

This book was produced in EPUB format by the Internet Archive.

The book pages were scanned and converted to EPUB format automatically. This process relies on optical character recognition, and is somewhat susceptible to errors. The book may not offer the correct reading sequence, and there may be weird characters, non-words, and incorrect guesses at structure. Some page numbers and headers or footers may remain from the scanned page. The process which identifies images might have found stray marks on the page which are not actually images from the book. The hidden page numbering which may be available to your ereader corresponds to the numbered pages in the print edition, but is not an exact match; page numbers will increment at the same rate as the corresponding print edition, but we may have started numbering before the print book's visible page numbers. The Internet Archive is working to improve the scanning process and resulting books, but in the meantime, we hope that this book will be useful to you.

The Internet Archive was founded in 1996 to build an Internet library and to promote universal access to all knowledge. The Archive's purposes include offering permanent access for researchers, historians, scholars, people with disabilities, and the general public to historical collections that exist in digital format. The Internet Archive includes texts, audio, moving images, and software as well as archived web pages, and provides specialized services for information access for the blind and other persons with disabilities.

Created with hocr-to-epub (v.1.0.0)

Google This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online. It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover. Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you. Usage guidelines Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying. We also ask that you:

- + Make non-commercial use of the files We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for Personal, non-commercial purposes.
- + Refrain from automated querying Do not send automated queries of any sort to Google's System: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + Maintain attribution The Google's "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + Keep it legal Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe. About Google

Book Search Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>

Google A propos de ce livre Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne. Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public. Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains. Consignes d'utilisation Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées. Nous vous demandons également de: + Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial. + Ne pas procéder à des requêtes automatisées N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter Nous encourageons pour la réalisation de ce type de

travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile. + Ne pas supprimer l'attribution Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas. + Rester dans la légalité Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère. A propos du service Google Recherche de Livres En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse <http://books.google.co.il>

BIBLIOGRAPHIC RECORD TARGET Graduate Library
University of Michigan Préservation Office Storage Number: ACV6439
ULFMTBRTaBLmT/C DT 07/19/88 R/DT 07/19/88 CC STATnunE/L1
035/1: ; | a (RLIN)MIUG86-B83670 035/2: : [a (CaOTULAS)160651933
040: : | a RPB | c RPB 1 d MiU 041:1: lafre |hger 100:1: I a Klein, Félix, |d
1849-1925. 245:00: | a Leçons sur certaines questions de géométrie
élémentaire: | b possibilité des constructions géométriques; les polygones
réguliers; transcendance des nombres e et [pi]. (Démonstration élémentaire)
| c Rédaction française autorisée par l'auteur par J. Griess. 260: : [a Paris, (
b Librairie Nony, |cl896. 300/1: : |a99p. |bdiags. |c23cm. 500/1: : | a
Translation of Vorträge über ausgewählte fragen der elementargeometrie,
1895. 650/1:0: [aGeometry] x Problems, Famous 998: : |cDPJ | s 9124
Scanned by Imagenes Digitales Nogales, AZ On behalf of Préservation
Division The University of Michigan Libraries Date work Began: _ Caméra
Operator: _ Hosted by Google

LEÇONS SUR CERTAINES QUESTIONS GEOMETRIE
ELEMENTAIRE Hosted by Google

Hosted by Google

The text on this page is estimated to be only 7.87% accurate

F. KLEIN R O F E s; S E U R A L ' U N n' E 11 ?i L T !■; l»
mollTili MILLITIIRI POSSIBILITÉ DES CONSTRUCTIONS
GÉOMÉTIIQUES ; LES POLYGONES RÉGULIERS;
TRANSCENDANCE DRS NOMBRES n ET t.. (Dé monstralion
élémKntaire) REDACTION FRANÇAISE autorisée par l'Auteur J.
GRIESS ^VE DE l'École NonHALE suFëniEURE, DE
MATHGMARRQUTÎB AU LTCÉE D'ALiSI PARIS LIBRAIRIE NONY A;
G*» 17, Bt'K DES ÉCOLES, 17 1896 Hosted by Google

Hosted by Google

The text on this page is estimated to be only 28.68% accurate

PRÉFACE DU TRADUCTEUR L'opuscule dont M. Félix Klein a bien voulu m'autoriser à donner une traduction française, est destiné à combler dans une certaine mesure le fossé qui sépare en Allemagne l'enseignement secondaire et l'enseignement supérieur. La transition entre les deux ordres d'enseignement, au point de vue mathématique du moins, se fait plus facilement en France, grâce à l'organisation de nos classes d'Elémentaires supérieures et de Mathématiques spéciales. La plupart des matières qui font partie du programme de cette dernière classe ne s'enseignent en Allemagne que dans les Universités. Les sujets traités dans les pages suivantes ne figurent pas explicitement dans les programmes de nos grandes écoles ; pourtant ils s'y rattachent étroitement. Dans quels cas une construction géométrique est-elle possible ou impossible? Par quels moyens l'est-elle ? Qu'est-ce qu'un nombre transcendant? Y a-t-il de tels nombres? Pourquoi les nombres e et π appartiennent-ils à cette catégorie ? Autant de questions qu'on ne fait qu'effleurer, ou qu'on ne pouvait aborder, parce que leur solution exigeait la connaissance du calcul intégral. J'ai pensé qu'il ne serait pas sans intérêt, pour les professeurs et les élèves, de faire connaître de quelle façon claire et précise M. Klein répond à toutes ces questions, par

Hosted by Google

The text on this page is estimated to be only 22.47% accurate

6 PBÉFACË DU TRADUCTBIIB les moyens les plus simples.
La démonstration élémentaire de la transcendance de e est due à M.
Gordan, qui l'a publiée, sous une forme très concise, dans les
Mathematische Annalen ; M. Klein a élucidé d'une façon magistrale tous les
détails de la démonstration. En certains endroits, avec l'autorisation de
l'auteur, j'ai librement remanié le texte allemand ; à certaines
démonstrations, qui empruntaient le secours de la géométrie analytique, j'ai
substitué des démonstrations purement géométriques; la forme du Chapitre
IV [i" partie) a subi ainsi quelques légers changements. Il va sans dire que
j'ai scrupuleusement respecté l'ordre des idées et la marche des
démonstrations ; les imperfections de forme devront donc être imputées au
traducteur seul. .1. (jKÆSS. Alger, SepleiTibi-e 189j. Hosted by Google

The text on this page is estimated to be only 25.11% accurate

PRÉFACE La précision plus grande des définitions, les méthodes de démonstration plus rigoureuses dues à la science moderne sont considérées par la plupart des professeurs de gymnase comme difficiles à comprendre et d'une abstraction exagérée ; par suite elles semblent ne devoir posséder d'importance que pour le cercle restreint des spécialistes. Je pense différemment. L'été dernier, en une série de leçons de deux heures, devant un auditoire plus considérable que de coutume, j'ai eu le plaisir d'exposer ce que la science moderne nous permet d'affirmer sur la possibilité des constructions de la Géométrie élémentaire. Déjà quelque temps auparavant j'avais eu l'occasion de présenter une esquisse de ces leçons aux auditeurs du cours de vacances qui avait lieu à Göttingue pendant les vacances de Pâques ; ils y semblèrent prendre un intérêt particulier, et cette impression n'a fait que se confirmer pendant le semestre d'été. C'est pourquoi je me permets de présenter une courte rédaction de mes leçons comme écrit de fête (Festschrift), à l'assemblée de l'Association pour les progrès de l'enseignement des sciences mathématiques et naturelles, qui doit se tenir prochainement à Göttingue. Cette rédaction est due

Hosted by Google

The text on this page is estimated to be only 21.51% accurate

8 PRÉFACE à M. Tægert, professeur (Oberlehrer) à Ems ; il avait pris part au cours de vacances dont j'ai parlé; de plus j'ai pu mettre à sa disposition un cahier de notes prises par plusieurs de mes auditeurs pendant le semestre d'été et revues par moi-même. Puisse ce petit écrit sans prétention aucune faire du bien dans le sens des efforts de l'association.
GœtUngue, Pâques 1895. Hosted by Google

The text on this page is estimated to be only 24.64% accurate

INTRODUCTION Le présent opusculc doit son existence au désir de rattacher les études mathématiques de Tuniversité à celles des écoles secondaires, et d'établir entre eilles un contact plus intime que de coutume. Les leçons qu'on va lire ne sont pourtant pas destinées aux commençants, car les matières qui en font l'objet sont traitées à un point de vue plus élevé que celui oii on se place dans l'enseignement élémentaire. Par contre, elles ne supposent que peu de connaissances préliminaires. Il ne sera fait usage que des éléments de l'analyse, par exemple du développement en série de la fonction exponentielle. Nous allons traiter des constructions géométriques ; notre objet ne sera pas la recherche de la solution qui convient à chaque cas particulier, mais plutôt le problème de la possibilité du de l'impossibilité d'une solution géométrique. Trois problèmes, qui ont déjà fait l'objet des recherches des géomètres anciens, nous intéresseront d'une façon particulière. Ce sont : 1° Le problème de la duplication du cube, appelé aussi le problème de Délos; 2° La trisection ou division en trois parties égales d'un angle quelconque ; 3° La quadrature du cercle, c'est-à-dire la construction de Tt. Les géomètres anciens ont vaiucment essayé de résoudre Hosted by Google

The text on this page is estimated to be only 27.40% accurate

10 INTRODUCTION ces problèmes avec la règle et le compas, et c'est précisément parce que leur solution semblait exiger l'intervention de moyens d'un ordre plus élevé, que ces questions sont devenues célèbres, nous montrerons en effet qu'il est impossible d'en trouver une solution avec la règle et le compas. L'impossibilité du troisième problème n'a été démontrée qu'à une époque relativement récente. Celle du premier et du second résulte implicitement de la théorie générale de Galois, telle qu'on la trouve développée aujourd'hui dans les traités d'algèbre supérieure. Mais il n'en existe pas de démonstration explicite, sous forme élémentaire, si jetais abstraction des livres d'enseignement de Petersen, qui me semblent d'ailleurs remarquables sous bien d'autres points de vue. Insistons d'abord sur la différence entre constructions pratiques et constructions théoriques. S'agit-il de construire un cercle divisé pour un instrument de mesure, cette opération ne se fait en réalité que par tâtonnements. La division exacte du cercle en parties égales (par la règle et le compas) n'était autrefois possible que pour les nombres 2, 3, 4 et leurs divers multiples. Gauss y a ajouté d'autres cas en montrant la possibilité de la division en p parties, lorsque p est un nombre premier de la forme $4n+1$ et l'impossibilité de la division dans tous les autres cas. La pratique ne peut tirer aucun profit de ces résultats ; les considérations de Gauss ont une signification purement théorique ; il en est de même des développements qui font l'objet de ces leçons. Le premier problème que nous nous proposons est le suivant : Quels problèmes peut-on ou ne peut-on pas construire géométriquement ? Hosted by Google

The text on this page is estimated to be only 25.82% accurate

INŮUOnuCTIOX 11 Précisons d'abord le sens du mot » construire », et à cet effet indiquons les InstrumcnLs dont nous nous servirons le cas échéant. Ce sont : V La règle et le compas ; 2" Le compas seul ; 3° La règle seule ; A" D'autres appareils que nous joindrons à la ri'glt ot au compas. Il est singulier que la géométrie élémentaire ne suffise pas pour répondre à la question posée. Le secours de l'algèbre et de l'analyse devient nécessaire, et il faut par suite nous demander comment s'exprime dans leur langue l'emploi de la règle et du compas pour les constructions. Ce nouveau tour qu'il faut donner à nos idées tient à ce que la géométrie élémentaire ne possède pas de méthode générale, pas d'algorithme, comme les deux sciences que nous venons de nommer. Dans l'analyse on trouve d'abord les opérations rationnelles, addition, soustraction, multiplication et division. Deux longueurs étant données, on sait immédiatement f;xéculer5ur elles, au moyende quatrièmes proportionnelles, ces différentes opérations, à condition de joindre aux longueurs données une longueur unité, dans le cas de la multiplication et de la division. Nous trouvons ensuite les opérations irrationnelles; elles se divisent en algébriques et transcendantes. Les opérations algébriques les plus simples sont l'extraction des racines carrées, des racines d'indices supérieurs à 2, la résolution des équations algébriques non résolubles par radicaux, comme celles du 5° degré et celles de degré supérieur. Comme on sait construire /ÔJ, on saura donc construire, avec la règle et le compas, les résultats de toutes les opérations irrationnelles où il n'entre que des racines carrées. Donc toute formule rationnelle, oune renfermant que des Hosted by Google

The text on this page is estimated to be only 26.25% accurate

la INTRODUCTION radicaux carrés, peut être construite avec la règle et le compas. D'autre part, toute construction géométrique isolée, qui revient à l'intersection de deux droites, d'une droite et d'un cercle, de deux cercles équivaut à une opération rationnelle ou à l'extraction d'une racine carrée (*]. La construction (par la règle et le compas} des irrationnelles d'ordre supérieur est donc impossible, à moins qu'on ne puisse les ramener à l'extraction d'une suite de racines carrées. Il va de soi que dans toutes les constructions le nombre des opérations doit être limité. De ce qui précède résulte donc ce théorème fondamental : La condition nécessaire et suffisante pour qu'une expression analytique puisse être construite avec la règle et le compas, est qu'elle se déduise des grandeurs connues par des opérations rationnelles ou par des racines carrées en nombre fini. Par conséquent, pour démontrer qu'une grandeur ne peut être construite avec la règle et le compas, il suffira de faire voir que l'équation qui la fournit n'est pas résoluble par un nombre fini de racines carrées. A plus forte raison en sera-t-il ainsi lorsque l'équation du problème n'est pas algébrique. Un nombre qui ne vérifie aucune équation algébrique, s'appelle un nombre transcendant. Ce cas se présente pour les nombres e et i , ainsi que nous le montrerons. l'intersection de deux droites ■ telle d'une droite et d'un cercle, h celle du système

Hosted by Google

The text on this page is estimated to be only 19.12% accurate

PREMIÈRE PARTIE LA POSSIBILITÉ DE LA
CONSTRUCTION DES EXPRESSIONS ALGÈBRIQUES CHAPITRE 1
Équations algébriques résolubles par radicaux carrés. Les propositions
suivantes, tirées de la théorie des équations algébriques, sont probablement
connues du lecteur; nous allons pourtant les démontrer brièvement, afin de
mieux faire percevoir l'ensemble des idées. Si la grandeur à construire x ne
dépend que d'expressions rationnelles et de racines carrées, elle est racine
d'une équation irréductible $f(x) = 0$, dont le degré est toujours une
puissance de 2. 1. Pour avoir une idée nette de la structure de la grandeur X ,
supposons qu'elle soit de la forme $\sqrt[n]{\frac{a_1 + \sqrt{a_2} + \sqrt[3]{a_3} + \dots + \sqrt[n-1]{a_{n-1}}}{d}}$

