

Les méthodes modernes de la résistance des matériaux

1. [Notice](#)

This book was produced in EPUB format by the Internet Archive.

The book pages were scanned and converted to EPUB format automatically. This process relies on optical character recognition, and is somewhat susceptible to errors. The book may not offer the correct reading sequence, and there may be weird characters, non-words, and incorrect guesses at structure. Some page numbers and headers or footers may remain from the scanned page. The process which identifies images might have found stray marks on the page which are not actually images from the book. The hidden page numbering which may be available to your ereader corresponds to the numbered pages in the print edition, but is not an exact match; page numbers will increment at the same rate as the corresponding print edition, but we may have started numbering before the print book's visible page numbers. The Internet Archive is working to improve the scanning process and resulting books, but in the meantime, we hope that this book will be useful to you.

The Internet Archive was founded in 1996 to build an Internet library and to promote universal access to all knowledge. The Archive's purposes include offering permanent access for researchers, historians, scholars, people with disabilities, and the general public to historical collections that exist in digital format. The Internet Archive includes texts, audio, moving images, and software as well as archived web pages, and provides specialized services for information access for the blind and other persons with disabilities.

Created with hocr-to-epub (v.1.0.0)

Google This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online. It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary by country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover. Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you. Usage guidelines Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying. We also ask that you: + Make non-commercial use of the files We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes. + Refrain from automated querying Do not send automated queries of any sort to Google's System: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help. + Maintain attribution The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it. + Keep it legal Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability

can be quite severe. About Google Book Search Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>

The text on this page is estimated to be only 5.50% accurate

ai, Google

The text on this page is estimated to be only 6.50% accurate

b, Google

The text on this page is estimated to be only 3.86% accurate

libtwy TA foS • Ffff ai, Google

The text on this page is estimated to be only 5.50% accurate

ai, Google

The text on this page is estimated to be only 5.50% accurate

ai, Google

The text on this page is estimated to be only 5.50% accurate

ai, Google

The text on this page is estimated to be only 14.75% accurate

LES MÉTHODES MODERNES RESISTANCE DES
MATÉRIAUX ai, Google

The text on this page is estimated to be only 19.00% accurate

b»Google

The text on this page is estimated to be only 15.73% accurate

LES MÉTHODES MODERNES RÉSISTANCE DES
MATÉRIAUX M. BERTRAND de FONTVIOLENT DEUXIÈME
ÉDITION revue et augmentée. PARIS GUTHIER-VILLARS ET C^o
ÉDITEURS Quai des Grands-Augustins, 55 à Paris, France

The text on this page is estimated to be only 5.50% accurate

ai, Google

The text on this page is estimated to be only 14.84% accurate

LES MÉTHODES MODERNES DE LA RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX; Par M. BERTRAND di FONTVIOLANT, Professeur a l'École Centrale de* Arts cl Manufacture Àv ixt-Propos. t. Les méthodes modernes de la Résistance des matériaux ont pour objet deux des questions les plus importantes de celte branche de la Mécanique appliquée : la détermination des déformations élastiques et calorifiques, et le calcul des forces de liaisons clans les pièces et les systèmes de pièces hÿperstaliques. Ces méthodes, fondées sur le théorème des forces vives et sur celui du travail virtuel, sont entièrement générales ; elles s'appliquent uniformément à tous les cas qui peuvent se présenter. Elles offrent, sur les anciennes méthodes géométriques cl cinéma tiques, l'avantage d'être d'une application plus rapide et de ne pas nécessiter l'introduction, dans les calculs, d'inconnues auxiliaires dont l'élimination est très souvent laborieuse. Cependant elles sont assez peu répandues en France où, parmi les nombreux ouvrages didactiques sur la Résistance des matériaux, quatre seulement, à notre connaissance, font mention des méthodes modernes, avec des développements plus ou moins étendus, savoir : Le Traité de Statique graphique de Maurice Levj (IVe Partie, 1886, Note I) contient un aperçu de la méthode du général Menabrea'et de celle de Mohr, pour le calcul des efforts dans les ■ systèmes articulés à barres surabondantes; La traduction en français (1901), par Ilahn, delà Résistance des matériaux de Fdpppl, expose la méthode générale de Castigliano, pour la détermination des déplacements élastiques et des 377619 jijinœdb» Google

The text on this page is estimated to be only 17.54% accurate

forces de liaisons surabondantes dans les pièces et les systèmes de
* pièces à fibres moyennes; L'ouvrage de M. Ernest Flamard, intitulé Calcul
des systèmes élastiques de la Construction (1918), rappelle la méthode de
Castigliano et en fait des applications nombreuses et variées aux poutres
droites, aux arcs et aux systèmes articulés ; • Enfin, le Cours de Mécanique
professé à l'Ecole Polytechnique par M. Léon Lecornu (t. III, 1918) donne
l'Équation générale de l'élasticité des constructions, ainsi que la méthode
de Castigliano, avec application à divers systèmes hypersélastiques. Il nous a
paru, dès lors, utile de présenter, ici, un exposé d'ensemble des diverses
méthodes modernes, exposé que nous nous sommes efforcé de rendre aussi
simple que possible, en nous attachant, d'ailleurs, à faire ressortir les liens
étroits, qui unissent ces méthodes. Dans ce second ordre d'idées, nous
montrons que la mise en compte des déformations calorifiques, qui jusqu'à
présent n'avait été effectuée qu'au moyen du théorème du travail virtuel,
peut aussi s'obtenir par application du théorème des forces vives. Nous
établissons également que ce dernier théorème permet, aussi bien et plus
simplement que le premier, de démontrer le beau théorème de Belli,
Boussinesq et Maurice Levy. Il nous a semblé intéressant de faire intervenir
la Théorie mathématique de l'Élasticité, afin de mettre en lumière la voie
dans laquelle devraient, croyons-nous, être dirigées les recherches des
savants relatives à cette théorie, en vue de permettre l'extension des
méthodes modernes aux systèmes de corps isotropes, et d'affranchir ainsi le
calcul des constructions, des hypothèses de la Résistance des matériaux ;
mais il ne faut pas se dissimuler que de telles recherches sont extrêmement
ardues, à cause des difficultés que présente l'intégration des équations aux
dérivées partielles de la Théorie mathématique de l'Élasticité. Les méthodes
fondées sur le théorème des forces vives ont leur origine dans le Mémoire
de Clapeyron sur le travail des forces élastiques (1858) (1), et dans celui du
général Menabrea intitulé (1) Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t.
XLVI, p. 100. — Voir aussi Lamé, Leçons sur la Théorie mathématique de
l'Élasticité des corps solides (1866) : Théorème de Clapeyron, p. 80.

Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 13.70% accurate

Principe général pour déterminer les pressions et les tensions dans un système élastique (1868) ('). La première application du théorème du travail virtuel à l'étude des déformations élastiques a été faite par Mohr, en ce qui concerne les systèmes articulés, sous le titre Beitrag zur Theorie des Bogenfachwerksträger (1871) (<). Depuis, ces méthodes ont fait l'objet des recherches de nombreux savants et ingénieurs. On en trouvera un historique très complet, accompagné de minutieuses indications bibliographiques, dans la Thèse de doctoral présentée en 1941 à la Faculté des Sciences de Nancy, par M. Ernest Flamard (3). Rappel de quelques notions de Théorie mathématique de l'Elasticité et de Résistance des matériaux. Forces élastiques, en Théorie mathématique de l'Elasticité. 2. Considérons un corps solide élastique, en équilibre sous l'action d'un système de forces extérieures. Soient (fig- i) : A un point quelconque de ce corps ; x, y, z les coordonnées rectangulaires de ce point, avant déformation du corps; dx, dy, dz les longueurs d'arêtes, mesurées avant déformation, d'un parallélépipède infiniment petit, pris dans le corps, et dont A est l'un des sommets; $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$; $\tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zy}, \tau_{zx}, \tau_{xz}$, «= les composantes parallèles aux axes, des forces élastiques, rapportées à l'unité de surface, sur les trois faces du parallélépipède, ayant le point A comme sommet commun et respectivement normales à Ox, Oy et Oz . Cf Voir aussi mu: note lue par le général Menabrea à la séance de l'Académie des Sciences du 31 mai 1858 { Comptes rendus, t. XLVI, p. 1056). (') Zeitschrift der Architekten und Ingenieurvereine zu Hannover, 1874, p. 173. Constructions métalliques de la Compagnie et les Méthodes nouvelles de la Statique de, Google

The text on this page is estimated to be only 14.50% accurate

Pour préciser le signe de ces composantes, nous considérons les forces élastiques comme les actions exercées par les parties du corps situées à l'extérieur du parallélépipède, sur celles situées ci tf A 4(31 / fat Ai "V *"z V / ">~b« / * l'intérieur, et nous convenons de les compter positivement dans le sens positif des axes. Suivant l'usage adopté par les ingénieurs, nous dirons que n et $($ sont respectivement les fatigues normales et les fatigues tangentiellles sur trois éléments plans, rectangulaires entre eux avant déformation, menés au point A. D'après la convention qui vient d'être faite, un élément est soumis à la compression ou à la traction, selon que la fatigue normale sur cet élément est positive ou négative. On sait que, sur deux éléments rectangulaires entre eux, les fatigues tangentiellles, dirigées normalement à l'intersection de ces éléments, sont égales entre elles, c'est-à-dire que l'on a ce qui réduit, de neuf à six, le nombre des fatigues inconnues sur les trois éléments rectangulaires considérés. dbbyGoogk

The text on this page is estimated to be only 12.97% accurate

Paramètres de la déformation élastique d'un corps isotrope. 3.

Soient u, v, w les composantes parallèles aux axes, du déplacement élastique du point $A(x, y, z)$. Les six quantités $\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \epsilon_{xy}, \epsilon_{yz}, \epsilon_{zx}$ (du double à l'ordre 2) définissent la déformation élastique du parallélépipède; nous les appellerons les paramètres de la déformation élastique. $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ sont les raccourcissements subis respectivement par les arêtes dx, dy, dz du parallélépipède, rapportés aux longueurs initiales de ces arêtes. Selon que la valeur de ϵ correspondant à une arête est positive ou négative, il y a réellement raccourcissement ou, au contraire, allongement de cette arête. $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ sont les augmentations subies par les angles droits que forment entre elles, avant déformation, les arêtes dy et dz, dz et dx, dx et dy du parallélépipède. Selon que la valeur de γ correspondant à l'un de ces angles est positive ou négative, il y a réellement augmentation ou, au contraire, diminution de l'angle considéré. Les quantités γ portent le nom de glissements ou distorsions. Les six fatigues normales et tangentielles s'expriment, en fonctions des six paramètres de la déformation élastique, par les formules suivantes : $\sigma_x = E(\epsilon_x + \nu(\epsilon_y + \epsilon_z))$, $\sigma_y = E(\epsilon_y + \nu(\epsilon_x + \epsilon_z))$, $\sigma_z = E(\epsilon_z + \nu(\epsilon_x + \epsilon_y))$, $\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$, $\tau_{yz} = G\gamma_{yz}$, $\tau_{zx} = G\gamma_{zx}$, dans lesquelles E , et G désignent deux constantes physiques du corps considéré. (Ces constantes sont liées aux modules d'élasticité longitudinale et transversale, considérés en Résistance des matériaux, par les relations li. $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ $\blacksquare$ G-... 1+^ jijinædb» Google

The text on this page is estimated to be only 13.60% accurate

Inversement, les expressions des paramètres de la déformation élastique, en fonction des fatigues normales et tangentielles, sont "-
 $\frac{1}{2} \epsilon_{ij} \sigma_{ij}$ Travail des forces élastiques. Potentiel interne d'un corps isotrope. i. Au moyen, des expressions ci-dessus des fatigues normales et tangentielles, et des paramètres de la déformation élastique, on calcule aisément le travail accompli par les forces élastiques agissant sur les six faces du parallélépipède, pendant que celui-ci passe de son état naturel à un état de déformation défini soit par les valeurs des fatigues, soit par celles des paramètres. Soit m le quotient de ce travail infiniment petit, par le volume $dx dy dz$ du parallélépipède; c'est le travail des forces élastiques, rapporté à l'unité de volume, au point A (x, y, s). On trouve $\sigma_{ij} = \frac{1}{2} m \epsilon_{ij}$ (4) $m = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{E} + \frac{1}{3G} \right)$ Le travail des forces élastiques, pour le parallélépipède considéré, est $\int \int \int m dx dy dz$. Si donc on décompose le corps en une infinité de parallélépipèdes élémentaires, par des plans normaux aux axes de coordonnées, on voit que le travail total IT des forces élastiques, pour le corps entier, est $C_i = \frac{1}{2} \int \int \int \epsilon_{ij} \sigma_{ij} dx dy dz$, l'intégrale triple étant prise pour le volume entier occupé par le corps. dbyGoogk

The text on this page is estimated to be only 16.47% accurate

Il est clair que cette expression du travail total des forces élastiques s'applique également à un système de corps reliés entre eux d'une manière quelconque, déformé par des forces extérieures en équilibre, l'intégrale étant alors prise pour le volume total occupé par le système de corps. On vérifie immédiatement que, si l'on dérive l'expression (4) de δW , successivement par rapport à x, y, z , on retombe sur les expressions (1) de $\delta W_x, \delta W_y, \delta W_z$, de sorte qu'on a $\delta W = \delta W_x + \delta W_y + \delta W_z$. Les dérivées partielles de la fonction δW , par rapport aux six paramètres de la déformation élastique du parallélépipède, sont donc égales aux fatigues normales et tangentielles au point A.(x,y, z). On en conclut que les forces élastiques, appliquées sur les faces du parallélépipède, dépendent d'une fonction de forces et que cette fonction est δW . Par suite, pour le corps entier (ou pour un système de corps), les forces élastiques dépendent de la fonction de forces δW . La déformation élastique d'un parallélépipède quelconque fait naître, à l'intérieur de celui-ci, des forces moléculaires ; ces forces sont inconnues, mais il est facile d'évaluer le travail qu'elles ont accompli pendant la déformation; en effet, le système de points matériels composant ce parallélépipède étant au repos avant et après la déformation, la somme algébrique des travaux des forces extérieures et intérieures sollicitant ce système est nulle, en vertu du théorème des forces vives; par suite, le travail des forces moléculaires est égal et de signe contraire à celui des forces élastiques; sa valeur est donc $-\delta W$, pour le parallélépipède considéré, et $-\delta W$, pour le corps (ou le système de corps) entier, Conséquemment, en ce qui concerne l'évaluation du travail des forces moléculaires, tout se passe comme si celles-ci dépendaient d'une fonction de forces $-\delta W$ ou, ce qui revient au même, comme si elles dériveraient d'un potentiel δW . Nous dirons, en conséquence, que la fonction δW est le potentiel des forces moléculaires ou, par abréviation, le potentiel interne du corps (ou du système de corps) déformé, sous réserve toutefois que, si cette fonction changée de signe représente bien le travail

The text on this page is estimated to be only 16.43% accurate

_ ij _ des forces moléculaires pendant la déformation, elle ne saurait être utilisée pour calculer les valeurs de ces forces qui demeurent inconnues. Il résulte de ce qui précède que les forces moléculaires forment un système conservatif : leur travail ne dépend que de l'état final de déformation et non des états intermédiaires; il est exclusivement fonction des valeurs finales des paramètres de la déformation ou des valeurs finales des fatigues. La fonction Π est susceptible d'une autre interprétation que La formule (4) montre que ρ_0 est essentiellement positif et qu'il s'annule lorsque le corps est à l'état naturel; il en est de même du potentiel total Π ; ce dernier est donc minimum lorsque le corps est à l'état naturel, ce qui prouve (fait d'ailleurs évident) que cet état est celui d'équilibre stable des molécules du corps. Si l'on imagine que le corps déformé revient à son état naturel, par suite de la suppression des forces extérieures ayant déterminé sa déformation, le potentiel de ses forces moléculaires passe de la valeur Π à la valeur zéro; elles accomplissent donc un travail positif égal à Π , pendant que les molécules du corps reviennent à leur position d'équilibre stable; or, on sait que (') l'énergie potentielle d'un système matériel occupant une position quelconque est égale au travail essentiellement positif des forces intérieures de ce système, lorsqu'il passe de cette position à sa position d'équilibre stable. Π est donc l'énergie potentielle interne du corps (ou du système de corps) déformé. Paramètres de la déformation d'un corps isotrope, lorsque celle-ci est à la fois élastique et calorifique, 5. Soit un corps libre; soumettons-le à l'action d'un système quelconque de forces extérieures en équilibre et supposons que sa température s'élève de t degrés; soit α son coefficient de dilatation linéaire. La déformation subie par un parallélépipède quelconque, pris dans le corps, peut être considérée comme résultant de la superposition de la déformation purement élastique (')

Maurice Levi, Sur le principe de l'énergie, 1888, p. g. dbbyGoogk

The text on this page is estimated to be only 17.20% accurate

due aux forces extérieures et de la dilatation calorifique. Or, cette dilatation ne modifie pas les angles que forment entre elles les arêtes du parallélépipède, lesquelles subissent simplement des allongements qui, rapportés à l'unité de longueur, sont égaux à α -c. Par suite, $\dots v^{\wedge}$ désignant comme précédemment les six paramètres de la déformation purement élastique, les paramètres de la déformation élastique et calorifique sont Ces expressions restent valables dans le cas d'un abaissement de température à condition, dans ce cas, de compter t négative. Elles sont également valables pour les corps non libres, ces corps pouvant être considérés comme libres sous l'action des forces qui leur sont directement appliquées et des forces de liaisons correspondantes. Remarquons que le potentiel interne ne dépend évidemment que de la déformation élastique; par suite, si la déformation est à la fois élastique et calorifique, les expressions du potentiel interne restent celles données au n° 4. Remarque. 6. Tout ce qui vient d'être dit des corps, isotropes s'applique immédiatement aux pièces à fibres moyennes, considérées en Résistance des matériaux, si, selon le point de vue très clair et très précis du général Menabrea, on considère ces pièces comme des corps semi-rigides. Ce point de vue permet de passer des formules de la Théorie mathématique de l'Elasticité aux formules correspondantes de la Résistance des matériaux; mais il est plus simple d'établir directement ces dernières. Forces élastiques, en Résistance des matériaux. Eléments de leur réduction. 7. Soient {fig. a) : Un corps à fibre moyenne plane ou $\mathbb{A}$ ai, Google

The text on this page is estimated to be only 15.06% accurate

~ 14 — PQ et P'Q' deux sections infiniment voisines, normales à la fibre moyenne ; G et G' leurs centres de gravité, d'abscisses curvilignes s et s' , comptées à partir d'une origine prise sur la fibre moyenne, à gauche de G ; Gx la tangente positive, en G, à la fibre moyenne ; Gx_i et Gx_ζ les axes principaux d'inertie de la section PQ ; n , $t^\wedge$, (τ) les composantes parallèles aux axes Gx_i , Gx_ζ de la force élastique, rapportée à l'unité de surface, en un point quelconque A (x_i , x_ζ) de la section PQ. Pour préciser le signe de ces composantes, nous considérons les forces élastiques dans la section PQ, comme les actions exercées par la partie du corps située à gauche de cette section, sur la partie située à droite, et nous convenons de les compter positivement dans le sens positif des axes de coordonnées. n est la fatigue normale au point A ; $t^\wedge$ et τ sont les fatigues tangentielle ; d'après la convention qui vient d'être faite, il y a compression ou traction, au point A, selon que n est positif ou négatif. Les forces élastiques dans la section PQ forment un système équivalent aux forces extérieures appliquées à gauche de cette section. L'un comme l'autre de ces deux systèmes est réductible, au centre de gravité G de la section PQ : A V effort normal N dirigé suivant Gx ; Aux efforts tranchants T_x , et T_ζ dirigés suivant Gx_i et Gx_ζ ; dbyGoogle

The text on this page is estimated to be only 15.00% accurate

Au couple de torsion M_{ϕ} , d'axe GJ ; Aux couples de flexion M_A et M_{ϕ} , d'axes G^i et G^j . Les couples M_{ϕ} , M_{θ} , M_{ψ} seront considérés comme positifs, s'ils tendent à faire tourner leurs bras de leviers dans le sens des rotations qu'il faudrait imprimer aux parties positives G^i , G^j et G^k des trois axes de coordonnées, pour les amener respectivement en coïncidence avec G^i , G^j et G^k . Paramètres de la déformation élastique d'un corps à fibre moyenne. 8. Dans la déformation élastique, la section PQ prend, par rapport à la section P'Q' infiniment voisine, un déplacement relatif infiniment petit qui équivaut à une translation égale au déplacement relatif de son centre de gravité G et une rotation autour d'un axe passant par le centre de gravité. i° erfi, Yirfi. içrfl les composantes de la translation suivant les trois axes de coordonnées G^i , G^j , G^k , composantes comptées positivement dans le sens positif des axes ; i° 85 ds, 6, ds, D_j ; ds les composantes de la rotation autour de ces mêmes axes, comptées positivement ou négativement dans les mêmes conditions que les couples de torsion et de flexion. Les six quantités e , y , $y^{\wedge}$, O_j , δ , δ_{ϕ} définissent la déformation de la tranche du corps comprise entre les deux sections PQ et P'Q'; ce sont les paramètres de la déformation élastique de cette tranche. e est le raccourcissement, par unité de longueur, ou raccourcissement unitaire de l'élément de fibre moyenne $GG' = rfsj$ selon qu'il est positif ou négatif, il y a réellement raccourcissement ou, au contraire, allongement. dbyGoogle

The text on this page is estimated to be only 14.55% accurate

*r, cl y; sont les glissements unitaires de la section PQ suivant les deux directions G_i et G_j . θ est l'angle unitaire de la torsion. $H^{\wedge}$ et $\bullet$; sont les angles unitaires de la flexion, autour de G_r , et de G_v . Désignons par ω l'aire de la section PQ, I_p son moment d'inertie polaire, par rapport à son centre de gravité, I_y et I_z ses moments d'inertie, par rapport à G_r et G_j , c'est-à-dire ses moments d'inertie principaux, E et G les modules d'élasticité longitudinale et transversale. Les six paramètres de la déformation de la tranche $PQP'Q'$ sont liés aux éléments de la réduction des forces élastiques dans la section PQ (ou des forces extérieures appliquées à gauche de cette section) par les relations $N = E\epsilon$, $T = G\gamma$, $T_f = G\gamma_f$; $M_y = G\epsilon_y$, $M_z = E\epsilon_z$; T est la fatigue normale et tangentielle, en un point quelconque $A(y, z)$ de la section PQ, sont données par les formules Travail des forces élastiques. Potentiel interne d'un corps à fibre moyenne.

