

Mécanique analitique; par m. de La Grange, de l'Académie des Sciences de Paris ..

1. [Notice](#)

This book was produced in EPUB format by the Internet Archive.

The book pages were scanned and converted to EPUB format automatically. This process relies on optical character recognition, and is somewhat susceptible to errors. The book may not offer the correct reading sequence, and there may be weird characters, non-words, and incorrect guesses at structure. Some page numbers and headers or footers may remain from the scanned page. The process which identifies images might have found stray marks on the page which are not actually images from the book. The hidden page numbering which may be available to your ereader corresponds to the numbered pages in the print edition, but is not an exact match; page numbers will increment at the same rate as the corresponding print edition, but we may have started numbering before the print book's visible page numbers. The Internet Archive is working to improve the scanning process and resulting books, but in the meantime, we hope that this book will be useful to you.

The Internet Archive was founded in 1996 to build an Internet library and to promote universal access to all knowledge. The Archive's purposes include offering permanent access for researchers, historians, scholars, people with disabilities, and the general public to historical collections that exist in digital format. The Internet Archive includes texts, audio, moving images, and software as well as archived web pages, and provides specialized services for information access for the blind and other persons with disabilities.

Created with hocr-to-epub (v.1.0.0)

MÉCHANIQUE ANALITIQUE; PAR M. DE LA GRANGE, DE
L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS .. Joseph Louis Lagrange
Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 10.14% accurate

BDUOTECA PROVnrâLE 3 Nam. 1 I[^]. Prov. / ■ < APOLI
Digitized by Gopgle

The text on this page is estimated to be only 19.25% accurate

-y Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 9.00% accurate

1 Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 20.00% accurate

MÉCHANIQUE ANALITIQUE.

The text on this page is estimated to be only 9.75% accurate

\ "1 V ^fJU ized by Google

The text on this page is estimated to be only 11.85% accurate

MÉCHANIQUE ANALITIQUE Par M. DE L'AMARÉ Par M. DE L'AMARÉ f de L
Académie des Sciences de Paris et de Berlin de Pkersbourg, de
Turin et de la Faculté de Médecine de Paris. M. DCC. LXXXVIII. Avec l'approbation
et le privilège du Roi



A PARIS,

Chez LA VEUVE DESAINT, Libraire,

The text on this page is estimated to be only 8.75% accurate

I 1/ J ' c ■ » » 1 ' ^J. ^«.14. ». .1 3d by Google

The text on this page is estimated to be only 18.61% accurate

On a déjà plusieurs Traités de Méchanîque, mais le plan de celui-ci est entièrement neuf. Je me suis proposé de réduire la théorie de cette Science, & de réduire les problèmes qui rapportent, à des formules générales, dont le simple développement donne toutes les équations nécessaires pour la solution de chaque problème. J'espère que la manière dont j'ai tâché de remplir cet objet, ne paraîtra rien à délirer*. Cet Ouvrage aura d'ailleurs une autre utilité ; il réunira & présentera (sous un même point de vue) les différents Principes trouvés jusqu'ici pour faciliter la solution des questions de Méchanique, en montrera la liaison & la dépendance mutuelle. On se mettra à portée de juger de leur justesse & de leur étendue. Je le divise en deux Parties; la Statique ou la Théorie de l'Équilibre, & la Dynamique ou la Théorie de la Force. ■ Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 20.70% accurate

vj AVERTISSEMENT. ' du Mouvement; & chacune de ces Parties
traitera ■'v/ • ■ ..^j:,,. '" , féparément des Girps iblides & des fluides. On ne
trouvera poinc de Figures dans cet Ouvrage* , Les méthodes qus j'y expoie
ne demandent ni conf .truâions j ni laifbnnemeiis géométriques; ou mécha*
ni(^ues, mais feulement des opérations algébriques, affijetties à ime
marche régulière & uniforme. Ceux qui aiment l'Analyfe, verront avec
plaifir la Méchanique en devenir une nouvelle branche» & me iàiront |gré
d'en avoir étendu ainil le domaine. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 13.94% accurate

TABLE. PREMIERE PARTIE DE LA MÉCHANIQUE, » ' •
Section L Sur Us différens Principes de la Statique, Page i \$SCT* n.
Formule giniraU f»ttr .réquilihe d'un fyftmc qaeU conque de forces ; avec
la manière de faire ufa^e dt ' ecitc firmuU, is SzCT. m. Propriétés générales
de Vé<^uilibre déduites de la forwatU- précédente, SxcT. IV. Méthode tris-
fimple de trouver les équations nécef^ ' ' foires pour rèquilibre d'un fyflém
quelconque dk corps rt^dés comme des poims, ou commi des maj/es , finies
, ù tirés par des puiffances données* ^ 4% , SiCT. y. .So&ttion de
dijférens problèmes êe Stoiique, 5 9 ^T'I. b*-
réqiiUiImd'«i4a(Smsfbiccsappl^aéet<kiumèm r te de k compefiticm
4eVUcoaipofitiofi des Ibrcesr UH. : \$é U. . De rçquilibre de plniieuis forces
appliquées à un fykî:me de corps conûdéiés comine â»i points >& . lié»
entr'euz pacdef

The text on this page is estimated to be only 17.33% accurate

1 flU ou par des verg[^]. Page §. l'il. De l'équilibre d'un fil dont tous les points font tires par dos forces quelconques, & qui est ûippofé parfaitement flexible ou inflexible, ou tlaftiijue, &: en mcme tcms exrenfible ou non. |a I ■■ . « f. IV. De réquilibre d'un corps folide de grandeur fenfiblé de de figure quelconque, dont tous les points font tirés par des forces quelconques. iiS Sect. VL Sur Us Principes de l*Hydroftatique. m \$ECTr VII. De réquilibre des fluides incQmpreJJibles, 13e» Sect. VIII. De l'équilibre des fluides comprejffihles ù élaftiques, ' ' ^SS SECONDE PARTIE DE LA MÉCHANIQUE, f OU LA D y fi AMI <IU E, ' !St:cTiON L Sht les différcns Principes de la Dynamique ^ " • Page lyS m SfCT, IL Formule générale pour le mouvement ^ un fyjlême de corps , animés par des forces quelconques. 1 89 Sect, III. Propriétés générales du mouvement enduites de la formule précédente, ^ 19Z bi.Q1. IV.

The text on this page is estimated to be only 16.69% accurate

T A .B L E. iz Sect. IV. Méthode la plus finple pour parvenir aux
cquaitions qui déterminent le mouvement d'un fyJILfiie ijueltrices
quelconques. SCCT. V. Solution de di'^éren.s problèmes de Dynamique. \$.
I. Su!uciun générale du problciue d«s ofcillatlons tres-petites d'un fyftcme
quelconque de corps. » S- II. Du mouvement d'un corps attiré vers un ou
plusieurs centres. §. III. Du mouvement de plufieurs corps qni agîfTent les
uns fur les autres, foie par des forces d'actra(flion ,»foit en fe tenant ^ par
des fils ou par des leviers, *_ Sect, VI. Sur la rotation des Corps, 337 \$. L
Fortnules générales, relatives au mouvemenr de* rotation. 338 §. II.
Équations pour le mouvemenc de rotation d'un corps folide de figure
quelconque, anime par des forces qiickunques. . . Î2* §. III. Détermination
du mouvement d'uti corps grave de figure quelconque. 389 Sect. VJL Sur
Us Principes de f Hydrodynamique, 418 Sect. VIII. Du Mouvement des
Fluides IncompreJJihUs^ 112 §. I. Équations générales pour le mouvement
des Fluides incom» prtflbls. 4 » 8