The text on this page is estimated to be only 19.67% accurate

14 PUEMIKRE l'AKTIE 3. fi étant l'ordre maximum, aucun terme ne peut présenter plus de j radicaux superposés. 4. L'expression $\frac{v^2 - f - v^{ri}}{6}$ semble renfermer trois termes différents du premier ordre ; mais comme elle ne dépend en réalité que de deux termes distincts. Nous supposons que cette réduction a été faite dans tous les termes de x , de telle sorte que, parmi les différents termes d'ordre $\leq x$, aucun ne peut s'exprimer rationnellement en fonction des autres termes d'ordre $\leq x$ ou d'ordre inférieur. Nous ferons la même hypothèse sur les termes d'ordre $\leq X - 1$ ou d'ordre inférieur ; ces termes peuvent d'ailleurs se présenter explicitement ou implicitement. Cette hypothèse, évidemment très naturelle, est d'une grande importance pour les conclusions ultérieures. 5. Forme normale de x . Si l'expression a est une somme de termes de dénominateurs différents, on les réduira au même dénominateur ; X se présente alors sous la forme du quotient de deux fonctions entières. Soit $\frac{1}{Q}$ un des termes d'ordre $\leq n$; il ne peut figurer dans a que sous forme explicite, puisque $j-i$ est l'ordre maximum. D'autre part les puissances de Q s'expriment en fonction de $\frac{1}{Q}$ et de Q qui est un terme d'ordre inférieur à $\frac{1}{Q}$. La valeur de x peut donc se ramener à la forme $\frac{g + WQ}{c^d}$. c^d , a , 6 , c , d ne contiennent plus que $(n - 1)$ termes d'ordre $\leq i$ et les termes d'ordre inférieur. Multipliant les deux termes par $c - d^j$, le dénomi

The text on this page is estimated to be only 20.41% accurate

ÉQUATIONS RÉSOLVABLES PAR RADICAUX CARRÉS 13

Le polynôme ne contient plus $\sqrt[n]{Q}$; il vient $c^{\frac{1}{n}} = d^{\frac{1}{n}} Q^{\frac{1}{n}}$ et p ne renferme plus que $(n-1)$ termes d'ordre $\leq u$. Si on avait considéré un autre terme d'ordre n , par exemple $\sqrt[n]{0}$, on aurait de même pu ramener la valeur de X à la forme $X = \frac{aH^n + b}{c}$, etc. On peut donc transformer x de manière que cette expression ne renferme un terme donné d'ordre j qu'à son numérateur et qu'elle ne le contienne que linéairement. Remarquons d'ailleurs que, dans cette transformation, peuvent figurer les produits des termes d'ordre p . En effet, a et p dépendent encore de $i-1$ termes d'ordre $\leq i$. On pourra donc faire en sorte que $a = a_0 + a_1 \sqrt[n]{Q} + \dots + a_{i-1} \sqrt[n]{Q}^{i-1}$, $p = p_0 + p_1 \sqrt[n]{Q} + \dots + p_{i-1} \sqrt[n]{Q}^{i-1}$, et par suite $1 = (a_0 + a_1 \sqrt[n]{Q} + \dots + a_{i-1} \sqrt[n]{Q}^{i-1})^n + (p_0 + p_1 \sqrt[n]{Q} + \dots + p_{i-1} \sqrt[n]{Q}^{i-1})^n$. 6. Nous procéderons d'une façon analogue pour les différents termes d'ordre $i-1$, qui se présentent explicitement dans Q , $Q^{\frac{1}{n}}$, etc.; chacune de ces quantités devient alors une fonction linéaire et entière par rapport au terme d'ordre $i-1$ considéré. Nous passons ensuite aux termes d'ordre inférieur, et nous finissons ainsi par mettre x et ses termes des divers ordres sous forme de fonctions rationnelles, linéaires et entières, par rapport aux radicaux qui y figurent explicitement. Nous dirons alors que x est mis sous la forme normale. 7. Soit m le nombre total des radicaux carrés indépendants $\{i\}$ qui figurent dans cette forme normale. En attribuant le double signe à ces radicaux et les combinant de toutes les manières possible, nous obtiendrons un système

The text on this page is estimated to be only 21.56% accurate

16 PREMIERE PARTIE de 2^{me} valeurs, $\sqrt{7}$, $-\sqrt{7}$, $\sqrt{10}$, $-\sqrt{10}$, $\sqrt{x}$, $-\sqrt{x}$, qui seront désignées par le nom de valeurs conjuguées. Nous allons chercher une équation admettant ces valeurs conjuguées comme racines. 8. Ces valeurs ne sont pas nécessairement toutes distinctes; car, si on a par exemple cette expression ne change pas quand on change le signe de 9. Formons le polynôme $F(x) = (x - \sqrt{7})(x + \sqrt{7}) \dots (x - \sqrt{x})(x + \sqrt{x})$. L'équation $F(x) = 0$ admet évidemment pour racines les différentes valeurs conjuguées; elle est du degré 2^{me}, mais peut admettre des racines multiples (8). Les coefficients du polynôme $F(x)$, ordonné par rapport à x , sont rationnels. Changeons en effet le signe d'un des radicaux carrés, ce qui a pour effet de permuter deux racines, $\sqrt{x}$ et $-\sqrt{x}$ par exemple, puisque les racines de $\forall(x)$ sont précisément toutes les valeurs conjuguées. Comme ces racines n'entrent dans $F(x)$ que sous la forme du produit $(x - \sqrt{x})(x + \sqrt{x})$, on ne fait que changer l'ordre des facteurs de $F(x)$; donc ce polynôme ne change pas. $F(x)$ reste donc invariable quand on change le signe de l'une quelconque des racines carrées; il ne contient donc que leurs carrés; il en résulte bien que ses coefficients sont rationnels, 10. Lorsque l'une quelconque des valeurs conjuguées vérifie une équation à coefficients rationnels $f(x) = 0$, il en est de même de toutes les autres. Hosted by Google

The text on this page is estimated to be only 18.71% accurate

ÉLÉMENTS DE THÉORIE DES RADICAUX IRRATIONNELS 17

$f(x)$ n'est pas nécessairement égal à $F(x)$, et peut admettre d'autres racines en dehors des x_i . Soit $a_j = \alpha_j + \beta_j \sqrt[n]{Q}$ une des grandeurs conjuguées, $\sqrt[n]{Q}$ un terme d'ordre i ; α_j et β_j dépendent encore des autres termes d'ordre j et des termes d'ordre inférieur. Il existe alors une grandeur conjuguée $x_j = \alpha_j - \beta_j \sqrt[n]{Q}$. Exprimons que x_j satisfait à l'équation $f(x) = 0$. Mettons $f(x_j)$ par rapport à $\sqrt[n]{Q}$ sous la forme normale $\phi(a_j) = A + B\sqrt[n]{Q}$; cette expression ne peut être nulle que sous les conditions simultanées $A = 0$, $B = 0$; s'il en était autrement, on aurait pu exprimer $\sqrt[n]{Q}$ rationnellement en fonction des termes d'ordre j et des termes d'ordre inférieur contenus dans A et B , ce qui est contraire à l'hypothèse de l'indépendance de toutes les racines carrées (4). Mais on a évidemment $\phi(\alpha_j) = A - B\sqrt[n]{Q}$; si donc $f(x_j)$ est nul, il en est de même de $f(x_i)$. D'où cette première proposition : Si la grandeur x_j satisfait à l'équation $f(x) = 0$, il en est de même de toutes les valeurs conjuguées qui se déduisent de x_j par le changement de signe de l'un des termes d'ordre j . La démonstration se fait d'une manière analogue pour les autres valeurs conjuguées. Supposons par exemple (ce qui ne restreint pas la généralité du raisonnement) que l'expression X ne dépende que de deux termes d'ordre n , $\alpha_j \sqrt[n]{Q} + \beta_j \sqrt[n]{Q}$. $f(x_j)$ pourra être ramenée à la forme normale suivante : Hosted by Google

The text on this page is estimated to be only 18.17% accurate

18 l'iKMKlu: l'AiiTIE Si X répondait do plus de doux termes d'ordre n. il faudrait adjoindre à l'expression précédente un plus grand nombre de termes de structure analogue. L'équation (a) n'est possible que si l'on a séparément (6) $p = 0$, $\hat{i} = 0$, $r = 0$, $\cdot\langle = 0$. sans quoi $\wedge$ et $\wedge(?)$ seraient liés par une relation rationnelle, ce qui est contraire à l'hypothèse {i}. Soient maintenant i/t et vW les termes d'ordre $jx - 1$ dont dépend x ; ils figurent dans $\wedge$, g , r , s ; on pourra donc mettre ces quantités sous la forme normale par rapport à $v'R$ et $\wedge R$ (en supposant qu'il n'y en ait que deux). On obtient ainsi des équations de la forme (c) $p = A, -4/-iyK' + mn/R^{\wedge} +)?iv'RR' \wedge 0$ et d'autres équations analogues pour q , r , s . L'hypothèse, déjà plusieurs fois utilisée, de l'indépendance des radicaux, nous donne de suite les conditions $kl = 0$, $;; = 0$, $)M, = 0$, $n, = 0$, etc. Il en résulte que les équations (c) et par suite aussi $f(x) = 0$, sont vérifiées, lorsque, au lieu de x , on emploie les valeurs conjuguées qui s'en déduisent par les changements de signe de $v'R$ et $\wedge/W$. Donc : L'équation $f(x) = 0$ est aussi vérifiée par toutes les valeurs conjuguées qui se déduisent de x , en changeant le signe de l'un des termes d'ordre $[i - 1$. Le même procédé de démonstration s'applique évidemment aux termes d'ordre $1^{\wedge} - 2$, $jA - 3$, etc., ce qui prouve entièrement la proposition énoncée. H. Nous venons de considérer deux équations $\forall(x) = 0$ et $f(x) \wedge 0$, à coefficients rationnels, admettant toutes deux comme racines les quantités a -. Hosted by Google

The text on this page is estimated to be only 18.74% accurate

ÉOLATIOXS KftSULUBLES PAU BAn[i;AU\ CAUKKS 19
F(3:) est du degré 2TM, et peut avoir des racines multiples; dx) peut avoir
d'autres racines que les Xi. Soit

The text on this page is estimated to be only 22.73% accurate

20 PREMIÈRE PARTIE IV. Soit M le nombre des a^i , qui ont des valeurs distinctes, et soient $X_1, X_2, \dots, X_n$, ces quantités ; on aura En effet, l'équation $f(x) = 0$ admet pour racines les quantités $x_1, \dots, x_n$; elle n'admet pas de racines multiples; le polynôme $\phi(w)$ est donc déterminé à un facteur constant près, dont la valeur n'importe pas pour l'équation $\phi(x) = 0$. $\phi(x)$ est la seule équation irréductible à coefficients rationnels admettant les X_i pour racines. Car si $f(x) = 0$ était une autre équation rationnelle irréductible admettant comme racine a , et par suite toutes les quantités X_i , $f(x)$ devrait être divisible par $\phi(x)$ et par suite ne serait pas irréductible. 13. Comparons maintenant $F(a)$ et $\phi(x)$. — Ces deux polynômes ont pour seules racines les x_i , et en outre $\phi(x)$ n'admet pas de racines multiples. $\phi(x)$ est donc divisible par $\phi(x) : Y(x) = \phi(x) \cdot \phi(x)$. $F(a)$ a nécessairement ses coefficients rationnels, comme étant le quotient de la division de $F(a)$ par $\phi(a)$. Si ce n'est pas une constante, ce polynôme admet des racines appartenant à $\phi(x)$; en admettant au moins une, il les admettra toutes (10). Donc $\phi(x)$ est aussi divisible par $\phi(x)$, et si $Y(x)$ n'est pas une constante, le même raisonnement est encore applicable. Le degré des polynômes quotient s'abaisse à chaque opération ; par suite au bout d'un nombre limité de divisions on tombe sur une égalité de la forme $\phi(x) = C \cdot \phi(x)$. Hosted by Google

The text on this page is estimated to be only 19.66% accurate

ÉQUATIONS RÉSOLUBLES PAR RADICAUX CARRÉS 21

Multipliant toutes les égalités obtenues membre à membre, il vient $F(a_i) = C \cdot [iW]$. Donc : Le polynôme $V(x)$ est une puissance d'un polynôme de degré minimum $o(x)$, abstraction faite d'une certaine constante. 14. Nous pouvons maintenant nous rendre compte du degré de $f(x)$. $F(x)$ est du degré 2^n ; c'est de plus la n puissance de $0(37)$, lequel est du degré M ; il en résulte que Donc M est une puissance de 2 ; remarquons qu'il en est de même de n . D'où ce théorème : Le degré de l'équation irréductible à coefficients rationnels, à laquelle satisfait une expression ne dépendant que de radicaux carrés, est une puissance de 2, 15. Comme, d'autre part, il n'existe qu'une seule équation irréductible à coefficients rationnels, vérifiée par tous les a_i ; il en résulte la réciproque suivante : Si une équation irréductible n'est pas du degré 2, elle ne peut certainement pas être résolue par radicaux carrés. Hosted by Google

The text on this page is estimated to be only 23.59% accurate

CHAPITRE I; M Le problème de Délos et la trisection d'un angle quelconque. 1. Appliquons les théorèmes du chapitre précédent au problème de Délos ou de la duplication du cube, étant donné un cube dont l'arête est prise pour unité de longueur, il s'agit de trouver l'arête x d'un second cube dont le volume soit double de celui du premier, L'équation du problème est évidemment $x^3 = 2$. Cette équation est irréductible ; car si elle ne l'était pas, son premier membre pourrait se décomposer en facteurs rationnels, dont l'un au moins serait du premier degré en x . Il existerait donc une valeur rationnelle pour x , ce qui n'est pas. D'autre part, le degré de cette équation n'est pas de la forme 2^m ; donc ses racines ne peuvent s'exprimer uniquement à l'aide de racines carrées en nombre fini. Par suite il est impossible de les construire, c'est-à-dire de résoudre le problème proposé avec la règle et le compas. 2. Considérons maintenant l'équation plus générale $x^3 - 3px^2 + 3qx - 1 = 0$, p désignant un paramètre, qui peut être une quantité complexe de la forme $a + bi$. Cette équation traduit analytiquement, ainsi que nous le verrons, aussi bien le problème de la multiplication du cube que celui de la trisection d'un angle quelconque. Il s'agit de reconnaître si cette équation est irréductible,

Hosted by Google

The text on this page is estimated to be only 21.27% accurate

i DU CUBE ET TRISECTION DK L ANGLE 23 c'est-à-dire si l'une de ses racines se présente sous la forme d'une fonction rationnelle de α). Remarquons en passant que l'irréductibilité d'une expression dépend en général des grandeurs qu'on suppose connues. Dans l'équation $\alpha^2 - 2 = 0$, il s'agit de grandeurs numériques ; on se demande si α peut avoir une valeur numérique rationnelle. Pour l'équation $x^3 - \alpha = 0$, on se demande si une racine de cette équation peut être représentée par une fonction rationnelle de α). Dans le premier cas, le domaine de rationalité comprend l'ensemble des nombres rationnels ; dans le second cas, il est formé par les fonctions rationnelles d'un paramètre. Ce paramètre étant supposé indépendant, on voit immédiatement qu'aucune expression de la forme m dans laquelle α est

The text on this page is estimated to be only 18.39% accurate

24 PREMIÈRE PARTIE en représentant par ω et ω^2 les racines cubiques imaginaires de l'unité, — — $i + \sqrt[3]{t^2 - 1} - \sqrt[3]{t^2 - 1}$ En prenant pour domaine de rationalité l'ensemble des fonctions rationnelles de r , on sait, d'après un raisonnement précédent (2), que l'équation est irréductible. Par suite le problème de la multiplication du cube n'est pas susceptible, en général, d'une solution géométrique avec la règle et le compas. II. Les racines de l'équation $i.f) = 0$ sont, d'après la formule de Moivre, Ces racines se représentent géométriquement (§. 2) par les sommets d'un triangle équilatéral, inscrit dans un cercle de rayon 1, ayant l'origine pour centre. La figure montre qu'à la racine x , correspond l'argument $-\frac{\pi}{3}$ l'équation considérée est donc l'expression analytique du problème de la trisection de l'angle. Si l'équation $\cos 3\theta = 0$ Hosted by Google