9. Pendant que la tranche $PQP'Q'$ passe de son état naturel à un état quelconque de déformation, les forces élastiques appliquées sur les deux sections PQ et $P'Q'$ limitant cette tranche accomplissent un certain travail; soit m le quotient de ce travail infiniment petit par l'élément $GG' = ds$ de fibre moyenne compris

The text on this page is estimated to be only 13.54% accurate

entre ces deux sections : c'est le travail des forces élastiques, au point G, rapporté à l'unité de longueur de la fibre moyenne. En fonction des éléments de la réduction des forces élastiques développées dans la section PQ, par la déformation, α est exprimé par la formule (9) $\alpha = \frac{1}{N} \int_0^L T \frac{d\theta}{ds} ds$ et, en fonction des paramètres de la déformation élastique de la tranche, par la formule (10) $\alpha = \frac{1}{E} \int_0^L (U + G \theta^2 + G \theta \theta' + G \theta''^2 + G \theta'''^2) ds$, Le travail des forces élastiques, pour la tranche P'Q'Q', est $\frac{1}{2} \int_0^L T \frac{d\theta}{ds} ds$; et, par suite, pour le corps entier, il est $\frac{1}{2} \int_0^L T \frac{d\theta}{ds} ds$. l'intégrale étant étendue à la longueur totale de la fibre moyenne. Cette formule est évidemment applicable à un système de corps reliés entre eux d'une manière quelconque, à condition de convenir que l'intégrale est étendue à la longueur totale des fibres moyennes de tous les corps composant le système. Il y a flexion plane lorsque : 1° la fibre moyenne est une courbe plane, 2° le corps est de structure symétrique par rapport au plan de la fibre moyenne, 3° les forces extérieures sont appliquées dans ce plan. Dans ce cas, si l'on suppose que Ox est le plan de la fibre moyenne, $T, M, M', y, \theta, \theta', \theta''$ sont nuls et, par suite, on a simplement $\alpha = \frac{1}{E} \int_0^L (F \theta'' + G \theta''^2 + E \theta''') ds$, en supprimant les indices θ et r , affectant les lettres T, M et I, y et θ dans les formules (g) et (io). De même qu'en Théorie mathématique de l'Élasticité, les forces élastiques dépendent d'une fonction de forces. Pour une tranche quelconque P'Q'Q', cette fonction est $\frac{1}{2} \int_0^L T \frac{d\theta}{ds} ds$; ceci résulte de ce [db](#)Google

The text on this page is estimated to be only 16.61% accurate

— ISque, si l'on forme les dérivées partielles de l'expression (10) de τ_a , par rapport aux six paramètres de la déformation, on retombe sur les expressions (7) des six éléments de la réduction des forces élastiques; pour le corps entier (ou pour un système de corps), la fonction de forces est Π . On en conclut, comme précédemment (§ 4), que la fonction H est le potentiel des forces moléculaires ou potentiel interne du corps (ou du système du corps) déformé et qu'elle représente également l'énergie potentielle de celui-ci. Paramètres de la déformation, lorsque celle-ci est à la fois élastique et calorifique. 10. On verrait, de la même façon que précédemment (§ 5), que les paramètres de la déformation élastique et calorifique d'une tranche quelconque sont $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta, \theta, \iota, \kappa, \lambda, \mu, \nu, \xi, \omicron, \pi, \rho, \sigma, \tau, \upsilon, \phi, \chi, \psi, \omega$. Tu $T_t > H'$ $K_a = i e, \dots, 9$; désignant les paramètres de la déformation purement élastique, α , le coefficient de dilatation linéaire et θ la variation de température, positive en cas d'élévation, négative en cas d'abaissement. Principe fondamental des méthodes déduites du théorème des forces vives : Équation de Clapeyron; extension de cette équation. H. Considérons un corps élastique, isotrope ou à fibre moyenne, ou un système de pareils corps, satisfaisant aux conditions suivantes : Ce corps, ou ce système, possède un certain nombre d'appuis simples, à rotule ou à encastrement; il est donc astreint à des liaisons dites liaisons d'appui ou liaisons extérieures. Les corps composant le système sont reliés entre eux, d'une manière quelconque; ils sont donc astreints à des liaisons mutuelles, dites liaisons intérieures au système. dbV Google

The text on this page is estimated to be only 17.16% accurate

Les forces de liaisons extérieures sont ordinairement appelées réactions d'appuis. On dit qu'un corps ou un système est isostatique ou hyperstatique, selon que les forces de liaisons peuvent ou non être calculées par la Statique pure, c'est-à-dire au moyen des six conditions universelles d'équilibre. Un corps, ou un système de corps, hyperstatique peut toujours être rendu isostatique, par la suppression de certaines de ses liaisons, sans que son état d'équilibre soit troublé, sous réserve de lui appliquer les forces de liaisons correspondant aux liaisons supprimées. Les liaisons subsistant alors sont dites liaisons statiques et celles supprimées, liaisons surabondantes. Un système de corps est hyperstatique extérieurement ou intérieurement, selon que ses liaisons surabondantes sont extérieures ou intérieures. Un système peut, d'ailleurs, être hyperstatique à la fois extérieurement et intérieurement. On réalise la suppression des liaisons surabondantes extérieures soit par la suppression complète de certains appuis, soit par le remplacement d'appuis à rotule par des appuis simples, soit enfin par le remplacement d'appuis à encastrement par des appuis à rotule ou par des appuis simples. La suppression des liaisons surabondantes intérieures s'obtient soit par la suppression d'un certain nombre de contacts existant entre les différents corps du système, soit par des modifications apportées à la façon dont ces contacts ont lieu. Suivant le nombre et la nature des liaisons d'un corps (ou d'un système de corps) hyperstatique, il existe une seule manière, ou plusieurs, de le rendre isostatique. Ainsi, il n'y a pas d'autre manière de rendre isostatique un arc reposant sur deux appuis à rotules, que de remplacer l'un de ces deux appuis par un appui simple; par contre, on peut rendre isostatique un arc encastré à ses deux extrémités, soit en supprimant purement et simplement l'un des deux appuis à encastrement, soit en substituant à ceux-ci un appui à rotule et un appui simple.

Remarque. — Dans la suite, toutes les fois que la direction d'une force de liaison sera inconnue a priori (ce qui est le cas, par exemple, d'une liaison réalisée par un appui à rotule), nous ^■Google

The text on this page is estimated to be only 14.64% accurate

entendrons par force de liaison, non pas cette force même, mais chacune de ses composantes suivant deux directions arbitrairement choisies. Il importe, en effet, de ne faire intervenir, dans le calcul des forces de liaisons, que des forces de directions connues d'avance. 12. Au corps ou au système de corps considéré, isostatique ou hyperstatique, peu importe, appliquons un système de forces et de couples extérieurs initialement nuls et croissant lentement jusqu'à des valeurs finales F et G . Il en résulte une déformation élastique : le point d'application de l'une quelconque des forces F subit un certain déplacement élastique absolu et la droite adjoignant les points d'application des deux forces formant un couple G subit une certaine rotation élastique absolue. Soient : δ , la projection du déplacement élastique du point d'application de la force F , sur la direction de cette force, projection comptée positivement dans le sens même de la force F , négativement en sens contraire ; θ la projection, sur l'axe du couple C , de la rotation élastique de la droite ad' (par projection de la rotation, il faut entendre ici, et également dans la suite de la présente Note, la projection du vecteur représentatif de la rotation, cette projection étant d'ailleurs comptée positivement ou négativement selon qu'elle est de même sens que le vecteur représentatif du couple ou de sens contraire); 5 le travail accompli pendant la déformation, par les forces et couples extérieurs. Le travail des forces de liaisons est essentiellement nul. Le travail des forces intérieures ou moléculaires est égal à $-\frac{1}{2} \int \phi \, dV$, ϕ désignant le potentiel interne du corps, ou du système de corps, déformé. En vertu du théorème des forces vives, on a finalement $\sum m \, ds = 0$, les points matériels du corps, ou du système, initialement au repos étant parvenus à un nouvel état de repos. dbyGoogle

The text on this page is estimated to be only 13.46% accurate

- il Donc, le travail des forces et couples extérieurs, directement appliqués, est égal au potentiel interne du corps (ou du système de corps) déformé. Conséquemment, ce travail ne dépend que de l'état final de déformation; il est indépendant des états intermédiaires et, par suite, de la façon dont ont varié les forces et couples extérieurs ('). Pour le calculer, on peut donc se fixer tel mode de variation qu'on juge convenable, de ces forces et couples. Admettons, dès lors, que, pendant la déformation, ils restent constamment dans les mêmes rapports entre eux, de sorte qu'à un état intermédiaire quelconque de la déformation, ils peuvent être représentés par F_p et C_p , p désignant un nombre positif variant de 0 à 1 pendant la déformation complète. A ce même état de déformation, d'après le principe de la superposition des effets élastiques des forces, la projection du déplacement élastique du point d'application de la force F_p , sur la direction de cette force, est Δp et la projection, sur l'axe du couple G_p , de la rotation élastique de la droite aa , est ωp , X et ω désignant les valeurs de ces déplacements projetés, à la fin de la déformation. Pendant le passage de cet état intermédiaire de déformation à l'état infiniment voisin suivant, les forces et couples s'accroissent de dF_p et de dC_p , les déplacements projetés correspondants varient de $rf(Xp)$ et de $rf(\omega p)$; par suite, ces forces et couples accomplissent, entre ces deux états, un travail élémentaire dW ayant pour valeur, aux infiniment petits du second ordre près, l'étendant à toutes les forces F et à tous les couples C , pour la déformation entière, est donc $(2F^2 + 2C^2) \cdot (r, \omega p = K^2 + 2c') \cdot \frac{1}{2}$ Pour qu'il en soit ainsi, il faut qu'à un système de forces et couples extérieurs donné ne puisse correspondre qu'un seul état de déformation du corps qui, au point de vue physique, peut être considéré comme évident et d'ailleurs, été démontré analytiquement par Beltrami, Kirchhoff et Cosserat (Annuaire de Mécanique rationnelle, t. III, 1903, p. 515), les sommes s'étendant à toutes les forces F et à tous les couples C . Le travail total, pour la déformation entière, est donc W

The text on this page is estimated to be only 15.53% accurate

En portant cette expression de ϵ dans la relation (12) déduite du théorème des forces vives, on obtient l'équation fondamentale ($\epsilon = \frac{1}{2} \frac{d^2 u}{dx^2}$) qui n'est autre, sous une forme différente, que l'équation de Clapeyron ('). La démonstration qui vient d'en être donnée est, comme on le voit, extrêmement simple. 13- Proposons-nous d'étendre l'équation de Clapeyron au cas où la déformation est, à la fois, élastique et calorifique, ce qui, croyons-nous, n'a pas encore été fait. A cet effet, considérons un système de corps isotropes, isostatique ou hyperstatique ; soumettons-le à l'action de forces et couples extérieurs quelconques et d'une élévation de température initialement nuls et croissant lentement jusqu'à des valeurs finales F , C et t (t est compté à partir de la température à laquelle ont été réalisées les liaisons du système). Soient : 1° X la projection du déplacement élastique et calorifique du point d'application de l'une quelconque F des forces extérieures, sur la direction de cette force ; 2° f la projection, sur l'axe de l'un quelconque C des couples extérieurs, de la rotation élastique et calorifique de la droite joignant les points d'application des deux forces formant ce couple ; les paramètres de la déformation élastique et calorifique d'un parallélépipède élémentaire, découpé en un point quelconque $\{x, y, z\}$ du système de corps, par des plans normaux aux axes de coordonnées (x, y, z) ; 3° $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$, les fatigues normales, sur les trois faces de ce parallélépipède, ayant le point (x, y, z) comme sommet commun (n° 2); (') Lamé, Leçon* sur la théorie mathématique de l'Élasticité des corps solides, 1866, p. 80. dbyGoogle

The text on this page is estimated to be only 16.71% accurate

•> t_{xy} , l_x ; / $_{,1}$, t_{y2} ; l_x , t_{iy} , les fatigues tangentielles sur ces mêmes faces ; 6" ns/xdydz et II les potentiels internes respectifs de ce même parallélépipède et du système de corps, déformés (n° 1). . Ces diverses notations sont relatives à l'état final de déformation du système; nous les conserverons pour un état intermédiaire quelconque, mais en les accentuant. Considérons la déformation infiniment petite que prend le système de corps, entre les deux états de déformation intermédiaires, correspondant, le premier, aux valeurs F' , C et t' des forces et couples extérieurs et de la variation de température ; le second, aux valeurs $F'-f$, dF' , $C-f$, dG et $t'-f$, $d-t$ de ces mêmes quantités. Pendant cette déformation, le travail des forces et couples extérieurs est égal à celui des forces élastiques en vertu du théorème des forces vives. Calculons chacun de ces deux travaux : Travail des forces et couples extérieurs. — Ce travail est, aux infiniment petits du second ordre près, Travail des forces élastiques. — Pendant la déformation infiniment petite considérée, les paramètres de la déformation élastique et calorifique d'un parallélépipède quelconque, varient de dt'_c — $osrft'$, dt'_y — $aids'$, dz' : — $nrfc''$, df'_{yz-i} $^{ii.ri}$ Tij . et le potentiel de ce parallélépipède s'accroît de $d(ta'dr dydz) = dm'dx dydz$. Le travail des forces élastiques, calculé pour la déformation purement élastique du parallélépipède, définie par les variations dg'_{xi} . . . , $d-]xf$ des six paramètres de la déformation élastique, est égal à l'accroissement $dm dx dy dz$ du potentiel interne ; le travail de ces mêmes forces, calculé pour la déformation purement calorifique, définie par la variation — $a d-s'$ de l'unique paramètre de la déformation calorifique, est, aux infiniment petits d'ordre supédbbyGoogle

The text on this page is estimated to be only 11.80% accurate

$$-(n'_j dy ds) x d - dj: - (n'_y ds da;) z d^*, dy - (n'_x dx dy) x < l - : 'd; = -$$

$$et(n'_x - * - n'_y - * - nl) dt i \& edy ds, [misqu'à cette variation correspondent des$$
allongements $x di' dx$, $x th' dy$, $x ds' ds$ des arêtes du parallélépipède et que le travail des forces élastiques tangentiels est nul, la déformation purement calorifique s'effectue sans distorsions. Par conséquent, le travail de déformation élastique et calorifique est, pour le parallélépipède considéré, $dix' dx rty dz - a(n[e+ \gg'. -+- n':) rh' dcdy dz$, et, pour le système de corps entier, $dll' - f f I Hn'jc^r n'y -h n \backslash th' dx dy ds$, l'intégrale triple étant étendue à tout le volume occupé par le système. L'équation exprimant l'égalité du travail des forces et couples extérieurs et du travail des forces élastiques, pendant la déformation infiniment petite considérée du système de corps, est donc $04) Y F' - rt' + V G df = < / !]' - f f f a(n'x + n'y + ri:) d - J dx dy di$. L'égalité de ces deux travaux a lieu également pour la déformation complète du système, quel que soit, d'ailleurs, le mode de croissance des forces et couples extérieurs et de la température. Plaçons-nous dans l'hypothèse qu'à un état intermédiaire quelconque de la déformation, on ait, p désignant un nombre positif croissant de 0 à 1 pendant la déformation, et, par suite (ce qui peut être considéré comme évident au point de vue physique), $db y Google$

The text on this page is estimated to be only 13.46% accurate

Dès lors, dans cette hypothèse, l'équation (i4) s'écrit élanl admis que l'élévation de température t est la même en tous les points du système de corps. En intégrant entre les limites $p = 0$ et $p = i$, qui correspondent respectivement à l'origine et à la fin de la déformation, et en remarquant que l'intégrale de $t \, dl$, prise pour la déformation complète, est égale à II , potentiel interne du système déformé, on obtient (i5) $(2 \int_0^i F \, dx + 2 \int_0^i C \, dt) = II - \int_0^i P \, dx + \int_0^i C \, dt$. Telle est l'équation de Clapeyron étendue au cas où la déformation est, à la fois, élastique et calorifique. Bien qu'établie pour un mode de variation particulier des forces et couples extérieurs, cl de la température, elle a lieu quelles que soient les valeurs finales P , C et t de ces quantités, attendu que l'état final de déformation du système est indépendant des états intermédiaires. Mais son premier et son second membre ne représentent respectivement le travail des forces et couples extérieurs et le travail des forces élastiques, que dans le cas du mode de variation particulier dont il s'agit. Au contraire, dans l'équation (i3) de Clapeyron, les deux membres représentent ces deux travaux, quel que soit le mode de variation des forces et couples extérieurs et de la température. Si le système est soumis à un abaissement de la température, il suffit de compter 7 négativement dans la formule (i5), La démonstration qui précède, appliquée à un système de corps à fibres moyenne, donne (i6) $\int_0^i (F \, dx + 2 C \, dt) = T \int_0^i \frac{1}{N} \, dx$ P_i désignant l'effort normal en une section transversale quelconque de l'un quelconque des corps, dx l'élément de fibre moyenne compris entre cette section et la section infiniment voisine, et l'intégrale étant prise tout le long des fibres moyennes des corps du système. dbyGoogk

The text on this page is estimated to be only 16.19% accurate

On peut d'ailleurs passer directement de l'équation (15) à l'équation (16), en établissant que, dans tout système de corps à fibres moyennes, on a $\int_V (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) dx dy dz = F$. Voici la démonstration de cette formule que nous aurons à utiliser plus loin. Évaluons l'intégrale triple, d'abord pour une tranche infiniment mince comprise entre deux sections (S) et (S') de l'un quelconque des corps, faites en deux points G et G' de la fibre moyenne, dont la distance GG' = ds. A cet effet, considérons le volume de cette tranche comme formé d'un nombre infiniment grand de parallélépipèdes élémentaires, de volume $dx dy dz$, dont l'une des deux faces $dy dz$ serait placée dans la section (S) et dont les quatre arêtes dx seraient perpendiculaires à cette section. Les corps à fibres moyennes étant, par hypothèse, considérés comme rigides dans le sens transversal à ces fibres, les fatigues σ_{xy} et σ_{yz} sont nulles; d'autre part, aux infiniment petits du second ordre près et à la convergence près des deux sections (S) et (S'), convergence toujours très faible dans les corps de la Résistance des matériaux, on a l'ar suite, pour la tranche considérée, $\int_V (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) dx dy dz = ds \cdot \int_S (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) dy dz$. $\int_S (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) dy dz$ représente la force élastique sur l'élément de surface $dy dz$ de la section (S); l'intégrale double est la somme algébrique de ces forces, pour toute cette section, somme qui, par définition, est l'effort normal N. Donc, toujours pour la tranche considérée, $\int_V (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) dx dy dz = N ds$. Par conséquent, pour le système de corps entier, on a $\int_V (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) dx dy dz = \sum F_i$ dbyGoogle

The text on this page is estimated to be only 14.33% accurate

celle dernière intégrale étant prise tout le long des fibres moyennes de tous les corps du système. c. q. f. d. Théorème des dérivées du travail, de Castiglione. 11. Le corps ou le système de corps, isostatique ou hyperstatique, considéré précédemment (n° 12) ayant pris son état d'équilibre élastique sous l'action d'un système de forces et couples extérieurs F et C , donnons à ces forces et couples des accroissements infiniment petits, arbitraires dF et dC . Soient : δu les accroissements correspondants, positifs ou négatifs, des déplacements projetés X et y ; δW l'accroissement correspondant du travail des forces et couples extérieurs; δU l'accroissement correspondant du potentiel interne. δW représente le travail élémentaire accompli par les forces et couples F et C , pendant que ceux-ci croissent de dF et de dC et que, corrélativement, les déplacements projetés croissent de dX et dy ; il a donc pour expression, aux infiniment petits du second ordre près, $\delta W = \sum F dX + \sum C dy$; la substitution de cette expression dans la formule (12) différentiée, donne $\delta U = - \sum F dX - \sum C dy$. D'autre part, en différenciant l'équation fondamentale (13) (n° 12), on a un membre à membre ces deux dernières équations et en développant la différentielle totale δU , on obtient la relation

The text on this page is estimated to be only 17.23% accurate

qui ne peut être satisfaite que si l'on a séparément (.8) l-sp, »-,,...
puisque les accroissements δF et δC sont arbitraires. D'où : Théorème. —
Si un corps élastique, isotrope ou à fibre moyenne, ou un système de pareil
corps (isostatique ou hyperstatique) est soumis à un système quelconque de
forces et couples extérieurs: 1° La projection, sur la direction de l'une
quelconque des forces, du déplacement élastique du point d'application de
cette force, est égale à la dérivée partielle, par rapport à cette même force,
du potentiel interne du corps, ou du système de corps, déformé. 2° La
projection, sur l'axe de V un quelconque des couples, de la rotation
élastique de la droite joignant les points d'application des deux forces de ce
couple, est égale à la dérivée partielle, par rapport à ce même couple, du
potentiel interne du corps, ou du système de corps, déformé. Tel est le
théorème de Castigliano (*) appelé par cet ingénieur théorème des dérivées
du travail, dénomination qui se justifie par le fait que, d'après la formule (12)
(n° 12), le potentiel interne est égal au travail des forces extérieures
pendant la déformation. 15- Corollaire 1. — Si, parmi les forces extérieures,
il y en a deux F égales et opposées, l'accroissement élastique Aide la
distance $I = AB$ de leurs points d'application A et B est égale à la dérivée
partielle -r- du potentiel interne par rapport à F . En effet, supposons d'abord
que les deux forces soient inégales; désignons par F' celle appliquée en A ,
par F'' celle appliquée en B ; (*) Castiglione, A'ou relie théorie de l'équilibre
des systèmes articulés (Acte de l'Académie de Turin, 1875); Théorie de
l'équilibre des systèmes élastiques (Turin, 1879). dbyGoogle

The text on this page is estimated to be only 13.38% accurate

on peut toujours poser (a) $F' = F$, $r = AT$, k' et k'' désignant deux nombres quelconques positifs. Soient : à l'accroissement élastique de la distance $AB = l$; accroissement qui est différent de l , mais lui devient égal dans le cas particulier où $k' = k'' = i$; X' et X'' les déplacements élastiques des deux points A et B. estimés suivant la direction commune AB des deux forces F' et F'' , et comptés positivement, le premier dans le sens de F' , le second, dans le sens de F'' . On a évidemment $W = r(X' + X'')$. Mais, d'après le théorème de Casigliano, W diffère de U , mais devient égal à U dans le cas particulier où $F' = F'' = F$. Par suite, U et, en faisant $F' = F'' = F$, Or, U , qui est fonction de F' et de F'' , peut aussi être considéré comme fonction de F , puisque, par hypothèse, F' et F'' sont liés à F par les relations $\{ \}$; ce qui permet d'écrire $\frac{dU}{dF} = S \frac{dW}{dF} + \frac{1}{2} \frac{dr}{dF} - \frac{1}{2} \frac{dF}{dF} = \frac{1}{2} \frac{dF}{dF}$ ou $\frac{dU}{dF} = \frac{1}{2} \frac{dF}{dF}$ faisant $k' = k'' = i$, ce qui entraîne $F' = F'' = F$ dbyGoogk

The text on this page is estimated to be only 18.64% accurate

Par suite, l'expression (b) de $i\mathfrak{f}$ devient Corollaire II. — Si, parmi les forces extérieures, il y en a quatre appliquées en quatre points a, a', b, b' situés dans un même plan, si ces forces sont également situées dans ce plan. si celles appliquées en a et en a' constituent un couple C , et si celles appliquées en b et en b' constituent un couple égal et contraire au précédent, la droite aa subit, relativement à la droite Ob' , une rotation élastique dont la projection sur l'axe $\bullet$ du couple C est égale à la dérivée partielle $^{\wedge}$ du potentiel interne par rapport à C . Ce corollaire découle de la seconde partie du théorème de Castigliano et se démontre de la même manière que le corollaire 1. Corollaire IH. — Dans le cas d'un corps à fibre moyenne, ou d'un système de pareils corps, si un couple C est appliqué à une section transversale quelconque, la projection, sur l'axe de ce couple, de la rotation élastique de cette section, $e^{\wedge}t$ égale à la dérivée partielle, par rapport à ce même couple, du potentiel interne du corps, ou du système du corps déformé. De plus, s'il y a flexion plane, ce qui exige que l'axe $\leq$ lu couple C soit normal au plan de flexion, cette dérivée représente la rotation même de ta section. Soient {fig. 3) : a et a' les points d'application, sur la section considérée (S), des deux forces F et $-F$ constituant le couple C ; T la direction de l'axe de ce couple, laquelle est normale au plan de F et de $-F$ et, par suite, à la droite aa' contenue dans ce plan; . dbbyGoogk