The text on this page is estimated to be only 10.00% accurate

, T A n L E. \$. II. Du mouvement des Fluides pefans Se
homogènes dans de» vafes ou canaux de figure quelconque. 471 Sect. IX.
Du mouvement des FLuidfis compref JibUs & Uafiques. 49 * Fin de la
Table, ERRATA. • Page 166 Uffite¹¹, déterminées; Hf, indéterminées.
Page a|, Ugne 3, s'ctoicnt joints; Uf, étoient joints. Idem. ///^{nf} 21 , par \jl
dctcrmm'n.ition ; Uf, pour la détermigatioi Page 53, ^^g¹ 5 , équation ; /i/
éc]u»tions. Piige ii^t Igne 5, je; /(I fe. P<iygf 31a, //^g la, Aa'i li/,Am.
Page 1240 ligne ao, prècifion; li/. préccffion. /*<igf 4a4, lig. dem, ; ' Pagg
434, /fgn» ay, inexactitude; /<yi incertitofe Page 477, ///yng 7, mtérieure;
lif. extétieuic; Page 478, i'tg'iC, lOy divifôes; Uf. dirigées. Idem. Ugne 11, {
= 90° r= ; ^ se 90», Pag\$ J04, //^/i«f 7 €f Juiv. i ckangc\ m. en a.

The text on this page is estimated to be only 10.39% accurate

EXTRAIT DES REGISTRES p^l l'Ac ADéM 1 E Royale des
Sciences. Du vingt-fept Févtr mil fept cent quamHfbigt'-kmt* ATessxbvas
ôî ^ApfcACS» CovsiKf £■ GxHORB & oAM, ayanff -MiMio compte d'un
Ouvrage intitulé : Méchanifu» onaûtiqM^ par M, DM UL GMjttreMs
l'Académie a |ag^ ctc Ouvrage dighe de Con AppH>> batkMit ^ d'être
imprimé (bat San Privilège. - le certifie cet Extraie conforme auà regilkes ét
TAcadâttfe. A Farb^ ce 17 Fé^ftiec tjZi, Vt lLA&^vrs DE CONDORCËTr 1
• PRiriLEGE DIT ROT iOUIs, ?AK tAGRACB BI DIEU , Roi DE t JI
ARCB ET DE NaVARRE;A tlûj prlicj 4c féaux Contctllers, les Gens tenant
nos Cours de Parlement 4 Maitres des Re:}iictr»
efdinaifMde,iMCR»IIds»l,Gfaiid-GMi|«a,Pr£T6t dePam, Bailiifs,
Séncdiaux, leur» .LiaitMnm Qvilti avtmoM Juftieian qi/il apptniendfa,
Saiot. Nm bteİMinét m» MiMBKM »B t*AcAD#.MiB RoYALB DES
SciENCES de notre bonne Ville deParit^ Kous «m fiiit expofêr qu'ils
auroienc befoin de nos Leures de Privilège pour Tinf reflion de leurs
Ouvrages : A ces causes , voulant favorablement traiter les Expofins , Nous
leur avons permis & permettons par ces Préfcntes , de fiire hnprimer , far tel
Iai|(inMr ^kll» vodUnnt choifir , tootes les Recherches ou Obfervatioos
jour>' ■aliccw H» Kaladm aanacllw de «Datce qm aura été fidtda^
Académie Royale des Sciences^ le* Oavt^, Mémoîntcm TnM de cbaoîa de»
Particuliers qui la cQmpolêat, & gcnralemcnMMit oe9i« hdite Acadbliê
vwidtafiir paroître, après avoir «ait examiner lefdits Ouvrages, fr
jegéqu'âklkeitt^ delW fceflion, en tels volumes, forme, marge, caraÔeres,
conjointement, ou Qpzrément, *aainide|ûqae bonletirAmblera, & de les
faire vendre * débiter par-tout rotr* Xajnome, JfeluLiut le teau de vingt
aonéet coeiScatives , à compter du jour de fa dat» âmfHbBmi ŪnrtMiMfrif
roecafo^deiOnvr^cHlefielpédfiés, il en puil# iM imprimé d'autres «li ne
ASeat pi« de ladt» Académie s Fa^s déAafit i toaic»
ftn»deieK(ôaaeyde9Mi9ii9aiIiié*
Mdikêa9i'eUe»6i«tt»dreB«DiMdiied%a* Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 13.88% accurate

prefuon étrangère dans aucun Heu de notre ol>cîfnnce ; comnie
aufll à tous Libraire* te Imprimeurs d'imprimer , ou âire Imprimer, vendre,
faire yendre & débiter leGUnOv* vrages, eo tout ou en partie, ft d'en faire
aucunes traduâiona ou extraits , (âus ^ uelqn* prétexte que ce puiile être ,
ûns la permliUon expreïie & par ccrit dcQIts Expo(ân:s , ou de ceux qui
auront droit d'eux; i peine de conf.ication des e.;e;;.pl;tlrcs contrefaits, de
trois mille livres d'ariund;; cor.tro cbjc.in des cantrevenanis, dent un tiers .«
Nous , un tiers à l'Hôtel- Dieu de Taris, & l'autre tiers auxdits Expolar.ts, ou
à celui <]ui aura droit d*euy, & tous dépens,' dommages & imérêtsjâla
charge que cei Pré* fentes Jêront enregidrées tout au long Htr le Regtftre de
b Communauté des Librairea k. Imprimeurs de Paris , dans trois mob de la
date dlcellei} que Timprefiion defSita ' Odvragesftra faite dans notre Roy
lunic non ailleurs, en [yjn p.t^i'cr & beaux carac* îercs , conformcnicnt aux
RJ^kiousns de la Librairie ; qu'.i , .'rt Je les expofèr en Tente , les
niMnafctits ou imprimés qui auront fervi de co[nt: a rin'prtilion defdits
Ouvrages, feront remis es mains de notre trcs-chi.'r & wû Chevallier , G
j,rdc des Sccai:x de France, <)e fleur Hua Dt Mtromeiil , Commandeur de
nos Ordres } qu'il en lira tnfiilte remit deux exemplaires dans notre
Bibliothèque publique » un dans celle -de notre Chêteav dit Louvre, 3;: un
dans celle de notre très t lier o. i l ('.icvaîier , Chancelier de France, le
CicùT U2 .'!.AL-Frou , 5: un dans celle dudit f.czr I:c:: i:B MtKOMEMPL.
L« tout \ peins di nv.Wk: d.-fiitîs Pn:n;ntts ; du cor.tenu dchjt'ks vous
mandons & enjoignons de ; in- jour Icfdiis £.\£^jûncs & leurs ayans caufes,
pleinement & p:.ifiblcmnt, fans LÂuii'àr qu'il leur (nt fait aucun trouble eu
empjdMRWBi;. Voulo.ss que. la copie dea Présentes, ^i (êra imprimée tout
au long , au commencement ou à la fin deÛitsOuvrages ^ lôit tenue pour
ducn;cnt îignilice ; & qu'aux copies collationnés par Fun de nos amés 4e
féaux Con&illers.&Secrcuirs, fji foit ajoute comme à l'original.
Commavdoks au pren-.'or notre H-^ifTicr ou Sergent fur ce rc^juis, de faije
pour l'exécution d'icelles, tous aûes requis &nccefûirs, fans demander
autre pernûilion,& ncnolflant clan)(,ur de Haro , Chatte Normande . &
l'ettes I ce contraires» Car cet efi noire plaiilr. Dohm^ i Paris, l« premier
jour de Juillet, Tan de grâce mil (êpt fitot loixante-dix-huit, Se de noire
Règne If cin^ui; ow; Par Ip Roi eu Con Confèil* . . Signi LE BEGUE.
Ut^ifut U Rigtfin XX di la Chamirc Royale & Syndicale des Libraires &