The text on this page is estimated to be only 19.23% accurate

DUPLICATION DU CUBE EÏ TRISECTION DIL L ANGLE 30
était réductible, l'une au moins de ses racines devrait pouvoir être
représentée par une fonction rationnelle de $\cos \phi$ et $\sin \phi$. Par suite sa
valeur ne changerait pas en remplaçant ϕ par $\phi + 2\pi$. Mais, si on opère ce
changement par une variation continue de l'angle ϕ , on voit que les racines
 x_1, x_2, x_3 se permutent circulairement. Par conséquent nulle racine ne peut
être représentée par une fonction rationnelle de $\cos \phi$ et de $\sin \phi$. Donc
l'équation proposée est irréductible, et, comme son degré n'est pas de la
forme 2^n , elle n'est pas résoluble à l'aide de racines carrées en nombre fini.
La trisection de l'angle ne peut donc se faire avec la règle et le compas.
Cette démonstration, de même que le théorème général, n'est valable que si
 ϕ est un angle arbitraire; pour certaines valeurs particulières de ϕ la
construction peut se trouver possible. Hosted by Google

The text on this page is estimated to be only 17.99% accurate

CHAPITRE ni La division du cercle en parties égales. 1. La division du cercle en n parties égales a fait l'objet des recherches des anciens ; on sait depuis longtemps résoudre le problème lorsque n est égal à l'un des nombres 2^* , 3, 5 ou à l'un de leurs multiples communs. Dans ses *Disquisitiones arithmeticae*, Gauss a augmenté le nombre des entiers pour lesquels la solution est possible, en montrant que la division peut se faire pour tout nombre premier de la forme (1) $p = 2^{2^k} + 1$, et qu'elle est impossible pour tous les autres nombres premiers et leurs puissances. Si, dans l'équation (1), on donne à k les valeurs 0 et 1, on trouve pour p les valeurs 3 et 5, cas qui étaient déjà connus des géomètres anciens. Pour $k = 2$, on trouve $p = 2^{2^2} + 1 = 17$; ce cas a été complètement traité par Gauss. Pour $k = 3$, on trouve $p = 2^{2^3} + 1 = 257$, qui est un nombre premier; on sait donc construire le polygone régulier de 257 cotés. Il en est de même pour $k = 4$, car $2^{2^4} + 1 = 65537$ est un nombre premier. Les valeurs 5, 6, 7 attribuées à k ne donnent pas de nombres premiers. Personne n'a encore examiné le cas de $k = 8$; il ne faut pas s'en étonner. Il a fallu en effet de

Hosted by Google

The text on this page is estimated to be only 23.07% accurate

Librairie NONY & C", rue des Écoles, 17, à Paris. Vient de paraître : QUESTIONS D'ALGÈBRE À L'USAGE DES ÉLÈVES DES CLASSES DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES ET DES CANDIDATS AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE, NORMALE, CENTRALE, ETC. PAR Georges MAUPIN Avec une Préface M. C.-A. LAISANT i-S-'iln Vni-'2'.)2 Le livre de M. Maupin répond à un besoin qui nous a été maintes fois signalé ; les élèves de mathématiques spéciales manquaient d'exercices d'algèbre. Il existe, à la vérité, de bons recueils d'exercices de calcul infinitésimal, mais ils s'adressent plutôt aux candidats à la licence, et l'élite des classes de mathématiques spéciales peut seule les consulter avec fruit. L'algèbre tend du reste à prendre de jour en jour, et à juste titre, une importance plus considérable dans la préparation aux Ecoles du gouvernement, et malheureusement l'étendue des programmes ne permet pas au professeur de s'appesantir sur les applications si variées de cette science. Il était, par suite, devenu nécessaire de grouper et de coordonner un certain nombre de problèmes pratiques et de questions d'examen pour en faire un livre classique, à la portée de tous les élèves des classes de mathématiques spéciales. M. Maupin s'est consacré à cette tâche, et il a eu le rare bonheur de présenter aux élèves un ouvrage qui, tout en restant surtout un Manuel de préparation, s'est trouvé éminemHosted by Google

The text on this page is estimated to be only 20.51% accurate

ment propre à éveiller le goût des spéculations mathématiques, C'est que, comme le dit M. faisant dans son- intéressante préface, l'auteur, en serrant de très près les matières du programme, n'a pas craint de ménager « ça et là quelques vues sur les horizons plus lointains ». Les Questions d'Algèbre seront encore très goûtées des étudiants de première année des Facultés. Les chapitres X et XI notamment conduisent à une foule de résultats se rapportant aux cours de licence. Ces matières, situées pour ainsi dire sur la lisière des programmes des lycées et de ceux des Facultés, conviennent fort bien pour l'initiation des étudiants aux problèmes élevés de l'analyse infinitésimale. Le livre de M. Maupin renferme 125 questions résolues très complètement et très simplement ; il livre à la sagacité des lecteurs plus de 1300 exercices de difficulté différente se rapportant au cours de mathématiques spéciales. Hâtons-nous d'ajouter que, même pour ces exercices proposés, la tâche sera facilitée par de rapides indications dont l'auteur s'est avec raison montré prodigue. . Voici les titres des dix-sept chapitres: Chapitre I: Division algébrique; vérification des formules; analyse combinatoire ; imaginaires ; logarithmes, Chapitre II ; Convergence des séries ; sommation dans quelques cas simples. Chapitre III : Infiniment petits. Chapitre IV : Calcul des dérivées et des différentielles. Chapitre V; Application de la théorie des dérivées à la recherche des maxima et des vraies valeurs. Chapitre VI : Déterminants; équations linéaires ; décomposition des formes quadratiques en carrés. Chapitre VII : Construction des courbes dont l'équation est résoluble par rapport à une des variables. Chapitre VIII: Décomposition des fractions rationnelles en fractions simples. Chapitre IX ; Recherche des fonctions primitives et des intégrales indéfinies. Chapitre X : Calcul des intégrales définies. Chapitre XI : Développement en série et en produits infinis. Chapitre XII: Relations entre les coefficients et les racines d'une équation ; transformation et abaissement des équations; fonctions symétriques; élimination. Chapitre XIII : Application des théorèmes de Descartes, de Rolle, de Budan et Fourier, de Sturm ; recherche des racines commensurables et des racines égales ; quelques équations qu'on sait résoudre. Chapitre XIV : Applications géométriques du calcul infinitésimal. Chapitre XV : Fractions continues. Chapitre XVI: Méthodes

d'approximation; théorie des différences; formules d'interpolation. Chapitre XVII: Calcul des probabilités. Hosted by Google

The text on this page is estimated to be only 17.49% accurate

Librairie NONY & C[^]*, rue des Ecoles, }7, à Paris. Vient de paraître : LEÇONS COÛRDOINÉES TAK&EITIELLES G. PAPELIER
pnOFE[^]?r,un de mathismatiooes aPÉ(^Ai.ES .w i,Yi:iiE n'onLÉiNS Avec
une Pr'éfaoe M. 1'. APPELL PiiiiMiEUE rAitïiii : GéumcHrie plane, 1 vol.
iii-8" ... 3 fr. Seconoë partie : Géométrie dans l'espace. 1 vol, in-S". 5 fr. Cet
ouvrage s'adresse aux élèves des mathématiques spéciales, aux candidats
aux grandes écoles du gouvernement et à l'agrégation, en un mot h tous
ceux qui peuvent avoir à résoudre un exercice de géométrie analytique. On
sait quels services peut rendre l'emploi des coordonnées tangentielles dans
un grand nombre de questions ; il nous suffira de citer les problèmes posés
au concours général en 1889 et en 1894, à l'agrégation en ISS-t, etc.,
lesquels se traitent .fort simplement en utilisant les coordonnées
tangentielles, mais dont les solutions seraient fort compliquées si l'on était
réduit aux méthodes de la géométrie ponctuelle. Le cours de mathématiques
spécia es est tellement chargé que la plupart des professeurs ne peuvent
s'étendre longuement sur les coordonnées tangentielles ; ils se bornent à en
présenter les points essentiels. Le but de ce livre est de compléter sur ce
sujet le cours du professeur. On n'y suppose connus que les éléments de la
Hosted by Google

The text on this page is estimated to be only 13.84% accurate

géométrie analytique, on a inÉme suivi pas à pas les méthodes connues, c'est-à-dire que cet ouvrage peut être lu aisément par les élèves les plus faibles de mathématiques spéciales. On le trouvera peut-être un peu long, on y rencontrera bien des redites, mais il ne faut pas oublier que ce qu'on gagne en concision, on peut le perdre en clarté. L'auteur a pensé que le meilleur moyen d'être utile à la majorité des élèves était de rendre aisée la lecture de son ouvrage, afin de ne pas exiger trop d'efforts de la part d'élèves qui ont déjà d'autre part tant d'occupations. Dans le courant du livre se trouvent de nombreux exercices qui sont des applications immédiates des théories exposées; à la suite de chaque chapitre sont proposées des questions variées, les unes entièrement résolues, les autres suivies d'une indication sur la marche à suivre.

lUHLh DEb LHiriTREh Geometne plane
Le point i_t 1 limtB — teneialile sui les ouilj.'s i>t piintiju th. dm litL —
Position dimo couibe par rappoit a ses t'uigen.tes — Tnagentei et nDimaies
— Olasaflentioii des coutbea de deuxième classe — Pôles et linl!ute« —
Centre diamèttea et aies — Réduction de léquition génénle lu becond degie
— Jojers et diiectri^s — l ngentes tommunes n dent conuiues Cuniiues ms
iitps ilins le quadriekteie de*- fnngente'. uom munes 'i deiui, coniques —
Ombilics et dioites qui ont même pâle jii rippoit "i déni, coniques —
Coordonnées trilatÈief. — Picprlêti^s de ieot et de liois coniques Géométrie
dans l espace Le point et li dtoit — Génci dites bhi les suttaces — Surtitte'.
dei loppible" et p m i^e de iuidité — Plans langent et normales — Cliiti
flication des quaiînques. — Pôles et plans polaires. — Centre, plans
diamétraux et diamètres, plans principaux et axes. — Réduction de
l'équation, générale du second degré. — Coordonnées tétraédriques et
équations générales de quadriques. — Foyers et surfaces liomofocales. —
Propriétés de dens c|uadri(|uos. Vient de paraître : JjV\ini-i •iin lu iivitlutuion
al)|élii-i4|ne des étiialioiis, par H. VOLiT, iincien eleve de lctole normiale
supérieure, professeur adjoint !i la Fai utté des sciences de Naiicy, avec une
préfaee de M. JULES TAFiSERĪ, diiecteur des études scientifiques il l'école
normale supérieure. — Un Tol gr. in 8° 5 fr. Al>réijé de la tliëorle des
loDCttons elliptltinea, à l'usage des candidats ù. la litence es sciences
mathématiques, par Cuikles HENRY, maltie de Lonféiences à l'école
pratique des hautes études, bibliothécaire ^ la boibonne membre de la
Société mathématique do France. — Un i,,l inK" » fr. Hosted by Google

The text on this page is estimated to be only 18.60% accurate

DIVISION DU CERCLE EN PARTIES ÉGALES 2i patients efforts et une ingéniosité singulière pour démontrer que les grands nombres correspondant à $n = 5, 6, 7$ ne sont pas premiers. Il est donc possible que $n = A$ soit le dernier nombre pour lequel une solution soit possible. Richelot a publié un travail considérable sur le polygone régulier de 237 côtés, dans le Journal de Crelle, t. IX, 1832, p. 1-26, 146-151, 209-230, 337-356. Son mémoire est intitulé : De resolutione algebraica equationum $x^n - 1 = 0$, sive de divisione circuli per trisectionem anguli septies repetitam in partes 237 inter se lequales commensurabilis coronata. M. Hermès, professeur à Lingén, a consacré dix ans à des recherches sur le polygone régulier de 25537 côtés; il a examiné avec soin toutes les racines qui se présentent d'après la méthode de Gauss. L'ensemble considérable de ces recherches est conservé dans les collections du séminaire mathématique de Göttingue. On peut se reporter à une communication de M. le Professeur Hermès dans le n° 3 des " Göttinger Nachrichten " (1894). 2. On peut restreindre le problème de la division du cercle en n parties égales au cas où n est un nombre premier p ou une puissance p^k d'un tel nombre. En effet, si n est un nombre composé, et si i et v sont des facteurs de n premiers entre eux, on peut toujours trouver des entiers a et b positifs ou négatifs, tels que $i^a + v^b = n$. Si $i^a + v^b = n$, on peut diviser le cercle en i^a parties égales, et puis en v^b parties égales, ce qui donne n parties égales. Pour diviser le cercle en n parties égales, il suffit de savoir le diviser respectivement en i et v parties égales. Ainsi pour $n = 13$, on a

Hosted by Google

The text on this page is estimated to be only 15.94% accurate

28 PREMIERE PARTIE 3. Démontrons d'abord la proposition suivante : Lorsqu'un nombre premier est de la forme $S^h - 1$, on a nécessairement $h = S^k$. Nous nous appuierons pour cela sur le théorème de Fermât : Si p est un nombre premier, et a un entier non divisible par p , ces nombres vérifient la congruence $a^i \equiv 1 \pmod{p}$ si i est un multiple de $p - 1$. $p - 1$ n'est pas nécessairement le plus petit exposant qui, pour une valeur donnée de a , vérifie la congruence. Soit s ce moindre exposant; on démontre que s est un diviseur de $p - 1$ (*). Si en particulier s est égal à $p - 1$, on dit que a est une racine primitive de p ; remarquons en passant que pour chaque nombre premier p il y a nécessairement une racine primitive. Nous ne ferons d'ailleurs usage de cette considération que plus tard. Soient donc p un nombre premier tel que (*) $a^6 \equiv 1 \pmod{p}$ s'énonce — $1 = sq$. Hosted by Google

The text on this page is estimated to be only 15.02% accurate

DIVISION DU CERCLE V.S PARTIES ÉGALES 29 (Il $p = 2^n + 1$,
et s le plus petit entier tel que $(2) 2^s \equiv -1 \pmod{p}$). L'égalité (1) montre que
 $S^* < p$; la congruence (2) exige que $2^s > 1$; donc $s > h$. L'égalité (1) montre
que h est le plus petit entier vérifiant la congruence $(3) 2^h \equiv 1 \pmod{p}$.
De (2) et (3) on tire par division $2s - A \equiv _ \pmod{p}$; donc (4) $s \equiv k^h$,
 $s > 2/ <$. d="" part="" on="" conclut="" de="" par="" au="" cair="" ji=""
comparant="" et="" tenant="" compte="" ce="" que="" s="" est="" le=""
plus="" petit="" exposant="" v="" les="" congruences="" la="" forme=""
p="" il="" vient="" x="" conditions="" devant="" remplies="" simultan=""
a="" n="" or="" remarque="" un="" diviseur="" i="" en="" donc="" m=""
h="" qui="" suite="" une="" puissance="" nombres="" premiers="" l=""
sont="" r="" peut="" encore="" mani="" suivante="" supposons="" soit=""
divisible="" nombre="" impair="" telle="" sorte="" hosted="" by=""
google="" />