The text on this page is estimated to be only 14.60% accurate

- 31 — θ la rotation de la section (S) ; θ_1 la rotation de la droite ad; $\theta_1 \sin \alpha$ la projection de cette dernière rotation sur la direction Y. D'après la seconde partie du théorème de Castigliano, on a il suffit donc, pour établir le corollaire, de montrer que la projection de la rotation θ de la section (S), sur la direction V de l'axe du couple C, est égale à la projection $\theta \sin \alpha$, sur cette même direction, de la rotation θ_1 de la droite aa'. Or, la rotation θ peut être décomposée en : 1° une rotation équipollente à θ_1 , qui amène la droite aa' située dans le plan de la section (S), de sa position initiale à sa position finale; 2° une rotation θ_2 autour de ad ; de sorte qu'on a l'équipollence. Projétons cette équipollence sur la direction T ; W étant normale à T a une projection nulle; donc la projection de la rotation θ sur la direction T est égale à la projection $\theta \sin \alpha$ de la rotation θ_1 sur cette même direction. c. y. y. n. Application du théorème de Castigliano au calcul des déplacements élastiques. 16. Pour appliquer le théorème de Castigliano au calcul des déplacements élastiques dans les corps ou les systèmes de corps

dbvGoogk

The text on this page is estimated to be only 10.64% accurate

Isotropes, il est nécessaire de former l'expression du potentiel interne, en fonction des forces et couples extérieurs F et C . A cet effet, il faut calculer les six fatigues n et t (ou les six paramètres s et y) ($n^{\circ} 2$ et 3), en fonction de ces mêmes forces et couples, et les substituer dans l'expression générale (3) ($n^{\circ} 4$) (ou (4), même numéro) du potentiel rapporté à l'unité de volume. Or, en l'état présent de la Théorie mathématique de l'Elasticité, ce calcul n'est possible que dans un très petit nombre de cas particuliers. Il s'ensuit qu'actuellement du moins le théorème de Castigliano est en général inutilisable, en ce qui concerne les corps et les systèmes de corps isotropes. Par contre, il est immédiatement applicable aux corps et aux systèmes de corps à fibres moyennes. En effet, l'expression de leur potentiel est, d'après les formules (o.) et (11) u9i. ' - /"(- + T* T? M| M* M,\ ,h : et, si l'on porte cette expression dans celles (181 ($n^{\circ} H$) de À et de s, on obtient $J \int \hat{U} \text{tf} F \text{ ME } dMg \text{ M. } dM, M; dM; \backslash . \text{ " * " (j l; } < / F * + E T, 5 F \sim \sim E I [$
 $O V j ' \blacksquare / (_ N _ m T ^ d T f l T ; o T ; l i a o C + O U d C + G i i o C M j r t M | M ^ M ^$
 $M ; d M g \backslash \text{ " } \blacksquare \text{ " } G I (r f C + K l . o C \text{ " " " } E l ; o C /$ Dès lors, pour calculer A et $< p$, il suffit d'effectuer, au centre de gravité de chaque section, la réduction des forces extérieures appliquées à gauche de cette section (forces de liaisons comprises). ce qui fait connaître $N, \dots, M$; en fonction de F et de C , puis de r l j $\blacksquare \blacksquare n < * N d M r \hat{e} S \hat{e} U$. former les dérivées partielles—., ...,—¹⁻
 $7 ; , \dots , \text{— } r r , \text{ et de } r \text{ or } 0 1 ' 0 < _ i o c ,$ substituer ces résultats dans les formules (19) et (ao). Si le corps (ou le système du corps) est soumis à la flexion plane ($n^{\circ} 9$), l'expression du potentiel interne se simplifie notaci bvGoogle

The text on this page is estimated to be only 12.50% accurate

iement et les formules (19) et (20) se réduisent à $f/N \cdot i \cdot N \cdot T \cdot i) T \cdot M$
 $dM \setminus$, (ao') Les formules qui précèdent ne font connaître les déplacements
 projetés et les rotations projetées que pour les points d'application des
 forces extérieures et pour les sections d'application des couples extérieurs.
 Mais, par un artifice très simple, il est facile de les étendre à un point
 quelconque et à une section quelconque. Ainsi, soit à déterminer le
 déplacement élastique d'un point quelconque A, en projection sur une
 direction arbitrairement choisie à. Appliquons, en ce point CL suivant celle
 direction, une force auxiliaire -i, de grandeur quelconque, en sus des forces
 et couples extérieurs donnés F et C; dès lors, les éléments N, TT_i , . . . , M_{ϕ}
 de la réduction des forces élastiques dans une section quelconque (ou des
 forces extérieures de gauche), au centre de gravité de cette section,
 deviennent $N + X$, $H - T^{\wedge} + s_{,,}$, ..., $M(-+- 3R_i)$; si l'on désigne par X, $G_{,,}$, . . . ,
 J_{ll} ce que seraient les éléments de cette réduction, si la force -i était seule
 appliquée, à l'exclusion des forces et couples F et C. Le déplacement-
 élastique du point A, sous l'influence du système F, C, S, a pour expression,
 en projection sur la direction A, $-/F_i > j -f- x \grave{a} (N -j-x_j T_{fi} + s. j_{\phi} i y_{ih} . \grave{a} \hat{J}^*$
 en vertu de la formule (19). Pour obtenir le déplacement projeté cherché, il
 suffit évidemment de faire $f = 0$, ce qui entraîne $X = 0$, $G_{,,} = 0$, . . . , $3lt; = 0$;
 il vient ainsi, observation faite que N, $TV|$, . . . , M_{ϕ} sont indépendants de à
 et que, par suite, — : , — *■', ■ ■ ■ , —3* sont nuls, '-f(EQ tf-? GU rfi El'
 rfi / dbbyGoogk

The text on this page is estimated to be only 12.60% accurate

De même, la rotation d'une section quelconque (S), en projection sur une direction T arbitrairement choisie, est exprimée par la formule

$$\theta = \frac{1}{EI} \int_C \mathbf{r} \times \mathbf{C} + \frac{G}{EI} \int_C \mathbf{r} \times \mathbf{dQ} + \theta_0$$

dans laquelle θ , θ_0 , ..., θ_n sont les éléments de la réduction des forces élastiques dans une section quelconque, au centre de gravité de cette section, le corps, ou le système de corps, étant supposé soumis exclusivement à un couple auxiliaire, d'intensité G quelconque, appliqué à la section (S) et de direction d'axe T. Dans le cas de la flexion plane, la direction A doit, bien entendu, être située dans le plan de flexion et la direction V être normale à ce plan, et les formules (ai) et (aa) se réduisent à

$$\theta = \frac{1}{EI} \int_C \mathbf{r} \times \mathbf{X} + \frac{M}{EI} \int_C \mathbf{r} \times \mathbf{dO} + \theta_0$$

est alors la rotation même de la section (S). N, T, ..., M sont, dans le système de corps considéré, soumis aux forces et couples donnés F et C, les éléments de la réduction, au centre de gravité d'une section quelconque de l'un quelconque des corps, des forces extérieures agissant à gauche de cette section, forces de liaisons comprises. θ , θ^* , ..., θ_n sont les éléments de même nature, dans ce système soumis soit à la force auxiliaire if, soit au couple auxiliaire S. Le calcul de ces divers éléments de réduction exige la détermination préalable des forces de liaisons. Si le système considéré est isostatique, cette détermination ne relève que de la Statique pure et n'offre aucune difficulté. S'il est hyperstatique, elle exige l'intervention de la Théorie de l'Elasticité; nous traiterons plus loin cette question. Toutefois, on peut éviter cette intervention, en ce qui concerne le calcul des éléments θ , θ^* , ..., θ_n ; voici comment :

dbbyGoogle

The text on this page is estimated to be only 13.73% accurate

Soient, dans un système hyperstatique quelconque, sollicité par les forces et couples F et C donnés, F , les forces de liaisons surabondantes extérieures et intérieures, forces qui sont inconnues. Considérons le système isostatique, obtenu par la suppression de toutes les liaisons surabondantes de ce système hyperstatique; soumettons-le aux forces et couples F , C et aux forces inconnues F_j ; il prend un état de déformation identique à celui du système hyperstatique, soumis seulement aux forces et couples F et C ; par conséquent, au lieu de calculer les déplacements élastiques projetés Δ et les rotations élastiques projetées θ . dans le système hyperstatique, il revient au même de les calculer dans le système isostatique; dès lors, dans les formules (21) et (22) (n° 16) : 1° les éléments de réduction Δ , θ , ..., Δ_j deviennent relatifs à ce système isostatique, soumis soit à la force auxiliaire j , soit au couple auxiliaire G ; 2° les éléments de réduction N , T , ..., M deviennent également relatifs à ce même système isostatique, soumis aux forces et couples F , C et aux forces F_j inconnues; mais ces derniers éléments ont les mêmes valeurs que dans le système hyperstatique soumis seulement aux forces et couples F et C donnés, puisque l'état de déformation de ces deux systèmes est le même. Donc, dans l'application des formules (31) et (22) [ou (31') et (22')] à un système hyperstatique, on peut considérer les éléments de réduction X , G , ..., Δ_j (ou Δ , G , θ), comme afférents au système isostatique obtenu par la suppression des liaisons surabondantes de ce système hyperstatique, ce qui les rend calculables par la Statique pure; quant aux éléments de réduction N , T , ..., M , ils restent, par contre, afférents au système hyperstatique, et leur détermination nécessite l'intervention de la Théorie de l'Elasticité.

Théorème du général Menabrea. Détermination des forces de liaisons surabondantes. 18. Considérons un corps isotrope ou une fibre moyenne, ou plus généralement un système de pareils corps. Ce système est hyperstatique; il est en équilibre élastique, sous l'action de forces et couples directement appliqués F et C ; et nous supposons, ce dbyGoogle

The text on this page is estimated to be only 15.62% accurate

qui est le cas le plus complexe, que ses liaisons surabondantes sont, les unes extérieures, les autres, intérieures. Rendons-le isostatique (n° 11) par la suppression des dites liaisons surabondantes, en lui appliquant, d'ailleurs, les forces correspondant aux liaisons ainsi supprimées, afin que son état d'équilibre élastique ne soit pas troublé; soient F_x et G_x , une force et un couple quelconques de liaisons extérieures surabondantes, F_y et C_y , une force et un couple quelconques de liaisons intérieures surabondantes.

Relativement au système rendu isostatique, ces forces doivent être considérées comme des forces directement appliquées, au même titre que les forces et couples F_x et C_x . Or, du fait même des liaisons extérieures, la projection $\sim k$ du déplacement élastique du point d'application de la force K_x , sur la direction de cette force, est nulle, et la rotation de la section d'application du couple C_x , est également nulle. On a donc, d'après les formules générales (18) (n° 14), à $\sum \delta U = \sum \delta W = 0$, D'autre part, une liaison intérieure quelconque et, en particulier, une liaison intérieure surabondante, consiste ordinairement en ce qu'un point A d'une pièce P du système est astreint à rester invariablement lié à un point B d'une autre pièce Q. Les forces de liaison correspondantes sont une force F_x , appliquée en A à la pièce P, et une force égale et contraire appliquée en B à la pièce Q; la distance AB de ces deux points, nulle avant déformation, est donc encore nulle après; par suite, en vertu du corollaire I (n° 15) du théorème de Castigliano, on a Enfin, si les liaisons surabondantes d'une pièce P avec une pièce Q consistent en ce que deux points a et a' de la première sont astreints à rester invariablement liés à deux points b et b' de la seconde, les forces de liaison correspondantes se composent de deux forces égales et opposées appliquées en a et en b et de deux autres forces égales et opposées, appliquées en a' et en b' ; si les deux forces appliquées en a et en a' constituent un couple C_x , dbyGoogle

The text on this page is estimated to be only 14.73% accurate

— 37 — les deux forces appliquées en b. et en b' constituent un couple égal et contraire. Dans ce cas, la rotation élastique de la droite ad relativement à la droite bb' étant nulle, on a, en vertu du corollaire II (n° 15), En résumé, les dérivées partielles du potentiel interne du système déformé, par rapport aux forces et aux couples de liaisons surabondantes, tant extérieures qu'intérieures, sont nulles. Donc, les valeurs de ces forces et couples rendent maximum ou minimum ce potentiel ; il reste à décider entre ces deux alternatives. Soit A la valeur d'une quelconque des forces FPS, valeur satisfaisant, par conséquent, à l'équation $\frac{\partial H}{\partial F_c} = 0$. Pour toute autre valeur attribuée arbitrairement à la force F_w , la projection, sur la direction de cette force, du déplacement de son point d'application, n'est pas nulle : elle a pour expression $A - 5r\%$? or il est évident que si, à partir de cette valeur arbitraire de la force F_e , celle-ci prend un accroissement $t/F_{,,}$, la variation correspondante rfX du déplacement projeté X est de même sens que F_e , c'est-à-dire positive, de sorte qu'on a cette inégalité, établie pour toute valeur de F_e différente de A, a lieu également pour $F_{,,} = A$, attendu que, le potentiel II étant du second degré en $FP1$ {'), sa dérivée seconde par rapport à (')) n est une fonction du second degré des fatigues normales et tangenielles; or, ces fatigues sont des fonctions linéaires des forces extérieures qui les produisent; donc II est une fonction du second degré des forces extérieures et, en particulier, de la force V_u . db»Googk

The text on this page is estimated to be only 17.23% accurate

cette variable est indépendante de la valeur attribuée à celle-ci. On démontre, de la même façon, que les dérivées secondes de Π , par rapport à C_{ij} , F_i , et C_i , sont positives. Certains auteurs en concluent que Π est minimum, et énoncent de la manière suivante, ou d'une manière approchante, le théorème du général Menabrea : Dans un système hyperstatique, formé de corps isotropes ou à fibres moyennes, les valeurs que prennent, en fait, les forces et couples de liaisons surabondantes extérieures et intérieures, rendent minimum le potentiel interne du système, considéré comme une fonction de ces forces et couples. Cet énoncé est très séduisant; mais il va au delà de ce qui est réellement démontré : en effet, la condition du minimum de Π est que la différentielle totale de cette fonction soit positive, pour les valeurs de F_i , ..., C_i (qui annulent les dérivées partielles premières $\frac{\partial \Pi}{\partial F_i} = 0$, $\frac{\partial \Pi}{\partial C_i} = 0$; or, il est seulement établi que, si $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial F_i^2} > 0$, $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial C_i^2} > 0$, d'il tt'D pour ces valeurs, les dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial F_i^2}$, $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial C_i^2}$ sont positives. Aussi, croyons-nous devoir nous en tenir à l'énoncé

Théorème. — Dans un système hyperstatique, formé de corps isotropes ou à fibres moyennes, les valeurs que prennent, en fait, les forces et couples de liaisons surabondantes extérieures et intérieures annulent les dérivées partielles premières du potentiel interne considéré comme une fonction de ces forces et couples. En outre, si, dans cette fonction, on remplace ces mêmes forces et couples par leurs valeurs effectives, sauf toutefois l'une de ces forces ou l'un de ces couples, la fonction d'une seule variable ainsi obtenue est minimum pour la valeur effective de cette force ou de ce couple. Au surplus, en ce qui concerne les applications, la question de savoir si le potentiel interne est ou non minimum est dénuée d'intérêt : le seul point qui importe est que les valeurs effectives des forces et couples de liaisons surabondantes annulent les dérivées partielles premières de ce potentiel.

dbbyGoogk

The text on this page is estimated to be only 13.14% accurate

The text on this page is estimated to be only 11.56% accurate

dans laquelle ; X est la projection du déplacement élastique e calorifique du point d'application de l'une quelconque F des forces extérieures, sur la direction de cette force; t_p la projection, sur l'axe de l'un quelconque C des couples extérieurs, de la rotation élastique de la droite joignant les points d'application des deux forces formant ce couple; U le potentiel interne du système de corps déformé; $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ les fatigues normales sur trois éléments menés normalement aux axes de coordonnées, en un point quelconque (x, y, z) du système. Cette équation a lieu quel que soit le système de valeurs attribué à F, C et t ; par suite, l'équation obtenue en la différenciant par rapport à ces variables indépendantes et par rapport aux quantités $x, y, z, U, \epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$, ne qui en dépendent, a lieu également; on peut donc écrire (a) $2 F \frac{\partial U}{\partial x} + 2 X \frac{dF}{dx} + 2 C \frac{dX}{dx} + 2 t \frac{dC}{dt} = \frac{dU}{dt} - \frac{dU}{dx} \frac{dx}{dt} - \frac{dU}{dy} \frac{dy}{dt} - \frac{dU}{dz} \frac{dz}{dt}$ et, dans cette dernière équation, les accroissements dU, dC et dx sont arbitraires. Envisageons la déformation infiniment petite que prend le système de corps, entre les deux états de déformation correspondant, le premier, aux valeurs F, C et t des forces et couples extérieurs et de l'élévation de température, le second, aux valeurs $F + dF, C + dC$ et $t + dt$ de ces quantités. Pendant, cette déformation, le travail des forces et couples extérieurs est égal au travail des forces élastiques; l'équation exprimant ce fait a été établie précédemment : c'est celle (i4) (nn 13), laquelle, suppression faite des accents, ce qui n'est qu'une question de notation, est (b) $\frac{\partial U}{\partial x} \frac{dx}{dt} - \frac{\partial U}{\partial y} \frac{dy}{dt} - \frac{\partial U}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \frac{dU}{dt} - \frac{dU}{dx} \frac{dx}{dt} - \frac{dU}{dy} \frac{dy}{dt} - \frac{dU}{dz} \frac{dz}{dt}$. ■Retranchons membre à membre les équations (a) et (b); il

The text on this page is estimated to be only 12.17% accurate

(c) $V \frac{dF}{dt} + \frac{dC}{dt} = r \frac{dH}{dt} - \int_V \frac{d}{dt} \{ n_x + n \} + n_t \} dx dy dz$. Les
 fatigues $\frac{1}{t}$, ..., yry el, par suite, le potentiel interne Π dépendent des forces
 et couples extérieurs F et C directement appliqués et des forces de liaisons.
 Si le système est hyperstatique, celles-ci dépendent non seulement de F et
 de C , mais aussi de la température, un tel système n'étant pas librement
 dilatable; de sorte que, dans l'équation (c), x , n_r , n_t et Π sont fonction de F ,
 de C et de t . Si le système est isostatique, ces quantités sont, au contraire,
 indépendantes de t , un tel système étant librement dilatable. Ceci posé,
 supposons d'abord que le système considéré soit isostatique et, dans cette
 hypothèse, développons dans l'équation (c) les différentielles totales dU et
 $(l(t) - n_r - n_z)$; il vient, étant admis que la variation de température est la
 même en tous les points du système, $-2s'' + 2S'' = 2,4 \left[\frac{d}{dt} \{ n_x + n \} + n_t \right] - 2m$
 $\left[\frac{d}{dt} \{ n_x + n \} + n_t \right] dc$ ou, en posant $\{ 23 \} H = n - \frac{d}{dt} \{ n_x + n \} + n_t$
 $P_1 \int_V dx dy dz$, $2''F + 2''0 = 2^2 f''$. Pour que cette dernière équation soit
 satisfaite, il faut qu'on ait séparément puisque les accroissements $r \frac{dF}{dt}$ et dC
 sont arbitraires. Les formules (a3) et (24), établies pour les systèmes

àostadbyGoogk

The text on this page is estimated to be only 14.68% accurate

tiques, restent valables pour les systèmes hyperstatiques. En effet, soient, pour un système hyperstatique quelconque donné, F , les forces de liaison surabondantes tant intérieures qu'extérieures. Considérons le système isostatique, obtenu par la suppression de toutes les liaisons surabondantes de ce système hyperstatique ; soumettons-le aux forces et couples F , C , F , et à la variation de température t ; les formules (a3) et (24) lui sont applicables; or, son état de déformation est identiquement le même que celui du système hyperstatique donné, soumis aux forces et couples F et C et à la variation de température t , et, par suite, les diverses quantités X , $\leq p$, II , nx , j -, nz ont les mêmes valeurs dans ce système isostatique que dans le système hyperstatique; donc les formules (23) et (24) sont également applicables à ce dernier système, c. o. f. n. Les deux formules (24) ne diffèrent de celles {18) (n° 14) que par le remplacement de la fonction U par la fonction H ; elles se traduisent donc, sauf ce remplacement, par une proposition identique au théorème de Castigliano. La démonstration qui précède, appliquée au cas d'un système de corps à fibres moyennes, conduit encore aux formules {a4) i niais (*5) $H = H - ax$ $fiid^*$. On peut, d'ailleurs, passer directement de l'expression (a3) de H à l'expression (a5), en remarquant que, d'après la formule (17) (n° 13), on a, pour tout système de corps à fibres moyennes, $f f f \backslash n.c.-+ - nx+ n:) dx dy dt = f N dt$. 1 passant, qui -ession résuli -5/KS ; cas de la fie » = $i/[(\pounds -\ll "h m + \pounds]^*$ ■ Notons, en passant, que si, dans la formule (a5), on remplace fl par son expression résultant des formules (11) et (9) (n°9), on obtient .fil EltJ Dans le cas de la flexion plane, cette dernière formule s r/'lluil à $II : ai$,
Google

The text on this page is estimated to be only 15.51% accurate

— 48 — 20. La quantité H peut s'interpréter comme suit : Soient, dans un système de corps à fibres moyennes, hyperstatique, soumis à des forces et couples F et C , ainsi qu'à une variation de température t , F , les forces de liaison surabondantes tant intérieures qu'extérieures. Sur le système isostatique obtenu par la suppression des liaisons surabondantes de ce système hyperstatique, faisons agir les forces et couples F , C , F , et la variation de température t ; il prend un état de déformation identique à celui du système hyperstatique, soumis aux forces et couples donnés F et C et à la variation de température. Imaginons que cette déformation s'effectue en deux temps, comme suit : Pendant le premier temps, le système isostatique est soumis aux forces et couples F , G , F_t , de sorte que sa déformation est purement élastique et que, par suite, le travail accompli par les forces élastiques est FI . Pendant le second temps, il est soumis à la variation de température ; les forces élastiques demeurent constantes, le système isostatique étant librement dilatable, et elles accomplissent un travail dont la valeur est, pour une tranche d'épaisseur ds , — N x ids , et, pour le système entier, — $a-c / N$ ds . Le travail total des forces élastiques pendant la déformation complète, élastique et calorifique, est donc $ct f N ds = H$; et, si le système est formé de corps isotropes, on trouve, de même, que ce travail total est $-\int (n_x+n_y+n_z) dx dy dz = H$. M. Ernest Flamard appelle la quantité H , travail total de déformation d'un système élastique soumis à une variation de température. Il est à remarquer que cette dénomination est toute conventionnelle; elle n'est exacte que sous réserve que la déformation s'effectue en deux temps et dans l'ordre indiqué plus haut. En effet, si la variation de température précédait, au contraire, l'appliqué par Google

The text on this page is estimated to be only 13.49% accurate

- 44 cation des forces et couples F , C et F_{e} , le travail des forces élastiques se réduirait à H ; si les deux actions étaient simultanées, le travail des forces élastiques serait compris entre II et H . Les formules (a4) n'en constituent pas moins une extension du théorème de Castigliano, au cas où la déformation est à la fois élastique et calorifique. Ce qui précède s'applique évidemment aussi aux systèmes isostatiques. Application du théorème de Castigliano généralisé, au calcul des déplacements élastiques et calorifiques, clans les corps et les systèmes de corps à fibres moyennes.

