, Af, At, devenues infiniment petites. C'est donc réellement un Point quintuple, dont la multiplicité échappe aux Sens, mais se laisse apercevoir par l'Analyse. r.

» î.. I • • • . I t 1 Digitized by Google



The text on this page is estimated to be only 22.82% accurate

APPENDICE. N^o. I. & II. Z> l'évanouissement des inconnues.
QUand un Problème renferme plusieurs inconnues , dont les relations font tellement compliquées qu'on le trouve obligé de donner plusieurs équations; alors, pour découvrir les valeurs de ces inconnues , on les fait toutes évanouir , moins une , qui combinée seule avec les grandeurs connues donne, si le Problème est déterminé, une Equation finale , dont la résolution fait connaître d'abord cette inconnue , & ensuite par son moyen toutes les autres. L'Algèbre fournit pour cela des Règles , dont le succès est infaillible , pourvu qu'on ait la patience de les suivre. Mais le Calcul en devient extrêmement long , lorsque le nombre des équations & des inconnues est fort grand , & surtout lorsque ces inconnues montent dans les équations élevées à des degrés fort élevés. Dans ce fâcheux Cas on tombe , par les Méthodes ordinaires , dans un autre inconvénient ; c'est d'être conduit à des équations plus composées qu'il ne faut, & qui renferment des racines superflues, qu'il n'est pas toujours aisé de démêler de celles qui donnent la vraie Solution du Problème. On (a proposé dans les deux NM. suivants de remédier à ces inconvénients. N^o. I. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 15.39% accurate

APPENDICE. 6\$7 No. L Voyez p*g. 59 & 60. Soient plufieurs inconnues $z, y, x > v^3$ &c. & autant d'équations $A_1 = Z_1 z^{\wedge} T_1 y + X_1 x + y_1 v + \&c.$ $A^* = Z_1 z + r_1 y + X_1 x > \{ * V, v > i^* \}$ &c. $A^* = Z^* z + r^* y + X + x + V^* v + \&c \&c$ • ou les lettres $A \setminus A_x, A^* y A^*, \&c.$ ne marquent pas, comme à l'ordinaire, les puissances d'A, mais le premier membre, supposé connu, de la première, féconde, troisième, quatrième &c. équation. De même $Z \setminus Z_1, \&c.$ font les coefficients de $z; T_1, Y_x, \&c.$ ceux de $^{\wedge}; X', X^* y \&c$ ceux de $x; V \setminus V^* \% \% \&c$ ceux de $v; \&c.$ dans la première, féconde, &c. équation. Cette Notation supposée, s'il n'y a qu'une équation & A_1 qu'une inconnue z ; on aura z as $^{\wedge} T' Y$ a deux équations & deux inconnues z & y ; on trouvera $z = s A_1 T_1 -$ Air - $Z^{\wedge} - Z_1^{\wedge} \text{ çv} | \dots \text{ £ } 1 T_1 Z_1 T_1 9 === Z_1 T^* Z^* T_1 " 1 ' 3$ trois équations & trois inconnues $z, \& x$; on trouvera " $z'PA$ " $Z'PA^* ZT^{\wedge} ? + Z_1 Y > X + ZT^{\wedge} Z^{\wedge} A " Z^{\wedge} * \gg Z^{\wedge} AT^* Z_i At X > + Z' A_1 X_t + Z' A_1 X - \dots Z > A^* X_t JV = 1 Z_i y - AT_i ZT' AT_1 Z_i Y' X > Z_i Y_i X_1 -^{\wedge} - Z' Y' X_1 Z^{\wedge} Y' X_1 Z_1 Y_1 A_i - \bullet ZFA_1 Z_i Y_1 A_i \blacksquare + - ZY > A_1 - \setminus - ZY_1 A_1 ZY_1 A^* ZY X > ZY^* X - Z YXX > + TY^* X -^{\wedge} Z' Y' X - ZW$ lurod. à Pantlyfe des Lignes Courbes* O o o o L'é

The text on this page is estimated to be only 23.03% accurate

658 APPENDICE. L'examen de ces Formules fournit cette Règle générale. Le nombre des équations & des inconnues étant », on trouvera la valeur de chaque inconnue en formant n fractions dont le dénominateur commun a autant de termes qu'il y a de divers arrangements de «-chofes différentes. Chaque terme eft compofé des lettres ZYXV &c. toujours écrites dans le même ordre, mais auxquelles on diftribue, comme expofants, les » premiers chiffres rangés en toutes l;s manières pofTibles. Ainfi, lorfqu'on a trois inconnues, le dénominateur a [$1 \times 2 \times 3 =$] 6 termes, compofés des trois lettres ZTX> qui reçoivent fuccellivemenr les expo(ànts 123, r\$2, 215, 231, \$12, 521. On donne à ces termes les fignes -f-ou —, félon la Règle fuivante. Quand un expofant eft lùivi dans le même terme, médiatement ou immédiatement, d'un expofant plus petit que lui, fapelleraï cela un dérangement. Qu'on compte, pour chaque terme, le nombre des dérangements : s'il eft pair ou nul, le terme aura le figne + ; s'il eft impair, le terme aura le figne —. Par ex. dans le terme $ZxYiVi$ il n'y a aucun dérangement : ce terme aura donc le figne +. Le terme $ZiTlX1$ a auffi le figne 4*, parce qu'il a deux dérangements, \$ avant 1 & 3 avant 2. Mais le terme $2' PX1$, quia trois dérangements, \$ avant 2, 3 avant i, & 2 avant 1, aura le figne —. Le dénominateur commun étant ainfi formé, on aura la valeur de z en donnant à ce dénominateur le numérateur qui fe forme en changeant, dans tous fes termes, Z en A. Et la valeur d> eft la fraftion qui a le même dénominateur & pou* numérateur la quantité qui réfulte quand on change Y en A> dans tous les termes du dénominateur. Et on trouve d'une manière femblable la valeur des autres inconnues. Généralement parlant, le Problème eft dâerminé. Mais il Digitized by Goo

The text on this page is estimated to be only 24.62% accurate

APPENDICE. 6^{tf} il peut y avoir des Cas particuliers , où il reste indéterminé; & d'autres où il devient impossible. C'est lorsque le dénominateur commun se trouve égal à zéro ; c'est-à-dire , s'il n'y a que deux équations, lorsque $Z^i Y^1 - Z^t Y^t = 0$ s'il y en a trois, lorsque $Z^1 Y^1 X^1 - Z^1 r^1 * 1 - Z^i Y^t X^* - Z^* Y^> X^1 + Z^* Y^1 X^0 - z^* Y^l x^i = 0$, &c. Alors, si les grandeurs A^1 , A^x , A^* , &c. sont telles que les numérateurs soient aussi égaux à zéro , le Problème est indéterminé; car les fractions 5, qui devraient donner la valeur des inconnues, sont indéterminées. Mais si les grandeurs A^1 , A^x &c. sont telles que, le dénominateur commun étant zéro , les numérateurs ou quelques-uns d'entr'eux ne soient pas zéro , le Problème est impossible , ou du moins les grandeurs inconnues qui peuvent le résoudre sont toutes, ou en partie, infinies. Par ex. si l'on a ces deux équations $a = 2y + 5 = 6z - 4^x$, on trouvera $z = \frac{a-5}{6} + \frac{4^x}{6}$ & $y = \frac{a-5}{2}$. Donc z & y sont des grandeurs infinies, qui sont Tune à l'autre en raison de 2 à 1. On dégagant les inconnues par les Méthodes ordinaires , on tomberoit dans cette équation absurde $\pm = \frac{a-5}{6}$. Car la première équation donne $z = \frac{a-5}{6} + \frac{4^x}{6}$ & la seconde $z = \frac{a-5}{6} + \frac{4^x}{6}$ Donc $\frac{a-5}{6} = \frac{a-5}{6} + \frac{4^x}{6}$ ou $\frac{4^x}{6} = 0$: ce qui est absurde , si z & y sont des grandeurs finies. Mais si elles sont infinies , on peut dire sans absurdité que $z = \frac{a-5}{6} + \frac{4^x}{6}$ en même tems que $z = \frac{a-5}{6} + \frac{4^x}{6}$ parce que les grandeurs finies $\frac{a-5}{6}$ & $\frac{4^x}{6}$ n'étant rien en comparaison des grandeurs infinies z & y , les deux équations $s = \pm y + \frac{a-5}{6}$ & $z = \frac{a-5}{6} + \frac{4^x}{6}$ se réduisent toutes deux à $z = f(y)$ qui n'a rien de contradictoire. c Oooo 2 NMI. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 19.65% accurate