The text on this page is estimated to be only 16.57% accurate

30 l'KEMIKRLi]>AI!TIK On sait qu" Remplaçons x par 2^m ; on voit que le nombre $2^{2^m + 1}$ serait divisible par $2^m - 1$, par conséquent il ne peut représenter un nombre premier. 5. Arrivons maintenant à notre proposition fondamentale : p étant un nombre premier, la division du cercle en p parties égales, au moyen de la règle et du compas, est impossible si p n'est pas de la forme $p = 2^m - 1 = a^{2^m} + 1$. Posons $z = x - \frac{1}{x}$, traçons dans le plan de la variable s un cercle de rayon 1. Diviser ce cercle en n parties égales revient à résoudre l'équation binôme $E^n - 1 = 0$. Cette équation admet la racine $s = 1$; supprimons-la en divisant par $z - 1$, ce qui revient, géométriquement, à ne pas considérer le point de départ de la division. Il reste alors à résoudre l'équation $z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z + 1 = 0$, que nous appellerons l'équation de division. Or, quand n est égal à un nombre premier p , cette équation est irréductible (nous allons le démontrer ciaprès) ; elle ne peut donc être résolue à l'aide de radicaux carrés en nombre fini que lorsque son degré est une puissance de 2 (Chap. I, 13). Il faut donc que $n - 1 = p - 1 = 2^m$ ou bien $p = 2^m + 1$, et par suite $p = 2^{2^m} + 1$. On voit que les nombres premiers, signalés par Gauss, jouent un rôle tout particulier. Hosted by Google

The text on this page is estimated to be only 18.68% accurate

DU CERCLE EN PABTIKS ÉGALES 31 6. Reste donc à faire
voir que l'équation

The text on this page is estimated to be only 19.06% accurate

sont divisibles par q ; le premier ne l'est pas ; donc ce coefficient n'est pas divisible par q . Or le coefficient de $-ni'-i-m\sim-i-ft$ dans le premier membre est divisible par $Uaha$, c'est-à-dire par q . Donc si l'identité est vraie, il est impossible que dans chaque polynôme il existe un coefficient non divisible par q . Les coefficients de l'un au moins des polynômes sont donc tous divisibles par q . C'est là une autre impossibilité, puisque nous avons vu que tous ces coefficients sont premiers entre eux. Donc on ne peut supposer « $\sim$, et $//$, différents de 1 ; et par suite les coefficients $a^$ et Pf sont entiers . 7. L'équation de division est irréductible. Comme le coefficient de son premier terme est égal à l'unité, il suffit, d'après le lemme de Gauss, de montrer que son premier membre ne peut se décomposer en deux facteurs dont les coefficients soient entiers. Nous nous servirons à cet effet de la méthode d'Eisenstein [Journal de Crelle, 39, p. 67), qui consiste à faire la substitution Il vient alors $1.2^{\wedge} 1.2'$ Tous les coefficients du second membre, sauf le premier, sont divisibles par p ; le dernier coefficient est toujours égal à j_t qui, par hypothèse, est un nombre premier. Une expression de ce genre est toujours irréductible. En effet, s'il n'en était pas ainsi, on aurait $ix'''' + biX''''-\wedge H + lj,,,-_x-i-b,,,) ,$ les coefficients a et les coefficients h étant des nombres entiers. Hosted by Google

The text on this page is estimated to be only 18.05% accurate

DIVISION du CERCLE EN PARTIES EGALES Les termes indépendants de x devant être égaux, on a $a_{p-1} = p$; p étant un nombre premier, l'un des facteurs du premier membre doit être égal à p ; supposons donc que nous avons ensuite les coefficients des termes en x^{p-1} . Le premier membre et le second terme du second membre sont divisibles par p ; il doit donc en être de même de a_{p-2} ; comme $a_{p-1} = \pm 1$, a_{p-2} est divisible par p . Egalant ensuite les coefficients des termes en x^{p-3} , il vient qu'on conclut que a_{p-3} est divisible par p . On continuerait ainsi de proche en proche ; le coefficient du terme en x^{p-i} serait avant d'arriver à ce coefficient, on a démontré que $a_{p-i}, \dots, a_1$ sont divisibles par p ; on en conclut que a_0 doit aussi être divisible par p , ce qui est impossible puisque $a_0 = 1$. L'égalité supposée est donc impossible, et par suite l'équation de division est irréductible, lorsque p est un nombre premier. 8. Cas où n n'est pas une puissance d'un nombre premier. Soit $n = p^a \cdot q$; nous allons montrer que si p est plus grand que 2, la division du cercle en p^a parties égales est impossible. Le problème sera résolu par là même pour $a > 1$; car la division en p^a parties égales comprend évidemment la division en p parties égales. Hosted by Google

The text on this page is estimated to be only 19.24% accurate

Ai l'IIJLIKRE l'ABTEJ: L'équation de division est ici elle admet comme racines étrangères au problème celles qui conviennent à la division en p parties égales, c'est-à-dire les racines de l'équation supprimons ces racines étrangères par division ; l'équation de division devient finalement $A') = 9^{\wedge} = " \bullet$ OU bien $3^{\ast} - " - 4 - sKJ - s) H j - ; ; ' + 1 = 0$. La substitution $s \blacksquare := x - h$ la transforme en Le nombre des termes étant p , le terme indépendant de x , après développement, sera égal $k p$, et la somme aura évidemment la forme $x \{x\}$ étant un polynôme entier à coefficients entiers dont le terme indépendant vaut 1. Or, nous venons de montrer que cette somme est en général irréductible. Par conséquent la nouvelle équation de division est aussi irréductible. Le degré de cette équation est $p \{p - i\}$. D'autre part une équation irréductible n'est résoluble par radicaux carrés que lorsque son degré est une puissance de 2 ; donc un cercle n'est divisible en $p^{\wedge}$ parties égales, avec la règle et le compas, que lorsque $p = 2$; bien entendu on suppose que p est un nombre premier. Il en est de même, nous l'avons déjà remarqué, pour la division en p' parties égales quand $a > 2$. Hosted by Google

The text on this page is estimated to be only 22.29% accurate

CHAPITRE IV La construction du polygone régulier de 17 côtés.

1, Nous venons de voir que la division du cercle en parties égales, au moyen de la règle et du compas, n'est possible que pour les nombres premiers signalés par Gauss. Il y a maintenant intérêt à savoir comment la construction peut réellement être exécutée. Ce chapitre aura pour objet l'exposition élémentaire de la méthode en s'attachant en particulier au cas du polygone régulier de 17 cotés. Il n'existe pas encore de construction résultant de considérations purement géométriques ; nous sommes donc obligés de reprendre la voie indiquée par les considérations générales. D'après cela il nous faut considérer tout d'abord les racines de l'équation de division $x^{17} - 1 = 0$, et construire géométriquement l'expression formée de radicaux carrés que nous en déduirons. On sait que ces racines peuvent se mettre sous la forme $E_k = \cos \frac{2k\pi}{17} + i \sin \frac{2k\pi}{17}$ ($k = 1, 2, \dots, 16$); en posant $\zeta_k = \cos \frac{2k\pi}{17} + i \sin \frac{2k\pi}{17}$, il vient $E_k = \zeta_k$. Géométriquement ces racines sont représentées dans le plan de la variable imaginaire par les sommets d'un polygone régulier de 17 côtés, inscrit dans un cercle de rayon 1 ayant l'origine pour centre, en laissant de côté le point

Hosted by Google

The text on this page is estimated to be only 15.61% accurate

3^{fi} PBEMlftRE PARTIE origine de la division. Il est indifférent de mettre en évidence la racine h plutôt qu'une autre ; ce n'est que pour la construction qu'il est nécessaire de préciser la question et d'indiquer quel e sert de point de départ. Une fois e déterminé, l'angle correspondant à $\wedge/c$ est égal à k fois celui qui correspond à sj , ce qui détermine entièrement $e^\wedge$.

2. L'idée fondamentale de la solution est la suivante : En se servant d'une racine primitive par rapport au module 17, on peut ranger les 16 racines de l'équation dans un ordre déterminé de manière à former un cycle. Comme nous l'avons dit antérieurement, un nombre a est dit racine primitive par rapport à 17, lorsque la congruence $a'^{-i} \equiv 1 \pmod{17}$ a pour plus petite solution $-i \equiv 16$. Le nombre 3 possède cette propriété. On a en effet $3' = 3^3 = 27 \equiv 10 \pmod{17}$, $3'' = 3^{3^2} = 10^3 = 1000 \equiv 6 \pmod{17}$, $3''' = 3^{3^3} = 6^3 = 216 \equiv 5 \pmod{17}$, $3^{(4)} = 3^{3^4} = 5^3 = 125 \equiv 8 \pmod{17}$, $3^{(5)} = 3^{3^5} = 8^3 = 512 \equiv 4 \pmod{17}$, $3^{(6)} = 3^{3^6} = 4^3 = 64 \equiv 13 \pmod{17}$, $3^{(7)} = 3^{3^7} = 13^3 = 2197 \equiv 7 \pmod{17}$, $3^{(8)} = 3^{3^8} = 7^3 = 343 \equiv 16 \pmod{17}$, $3^{(9)} = 3^{3^9} = 16^3 = 4096 \equiv 9 \pmod{17}$, $3^{(10)} = 3^{3^{10}} = 9^3 = 729 \equiv 3 \pmod{17}$. Rangeons alors les 10 racines dans un ordre tel que leurs indices soient précisément égaux aux restes précédents : (1) H , Es , ha , hu , S_3 , $\hat{I}13$, S_{ii} , s , $(\pounds|i$, e , $=\blacksquare$; $=i$, $=;$, $t^\wedge$, j , $=$, $\cdot$. Remarquons que si r est le reste de 3^i , on a $3^{i+1} \equiv 3^r \pmod{17}$, donc si r' est le reste qui suit i on a de même

Hosted by Google

The text on this page is estimated to be only 20.00% accurate

POLYGONE RÉGULIER DE 17 COTÉS 37 Donc dans la suite des racines, chaque racine est le cube de la précédente. La méthode de Gauss consiste à décomposer ce cycle en sommes contenant respectivement 8, 4, 2, 1 racines correspondant aux diviseurs du nombre 16. Chacune de ces sommes s'appelle une période ; les périodes ainsi obtenues peuvent se calculer successivement comme racines de certaines équations du second degré. Le procédé que nous venons d'esquisser n'est qu'un cas particulier de celui qu'on emploie dans le cas général de la division en p parties égales. Les $p - 1$ racines de l'équation de division sont rangées cycliquement à l'aide d'une racine primitive de p ; on en forme des périodes qui se calculent comme racines de certaines équations auxiliaires (*). Le degré de ces dernières dépend des facteurs premiers de $p - 1$; ce ne sont donc pas nécessairement des équations du 2^e degré. Le cas général a été traité en détail par Gauss dans ses « Disquisitiones », et aussi par Bachmann, dans son opuscule « Théorie de la division du cercle en parties égales » {Leipzig, 1872). 3. La formation des périodes se fait de la manière suivante. On forme deux périodes de 8 racines en prenant dans le cycle (1) les racines de rang pair, puis celles de rang impair. Désignons ces périodes par ξ et η ; remplaçons pour abrégé chaque racine par son indice, nous écrirons symboliquement $\xi = 9 - H^3 - 8 + 4 + 2 - H$, $\eta = 1, 3^2 + 10 - 1 - 5 + 11 + 14 + 7 + 12 + 6$. Opérons sur ξ et η de la même manière ; nous formerons 4 périodes à 4 termes : (*) Voir la Trigonométrie de Brilot et Bouquet.—

Propriété des racines de l'équation binôme. J. G. Hosted by Google

The text on this page is estimated to be only 12.69% accurate

$y_i = 10 + 11 - f - 7 - H_6$, $y^* = 3 + 5 + 14 + 12$. Opérant enfin de même sur les y ; nous obtenons 8 périodes à 2 termes : $\ddot{y}_i = 1G + I$, $z_i =]! + 6$, $z_i = 13 + 4$, $z_i = 10 + 7$, $z_i = 13 + 2$. $z_i = S + 12$, 11 s'agit maintenant de montrer que ces diverses périodes peuvent se calculer à l'aide de racines carrées. 4. Le simple aspect de ce dernier tableau montre que la somme des restes correspondant aux racines formant une période z est toujours égale à 17. Ces racines sont donc ξ , et $h, \sim r, -2, \dots$. 2jt Toutes les périodes ; sont donc réelles, Il vient par suite CI On peut te démontrer de la manière suivante : Si on remonte des périodes s aux y , aux x , puis au cycle (1), cela revient à insérer entre les deux racines qui forment un s successivement 1, S , S , 7 termes. Si donc une de ces racines correspond au reste r fourni par 3^t , l'autre correspondra à un reste r' fourni par 3^{t+8} . Donc $r + r' = 3^{t+8} - 3^t + \dots$ (mod. 17) $3^t(t + 3^8)$ ss njt. Cette somme est donc divisible par n , et comme r et r' sont inférieurs à n il en résulte $r + r' = 0$. J. G. Hosted by Google

The text on this page is estimated to be only 18.08% accurate

$I^E \text{ RECU} \text{ l'El DE l'j COTÉS Sjl} = 2 \cos 4 \text{ — } ^\wedge . J , = ' = "' = " \gg -$
 $TT23i = 2 \cos 8 \text{ — — } - .$ On a d'ailleurs, par définition, $= 2 \cos 3 : 2$
 $\cos 3 \text{ — } ^\wedge$ de connaître la grandeur relative des différentes périodes. A cet
 effet nous emploierons l'artifice suivant. Divisons la moitié du cercle de
 rayon 1 en 17 parties égales (fig. 3), et désignons les distances du . premier
 point de division 0 aux suivants $A,, A^\wedge, \dots, A_n$ par $S,, S, ,S,T, ' * " " " ^ " ' S_n$
 étant égal au diamètre, $^\wedge$ c'est-à-dire égal $h. 2$. L'angle $OA^\wedge A^\wedge$ a même
 mesure que la moitié de l'arc OA_i , lequel vaut $-34' 1''$ a donc kr . Pour que
 cette formule soit identique à $2 \cos h$ faut que Hosted by Google

The text on this page is estimated to be only 12.09% accurate

-M) PREMIÈRE PARTIE En donnant à k les valeurs 1, 2, 3, 4, 5, (i, 7, 8, on trouve pour k les valeurs 13, 9, 3, 1, -3, -7, -11, -15. Donc S_k est une suite arithmétique de raison -4. La figure montre que S_k^* croît avec l'indice k ; donc l'ordre de grandeur croissant des périodes T_k est D'autre part la corde AA^* , sous-tend p divisions de la demi-circonférence et vaut Sp ; le triangle OAA^* montre alors que et a fortiori $S_{k+1} - S_k > 0$, $S_{k+2} - S_{k+1} > 0$, $S_{k+3} - S_{k+2} > 0$, $S_{k+4} - S_{k+3} > 0$, $S_{k+5} - S_{k+4} > 0$. Donc Enfin on voit de même que 6. Nous nous proposons maintenant de calculer $\alpha_k = 2 \cos \frac{\pi}{k}$. Ce calcul fait et cette quantité construite, il sera aisé d'en déduire le côté du polygone régulier de 17 côtés. Hosted by Google

The text on this page is estimated to be only 15.67% accurate

polygone régulier de 17 cotés 41 Associons z , à la période Z_i qui forme avec elle la période y_i ; on a d'abord $z^{-Z_i} = y_i$. Cherchons maintenant à calculer $s, S_3, z, z_i = (16-H-l)(13+4)$; dans ce calcul symbolique, le produit k^p représente en réalité par conséquent il doit se représenter symboliquement par k^{-j-p} , en ayant bien entendu soin de retrancher 17 de k^{-j-p} chaque fois qu'on le peut. Il vient ainsi $3 \cdot \hat{i} = 12+3-1-14-H_5 = \hat{i}/j$. Donc S_i et $z \rightarrow$ sont les racines de l'équation du 2^e degré d'où, puisque $i > z$, $y_i - I^{-\hat{y}_i} = 4i/i \cdot 1/ = 1/y^{T^{\hat{i}}}$, $z = \hat{-} \cdot 11$ faut donc connaître y , et $y^{\hat{}}$. Pour cela associons à y , la période $y^{\hat{}}$ qui forme avec elle la période x , et $h \cdot 1/4$ la période y , qui forme avec elle la période X_s . On a d'abord $j/i + 1/ = x$,. Puis $y, y_i = r(13+16 + 4+1X9 + 15 + 8^2)$. En effectuant ce produit suivant les règles du calcul symbolique, le second membre devient égal à la somme de toutes les racines, c'est-à-dire à -1 . Donc y , et $y^{\hat{}}$ sont les racines de l'équation $M \cdot ?' = a; !/ = 1^{\wedge} 0$, Hosted by Google