Imprimeurs de Paris , 1477 >y^<o %Z% eonjûrmc'aient au Règlement de
17%%, qid fait âtcnfts , article IV^ à toutes perfonnes^ de qutique qualité'
& conJULan qu'ettei fciem , itutrij que Us Lîr'di/es & Iirprimeun ^ Je
veuj're, dépiter & J.tire ,i_^:cher aucuns Livres po-Ar Us vendre en Uur
noir. , JI>it qu'ils s'en difentUs Au^rs ou attirementi & à la charge de ftumir
à la Ju/dite CAamtre huit Exemplaires ^ pn/aift ^arCan^CyiUdst mime
Rê^ement, A taris le ao Août i77>* . • Si^né A. M, LOTTIN Tainé, Syndip.
*' Digilized by Google

The text on this page is estimated to be only 17.42% accurate

MÉCHANIQUE . * . . . ANALITIQUE. PREMIERE PARTIE.
§jt S T A T I Q ir E. SECTION PREMIERE. Sur les Mfférens Prùicipcs dt
la Statiqm La Stadque eft la fcience de l'équilibre des forces, entend en*
général fn firee on pmjpace la caulê, qaeOé qu'elle foit» qui imprime on
tend à imprimer du mouvement àUL corps atiquel on la fuppoſe appliquée ;
& c*eft auffi par !a quantité du mouvement imprimé , ou prêt à imprimer»
que A

The text on this page is estimated to be only 27.50% accurate

La Mécanique Analytique « la force ou puissance doit s'estimer. Dans l'état d'équilibre la force n'a pas d'exercice réel ; elle ne produit qu'une simple tendance au mouvement ; mais on doit toujours la mesurer par l'effet qu'elle produiroit si elle n'étoit pas arrêtée. En prenant une force quelconque, ou son effet pour l'unité » Texte préfaciel Bon de toute autre force n'est plus qu'un rapport à une quantité mathématique qui peut être représentée par des nombres ou des lignes ; c'est (sous ce point de vue que l'on doit considérer les forces dans la Mécanique : l'équilibre résulte de la destruction de plusieurs forces qui combattent & qui s'annulent réciproquement l'action qu'elles exercent les unes sur les autres ; & le But de la Statique est de donner les lois suivant lesquelles cette destruction s'opère. Ces lois sont fondées sur des principes généraux qu'on peut réduire à trois ; celui à l'équilibre dans le levier celui de la composition du mouvement , & celui des vitesses virtuelles, Archimède, le seul parmi les Anciens qui nous ait laissé quelque théorie sur la Mécanique , dans ses deux Livres de l'Équilibre & du mouvement du principe du levier « lequel consiste, comme tout le monde fait » en ce que si un levier droit est chargé de deux poids -quelconques placés de part & d'autre du point d'appui à des distances de ce point réciproquement proportionnelles "aux mêmes poids , ce levier fera en équilibre, & son appui fera chargé de la somme des deux poids. Archimède prend ce principe, dans le cas des poids égaux placés à des distances égales du point d'appui , pour un axiome de Mécanique évident de soi-même , ou du moins pour un principe d'expérience ; & il ramène à ce cas simple le primitif celui des poids inégaux , en imaginant ces poids lorsqu'ils sont commensurables » divisés en plusieurs parties

Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 24.50% accurate

P & £ M I £ R E P A R T I £ . . J. toutes égales entr*elles , & en fuppofaQt que les pâmes de cha[que poids foient féparées 6c craniportées de parc 8c d'autre fûr Je même levier , à des diftances égales , enforte que tout le levier Ce trouve chargé de plufieurs petits poids égaux placés à diftances égales autour du point d'appui. Enfuite il démontre la vérité du même théorème pour les poids incommenfurables à l'aide de la méthode d'exhaufhion, en faifant voir qu'il ne fauroit y avoir équilibre entre ces poids, à moins qu'il» ne foient en raifon inverfe de leurs diftances au point d'appui. Quelques modernes , comme Stevin dans fa Statique , & Galilée dans fes Dialogues fur le mouvement, ont rendu la démonftration d'Archimedepn^ fimple, en fuppofânt que les poids attachés au levier foient deux parallélép^ièdes horizon-! taux pendus par leur- milieu , U dont les largeurs & les haiûi teurs (oient égales» mais dont les longueurs foient doubles de» bras de levier qui leur répondent inverlement. Car de cette manière les deux parallélépipedes font en raifon inverfe de leurs bras de levier , & en même tems ils fe trouvent placés bout-à-bout , enforte qu'ils n'en forment plus qu'un feul dont le point du milieu répond précifémenc au point d'appui du levier. D'autres au contraire ont cru trouver .des défauts dans la démooftration d*Archimede, &c ils l^t tournée de dtfiérentes fiçons pour la rendre plus rigoureufe. Mais il Poii excite Huyghens, il n'y en a aucun qui ait mérité fur ce point la recon-^ noiffance des Géomètres. Ladémonftration d'Huyghens eft fondée fur la confidération de l'équilibre d'un plan chargé de plufieurs poids égaux, & appuyé fur une ligne droite ; mais cette démonftration, quoique ingénieufe &c exempte des difficultés auxquelles celle d'Archi->

The text on this page is estimated to be only 25.92% accurate

4 MéCHANIQUE ANALITIQUE. me de fujette , ne paroît pas encore à l'abri de toute objection ; voyez le premier Tome des Œuvres de Huyghens. . le principe du levier droit & horizontal une fois posé on en peut déduire les loix de réfraction dans les autres machines » Et en général dans quelque système de puissances que ce soit* C'est ce que plusieurs Auteurs ont fait, sur-tout la Hire dans son Traité de Méchanique, imprimé dans le IX^e volume des anciens Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris. Cependant il paroît qu'on n'a pas d'abord connu la manière de réduire à la théorie du levier celle de toutes les autres machines , sur-tout celle du plan incliné; car non-seulement on voit par les fragments qui nous sont parvenus du huitième Livre de Pappus » que les Anciens ignoroient le vrai rapport de la puissance au poids dans le plan incliné » mais on fait que la détermination de ce rapport a été longtemps un problème parmi les premiers Mathématiciens modernes^ problème dont la première solution exacte est due au fameux Stevin, Mathématicien du Prince Maurice de Nassau ; encore ne l'a-t-il trouvée que par une considération indépendante de la théorie du levier, Stevin considère un triangle solide posé sur sa base horizontale; en sorte que ses deux côtés forment deux plans inclinés; & si l'on imagine qu'un chapelet formé de plusieurs poids égaux y est enfilé à des distances égales , ou plutôt une chaîne d'égal & . grossièr soit placée sur les deux côtés de ce triangle » de manière que toute la partie supérieure se trouve appliquée aux . deux côtés du triangle^ & que la partie inférieure pende librement au-dessous de la base , comme si elle étoit attachée aux deux extrémités de cette base. Or Stevin remarque qu'il est évident même que la chaîne Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 23.69% accurate