«fio JPFENDICE. N.,. IL Voyez pag. j6. §. t. Soient x & jr deux grandeurs variables, dont fe f apport, tant entr'elles qu'avec des grandeurs confiantes > foit exprimé par les deux équations A & B , la prémiere de l'ordre n & la féconde de Tordre »a A. ..., >c — [i] « -f [i 1 } x»-* — [i *]*•»-; + tfi [i ■] =o B. ... (o) x° + (i) x 1 * (2) x2 * (3) * 1 + ... 4r ("0 *m = o Les 1 , 1 * , 1 &c. dans des parenthésés quarrées, marquent, non les puiffances de l'unité , mais les coefficients de x , ou les fondions rationnelles de ^ qui multiplient les puiffances de dedans Péq : A. Et les chiffres o , 1 , 2 , \$, &c. dans les rarenthésés rondes , indiquent auffi les fonctions rationnelles à\ qui multiplient les pu i (Tances de x dans l'équation B. L'ufàge de cette Notation paroitra dans la fuite , & les parenthésés ne laiflènt aucune équivoque. On propofe de faire évanouir x, au moyen de ces deux équations, & de trouver celle qui exprime le raport des fondions JV], &c. (o),(i),(s), &c. c'eft-à-dire de trouver l'équation en y & confiantes , qui refte quand on a fait évanouir J*. Nous nommerons cette équation C. §. 2. Que a9 hyc> , fre, repréfentent les racines dePéq1: A, ou les fondions, rationnelles ou irrationnelles , dejr qui font les valeurs de x dans cette équation x" — [ij x*1 [i"] = o. Gomme elle eft du degré », le nombre de fès racines eft ». Et les fubftituant fucceffivement dans l'éq; on aura » équations *, 0, >,)#• -KO^-K*)** + (/»>'» =0 0 ■.OOof + O)*1 +(2)** + (m)t"=o > (o)«' + (iV +(2)

The text on this page is estimated to be only 25.55% accurate

APPENDICE. $\{3, y, , *'4, *, 4, *1 + C > 0^{\wedge}, +^{\wedge}$ ou plus brièvement,
 $(oo > ^{\circ}P\text{-}Koi)^{\wedge}o + (02)^{\wedge} 4^{\wedge *} (P5) + (32) + ^{\wedge}..$, Si on multiplie ce produit des
deux éq : $*$, 0, parla troi». fième y , ce qui fe fait en joignant chaque terme
de y à chaque terme combiné de $a/3$, ou en aflbrtiflânt , en toutes les
manières poflibles, un terme de a , un de $fi9$ & un de. y y on aura Oooo i
Cpco)

The text on this page is estimated to be only 23.43% accurate

66z APPENDICE. r *°b°c' r M°b9cl ' f (-H'Jv C-h»1^0 C-H'*0**
 +(m) *W +&c. Et ainfi de fuite, quel que (bit le nombre n des équations « ,
 fi y y • S , &c. qu'on multiplie les unes par les autres. §. 4. Dans chaque
 terme de ce produit, ou équation finale C, on diftingue deux FaBeurs, L'un,
 que nous appellerons Faffeur -premier , eft le produit de que/ques coëf.
 ficients de l'éq: B, & il eft exprimé par des chiffres , comme (000), (001),
 (012) &c. L'autre, que nous nommerons Faïlleur-fccond , eft une fonction
 des racines a9 c , &c de l'éq: A. > §. 5. Les FaBeurs - premiers fè trouvent
 aifément. Il ne s'agit que de combiner » à n les termes du polynôme

(2?) &c* (Il) &c« &c. qu'on peut faire en combinant ces termes
 deux à deux; à la quatrième, (o*î) multipliée par tous les produits de ces
 termes pris trois à trois, (m), (ii2),(i!?)&c. (i22),(i23) &c. 0?0&c- (222)»
 (22g) 8?c. (433) &c. (3\$?) &c. &c; à la cinquième, (o»-») multipliée par
 tous les produits des mêmes termes pris quatre à quatre ; & ainfi de fuite :
 On aura les FaHeurs-prêmsers rangés comme on les voit dans la Table
 fuivante pour le Cas particulier de m — 3 & « — 4. (000) Digitized by
 Google

The text on this page is estimated to be only 21.28% accurate

APPENDICE. 665 (0000) 4- (0001) + (oo m) + (01 1 0 4- (1 1 1 1) 4- (0002) 4- (001 2) -fc (ou 2) 4- 0 1 1 2) 4- (0003) 4- (001 3) 4- (01 1 3) 4- (1 1 13) 4- (0022) 4- (0122) 4- (1 1 22; 4- (0023) 4- (01 23) 4- (1 123) 4- (0033) 4- (0133) 4- (1133) 4- (022a) 4- O222) +(0223)4,0223) + (0233)4-0233) + (0333) + 0333) + (2222) + ("23) + (2233) + C2333) + (3333) Où Ton voit que le chiffre (o), élevé d'abord à la puissance », puis à la puissance $n - 1$, &c. sert en quelque manière à compléter les dimensions qui manquent aux quoiq le toujours les sous-entendre dans ces Tisseurs-prémim. Car (o) est une grandeur bien réelle. §. 6. On peut considérer , dans cette disposition des Tisseurs-prémiers , les lignes suivant lesquelles ils sont rangés. Dans chacune le Faïeur suivant la forme du précédent par le changement de (o) en (i); de sorte que le premier Faïeur de chaque ligne étant donné, on a tous les autres. On peut aussi distinguer ces lignes en ordres. Le premier ne contient que la première ligne > qui commence par le terme (c"). Le second a $m - i$ lignes , dont les premiers termes sont (o«-«2), (o»-'\$) &c. jusqu'à (o«'/w); c'est-à-dire, les produits de (o»1) par tous les termes du polynôme excep

The text on this page is estimated to be only 26.10% accurate

664 APPENDICE. excepté les deux premiers (o) & (i). Le troisiéme ordre est composé de $OO^{^g}$ I. 2 lignes, qui commencent par les termes (o^{***}) , $(\odot^{***} j)$ &c. lesquels naissent en multipliant (o^{*-}) par tous les produits qu'on peut faire en combinant deux à deux tous les termes du polynôme, hors les deux premiers. Le quatrième ordre a $^$, $/$ — 1 I. 2. g lignes, qui commencent par les YaBeurs (o^{22}) , (o^{J22}) &c. formés de la multiplication de (o^{3-}) par tous les produits qu'on trouve en combinant trois à trois tous les termes du polynôme à l'exception des deux premiers. Les ordres suivants se forment d'une manière semblable ; de sorte qu'en ne comptant point les deux premiers termes (o), & (i), du polynôme $(o)+(t)$ &c. on peut dire que les termes du premier ordre n'ont aucun chiffre, que ceux du second n'en ont qu'un, que ceux du troisième en ont deux &c. comme on le voit assez évidemment en jettant les yeux sur la Table du §. précédent. §. 7. Quant aux FaBeurs-seconds de l'équation C, leurs FaBcurs-premiers les représentent. Chaque chiffre du Y aïeur. premier annonce, dans le FaBcur-second I qui lui est joint, une puissance des lettres a, b, c, d, &c. dont ce chiffre est l'exposant, & ces puissances font autant de termes qu'il y a de manières de les arranger. Car le produit $a^3b^7c^d$ (§. 5) est tant la somme de tous les produits qu'on peut faire en prenant un terme dans chaque équation a, 0, 7 &c. chacun de ces termes aura toutes les lettres abc et &c. élevées aux mêmes ou à différentes puissances. Et comme, par la notation des coefficients dans les équations : Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 22.78% accurate