The text on this page is estimated to be only 17.80% accurate

42 PHEM1È»E PARTIK De même on a on vérifierait comme précédemment que $f^{3/4} \equiv -1$; donc $1/3$ et $1/4$ sont les racines de l'équation $[r,') \text{ if } -x^y - i = 0$, d'où $X^2 + x + A$ Xipuisque $y^3 x^4$. En résolvant successivement les équations $i, i, r, \backslash i, z$, se calcule bien par une suite de racines carrées. En faisant ce calcul, on voit que z , dépend des quatre radicaux $i/\sqrt[3]{T}, \sqrt[4]{xi-i-A}, \sqrt[3]{n}, \sqrt[4]{i} - 4/i$. Si donc on veut mettre 3 , sous la forme normale, il faut voir si l'un de ces radicaux ne s'exprime pas rationnellement en fonction des autres. Or $-y^4$. Hosted by Google

The text on this page is estimated to be only 20.12% accurate

POLYGONE HÉGL'LIKH DE 17 COTÉS A'i En calculant symboliquement, on vérifie que $(\hat{i}/i - y^{Ky*} - \frac{?}{3}) = 2(a^{\hat{i}-J:'.})$. i-est-à-dire Cette égalité montre que si des trois différences $y, -y^{\cdot}, y_i - y_a, X_i - X_j$, deux sont positives, il en est de même de la troisième, ce qui est conforme aux résultats obtenus directement. Remplaçons maintenant « $i, i^{\cdot}, y^{\cdot}$ » par leurs valeurs numériques ; on trouve successivement $-i+4n + \sqrt[3]{4} - \frac{2\sqrt[3]{7}}{4} \sqrt[3]{i} \cdot \sqrt[3]{17} + \sqrt[3]{341-2/17} \sqrt[3]{4} - i + \sqrt[3]{17} + \sqrt[3]{34-a/ivy} \sqrt[3]{6S} \sqrt[3]{-12/r7} - i \cdot \sqrt[3]{v/34-H2v} - 2(1 - \sqrt[3]{7})\sqrt[3]{34-2v/rf}$ La partie algébrique de notre problème est donc terminée. Nous avons déjà fait la remarque qu'on ne connaît pas de construction du polygone régulier de 17 côtés déduite de considérations purement géométriques ; il s'agit donc maintenant de construire nos expressions algébriques, c'est-à-dire les racines de nos équations du second degré . 7. Qu'il me soit permis d'intercaler ici une digression historique sur les constructions avec la règle et le compas. Dans la géométrie des Anciens, l'usage de la règle et du compas est toujours simultané ; l'art consiste à rapprocher les différentes parties de la figure de telle manière qu'on n'ait il dessiner aucune ligne inutile. Il est indifférent que

Hosted by Google

The text on this page is estimated to be only 25.42% accurate

44 PUEMIKRRK r'AHÏLE les constructions successives se fassent avec la règle ou le compas. Par contre, en 1797, l'Italien Mascheroni a fait la tentative, couronnée de succès, d'exécuter toutes les constructions avec le compas seul ; il a exposé ses procédés dans sa *Il Geometria dd compasso* », et prétend que les constructions au compas sont plus exactes que celles avec la règle. Ainsi qu'il le dit expressément, il écrit[^] pour les arts mécaniques ; il a donc toujours un but pratique devant les yeux. L'ouvrage original de Mascheroni est difficile à lire, et nous devons remercier M. Hutt d'en avoir donné un petit résumé en allemand « *Les Comtructium de Masclu'roni* » (Halle, 1880). Bientôt après, les géomètres français, en particulier les disciples de Carnot, l'auteur de la *Géométrie de position*, ont essayé inversement d'exécuter toutes les constructions autant que possible avec la règle (Voir aussi Lambert, *Perspective libre*, 1774). Ici se pose une question, à laquelle l'Algèbre permet de répondre immédiatement : Dans quel cas la solution d'un problème d'Algèbre peut-elle se construire avec la règle seule ? Les auteurs cités n'ont pas donné de réponse bien catégorique. Nous dirons : La règle permet de construire toutes les expressions algébriques dont la forme est rationnelle. Dans le même ordre d'idées, Brianchon publia en 1818 un petit écrit « *Les applications de la théorie des transversales* » dans lequel il montra que dans beaucoup de cas on peut se tirer d'affaire avec la règle seule. Il insiste de son côté sur la valeur pratique de ses méthodes, qui sont destinées à faciliter les opérations du géomètre-topographe. C'est Poncelet qui, le premier, dans son *Traité des propriétés projectives* » (Vol. 1, 331-357) a émis cette idée qu'il suffit de tracer dans le plan un seul cercle fixe pour pouvoir construire à l'aide de la règle toutes les

Hosted by Google

The text on this page is estimated to be only 20.95% accurate

DK 17 COTÉS ij expressions dépendant de radicaux carrés. Il faut connaître d'ailleurs le centre de ce cercle. Cette idée a été développée par Steiner {1883} dans un écrit célèbre, intitulé : Les constructions géométriques exécutées à l'aide de la règle et d'un cercle fixe. 8. Pour effectuer la construction du polygone régulier de 17 côtés, nous suivrons la méthode indiquée par von Staudt (Journal de Crelle, T. 2-1, 1842), modifiée plus tard par Schröter (Journal de Crelle, T. 73, 1872). La construction du polygone de 17 côtés y est faite selon les règles indiquées par Poncelet et Steiner; on s'y sert de la règle et d'un cercle fixe. Montrons d'abord comment, à l'aide de la règle et d'un cercle fixe, dont le rayon est égal à l'unité, on peut construire les racines d'une équation du second degré, $x^2 + px + q = 0$, dont les racines sont x_1 et x_2 (*). Menons (fig. 4) un diamètre AB du cercle fixe et les tangentes à ses deux extrémités; adoptons sur ces tangentes une direction positive. Portons sur la tangente supérieure un segment AD mesuré par $\frac{1}{2} \sqrt{p^2 + 4q}$; sur la tangente inférieure un segment QC mesuré par $\frac{1}{2} \sqrt{p^2 - 4q}$; joignons C et D, et marquons les points M, et M' où la droite CD rencontre le cercle; menons enfin les droites AM, et AM', qui rencontrent la tangente inférieure en X₁ et X₂; les deux segments BX₁, BX₂ ont pour mesures X₁ et X₂. C) On ne fait aucune hypothèse sur le signe des racines. Hosted by Google

The text on this page is estimated to be only 12.99% accurate

Kii elTet, supposons que $M_i = 37$, $BX_j = 37$, $x_i^x = p$, $x_i \cdot x_j = q$.
 La tangente en B peut être considérée comme la ligne inverse du cercle 0, le centre d'inversion étant A et la puissance d'inversion AB. Donc $AM_i \cdot AX_j = AM_j \cdot AX_i = AB^2$ ce qui prouve que les quatre points M_i, M_j, X_i, X_j sont sur un même cercle. Il en résulte ex, $CX_i = CM_j$, $GM_i = \alpha' - BC = BC' \cdot C$ on bien $(BX_i - BC)(BX_j - BC) = nX_i \cdot BX_j$, $BX_i - hBX_j = \alpha_i + \alpha_j$ V Les triangles semblables ADM_i, X_jM_jC nous donnent (en grandeur et en signe, à condition d'écrire les sommets homologues aux mêmes places), $AD \cdot AM_i = \hat{A}M_i \cdot \hat{A}X_j$, $X_i^X X_j^X \cdot \hat{A}X_j$, Or $-M_j \cdot AX_j = \hat{A}Tf$; le produit $X_i^X \cdot \hat{A}X_j = -X_i^X \cdot X_j^X = -\hat{A}X_i \cdot X_j$; $X_i^X = -CX_j$; il vient donc $s_i = \hat{A}X_i$. On aurait de même $Ex_i = iE \cdot B - x_i^x \cdot AB$ ['] D'après la relation générale $PQ = \hat{O}\hat{O} - \hat{O}P$, si les trois points 0, 1', $\hat{U}$ sont en ligne droite. Hosted by Google

The text on this page is estimated to be only 19.02% accurate

[⁰OLVt;0?)E KÉCULTER]IE 17 COTKi Il vicnL alors, cq
 retranchant membre à membre et divisant par BX, - M, , La règle énoncée
 est donc justifiée ('). 9, C'est d'après ce procédé que nous allons construire
 les racines de nos quatre équations du second degré. Ce sont [i] $x^4 - hx^3 - 4 = 0$, ayant pour racines x , et x^4 ; ($\wedge$) $y^4 - \wedge^4 y^2 - 1 = 0$ Cette dernière donne Vi
 «L ?/i $\hat{i}/a$ et ys Il et zi 2d'où $i!$ est facile de déduire le polygone régulier de
 17 côtés. Remarquons d'ailleurs que pour construire S_j , il suffit de
 construire a^i , a^s , i/i , i/j . Il faudra donc porter les segments suivants : sur ia
 tangente en A, $_ J_ 4 4^j$; .!■) y, ' sur la tangente en B, Hosted by Google

The text on this page is estimated to be only 20.48% accurate

The text on this page is estimated to be only 16.52% accurate

POLYGONE RÉGULIER DE 17 COTÉS 49 la tangente en B le segment $BC = H-i$; la droite CD rencontre le cercle en deux points que l'on joint au point A ; ces droites rencontrent la tangente en B en deux points X_i et X_j , tels que $BX_i = a_i$, $BX_j = x$. Construction des racines de l'équation i) [fig. 1). — H faut 4 porter sur la tangente en A le segment Pour cela X , (1" rem.) on joint X_j (*) au point A , le point de rencontre M , avec le cercle au point B , et on marque le point F où BM_i rencontre la tangente en A . X_i n faut porter ensuite — — sur la tangente en B . A cet effet (2° rem.) on mène la droite FI qui rencontre la tangente en B au point G : $1 - 1 BG = - AF = 4 X_i$ Il suffit maintenant de joindre F et G (ce qui est fait) 1 de marquer les points K_j et N_j où cette droite rencontre le cercle, de les joindre au point A , de marquer enfin les points Y_j et V_j (*) C'est le point précédemment di5 terminé. Hosted by Google

The text on this page is estimated to be only 14.40% accurate

SO l'IIEMililiK [l'AIITIE OÙ CCS (IroitPs rencontrent la tangente en B. $BY = j$, $B\ddot{i} = y$. Construction des racines de l'équation t' [fig. 8). — La solution est la même que précédemment, sauf que X_j joue le rôle de X . On mène la droite BM_j qui rencontre la tangente supérieure en 11 ; On lit HI qui coupe la tangente. On marque les points M_j et M_j où cette droite rencontre le cercle : on les projette du point A sur la tangente en B en Y_j et Y_i . On a $HY_j = \frac{1}{3}$, BY . On a mis Y_j à droite parce que $i/i > y-s$. Construction des racines de l'équation i ; {fig. 9). — Pour porter sur la tangente supérieure — — — on mène la droite AY_i qui rencontre le cercle en N_i . De B on projette N_i sur la tangente supérieure en L : l'intersection de porter sur la tangente inférieure — — — Pour cela on y porte $AS = -h \hat{a}$; on tire SY' qui rencontre AB en R; on mène ensuite RL qui rencontre la tangente en B en P. On a Il s'agit Hosted by Google

The text on this page is estimated to be only 19.71% accurate

POLYfiOMi REGULIER I F L S \ \ / y, / ^ ^ K fl \ \ \ B % G

Marquons le point Qi le plus à droite où la droite RL rencontre le cercle ;
projetons-le du point A en Zi sur la tangente en B ; on aura $BZ_i = Il = 2 \cos$
 $\sim -^{\wedge} t$ 2 On en déduit $\cos$ — en menant par 0 la parallèle OT à la tangente en
B. La perpendiculaire élevée en ce point à OT détermine immédiatement le
premier et le seizième sommet du polygone de 17 côtés. La période $z^{\wedge}$ a été
choisie arbitrairement; on aurait pu construire de même toute autre période
à deux termes, ce qui permettrait de trouver tous les autres cosinus. Ces
construcHosted by Google

The text on this page is estimated to be only 19.32% accurate

52 PREMIERS PARTIK lions, faites sur des figures séparées, afin qu'on pût les suivre plus aisément, ont été réunies dans une seule figure ci-contre [fig. iO), qui donne la construction complète du polygone régulier de 17 côtés. Hosted by Google

The text on this page is estimated to be only 23.30% accurate

CHAPITRE V Généralités sur les constructions d'expressions algébriques. 1. Nous allons maintenant laisser de côté les constructions avec la règle et le compas. Avant de quitter ce sujet, mentionnons une méthode nouvelle et très simple, pour effectuer certaines constructions : le pliage du papier. M. Hermann Wiener a montré comment, en pliant convenablement un papier, on peut obtenir le réseau des polyèdres réguliers ('). Un fait singulier, c'est que, vers la même époque, un mathématicien hindou, Sundara Row, de Madras, a fait paraître un petit écrit sur le même sujet, " On paper folding » (sur le pliage du papier). La même idée y est développée d'une façon plus étendue ; l'auteur montre, par exemple, comment, en pliant convenablement un papier, on peut construire par points des lignes courbes telles que l'ellipse, la cissoïde, etc. (Londres, Macmillan 1893). 2. Cherchons maintenant comment on peut résoudre géométriquement les problèmes dont la forme analytique est une équation du 3^e degré ou de degré supérieur, et voyons en particulier comment les géomètres anciens y sont parvenus. L'idée la plus naturelle est de recourir aux coniques ; les anciens s'en sont beaucoup servis ; ils ont trouvé en particulier que l'emploi de ces courbes permettait de résoudre

Hosted by Google

The text on this page is estimated to be only 16.98% accurate

54 [l'liEMIÈRE PARTIE le problème de la duplication du cube et
 rie la trisection de l'angle. Voici, en quelques mots, comment on peut
 résoudre graphiquement l'équation du 3^e degré $x^3 + ax^2 - Hx - c = 0$, ou
 équation du 4^e degré $x^4 + ax^3 - bx^2 - h(-a: + rf = 0$. Posons $x^2 \sim y$; nos
 équations deviennent $xy + ay = 0$, et $y^2 - 4 - axy - hij - t ex + d = 0$. Les
 racines des équations proposées sont donc les abscisses des points
 communs à deux coniques. L'équation $x^2 = y$ représente une parabole dont
 l'axe est dirigé suivant Oi/. La seconde équation $xy + ay - dx - h c = 0$
 représente (fig. 11) une hyperbole dont les asymptotes sont parallèles aux
 axes de coordonnées. L'un des quatre points d'intersection est à l'infini sur
 l'axe des y, les trois autres sont à distance finie, et leurs abscisses sont les
 racines de l'équation du 3^e degré. Dans le 2^e cas, la parabole est la même.
 L'hyperbole (fig. 12) a toujours une asymptote parallèle à Oa:, tandis que
 l'autre n'est plus perpendiculaire à Oa:; les courbes ont maintenant quatre
 points d'intersection à distance finie. Hosted by Google