P R B M I 8 R E P Â K T , ! E. r f puifTe glilTer librement fur le triangle , elle doit cependant ^lemearer en repos; c;^r fl elle commençoit à glid'er dellejnême dans un fens, elle devioit CQadnuer k gliilcr toujours ^ ^ttifique la même eAfe de mouvement rubfifteroit, la chaîne iè crouvanc,-^ cauiè dé l'uniormité de iès parties, placée toujours de la même manière fur le triangle » d*où réfulteroit OD mouiement perpétuel , ce^ui eft abfurde. ' . Il y a donc néceflairement équilibre entre toutes les parties de la chaîne ; or il eft évident que la portion qui pend audellbus de la bafe , eft dcja en équilibre d'elle-même ; donc il faut que l'effort de tous les poids appuyés fur l'un des côtés , contrebalance i'efFort des poids appuyés fur l'autre côté ; mais la fomme des uns eft à la fomme des autres , dans le même xapport que les longueurs des cotés Aie lefquels ilsfont appiiyés. Donc il faudra toujours la même puifTance pour fbutenir un onplufieitrs poids placés fur un plan incliné, lorſque le poids pbtſl iefaïptopordranel à la longueur du plan, en fuppolànc' la hauteur ia même; mais quand k plan eft yerdçal, la puif* fance eft égak au poids ; donc dans coi;t plan' incliné , la pui(^ fknce eft au poids coAime la hauteur du plan k fa longueur. J'ai rapporte cette démonſtration de Sccvin , parce qu'elle eft très-ingénieufc , & qu'elle eft d'ailleurs peu connue. Au reſte, Stevin déduit de cette théorie celle de l'équilibre entr» trois puiflances qui agillent fur un même point, & il fait voir que cet équilibre a lieu lorſque les puiflances font parallèles & proportionnelles aux trois cçtés d'un triangle refliligne quelconque. Voyez les Élémens de Statique & les Additions à la Statique de cet Auteur dans iès Hypùmnematd Maibe-^ . puuicom ; Le fécond Principe fondamental de l'équilibre eft celui de

The text on this page is estimated to be only 29.93% accurate

IS MÉC[^]ANIQUE A N A L I T I Q U E. Ja.compoſition des
monvemens. U eſt fondé ſur cette Tappokûon » qae fi deux forces agiilènt
à la fûis far un corps fuivant dîfle[^]ntes diredions, ces forces équiaknc
alors à 'une force unique, capable d'imprimer au' corps le î-même
mouveinenc que lui donneroient les deux forces agiflant féparément. Or un
corps qu'on fait mouvoir uniformément, fuivant deux direcliions diilcrentes
à la fois ,[^]arcourc néceflairement la diagonale du parallélogramme dont il
eut parcouru féparément les côtés en vertu de chacun des deux mouvemens.
D'où il 8*enfufC qué deux puiflances quelconques qui agiflènt enfemble
'(îir un même corps, feront équivalentes à une feule repré« fentée dans fa
quantité & (à direétion[^] par k diagonale, do parallélogramme dont les côtés
repré(entent en particulier lés quantités & les directions des deux pnîdances
données. Ceſt en quoi coniiſſe le Principe qu'on nomme la compoſuion des
forces. Ce Principe ſuffît feu! pour dctesminer les loix de l'équilibre dans
tous les cas; car en compoſant ſuccesſTivement toutes les forces deux à
jdeux , on doit parvenir à une force unique, qui fera équivalente à toutes ces
forces , & qui par conféquent devra être nulle dans le cas d'équilibre , s'il
n'y a dans le fy(lême aucun point fixe ; mais s*il y en un , il faudra que la
direétion de cette force unique pallè par le point fixe. C*eft ce qu'on peut
voir dans tous les Livres de Statique , particulièrement dans la nouvelle
Mécanique de Varignon , o& la théorie des machines eſt déduite
uniquement du Principe dont nous venons de parler. Il eſt évident que le
théorème de Stevîn ſur l'équilibre de trois forces parallèles 6c
proportionnelles aux trois côtés d'un trÛQgie quelconque , el[^].une
conféquencé[^]imnicdiace U néceſDigitized

The text on this page is estimated to be only 26.60% accurate

F|l.£ M l'B K S P. A & T I £• 7 làire do principe de la c&mpoddon des forces, oa plutôt qu'il' fi*eft-' que ce même principe prèfenté fous une autre forme. Mais celui-ci a l'avantage d'être fondé fur des notions fimples & naturelles , au lieu que le théorème de Stevin ne l'eft que fur des confidérations indiredles. Quant À l'iavention du Principe dont il s'agit , il me femble qn*on doit l'attribuer à Galilée , qui dans la féconde proportion de ta quatrième journée de fes Dialogues, démontre quiiii eoips mnàvtc dbuz ntdiSnup.iùxmeSfVmie horifonIBile, fàatre Verdeale^ doit prendre, oiie Vitefl^ repréièncée par fhypbtlièntt(è' da triangle donc les côtés reprèfentenc ces deax ▼ iteflès; mītis il parok en même tems que Galilée n*a pas connu toute l'importance de ce théorème dans la théorie de l'équilibre. Car dans le Dialogue troifième où il traite du mouvement des corps pefans fur des plans inclinés, au lieu d'employer le Principe de la compofition du mouvement pour déterminer dirç«Sbement la gravité relative d'un corps fur un plan incliné, il déduit plutôt cette détermination de la théorie de l'équilibre iur les plans inclinée, d'après ce qu'il avoit établiauparavant; dans fon .Traité deila Scittofo. Mecànica^ dans lequel il rappelle le plan indiné au levier.On trouve enioioe la théorie des mouvemens composés danar ks .écrits de Defcartes» 'de' Roberval*, de Meriènne, de Wallis , &c : mais c*eft à Varignon qu'on doit d*atvoir monoé l'ufage de cette théorie dans l'équilibre des machines. Le projet d'une nouvelle Méchanique qu'il publia en 1^87, n'a pour objet que de démontrer les régies de la Statique par la compofition des mouvemens ou des forces; & cet objet a été rempli enfuite «ivec plus d'étendue dans h noweUâ MécAo-. nique qui n'a paru qu'après fa mort» en 17«5 ; il avoit même;

The text on this page is estimated to be only 18.43% accurate

8 M i cO i IQU E I A N A LIT. IQU i, 4éja dôpié en d4n\$
I[^]HiOoirei dé Ji Répiiblie 4s6\ Lettres, un Mémoire sur les poulies, oii il
expliquoit la diédrio 4e ces ibrces de machines, par celle des mo'uvemens
coiai pofts,, ; . : ; viens enfin au troisieme Principe, celui des viteflès vir-i
tuelles. On doit entendre par vheJJ: yinucUcy celle qu'un corps en équilibre
est dilporé à recevoir, en cas que l'équilibre / vienne à être rompu ; c'est-à-
dire la vitefTe qu[^] ce çorps pren droit réellement dans le premier instaot
de.Êoo fflOttvemer[^] le Principe dontii[^] agit coniipte ep ce'.qrtd d[^]s
puifTandea ibnten équilibre quand elles font en' raion/inv[^]iè- de leurs
viteflèsTÎrtuellesi estimées fuivanc les[^]diie[^]ns de ces puiTéuices: • ' ♦ Pour
peu qu on examina les conditions de l'équilibre dans le levier & dans les
autres machines , il est facile de reconnoître la vérité de ce Principe;
cependant il ne paroît pas que les Géomètres qui ont précédé Galilée , en
aiei)t eu connoissance, & je crois pouvoir en attribuer. la déci)verce à cet
Auteur, qui dans Ton Traité dclLa Scien[a Mccanicd,. 9L 4an\$ Ce[^]
Dialogues fi[^]r le mouvement, le propose comme une propriété générale de
Téquilibré des machines. Voyez la ibhòlj[^] de la ieconde PropoûcÎQn.dtt
troisieme Pialogue. : 'Gaulée, eoçebd [^]at momèru '. d*jin poids ou d'une
puii&ncc appliquée 1 une machiné[^] Tefibrr , Taûion , l'énergie, i'impetus •
de cette puKTance pour mouvoir la machine, de manière qu'il y aie
équilibre entre deux puilTances , lorsque leurs momens pour mouvoir la
machine en sens contraires font égaux; &c i[^] fait voir que le moment ell:
toujours proportionnel à la puillance multipliée par la vitefle viituelic[^]
dépei[^]ante de ia ip[^]rç doflt 1[^] Piiift'afice agit, Cette Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 27.29% accurate