21. Les expressions générales (a[^]) {[°] 19} des déplacements et rotations élastiques et calorifiques se développent exactement de la même manière qu'ont été développées, au n° 16, les expressions (i8) (n° 14) des déplacements et rotations purement élastiques. On trouve ainsi $\Delta = \frac{1}{E} \int \frac{M^2}{I} ds$. $\Delta = \frac{1}{E} \int \frac{M^2}{I} ds$. $\Delta = \frac{1}{E} \int \frac{M^2}{I} ds$. Ces formules ne diffèrent de celles correspondantes (21) et (22) (n° 16), que par le remplacement de r par $(r; \sim aT)$ ■ Lorsqu'on les appliquera à un système hypers la tique, on aura soin, selon les indications données précédemment (n° 17, in fine), de calculer les éléments de réduction $3\mathcal{E}$, $E^{\wedge}$, . . . , $>H.r$ non pas dans le système hyperstatique considéré, mais dans le système isostatique obtenu par la suppression des liaisons surabondantes de ce système hyperstatique. Dans le cas où la flexion est plane, on a simplement {27') $CM N \backslash dX$, $T dS M$ $rfOILT$. $f-i di J$, , , , , $r \backslash i n \backslash dx$, $t < m m dan-i \{''> T=J [\{ \blacksquare \hat{a} -'' \} -d\ddot{e} + G\hat{a}\ddot{e} + i\ddot{i}er \backslash$ «.Google

The text on this page is estimated to be only 15.07% accurate

Extension du théorème du général Menabrea, au cas où les déformations sont à la fois élastiques et calorifiques. — Détermination des forces de liaisons surabondantes. 22. L'extension du théorème de Castigliano entraîne une extension correspondante de son corollaire, le théorème du général Menabrea; cette extension s'obtient par le remplacement, dans ce dernier théorème, du potentiel interne Π par la fonction H . Pour appliquer le théorème ainsi généralisé, à la détermination des forces et couples de liaisons d'un système hyper statique, on introduira les forces et couples de liaisons surabondantes dans la fonction H , dont on formera les dérivées partielles par rapport à ces forces et couples. Les équations obtenues en égalant à zéro ces dérivées feront connaître les forces et couples de liaisons surabondantes; la Statique pure fournira ensuite les équations nécessaires pour le calcul des forces et couples de liaisons statiques. Exemple de la détermination des forces de liaisons surabondantes extérieures. 23. Soit (fig. 4) un arc AB , encastré à ses deux extrémités, ce qui signifie que les deux sections transversales dont A et B sont les centres de gravité ne peuvent prendre aucun déplacement élastique. Cet arc a pour fibre moyenne une courbe plane et il est de structure symétrique par rapport au plan de cette courbe. Il est soumis à des forces quelconques situées dans ce plan, ainsi qu'à une variation t de température, comptée à partir de la température à laquelle ont été réalisés ses encastremets. Sa flexion est donc plane. Les réactions élémentaires de l'un quelconque des deux encastremets, celui de gauche par exemple, sont réductibles à leur résultante de translation au point A et à un couple résultant, d'axe normal au plan de la fibre moyenne; soient X et Y les composantes de cette résultante, suivant deux axes rectangulaires quelconques Ax et Ay , et Z le couple résultant. La suppression de l'encastrement de gauche ayant évidemment pour effet de rendre l'arc isostatique, cet encastrement constitue les liaisons surabondantes de cet arc (n° 11) et, par dbyGoogle

The text on this page is estimated to be only 12.17% accurate

suite, X , V et Z sont les deux forces et le couple de liaisons
 surabondantes extérieures. On a donc, en vertu du théorème du général
 Menabrea généralisé (n° 22), La fonction H^* exprimée par la formule
 {26') ($n^* > 19$) valable dans le cas de la flexion plane ■- :-/[(£—» h£*S]* et
 dans laquelle l'intégrale est étendue à la longueur totale de la Fi,. 4. 9 fibre
 moyenne de l'arc. Par suite les trois équations ci-dessus peuvent
 /[(A/[(A/KêT «*T M dMI . ~ Gâ JX + El 5x.| + £^ rf' = » y <»z GQ t*Z " Kl
 dij Ceci posé, désignons par v , θ et j^* les valeurs que prendraient
 respectivement, en une section quelconque, de centre de gravité $G(a,y)$, les
 éléments N , T et M de la réduction, en G , des forces extérieures agissant à
 gauche de cette section, si l'arc était rendu isostatique par la suppression de
 son encastrement de gauche; v , θ et p sont immédiatement calculables par la
 Statique pure et peuvent par conséquent, dans la suite, être considérés
 comme connus. dbbyGoogk

The text on this page is estimated to be only 10.21% accurate

On a évidemment $N = \int_0^L dX \cdot T = e - Y$. par suite $\rightarrow N \cdot dx$
 $M dT X_j + Y_3 + \dots$ En substituant ce; douze expressions
dans les équations (a), et en désignant par a et b , les coordonnées du point
B, on trouve : $J \cdot I \cdot \dots$
 $H \cdot \dots$
Ces trois équations font connaître
les deux forces et le couple de liaisons surabondantes. On peut ensuite
calculer les éléments de réduction N , T et M , afférents à une section
quelconque, par les forde, (6). Exemple de la détermination des forces de
liaisons surabondantes intérieures. 24. Considérons un arc encastré à ses
deux extrémités et comportant une rotule 0 (fig. 5). dbyGoogle

The text on this page is estimated to be only 13.06% accurate

Ce arc a pour fibre moyenne une courbe plane et il est de structure symétrique par rapport au plan de cette courbe. Il est soumis à des forces quelconques situées dans ce plan, ainsi qu'à une variation de température, comptée à partir de la température à laquelle ont été réalisés ses encastrement. Sa flexion est donc plane. L'arc considéré est, en réalité, un système de deux arcs AO et OB encastres, chacun à l'une des extrémités et réunis entre eux par la rotule O. L'action de l'arc AO sur l'arc OB est une force appliquée à l'extrémité O de celui-ci, force dont nous désignerons par X et Y les composantes suivant deux axes rectangulaires OX et OY; la réaction de l'arc OB sur l'arc AO est égale et contraire à celle-ci. Il est clair que le système devient isostatique si l'on supprime la liaison des deux arcs en O. Par conséquent X et Y sont les deux forces de liaisons surabondantes intérieures. On a donc, en vertu du théorème du général Menabrea généralisé,
$$\delta U = \delta U_0 + \delta U_1 + \delta U_2 + \delta U_3 + \delta U_4 + \delta U_5 + \delta U_6 + \delta U_7 + \delta U_8 + \delta U_9 + \delta U_{10} + \delta U_{11} + \delta U_{12} + \delta U_{13} + \delta U_{14} + \delta U_{15} + \delta U_{16} + \delta U_{17} + \delta U_{18} + \delta U_{19} + \delta U_{20} + \delta U_{21} + \delta U_{22} + \delta U_{23} + \delta U_{24} + \delta U_{25} + \delta U_{26} + \delta U_{27} + \delta U_{28} + \delta U_{29} + \delta U_{30} + \delta U_{31} + \delta U_{32} + \delta U_{33} + \delta U_{34} + \delta U_{35} + \delta U_{36} + \delta U_{37} + \delta U_{38} + \delta U_{39} + \delta U_{40} + \delta U_{41} + \delta U_{42} + \delta U_{43} + \delta U_{44} + \delta U_{45} + \delta U_{46} + \delta U_{47} + \delta U_{48} + \delta U_{49} + \delta U_{50} + \delta U_{51} + \delta U_{52} + \delta U_{53} + \delta U_{54} + \delta U_{55} + \delta U_{56} + \delta U_{57} + \delta U_{58} + \delta U_{59} + \delta U_{60} + \delta U_{61} + \delta U_{62} + \delta U_{63} + \delta U_{64} + \delta U_{65} + \delta U_{66} + \delta U_{67} + \delta U_{68} + \delta U_{69} + \delta U_{70} + \delta U_{71} + \delta U_{72} + \delta U_{73} + \delta U_{74} + \delta U_{75} + \delta U_{76} + \delta U_{77} + \delta U_{78} + \delta U_{79} + \delta U_{80} + \delta U_{81} + \delta U_{82} + \delta U_{83} + \delta U_{84} + \delta U_{85} + \delta U_{86} + \delta U_{87} + \delta U_{88} + \delta U_{89} + \delta U_{90} + \delta U_{91} + \delta U_{92} + \delta U_{93} + \delta U_{94} + \delta U_{95} + \delta U_{96} + \delta U_{97} + \delta U_{98} + \delta U_{99} + \delta U_{100} + \delta U_{101} + \delta U_{102} + \delta U_{103} + \delta U_{104} + \delta U_{105} + \delta U_{106} + \delta U_{107} + \delta U_{108} + \delta U_{109} + \delta U_{110} + \delta U_{111} + \delta U_{112} + \delta U_{113} + \delta U_{114} + \delta U_{115} + \delta U_{116} + \delta U_{117} + \delta U_{118} + \delta U_{119} + \delta U_{120} + \delta U_{121} + \delta U_{122} + \delta U_{123} + \delta U_{124} + \delta U_{125} + \delta U_{126} + \delta U_{127} + \delta U_{128} + \delta U_{129} + \delta U_{130} + \delta U_{131} + \delta U_{132} + \delta U_{133} + \delta U_{134} + \delta U_{135} + \delta U_{136} + \delta U_{137} + \delta U_{138} + \delta U_{139} + \delta U_{140} + \delta U_{141} + \delta U_{142} + \delta U_{143} + \delta U_{144} + \delta U_{145} + \delta U_{146} + \delta U_{147} + \delta U_{148} + \delta U_{149} + \delta U_{150} + \delta U_{151} + \delta U_{152} + \delta U_{153} + \delta U_{154} + \delta U_{155} + \delta U_{156} + \delta U_{157} + \delta U_{158} + \delta U_{159} + \delta U_{160} + \delta U_{161} + \delta U_{162} + \delta U_{163} + \delta U_{164} + \delta U_{165} + \delta U_{166} + \delta U_{167} + \delta U_{168} + \delta U_{169} + \delta U_{170} + \delta U_{171} + \delta U_{172} + \delta U_{173} + \delta U_{174} + \delta U_{175} + \delta U_{176} + \delta U_{177} + \delta U_{178} + \delta U_{179} + \delta U_{180} + \delta U_{181} + \delta U_{182} + \delta U_{183} + \delta U_{184} + \delta U_{185} + \delta U_{186} + \delta U_{187} + \delta U_{188} + \delta U_{189} + \delta U_{190} + \delta U_{191} + \delta U_{192} + \delta U_{193} + \delta U_{194} + \delta U_{195} + \delta U_{196} + \delta U_{197} + \delta U_{198} + \delta U_{199} + \delta U_{200} + \delta U_{201} + \delta U_{202} + \delta U_{203} + \delta U_{204} + \delta U_{205} + \delta U_{206} + \delta U_{207} + \delta U_{208} + \delta U_{209} + \delta U_{210} + \delta U_{211} + \delta U_{212} + \delta U_{213} + \delta U_{214} + \delta U_{215} + \delta U_{216} + \delta U_{217} + \delta U_{218} + \delta U_{219} + \delta U_{220} + \delta U_{221} + \delta U_{222} + \delta U_{223} + \delta U_{224} + \delta U_{225} + \delta U_{226} + \delta U_{227} + \delta U_{228} + \delta U_{229} + \delta U_{230} + \delta U_{231} + \delta U_{232} + \delta U_{233} + \delta U_{234} + \delta U_{235} + \delta U_{236} + \delta U_{237} + \delta U_{238} + \delta U_{239} + \delta U_{240} + \delta U_{241} + \delta U_{242} + \delta U_{243} + \delta U_{244} + \delta U_{245} + \delta U_{246} + \delta U_{247} + \delta U_{248} + \delta U_{249} + \delta U_{250} + \delta U_{251} + \delta U_{252} + \delta U_{253} + \delta U_{254} + \delta U_{255} + \delta U_{256} + \delta U_{257} + \delta U_{258} + \delta U_{259} + \delta U_{260} + \delta U_{261} + \delta U_{262} + \delta U_{263} + \delta U_{264} + \delta U_{265} + \delta U_{266} + \delta U_{267} + \delta U_{268} + \delta U_{269} + \delta U_{270} + \delta U_{271} + \delta U_{272} + \delta U_{273} + \delta U_{274} + \delta U_{275} + \delta U_{276} + \delta U_{277} + \delta U_{278} + \delta U_{279} + \delta U_{280} + \delta U_{281} + \delta U_{282} + \delta U_{283} + \delta U_{284} + \delta U_{285} + \delta U_{286} + \delta U_{287} + \delta U_{288} + \delta U_{289} + \delta U_{290} + \delta U_{291} + \delta U_{292} + \delta U_{293} + \delta U_{294} + \delta U_{295} + \delta U_{296} + \delta U_{297} + \delta U_{298} + \delta U_{299} + \delta U_{300} + \delta U_{301} + \delta U_{302} + \delta U_{303} + \delta U_{304} + \delta U_{305} + \delta U_{306} + \delta U_{307} + \delta U_{308} + \delta U_{309} + \delta U_{310} + \delta U_{311} + \delta U_{312} + \delta U_{313} + \delta U_{314} + \delta U_{315} + \delta U_{316} + \delta U_{317} + \delta U_{318} + \delta U_{319} + \delta U_{320} + \delta U_{321} + \delta U_{322} + \delta U_{323} + \delta U_{324} + \delta U_{325} + \delta U_{326} + \delta U_{327} + \delta U_{328} + \delta U_{329} + \delta U_{330} + \delta U_{331} + \delta U_{332} + \delta U_{333} + \delta U_{334} + \delta U_{335} + \delta U_{336} + \delta U_{337} + \delta U_{338} + \delta U_{339} + \delta U_{340} + \delta U_{341} + \delta U_{342} + \delta U_{343} + \delta U_{344} + \delta U_{345} + \delta U_{346} + \delta U_{347} + \delta U_{348} + \delta U_{349} + \delta U_{350} + \delta U_{351} + \delta U_{352} + \delta U_{353} + \delta U_{354} + \delta U_{355} + \delta U_{356} + \delta U_{357} + \delta U_{358} + \delta U_{359} + \delta U_{360} + \delta U_{361} + \delta U_{362} + \delta U_{363} + \delta U_{364} + \delta U_{365} + \delta U_{366} + \delta U_{367} + \delta U_{368} + \delta U_{369} + \delta U_{370} + \delta U_{371} + \delta U_{372} + \delta U_{373} + \delta U_{374} + \delta U_{375} + \delta U_{376} + \delta U_{377} + \delta U_{378} + \delta U_{379} + \delta U_{380} + \delta U_{381} + \delta U_{382} + \delta U_{383} + \delta U_{384} + \delta U_{385} + \delta U_{386} + \delta U_{387} + \delta U_{388} + \delta U_{389} + \delta U_{390} + \delta U_{391} + \delta U_{392} + \delta U_{393} + \delta U_{394} + \delta U_{395} + \delta U_{396} + \delta U_{397} + \delta U_{398} + \delta U_{399} + \delta U_{400} + \delta U_{401} + \delta U_{402} + \delta U_{403} + \delta U_{404} + \delta U_{405} + \delta U_{406} + \delta U_{407} + \delta U_{408} + \delta U_{409} + \delta U_{410} + \delta U_{411} + \delta U_{412} + \delta U_{413} + \delta U_{414} + \delta U_{415} + \delta U_{416} + \delta U_{417} + \delta U_{418} + \delta U_{419} + \delta U_{420} + \delta U_{421} + \delta U_{422} + \delta U_{423} + \delta U_{424} + \delta U_{425} + \delta U_{426} + \delta U_{427} + \delta U_{428} + \delta U_{429} + \delta U_{430} + \delta U_{431} + \delta U_{432} + \delta U_{433} + \delta U_{434} + \delta U_{435} + \delta U_{436} + \delta U_{437} + \delta U_{438} + \delta U_{$$

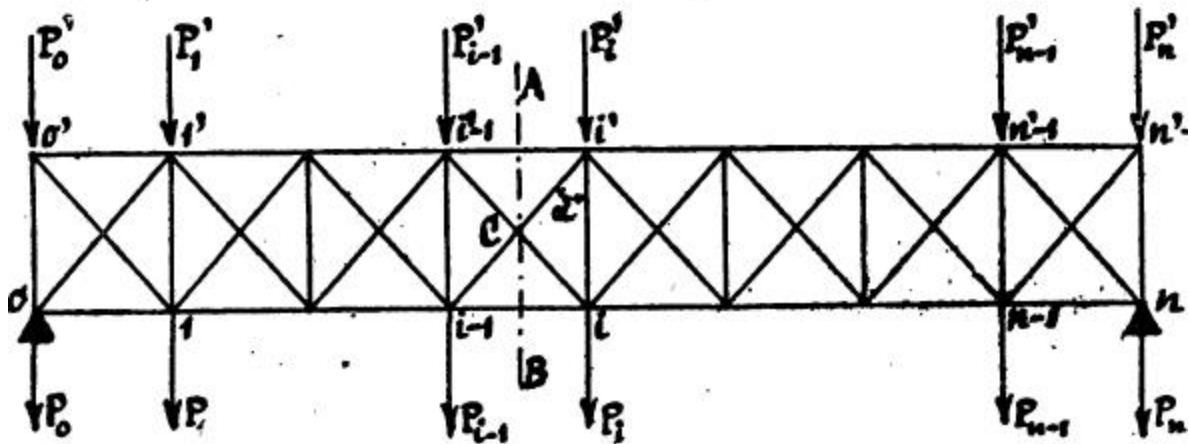
The text on this page is estimated to be only 13.34% accurate

les intégrales étant étendues à la longueur totale AOB des fibres moyennés des deux arcs. Désignons par θ , ϕ et ψ les valeurs que prendraient respectivement, en une section quelconque, de centre de gravité G (x, y), de l'un quelconque des deux arcs, les éléments N, T et M de la réduction, en G, des forces extérieures agissant à gauche de cette section, si le système était rendu isostatique par la suppression de la liaison, en O, des deux arcs; v , ω et ϵ sont immédiatement calculables par la Statique pure et peuvent par conséquent être considérés, dans la suite, comme connus. Il est facile de voir que l'on a, que la section appartienne à l'un ou l'autre des deux arcs, « $\frac{dV}{dx} = \frac{d}{dx} \int_0^x \dots$ », Eu substituant ces neuf expressions dans les équations (a), et en désignant respectivement par a et b les projections sur Ox et Oy de la fibre moyenne entière AOB de l'arc donné, on trouve $\frac{d^2y}{dx^2} = \dots$ Gl2 ils H J 1. Eli 00 El J ■ J L\!u uaj d, d, / L Kfl C!l Kl — / — /T — -21 ° dx s±x ~ J I Kfl ds + GU dt + Kl " GQ7 rf* À dbyGoogk

The text on this page is estimated to be only 17.55% accurate

— :>o — Ces deux équations font connaître les deux forces de liaisons intérieures surabondantes. On peut ensuite calculer les éléments de réduction N , T et M , afférents à une section quelconque, par les formules (A). Autre exemple de la détermination des forces de liaisons surabondantes intérieures. 25. Prenons comme exemple une poutre droite, à treillis double, articulée, reposant sur deux appuis simples (fig. 6). Cette poutre est constituée par des barres rectilignes, dont les fibres moyennes sont situées dans un plan vertical et concourent en des points appelés nœuds. En chaque nœud, les barres sont assemblées entre elles par un axe d'articulation normal au plan contenant les fibres moyennes. On appelle : Éléments de membrures, les Montants, les barres verticales ; Diagonales, les barres inclinées ; horizontales ; ; nom de s d'ordre i . Nous désignons la partie de la poutre comprenant i montants consécutifs, ainsi que les deux éléments de membrures et les deux diagonales situées entre ces deux montants, par le numéro i des nœuds inférieurs, par les numéros $0, 1, \dots, i, n-i, n$; et les nœuds supérieurs, par ces mêmes numéros accentués. La poutre est soumise à des charges verticales $P_0, P_1, \dots, P_i, \dots, P_{n-i}, P_n$, appliquées aux nœuds inférieurs, et à des charges $P'_0, P'_1, \dots, P'_i, \dots, P'_{n-i}, P'_n$ appliquées aux nœuds supérieurs. ai, Google

Fig. 6.