The text on this page is estimated to be only 20.11% accurate

CONSTRUCTION ALGÈBRE DES CÉNKRALITÉS 55 On trouvera l'exposition détaillée des procédés des géomètres anciens dans le grand ouvrage de M. Maurice Cantor : Histoire des Mathématiques (Leipzig 1894, 2^e édition). Gomme ouvrages intéressants sur le même sujet, on peut encore citer : Les coniques dans l'Antiquité, par Zeuthen (Copenhague 1886); la Géométrie analytique de Bâtzler (Leipzig 1884). 3. Outre les coniques, les anciens utilisèrent aussi des courbes de degré supérieur, qui furent d'ailleurs précisément inventées à l'occasion des problèmes qui nous occupent. Nous ne parlerons ici que de la cissoïde et de la conchoïde. La cissoïde de Diodes (150 ans av. J.-G.) se construit de la manière suivante. On donne (fig. 13) un cercle, un diamètre OA et la tangente en A. Une sécante menée par O rencontre le cercle en B et la tangente en G; on porte sur cette sécante, à partir de O, une longueur OM = OB. Le lieu géométrique de M, quand on fait tourner la sécante autour de O, est la cissoïde. Formons son équation, en prenant pour axes des x et des y le diamètre OA et la tangente en O. Posons OM = r, OM₀ = 0, et prenons pour unité de longueur le diamètre du cercle. Il vient alors

Hosted by Google

The text on this page is estimated to be only 18.29% accurate

50 PREMIERE PARTI !■: D'où, en remarquant que $X = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, on déduit l'équation La courbe est donc du 3^e ordre ; elle possède un point de rebroussement h, l'origine, et admet l'axe des x comme axe de symétrie. La tangente en A est asymptote à la courbe, laquelle passe en outre par les points cycliques. Pour résoudre à l'aide de cette courbe le problème de Délos, écrivons son équation sous la forme $x^3 - x = y^2$ On voit alors que la cissoïde peut être engendrée par l'intersection des deux droites variables La première passe par l'origine et intercepte sur la tangente en A la longueur OA ; la seconde passe par le point A ($x = 1$, $y = 0$) et intercepte sur l'axe des y la longueur OV . De là une construction simple de $\hat{O}i$. On prend sur Oy une longueur $OD = -1/2$; on mène AD qui coupe la cissoïde au seul point réel P ; on mène enfin DP qui détermine sur la tangente en A la longueur $AQ = \hat{O}i = 5/2$. 4. La conchoïde de Nicomède (environ 150 ans av. J.-C.) s'obtient de la manière suivante. Soit O (fig. 14) un point fixe, et « sa distance à une droite fixe D. Faisons tourner autour du point O un rayon mobile ; à partir du point P, où il rencontre la droite, por

Hosted by Google

The text on this page is estimated to be only 20.62% accurate

CONSTRUCTION DES EXPRESSIONS ALGÈBRIQUES.

CÉNÉHAUTÉS 57 tons sur lui dans les deux sens une même longueur ϵ ; le lieu des extrémités de CCS longueurs est la conchoïde. Selon que li est supérieur ou inférieur à a ., elle admet à l'origine un point double ou un point isolé; pour $\epsilon = a$, c'est un point de rebroussement. De cette construction on déduit très simplement l'équation de la ligne en prenant pour axes des x et des y la perpendiculaire et la parallèle menées par O à la droite D . Posant $OQ = y$, on a d'oii $(a' - f - j/\epsilon)(a - x) - \hat{O}V = 0$. La conchoïde est donc du quatrième ordre, possède un point double à l'origine, se compose de deux branches ayant pour asymptote commune la droite $x = a$. En outre on voit que la courbe passe par les points cycliques, fait important pour la suite des raisonnements. Voici comment cette courbe, supposée construite, permet d'effectuer la trisection d'un angle quelconque. Soit $\alpha = \angle MOy$ l'angle à diviser en trois parties égales. Prenons sur le côté OM une longueur $OM = b$, menons par M la parallèle à Oy ; construisons enfin la conchoïde Hosted by Google

The text on this page is estimated to be only 24.37% accurate

38 L'RKMlKlIK i'ARÏIE ayant 0 comme point double, la parallèle comme asymptote et caractérisée par la longueur b. Cela fait, décrivons de M comme centre un cercle de rayon b ; la figure montre évidemment qu'il rencontre la conchoïde en un point A. situé à l'intérieur de l'angle MOy. On démontre sans difficulté aucune que $\angle A = \angle M\hat{O}$. Nos recherches précédentes nous ont appris que le problème de la trisection de l'angle est un problème du 3^e degré; il admet les trois solutions. Toute construction géométrique qui résout ce problème à l'aide d'une courbe de degré supérieur, doit fournir naturellement toutes les solutions, sans quoi l'équation du problème ne serait pas irréductible. Ces solutions résultent en effet de notre figure. Le cercle et la conchoïde se coupent en 8 points ('). Deux d'entre eux sont confondus à l'origine, deux autres avec les points cycliques; aucun d'eux ne peut fournir une solution du problème. Restent donc quatre points d'intersection, de sorte qu'il semble y avoir une solution de trop. Cela tient à ce que, parmi les 4 points, se trouve nécessairement le point B, tel que $\angle OMB = 25^\circ$, point qu'on peut construire sans le secours de la courbe. Il ne reste donc plus que trois points qui correspondent aux trois racines fournies par la solution algébrique. 5. Dans toutes ces constructions à l'aide de courbes Hosted by Google

The text on this page is estimated to be only 20.97% accurate

CONSTRUCTION DES EXPRESSIONS ALGÈBRIQUES.

CÉKÉItALITÈS 39 algébriques de degré supérieur, il faut encore élucider la question de l'exécution pratique. Il faut pour cela un appareil qui trace la courbe d'un trait continu ; une construction par points n'est autre chose au fond qu'une méthode d'approximation. On a construit beaucoup d'appareils de ce genre ; il y en a qui étaient déjà connus des géomètres anciens.

Nicomède trouva un dispositif simple pour tracer sa conchoïde ; c'est le plus ancien appareil connu, outre la règle et le compas. (Cf. Canlor, Vol. I, p. 302.) On trouvera une énumération des appareils construits plus récemment dans le catalogue de Dyk, p. 227-230 et MO ; et p. i-2³ de l'appendice.

Hosted by Google

Hosted by Google

The text on this page is estimated to be only 23.67% accurate

DEUXIEME PARTIE LES NOMBRES TRANSCENDANTS ET LA QUADRATURE DU CERCLE CHAPITRE I Existence des nombres transcendants. Démonstration de M. Cantor. 1. Représentons comme de coutume les nombres par les points d'un axe des abscisses. Si nous nous bornons aux nombres rationnels, les points correspondants rempliront l'axe des abscisses avec une « densité parfaite », c'est-à-dire que dans un intervalle, si petit qu'il soit, il y a une infinité de tels points. Néanmoins, comme les géomètres anciens l'avaient déjà reconnu, l'ensemble continu des points de l'axe n'est pas épuisé de cette manière; les nombres irrationnels s'introduisent entre les nombres rationnels, et la question se pose si, parmi les nombres irrationnels, il ne faut pas encore faire certaines différences. Définissons d'abord ce qu'on entend par nombres algébriques. On appelle ainsi toute racine d'une équation algébrique $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$, dont les coefficients sont des nombres entiers, premiers entre eux. Bien entendu il n'est question que de racines réelles. Les nombres rationnels en sont un cas particulier comme

The text on this page is estimated to be only 25.32% accurate

racines des équations de la forme Les nombres algébriques réels forment-ils un ensemble continu, ou bien une suite discontinue, telle qu'on puisse insérer d'autres nombres dans ses intervalles? Ces nouveaux nombres, les nombres transcendants, seraient alors caractérisés par cette propriété de ne pouvoir être racines d'une équation algébrique entière à coefficients entiers. Cette question a d'abord été résolue par Liouville (Comptes Rendus 1844, et Journal de Liouville, V.16, 1831) ; il a en effet démontré l'existence de nombres transcendants. Mais sa démonstration, qui s'appuie sur la théorie des fractions continues, est assez compliquée. La question devient beaucoup plus simple lorsqu'on se place au point de vue développé par M. Georges Cantor dans un mémoire d'une importance capitale : Sur une propriété de l'ensemble des nombres algébriques réels (Journal de Crelle, t. 77, 1873). Nous allons exposer sa démonstration, en utilisant une idée un peu plus simple, que M. Cantor, sous une forme différente il est vrai, avait signalée à l'assemblée des *Naturforscher* » à Halle en 1891. 2. La démonstration repose sur cette propriété que les nombres algébriques forment un ensemble énumérable, tandis qu'il en est autrement des nombres transcendants. M. Cantor veut dire par là qu'on peut ranger les premiers dans un certain ordre, tel que chacun d'eux occupe une place déterminée, numérotée pour ainsi dire. Cette proposition peut aussi s'énoncer de la manière suivante : On peut établir une correspondance univoque entre la multiplicité des nombres algébriques réels et la multiplicité des nombres entiers positifs. Il semble qu'il y ait là une impossibilité. Les nombres entiers positifs ne forment qu'une partie des nombres

Hosted by Google

The text on this page is estimated to be only 21.05% accurate

EXISTKKCL DIIS NUMBiiES THANSCENLIA.NTS (l'A
algébriques réels; puisqu'à chaque nombre du premier ensemble on peut
faire correspondre un nombre et un seul du second, la partie serait donc
égale au tout. Cette objection repose sur une analogie inexacte. Le théorème
qui dit que la partie est plus petite que le tout, n'est plus valable quand il
s'agit de grandeurs en nombre infini. Il est bien évident par exemple qu'on
peut établir une correspondance univoque entre les nombres entiers positifs
et les nombres pairs positifs, il suffit d'écrire 0 1 2 3 ... n ... 0 2 4 (i ... 2w ...
Quand il s'agit de quantités infinies, les mots grand et petit ne sont pas bien
à leur place. M. Cantor a proposé de les caractériser par leur puissance :
Deux collections infinies ont même puissance, lorsqu'on peut établir entre
leurs éléments une correspondance univoque. Le théorème que nous avons
à démontrer prend alors la forme suivante : l'ensemble des nombres
algébriques réels a même puissance que l'ensemble des nombres entiers
positifs. On obtient l'ensemble des nombres algébriques réels en cherchant
les racines de toutes les équations algébriques de la forme $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$. Tous les a_i sont supposés premiers entre eux, a_0
est positif et l'équation est irréductible. Afin de ranger les nombres ainsi
obtenus dans un certain ordre, nous considérons leur hauteur N , qui est
représentée par $N = n - 1 + |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$; $|a_i|$ représente la valeur
absolue de a_i . A un nombre donné N correspond un nombre fini d'équations
algébriques. En effet, N étant donné, le nombre n a certainement une limite
supérieure, puisque N est égal à $n - 1$, augmenté de la somme des hauteurs des coefficients.

Hosted by Google

The text on this page is estimated to be only 19.10% accurate

mente de nombres positifs ; en outre la différence $N - (h - 1)$ est une somme de nombres positifs premiers entre eux, dont le nombre est évidemment fini. $N \neq 0$ M.1 H|I°=||1«i|| Kqaation ?(N) Racines T 1 (0 x = 0 1 0 2 0 0 0 2 T 2 0 ~ 1 ' — 2 — 1 1 1 x±\ = 0 + 1 2 0 0 3 ~r 0 4 -2 1 ■2x±i =0 3!+2 =0 :{ 2 0 0 + 2 1 0 \ — 0 1 ~ 3 0 0 0 4 1 0 1 2 3.^±i =0 12 -3 -1,61803 — 1,41421 3 ', ,»! zt 3 = 0 — 0,7j711 2 0 1 0 2 0 0 i 2a;^ — 1 = 0 x^±x~i =0 x» — 2 = 0 — 0,61803 — 0,33333 + 0,33333 + 0,61803 + 0,707(1 + 1,41421 3 0 0 0 0 0 I + 1,01803 + 3 0 1 0 1 ~ 0 0 1 — 4 0 0 0 0

Hosted by Google

The text on this page is estimated to be only 24.68% accurate

EXrSTE.NCK DES NOMliRES TRANSCENDANTS 63 Parmi ces équations, il faut écarter celles qui sont réductibles, ce qui n'offre théoriquement aucune difficulté. Le nombre des équations correspondant à une valeur donnée de N étant limité, il ne correspond à cette valeur qu'un nombre limité de nombres algébriques. Nous désignerons ce nombre par $tf(N)$. Le tableau ci-contre contient le calcul de $(f(l))$, *qui leur correspondent.* Rangeons maintenant ces nombres algébriques suivant leur hauteur N , en ordonnant les nombres qui correspondent à une même valeur de N suivant leur grandeur croissante. Nous aurons ainsi tous les nombres algébriques, chacun d'eux à une place déterminée. C'est ce qui a été fait dans le tableau précédent. Notre proposition est donc démontrée. 3. Voici maintenant la proposition générale que nous avons en vue : Si on considère une portion de l'axe des x , aussi petite que l'on veut, il s'y trouve une infinité de points qui n'appartiennent certainement pas à un ensemble énumérable donné. En d'autres termes : L'ensemble continu des valeurs numériques représentées par les points de l'axe des x contenus dans une portion de cet axe., si petite qu'elle soit., a une puissance plus grande que celle d'un ensemble énumérable donné. Cela revient visiblement à affirmer l'existence des nombres transcendants ; il suffit de prendre comme ensemble énumérable celui des nombres algébriques. Pour démontrer ce théorème, dressons le tableau des nombres algébriques, comme précédemment, et écrivons-y tous les nombres sous forme de nombres décimaux; aucun d'eux ne sera terminé par une suite indéfinie de 9; car l'égalité $1 = 9999$ Hosted by Google

The text on this page is estimated to be only 22.95% accurate

66 IIIiLXIKME PAHTIK montre qu'un tel nombre est un nombre décimal exact. Si maintenant nous pouvions construire un nombre décimal qui ne soit pas terminé par une suite indéfinie de 9, et qui ne se trouve pas dans notre table, ce serait certainement un nombre transcendant. Un procédé très simple, indiqué par M. G. Cantor, permet de trouver non seulement un tel nombre, mais une infinité, même si les limites entre lesquelles doit se trouver le nombre sont extrêmement rapprochées. Supposons, par exemple, que les cinq premières décimales du nombre soient données [*]. Le procédé de M. Cantor est alors le suivant. On prend pour 6^e décimale un nombre différent de 9 et de la 6^e décimale du premier nombre algébrique; Pour 1^{re} décimale, un nombre différent de 9 et de la 7^e décimale du second nombre algébrique, etc. De cette manière, on obtient une fraction décimale indéfinie, qui ne sera pas terminée par une suite indéfinie de 9, et qui certainement n'est pas contenue dans notre table, La proposition est donc démontrée. On voit aussi par là (si on veut bien nous permettre cette expression) qu'il y a beaucoup plus de nombres transcendants que de nombres algébriques. En effet, quand on détermine les décimales inconnues, on peut choisir, en évitant les 9, huit nombres différents; on forme ainsi des nombres transcendants au nombre de a^n , même quand ils doivent être compris entre des limites aussi rapprochées que l'on veut. (■) C'est-à-dire (que les limites entre lesquelles il doit être compris le nombre différent de ---; ■ Hosted by Google