Première Partie. p Cette notion des momens a auffi été adoptée par Wallis dans (à Méchanique publiée en 1668. L'Auteur y pose le principe de l'égalité des momens pour fondement de la Statique, & il en déduit au long la théorie de l'équilibre dans les principales machines. Aujourd'hui on n'entend plus communément pour moment que le produit d'une puissance par la distance de sa direction à un point ou à une ligne, c'est-à-dire par le bras de levier par lequel elle agit; mais il me semble que la notion d'impetu donnée par Galilée & par Wallis, est bien plus naturelle & plus générale, & je ne vois pas pourquoi on l'a abandonnée pour y en substituer une autre qui exprime seulement la valeur du moment dans certains cas, comme dans le levier, &c. • Descartes a réduit pareillement toute la Statique à un Principe unique, qui revient pour le fond à celui de Galilée, mais qui est présenté d'une manière moins générale. Ce Principe est, qu'il ne faut ni plus ni moins de force pour élever un poids à une certaine hauteur, qu'il en faudroit pour cicver un poids plus pelant à une hauteur d'autant moindre, ou un poids moindre à une hauteur d'autant plus grande. (Voyez la Lettre 73 de la première Partie, & le Traité de Méchanique. imprimé dans les Ouvrages posthumes). D'où il résulte qu'il y aura équilibre entre deux poids, lorsqu'ils ièroot disposés de manière que les chemins perpendiculaires qu'ils peuvent parcourir ensemble, soient en raison réciproque des poids. Mais dans l'application de ce Principe aux différentes machines, il ne faut considérer que les espaces parcourus dans le premier instant du mouvement, ôc qui sont proportionnels aux vitesses virtuelles^ autrefois on n'auroit pas les véritables lieux de l'équilibre. B

10 MÉCHANIQUE ANA.LITIQUE. Au refte, foie qu'on tegarde le Principe des vite^{es} virtuelles comme une propriété générale de Téquilibre, ainli que Ta fait Galilée; foit qu'on veuille le prendre avec Defcartes & Wallis pour la vraie caufe de l'équilibre, il faut avouer qu'il a toute la lîmplicité c|u'on peut defirer dans un principe fondamental ; nous verrons plus bas combien ce Principe eft encore recommandable par fa généralité. Torricelli, fameux difcipie de Galilée, eft l'auteur d'un autre Principe , qui revient cependant au même que celui de Galilée» ou qui plutôt n'en eft qu'une conféquence ; c'eft que lorfque deux poids font tellement Ués enfemble[^] qu'étant placés comme l'on voudra» leur centre de gravité ne haufle ni ne baillé, ils font en équilibre dans toutes ces fituations. Torricelli ne l'applique qu'au plan incliné , mais il eft facile de fe convaincre qu'il n'a pas moins lieu dans les autres machines. Voyez foa Traité du mouvement accéléré, qui a paru en 1644. Le Principe de Torricelli en a fait naître un autre, dont quelques Auteurs ont fait ufage pour réfoudre avec plus de facilité di[^]érentes queftions de Statique. Ceft celui-ci: que dans un fyftème de corps pefkns en équilibre » le centre de gravité eft le f[>]lus bas qu'il eft polEble. En efièt, on fait par la théorie de maximis & minimis , que le centre de gravité eft le plus bas lorfque la différentielle de (à defcente eft nulle, oit » ce qui revient au même, lorfque ce centre ne monte ni ne defcend, tandis que le fyftème change infiniment peu de [^]lace. le Principe des viteffes virtuelles peut être rendu très-général de cette manière : Si un fyficmc quelconque de tant de corps ou points que

The text on this page is estimated to be only 21.67% accurate

Première Partie. ii ton veut tirés ^ chacun par des puijfancts quelconques^ est en équilibre^ & qu'on donne à ce fyfième un petit mouvement quelconque , en vertu duquel chaque point parcourt un espace infini" ment petit qui exprimera sa vitejje virtuelle ; la somme des puiffances ^ multipliées chacune par l'espace que le point où elle est appliquée ^ parcourt suivant la direction de cette même puiffance , sera toujours égale à zéro , en regardant comme positifs les petits espaces parcourus dans le sens des puiffances , & comme négatifs les espaces parcourus dans un sens opposé. Jean Bernoulli est le premier que je sache, qui ait aperçu cette grande généralité du Principe des vitesses virtuelles , (Se son utilité pour résoudre les problèmes de Statique. C'est ce qu'on voit dans une de ses Lettres à Varignon , datée de 1717, que ce dernier a placée à la tête de l'Édition neuvième de (à nouvelle Méchanique , & l'a employée toute entière à montrer par différentes applications la vérité & l'usage du Principe dont il s'agit. Ce même Principe a donné lieu ensuite à celui que feu M. de Maupertuis a proposé dans les Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris pour l'année 1740 , sous le nom de Loi de repos, & que M. Euler a développé davantage, & rendu plus général dans les Mémoires de l'Académie de Berlin pour l'année 1751. Enfin c'est encore le même Principe qui sert de base à l'assertion que M. le Marquis de Condorcet a donné dans les Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris pour 1748 & 1749. Et en général je crois pouvoir avancer que tous les principes généraux qu'on pourroit peut-être encore découvrir dans la science de l'équilibre, ne seront que le même principe de

The text on this page is estimated to be only 23.07% accurate

12 Mécanique Analytique. vice-à-vis des machines, envisagé
diagrammement » & dont ils ne tirent que dans l'expression. Au reste, ce
Principe est non-seulement en lui-même très-simple & très-général ; il a de
plus l'avantage précieux & unique de pouvoir se traduire en une formule
générale qui renferme tous les problèmes qu'on peut proposer sur l'équilibre
des corps. Nous allons exposer cette formule dans toute son étendue ; nous
tâcherons même de la présenter d'une manière encore plus générale qu'on
ne l'a fait jusqu'à présent, & d'en donner des applications nouvelles.
SECONDE SECTION. Formule générale pour l'équilibre d'un système
quelconque de forces ; avec la manière de faire tirage de cette formule, I. La
loi générale de l'équilibre dans les machines, est que les forces ou
puissances soient entr'elles réciproquement comme les vitesses des points
où elles sont appliquées, estimées suivant la direction de ces puissances.
C'est dans cette loi que consiste ce qu'on appelle communément le
Principe des vitesses virtuelles, Principe reconnu depuis long-temps pour le
Principe fondamental de l'équilibre* ainsi qu'il nous l'avons montré dans la
Section précédente, & qu'on peut par conséquent regarder comme une espèce
d'axiome de Mécanique. Pour réduire ce Principe en formule, supposons
que des puissances $P, Q, R, \dots$ dirigées suivant des lignes données,
Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 25.66% accurate