The text on this page is estimated to be only 14.38% accurate

En toute section de l'une quelconque des barres, les forces élastiques sont réductibles à une force unique, dirigée suivant la fibre moyenne de la barre; c'est l'effort normal on, selon le terme adopté couramment, l'effort dans la barre (l'effort tranchant et le couple de torsion). Proposons-nous de calculer les efforts produits par les charges dans toutes les barres de la poutre. Soient : X_i et X'_i les efforts dans les deux éléments de membrure $\{i - i, (i) \text{ et } (i' - i, i')\}$; i_{ij} et i'_{ij} les sections transversales de ces deux barres; a leur longueur commune; $Y_{i,i}$ et $Y_{i,-}$ les efforts dans les deux montants $\{e - i, i' - i\}$ et $\{(*, *)\}$; $f_{i,i}$ et c_i les sections transversales de ces deux montants; b leur longueur commune; Z_i et Z'_i , S_i et S'_i , c les quantités analogues relatives aux deux diagonales $\{(i - i, j) \text{ et } (i - i, i')\}$. Chacun de ces efforts sera considéré comme positif ou négatif selon que la barre correspondante sera comprimée ou tendue. La poutre est isostatique extérieurement; mais elle est hyperstatique intérieurement. Il existe un grand nombre de manières de la rendre complètement isostatique; adoptons celle consistant à supprimer les liaisons des diagonales $(o, i') \dots, (i - i, i')$, ..., $\{(\leftarrow, \leftarrow')\}$. avec leurs nœuds inférieurs d'assemblage $o, \dots, i - i, \dots, \leftarrow - i$; dès lors, ces diagonales ne jouent plus aucun rôle dans la poutre; celle-ci se comporte comme si elles étaient supprimées et devient, par suite, un système réticulaire; or, on sait qu'un tel système est isostatique intérieurement. Les liaisons ainsi supprimées sont les liaisons surabondantes intérieures (n° 11). Les forces de liaisons correspondantes sont, pour la diagonale $(i - i, *)$, par exemple, deux forces égales et opposées, ayant même direction que l'effort Z'_i ; dans cette diagonale, et appliquées, l'une, à l'extrémité rendue libre de ladite diagonale, l'autre, au nœud $i - i$, forces de sens répulsif ou attractif, selon que Z'_i est un effort de compression ou un effort de tension. On peut donc dire que les forces de liaisons intérieures surabondantes sont les efforts $Z_1, \dots, Z_n$ dans les diagonales $(o, i'), \dots, ((i - i, i'), \dots, (h - i, b'))$; ces diagonales portent le nom de barres surabondantes: Z'_i ; étant une force de liaison surabondante, on a, en vertu du théorème du général Menabrea, $\sum \delta U = 0$ ai, Google

The text on this page is estimated to be only 12.95% accurate

Il désignant le potentiel interne de la poutre déformée par les charges. Ce potentiel est égal à la somme des potentiels de toutes les barres constituant la poutre. Or, pour une barre quelconque, si l'on désigne, d'une manière générale par i sa section, s sa longueur et N l'effort dans cette barre, le potentiel interne a pour expression, d'après les formules (9') el(") (n° 9), puisque en toute section de la barre l'effort tranchant et le couple de flexion sont nuls. Par conséquent $\sum V_i$ la somme étant étendue à toutes les barres de la poutre; ou bien, en désignant par A la somme des potentiels des barres autres que celles du panneau (i) et en ayant égard aux notations indiquées plus haut relativement aux barres de ce panneau, $n = A - i$ $K \} a$ i $X; a$ i Y_i t b $_$ Y J b x $_$ Z J c i Z ; $\ll Y$ M i $+ 2$ $\ddot{E}$ H i $+ \hat{U}$ $E(u$ $_$ $+ a$ H i u $+ 2$ E S $;$ $+ a$ E s $;$ Portons cette expression du potentiel dans l'équation (a) et chassons le dénominateur $\ddot{E}$; il vient $i h \setminus F \acute{E} h f^{i^i} X < ^i \setminus i l Y' - l (> Y' - ' Y - d Y i \setminus \{ ' \grave{a} V i + a \setminus Q i \grave{a} Z' t + o j d Z i / \setminus a i i - , d Z ; + t a / d Z' J / Z t t f l j Z' , _ + C \setminus \gg i d Z \setminus + S' /) \sim ^o' \bullet .$ Calculons maintenant, en fonction de Z it les expressions de X $/$ X J Y $;-!$ Y $;-$ et Z $,$ à substituer dans cette équation. ■ A cet effet, coupons la poutre par un plan vertical AB passant par le point d'intersection C des fibres moyennes des diagonales du panneau (i). Les forces extérieures agissant à gauche de cette section (charges et réactions de l'appui de gauche de la poutre) sont réductibles, au point C, à un effort tranchant vertical T (que nous compterons positivement dans le sens ascendant et à un couple de flexion M $;$ ces deux quantités sont immédiatement calculables par la Statique pure, de sorte que nous pourrons, dans la suite, les considérer comme connues. Les quatre efforts X $,$ X J Z $,$ et Z $"$ f dans les barres coupées par le plan AB forment un système équivalent à la force T $/$ et i u d b y G o o g l e

The text on this page is estimated to be only 12.26% accurate

— 33 couple M_x ; on peut donc écrire les deux équations de projections, sur un axe vertical et sur un axe horizontal, et l'équation de moments, par rapport au point C, que voici et dans lesquelles se désigne l'angle aigu formé par les fibres moyennes des diagonales avec la verticale :

$$-Z_f \cos \alpha + Z_i \cos \alpha = T \left(\frac{x}{l} - \frac{x^2}{2l^2} - m \right) \quad \text{D'autre part, le nœud } i \text{ — } i \text{ étant en équilibre sous l'influence de la charge } P_j, \text{ et des actions exercées sur lui par les barres qui s'assemblent, on a l'équation de projections suivante, sur un axe vertical, } Z_j - \cos \alpha Y_j - l \sin \alpha Z_j \cos \alpha - p_j = 0. \text{ De ces quatre équations on tire } T, Z_j = Z_i - \frac{1}{2} X_j - Z_j \cos \alpha - p_j, \text{ (ou) } Y_j = - \frac{1}{2} (Z_j' + Z_i) \cos \alpha - T \sin \alpha + P_j, \text{ et, en changeant } i \text{ en } i+1 \text{ dans la dernière de ces formules on a } Y_j = - \frac{1}{2} (Z_j + Z_{j+1}) \cos \alpha + T \sin \alpha - P_j. \text{ Rivant les cinq formules ci-dessus par rapport à } X_j \text{ on a } \left[\frac{\partial Y_j}{\partial X_j} = \frac{\partial T}{\partial X_j} + \frac{\partial Z_j}{\partial X_j} \cos \alpha - \frac{\partial Z_{j+1}}{\partial X_j} \cos \alpha \right]. \text{ Si l'on fait successivement } j = 1, 2, \dots, n-1, \text{ puis } j = n, \text{ dans les formules (c) à (g), on voit immédiatement que les efforts dans toutes les barres de la poutre autres que celles du panneau (i), sont indépendants de } Z_j; \text{ il en est de même, par suite, du potentiel interne de ces barres, et l'on a, par conséquent, } \frac{\partial U}{\partial Z_j} = 0. \text{ En effectuant, dans l'équation (i), les substitutions qu'on a}$$

db»Googk

The text on this page is estimated to be only 12.29% accurate

les formules (c) à (f), et en tenant compte de ce que Cette équation lie les efforts ZJ_{-i} , Z_i , et $7J_{+i}$ dans trois barres surabondantes consécutives ($i - a$, $i_1 - i$), ($t - i$, i), et (i^* , $(i + 1)$). En y faisant successivement $i = i, i_3, \dots, n - i, n$ et en tenant compte de ce que $Z'_i, \dots, Z'_n, +1 = 0$, $Tn4_{-i} = 0$ (f), ou obtient un système de n équations contenant, la première Z_{-i} et Z_i , la seconde Z'_i, Z'_2 et ZJ , la troisième Z_i, ZJ et Z'_i , la ($i - 1$), D'' , Z_{-i} , Z'_{-i} et Z'_i , la (i^*) z_i , et z_i . La résolution de ce système fait connaître les efforts dans les «barres surabondantes ($0, i$), (i, a), $\dots$, ($i - 2, i - 1$), ($n - i, n$). L'application des formules générales (c) à (g) donne ensuite les efforts dans toutes les autres barres de la poutre. Principes de réciprocité. 26. Théorème. — i° Si une force F A égale à l'unité, appliquée en un point A d'un corps isotrope ou à fibre moyenne ; ou d'un système de pareils corps, isostatique ou hyperstatique, suivant une direction arbitrairement choisie AA' , imprime à un point B un déplacement élastique dont la projection, sur une direction AB également arbitraire, est XJ , réciproquement une force F , égale à l'unité, appliquée au point B, sur (f) Ce qu'on voit immédiatement en supposant la poutre prolongée fictivement, à gauche de son appui de gauche, par un panneau méroté 0, et, droite de son appui de droite, par un panneau numéroté $n + 1$ les efforts dans ces deux panneaux additionnels sont évidemment nuls et il n'est de même des efforts dans leurs diagonales. ai, Google

The text on this page is estimated to be only 14.75% accurate

vont la direction A_{11} , imprime au point A un déplacement élastique dont la projection X_{11} , sur la direction A_1 est égale à X^* . 2° Si un couple C_{11} , égal à l'unité, dont les deux forces sont appliquées en deux points a et a' et dont l'axe a une direction V_{11} , n. arbitrairement choisie parmi les perpendiculaires à la droite a_1 , imprime à une droite Ob' une rotation élastique dont la projection ($'$) sur une direction T_{11} arbitrairement choisie parmi les perpendiculaires à bb' , est $\frac{C_{11}}{r_{bb'}}$, réciproquement un couple CM_r égal à l'unité, dont les deux forces sont appliquées en b et b' et dont la direction de l'axe est $r_{bb'}$, imprime à la droite a_1 une rotation élastique dont la projection a^{**}_1 sur la direction T_{11} est égale à $\frac{1}{r_{bb'}}$. 3° Si un couple C_{11} , égal à l'unité, dont les deux forces sont appliquées en deux points a et a' et dont l'axe a une direction T_{11} , arbitrairement choisie parmi les perpendiculaires à la droite a_1 , imprime à un point B un déplacement élastique dont la projection sur une direction arbitraire A_{11} , est $X^{TM'}$, réciproquement, une force F_{11} , égale à l'unité, appliquée en B suivant la direction A_{11} , imprime à la droite a_1 une rotation élastique dont la projection of_{11} , sur la direction T_{11} , est égale à $X^{TM'}$ (étant entendu, au point de vue de l'homogénéité, que cette rotation n'est pas mesurée par son angle, mais par la longueur de l'arc intercepté par cet angle, sur une circonférence de rayon égal à l'unité de longueur). Voici la démonstration de la première partie de ce théorème. Soient respectivement : X_i et X_j les projections, sur les directions AA et AB , des déplacements élastiques imprimés aux points A et B, par la force F_x égale à l'unité* appliquée en A, suivant la direction AA ; X_{j1} et X_{j2} les projections, sur ces mêmes directions, des déplacements élastiques imprimés à ces mêmes points, par la force F_{11} , égale à l'unité, appliquée en B, suivant la direction AK . (Dans ces notations, l'indice inférieur désigne le point qui subit ($'$) Il est rappelé que, par projection d'une rotation, il faut entendre la projection du vecteur représentatif de cette. ai, Google

The text on this page is estimated to be only 14.54% accurate

le déplacement considéré; l'indice supérieur est celui de la force qui produit ce déplacement.) Supposons que deux forces F_A et F_i , différentes de l'unité, soient appliquées simultanément, la première en A, suivant la direction AA, la seconde en B, suivant la direction iB; soient respectivement X_A et V_B les projections, sur ces deux directions, des déplacements élastiques qu'elles impriment aux points A et B. On a, d'après le principe de la superposition des effets élastiques des forces, (a) $X_A = 1 \cdot F_A + X_{F_i}$, $X_B = X_{F_A} + F_i$, et, en vertu du théorème de (Jii.stigliano (n° 14),, an .., an (h) $> \dots$, $x_i = \dots$, II désignant le potentiel interne du corps, ou du système de corps, déformé par les forces F_A et F_i agissant simultanément. Or, analytiquement, on doit avoir à cause des relations (b), ou, en remplaçant ces deux dérivées partielles, par leurs valeurs déduites des formules (a), $X_{ii} = X_{ii}$. C.Q.F.D. Le même "mode de démonstration s'applique aux deux autres parties du théorème. Les trois principes de réciprocité qui viennent d'être énoncés sont souvent appelés, à l'étranger, principes de Maxwell, bien que ce savant n'ait établi que le premier et pour les systèmes articulés seulement ('). {') Clerk Maxwell, On the calculation of the equilibrium of frames (Philosophical Magazine, t. XXVII, 1864, p. 417). by Google

The text on this page is estimated to be only 17.45% accurate

Lignes d'influence, 27. Des principes de réciprocité découle une méthode générale de détermination des lignes d'influence dans les corps et dans les systèmes de corps à fibres moyennes, astreints à des liaisons surabondantes (*). Ces lignes, introduites dans la Résistance des matériaux par Fränkel (a) et étudiées d'une manière remarquable par Winkler (J) et Maurice Levy(*), jouent un rôle important dans le calcul des ponts en métal ou en béton armé; elles fournissent, en effet, le moyen de déterminer les efforts maximum produits dans les divers éléments de ces ponts, par le passage des surcharges mobiles; le cadre limité de la présente Note ne nous permet pas de nous étendre davantage sur ce sujet. Seconde méthode fondée sur le théorème des forces vives. Equation générale de l'Élasticité. 28. L'exposé qui suit diffère sensiblement dans la forme, mais non dans le fond, de celui présenté dans notre Mémoire sur les déformations élastiques des pièces et des systèmes de pièces à fibres moyennes planes ou gauches (*). Il est plus général, car (*) Bertrand de Fontvirol, Sur la détermination des forces élastiques et de leurs lignes d'influence dans les poutres assujetties à des liaisons surabondantes {Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. CVIII, 1889, p. 45}; Méthode générale de détermination des lignes d'influence dans les poutres pleines ou réticulaires, assujetties à des conditions surabondantes (Bulletin de la Société des Ingénieurs civils de France, novembre 1890, p. 74) et Ponts métalliques à travées continues. Méthode de calcul satisfaisant aux prescriptions du Règlement ministériel du 30 août 1891 (Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. CXV, 1891, p. 996, et Bulletin de la Société des Ingénieurs civils de France, décembre 1891, p. no5). (*) Frankel, Théorie des lignes d'influence (Civil Ingénieur, 18-56). (*) Winkler, Application des lignes d'influence (Revue des Ingénieurs et Architectes de Hanovre, 1879). (*) Maurice Levy, La Statique graphique et ses applications aux constructions (1^{re} Partie, 1886; 3^e Partie, 1887). (*) Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. CVII, 1888, p. 383, et Bulletin de la Société des Ingénieurs civils de France, août 1888, p. 191, et mars 1889, p. 416. dbyGoogk

The text on this page is estimated to be only 11.83% accurate

il concerne non seulement ces pièces, mais aussi les corps isotropes; enfin, il est plus simple et plus rapide et ne nécessite aucune intégration. Il consiste à donner, du théorème de Betti⁽¹⁾, Boussinesq⁽²⁾ et Maurice Levy^(*), une démonstration nouvelle, très élémentaire, qui ajoute à ce théorème un complément d'où découle immédiatement une relation générale entre les déplacements élastiques et les forces extérieures qui les produisent. En introduisant ensuite, dans cette relation, les déplacements calorifiques (ce qui n'avait pas été fait dans notre Mémoire précité), nous obtenons l'équation générale de l'Elasticité qui, synthétisant toute la théorie des déformations, permet de déterminer les déplacements élastiques et calorifiques d'une construction quelconque et de former, dans tous les cas et sans recherches spéciales, les équations nécessaires pour le calcul des forces de liaisons, dans les corps et les systèmes de corps hyperstatiques, soumis à des forces extérieures quelconques, ainsi qu'à des actions calorifiques. Ainsi se trouve présentée une démonstration nouvelle, fondée sur le théorème des forces vives, de l'équation générale de l'Elasticité, établie dans notre Mémoire y relatif^(*), au moyen du théorème du travail virtuel. Théorème de Betti, Boussinesq et Maurice Levy complété.

29. Considérons un système de corps isotropes ou à fibres moyennes, isostatique ou hyperstatique (n° 11) (le cas d'un corps unique sera regardé comme un cas particulier). Soumettons-le à l'action d'un système de m forces extérieures quelconques, que⁽¹⁾ Betti, Teoria del Elasticità (1878). (=) Boussinesq, Cours d'Analyse infinitésimale, t. I, fasc. 1, 1867, p. 137 (a) Maurice Levy, Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. CVII, {*) Bulletin de la Société des Ingénieurs civils de France, octobre 1907, p. 365-— Voir aussi Lecoq, Cours de Mécanique professé à l'École Polytechnique, t. III, 1918, p. 37, [3] -fi. dby Google

The text on this page is estimated to be only 13.08% accurate

nous appellerons système (A), forces croissant lentement depuis zéro jusqu'à certaines valeurs finales ; soient : F_A . la valeur finale de l'une quelconque de ces forces, A / son point d'application, i_A sa direction, J . la projection, sur la direction AA ., du déplacement élastique du point A ;. On a, en vertu de l'équation (i3) ($n \cdot 12$) de Clapeyron, $\langle \bullet \rangle ; 2 F^* > \blacksquare \}$, $-\%$., en désignant par IIF le potentiel interne du système de corps déformé.

Remplaçons le système de forces (A) par un second système (B), composé de n forces extérieures quelconques, croissant comme les premières; soient : F_B . la valeur finale de l'une quelconque de ces forces, B / son point d'application, $4B$. sa direction, XJJ . la projection, sur la direction AB ., du déplacement élastique du point j . On a, comme précédemment, en désignant par UF le potentiel interne du système de corps déformé. Soient maintenant : $XJfj$ la projection, sur la direction i_A ., du déplacement élastique du point A ,-, sous l'action du système de force (B); $\}$. $\mathcal{E}$. la projection, sur la direction AB ., du déplacement élastique du point B /, sous l'action du système de force (A). Considérons la déformation du système de corps, non plus sous

dbvGoogle

The text on this page is estimated to be only 14.18% accurate

l'action d'un seul des deux systèmes (A) et (B), mais sous l'action simultanée de ces deux systèmes : en vertu du principe de superposition, le déplacement élastique du point A, en projection sur la direction AA., est $X^*_A - X_{JA}$, et celui du point B, en projection sur la direction AB., est $X^*_B + X_{JB}$. Cette déformation peut être réalisée de deux manières différentes, comme suit :

i° Appliquons d'abord le système de forces (A), ces forces croissant depuis zéro jusqu'à leurs valeurs finales, puis le système de forces (B), ces dernières forces croissant de la même manière que les premières; la déformation s'effectue ainsi en deux temps. Pendant le premier temps, les points d'application A, des forces du système (A) prennent les déplacements X_{JA} , en projection sur les directions AA., et le travail de ces forces, qui croissent de zéro à F_A , est (n° 12) tandis que les points B, prennent les déplacements X^*_B , en projection sur les directions AB. Pendant le second temps, les points A, prennent les déplacements X^*_A , en projection sur les directions AA. des forces F_A , et le travail de ces forces, qui demeurent constantes, est tandis que les points d'application B, des forces du système (B) prennent les déplacements X_{JB} , en projection sur les directions AB. et que le travail de ces forces, qui croissent de zéro à F_B , est Le travail total des deux systèmes de forces (A) et (B) est la somme des trois travaux partiels ci-dessus, et, d'après l'équation (i3) (n° 12) de Clapeyron, il est égal au potentiel interne du système de corps déformé sous l'action simultanée de ces deux forces.

The text on this page is estimated to be only 15.05% accurate

- 61 systèmes de forces. On a donc, en désignant par R_v l'F ce potentiel, $M ; 2 \cdot x_i' + 2 F'' l_5' + i 2 F, < l' - \dots$ ■■ Enversenient, appliquons d'abord le système de forces (B), puis le système de forces (A), ce qui, de la même manière que précédemment, conduit à l'équation (d) $I J f_b, x_i, -h 2 r_{Bi} 4, -+- j 2 F_a' x^* = n p''''''$ laquelle ne diffère de l'équation (c) que par la permutation des deux systèmes de forces (A) et (B) et des déplacements élastiques correspondants. En retranchant les équations (a) et (o) de l'équation (c), et, ensuite, de l'équation (d), on obtient les deux nouvelles équations ($< o 2 F_a, >'' = \dots$ ■. $\sim (L, i) + n r - > < / > 2 F_p^{\wedge} = n F_v F_0 - <'' \cdot \blacksquare. + n > - j'$ qui e traduisent c Théorème. — Si, à un corps isotrope ou à fibre moyenne, ou à un système de pareils corps, isostatique ou hyper statique, on applique successivement deux systèmes de force (A) et (B) : i" La somme des travaux des forces du système (A), pour tes déplacements élastiques dus au système (B), est égale à la somme des travaux des forces du système (B), pour les déplacements élastiques dus au système (A) ; 2° Ces deux sommes de travaux sont égales à la différence entre le potentiel interne du corps, ou du système de corps, déformé par les deux: systèmes de force (A) et (B) appliqués simultanément et la somme des potentiels internes du corps, ou du système de corps, déformé par chacun de ces deux systèmes de force appliqué à l'exclusion de l'autre. dbbyGoogk

The text on this page is estimated to be only 14.50% accurate

La première partie de cette proposition est le théorème de Betti, Boussinesq et Maurice Levy ; la seconde est le complément annoncé plus haut (n° 28). Remarque. — Parmi les forces des deux systèmes (A) et (B) ou de l'un de ces deux systèmes seulement, il peut y en avoir qui forment des couples. Ainsi supposons que le système (A) se compose de p forces ne formant pas de couples et de $2q$ forces formant q couples ; soient a_i et a'_i les points d'application de deux forces formant un couple, C_i la valeur de ce couple, p_{ij} la projection, sur l'axe du couple C_i , de la rotation élastique imprimée à la droite $a_i a'_i$, par le système de force (B) ; le travail de ce couple, pour ce déplacement de rotation, est $C_i \cdot \theta_i$; et, par suite, on a ce qui permet d'écrire l'équation (e) sous la nouvelle forme (19)

$$2FA'1'''+2c''';^''=II,*'F''_{-}^{}Iir''',nF')'$$

si l'on veut y mettre en évidence les rotations projetées θ_i . Principes de réciprocité. 30. Les trois principes de réciprocité établis précédemment (n° 26) sont des cas particuliers du théorème de Betti, Boussinesq et Maurice Levy. Le premier correspond au cas où les systèmes (A) et (B) se composent chacun d'une force unique égale à l'unité ; le second, au cas où ils se composent chacun d'un couple égal à l'unité ; le troisième, au cas où le système (A) se compose d'un couple égal à l'unité et le système (B), d'une force égale à l'unité.

dbvGoogle

The text on this page is estimated to be only 12.99% accurate

Relation générale entre les déplacements élastiques et les forces extérieures qui les produisent. 31 . Soit un système de corps isotropes ou à fibres moyennes ; supposons-le hyperstatique extérieurement et intérieurement ($n \geq 11$) (le cas d'un système isostatique sera regardé comme un cas particulier ; celui d'un corps unique, également). Ce système de corps est déformé par des forces extérieures F directement appliquées. Appelons : les projections des déplacements élastiques d'un certain nombre de points $A_1, A_2, A_3 \dots$ du système de corps, sur des directions arbitrairement choisies les projections des rotations élastiques d'un certain nombre de droites contenues dans le système de corps, sur des directions arbitrairement choisies parmi les directions normales à ces , droites. Considérons maintenant le système isostatique obtenu par la suppression des liaisons surabondantes du système hyperstatique donné (■). Appelons $F_{s1}, F_{s2}, F_{s3} \dots$ les forces de liaisons extérieures surabondantes (') Il a été indiqué précédemment ($n \geq 11$) que, suivant le nombre et la nature de ses- liaisons, un système hyperstatique peut être rendu isostatique, d'une seule manière ou de plusieurs. Nous considérons ici l'un quelconque des systèmes isostatiques ainsi obtenus. dbyGoogk

The text on this page is estimated to be only 15.09% accurate

— 64 — el F , les forces de liaisons intérieures surabondantes du système hyperstatique ; parmi ces forces il peut y en avoir qui forment des couples; peu importe; il est d'ailleurs, inutile ici de mettre ces couples en évidence. Si l'on soumet le système isostatique précité aux forces F , F , et F , il prend un état d'équilibre élastique identique à celui du système hyperstatique soumis aux seules forces F ; en particulier, dans ce système isostatique, les déplacements élastiques des points A , A_i , A_j , ... et les rotations élastiques des droites a , a , aa , $\ll$, $\ll$, $\bullet\bullet$ sont les mêmes que dans le système hyperstatique. Supprimons les forces F , F , Vli el, au système isostatique qui n'est plus alors soumis à aucune force, appliquons :

- 1° Aux points A_i , A_i , A , .. , des forces de grandeurs quelconques, dites forces auxiliaires. i , i , i , ... suivant les directions iL , At , As , ...;
- 2° Aux points des forces formant des couples, de grandeurs quelconques, dits couples auxiliaires, d'axes dirigés Cela posé, appliquons l'équation (2ij) (n1 29, théorème de Beltrami, Boussinesq el Maurice Levy complété) au système isostatique, en considérant, dans cette équation, le système de forces (A) comme constitué par les forces et couples auxiliaires S , $j2$, $\$3$, G , $G3$, $\text{€}3$, . . . , et le système de force (B) comme constitué par les forces F , F , el F , ; il vient $\wedge iX, -f\wedge tXi -t. fiX, H -h Sj\text{Ç}l + Gj\text{ç}i -t- \text{£}3?i -f... = \text{I}\ddot{\text{I}}F, P\ll, F,,, \text{£}, S$ — 1 "F, F , F ,. +■ "£, ©)' dbbyGoogk