The text on this page is estimated to be only 25.58% accurate

CHAIMTRK II Coup d'œil historique sur les tentatives de calcul et de construction de π . Nous allons faire voir que le nombre π appartient à la classe des nombres transcendants dont l'existence a été démontrée dans le chapitre précédent. La preuve rigoureuse en a été fournie par Lindemann en 1882; il a ainsi résolu définitivement un problème qui a préoccupé les mathématiciens depuis quatre mille ans (aussi loin que peut remonter l'histoire) ; c'est celui de la quadrature du cercle. En effet, si ce n'est pas un nombre algébrique, il est impossible de le construire avec la règle et le compas; la quadrature du cercle est donc impossible au sens où l'entendaient les anciens. Il est intéressant de suivre les tentatives faites en vue de la solution de ce problème aux différentes époques de la science, de voir comme on a toujours essayé de nouvelles constructions avec la règle et le compas, comment enfin ces efforts nécessairement infructueux ont exercé l'influence la plus féconde sur les branches les plus diverses des Mathématiques. Les éléments de la petite revue historique que nous allons faire sont empruntés à un ouvrage très recommandable de M. Rudio : *Archimède, Huygens, Lambert, Legendre. Quatre mémoires sur la mesure du cercle* « (Leipzig 1892), Ce livre contient la traduction allemande des recherches des auteurs nommés ci-dessus. Quoique le mode d'exposition s'éloigne beaucoup des idées modernes dont nous allons faire usage, on y trouvera néanmoins des particularités intéressantes, dont on pourra tirer une utilité pratique au point de vue de l'enseignement. Hosted by Google

The text on this page is estimated to be only 22.00% accurate

b» DEUXIEME PARTIE i. Dans les tentatives faites pour déterminer le rapport du diamètre à la circonférence, on peut d'abord distinguer Vépoque empirique, dans laquelle on cherche à arriver au but par mesure ou estimation directe. Le document mathématique le plus ancien qui existe, le « Papyrus Hkind •> (environ 2000 ans avant J.-C), énonce déjà le problème sous sa forme bien connue : construire un carré équivalent à un cercle donné. L'auteur du papyrus, Ahmès, donne la règle suivante : on retranche d'un diamètre une quantité égale à son neuvième ; on construit un carré ayant pour côté la partie restante ; il est équivalent au cercle. On obtient ainsi pour π une valeur pas trop erronée, bien moins exacte est la valeur $\pi \sim 3$, que l'on trouve dans la Bible {i" Livre des Rois, 7, 23 ; 2' livre de la Chronique, 4, 2,) 2. Les Grecs, Archimède en particulier, s'élevèrent au-dessus de ce point de vue empirique. Dans son livre K-MvXo-j usTfiiia'.;», ce dernier géomètre calcule la surface du cercle au moyen de celle des polygones inscrits et circonscrits, comme on le fait encore aujourd'hui dans l'enseignement élémentaire. Sa méthode resta en usage jusqu'à l'invention du calcul différentiel ; elle fut particulièrement développée et rendue pratique par Huygens (mort en 1634), dans son ouvrage <> de magnitudine circuli inventa i. De même que la duplication du cube et la trisection de l'angle, les géomètres grecs cherchèrent à effectuer la quadrature du cercle au moyen de courbes de degré supérieur. Considérons par exemple la courbe $y = \arcsin x$. Elle se présente sous la forme d'une sinussoïde ; l'axe vertical. Géométriquement, $\arcsin x$ se présente comme une

orHosted by Google

The text on this page is estimated to be only 22.34% accurate

HLSTORIQUE: DES ESSAIS DE I :UL ET DE
CONSTRUCTION DE r 69 donnée particulière de cette courbe ; au point
de vue de la théorie des fonctions, c'est une valeur particulière de notre
fonction transcendante. Appelons appareil transcendant tout appareil qui
trace une courbe transcendante ; un appareil transcendant qui dessine la
sinusoïde nous donnera une construction géométrique de r . La courbe $y =$
 $\arcsin x$ s'appelle dans le langage moderne une courbe intégrale, parce
qu'on peut la définir par l'intégrale d'une fonction algébrique, $r dx$ Les
anciens désignaient ces courbes sous le nom de quadratrices ou ts-p!i-
fovii;ojiii , La plus connue est la quadratrice de Dinostrate (environ 350 ans
avant J.-C.) ; elle avait déjà été construite antérieurement par Hippias (420
av. J.-C.), qui s'en servit pour la trisection de l'angle. Elle se définit
géométriquement de la manière suivante {fy. 15). Étant donné un cercle et
deux rayons rectangulaires OA et OB, deux mobiles M et L se meuvent d'un
mouvement uniforme, l'un sur le rayon OB, l'autre sur l'arc AB. Ils partent
au même instant de leurs positions initiales O et A et arrivent simultanément
en B. Le point d'intersection P de OL avec la parallèle MP menée par M à
OA décrit la quadratrice. De cette définition, il résulte que $i/$ est
proportionnel ; comme d'autre part y pour Hosted by Google

The text on this page is estimated to be only 18.22% accurate

DEUXIÈME PARTIE d'une équation de la quadratrice est Elle rencontre l'axe des x en un point dont l'abscisse est $X = \frac{1}{2} \pi$ pour $y = 0$; donc D'après cette formule, le rayon du cercle est la moyenne proportionnelle entre la longueur du quadrant et l'abscisse du point d'intersection de la quadratrice avec l'axe des x . On peut donc se servir de cette courbe à la fois pour la rectification et la quadrature du cercle. Remarquons d'ailleurs que cela revient simplement à formuler le problème de la rectification sous forme géométrique, aussi longtemps qu'on n'aura pas construit un appareil permettant de décrire la courbe d'un trait continu. La figure 1U donne une idée de la forme de la courbe, avec les branches qu'on obtient en considérant les valeurs les plus supérieures à $\frac{1}{2} \pi$ ou inférieures à $\frac{1}{2} \pi$. Evidemment Hosted by Google

The text on this page is estimated to be only 20.64% accurate

uiSTOHiQUK iiKS r.SiAis mz i.;au:u]. et dk cnNSiHixTio.N i>e
tt / 1 la quadratrice

The text on this page is estimated to be only 23.06% accurate

72 DKUMKiaE PARTIE danee de tt ; elles commencent par montrer la transcendance du nombre e . 4. Après 1770 l'esprit critique reprit ses droits. Cette même année parut le livre de Lambert : *Connaissances préliminaires pour ceux qui cherchent la quadrature du cercU*. Il y traite entre autres de l'irrationalité du nombre x . En 1794 Legendre démontra définitivement dans ses *éléments de Géométrie* que π et $\sqrt[n]{n}$ sont des nombres irrationnels, 5. Ce n'est que cent ans plus tard que commencent les recherches modernes. Le point de départ a été le Mémoire de M. Hermite « Sur la fonction exponentielle » (Comptes Rendus 1873, publié en 1874). Il y démontre la transcendance du nombre e . Une démonstration analogue pour k , se rattachant étroitement à celle de M. Hermite, a été donnée par M. Lindemann (*Mathematische Annalen*, 20. 1882. Voir aussi les Comptes Rendus des académies de Berlin et de Paris). La question était donc entièrement élucidée pour la première fois ; mais les considérations de M. Hermite et Lindemann étaient encore très compliquées. La première simplification a été indiquée par M. Weierstrass dans les « *Berliner Berichte* » de 1885. Tous les travaux cités précédemment ont été réunis par Eachmann dans son livre : *Leçons sur la nature des nombres irrationnels*, 1892. Au printemps de 1893 se produisirent de nouvelles et très grandes simplifications. En première ligne il faut citer les mémoires de M. Hilbert dans les « *Göttinger Nachrichten* ». Pourtant sa démonstration n'est pas encore absolument élémentaire ; il y reste encore une trace des idées de M. Hermite sous la forme de l'intégrale

Hosted by Google

The text on this page is estimated to be only 16.51% accurate

HISTORIQUE: DKS ESSAIS DE CALCUL ET DE CONSTRUCTION {-
■'Peu de temps après, MM. Hurwitz et Gordan ont montré qu'on peut se passer de cette formule transcendante. (Göttinger Nachrichten ; Comptes Rendus ; Math. Annalen, Vol. 43). La démonstration a pris maintenant une forme tout à fait élémentaire et semble accessible à tout le monde. C'est à la marche suivie par M. Gordan que nous rattacherons notre exposé. Hosted by Google

The text on this page is estimated to be only 18.01% accurate

CHIAFITI! III La transcendance du nombre e . Nous nous appuierons sur le développement en série bien connu de e^x : convergent pour toutes les valeurs de x . Insistons, en passant, sur la différence entre la convergence théorique et la convergence pratique. Si on prend $a; = 1000$, il est laborieux de calculer e^{1000} au moyen de cette série. Elle est pourtant convergente théoriquement; on voit facilement qu'à partir du 1000^e terme la factorielle $n!$ du dénominateur croît plus rapidement que la puissance qui figure au numérateur. Cette circonstance, que — a pour limite zéro quand n devient infini, est importante pour nos raisonnements ultérieurs. 2. Nous allons démontrer la proposition suivante : Le nombre e , n'est pas un nombre algébrique ; en d'autres termes, ce nombre ne peut être racine d'une équation entière à coefficients entiers $l(x) = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \dots + C_nx^n = 0$; on peut toujours supposer que les coefficients C_i sont premiers entre eux. Voici la marche de la démonstration. (Nous supposons qu'il existe un nombre entier n , et des entiers C_i , premiers entre eux, tels que l'on ait $F(x) = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \dots + C_nx^n = U$. Hosted by Google

The text on this page is estimated to be only 16.81% accurate

LA THA>-SCEM)AficL IIL) NOMBRE ', 7j lin nuilliilianl les
doux membres [Kir un certain nombre M, il vient $MF(e_j) = MCo + MC_e +$
 $MC^{i^*} + \dots + MC_{,i}$]. Nous montrerons qu'on peut choisir ce nombre M de
manière à satisfaire aux conditions suivantes : 1° Chacun des produits $Me,$
 $Ma^* Mit$ peut être décomposé en une partie entière M^* et une partie
fractionnaire Ea , L'idonlilé prend alors la forme $Ml - \backslash(')^{\wedge} MCa + M,C, -h$
 $M,C, + \dots + M,,C,, + r,M + (:.=i-i- \blacksquare + c,,i,, = 0.$ â° La partie entière
 $MCo \blacksquare + MiC, + \dots + M,,C,,$ n'est pas nulle. Cela résultera de ce fait que,
divisée par un nombre premier, elle donne un reste différent de zéro. 3°
 $LVx)ressioii C,s, 4- C,s, -f- \dots -u- C,,E,,$ peut être rendue aussi petite que
l'on veut. Ces conditions étant supposées remplies, l'idonlilé supposée est
évidemment impossible, puisque la somme dnn entier non nul cl d'une
fraction proprement dite ne peut être égale à zéro. 3. Notre démonsirafion
exiye l'emiiloi d'un certain symbole /C et d'un polynôme $ti(x)$. I.e symbole
II'. If n'est autre chose que $i, ^{.}.i r = r'.$; par l'emploi de ce symbole, on peut
écrire $X x^{\wedge} i''$ Il h - /(' Il n'a pas d'aulrc sîg}iificali

The text on this page is estimated to be only 20.78% accurate

(6 DEUXIEME TARTU: Supposons doniiii un polynôme développé lous représentons par $f(x)$ et nous écrivons sous la forme 2
="Supposons que le polynôme $f(x)$ ne soit pas développé. Calculer $f'(x)$,
c'est développer ce polynôme par rapport aux puissances de x et remplacer
ensuite x^n par x^{n+1} . C'est ainsi que Le polynôme $\phi(x)$. Considérons le
polynôme remarquable $x^p - x$! p est un nombre premier, n le degré de
l'équation algébrique à laquelle satisfait par hypothèse le nombre x . Nous
supposerons p supérieur à w et à $|Co|$, et plus tard nous le ferons croître au-
delà de toute limite. On aura une image géométrique de ce polynôme en
construisant la courbe $y = f(x)$. Aux points $X = 0, 1, \dots, n$ elle admet l'axe
des x comme tangente d'inflexion, puisqu'elle le rencontre en un nombre
impair de points, tandis qu'à l'origine, elle le touche sans inflexion. Pour les
valeurs de x comprises entre 0 et n , elle reste dans le voisinage de l'axe des
 x ; pour des valeurs plus grandes de x , elle s'en écarte indéfiniment. Hosted
by Google

The text on this page is estimated to be only 17.15% accurate

1A TRANSCE[

The text on this page is estimated to be only 13.97% accurate

in DEUXIEME PARTIE (i, s... » $p \nmid i$ et n'est certainement pas divisible par le nombre premier p , puisque, par hypothèse, p est un nombre plus grand que n . Donc $-Ab) = (\gg V \pmod{p}$, et par suite $\equiv 0 \pmod{p}$. $\varphi(A)$ est d'ailleurs un très grand nombre ; calculons son terme de degré le plus élevé ; c'est $111 \cdot h$ étant un entier, et k l'un des nombres $1, 2, \dots, p-1$ est un nombre entier divisible par p . On a $(i^h + k)^p \equiv i^{hp} + k^p \pmod{p}$; $h \cdot p$ est un multiple de p ; dans laquelle on ne doit remplacer i par $i \pmod{p}$ qu'après avoir ordonné le développement par rapport aux puissances croissantes de h . D'après les règles indiquées pour le calcul symbolique, on a d'abord $(i^h + k)^p \equiv i^{hp} + k^p \pmod{p}$; $i^{hp} \equiv i^{h \pmod{p-1}}$; $k^p \equiv k \pmod{p}$; — il y a l'une des valeurs $1, 2, \dots, p-1$, un des facteurs du crochet se réduit à h ; par suite, le terme du moindre degré en k dans le développement est de degré p . On peut donc écrire Les coefficients ont encore pour numérateurs des nombres

Hosted by Google

The text on this page is estimated to be only 18.69% accurate

La première ligne a mémo forme que le développement $\frac{1}{1-x}$ (li-i-
/il'; dans la parenthèse delà seconde ligne se trouve la série $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ Oh $\{x^n\}$ +lir
dont les termes sont respectivement inférieurs à ceux de la série La seconde
ligne peut donc se représenter par une expression de la forme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, qrk
étant une fraction proprement dite. Faisons la même décomposition pour
chaque terme de la elle prend la forme $r_n \cdot \frac{1}{1-x^n} = \sum_{k=0}^{\infty} r_n x^{nk}$

The text on this page is estimated to be only 19.07% accurate

J, A TRANSCENDANCE DU NOMBRE C 81 finalement
$$F(e) = C_0 + C_1 h + C_2 h^2 + \dots + C_n h^n + C_{n+1} h^{n+1} + \dots$$

Il est maintenant facile d'achever la démonstration. Tous les
nombres de la première ligne, à partir du second, sont divisibles par p ; pour
le premier le facteur C_0 est en valeur absolue inférieure à p ; $C_1 h$ n'est pas
divisible par p ; donc $C_0 + C_1 h$ n'est pas divisible par le nombre premier p .
Par conséquent la somme des nombres de la première ligne n'est pas nulle.
Les nombres de la seconde ligne sont en nombre fini; chacun d'eux peut
être rendu plus petit que tout nombre donné par un choix convenable de p ;
il en est donc de même de leur somme. Un nombre entier non nul et une
fraction ne pouvant donner pour somme zéro, l'indépendance supposée est donc
impossible. La transcendance de e , ou encore le théorème de Hermite est
donc démontré. Hosted by Google