AT t E N D 1 C E. 66 f «» Z3! y» «*\ (§. 2), chaque puissance des lettres b, t, d, &c. porte avec foi, comme coefficient, le même chiffre qui est son exposant, le FaBeur-premier, produit des coefficients, fera composé de tous les chiffres qui dans le FaBeur-second sont exposants des lettres ay bicidia'c. Ain il le terme alb^*c d'&c. venant de la multiplication de $(i)^*$ par $(o)^{\circ}$ par $(o)^{\circ}$ par (o) d'&c. aura pour FaBeur-premier $(0^{***}1)$. Et, par la même raison, $(o^{*-}(i))$ entraînera le FaBeur-premier de $a^{\circ}b^*c^{\circ}d^3$ &c. & de $a^{\circ}b^{\circ}cld^3$ &c. & de iV &c. Tous ces termes se réunirent donc en un seul, qui a pour FaBeur-premier $(o^{**}1-)$, & pour FaBeur-second $albac^{\circ}d^{\circ}$ &c. + $a^{\circ}bxc^*da$ &c. + $a^{\circ}b^*cld^{\circ}$ &c. >f< $a^{\circ}b^0c^0d'$ &c. , ou simplement $s + b + c > \{^*d$ &c. puit que toutes les pui (Tances zéro ne font que des unités. De même, tous les termes où sont combinés une racine, un carré, & un cube de diverses lettres (car une même lettre ne se repète pas dans un même terme) tels que slb^*cl , ou $a'PSd'S$ &c étant produits par la multiplication de (1) a l par (2) b l par (j) c % par (o) d^{\circ} par (o) e^* &c auront pour FaBeur-premier (o^*li^*j) ou $(12\$)$ en omettant les o (§. 5.) Donc le FaBeur-second de $(1\ 2^*;)$ est $^{**}V + \#^{*}\acute{e}V + slb'c^* + ^*-^*V + ^*,^*V+^*,^*V$ &c. ère. c'est-à-dire la somme de tous les produits qu'on peut faire en combinant une racine, un carré, & un cube de trois lettres différentes prises parmi celles qui représentent les racines de A. §. 8. Si donc les racines de Yéq : A étoient connues, il (eroit aisé d'avoir tous les FaBe urs -féconds de Péq : C. Mais ces racines sont inconnues, lorsque Yéq : A est d'un degré trop élevé pour que l'Algèbre en puisse donner la solution. introd. à l'Analyse des Lignes Courbes. P p p p Ce

The text on this page is estimated to be only 27.92% accurate

666 -APPENDICE. Cependant ces FaBeurs-feconds lè peuvent toujours calculer & exhiber fous une forme rationnelle , au moyen des coefficients de l'éq: $A...x^n - [i] xB^* + [i']x''-^* - [i''] [i'''] = 0$. Car, les signes 4^* & $-$ étant alternatifs, on fait que $[i]$, coefficient du fécond terme, est égal à la somme $a + b + c + \dots + d + \dots + c$. des racines, & par conséquent au FaBeur-fecond de $(0^n, i)$; que de même $[i']$, coefficient du troisiéme terme, est égal à $ab + \dots + ac + \dots + ad + \dots + bc + bd + \dots + cd + \dots + c$. somme des produits des racines priés deux à deux , ou au FaBeur-fecond de $(0^{n-1}, i')$ ou que pareillement le coefficient $[i'']$ du quatrième terme est égal à $abc + \dots + abd + \dots + cd + \dots + bcd + \dots + f$. etc. somme des produits des racines priés trois à trois, & Facteur-fecond de $(0^{n-2}, i'')$ ou (i'') : que de même $[i''']$ est le FaBcur fécond de (i''') &c. Les coefficients de Péq: Adonnent donc , immédiatement & fans calcul , tous les Facteurs-feconds de la première ligne L §. 5 -] » ou du premier Ordre [§. 6] Et au moyen de ceux-là , on trouvera tous les autres par le Théorème fuivant. §. 9. Si on multiplie un FaBeur-fecond quelconque par un FaBeur-fecond dont le FaBeur-premier n'ait qu'un (cul chiffre significatif, cVft-à-dire différent du zéro : le produit est égal à autant de FaBeurs-feconds qu'il y a de chiffres différents dans le FaBeur-premier du multiplicande. On aura les FaBeurs-premiers de ces FaBeurs-feconds en ajoutant le chiffre du multiplicateur à chacun des différents chiffres du multiplicande. Et s'il arrive que , dans quelcun de ces FaBeurs-premiers du produit, un chiffre soit répété plus souvent que dans le FaBcur-premier du multiplicande, on prendra ce FaBeurAk autant de fois que ce chiffre y est répété. Par ex. le produit du FaBeur-fecond $(0^n 6i 1122\$)$ par le FaBeur-fecond de $(0^{n-1}, i)$ est égal à la somme du Focteur-fecond de $(0Bff i 1224)$, de deux fois le FaBeur-fecond de $(0^{n-2} 6 111233)^*$ de trois fois le FaBeur-fecond de Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 24.45% accurate

APPENDICE. 67 (o**» M2 2 2 g), & de quatre fois le Fauteur - fécond de (o"-7i 1 1 \2Z 3). Ce qu'on exprime en abrégé par cette équation [III22j] X [i] = [1U224] + * [1112??] + } [11222g] + 4 [m 1 22g] , où les chiffres renfermés dans les parenthèses quarrées désignent les Fatleurs-feconds dont les FdBeurs-premiers auroient les mêmes chiffres dans des parenthélès rondes, & où, pour abrégér, on omet les puiflances de (o). Voici comment se forme cette équation félon le Théorème. Dans le FaBeur-premtcr (o»-tfi 1122g) du multiplicande, on voit quatre différents chiffres o, 1, 2, g. Le produit de [11122\$ J par [ijaura donc quatre parties. On aura le Yatleur-premier de la première , en ajoutant le chiffre 1 du multiplicateur au chiffre g du multiplicande , ce qui change (o»-tf 11122g) en (0^*1 n 224). Et comme aucun chiffre ne <è trouve plus fouvent en (o"-tf 11 1224) qu'en (o*-* 11122g), le Fkffeur- fécond [111224] ne fera pris qu'une fois. Le Faffear-premier de la féconde partie se forme en ajoutant le chiffre 1 du multiplicateur au chiffre 2 du multiplicande, ce qui change (o"-6 1 n 22g) en (p*~g 1 1 1 2 g g), où le chiffre g , qui n'étoit qu'une fois dans le multiplicande, (c trouve deux fois. On prendra donc deux fois le Faftcur-fecond [1 1 1 2g g]. De même pour avoir la troifième partie du produit , on ajoutera le chiffre 1 du multiplicateur à un des chiffres 1 du multiplicande (o«-« 11122g), ce qui le change en (o"*i 1222g), où 2 est répété trois fois , au lieu qu'il n'étoit que deux fois dans le multiplicande. On prendra donc trois fois le Facteur-fecond [11222g]. Enfin, ajoutant le chiffre 1 du multiplicateur à un chiffre o du multiplicande, on transforme (o»-*iii22g) en (o»-7iiu 22g), où l'on voit quatre 1, au lieu des trois qti'ii y avoit dans le multiplicande. On rendra donc quatre fois [111122g]. Et ainfi l'on aura l'éuation - 1 : ' * - PPPP * [11122g] Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 26.75% accurate

66* APPENDICE* [in22jMI]=[III324]+«["i233]+?