The text on this page is estimated to be only 14.60% accurate

- 63 — en désignant par Π_i , Π_j , Π_k , le potentiel interne total du système isostatique déformé respectivement par: i^* les forces données F et les forces de liaisons surabondantes F_{ij} et F_{jk} du système hypers tatique ; a les forces et couples auxiliaires ξ et S ; 3 l'ensemble de ces forces et couples (la barre surmontant la lettre U est destinée à indiquer que ces potentiels sont relatifs au système isostatique). Nous écrirons, pour abréger, $2^{x-t-2e} = 5P, F \ll F^*, ^e - (F, PM, Fi. -, -5^e)$ Equation générale de l'Elasticité. 32. Supposons que le système de corps, Iryperslatique, considéré précédemment (n° 31), soit soumis non seulement à des forces extérieures F directement appliquées, mais encore à une variation de température t , comptée à partir de la température à laquelle ont été réalisées ses liaisons, positivement au-dessus, négativement au-dessous. La déformation de ce système est donc à la fois élastique et calorifique. Considérons, dans le système, un certain nombre de points et de droites et soient : i° Pour l'un quelconque A de ces points, X la projection de son déplacement élastique et calorifique, sur une direction A arbitrairement choisie ; a Pour l'une quelconque ad de ces droites, o la projection de sa rotation élastique et calorifique, sur une direction I^* choisie arbitrairement parmi les normales à ad . Envisageons le système isostatique obtenu par la suppression .des liaisons surabondantes du système hyperstaltique donné. Soumettons-le aux forces «xtérieures F , aux forces de liaisons surabondantes F_{ij} et F_{jk} (nu 31) du système hyperstaltique, et à la variation de température t ; il prend un état de" déformation élastique et calorifique identique à celui du système hyperstaltique soumis seulement aux forces F et à la variation de température t ; dbvGoogle

The text on this page is estimated to be only 14.74% accurate

.en particulier, les valeurs de ϵ et de Δp sont des mêmes dans le système hyperstatique et dans le système isostatique. Appelons X' et f les valeurs que prendraient ϵ et Δp , si le système isostatique était soumis exclusivement aux forces F, F_j ; et F, t , c'est-à-dire si la déformation était purement élastique ; Δ_j et y^* les valeurs que prendraient ces mêmes quantités, si ce système était soumis exclusivement à la variation de température, c'est-à-dire si sa déformation était purement calorifique. On a, en vertu du principe de la superposition des effets élastiques et calorifiques, («) $X = X' - \epsilon X_t$, $\Delta = \Delta' + \Delta T$. Ceci posé, examinons séparément la déformation élastique et la déformation calorifique précitées. En ce qui concerne la première, on a immédiatement, d'après la relation (30) (n° 31), (b, $2^X - 1 - 2\epsilon f = r_i F, F_{..}, F_{ia}, \wedge, 3 - (i' F, F_{..}, F_{..}, + ">, \odot)$ ■ # et £ désignant respectivement des forces auxiliaires appliquées aux points A, suivant les directions A, et des couples auxiliaires dont les deux forces sont appliquées aux extrémités des droites aa' et dont les axes ont les directions T. Pour étudier la seconde déformation, imaginons que, suppression faite des forces $F, F_{..}, F_{..}$, on applique au système isostatique les mêmes forces et couples auxiliaires que ci-dessus; le système prend un certain état de déformation ; soient : X'' la projection du déplacement élastique de l'un quelconque des points A, sur la direction à ; Δ'' la projection de la rotation élastique de l'une quelconque des droites aa , sur la direction V. On a, en vertu de l'équation (i3) (n° 12) de Clapeyron, Soumettons maintenant le système à la variation ■z de température; il prend une déformation calorifique qui se superpose à sa dbyGoogle

The text on this page is estimated to be only 16.82% accurate

— t.7 — déformation élastique, de sorte que le déplacement projeté de l'un quelconque des points A et la rotation projetée de l'une quelconque des droites aa' deviennent respectivement et l'on a, en vertu de l'équation (i5) (nu 13) de Clapeyron généralisée,
$$U = \frac{1}{2} \sum (X_i x_i + Y_i y_i + Z_i z_i) - \frac{1}{2} \sum (M_i \theta_i + N_i \phi_i + P_i \psi_i)$$
 où X_i, Y_i, Z_i désignent les fatigues normales produites, par les forces et couples auxiliaires 3 et 2, sur trois éléments normaux aux axes de coordonnées, pris en un point quelconque (x, y, z) du système isostatique. En retranchant, membre à membre, les deux équations ci-dessus, on obtient (c) $2 \sum (X_i x_i + Y_i y_i + Z_i z_i) - \sum (M_i \theta_i + N_i \phi_i + P_i \psi_i) = 0$. Ajoutons, membre à membre, les deux équations (b) et (c), en ayant égard aux relations (#) ; il vient finalement (3,) $V_A + 2e = u V_{Fe} + F_{IS} \wedge \mathbb{F} - (F_{FM}, F_i) + V_s$ Telle est l'Équation générale de l'élasticité des systèmes de corps isotropes. Si, en Théorie mathématique de l'Elasticité, on savait former les expressions des fatigues normales et tangentiels et, par suite, d'après les formules (3) et (5) (n° 4) celle du potentiel interne, en fonction des forces extérieures produisant ces fatigues, la susdite équation permettrait de résoudre tous les problèmes relatifs aux déformations élastiques et calorifiques des constructions, sans qu'il soit nécessaire de recourir aux hypothèses de la Résistance des matériaux. Un progrès important serait donc accompli, si l'on parvenait à vaincre les difficultés que présente l'intégration des

dbGoogle

The text on this page is estimated to be only 14.29% accurate

équations aux dérivées partielles de la Théorie mathématique de l'Elasticité. 33. En reprenant la démonstration qui précède, dans le cas d'un système de corps à fibres moyennes, on trouve $\sim (SF.F - F_{ta} + 5/ie) - "/36A'$ en désignant par $\blacksquare$) & l'effort normal produit, en une section quelconque de l'un quelconque des corps du système isostatique obtenu par la suppression des liaisons surabondantes du système hyperstatique donné, sous l'action des forces et couples auxiliaires 3 et S. On peut d'ailleurs passer directement de l'équation (3i) à l'équation (3a), par application de la relation (17) (n° 13) qui donne ici $f f \text{ fln}'j^{\wedge}n'y-t-n't)dx dy \text{ ets} = f X \text{ eh}$. Le second membre de l'équation (3a) se transforme comme suit : D'après la formule (11) (n° 9), on peut écrire : (a) $"F, F_{lt}, F_{,,}, J, Q, -(pF, F_{,,,}, F_{,,}, + "3.s) = j [mF, F_{oi}, F_{,,,}, S, G - (SF, F_{,,,}, F_{i,-} + - r_a, f, s)] \text{ th} <$ en désignant respectivement par $n_j F F s F|a, w_j q, r_a F F_{ei} p(t_i.f q$ le potentiel [interne, rapporté à l'unité de longueur de la fibre moyenne, de l'un quelconque des corps du système isostatique défini précédemment, déformé par : 1° les forces directement appliquées F et les forces des liaisons surabondantes F_{oi} et $F_{,,}$, du système hyperstatique donné ; 2° les forces et couples auxiliaires 5 et 3 ; 3° l'ensemble de ces forces et couples. Appelons : 1° $N, T, t T_{\zeta}, M_{\zeta}, M_{,,,}, M_e$ les éléments de la réduction (au centre de gravité d'une section quelconque, de l'un quelconque des corps) des forces élastiques développées dans cette section, par l'application au système isostatique, -des forces F, $F_{,,}$, et $F(1$ (ces éléments sont identiquement dbyGoogle

The text on this page is estimated to be only 12.21% accurate

les mêmes que dans le système hyperslatique soumis seulement aux forces F); a' X. 5r C,, OUs, 3n-T *>&! les éléments de réduction analogues, le système isostatique étant supposé soumis aux forces et couples $-f$ et 3. En vertu du principe de superposition, si ce système est soumis 4 l'action simultanée des forces et couples F , $FB1 F_{,,}$, *f et 2, les éléments de réduction deviennent $N + X$, $T_{,j} -t- 6^{\wedge}$, $Tt -h 6_{,,}$, $M\text{f} -i- 0R|$, M , $-+- 3R_{,,}$, $M\text{ç} -+- OR_{,}$. ""Cela posé, d'après la formule (9) $\{n" 9\}$, on a raF,F , $, Pu i\backslash Eu + Ou"1-""1" El;/'$ Or, cette expression de $ra_{,,}$ Km $_{,,}$ (i est une fonction homogène et du second degré des six quantités N , $T_{,,}$, . . . , $M\text{ç}$; et, pour obtenir les expressions de $a>\text{f}\text{©}$ et de $b_j f p p j \text{f}$, il suffit d'y remplacer respectivement ces six quantités, d'abord par $\hat{il}-$, $Sr_{,,}$, . . . , Olt_j , puis par $N + Jt$; $T_{,,}$, $4- G^{\wedge}$, ■ . . , M ; $-|- X\text{ç}$. On a donc, d'après une propriété des fonctions homogènes et du second degré $\{ '\}$, mF , $F_{,,}$, $F_{,,}$, 3, 3 —("F, $F.i$, $F_{,,}$, $+ m,f$, 3) $"^F F_{,,}$, $F_{,,}$, $^MF F_{,,}$, $F_{,,}$, ou, en remplaçant les dérivés partielles par leurs valeurs déduites (') Voici l'énoncé de cette propriété établie par Euler. Soient: $f(x,y,\dots)$ une fonction, liouiogène et du second degré, d'un nombre quelconque de variables $x,y, \dots$; $3^{\wedge}$, y' , ... un système de valeurs quelconques attribuées à ces variables. On a identiquement $\ll\ll + \ll'$, $lr+f$, $\dots)l-tti^*.r$, $—)+fl^*.r,i—|j T.4/(*.r.-\}$, $<*/<*\blacksquare>^{\bullet},.\blacksquare.)$ àfw.y,...) dfu\y...)

«.Google

The text on this page is estimated to be only 15.43% accurate

de l'expression de $m_p p_p, r_a F, F_{,,,}, F_{,,,}-f, 3 \sim (r_a F, F_{,,,}, F_i, 4''^3, \text{£};$
 Par suite, en substituant dans la formule (a), on a $(^* > \%, FM, FI), ^3-(SF, F.$
 $., F_{II}-(\%ie)$ Et, dès lors, l'équation (32) devient $+ \rangle, a_j + i, ^+ \langle \langle \langle 5]^*$. Dans les
 applications il importe de ne pas perdre de vue que : 1° Les déplacements
 projetés Δ et t_a , ainsi que les éléments $N, T^{\wedge}, \dots, M$; de la réduction au
 centre de gravité d'une section quelconque de l'un quelconque des corps,
 des forces élastiques agissant dans cette section {ou, ce qui revient au
 même, des forces extérieures appliquées à gauche de cette section), sont
 relatifs au système hyperstatique donné, soumis aux forces données F ; 2°
 Les éléments de réduction similaires $\leq \blacksquare \%, G_{,,,}, \dots, 3R$; sont relatifs au
 système isostatique obtenu par la suppression des liaisons surabondantes
 extérieures et intérieures du système hyperstatique donné, système
 isostatique soumis aux forces et couples auxiliaires 3 et 3; ces derniers
 éléments, étant statiquement déterminés, se calculent très aisément. Il va de
 soi que l'équation (33) reste valable dans le cas où le système donné est
 isostatique; toutes les quantités 'qui y entrent sont alors relatives à ce
 système isostatique. 34. Rotation élastique et calorifique d'une section
 quelconque. — Il est utile, au point de vue des applications, de faire
 dbbyGoogle

The text on this page is estimated to be only 16.74% accurate

— li — intervenir dans l'équation (33) (n° 33) la projection, sur une direction F arbitrairement choisie, de la rotation élastique et calorifique d'une section transversale quelconque (S) de l'un quelconque des corps; voici comment : Dans la section considérée (S), menons une droite aa' de direction normale à T [ce qui est toujours possible; il suffit, pour cela, que aa' soit dirigée suivant l'intersection de la section (S), avec un plan normal à T] ; appliquons, en a et en a', deux forces formant un couple auxiliaire S, d'axe dirigé suivant F; à ce couple correspondra, dans l'équation (33), un terme δs , où δ désignera la projection sur la direction T de la rotation de la droite aa'. Or, par les considérations cinématiques déjà utilisées (n° 15) pour la démonstration du corollaire III du théorème de Castigliano, on établit aisément que cette projection est égale à celle de la rotation de la section (S), sur la direction T. On peut donc dire que, dans chacun des termes Q de l'équation (33), δ représente la projection, sur une direction arbitrairement choisie T, de la rotation d'une section quelconque (S), à condition que le couple auxiliaire S soit appliqué sur cette section et que son axe ait la direction T.

35- Cas de la flexion plane . — Si le corps, ou le système de corps, considéré, isostatique ou hyperstatique, est soumis à la flexion plane, en toute section, les éléments de la réduction des forces élastiques sont exclusivement un effort normal N, un effort tranchant T situé dans le plan de la ou des fibres moyennes (plan de flexion) et un couple de flexion M, d'axe normal à ce plan. Par suite, l'équation (33) (n° 33) se réduit à $\delta = \frac{1}{E} \frac{dM}{dx} + \frac{1}{G} \frac{dT}{dx}$. Dans l'utilisation de cette dernière formule, on appliquera : 1° Les forces auxiliaires δ , en des points situés dans le plan de flexion et suivant des directions A menées dans ce plan; 2° Les couples S, sur des sections transversales, en dirigeant leurs axes normalement à ce même plan.' Il s'ensuivra que les quantités X seront les projections des

dbbyGoogk

The text on this page is estimated to be only 16.29% accurate

déplacements des points considérés, sur les directions A , et que les quantités y seront les rotations mêmes des sections considérées. Expressions générales des déplacements élastiques et calorifiques, détns les corps et les systèmes de corps à fibres moyennes. 36. Proposons-nous de former l'expression générale : i° De la projection \ du déplacement élastique et calorifique d'un point quelconque A , sur une direction abitrairement choisie A ; 20 De la projection $\leq p$ de la rotation élastique et calorifique d'une section quelconque (S) , sur une direction arbitrairement choisie T . Ces deux expressions découlent immédiatement de l'équation générale de l'élasticité, prise sous la forme (33) (n° 33). Pour obtenir la première, il suffit de ne faire intervenir, dans cette équation, qu'une seule force auxiliaire $.?$, de grandeur quelconque, appliquée en A , suivant la direction A ; on obtient ainsi (34) $x=7Ly(bs-")+7cd+"-+-r\ddot{E}\ddot{i};h$ Pour obtenir la seconde, il suffit de ne faire intervenir, dans cette même équation, qu'un seul couple auxiliaire S , de grandeur quelconque, d'axe dirigé suivant I'' ; ce qui donne On ne perdra pas de vue que, si le système considéré est hyperstatique, les éléments de réduction $J_t, E_{,,,}, \dots, 3R\zeta$ doivent être calculés dans le système isostatique obtenu par la suppression des liaisons surabondantes de ce système hyperstatique (n° 33, infne). Cas d'un système soumis à la flexion plane'. — Dans ce cas, dbbyGoogk

The text on this page is estimated to be only 11.53% accurate

les formules précédentes se réduisent à ,,,, , r\3t>{ N \ 5 T 311 Ml
 , (35) ^J[ë(ËQ-")+3GQ + -S ËîJrfi" Rappelons que, dans ce dernier cas,
 l'axe du couple auxiliaire ©, appliqué à la section considérée (S), doit être
 dirigé normalement au plan de flexion et que <o est la rotation même de
 cette section. Formules de M. Ernest Flamard. 37. Si dans l'équation
 générale de l'élasticité (32) (n° 33), relative aux systèmes de corps à libres
 moyennes, on fait intervenir exclusivement d'abord une seule force
 auxiliaire <#, puis un seul couple auxiliaire S, on obtient les deux formules
 (a) 1 H u J / cas g nF,F,6,Fi,,S— (np)F-,Ft,-""s)— ""Z ^*dt • qui se
 réduisent, si le système de corps n'est soumis à aucune variation de
 température, à iX = 5 "F,F0,,Fi,-T,ïiF,Fe,,Fli-t-n5) , Vf - 1 * ~ g ["F, FCJ, F,
 ,, 3-(nF, Fes, F,,+ «s) J ' Ainsi qu'on le vérifie aisément si, au contraire, le
 système est soumis à une variation de température, on peut écrire les deux
 formules (a) sous la forme l \ = -A HF p w rf— Hp p Fi-i-nf) . (c) { (?=
 s[HF,Fe»,Fi,,G— ("F,F,,,Fw-*°3)j' en y introduisant la fonction H exprimée
 par la formule (25) ai, Google

The text on this page is estimated to be only 16.82% accurate

(n° 19), et en convenant : que $H F_i > F_{ii}$ représente la valeur de la fonction H afférente au système isostatique soumis aux forces F , F_u et F'' et Δt la variation de température; que $H F_i < F_{ii}$ et $H F_i = F_{ii}$ représentent respectivement les valeurs que prend cette même fonction, lorsque le système isostatique est soumis, en outre, à la force auxiliaire S ou au couple auxiliaire S . Les formules (b) et (c) ont été établies, autrement d'ailleurs qu'il vient d'être indiqué, par M. Ernest Flamard, dans sa Thèse de doctorat déjà citée. Elles restent valables dans le cas des systèmes isotropes. Accord entre les résultats des deux méthodes et le théorème des forces vives.

38. Comparons les expressions générales (27) (n° 21) et (34) (n° 36) de la projection du déplacement élastique et calorifique d'un point quelconque A , sur une direction arbitrairement choisie A , -ma) $dS + G_{12} d\theta + \dots + E_{ij} d\theta_j$ expressions obtenues respectivement par la première et par la seconde méthode fondées sur le théorème des forces vives. Dans ces deux formules, $3T$, s , $\dots$, 3^r , sont les éléments de la réduction, au centre de gravité d'une section quelconque de l'un quelconque des corps, des forces élastiques développées dans cette section, par l'application de la force auxiliaire S au point A , suivant la direction A ; et, si le système est hyperstatique, ces éléments doivent, qu'on utilise l'une ou l'autre des deux formules, être calculés dans le système isostatique obtenu par la suppression des liaisons surabondantes de ce [système hyperstatique. Or, en vertu du principe de la superposition des effets des forces, les forces élastiques dans une section quelconque et, par suite, les éléments $3t$, G , $\dots$, $3IL$ de leur réduction, sont proportionnels

The text on this page is estimated to be only 14.49% accurate

— 78 — à la force extérieure 3 qui les produit ; on peut donc écrire : $a, b, \dots$ / désignant six constantes indépendantes de J ; d'où r_{fiTC} , $df, -, tf3R$; $;<d -'=/$; et, par suite, $rf\# \sim \$' S \sim \$' "" d\$ \sim \$ "$ ce qui prouve l'accord entre les deux expressions (27) et (34) du déplacement projeté X . L'accord entre les deux expressions (a8) (n° 21) et (35) {n° 36) de la rotation projetée o , se démontre de la même manière. Détermination des forces de liaisons surabondantes, dans les systèmes de corps à fibres moyennes. — Équation aux liaisons surabondantes. 39. La méthode de calcul des forces de liaisons surabondantes découle de l'équation générale 'de l'Élasticité. Pour en simplifier l'exposé, nous supposons que le système hyperstatique considéré, déformé par des forces [directement appliquées F et par une variation de température t , est soumis à ta flexion plane ; dans ce cas (n° 35) l'équation générale de l'Elasticité se réduit à Comme forces et couples auxiliaires à appliquer au système isostatique obtenu par la suppression des liaisons surabondantes du système hyperstatique considéré, adoptons : i° Des forces $\$,$ de grandeurs arbitraires, ayant mêmes points d'application et mêmes directions que les forces de liaisons surabondantes extérieures du système hyperstatique; 20 Des couples $\epsilon,$ de grandeurs arbitraires, ayant mêmes sections d'application que les couples de liaisons surabondantes extéai, Google

The text on this page is estimated to be only 15.77% accurate

- 76 riures du système hyperstatique et ayant, comme ceux-ci, leurs axes normaux au plan de flexion ; 3° Des forces $-f$, de grandeurs arbitraires, ayant mêmes points d'application et mêmes directions que les forces de liaisons surabondantes intérieures du système hyperstatique et, comme celles-ci, deux à deux égales et opposées; 4° Des couples G' , de grandeurs arbitraires, ayant mêmes sections d'application que les couples de liaisons surabondantes intérieures du système hyperstatique, ayant, comme ceux-ci, leurs axes normaux au plan de flexion et étant, comme ceux-ci, deux à deux égaux et de sens contraire. Dès lors, l'équation (33') s'écrit

-/[«(AGQ 11 est facile de voir que son premier membre est nul. En effet, les projections $\sim k$ des déplacements élastiques des points d'application des forces auxiliaires $-f$ et $-f'$, sur les directions de ces forces, ainsi que les rotations $\sim s$ des sections d'application des couples auxiliaires G et S' , sont afférentes au système hyperstatique, déformé par les forces F et par la variation de température t ; or ; 1° Sur les directions des forces $-f$, qui, par hypothèse, sontcelles des forces de liaisons surabondantes extérieures, les projections $\sim k$ sont nulles, en raison de ces liaisons mêmes, et, par suite, la somme $\sum j$ est également nulle; 2° Les rotations $\sim cp$ des sections d'application des couples de liaisons surabondantes extérieures sont nulles en raison de ces liaisons mêmes, et, par suite, la somme $\sum 8cp$ est également nulle; 3° Par hypothèse, les forces auxiliaires S' sont deux à deux égales et opposées, de sorte qu'à toute force $+ .f'$ correspond une force $- .f$; or, ces deux forces $-f$ et $-f'$ sont appliquées en deux ' points qui, dans le système hyperstatique, sont astreints à rester en contact, et dont, par conséquent, le déplacement projeté δ est dbbyGoogk

The text on this page is estimated to be only 15.67% accurate

- 77 — le même ; donc, dans la somme $\sum X$, à chaque terme X_k correspond un terme $-X_k$, et, par suite, cette somme est nulle; 4° La somme $\sum G < p$ est nulle pour la même raison. L'équation (a) se réduit donc à $\sum_{i=1}^n [(X_i - Y_i) \cdot X_i - Y_i \cdot X_i] = 0$. C'est l'équation aux liaisons surabondantes, dans laquelle les éléments de réduction N, T, M sont afférents au système hyperstatique considéré, soumis aux forces F et à la variation de température t; et ceux X, F, Y, au système isostatique soumis aux forces et couples auxiliaires X, F, Y et X', F', Y' définis ci-dessus. Cette équation s'utilise de la manière suivante : Supposons qu'il y ait : ni forces et n couples de liaisons surabondantes extérieures, zp forces et iq couples de liaisons surabondantes intérieures. Le nombre total des forces et couples de liaisons surabondantes est donc $m = n - (p - i - q)$; mais les forces et les couples de liaisons surabondantes intérieures étant, deux à deux, égaux et de sens contraire, le nombre des forces et couples inconnus se réduit à $m + n - p - q$. L'emploi de l'équation aux liaisons surabondantes exige l'application (au système rendu isostatique par la suppression des liaisons surabondantes et soustrait à l'action des forces F et de la variation t de température) de : m forces auxiliaires $X_1, \dots, X_m$, n couples auxiliaires $S_1, \dots, S_n$, 2p forces auxiliaires $X_{p+1}, \dots, X_{p+2q}$, — $X_{p+2q+1}, \dots, X_{p+2q+2p}$, 2q couples auxiliaires $S_{n+1}, \dots, S_{n+2q}$, — $S_{n+2q+1}, \dots, S_{n+2q+2q}$, forces et couples, de grandeurs arbitraires, — ayant, les forces, mêmes points d'application et mêmes directions que les forces de liaisons surabondantes, les couples, mêmes sections d'application que les couples de liaisons surabondantes. Les éléments de réduction correspondants X, G et $3P$, en une section quelconque de l'un quelconque des corps du système, sont des fonctions linéaires et homogènes de ces forces et couples

dbbyGoogk

The text on this page is estimated to be only 12.22% accurate

auxiliaires; on peut donc écrire : + /', il ■■*■\$',•; + e:y,+. .+ £,,., + e,«, +. + cne,, + e',e,, |,P,T, I.i, «,.',?', Y'. sont des fonctions des coordonnées a: et y du centre de gravité de la section considérée. Portons ces expressions dans l'équation (36) aux liaisons surabondantes et groupons les termes contenant respectivement en facteur les forces et couples auxiliaires L'équation ainsi transformée renferme m ■+■ n-\p-\q groupes; et, pour qu'elle soit satisfaite, il faut que chacun de ces groupes soit séparément nul, attendu que les forces et couples auxiliaires sont de grandeurs arbitraires ; on a, dès lors, les /n + n -\p + <J équations suivantes : [/[-(£-)/['■(£ [/[•. /["(è5 -") + * a +, 'n] */[«(ê-) ^ à * lfi] * i/iR(ï-'-j * i'ï' * iij5i * db»