The text on this page is estimated to be only 19.62% accurate

CHAPITRE IV La transcendance du nombre e . 1. La démonstration de la transcendance du nombre e est due à M. Lindemann. C'est une extension de celle donnée par M. Hermite pour le nombre e . Dans le chapitre précédent, on a montré que le nombre e ne pouvait vérifier une identité de la forme $C_0 + C_1 e + C_2 e^2 + \dots + C_n e^n = 0$. M. Lindemann démontre l'impossibilité d'une identité analogue; seulement, à la place des puissances $e, e^2, \dots$ il introduit des sommes de la forme $\sum_{i=1}^k e^{a_i \alpha_i}$. Les nombres $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ sont les racines d'une même équation algébrique, à coefficients entiers du degré N ; de même les nombres $a_1, a_2, \dots, a_k$ sont les racines d'une équation de degré N' , etc. Ces racines peuvent d'ailleurs être imaginaires. Le théorème général de M. Lindemann peut donc s'énoncer sous la forme suivante : Le nombre e ne peut vérifier une identité de la forme $(1) C_0 + C_1 \sum_{i=1}^k e^{a_i \alpha_i} + C_2 \sum_{i=1}^k e^{2a_i \alpha_i} + \dots + C_n \sum_{i=1}^k e^{na_i \alpha_i} = 0$, les coefficients C_i étant entiers, et les exposants d'une même parenthèse étant les racines réelles ou imaginaires d'une même équation algébrique à coefficients entiers. Soit Hosted by Google

The text on this page is estimated to be only 19.41% accurate

INSCN'dange du MJMBHE t 83 l'équation admettant pour racines les exposants i ; $\ddot{E}i' + i, \gg: -' 4- \blacksquare + *, \dots = 0$, celle qui admet pour racines les exposants $/$; $\cdot$. Ces équations ne sont pas nécessairement irréductibles, ni leurs premiers coefficients égaux à l'unité; les fonctions symétriques de leurs racines, qui seules se présenteront dans nos développements ultérieurs, ne sont donc pas nécessairement des nombres entiers. Pour n'avoir que des nombres entiers, il suffira de considérer les fonctions symétriques des nombres $al, nk, \dots, ((/\backslash, l>l, l'h, \dots, /:-\blacksquare$, etc. On voit facilement que ces nombres sont racines des équations $y'' - a, y'' - + - \llai/'''^ + \blacksquare \blacksquare \blacksquare 4- a, a^{\sim'} =^ 0, y' + fiW'' \blacksquare + \blacksquare l'J>\backslash\}'^{\sim'} + \blacksquare \blacksquare \blacksquare + // \ll('''\blacksquare''' = 0$, etc. les fonctions symétriques rationnelles des racines de ces équations sont évidemment des nombres entiers. Cela posé, la marche de la démonstration est la même que pour le théorème de M. Hermite. On suppose vraie l'identité (t); on multiplie ses deux membres par un même nombre M ; on décompose chaque somme telle que en une partie entière et une fraction, telle que $M(e''' - i - e'' > - t t - e^{*''})^{\wedge} M, + \hat{i}i, i$ Soit l'identité devient alors $CoM - hC, M, - | - C\hat{i}M, - i hC.B, + C2; i + --- = 0$. On montrera, par un choix convenable de M , que la somme des nombres de la première ligne représente un

The text on this page is estimated to be only 21.62% accurate

84 DEUXIÈME PARTI; entier non divisible par un certain nombre premier p , et par suite différent de zéro; que la partie fractionnaire au contraire peut être rendue plus petite que tout nombre donné ; on tombe alors sur la même contradiction que précédemment. 2. Nous nous servirons encore du symbole h' , et d'une certaine fonction $l^{(p)}$ Le polynôme $i(a)$. Ce polynôme est une généralisation du polynôme $^{(k)}$ employé dans le chapitre précédent. On pose $x[(i-3:)(^{(i-^):})...(/'-a)]^{ft} \ll S''K^{..}$ p est un nombre premier, supérieur en valeur absolue, i chacun des nombres $C_0, a, b, \dots, a:, b^{'}$; nous le ferons même croître indéfiniment. Quant aux facteurs $ay^{\wedge}, /^{*} \ll \gg, ., , ,$ nous les avons introduits afin de trouver dans le développement (ie $l\{x)$ des fonctions symétriques des quantités. $ak, ak,, \dots, nk^{\wedge}$. Idy, $bk, \dots, bl:,-.$ c'est-à-dire des nombres rationnels et entiers. Plus loin nous aurons à développer les quantités $2*i''-+''!$. $^{\wedge} \blacksquare w-.+i')$ La présence des mêmes facteurs sera encore nécessaire, si on veut que les coefficients de ces développements aient pour numérateurs des nombres entiers. Hosted by Google

The text on this page is estimated to be only 17.67% accurate

LA THA.NSCE.NDANCI! DU \OMRRf: ' 8a Propriétés de la fonction . . .ak,,Y.a""a^"" . . p — 1! X(ft/,.è/.... hl^')p.h"i'h""P... Si dans ce terme nous remplaçons h"~' par p — 1 !, le dénominateur disparaît. D'après les hypothèses faites sur le nombre premier p, aucun facteur de ce produit n'est divisible par p, et par suite il en est de même du produit . Le second terme C^/i" devient de même un nombre entier quand on remplace h" par p 1 ; mais le facteur p se conserve, et il en sera de même pour tous les termes suivants. Donc la somme 4'(^) est un entier non divisible par p. IL X ayant une valeur finie donnée, et p aurjnientanl indéfiniment, le polynôme •i^[x) ^^ cX tend vers 0, de même que la somme des modules de ses termes. On a '!,{x)=^c^T' "tÊtï!"-'»-'---""--)!»'—)■■■!'■-') X 4-S-' ...((- 1)(4 ^ I) ...((,■- i) Hosted by Google

The text on this page is estimated to be only 18.81% accurate

LA TRA^{scE}■DA^{•CR} du nombre tt «/ Remplaçons maintenant h' par '■!'; le dénominateur disparaît dans tous les coefficients ; mais le facteur /» se conserve au numérateur; la somme est donc bien un nombre entier divisible par p. 11 en sera évidemment de même pour Nous avons ainsi trois propriétés de o(x), analogues à celles démontrées pour a{x) à l'occasion du théorème de M. Hermite. 3. Revenons maintenant à la démonstration de notre théorème. Il s'agit de montrer que l'identité (1) $C(+G,(e'''-i-'^'+--'+?'^)+C,(c''+e''+----i-e'--'-)+--- = 0$ est impossible. À cet effet, multiplions ses deux membres par $>l\{k)$; elle devient $+ Ci[e''.4'(/i)H^{\langle'''.i-ih}]]-^--- = (1$. Cherchons à décomposer chacune des parenthèses en un nombre entier et une fraction. L'opération sera un peu plus longue que précédemment, car k peut être une quantité complexe de la forme $1^{\text{+-} il'}$; soit $|k|$ son module

The text on this page is estimated to be only 15.73% accurate

88 DEUXIÈME PARTIE Les modules des termes de la série sont respectivement inférieurs à ceux des termes de la série . , ' * ■ ' = * + T + ^ + Il en résulte . I ' ■ ■ " 1 , M mod. h ■ ■ - H ^ \ = ^ [h + k) + ^ c , . q r . i M e l " - | . Affectons dans cette égalité / . ■ successivement des indices 1, 2, . . . , N, et faisons la somme ; il vient Procédons de même pour toutes les autres sommes ; le premier membre de notre identité prend alors la forme c. « *) + c, 2 1 (' . - . + *) + c, 2 * ((, + ») + • ■ ■ + c, 2 2 " " ' - ' = - « - î ' v . + c, 2 2 " " - " " ' - " - . - * - ' =

The text on this page is estimated to be only 19.19% accurate

LA TRANSFORMATION DU NOMBRE t: D'après la propriété II, on peut rendre $\frac{c}{p}$ plus petit que tout nombre donné, en choisissant p suffisamment grand. Comme $\frac{f_j}{p} < 1$, il en sera a fortiori de même de et par suite aussi de Gomme le nombre des coefficients C est limité, la somme qui figure dans la deuxième ligne de l'identité (2) peut être rendue aussi petite que l'on voudra. Les nombres de la première ligne sont, à partir du second, tous divisibles par p (Pr. III) ; le premier nombre C_0 n'est pas divisible par p , et par suite elle est différente de zéro. La somme d'un nombre entier et d'une fraction ne peut être nulle ; l'identité (2) est donc impossible et par suite aussi l'identité (1). 4. Voici maintenant une proposition plus générale que la précédente, mais dont la démonstration est une conséquence immédiate de la première. Pour cette raison nous l'appellerons le Corollaire de M. Lindemann. Le nombre t ne peut vérifier une identité de la forme
$$g + h_1 c_1^{e_1} + h_2 c_2^{e_2} + \dots = 0,$$
 dans laquelle, les h sont des nombres entiers, et les exposants des nombres algébriques quelconques. Hosted by Google

The text on this page is estimated to be only 19.70% accurate

Pour le démontrer, soient les autres racines de l'équation algébrique à laquelle satisfait α ; do même soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ les autres racines de l'équation à laquelle satisfait α , etc. Formons tous les polynômes qu'on peut déduire de α^n en remplaçant α , successivement par les racines connexes $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, par les racines $\alpha_1, \dots, \alpha_n$; faisons le produit de toutes les expressions ainsi formées, on aura m $\{::"::;\blacksquare\}$ Dans chaque parenthèse, les exposants sont formés symétriquement avec les quantités $\alpha, \alpha_1, \dots$; ce sont donc encore les racines d'une équation algébrique à coefficients entiers. Notre produit a alors la forme supposée dans le théorème de M. Lindemann; par suite il ne peut devenir nul. Aucun de ses facteurs ne peut donc l'être, ce qui démontre le corollaire. 5. Voici enfin une proposition encore plus générale: Le nombre e ne peut vérifier une identité de la forme $C^n + C^{n-1}V + \dots + C^0V^n = 0$, dans laquelle les coefficients aussi bien que, les exposants sont des nombres algébriques quelconques. Formons en effet tous les polynômes qu'on peut déduire du précédent en remplaçant chacune des racines C par l'une des racines connexes Hosted by Google

The text on this page is estimated to be only 15.21% accurate

LA THANSCKMIANCK [$\geq$] MIJULLiK le produit des polynômes ainsi formés est $\sum_{i=1}^n C_i x^i$. Les coefficients de ce polynôme sont des fonctions symétriques des quantités $q, C_1, C_2, \dots, C_n$, et par suite ce sont des nombres rationnels. Nous retrouvons donc sur le corollaire démontré précédemment; cette expression ne peut être nulle; il en est donc de même de chacun de ses facteurs. 6. De tous les théorèmes qui précèdent, il résulte que non seulement e n'est pas un nombre algébrique, mais que ce n'est même pas un nombre transcendant, si on appelle ainsi, avec Leibniz, les nombres de la forme x^A , A étant une irrationnelle algébrique. C'est donc un nombre transcendant d'ordre supérieur. La réciproque suivante est maintenant évidente : Si le nombre e vérifie une identité de la forme $C_0 + C_1 e + C_2 e^2 + \dots + C_n e^n = 0$, il est impossible que tous les coefficients C_i soient rationnels.

The text on this page is estimated to be only 22.18% accurate

92 BEUXIÈME PARTIE 8. Considérons la fonction on sait que $1 = e^{0}$ et il semble que cette identité soit en contradiction avec notre théorème. Il n'en est rien; il suffit en effet de remarquer que nous avons implicitement exclu le cas de l'exposant nul; dans ce cas, la fonction e^x perdrait ses principales propriétés, et nos conclusions ne seraient plus exactes. Excluons donc ce cas particulier ($x = 0, y = 1$) ; le théorème de M. Lindemann prouve alors que, dans l'équation $y = e^x$, x ni y , c'est-à-dire le nombre et son logarithme ne peuvent pas être algébriques simultanément. A une valeur algébrique de x correspond une valeur transcendante de y et réciproquement. C'est là évidemment une propriété très remarquable. Construisons la courbe $y = e^x$, et supposons marqués tous les points algébriques du plan, c'est-à-dire tous les points dont les deux coordonnées sont des nombres algébriques ; la courbe passe entre eux, sans en contenir aucun, sauf le point $x = 0, y = 1$. Le théorème reste d'ailleurs vrai, même quand x et y prennent des valeurs imaginaires. La courbe exponentielle est donc une courbe transcendante, et cela dans un sens beaucoup plus élevé qu'on n'a coutume de le penser. 9. Une autre conséquence du corollaire de M. Lindemann est la transcendance de la courbe et de toutes les autres courbes analogues. La fonction $y = \arcsin x$ est la fonction implicite définie par l'équation

Hosted by Google

The text on this page is estimated to be only 14.03% accurate

LA TRANSCENDANCE DU π ; OMBBE T 93 les coefficients de cette équation sont algébriques, si x est un nombre algébrique. Donc y n'est pas algébrique. Il y a bien entendu exception pour $a = 0$, $y \sim G$. On peut donc énoncer sous forme géométrique la proposition suivante : La courbe $y = \arcsin x$ ne passe par aucun point du plan dont les deux coordonnées sont des nombres algébriques. Hosted by Google

The text on this page is estimated to be only 25.02% accurate

CHAPITRE V L'Intégraphe et la construction géométrique de π .

1. Le théorème de M. Lindemann démontre la transcendance du nombre π ; ainsi se trouve démontrée l'impossibilité de la quadrature du cercle, non seulement au sens où l'entendaient les anciens, mais d'une manière beaucoup plus générale, il est impossible de construire π avec la règle et le compas; il n'existe même pas de courbe d'ordre supérieur, définie par une équation algébrique, pour laquelle π soit l'ordonnée correspondant à une valeur rationnelle de l'abscisse. Une véritable construction géométrique de π ne peut donc être effectuée qu'à l'aide d'une courbe transcendante.

Comme d'ailleurs il s'agit d'une véritable construction, il faut posséder un appareil transcendant permettant de tracer la courbe en question d'un trait continu, 2. Cet appareil, c'est l'intégraphe, qui a été récemment inventé et décrit par un ingénieur russe, M. Abdank-Abakanowicz, et construit par M. Coradi à Zurich. Cet instrument permet de tracer la courbe intégrale $Y = \int f(x) dx$, quand on connaît la courbe différentielle $y = f(x)$. A cet effet, on conduit l'intégraphe de telle manière que la pointe directrice décrive la courbe différentielle ; une autre pointe, la pointe traçante décrit alors la courbe intégrale.

Hosted by Google

The text on this page is estimated to be only 20.89% accurate

L'intégration graphique 1)5 gale. Nous renvoyons au mémoire original (en allemand chez Teubner, 1889 ; en français chez Gauthier-Villars) pour la description de cet ingénieux instrument. Indiquons seulement son principe. Etant donné un point $\{x, y\}$ de la courbe différentielle $y = f(x)$, construisons le triangle auxiliaire, qui a pour sommets les points (x, y) , $(x+1, 0)$, $(x-1, 0)$. L'hypoténuse de ce triangle rectangle fait avec l'axe des x un angle dont la tangente est égale à y . Cette hypoténuse est donc parallèle à la tangente à la courbe intégrale au point $\{X, Y\}$, correspondant au point $\{x, y\}$. L'appareil devra donc être construit de telle façon, que la pointe traçante se déplace parallèlement à la direction variable de cette hypoténuse, pendant que la pointe directrice décrit la courbe différentielle. On réalise ce mouvement en reliant la pointe traçante à une roulette à arête vive, dont le plan, toujours vertical, est constamment parallèle à cette hypoténuse. Un poids presse cette roulette sur le papier, et par suite son point de contact ne peut se déplacer que dans la direction du plan de la roulette. On utilise l'intégraplie ou intégrateur à calculer pratiquement des intégrales définies. Pour nous, il est particulièrement intéressant au point de vue de la construction géométrique de la courbe intégrale. Prenons comme courbe différentielle le cercle $x^2 + y^2 = r^2$. La courbe intégrale est alors $Y = \int y dx$. Cette courbe consiste en une suite de branches égales entre elles [fig. 17). Les points où elle rencontre l'axe OY ont pour ordonnées

Hosted by Google

Hosted by Google