[na23j]+»4[iinaa5]. §. io. On peut remarquer, dans cette équation, que dans chaque terme du fécond membre, la somme des chiffres renfermés dans les parenthèses est la même, savoir la somme des chiffres du multiplicateur & du multiplicande: parce que les chiffres de chaque terme du fécond membre de l'équation (ont formés par l'addition des chiffres du multiplicande & du multiplicateur. §. 11. La preuve de ce Théorème [qu'on (est contentera d'appliquer au cas particulier qui a servi d'Exemple, mais qu'on concevra aisément être générale] se tire de ce que le multiplicande [11122\$] est la somme de tous les produits, tels que sixxcgde, /19 de trois racines d'e par deux quarrés blex & par un cube de différentes lettres (§.7); & de ce que le multiplicateur [il est la somme de toutes les racines a - f- b 4* c à -4- e+f g + by &c. de A. Multiplier par [1] chaque terme de [111225], comme l'^{Vi}/1, c'est donc le multiplier i°. par la racine * qui, dans ce terme, a son cube a*, 20. par les racines b, e, qui y sont élevées au quarré **. §°. par les racines ^, qui se trouvent dans ce terme, & 40. par les racines £, A, &c. qui ne paroissent dans ce terme, ni par elles-mêmes, ni par leurs puissances. Or la multiplication de chaque terme, tel que atB*ttéP c*f9 par la racine «, qui dans ce terme a 3 dimensions, donne tous les termes tels que 41t'(VV'^ qui font ensemble le Faïcur-fecond [111224]: & elle ne le donne qu'une fois, parce que chaque terme tel que a+bfd'e'f\ ne peut être produit, dans la multiplication de [111223 j par [i], que d'une seule manière, savoir en multipliant *%tclldxc xfx par 4. Mais la multiplication de chaque terme, tel que éxbxcxd'e'f\ par une des racines b, [ou*,] qui ont, dans ce terme, leur quarré bx [ouf\], produit tous les ter

Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 24.38% accurate

'APPENDICE. 669 termes, tels que $rf^{\wedge}WV/*$, dont la somme fait le Facteur-fécond [111233], & elle produit deux fois cette somme ; parce que chacun de ces termes (è trouve deux fois dans le produit [111223] x [1]; *xb?dlcxfl y paroiffem, & comme produit de alPcld'elfl par*, & comme produit de *Vtxdx*xfl par m. La multiplication de chaque terme, tel que **Pc%ileip% par une des racines d [ou e, f] qui dans ce terme n'ont qu'une dimension , produit tous les termes tels que $sxbicldttextft$ dont la somme est le Faëcur-fecond [1112223], & elle la produit trois fois ; parce que chaque terme (è trouve trois fois dans le produit [ni223]x[i]. Par exemple $axbtcdxexfl$ s'y trouve formé par la multiplication de $rf^{\wedge}VW/1$ par d, & par celle de $a'blcxdexfx$ par c , & encore par celle de $SPc'tfe'fl$ par i. Enfin la multiplication de tous ks termes , tels que $j'JVifV/1$, par quelque racine comme £, différente de celles a y é>t e, dy eyfy qui y font déjà, produit tous les termes, tels que $axbxfdxexfxgl$, dont la somme est le F*cteur-feconà [1111223], & dans ce produit chaque terme le trouve quatre fois ; parce que $sibxcidxe'fxgx$ par ex. est produit en quatre manières , fo. en multipliant *xbxcxdxexp par ey ou $\hat{i}V/fV'$ par /, ou $a'fW/V1$ par ey ou rf^*VV/Y par 4 Le Produit [1 1 1 223] x [1] est donc composé des quatre parties [11 1224] +2 [111233] +3 [112223] + 4[IIH223]. §. 12. Par ce Théorème, on peut calculer tous les FaBeurs - féconds de l'équation C, au moyen de ceux du premier ordre , qui font les coefficients de l'équation donnée A (§.8). Pour cet effet, on décomposera en deux parties le FaBeur-premier dont on cherche le FaBeur-feeond. L'une n'aura que des (o) avec un (êul chiffre fiPppp 3 gnificatif, Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 25.92% accurate

6-jo APPENDICE. gnificatif, qui vaut une unité de moins que le plus grand chiffre du FaHeur propofé: L'autre contiendra tous les chiffres du Facleur propofé à la réferve du plus grand, auquel on fubftituera F unité'. En multipliant l'un par l'autre les FaBeurs -féconds dont ces parties font les FaBeurs' premiers , on aura par le Théorème précédent une équation , dont un des termes fera le FaBeur cherché , & dont tous les autres termes feront des F aBeurs -féconds qui fè trouvent dans des lignes fupérieures , fi Ton difpofe les Facteurs-premiers comme on Ta indiqué au §. 5. Donc, fi Ton calcule les Faffeurs -féconds ligne par ligne; quand on vient à calculer celui-ci, on aura déjà tous les autres par le moyen defquels il eft donné & connu. On cherche, par ex. la valeur de [0125]. .On. décompofèra ce nombre en deux parties [0002] & [0112I; dont la première n'a que le chiffre fignificatif 2 , moindre d'une unité que 3 le plus grand chiffre de ceux du FaBeur propofé ; & dont la féconde partie Coi 1 1] a tous les chiffres du FaBeur propofé [0123], hors le plus grand 3 qu'on a changé en 1. On multipliera [0112] par [0002], & on aura l'équation [01 12] x[0002] = [01 14] + [0121] + 2 [1122], d'où l'on tirera [0123] = [oi2]x [0002] — [0114] — 2 [11 22]. Ainfi[oi2\$] eft donné par [01 12], [0002] , [01 14] & [1122]. Mais ces FaBeurs-feconds font déjà calcules, quand on viendra à la ligne où fè trouve [0123], Car Loi 12], [0002] & [01 14] font du fécond ordre (§. 5), & [ii22],qui, auffi bien que [0123], eft du troifième ordre, <ê trouve dans la ligne immédiatement fupérieure , parce que le chiffre 2 précède immédiatement le chiffre 3. Donc fion calcule ces Facleurs-feconds ligne par ligne , on a déjà , quand on vient à calculer [0123], tous ceux par lefquels il eft dunné. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 27.72% accurate

À P P E N D I C E. 6^{jm} §. i[§]. On peut fupputer ainfi l'équation C, à quelque degré' que s'élève la variable x dans les eq : A & B. Il eft vrai qu'on y trouvera cet inconvénient, c'eft que pour calculer certains FaBeurs-féconds qui entrent dans Péq : C, il faut en avoir calculé d'autres qui n'y entrent pas. Ainfi pour avoir la valeur de [0123], il faut connoître celle de [01 14], qui feroit d'ailleurs inutile fi Péq; B ne paffoit pas le quatrième degré. Quoique cet inconvénient foit plus apparent que réel, n'ayant d'autre incommodité que celle d'allonger *le Calcul ; on pourra , fi l'on veut , le lever au moyen de la Règle fui vante , qui fert à fupputer le produit de deux F tueurs -féconds quelconques. i^o, Ecrivez de (uite tous les arrangements poffibles des chiffres du multiplicande. Le calcul fera plus court, fi vous choififfez pour multiplicande celui des deux Faveurs dont les chiffres donnent le plus petit nombre d'arrangements^o. Sous chaque arrangement écrivez les chiffres du multiplicateur, dans un ordre tel que vous voudrez, mais toujours le même, & ajoutés les chiffres de deflus à ceux de deflus. Ces fommes feront les FaBeurs-prémiers dont les FaHcurs-féconds compofent le produit. 3^o. Multipliés chacun de ces FaBeuruféconds par la fraction qui a pour numérateur le nombre des permutations des chiffres du multiplicateur , & pour dénominateur le nombre des permutations des chiffres du FaBcur même. §. 14. Ce feroit trop s'écarter de nôtre but, que de s'arrêter à prouver cette Règle, dont le Le&eur attentif pénétrera aifément la raifon. Pai cru pourtant devoir l'indiquer , parce qu'elle fournit divers moyens plus faciles de calculer l'équation C, & qu'elle m'a été fort utile pour calculer en peu de moments l'équation C * , qu'on voit ici vis-à