The text on this page is estimated to be only 14.79% accurate

- 79 Ces équations, si l'on j remplace N, T et M en fonction des m + n -\p -h Ç forces et couples de liaisons surabondantes inconnus, fournissent les valeurs de ces forces et couples.* Remarque. — Les équations (b) expriment, les liaisons surabondantes extérieures, et, les équations {b'}, les liaisons surabondantes intérieures. On peut former ces équations d'une manière un peu différente, qui, dans certains cas, est plus commode. Ainsi, pour former la première des équations (b), au lieu d'appliquer au système rendu isostatique toutes les forces et tous les couples auxiliaires indiqués plus haut, il suffit de lui appliquer exclusivement la seule force auxiliaire S, ; les formules (") se réduisent alors à et la substitution de ces expressions de X, g et 3U-, dans l'équation (36), donne la première des équations (b). Le même procédé est applicable à la formation successive des autres équations (b). De même, pour former la première des équations (b'), il suffit d'appliquer, au système rendu isostatique, les deux forces auxiliaires -?, et — -f',, à l'exclusion des autres forces et couples auxiliaires; les formules (a) se réduisent alors à $X = i \backslash a'$, , $G = \S \backslash Y$, , $3IL = \#'$, s', ; et la substitution de ces expressions de -X, S et ;)IL, dans l'équation (36), donne la première des équations (b'). Le même procédé est applicable à la formation successive des autres équations (b1). Exemple de la détermination des forces de liaisons surabondantes extérieures. iO. Considérons Varc encastré à ses deux extrémités, pris au n" 23 (fis- 4) comme exemple d'application du théorème du général Menabrea généralisé, à la détermination des forces de liaisons surabondantes extérieures. Cet arc est soumis i des forces situées dans le plan de sa fibre moyenne, ainsi qu'à une variation z de température, comptée à partir de la température à laquelle ont été dbyGoogle

The text on this page is estimated to be only 11.94% accurate

Nous avons vu que les réactions de l'encastrement de gauche sont réductibles, au centre de gravité A de la section encastree, à deux forces X et Y, rectangulaires entre elles, et à un couple Z d'axe normal au plan de la fibre moyenne de l'arc; ce sont les deux forces et le couple de liaisons surabondantes; il s'agit de les déterminer. A cet effet, selon la méthode exposée au n° 39, l'arc étant rendu isostatique par la suppression de l'encastrement de gauche (fig. 7) appliquons, au point A, deux forces auxiliaires X et Y , de Kg. 7. mêmes directions que X et Y et, à la section dont ce point est le centre de gravité, un couple S, d'axe normal au plan de la fibre moyenne (forces et couple de grandeurs arbitraires). Les éléments de réduction correspondants X, Y et S, au centre $O(x, y)$ d'une section quelconque $1 = x, y$. Zi + S. Portons ces expressions dans l'équation surabondante et groupons les termes facteur x, y et S; il vient $3J \frac{d^2 \theta}{ds^2} + \dots = 0$ ds GO ds Z- if. Où ds θ n (36) (n>39) aux liaisons on tenant respectivement en -V[(fi-)S -fj, X et S étant de grand arbitraire, θ f M lires, pour que cela db»Googk

The text on this page is estimated to be only 13.29% accurate

soit satisfaite, il faut qu'o /[(fi/[fi— 81 JL ^ " Gû ds 7 rfs Gli d»
ces trois équations, on remplace N, T et M par leurs i (è) (i>° 23), en
fonction des inconnues X, Y et Z, on trois équations (c) (même numéro) qui
déterminent ces Exemple de la déler/niution des for surabondantes i M.
Reprenons l'exemple déjà considéré au n° 24 {fig. 5) : Arc encastré à ses
deux extrémités et comportant une rotule O, soumis à des forces situées
dans le plan de sa fibre moyenne, ainsi qu'à une variation t de température
comptée à partir de la température à laquelle ont été réalisés les
encastrements. Nous avons vu que cet arc est, en réalité, un système de
deux arcs AO et OB, encastrés, chacun, à l'une des extrémités et réunis
entre eux par la rotule O; que les forces de liaisons surabondantes sont deux
forces X et Y normales entre elles, appliquées à l'extrémité O de l'arc OB et
deux forces — X et —Y appliquées à l'extrémité O de l'arc AO. Ca sont ces
deux forces qu'il s'agit de déterminer. A cet effet, selon la méthode générale
du n° 39, le système étant rendu isostalique par la suppression de la rotule
O, qui crée les liaisons surabondantes intérieures, appliquons-lui (fig. 8) des
forces auxiliaires ffz, 0y, — 3X et — \$r, de grandeurs arbitraires, ayant
respectivement même point d'application et même direction que les forces
de liaisons surabondantes X, Y, — X et — Y. Les éléments de réduction
correspondants SZ, G et 31L, au centre de gravité G {x, y) d'une section
quelconque de l'un ou l'autre des deux arcs AO et OB ont pour expressions
on, — i,r +grx. ai, Google

The text on this page is estimated to be only 13.70% accurate

Portons ces expressions dans l'équation (36) (n° 39) aux liaisons surabondantes et séparons-y les termes en deux groupes contenant respectivement en facteur 3^x et 3^y pour que l'équation ainsi transformée soit satisfaite,* il faut que chacun de ces deux g séparément nul, puisque les forces auxiliaires $9X$ et $9Y$ sont des valeurs arbitraires. Nous obtenons, de la sorte, les deux équations (b) (n° 21), en fonction des deux équations (c) (même n° 21) on remplace N , T et M par leurs expressions en fonction de X et Y , on obtient deux équations qui déterminent ces inconnues. Autre exemple de la détermination des forces de liaison surabondantes à 42. Reprenons l'exemple déjà considéré au n° 25 (fig. 6) : poutre droite, à treillis double, articulée, reposant sur deux appuis simples et soumise à des charges appliquées aux nœuds. Avant de faire usage de l'équation (36) (n° 39) aux liaisons surabondantes, remarquons que, dans le cas présent, elle se simplifie Les forces élastiques produites d'une barre quelconque de la poutre à l'effort normal N (l'effort tranchant) les charges, en toute section sont réduites exclusivement à l'effort de flexion et le couple de flexion sont

The text on this page is estimated to be only 14.27% accurate

nuls); de plus, cet effort normal est le même dans toutes les sections de la barre, et, ainsi qu'il a été dit au n° 25, il porte le nom d'effort normal dans la barre. Nous verrons plus loin que, de même, les forces élastiques produites par les forces auxiliaires §. en toute section d'une barre quelconque, sont réductibles exclusivement à l'effort normal $3L$ et que cet effort est le même dans toutes les sections de la barre. L'équation (36), suppression faite du terme relatif à la variation de température, laquelle n'intervient pas ici, se réduit l'intégrale étant prise pour la longueur totale des fibres moyennes de toutes les barres. Or, pour une barre, de longueur s , on a, puisque N et X sont constants, ainsi d'ailleurs que i , Par conséquent la poutre, on a. Ceci posé, nous avons vu, au n° 25, que les liaisons surabondantes de la poutre sont les liaisons des diagonales (o, i'), ..., ($i - i, i'$), ..., ($i - i, i'$), avec les nœuds inférieurs d'attache $o, \dots, i - i, \dots, n - i$ et que, pour la diagonale ($* - i, **$), par exemple, les forces de liaisons surabondantes sont deux forces de même grandeur et de même direction que l'effort Z dans cette diagonale, et appliquées, l'une, à l'extrémité rendue libre de ladite diagonale, l'autre, au nœud $i - i$, — forces de sens répulsif ou attractif, selon que Z est un effort de compression ou de tension. Dès lors, selon la remarque finale du n° 39, la poutre étant soustraite à l'action des charges, appliquons à l'extrémité inférieure de la diagonale ($i - i, i'$) (fig. 9), une force auxiliaire S , dirigée suivant la fibre moyenne de cette diagonale, et une force s au nœud $i - i$. Il est clair que : 1° ces deux forces auxiliaires ne produisent aucune force élastique dans les barres de la poutre autres que celles du panneau (i), de sorte que, dans ces barres, $X = 0$; 3° dans chacune des barres du panneau (i), les forces élastiques que

The text on this page is estimated to be only 14.36% accurate

— 84 — les forces auxiliaires engendrent, en toute section, sont réductibles exclusivement à l'effort normal J_t et cet effort est constant tout le long d'une même barre. Les valeurs de l'effort normal $31.$, dans les P_i^*-9' milieu (/), se calculent immédiatement par la Statique pure; elles sont indiquées dans la seconde colonne du Tableau ciaprès. Dans les trois dernières colonnes de ce Tableau sont reproduites les notations spéciales adoptées au n° 25, pour représenter les efforts N produits dans les barres par les charges, ainsi que les longueurs s et les sections Q de ces barres.

Désignation des barres. Efforts par les forces "et -7: 3& = les charges : $N =$
 Longueurs des Sections des barres : $a =$ Éléments de l ($<-i, \gg$)... membrures
 \ (i' — i,i').... — $\bullet \blacksquare i \{U,':V: -fsina -ifsin^* -ifcos^* -rfcoi. i XJ V.-i \bullet y, Z/ ZJ$
 $b b a i s,s;Diagonales. .) . ' ., a =$ angle aigu des fibres moyennes des
 diagonales avec la verticale. A chacune des six barres du panneau (0
 correspond un terme, dans la somme \ de l'équation (a); les termes
 correspondant aux autres barres de la poutre sont nuls, puisque, pour
 chacune de ces barres, $0t \geq 0$, Par suite, l'équation (a) s'écrit sous la forme
 suivante suppression faite du facteur commun ξ et du dénominateur
 commun B , dbyGoogle

The text on this page is estimated to be only 14.18% accurate

Si, dans cette dernière équation, on remplace Z , X , XJ , Y , et Y ; par leurs expressions (c) à (h) (ii*25), obtenues par la Statique pure, et si l'on tient compte de ce que ; l'équation finale (X) du n° 25. Méthode fondée sur le théorème du travail virtuel. 43. Le théorème du travail virtuel a été utilisé, pour la première fois, en Résistance des matériaux, par Mohr(), pour la détermination des efforts dans les systèmes articulés à barres surabondantes. Depuis, les applications de ce théorème, aux autres systèmes employés en construction ont été largement développées par divers auteurs, notamment par Muller-Breslau (*). Enfin, ce même théorème nous a permis d'établir l'équation générale de V élasticité (s), dont nous venons de donner plus haut (n° 32 et 33) une démonstration nouvelle déduite du théorème des forces vives. Equation générale de l'Elasticité. 44. Soit un système de corps isotropes; supposons-le hyperstatique extérieurement et intérieurement (n° 11) (le cas d'un système isostatique sera regardé comme un cas particulier; celui d'un corps unique, également). Ce système de corps est déformé sous l'action de forces extérieures F , directement appliquées, et d'une variation de température de t degrés, comptée à partir de la température à laquelle ont été réalisées les diverses liaisons du système. (') Zeitschrift der Architecten und Ingenieur Vereine zu Hannover, 1871, (') Die Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstruktionen, 1886. (') L'équation générale de l'élasticité des constructions et ses applications {Bulletin de la Société des Ingénieurs civils de France, octobre 1907, p. 365). dbyGoogle

The text on this page is estimated to be only 15.79% accurate

Appelons : les projections des déplacements élastiques et calorifiques d'un certain nombre de points $A_1, A_2, A_3, \dots$, du système de corps, sur des directions arbitrairement choisies les projections des rotations élastiques et calorifiques d'un certain nombre de droites contenues dans le système de corps, $s_1, s_2, s_3, \dots$ arbitrairement choisies par droite* ; les directions normale; les six paramètres de la déformation élastique et calorifique ($n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6$) d'un parallélépipède élémentaire, pris en un point quelconque (x, y, z) du système; 4° ρF le potentiel interne, rapporté à l'unité de volume, au même point (x, y, z) ; 5° $F_1, F_2, F_3, \dots$ les forces de liaisons surabondantes extérieures et intérieures du système. Considérons maintenant le système isostatique obtenu par la suppression des liaisons surabondantes du système hyperstatique donné. Si on le soumet aux forces $F_1, F_2, F_3, \dots$ ainsi qu'à la variation de température de i degrés, il prend un état d'équilibre élastique identique à celui du système hyperstatique soumis aux seules forces F et à la variation de température. En particulier, dans ce système isostatique, les déplacements élastiques et calorifiques des points $A_1, A_2, A_3, A_4, \dots$, les rotations plastiques et

The text on this page is estimated to be only 14.66% accurate

— 87 — calorifiques des droites $u, a, a_3a't, aaa'it \dots$ et les paramètres de la déformation d'un parallélépipède quelconque sont les mêmes que dans le système hyperstatique. Le potentiel interne est également le même, de sorte qu'on peut écrire, d'après la formule (4) (n° 4) et la Remarque finale du n° 5. (a) $SF, Fi, Pll = -i<^-, -V+^$ en désignant par $usF Fm F|j$ le potentiel interne, rapporté à l'unité de volume au point (x, y, z) , du système isostatique déformé par les forces $F, F,, FtJ$ (la barre surmontant la lettre ra est destinée à indiquer que ce potentiel est relatif au système isostatique). Au susdit système isostatique, supposé soustrait à l'action des forces $F, FB,, FtJ$ et de la variation de température, appliquons ; 1° Aux points $Aj, A,, A,, \dots$, des forces auxiliaires, de grandeurs quelconques, $/, i, t$, suivant les directions $4,, Aj, ij, \dots$; 2° Aux points $i, a, a', a_3, \dots$, des forces formant des couples auxiliaires, de grandeurs quelconques, d'axes dirigées suivant $r, ij, r_3, \dots$. Sous l'action de ces forces et couples auxiliaires, le système isostatique prend un nouvel état de déformation; soient : $a', X'it Va, \bullet \blacksquare \blacksquare, <p'(\rangle j, f'a, \dots$ les nouvelles valeurs des déplacements projetés et des rotations projetées $X,, Xa, Xa. \dots ?$ n <?ij ?sj $\blacksquare \bullet \blacksquare$; dbvGoogk

The text on this page is estimated to be only 12.91% accurate

ij, t'r, sî, y'tl) '-j-j,, v'ry les nouvelles valeurs des paramètres de la déformation d'un parallélépipède élémentaire pris en un point quelconque (x, y, s) ; *f £ 'e potentiel interne, rapporté à l'unité de volume au point (x,y,z), potentiel qui a pour expression, d'après la formule (4) (n-4), (*) $w^s = 7(\gg i + *7 - < - *l), - * - | *f *i - \gg - \ll ? + *i ?) - i - ^{(7 - i - T'A - i - Tir): ll. \hat{i}, s$ le potentiel interne total du système, qui, d'après la formule (5) (n° 4), a pour valeur $Og z = ff J'w f z d\alpha; < i y d s$. Faisons subir, au système isostatique ainsi déformé, une déformation virtuelle compatible avec les liaisons de ce système; et soient $SX'j, 'SX', , SX', , ---, 3s', , 5\gg !, , 05'3, , 8\hat{e}j, 8\hat{e}\hat{I}, 6t', , 8v' 2v' = J., Sy', , ,$ les variations virtuelles correspondantes des déplacements projetés, des rotations projetées et des paramètres de la déformation. Le théorème du travail virtuel donne immédiatement l'équation $S, SX', - + - \hat{e}t SX', + , f, a, I + \dots + \ell l S?', - + - 2, 3^ + 3, 3*', , /// (m4 o t^{TM}j -$, le premier membre de cette équation représente, en effet, le travail virtuel des forces et couples auxiliaires ('), et le second membre, qui est la variation virtuelle du potentiel interne n.f,£, représente le travail virtuel, changé de signe, des forces intérieures. La déformation virtuelle étant seulement astreinte à être compatible avec les liaisons du système isostatique considéré, on (') Les forces de liaison du système isostatique supposé soumis aux forces $< fM \$, , 9S, \dots$ et aux couples $0, , \&, , e, , \dots$ n'interviennent pas dans l'expression du travail, attendu que les travaux virtuels de ces forces de liaison sont nuls, en raison de ces liaisons mêmes. «.Google

The text on this page is estimated to be only 12.07% accurate

peut prendre, pour cette déformation, la déformation^{réelle} subie par ce système, sous l'action des forces $F, F_1, \dots, F_n$, et de la variation de température de t degrés, ce qui entraîne : $BX' = X$ if $SX' = X$, $SX' = X$, ...; $B^i = if$, $tyt = ipt$, $Slf' = \zeta i$, ... ; $\cdot 8sj = t^{\text{ar}}$, " $St'r = \hat{e}j$. — it , $\hat{e}e'z = \xi j - h$; et, par suite, $(A)^{\wedge}, X, -H^i X, H, -fj X, -i - \dots + S1w1 + ei\zeta, -(-83<?, -H... \vee J J \{.-\xi \xi^* + \blacksquare \blacksquare \blacksquare + -szry)^* "lrdM -33-H"-5\zeta, --5S-^* * *$ étant admis que la variation de température i est la même en tous les points du système. Transformons les deux intégrales du second membre de l'équation (b). En ce qui concerne la première, imaginons qu'au système isostatique on applique simultanément : 1° les forces F, F_1 , et F_s ; 2° les forces et couples auxiliaires ξ et S , sans d'ailleurs soumettre ce système à aucune variation de température; d'après le principe de la superposition, les paramètres de la déformation élastique, produite par l'ensemble de ces forces et couples, ont pour valeurs, en un point quelconque (x, y, z) , $^{**} -t - < c$, $e.r + E^{\wedge}$, $e, -t - i\xi$, $Yj - 3 - ^t j - h T \ll + T \gg$. $tx, + ixy \backslash$ par suite, en désignant par ϕ le potentiel interne, rapporté à l'unité de volume, en ce point du système déformé par les forces et couples précités, on a $< " " \gg$ " $f, bv, f, \cdot, \xi s -$; $[< \bullet - \blacksquare + " * ' + < " * * ' - \bullet - < \blacksquare ' " * \blacksquare * = > ! ' + > \blacksquare [(\blacksquare \ll + < i > ' + (, \blacksquare \bullet * - \blacksquare \blacksquare ,) \blacksquare + (\blacksquare . + \bullet ;) \blacksquare]$ L'expression (a) de ϕ est une fonction homogène et du «.Google

The text on this page is estimated to be only 13.33% accurate

second degré des six. quantités $e^-, \dots, y^+$ et, pour passer de cette expression à celles (a') et (a'') de B_j^+ et de $ro. j^-$, il suffit d'y remplacer ces six quantités, d'abord par $e', \dots, y_l^-$, puis par $(sx^- \backslash - \ddot{e}^.)$, ..., $(fa-j-r- "(xy)')^>$ Par conséquent, en vertu de la propriété des fondions homogènes et dû second degré déjà utilisée au n° 33, on a identiquement $*V_e *S_e _ - _ - v _ ^E * + " - + \sim d: \pounds 7' - r, " - 7BF, F_{,,,} F_{,,,} ^3 \wedge . F \wedge F * " 1 "" * , \odot ; *$ En multipliant les deux membres de cette identité par $rd\&dydz$ et en l'intégrant pour le volume total occupé par le système de corps, on obtient $= nf, F_{,,} Fl_{,,} f, S \sim (nF, F_{,,} P_{,,} 0, G$ 3ST1f C'est l'expression transformée de la première intégrale du second membre de l'équation (I>), expression dans laquelle D , $(\ddot{I}j_{,,}$ et $II _$ représentent les valeurs du potentiel r , $tbpt ri \gg -'$, $i r$, Pas , $r.i l L$ interne total du système isostatique, déformé respectivement par : 1° les forces $F, F_{,,,} F1($; 2° les forces et couples auxiliaires $\$$ et $\odot$; 3° l'ensemble de ces mêmes forces et couples. Quant à la seconde intégrale de l'équation (b), on peut écrire, en vertu des formules (6) (n° i), $-/// (ni -+- \ll J.-t- ni) rfr rfy dz.$ en désignant par $n^{\wedge}$, $n'y$, $n'z$ les fatigues normales sur trois éléments rectangulaires entre eux, menés en un point quelconque $(;r, y, s)$ du système isostatique soumis aux forces et couples auxiliaires 5 et S . En remplaçant les deux intégrales du second membre de l'équation (b), par leurs expressions (c) et (d), et en écrivant le

The text on this page is estimated to be only 14.65% accurate

— 91 —
 mier membre sous forme abrégée, on obtient finalement
 (37) $2'i+2e^*-BF1F-.F,.1/.e-(liF1P-.Fh + Ve) - \langle t / j' / (('*-* \blacksquare n'r+ Odx dy d^*.$
 Nous retrouvons ainsi l'équation générale (3i) (n° 32) de l'élasticité des
 systèmes de corps isotropes. En reprenant la démonstration précédente dans
 le cas d'un système de corps à fibres moyennes, on retrouve également
 l'équation (3a) (n° 33), dont le développement conduit à l'équation générale
 (33) (même numéro) de l'élasticité des systèmes dont il s'agit : L'application
 de cette dernière équation au calcul des déplacements et des rotations
 élastiques et calorifiques, ainsi qu'à la détermination des forces de liaisons
 des systèmes hypers tatiques, a été exposée précédemment (n° 36 et 39 à
 42) ; il n'y a pas lieu d'y revenir: 45. Vant li tes he l'équation générale de
 l'élasticité. — I. Cas des systèmes de corps isotropes. — Pour établir, au
 n°44, l'équation générale (37) de l'élasticité des systèmes de corps isotropes,
 nous avons considéré le système isostatique obtenu par la suppression des
 liaisons surabondantes du système hypers tatique donné, et nous avons
 appliqué le théorème du travail virtuel à ce système supposé soumis aux
 forces et aux couples auxiliaires $\wedge$ et 3, dont la grandeur est arbitraire, en
 prenant, comme déplacements virtuels, les déplacements réels résultant de
 la déformation du système hypersla tique soumis aux forces données F et à
 la variation de température donnée t. Si l'on reprend exactement la même
 démonstration., en considérant non plus ce système iso-italique, mais le
 système hyper statique donné, on obtient la variante que voici de l'équation
 {37) : $\langle 39 \rangle 2''+2s? = "m.s - ("f- 'V.s'- "///\langle + \rangle : \bullet + \rangle \bullet) \rangle " ** . db \gg Google$