Partie. 13 Ce fâcheat équilibre. Concevons que des points ou ces puissances sont appliquées, on mène des lignes droites égales à r , & p , & placées dans les directions de ces puissances ; désignons en général, par $\frac{1}{j}$, $\frac{1}{r}$, & $\frac{1}{p}$, les variations, ou différences de ces lignes, en tant qu'elles peuvent résulter d'un changement quelconque infiniment petit dans la position des différents corps ou points du système. Il est clair que ces différences exprimeront les espaces* parcourus dans un même instant par les puissances P & Q , c'est-à-dire, les vitesses de ces puissances estimées suivant leurs directions. Cela posé, imaginons d'abord trois puissances P , Q , & A en équilibre, il est clair qu'en substituant à la place d'une quelconque de ces puissances un appui fixe » capable de résister à l'action commun des deux autres, l'équilibre subsistera encore; je commencerai donc par chercher les lois de l'équilibre entre deux puissances P & Q , supposant que le point sur lequel la troisième puissance agit soit fixe, en sorte que la ligne r demeure la même pendant que les lignes p & q deviennent $p + dp$ & $q + dq$ ou $p - dp$, $q - dq$. Par le principe général, il faudra que les puissances P & Q soient entr'elles en raison inverse des différentielles dp & dq mais il est aisé de concevoir qu'il ne faut pas y avoir équilibre entre deux puissances, à moins qu'elles ne soient disposées de manière, que quand l'une d'elles (e meut) suivant sa propre direction, l'autre ne soit contrainte de (e ' mouvoir dans un sens contraire à la première ; d'où il s'enfuit que les valeurs des différences dp & dq doivent être de signe contraire ; donc comme les valeurs des forces P & Q sont supposées toutes deux positives, on aura

The text on this page is estimated to be only 19.86% accurate

T4 MÉCHANIQUE ANALITIQUE. par l'équilibre — $\sum \mathbf{F} = 0$ ou bien $\sum \mathbf{M} = 0$; c'est la formule générale de l'équilibre de deux puissances. On trouvera de la même manière, en regardant la puissance comme appliquée à un point fixe, l'équation $\sum \mathbf{F} = 0$, pour les conditions d'équilibre entre les puissances P & R . Pareillement on aura pour l'équilibre des deux puissances Q & R l'équation $\sum \mathbf{M} = 0$. On a donc pour les trois puissances P, Q, R , les trois équations $\sum \mathbf{F} = 0, \sum \mathbf{M} = 0, \sum \mathbf{M} = 0$, en supposant dans la première de ces équations r constante, dans la seconde θ constante, & dans la troisième p constante. D'où il s'enfuit qu'on aura en général, en faisant varier θ, r , & p à la fois, l'équation $\sum \mathbf{F} = 0$. En effet, pour qu'il y ait équilibre entre les puissances P, Q, R il faut que ces puissances soient disposées de manière que l'une ne puisse se mouvoir indépendamment des deux autres. Il faut donc qu'il y ait une relation donnée entre les différences dp, dq, dr , & C par conséquent aussi entre les quantités finies p, q, r ; donc en vertu de cette relation, quelle qu'elle soit, la variable p pourra être regardée comme une fonction des deux autres variables q, r & la différentielle dp pourra, par conséquent, s'exprimer en général par $dp = m dq + n dr$. Or en faisant r constante, on auroit simplement $dp = m dq$ & en faisant q constante, on auroit $dp = n dr$ donc le terme $P dp$ qui se trouve dans les deux premières équations, pourra être représenté par $P m dq$ dans la première de ces équations, & par $P n dr$ dans la seconde.

Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 22.12% accurate

Première Partie. par Pndréam la féconde; de forte que la fomiiie de ces deux termes fera $P \{ \text{mdq '■}^{\text{ndr}} \} m \gg F \text{ dp}$. On prouvera de la même manière, & en regardant f comme une fonâion de / & r , que la fomme des deux termes Q^{dq} qui entrent dans la première & dans la troifieme équation, fè réduira fimplement à $Q \text{dq}^{\text{Qn}}$ regardant dans $\hat{a} \text{q}^{\text{p}} \text{hL r}$ comme variables à la fois; & c pareillement les deux termes $R \text{dr}$ qui fe trouvent dans les deux dernières équations, fe réduiront à $R \text{dr}^{\text{p}} \{ \text{p ôL q} \}$ étant variables à la fois dans dr). De forte que la fomme des trois équations particulières trouvées ci-deflus, deviendra, en regardant r comme variables à la fois $P \text{dp} \text{Qdq} - + \bullet j \text{R} < / r = o$; formule de Téquilibre de trois puûlânces quelconques $P^{\text{Q}} R$, S'il y avoit une quatrième puiflance 5, dirigée fuivant la ligne j , on trouveioit par un raifonnement femblable, que l'équilibre des quatre puilTances $P, Q, R, 5'$ feroit renfermé dans la formule $P \text{dp} \bullet + \bullet Q \text{dq} - \text{h} R \text{dr} S \text{ds} = s o$. Ainfi de fuite, quel que foit le nombre des puilTances en équilibre. 2. On a donc en général pour l'équilibre d'un nombre quelconque de puilânces $P, R, 9 \text{ \& c}$, dirigées fuivant les lignes $p, y, q, r, 8 \text{cc}$, Sc appliquées à un fyftême quelconque de corps ou points difpofés entr'eux d'une manière quelconque, une équation de cette forme, $P \text{dp} \text{Qdq}^{\text{Rdr}} \text{tmO}$, Cest la formule générale de T^uilibfe d'un fyftême quelconque de puilHuRres. : Nous nommerons chaque terme de cette formule, tel que $P \text{dp}^{\text{}}$ le moment de la force en prenant le mot de moment

The text on this page is estimated to be only 25.40% accurate

16 MÉCANIQUE ANALITIQUE. dans le sens que Galilée lui a donné, c'est-à-dire, pour le produit de la force par la vitesse virtuelle. De sorte que la formule générale de l'équilibre confiera dans l'égalité à zéro » de la somme des moments de toutes les forces. 3 . Pour faire usage de cette formule » la difficulté se réduira à déterminer, conformément à la nature du système donné « les valeurs des différentielles δp , δq , δr etc. . On considérera donc le système dans deux positions différentes, se infiniment voisines, & on cherchera les expressions les plus générales des différences dont il s'agit, en introduisant dans ces expressions autant de quantités déterminées, qu'il y aura d'éléments arbitraires dans la variation de position du système. On substituera ensuite ces expressions de δp , δq , δr etc. dans l'équation proposée & il faudra que cette équation ait lieu » indépendamment de toutes les indéterminées afin que l'équilibre s'ensuive généralement & dans tous les sens. On exigera donc séparément δp , la somme des termes affectés de chacune des mêmes indéterminées; & l'on aura, par ce moyen, autant d'équations particulières, qu'il y aura de ces indéterminées; or il n'est pas difficile de se convaincre que leur nombre doit toujours être égal à celui des quantités inconnues dans la position du système ; donc on aura par cette méthode , autant d'équations qu'il en faudra pour déterminer l'état d'équilibre du système. C'est ainsi qu'en ont usé tous les Auteurs qui ont appliqué (qu'ici le Principe des vitesses virtuelles » à la solution des problèmes de Statique (mais cette manière d'employer ce » Principe, peut exiger des constructions & des considérations géométriques, qui rendent les solutions aussi longues que les opérations déduites des principes fondamentaux de la Statique » que , Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 26.18% accurate