The text on this page is estimated to be only 22.49% accurate

; * V* 672 rA F P E N, D I ÇJL vis-à-vis , & qui cft celle, qui.
 refaite de l'évanouiffement de x dans ces deux équations du 4e. degré, m *i
 $1 - \% * ' * | \% 1 . , \text{ t f t } A ^ { - } P ^ { * * } * " f ^ { * * } - > * + / = o B (o) + \hat{C} \hat{I}) * + (2) *'$
 $*G) + (4) = 3 \sim$ Cette éq: C*, où Ton a changé pour plus de commodité
 l'ordre des Fafiturs , peut fervir pour tous les degrés inférieurs, & contient
 ainfi toutes les Régies que MrV Newton a données dans Ton Aritbmêt.
 urùvtrf. pag. 7% , 74, & au delà. Car fi l'e'q : B n'eft que du 2e. degré, on
 fera(4) = o, c'eft-à-dire, on omettra tous les termes de Téq : où le chiffre 4
 par 01c entre les FaBcurrrentiers > & alors toute l'équation le peut & doit
 diviCet par /. Et fi Téq : B n'étoit que du 2e. degré , on omettroit encore
 tous les termes dans le Faftteur -premier dans lefquels paroît un j, &
 l'équation feroit encore divifible par /, &c. Mais fi l'éq : A n'étoit que du Je.
 degré, on omettroit dans les FaHcurs-feconds tous les termes où il y a une /,
 & toute 1 équation fe diviferoit par (o). Et fi A ri'étoit que du 2e. degré, il
 faudroit encore omettre tous les termes où il y a une r, & divifer une
 féconde fois l'équation par (o), & ainfi de fuite. On propofè, par ex.
 d'éliminer * de ces deux équations $x' - 2 * x 4 * / y i y x - y * o \& a x l + y * x$
 $- a y l - o$. On comparera la féconde avec l'e'q : B , & on aura (o) s=-^,
 (1)a5/, (2) = 4) & (0=o = (4)* ce qui réduit d'abord l'éq r C* aux cinq
 premières %ncs , toutes les autres ayant dans leurs FaBertrs-prèmters les
 chiffres j ou 4. En fuite on comparera la première des deux équations
 propofées avec A , & l'on aura /= 1 , p=2M9 q= ±ay y r~ y & /= o. Cette
 valeur de / faifant évaDigitized by Google

The text on this page is estimated to be only 6.40% accurate

+fmO^,/ + (m2)/>/ 4* 0> f • . . (l222)/V/. + C2222)/1/» /> rfq* —
j^HM^f • • • >fOfii)ifi — j/V/ — /V/ + (122?)^' — aF? • + • (222;) ^/* —
tW+S*1" +Ol?OVJ — — i/V — Jpri+^S +(i3jj)^— 3-K >K *0
33 ?)"*' — "VV+Vf^— V^1 • • >>r(\22àù?Ts-2l(irsJpsx j ^li22^)^pls^2lqsx
f-p'qj+i o/prj— 8// . + (i i j4)^1/-2/r/-^r/+5£/i + (a2j4)^/î-^/* H-yV+a^1 . . .
03?4)/rju?;rt4f. +(aj?4)/W*-4«? -^i-tfV+ajjp» + (i 244) qWs^s-Ms* +5/^
+ (2244)f>/-2/rI1+2/r• HH (1 344)yr1/-2fV^r/*if>4/f HK«344>#W8-
3J*> ►K3444)" + (4444)/*

The text on this page is estimated to be only 14.38% accurate

1 > • ?» — Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 17.62% accurate

AT PEND 1 C E. Gj\$ évanouir tonte la cinquième colomoc , ce
qui refte des cinq ; premières lignes fera divifible par (o) & par //, & après
la divifion cfles fe réduiront à ceci n j- — \ (ooo)/ * «^(ooi)//> +(on)/^ +
(ni)/r=9 ^ (002)^ — a# +(oia)# — j/r+(na)^rr ou, fubftituant à (o), (1), (a), /,
^, r, leurs valeurs, A , , . . * «•y* «y.** -*/. 4^ +/• / =0 * I qui îc rcuuit a ; —
j'/ + a*»/ — ss o -i^y+4^y+4^>; ou /réunifiant les termes homogènes, à • • •
' l»»»,i."i , . . ■ ' , ' . • . * • §. 15. On pourroit tirer de ces Principes plufieurs
conféquencs fort utiles dans l'Algèbre: mais ne nous écartons point de
notre but , qui cî\ de démontrer que fi A & B font deux équations , l'une de
Tordre m & l'autre de Tordre », l'équation qui réfulte de FcvanouïlTemerit
de la . Intr9dtà?An*lyfedcsl*gnesQ>wrhcs. Qjqqq varia

The text on this page is estimated to be only 20.27% accurate

674 J F F E N D I C E. variable * ne fauroit être: d'un degré plus élevé que /» ». '.. /-• t ♦» i 4 >. \, J 1 -, • ' i. i i • i l t. tiithO^V B (o)+(0* + + (?)*)' + =o i9. Puîfcjue l*e*q: A^yft de4, Tordre » , elle n'a aucun terme fcù le^ èîcpofahts'Hdê * &*de y enfemble fàflènt une fommc^lus grande que ». Donc [i] eft une fonction dey qui ne pafle pas le premier degré, & Ci*] une fon&ion qui ne pafle pa» le' fécond "degré, &c. «r[i]"2 une fonction qui ne parte pas le degré », c'eft-à-dire , dans laquelle il n'y a aucun terme où y .ait un expolant pjus grand que»/ •;*.-•-',, . ; fl - • ^ ■ Delà on peut oonefurre qujîl'ny i aucun F^&ôr-y?de l'éq : C où la variable y ait un expoiant plus grand que la fomme des chirTres de (on FaBeur-premier : Qye dans [o"-îi2\$] par ex. il n'y a aucune puiflance de y iupérieure à la fixième ; parce que $14 \cdot 2 - f - ? = tf$. Cette conclufion fe déduit au moyen de deux Principes. L'un, qui a été indiqué au §. 10, cVft qudfcs Chiffres de deux FaBeurs qui fe multiplient l'un l'autre font enlèmble la même fomme que les chirTres des FaBcurs qui compolent le produit de cette multiplication. L'autre, qui eft connu , c eft que fi on multiplie Tune par l'autre deux Fonctions rationnelles , de degrés quelconques, tPune même variable ; le produit fera une Fonction d'un degré égal à la fomme de leurs degrés. Si donc il eft vrai de dire de deux FaBcurs -féconds multipliés l'un par l'autre, que chacun eft une Fon&ion rationnelle de yy ou elle nV pbiard'expofant fupérieur à la fomme des chiffrei de leurs FaJtevrJ premiers} cela fera également vrai de leur produit, & par confequent de tous les FaBeurs-feconds qui - compofent ce produit. Or on a vû au commeheemént de ce f que .vj .. J • ... ' - .i » ■ cela

The text on this page is estimated to be only 17.39% accurate

JitPENDICE. &7J cela est vrai des FaHèurs - féconds C_i , C_i^*]
 C_i »] de la première ligne. Donc cela est vrai des Facteurs - féconds sans
 exception; puisqu'ils sont tous produits, immédiatement ou médiatement,
 par la multiplication des Facteurs de la i première -ligne (§. 12). Ainsi, pour
 prouver que y ne passe pas le 6e. degré dans C_{12}^3 , il suffit de faire voir
 qu'elle ne passe par le 4e. degré dans $[uaJ$, ni le 2e. dans $[>]$. Car, comme
 $[112] r=i [1143 + C_{12}^3 j 3 2 [11223$, le FaHeur $\backslash, \% ^$ est une des parties qui
 composent le produit de C_{11}^3 par L_{23} . Or on prouve que $^$ ne passe pas
 le 4e. degré dans $[1123]$, ni le 2e. dans $[23]$, par une (emblable
 décomposition. $[13 \times [1] = [234]$