The text on this page is estimated to be only 15.25% accurate

- M — en désignant par $n^{\wedge}$, n' , n'' . les fatigues normales sur trois éléments rectangulaires, menés en un point quelconque (x, y, s) du système hyperstatique soumis aux forces* et couples auxiliaires $-f$ el 3. Si, enfin, on reprend encore la même démonstration, en considérant le système isostatique intérieurement et complètement libre extérieurement, obtenu par la suppression des liaisons surabondantes intérieures el de toutes les liaisons extérieures du système hyperstatique donné, et en supposant ce système soumis, non plus à des forces et couples auxiliaires de grandeurs absolument arbitraires, mais à des forces et couples auxiliaires S et g astreints à la condition de s'équilibrer sur ledit système, on obtient la seconde variante $CM^2 e^* = V, F, \dots, f, e^{\wedge fff} (> C + n \sim y + 0 \text{ doc } dy \text{ dz, dans laquelle : } \text{flp } F \text{ Vij} > Tlf \text{ s et } II, \dots, \wedge F|i \text{ y - désignent respectivement le potentiel interne total du système isostatique intérieurement et complètement libre extérieurement, déformé par : } i^{\circ} \text{ les forces } F \text{ données, toutes les forces de liaisons extérieures } Fe \text{ du système hyperstatique donné et les forces de liaisons intérieures surabondantes } F, \text{ de ce dernier système; } a^{\circ} \text{ les forces et couples auxiliaires } \# \text{ et } 3; 3^{\circ} \text{ l'ensemble de ces forces et couples. } nZi \text{ "ri "c sont les fatigues normales, sur trois éléments rectangulaires menés en un point quelconque } (x, y, a) \text{ du système isostatique intérieurement et complètement libre extérieurement soumis aux forces et couples auxiliaires } \$ \text{ et } \pounds. II. Cas des systèmes de corps à fibres moyennes. — Aux deux variantes, qui viennent d'être indiquées, de l'équation générale (3-) (n° 44) de l'élasticité des systèmes de corps isotropes, correspondent deux variantes de l'équation générale (38) (même numéro) de l'élasticité des systèmes de corps à fibres moyennes. Ces deux dernières variantes montrent que, dans l'équation (38), dbyGoogle$

The text on this page is estimated to be only 16.13% accurate

on peut, à volonté, considérer les éléments de réduction J_j , $\&! , \bullet \bullet \blacksquare$) ; $l t \pounds$, comme résultant soit de l'application de forces et couples auxiliaires $\$$ et 2) de grandeurs arbitraires, au système isostatique défini précédemment; soit de l'application de ces mêmes forces et couples au système hyperstatique donné; soit, enfin, de l'application, au système isostatique intérieurement et complètement libre extérieurement, défini précédemment, de forces et couples auxiliaires $\wedge$ et 2 astreints à la condition de s'équilibrer sur ce système. C'est au dernier de ces trois points de vue que nous nous sommes placés dans notre Mémoire déjà cité sur l'équation générale, de l'élasticité et ses applications ; ici, nous avons adopté le premier, parce qu'il rattache d'une manière plus directe la seconde méthode fondée sur le théorème des forces vives, à la méthode fondée sur le théorème du travail virtuel. En ce qui concerne la facilité des applications, ces deux points de vue sont d'ailleurs absolument équivalents : effectivement, qu'on choisisse l'un ou l'autre, les éléments de réduction $\> \pounds$, $(?, \dots, D f L \wedge$ sont toujours statiquement déterminés et, par suite, se calculent aisément. Le second point de vue n'a qu'un intérêt purement théorique. Théorème de Betti, Boussinesq et Maurice Levy, complété. 46. Ce théorème découle immédiatement de l'équation générale de l'élasticité. Considérons un système de corps isotropes ou à fibres moyennes; supposons-le hyperstatique (le cas d'un système isostatique sera regardé comme un cas particulier; celui d'un corps unique, également). Appliquons-lui un premier système de forces (A). Soient : m le nombre de ces forces, $F A$. l'une quelconque d'entre elles, A , son point d'application, A , - sa direction, $l l F$ le potentiel interne total du système de corps déformé par ces forces. Remplaçons le système de forces (A) par un second système de forces (B). Soient : n le nombre des forces de ce second système, $F B$. l'une quelconque d'entre elles, B ; son point d'application, $i B$. sa direction, $l l F i$ le potentiel interne total du système de corps déformé par ces forces. «.Google

The text on this page is estimated to be only 16.40% accurate

Appelons : X_J la projection, sur la direction AK , du déplacement élastique du point A (- sous l'action du système de forces (B) ; X_I la projection, sur la direction AB , du déplacement élastique du point B , - sous l'action du système de forces (A) ; $\frac{1}{2} \int_V \mathbf{F} \cdot \mathbf{ir}$, ou $n K \frac{1}{2} f_A$ la valeur que prendrait le potentiel interne total du système de corps, si celui-ci était déformé par les deux systèmes de forces (A) et (B) agissant simultanément. Cela posé, la variante (3ç>) (n° 45) de l'équation générale de l'élasticité, si l'on y annule la variation de température t , qui n'intervient pas dans la question présente, et si l'on y annule également les couples auxiliaires G , se réduit à Cette équation appliquée à la déformation du système de corps, par le système de forces (B) , donne immédiatement, si l'on prend comme forces auxiliaires $\$,$ les forces du système A , ($\ll 0 \ 2 F_a' X^{\wedge} = \dots \blacksquare \dots - (F' \wedge F)$) Appliquée à la déformation du système de corps, par le système de forces (A) , cette même équation donne, si l'on prend comme forces auxiliaires les forces du système (B) , $\langle * \rangle \ 2 F_B^{\wedge} = n F', F' - (I I F^* \sim 1 \sim I I, ,')$ Les deux relations (a) et (b) sont précisément celles (e) et ($_ /$) (n° 29) qui se traduisent par le théorème de Betti, Boussinesq et Maurice Levy, complété. Application de l'Equation générale de l'Elasticité, à la Statique graphique des arcs élastiques. 47. Dans son magistral Traité de la Statique graphique, Maurice Levy a exposé de très remarquables méthodes graphiques, pour le jgitzedby GoOgk

The text on this page is estimated to be only 16.84% accurate

calcul des arcs élastiques, astreints à des liaisons surabondantes et soumis à des forces extérieures agissant dans le plan de leur fibre moyenne, ainsi qu'à une variation de température. Ces méthodes ne tiennent compte que des déformations élastiques correspondant au couple de flexion; elles négligent celles correspondant à l'effort normal et à l'effort tranchant. Elles sont fondées sur la propriété que possèdent des forces fictives parallèles entre elles, appliquées à chaque élément ds de la fibre moyenne de l'arc et égales à $\frac{M}{EI} ds$, M désignant le moment de flexion dans la section d'abscisse curviligne s, I le moment d'inertie de cette section et E le module d'élasticité longitudinale de la matière constituant l'arc. Ces propriétés, particulières à chaque type d'arc, résultent des conditions auxquelles celui-ci est astreint, dans sa déformation élastique, du fait de ses liaisons surabondantes ; elles sont établies, dans le Traité de Maurice Levy, au moyen des expressions des déplacements élastiques, obtenues par les méthodes géométriques et cinématiques de calcul des déformations; elles se déduisent, d'ailleurs, plus simplement de l'équation aux liaisons surabondantes (n° 39) ou (ce qui, au fond, revient au même) de l'équation générale de l'élasticité des systèmes de corps à fibres moyennes, (4) $2A + 2e \sim \frac{1}{3} IV B \bullet$ par la suppression des termes correspondant aux déformations dues à l'effort normal N et à l'effort tranchant T. Le degré d'approximation qu'on obtient en négligeant ces déformations peut souvent être considéré comme suffisant ; mais, dans certains cas, notamment lorsqu'il s'agit d'arcs surbaissés, il n'en est plus de même et il est alors nécessaire de tenir compte, sinon des déformations dues à l'effort tranchant qui sont toujours les plus faibles, du moins de celles dues à l'effort normal. On peut y parvenir par des correctifs assez simples qui, tout en n'altérant en rien la contexture des méthodes graphiques, permettent de

The text on this page is estimated to be only 15.16% accurate

d'y faire intervenir, à volonté, soit seulement ces dernières déformations, soit également celles dues à l'effort tranchant (τ). Voici ■48. Introduction des déformations due* à l'effort t. r désignant le rayon de gi ration d'une section quelconque (S) de l'arc, autour de l'axe mené par le centre de gravité G de cette section (fig- 10) normalement au plan de la fibre moyenne, portons, sur l'intersection de ce plan avec celui de la section (S), $GH'=GH''=r$. Appelons : Points conjugués relatifs à la section (S), les deux points H' et H'' qui ne sont autres que les deux sommets de l'ellipse centrale d'inertie de la section; Lignes conjuguées, les deux lieux A'B' et A''B* des points H' et H'' relatifs à toutes les sections de l'arc; à chaque élément ds de la fibre moyenne AB de l'arc correspondent deux éléments ds et ds'' des lignes conjuguées; Moments conjugués relatifs à la section (S), les deux sommes respectives des moments, par rapport à H' et à H'', des forces élastiques développées dans cette section (ou des forces extérieures agissant à gauche de cette même section); M' et M'' les valeurs de ces moments, dans l'arc hyperstatique considéré, soumis à des forces extérieures données F et à une variation de température t; {') Bebtrand de Fûntviolant, Mémoire sur la Statique graphique des arcs élastiques (Comptes rendus de F Académie des Sciences, t. CX, 1890, p. 697, et Bulletin de la Société des Ingénieurs civils de France, avril 1890, p. 401). ai, Google

The text on this page is estimated to be only 13.61% accurate

— 97 — ■üü' et ;)R" les valeurs de ces mêmes moments, dans l'arc isostatique, obtenu par la suppression des liaisons surabondantes de l'arc hyperstatique, et soumis à des forces et couples auxiliaires § etc. On a immédiatement $M' = M - t - Hr$, $M^* = M - Ni$; d'où $n \sim m' - m$, $m = \hat{1} \pm \ll$. De même, $3R' - :)IL' 3t = ^L J^$. $3R. = Or$, l'équation générale (a) ($n^\circ 47$), suppression faite du terme correspondant aux déformations dues à l'effort tranchant, peut s'écrire En remplaçant, dans la seconde intégrale, les efforts normaux et les moments de flexion par leurs expressions ci-dessus, et en ayant égard à la relation $1 = \hat{u}r1$, on obtient, après réductions, , les intégrales s'étendant à la longueur totale de la fibre moyenne AB de l'arc Posons et convenons de représenter indistinctement par : M' l'un ou l'autre des deux moments conjugués M' et M'' ; $\ddot{I}I'L'$ l'un ou l'autre des deux moments conjugués $;) [L'$ et $3H."$; ds' l'un ou l'autre des deux éléments ds et ds'' des deux lignes conjuguées, correspondant à un élément ds de la fibre moyenne. Moyennant cela, on peut écrire ai, Google

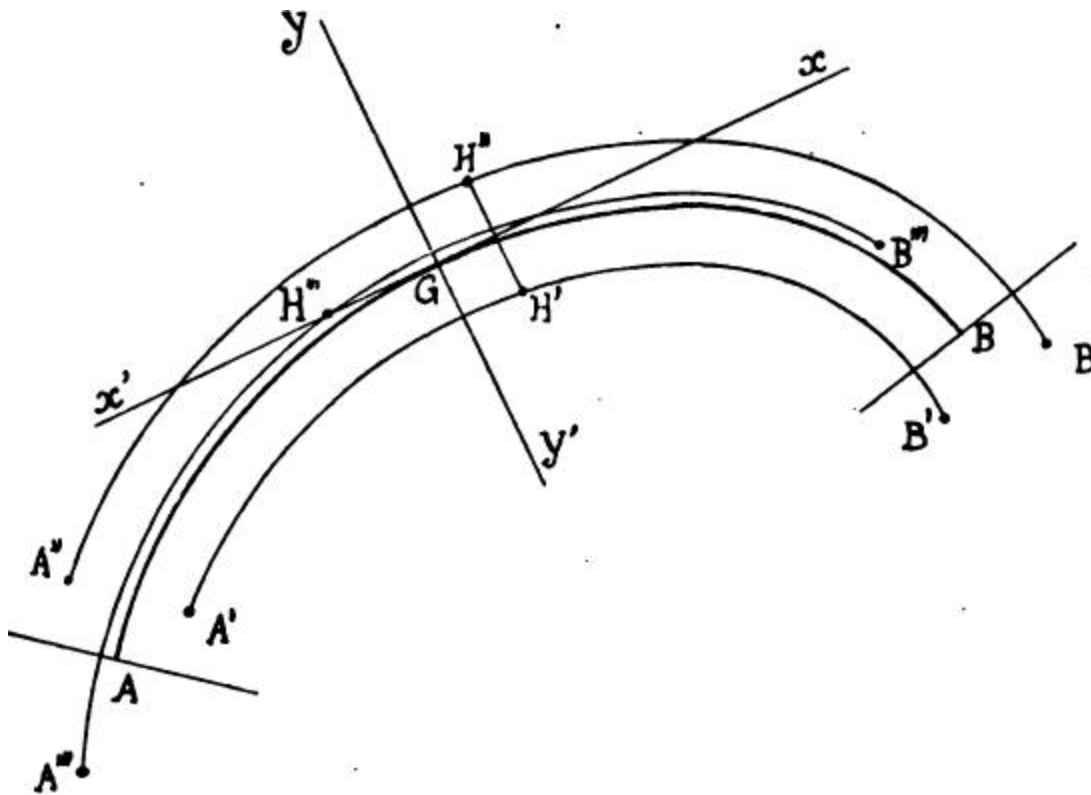
The text on this page is estimated to be only 18.68% accurate

la seconde intégrale s' étendant à la longueur totale des deux lignes conjuguées A'B' et A'B". En comparant l'équation (b) (n° 47) qui néglige les déformations dues à l'effort normal, à l'équation (c) qui en tient compte, on voit que, pour passer de la première à la seconde, il suffit d'y remplacer les moments de flexion M et $3IL$ par les moments conjugués M' et $3I_1L$, les moments d'inertie I, par $I' = \alpha I$, et d'y regarder la seconde intégrale comme étendue, non plus à la longueur totale de la ligne moyenne, mais bien à la longueur totale des deux lignes conjuguées. On peut, dès lors, concevoir, sans entrer dans la démonstration donnée dans notre Mémoire sur la Statique graphique des arcs élastiques, que : Pour introduire les déformations dues à l'effort normal, dans les méthodes de la Statique graphique qui les négligent, il suffit de remplacer, dans ces méthodes, les forces fictives parallèles $r^{\wedge}ds$, appliquées aux divers éléments ds de la fibre moyenne de l'arc considéré, par des forces fictives $M' ds$, M' , $Wd7di = Wds'$ parallèles aux premières et appliquées à chaque élément ds' des deux lignes conjuguées.

49. Introduction des déformations dues à l'effort normal et à l'effort tranchant. — Appelons points conjugués relatifs à une section quelconque (S), de centre de gravité G (fig- 1 1), les trois points H', H'', H''' qui, situés dans le plan de la fibre moyenne, ont pour coordonnées rapportées à la tangente Gx à cette fibre et à la normale Gy : $\{pf= rYS5 _ r/6 * \bullet = rJZ\hat{y} y= r/6, -\bullet \text{---} rY\ddot{u}. y= o$, a désignant le rapport du module d'élasticité longitudinale E au module d'élasticité transversale G. dbbyGoogk

The text on this page is estimated to be only 15.43% accurate

Dès lors, par analogie avec ce qui a été dit précédemment, l'arc admet trois lignes conjuguées $A'B'$, $A''B''$, $A'''B'''$, et à chaque élément ds de sa fibre moyenne, correspondent trois éléments ds' , ds'' et ds''' des lignes conjuguées; de plus, à toute section (S) répondent trois moments conjugués. Soient : M' , M'' , M''' les valeurs de ces moments, dans l'arc hyperstatique considéré, soumis à des forces extérieures F et à une variation de température t ; $3H'$, $3H''$, $3H'''$ les valeurs de ces mêmes moments, dans l'arc isostatique, obtenu par la suppression des liaisons surabondantes de l'arc hyperstatique, et soumis à des forces et [couple]s auxiliaires f et ξ $\leq r/6$ immédiatement $B'.M + N^{\wedge} + T^{\wedge}$ ai, Google



The text on this page is estimated to be only 12.27% accurate

d'où l'on tire $M' = H - M'' \sin \frac{r}{6} \sin \alpha$ —
 «.m" $3r^3 \sin^3 \alpha$ En portant ces valeurs des efforts normaux, des
 efforts tranchants et des moments de flexion, dans la seconde intégrale de
 l'équation générale (a) (n° 47) écrite sous la forme $\int_0^l \frac{1}{I} \left(M' \frac{ds}{ds'} + M'' \frac{ds}{ds''} + M''' \frac{ds}{ds'''} \right) ds$,
 (*«*,B5-'-«b)*on obtient, en tenant compte de ce que $a = \frac{r}{6}$ et de ce que $I =$
 $\frac{\pi}{4} a^4$, —.,/»* */■(»■* * »&.* »-£)*, les intégrales s'étendant à la
 longueur totale de la fibre moyenne AB de l'arc. Posons $l = 31$ et convenons
 de représenter indistinctement par : M' l'un quelconque des trois moments
 conjugués M' , M'' et M''' ; $1/I$ l'un quelconque des trois moments
 conjugués $3K$, $3R$ et $3IL$; ds' l'un quelconque des trois éléments ds' , ds'' ,
 ds''' des trois lignes conjuguées, correspondant à un élément ds de la fibre
 Dès lors, on peut écrire $\int_0^l \frac{1}{I} \left(M' \frac{ds}{ds'} + M'' \frac{ds}{ds''} + M''' \frac{ds}{ds'''} \right) ds = \int_0^l \frac{1}{I} ds$ Google

The text on this page is estimated to be only 18.44% accurate

la seconde intégrale s'étendant à la longueur totale des trois lignes conjuguées $A'B'$, $A''B''$, $A'''B'''$. Cette équation est exactement de même forme que l'équation (c) (n° 48), et l'on en conclut, comme précédemment, que : Pour introduire les déformations dues à l'effort normal et à l'effort tranchant, dans les méthodes de la Statique graphique qui les négligent, il suffit de remplacer, dans ces méthodes, les forces fictives parallèles $-p$ appliquées en chaque élément ds de la fibre moyenne de l'arc, par des forces fictives parallèles aux premières et appliquées à chaque élément ds des trois lignes conjuguées. Ajoutons qu'ainsi qu'il est établi dans notre Mémoire précité, à une section de l'arc ne correspond pas qu'un seul système de trois points conjugués, mais bien une infinité, et, par suite, une infinité de systèmes de trois moments conjugués; qu'un arc admet, par conséquent, une infinité de systèmes de trois lignes conjuguées. La proposition ci-dessus est applicable à l'un quelconque de ces systèmes; mais le plus commode entre tous, à utiliser dans les applications, est celui défini plus haut.

COMPARAISON ENTRE LES TROIS MÉTHODES. 50. De l'exposé qui précède se dégagent les quelques remarques suivantes : Les méthodes présentées sont entièrement concordantes et toutes trois tiennent compte non seulement des effets des forces extérieures, mais aussi des effets calorifiques. Bien qu'ayant entre elles des rapports étroits, elles n'ont ni la même portée ni le même caractère théoriques : La première conduit, comme les deux autres, aux principes de réciprocité qui sont des cas particuliers du théorème de Betti, dbyGoogk

The text on this page is estimated to be only 16.97% accurate

~m Boussinesq et Maurice Levy ; mais, dans son état actuel, elle ne permet d'établir directement ni ce beau théorème, ni l'équation générale de l'élasticité, synthèse de toute la théorie des déformations ; elle est donc, à cet égard, moins satisfaisante que les deux dernières. Au point de vue de l'exposé, cette première méthode, fondée sur le théorème des forces vives, est assez délicate, du moins dans la partie relative aux déformations calorifiques, qui nécessite l'extension faite ici de l'équation de Clapeyron. La seconde méthode, également déduite du théorème des forces vives, est, au contraire, simple et élémentaire. La troisième méthode, tirée du théorème du travail virtuel, fait appel à des notions de Mécanique générale plus élevées, mais elle permet de mettre en compte, dès le début et simultanément, les déformations calorifiques et les déformations élastiques. A cette troisième méthode, il a été reproché de reposer sur une base peu solide, parce qu'il n'existerait pas, a-t-on dit, de démonstration rigoureuse du théorème du travail virtuel. Sans entrer, à ce sujet, dans une discussion qui ne saurait trouver place ici, nous croyons devoir rappeler que, dans l'une des Notes dont il a illustré la Mécanique analytique de Lagrange (1), l'un des mathématiciens les plus subtils du siècle dernier, Joseph Bertrand, s'exprime ainsi : « La première démonstration rigoureuse du principe des vitesses virtuelles est due à Fourier {Journal de l'Ecole Polytechnique, t. II, an VII}. » Au surplus, dans les nombreuses applications qui en ont été faites, le théorème du travail virtuel n'a jamais, que nous sachions, été trouvé en défaut, et, ainsi qu'il ressort de la présente Note, les résultats auxquels il conduit, en ce qui concerne spécialement les calculs de déformation, sont entièrement d'accord avec ceux déduits du théorème des forces (1) Œuvres de Lagrange (publiées par Darboux), t. XI, 1888, p. 313. dbyGoogle

The text on this page is estimated to be only 13.54% accurate

TABLE DES MATIÈRES. Forces élastiques, en Théorie mathématique de l'Élasticité Paramètres de la déformation élastique d'un corps isotrope Travail des forces élastiques. Potentiel interne d'un corps isotrope Paramètres de la déformation d'un corps isotrope, lorsque celle-ci est à la fois élastique et calorifique Forces élastiques, en Résistance des matériaux. Éléments de leur réduction. Paramètres de la déformation élastique d'un corps à fibre moyenne Travail des forces élastiques et potentiel interne d'un corps à fibre moyenne. Paramètre de la déformation d'un corps à fibre moyenne, lorsque cette déformation est à la fois élastique et calorifique Première méthode /ondée sur le théorème des forces vives). Principe fondamental des méthodes déduites du théorème des forces vives : Équation de Clapeyron; extension de cette équation Théorème des dérivées du travail de Castigliano Application du théorème de Castigliano, au calcul des déplacements élastiques. Théorème du général Menabrea. Détermination des forces de liaisons surabondantes Extension du théorème de Castigliano, au cas où la déformation est à la fois élastique et calorifique Application du théorème de Castigliano généralisé au calcul des déplacements élastiques et calorifiques, dans les corps et les systèmes de corps à fibres moyennes Extension du théorème du général Menabrea, au cas où les déformations sont à la fois élastiques et calorifiques. Détermination des forces de liaisons surabondantes Exemple de la détermination des forces de liaisons surabondantes e. Exemple de la détermination. des forces de liaisons surabondant Autre exemple de la détermination des forces de liaisons surabondantes Principes de réciprocité M Lignes d'influence ^ ai, Google

The text on this page is estimated to be only 5.50% accurate

ai, Google