Première Partie. 17 que ; c'est peut-être la principale raison qui a empêché qu'on n'ait fait jusqu'ici de ce Principe tout le cas & l'usage qu'il semble qu'on en auroit dû faire , vu sa simplicité & sa généralité. 4. Quelles que soient les forces P, Q, R , &c, agissant sur les différents corps ou points du système , il est clair qu'on peut toujours les supposer tendantes à des points placés dans les directions de ces forces » à ce que nous appellerons les centres des forces. Ainsi pour avoir les lignes r, r', r'' qui représentent les directions des forces P, Q, R, U &c il n'y aura qu'à prendre les distances réelles entre les corps ou points, sur lesquels les forces agissent, & les centres de ces mêmes forces. Or ces centres peuvent être placés hors du système, ou bien en faire partie. « Dans le premier cas il est visible que les différences dr, dr', dr'' &c , expriment les variations entières des lignes q, q', q'' dues au changement de situation du système ; elles font par conséquent les différentielles complètes des quantités q, q', q'' &c , en y regardant comme variables toutes les quantités relatives à la situation du système, & comme constantes celles qui se rapportent à la position des différents centres des forces. Dans le second cas, quelques-uns des corps du système (seront eux-mêmes les centres des forces qui agissent sur d'autres corps du même système, & à cause de l'égalité entre l'action & la réaction , ces derniers corps feront en même tems les centres des forces qui agissent sur les premiers. Considérons donc deux corps qui agissent l'un sur l'autre avec une force quelconque P , soit que cette force vienne de l'attraction ou de la répulsion de ces corps , ou d'un ressort C

The text on this page is estimated to be only 26.43% accurate

18 Mécanique ANALITIQUE. placé entr'eux, OU d'une autre manière quelconque, Toit / la distance entre ces deux corps, & que exprime la variation de cette distance, en tant qu'elle dépend du changement de situation de l'un des corps ; il est clair qu'on aura relativement à ce corps, Pdp' pour le moment de la force i ?; de même si on désigne par la variation de la même distance résultante du changement de situation de l'autre corps, on aura relativement à ce second corps, le moment Pdp'' de la même force P ; donc le moment total dû à cette force, sera représenté par $P (dp' + dp'')$; mais il est visible que $dp' + dp''$ est la différentielle complète de p que nous désignerons par dp puisqu'on ne peut varier que par le déplacement des deux corps; donc le moment dont il s'agit sera exprimé / représenté par Pdp on peut étendre ce raisonnement à tant de corps qu'on voudra. 5. Il suit de-là que pour avoir la somme des moments de toutes les forces d'un système donné, il n'y aura qu'à considérer en particulier' chacune des forces qui agissent sur les divers corps ou points du système, prendre la somme des produits de ces diverses forces multipliées chacune par la différentielle de la distance respective entre les deux termes de chaque force, c'est à dire entre le point sur lequel agit cette force & celui d'où elle part, en regardant, dans ces différentielles, comme variables toutes les quantités qui dépendent de la situation du système, & comme constantes celles qui se rapportent aux points ou centres extérieurs, c'est-à-dire en considérant ces points comme fixes & tandis qu'on fait varier la situation du système. ' Cette quantité étant égale à zéro, donnera la formule générale du principe de l'équilibre. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 21.36% accurate

Première Partie. ip 6' Pour exprimer analytiquement la même quantité, ce qui se présente de plus simple est de rapporter la position de tous les points du système donné à des coordonnées rectangulaires & parallèles, à trois axes fixes dans l'espace. Nous nommerons en général x, y, z , les coordonnées des points auxquels les forces, l'onc appliquées, 6c nous distinguerons ensuite par un ou plusieurs traits, relativement aux différents points du système. Nous désignerons de même par x_i, y_i, z_i , les coordonnées pour les centres des forces. Il est visible que les distances r_i & r seront exprimées en général par la formule dans laquelle les quantités a, c seront constantes ou du moins devront être regardées comme telles, pendant que x, y, z varient, dans le cas où elles se rapportent à des points fixes placés hors du système ; mais dans le cas où les forces partent de quelques-uns des corps du système même ces quantités x, y, z deviendront x', y', z' & seront par conséquent variables. Ayant ainsi les expressions des quantités $q, r, \dots$, en fonctions connues des coordonnées des différents corps du système, il n'y aura plus qu'à différentier ; l'ordinaire j'en regardant ces coordonnées comme variables, pour avoir les valeurs cherchées des différences $dp, dq, dr, \dots$ & Cy qui entrent dans la formule générale de l'équilibre. * Mais quoiqu'on puisse toujours regarder les forces $P, Q, \dots$, comme tendantes à des centres donnés; cependant comme la considération de ces centres est étran* Cx

The text on this page is estimated to be only 19.11% accurate

MÉCHANIQUE ANALYTIQUE. gère à la question, dans laquelle on ne considère ordinairement comme données, que la quantité de la direction de chaque force; voici des manières plus générales d'exprimer les différences $dp^2 dq^2 dr^2$ &c. 7. Et d'abord en supposant, ce qui est toujours permis, que la force F tende à un centre fixe, on a & de-là, en différentiant sans que $a^2 b^2$ varient Or il est facile de concevoir que, X, Y, Z ne font autre chose que les cosinus des angles que la ligne fait avec les coordonnées x, y, z , Donc en général si on nomme θ les angles que la direction de la force P fait avec les axes des $jc, ^, :j$, ou avec des parallèles à ces axes, on aura $\cos \theta = \frac{p}{r}$ &c. « , — s » $\cos \theta = 0$, $\frac{d\cos \theta}{dt} = -\frac{1}{r} \frac{dr}{dt}$ &c. par conséquent $\frac{dp}{dt} = -\cos \theta \frac{dr}{dt}$ & ainsi des autres différences &c. On remarquera par rapport aux angles « , » 9 premièrement que $\cos \theta = \frac{p}{r}$ &c. 0* *f* $\cos \theta > 0$ « s i , ce qui est évident par les formules précédentes. En second lieu que si on nomme ϕ l'angle que la projection de la ligne p sur le plan des X & y fait avec l'axe des jc , il est clair. qu'on aura $\sin \phi = \frac{p}{r}$ &c. An. 1, en supposant $\phi = 0$ $X^2 + Y^2 = r^2$; donc mettant pour $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, leurs valeurs p & r $\cos \theta = \frac{p}{r}$, on aura aussi

The text on this page is estimated to be only 20.94% accurate

B&£Mi£R£ Partie. 21 » VLcot cof. $1/r$ ($1 \text{ cof.} > *$) Bs/r fin. donc
 aiÎD. $> \text{cof. } t$, a fin. $> \text{fin}$, par conféquenc y cof. « saa. fin. $> \text{cofl}$ », cof ji sa
 fin. $> \text{fin. } t$. 8. Je confidere enfuite que puifque dp représente le petit efpace
 cjue le corps ou point auquel eft appliquée la force P peut parcourir fuivant
 la cliredioii de cette force, fi on fiit $dp \dot{=} a 0$, ce point ne pourra plus fe
 mouvoir que dans dcç direâions perpendiculaires à celle de la même foi^ce.
 Donc dp $r=r$ o fera l'équation diiFérentieile d'une furface à laquelle la
 direction de la force P fera perpendiculaire. Suppofons maintenant en
 général que la force P agifiè perpendiculairement à une furface repréfècée
 par Téquadon diffërentielle du es ibît que du (bit une difflëndelle
 completce ou non. Cohime cette équation doit être équivalente à Téquation
 s» o, on aura néceiTairement du sa $Vdp^{\wedge} V$ étant une fonâion finie des
 coordonnées $x \setminus$. Et pour trouver cette fon<flion, il fuffira de remarquer que
 puifqu on a par l'article précédent $dp = \text{cof. } a-dx$ «4- cof, ifii/y-f. cof $yd^{\wedge}$
 &c cof, CL* -f-^cof, cof. — i, on aura fuivanc la notation ret^ue pour les
 différences partielles, $v-K((:g-y-*-(^y*\{4ry)'$ donc j du du