The text on this page is estimated to be only 21.66% accurate

A P P ĩ N D J C S. il n'y aura aucune puiflânee de j dont Texpofint parte le nombre qui rertc quand de mn on ôte la fomme des chiffres de ce FaBeur. Ainfi dans (o"-li2\$), y ne fauroit pafler le degré «r»-r— 6. Car dans (g)>7 ne paflè pas le degré m — ni dans (2) le degré m — 3, ni dans (1) le degré m — 1, ni dans (o) le degré m\ ni par conféquent dans (o«-î) le degré mx (« — g) — mn — Sm. Donc dans (o»-î 1 2 \$) = (o«- J) x (1) x (2) x (3), y ne paflè pas le degré mn — 3»», + m— 1 , + «— a, + /w — - j 3*. Cela étant ainfi, qu'on prenne dans Peq: C que! terme on voudra, & (H'on cherche qu'elfe peut être la plus haute puKTânce de y dans ce terme-là , on trouvera que y ne peut s'élever dans le FaBeur-feconJ à un degré plus haut que la fomme des chiffres du F*8eur-prèmèer (n°. i"), ni dans le Faïïeur-prémier à un degré plus haut que le nombre qui refte quand on ôte de mn la fomme de ces chiffres («°. 2). Donc dans le terme complet, qui eft le produit du F*Brur--prtm/rr parle FaBeur-fecond , y ne montera point à un degré plus haut que mn, qui réfultc de l'addition de cette fomme & de ce refte. Ainfi, dans aucun terme de l'équation finale C, y ne monte à une puiflânce plus haute, que celle dont mn eft l'expofant. L'équation C n'eft donc, au plus, que du degré mn: elle ne peut avoir plus de mn racines. O f»V/ Jkloit dcmonffrf. ~ ■ » n*. m, * Digitized by

The text on this page is estimated to be only 16.39% accurate

APPENDICE. 6n N«. III. Dimonstration de la RhgU 4* Mr. H LE
M ME S5 en multiplie la faite bien erdomie des termes fun 1,2, 3 , 4, &C. ta
multipliée par ly. La feule inlpe&ion du calcul peut tenir Heu de preuve. 1 •
*• _ 1 . 2. ? 5 ' I • ' / I. 2 f I. 2 CM T. Si au lieu de la progreflïon 0,1,2,3,4,
&c. on avoit multiplié la fuite des termes de la puilTance $Q^{qq} 3 (v+j)$
Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 18.99% accurate

6j A F>P E N J) I£ E. (v-f-^y, par la progreflion ow, i/w, 2», fm) &t. lç produit auroit été m ly x (v *{* y) *■«• Car multiplier la fuite des termes (v+jO' par on», im9 sa», rffc c'eft la multiplier par o, 1, a, 3, &c. ce qui donne ly x(v >f« 8c multiplier le tout pari», ce qui donne Coroll. II. Si on multiplie la fuite des termes de par une progreflion arithmétique quelconque n9n>i*min>it2mt.n + }iHi &C le produit fera divifiblepar (v+r)*". "" Car multiplier lafiutedes termes de(v ^ky)1 par la progreflion + » 4- 2 #* > 6*f« c'eft la multiplier 4 °. par ce qui donne wx(v+>)/ = »x (i>+^) x (^y^ss: (»^4-»>')x(v+_y)/-1 & 2*. par la progreflion o», 1 2w, <£v. ce qui donne, «r/y x^v+jô'-». Le produit conv plet eft donc (nv * ny + mly^X^v+y")^ , qui eft diviOble par(<,+jO's • - • . . THEOREME. . 5/ 0» multiplie , progrefum arithmétique quelconque , /* fuite bten ordonnée des termes d'une Egalité qui ait quelques racines égales; le produit fera une Egalité, qui aura toutes les mêmes racines égales , moins une. 1 • Le fécond membre d'une Egalité bien ordonnée étant zéro , le premier membre eft divifible par toutes les racines defuuellei il eft le produit. Si l'Egalité a / racines égales, reprcléntécs par y 44

The text on this page is estimated to be only 19.78% accurate

APPENDICE. 679 /foi* par vHhj, c'est-à-dire divisible par
 $(w + \sqrt{v})$. On. peut donc représenter l'Egalité par cette Formule $(i - f - y) x +$
 $f J + rjr1 - h // * 4^*$) la grandeur $fi + fy - hry1 +$ étant fijppofee le produit de
toutes les racines différentes de $4 - 0 = 0$. Si on développe la puissance (
TEgalite' ordonnée fera & fi on multiplie la suite de ces termes par la
progrès fion arithmétique $* \bullet ^ \bullet \%$ on voit que chaque ligne fera multipliée
par une progression arithmétique, la première par la progression entière », »,
 $+ /$ », $n^{2m} + c$. la féconde par $n^{2m} + c$, $2m$, » + &c la troisième par $n^{2m} + c$
 $+ ^$ Or chaque ligne est la puissance / de $v + y$ & n'importe qu'elle soit
multipliée dans la première ligne par $\sqrt{v}$, dans la féconde par qy , dans la
troisième par $ry1$, &c. il fera toujours vrai [Or. fécond.] que le produit de
chaque ligne est divisible par Donc toute l'Egalité multipliée par la
progression, », », $+ w$, », $+ 2/w$, tfv. est divisible par $(1 +$ Donc de / racines
égales qu'elle est $\bullet 1 >$ Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 16.45% accurate

680 APPENDICE. le avoit avant la multiplication, dlc en
conferve /— r après la multiplication. Car, Ainfi, une Egalité, qui a une ou
phifieurs racines doubles, les conferve, mais (impies, après qu'on a
multiplié la fuite de fes ternes par une progregon arithmétique quelconque



INDI-

Digitized by Google

i INDICE DES CHAPITRES ET DES PARAGRAPHES.

CHAPITRE PREMIER. De la Nature des Lignes Courbes en général , & de leurs Equations.)• 1 • 2. 3LEj Lignes font régulières ou irrégulières. pag. i Lignes régulières , leur nature. 2 Lignes font la même chose que les Lieux géométriques des Anciens. 2 Lignes à simple ou à double courbure. 5 Ce que c'est que l'Origine , Us Axes , les Abscisses , les Ordonnées. 3 Ce que c'est. que l'Equation

INDICE CHAPITRE II Des transformations que subit l'équation
 d'une Courbe , quand on (a rapporté à d'autres coordonnées. §. 24. Principe
 général de ces transformations. §. 28. Manière plus commode d'exécuter ces transformations. pag.
 38 25. Application de ce Principe aux cas particuliers. 39 26. Principe pour
 en abrégier le Calcul. 40 27. Transférer l'Origine sur un Point donné de
 l'un ou de l'autre Axe. Exemple. 41 28. Transférer cette Transformation, 20. Transférer
 l'Origine sur un Point quelconque. Exemple. 48 30. Changer la position et
 un des Axes , sans changer l'Origine. Exemple. 50 CHAPITRE III Des
 différents Ordres des Lignes algébriques. §. 31. Principe de la division des
 Lignes algébriques en Ordres. p. 32 32. Equations générales des Lignes de
 chaque Ordre. 52 33. L'équation d'un assemblage de Lignes d'Ordres
 inférieures est d'un Ordre supérieur. < 3 34. Toutes les équations d'une
 même Ligne sont d'un même Ordre. 35. Division des termes d'une
 équation sur le Parallélogramme ou sur le Triangle Analytique. 4 36. Ce
 que c'est que les Cafés , les Bandes & les Rangs de ce Triangle. 37. Nombre
 des termes des équations générales de chaque Ordre. P- T? 38. Nombre des
 Points par lesquels on peut faire passer une Ligne d'un Ordre donné. 58
 Exemple. jo. 30. Nombre des Points dans lesquels une Droite peut
 rencontrer une Courbe d'un Ordre donné* 62 40. La Droite est la seule Ligne
 du premier Ordre. 64 41. Nombre des Points dans lesquels une Courbe peut
 être rencontrée par une Droite parallèle à l'un de ses Axes. 69 42. Le
 nombre des intersections de deux

DES CHAPITRES ET DE S PARAGRAPHERS. h 45 deux Lignes déterminé par les racines aune Egalité, pag.70 §•43* I* nombre de ces Points efl quelquefois plus petit que celui de ces racines. 71 44. Cas dans lequel le nombre des Points de rencontre riefl pas inférieur au nombre des racines. 72 Exemple. 72 Le nombre des Points de rencontre efl quelquefois plus grand que celui des racines. pag-7J Exemple. 7 5 46. Nombre des Points dans lefquels peuvent Ce rencontrer deux Lignes S Ordres donnés. 7Ç 47. Explication dune contradiftion apparente. 76 48. Solution d'une autre difficulté. 7% CHAPITRE IV. Quelques Remarques fur la conftru&ion géométrique des Egalités. ^•49- Lfj Egalités fe conflruifent par \$. \$4. les interf&ums de deux Courtes, p. 80 Exemple. 80 yo. Manière de trouver ces Courbes. 82 51. Limitation de ee choix. Le nombre des interf&erions des Cour les peut-être moindre que celui des racines de t Egalité quon veut conjlruire. 8 \$ Exemple. 84 J2. Il peut être plus grand. 8 y Exemple. 8 c 53. Manière d éviter ces inconveniens. 86 Exemple. 87 5S<' 5<5. S7 S*5960. Choix des Courbes les plus ftmples qui peuvent confiruire une Egalité d'un degré donné. 88 Réflexions fur cette règle. 91 Conflruclion d'une Egalité quelconque par une Courbe & une Droite. 92 Ufage de cette conflruElion pour déterminer les limites des Egalités , & le nombre de leurs racines réelles & imaginaires. 9j Application aux Egalités du fécond degré. 95" Application À celles du troiftimet 97 & du quatrième degré. 10 j C H A

The text on this page is estimated to be only 23.93% accurate

iii INDICE CHAPITRE V. Valeur du produit de toutes les
Ordonnées d'une même Abcisse. §. 6¹. Théorème général, pag. 108
concernant l'Ordre. 62. Application aux Lignes du 1^{er} Ordre. f. 63. Et à celles du 2^e Ordre.
116 CHAPITRE VI. Des Diamètres, Contre-Diamètres &
Centres des Lignes Courbes. §. 6⁴. Valeur de la somme de toutes les
ordonnées (d'une même abscisse). p. 120 6⁵. Propriété de deux Lignes du
même Ordre, dont les équations ont les deux mêmes premiers termes. 129
66. De ces deux Lignes, l'une peut être un assemblage de Droites. 131 67.
Ou même une seule Droite, qui est le Diamètre de la Courbe. «a 68. Toute
Courbe a une infinité de Diamètres. 134 69. Diamètres curvilignes, 135 70.
Diamètre absolu. 1^{er} §. 71. Toute Ligne du 1^{er} Ordre a un Diamètre
absolu. p. 138 72. Trouver les Diamètres absolus des Courbes des Ordres
supérieurs, lorsqu'elles en ont. 138 73. Contre-Diamètres. 141 74. Une
Courbe qui a un Contre-Diamètre en a une infinité. 75. Centre d'une Courbe,
ce que c'est. 76. Déterminer, par l'équation d'une Courbe, si elle a un
Centre, à quelle elle se rapporte. 144 Exemples. 144

CHA1 Digitized by Google

DES CHAPITRES ET DES PARAGRAPHERS. v C H A P I T

Détermination des plus grands termes Méthode des Séries > RE VIL d'une Equation. Principes de la ou Suites infinies. f. 77. \]Ne Equation perd quelques- \$. 8 JL uns de je s termes , quand on suppose une de ses indétermi- — * — nées infinie ou infiniment pe- 8^ tite. pag. 1^8 78. Ordres des infinis , potentiels & radicaux. 149. 90. 79. Ordres des infiniment petits. IÇO 8û» Tentative infructueuse pour trouver Us plus grands termes d'une Equation. If 1 81. Manière de les trouver par voie 91. exclusion. 153 Exemple. i£l 82* Usage du Triangle analytique £2. dans cette Recherche. 1 J J 83. Propriété du Triangle analytique. 156 84. Les termes % qui font sur une ÇJ. même Droite , ont des exposants en progression arithmétique. 1^8 85. Le rapport des différences de ces progressions dépend de l'inclinaison de cette Droite. 56. 86. Les termes qui font sur deux Droites parallèles ont des exposants en progressions arithmétiques , dont les différences £8. font les mimes. 1 60 87. Tous les termes qui font sur une 99. même Droite , font du même ordre , si deux d'entre eux font supposés du même ordre, ici Rapport des ordres des deux indéterminées , dans cette (ttt. position. p. iÀ2 Exposant de F ordre des termes qui font sur une même Droite. ii2 Les termes , qui font au-dessus de cette Droite , font et toi ordre supérieur : ceux qui font au-dessous , d'un ordre inférieur. 164 Delà , la Méthode pour trouver les plus grands termes d'une Equation. 164 Développement de cette Méthode. Déterminatrices supérieures & inférieures. 1 6e Exemples. 1 60 Racines de l'Equation donnée par une Déterminatrice. pAz. 169 Elles peuvent être imaginaires. ' 170 Ou demi-imaginaires. 171 Remarque sur l'exposant de ces racines. 1 172 Méthode des Séries , ou Suites infinies. 17^ Séries convergentes , & divergentes. 174 Les exposants des termes d'une Série convergente vont toujours en croissant , ou toujours en décroissant. i7y

The text on this page is estimated to be only 28.11% accurate

vj 1 N D f.IOO. Séries Ascendantes , Séries descendantes, pag.
177 101 , Forme générale d'une Série. 177 102. Investigation des termes
fuccejfifs d'une Série. 177 103. Remarque y & Exemples. 179 104. Séries
imaginaires , demi-imaginaires , Séries qui Je fourchent. 184 Exemples. J S
4 IQÇ. */? /«1 p/rff* , y«r Trirfnjçfc analytique »

DES CHAPITRES ET DES PARAGRAPHES. 129. Les Branches des Courbes font ou hyperboliques ou paraboliques, pag. 330 130. Manière de les difcerner. 230 131. Branches hyperboliques j trouver leur Ajymptote droite. Ul 132. Ce que c'efi que leur Afymptote courbe , à leur Hyperboleafymptote. 332 133. Branches paraboliques ; trouver leur dernière direction. 134. CSr cejl que lear Afymptote courbe , & leur Paraboleajymptote. 336 135. Trouver % par le Triangle analytique , la dernière direction des Branches infinies d'une Courbe. 137 135. En quel cas une Courbe efl finie. 239 Exemple. 239 137. Quatre positions différentes des des dètermmatrices * par lesquelles on trouve les Branches infinies d'une Courbe* 240 138. Cas f. Branches hyperboliques > ayant un des Axes pour Afymptote. 243 Exemptes. 24 y 139» Cas il. Branches hyperboliques , ayant leur Ajymptote parallèle à l'un des Axes. 161 Exemples. 262 *4°- Pofition de ces Branches autour de leur Ajymptote. 263 Exemples. 2^4 *4'« Abrégé du Calcul nécejfaire VIJ itartx ce cas-là. pag. 273 Exemples. 274 §. 142. Cfi ///. Branches paraboliques , deux Branches infinies. 140. Une Courbe algébrique ne peut avoir plus de Branches infinies, qu'il n'y a d unités dans le double de Vexpofant de fan Ordre. 343 147. Une Courbe algébrique ne peut avoir plus d' Afymptotes droites quil n'y a d'unités dans l'expofant de fan Ordre. 3 it 14 5. Lorfqu'elle a ce nombre JT4fymptotes , toutes fes Branches font hyperboliques. 34 e 149. Propriété de ces Afymptotes <& de ces Branches. 34Ç IfO. En combien de Points une Courbe peut rencontrer fon Afymptote droite. 347 i^L Combien une Courbe algébrique peut avoir et A'ymptotes droites parallèles à fes ordonnées. 349 152. Combien elle peut avoir d'Afympto

• • • V11J INDICE Jymptotes droites parallèles en §. En quel cas
 elle peut les eoupag. 3J0 per. pag. 351 CHAPITRE IX. Divifions générales
 des Lignes des cinq premiers Ordres. §• \^E fécond Or ire n'a que trois
 Courbes , fEliipfe, dont le Cercle ejl une efpèce , t Hyperbole & la
 Parabole, p. J 52 Ify. Le troifième Ordre a quatorze Genres de Courbes. 3 y
 9 Ij6. Les Courbes du quatrième Ordre , IJ7. fe peuvent réduire à neuf
 Gaffes, <\ui fe Çubdivifent en plufieurs Genres. 369 §. 158. Le cinquième
 Ordre a onze Claſſes. p. 597 IS9' Nombre des Branches infinies ,
 paraboliques & hyperboliques, des Courbes des cinq premiers Ordres. 398
 160. Règle générale fur le nombre . des Branches, [oit paraboliques,foit
 hyperboliques 4*ns chaque Ordre. 399 CHAPITRE X. Des Points finguliers
 ; Points multiples , Points d'Inflexion & de Serpente mem. §. 161. Y Oints
 ſimples & multiples. pag. 400 162. Sécantes & Tangentes. 400 163. Points
 d'Inflexion. 401 164. Point de double Inflexion , ou de Serpente mem. 40\$
 16 y. Point de triple, quadruple, ttc. Inflexion. 403 166. Inflexions viſibles
 & inviſibles. qp-t 167. A quels Ordres les Courbes commencent à être
 ſuſceptibles des diverſes Inflexions. 404 §. 168. Exemples de ces Inflexions
 dans les Paraboles des divers Ordres. p. 404 169. Points doubles , triples ,
 quadruples y &C. <*&08 170. Connaître la ſimplicité ou multiplicité"

DES CHAPITRES ET DES PARAGRAPHES. Point est situé sur l'un des deux Axes. pag. 423 Exemple. 423 §. 173. Trouver si une Courbe a des Points multiples, où ils sont & quels ils sont. 426" Exemples. 428 174. Trouver, dans l'équation d'une Courbe % les conditions qui lui donnent des Points multiples, 440 Exemples. 441 175. Une Courbe ne peut avoir aucun Point, dont la multiplicité ait le même exposant que l'Ordre de la Courbe. 445 176. En quel cas une Courbe ne peut avoir qu'un seul Point multiple. 446 §. 177. Une Courbe ne peut avoir deux Points tels que les exposants de leur multiplicité fassent une somme égale à l'exposant de l'Ordre de cette Courbe. p. 446 178. Une Courbe ne peut avoir cinq Points, dont les degrés de multiplicité fassent une somme double de l'exposant de son Ordre. 456 179. Une Courbe ne peut avoir neuf Points dont les degrés de multiplicité fassent une somme triple de l'exposant de son Ordre. 457 180. Nombre des Points multiples qu'une Courbe d'un Ordre donné peut avoir. 458

CHAPITRE XI. De la Méthode des Tangentes. • Des Points d'Inflexion, Sec. Des plus grandes & des plus petites abscisses & ordonnées, etc. §. 181. Tangentes des Points multiples ? combien de fois font-elles rencontrer la Courbe. p. 466 182. Trouver les Tangentes d'un Point situé à l'Origine. 466 183. Un Point peut avoir autant de Tangentes qu'il y a d'unités dans l'exposant de sa multiplicité. 466 184. En quel cas la Courbe touche, à l'Origine, un des Axes, ou tous les deux. 463 185. Détermination des Tangentes du Point situé à l'Origine. pag. 464 Exemples. 404 §. 186". Déterminer si il y a une Inflexion à l'Origine, & quel est son degré. voir Exemples. 468 187. Trouver la Tangente d'un Point situé hors de l'Origine. 471 Exemple. 472 188. Détermination de cette Tangente. 472 180. Trouver la Soû-tangente a.yj b.iyo. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 26.28% accurate

INDICE 191. » mm* 196. Calcul abrite pour trouver la \$. 197.
Soft tangente. Pag«47f Trouver les Tangentes d'un 198. Point double. 477
Exemples. 477 Trowf^r /« Tangentes d'un Point triple , &c. Û en gé- 199.
néral multiple. 4»° Exemple. 480 Déterminer fi un Point , ^r* de 200.
POrigine, a une Inflexion, & quelenejlle degré. - 48 1 Exemples. 482 20 1.
Trouver /« Po/h/j

The text on this page is estimated to be only 19.94% accurate

DES CHAPITRES ET DES PARAGRAPHES. U plus grande ou la plus petite. f»g*H9 \$.214. Courbures infinies Ū infiniment ment petites. 5 y 2 215. Courbures des Courbes comparées à celles des fommets de Paraboles. 55 e 21 6. Déterminer 1 par cette comparaifonja dtredion d'un Point quelconque d'une Courbe. 5 5 6 217. & 218. Déterminer la pofition & la Courbure de chaque Branche en un Point fimple ou multiple if une Courbe. S S6 Exemples. 561 219. Remarque nécejjaire pour prévenir les erreurs où pourrait jeter cette Méthode. 566 CHAPITRE XIII. Des différentes efpces de Points multiples dont peuvent être faceptibles les Courbes des fix premiers Ordres. §. 220. D Es Points doublet, p. \$6\$ \$.222. Des Points quadruples, p.^o Exemples. 580 Exemples. 636 221. Des Points tripler. 600 323. Des Points quintuples. 6<2 Exemples. 608 APPENDICE. De t évanoui Jement des inconnues. V. I. pag. 657 iV°. II. JV°. III. DéwmJhtatUm de U Régie de Mr. Hvddb.. 677 F A U

The text on this page is estimated to be only 26.18% accurate

FAUTES A CORRIGER. Page. Ligne. 26. 1. 45. ?• 76*. No/e * /.
aern, 77. en marge. 87. 1 L 1 09. 1 2. 1 1 o. 1 6. 121. 12. 1 69. 198. ... XL • •
207. ... 14. . • 228. ... IJ. ... 233. ... 7' • • 289. ... 7* • * 300. ... 18. . • 373. ...
dernière. 289. » . 1 8. ... * • • • ... 402. ... 22. ... 405. ..10... 407. . 14. en
marge. 430. ... 2. ... 451. • . 19- • • 509. ... 5- • • 520. ... 26. . 5°5« • • 23. ' •
590. ... 9« .. Faute. impair . (z)/. ... N°. 3. . Fig. 23. . — 1 5 ax . PSxPT . .
troitleme R — o . . qO . . . AAz=z\$A h i. -jowk . . . AB[x] . — 9 D 1 .
fimple . . . trois . . — bx* . . F/£. 122. . — i^y . • 2 P pofitif . . négatif . .
bb>\aa . \,Qrrcctton. pair (•)•/. N°. 2. F/£. 24. + 15 a x PRxPS fécond «B as
A — ^A k h QU-j AP[«] & double en trois — bx* Fig. 121. — 8*»j —
*aayy S— négatif pofitif

The text on this page is estimated to be only 14.67% accurate

t * * I • I ••4 » . -v Digitized by Google

Digitiz

The text on this page is estimated to be only 18.40% accurate

•1 H Drgitized by Google