The text on this page is estimated to be only 20.44% accurate

22* MÉCANIQUE ANALITIQUE^ On déterminera Je la même manière les valeurs des autres différences $ti-y$, uV , &c , d'après les équations différentielles des forces aux directions des forces $i\hat{t}$, $\hat{o}cc$, sont perpendiculaires, ' p. Les valeurs des différences $dp^{\wedge}dq^{\wedge}dr^{\wedge}$ $\hat{o}cc$. étant connues en fonction différentielles des coordonnées $d^{\wedge}$ différents corps du système, il n'y aura qu'à les substituer dans la formule générale & vérifier ensuite cette équation de la manière la plus générale , &c indépendante des différentielles qu'elle renferme. m . Donc si le système est entièrement libre , en sorte qu'il n'y ait aucune relation donnée entre les coordonnées des différents corps, ni par conséquent entre leurs différentielles» il faudra satisfaire à l'équation précédente , indépendamment de ces différentielles » & pour cela élever séparément à zéro la somme de tous les termes qui se trouveront multipliés par chacune d'elles; ce qui donnera autant d'équations qu'il y aura de coordonnées variables, & par conséquent autant qu'il en faudra pour déterminer toutes ces variables, &c connaître par leur moyen la position de tout le système dans l'état d'équilibre. Or. Mais C'est la nature du système (l telle que les corps soient assujettis dans leurs mouvemens à des conditions particulières , il faudra commencer par exprimer ces conditions par des équations analytiques que nous nommerons équations de condition; ce qui est toujours facile. Par exemple , il quelques-uns des corps étoient assujettis à se mouvoir sur des

Digitized by

The text on this page is estimated to be only 25.04% accurate

• Première Partie. 23' lignes ou des surfaces données » on auroit encre les coordonnées de ces corps, les équations mêmes des lignes ou des surfaces données ; si deux corps s'étoient tellement joints ensemble , qu'ils duflent toujours se trouver ; si une même distance k l'un de l'autre, on auroit évidemment l'équation $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0} - H(y - y_0) - (i' - i) \frac{1}{r_0}$ amû du reste. Les équations de condition : v; nfi trouvées, il faudra par leur moyen éliminer aurnnt de différentielles qu'on pourra , dans les expressions $\frac{d^2 p}{dy^2} dr + c$, enforte que les différentielles restantes soient absolument indépendances les unes des autres, & n'expriment plus que ce qu'il y a d'arbitraire dans le changement de position du système. Alors comme la formule générale de l'équilibre doit avoir lieu , quel que puisse être ce changement , il faudra y élever séparément à zéro , la somme de tous les termes qui se trouveront au second membre de chacune des différentielles indéterminées ; d'où il viendra autant d'équations particulières qu'il y aura de ces mêmes différentielles ; à ces équations étant jointes aux équations de condition données, renfermeront toutes les conditions nécessaires par la détermination de l'état d'équilibre du système ; car il est aisé de concevoir que toutes ces équations ensemble ieront toujours en même nombre que les différences variables qui servent de coordonnées à tous les corps du système , & suffiront par conséquent toujours pour déterminer chacune de ces variables. I r . Au reste il nous avons toujours déterminé les Ueux des corps par des coordonnées rectangulaires, c'est que cette méthode a l'avantage de la simplicité de la facilité du calcul; mais ce n'est pas qu'on ne puisse en employer d'autres dans

The text on this page is estimated to be only 20.77% accurate

^4 Mécanique analitique. l'usage de la méthode précédente ; car il est clair que rien n'oblige dans cette méthode à se servir de coordonnées rectangulaires plutôt que d'autres lignes ou quantités relatives aux lieux des corps. Ainsi au lieu des deux coordonnées x^y on pourra employer, lorsque les circonstances paraîtront l'exiger, un rayon vecteur r & un angle θ dont la tangente $\tan \theta$ (ce qui donnera $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$) en remplaçant la troisième coordonnée $-z$ ou bien on emploiera un rayon vecteur p & $x = p \cos \phi$, $y = p \sin \phi$. Avec deux angles ? Soit ϕ tels que $\tan \phi = 3$, $\tan \phi = 4$ — ce qui donnera $x = p \cos \phi$, $y = p \sin \phi$, $z = p \sin \phi$; ou d'autres angles ou lignes quelconques. Remarquons encore que comme il n'y a proprement que la considération des différences $dx^dy^dz^2$ entre dans la méthode dont il s'agit, il est permis d'introduire immédiatement à la place de celles-ci d'autres expressions différentielles quelconques qui soient intégrables d'elles-mêmes ou non, & sans aucun égard aux valeurs de X^y^z .

-5» TROISIEME Digitized by Copple

The text on this page is estimated to be only 27.92% accurate

Premier e Partie. 25 TROISIEME SECTION., Propriétés générales de l'équilibre Uluhucs de la formule précédente. Z • C
ONSIDÉRONSun systême ou assemblage quelconque de corps on points, qui étant tirés par des puissances quelconques» se fassent mutuellement équilibre. Si dans un instant l'action de ces puissances cessait d'être détruite, le systême commencerait à se mouvoir, & quel que put être son mouvement, on pourroit toujours le concevoir comme composé, i^{er} d'un mouvement de translation commun à tous les corps; d'un mouvement de rotation autour d'un point quelconque ; 3^o des mouvemens relatifs des corps entr'eux , par lesquels ils changeroient leur position, & leurs distances mutuelles. Il faut donc pour l'équilibre que les corps ne puissent prendre aucun de ces différents mouvemens. Or il est clair que les mouvemens relatifs dépendent de la manière dont les corps sont disposés les uns par rapport aux autres; par conséquent les conditions nécessaires pour empêcher ces mouvemens, doivent être particulières à chaque systême. Mais les mouvemens de translation & de rotation peuvent être indépendans de la forme du système , & se exécuter sans que la disposition & liaison mutuelle des corps en soit dérangée. Ainsi la considération de ces deux espèces de mouvemens doit fournir des conditions ou propriétés générales de l'équilibre. C'est ce que nous allons examiner. D

The text on this page is estimated to be only 15.06% accurate

MÉCHANIQUE ANALYTIQUE, 2. Soient donc un nombre quelconque de corps regardés comme des points, & dirigés on lient eux comme Ton ▼oudra, lesquels soient tirés par les puissances P, P', P'' &c, suivant les directions des lignes p, p', p'' Sec. On aura (Se^e précéd.) pour l'équilibre de ces corps, la formule $P \sin p = P' \sin p' = P'' \sin p''$ &c — o. Soient maintenant $y, \dots$ les coordonnées rectangulaires du point tiré par la puissance P &c celles du point tiré par la puissance P' , Se ainsi de suite ; ces coordonnées étant toutes parallèles à trois axes fixes & ayant pour origine un même point. Soient de plus α, β, γ les angles que la ligne p ou la direction de la puissance P fait avec les axes des x, y, z &c les angles que la direction de P' fait avec les mêmes axes, & ainsi de suite. On aura (Se^e précéd. art. 7), $P \cos \alpha = P' \cos \beta = P'' \cos \gamma$ &c. $P \sin \alpha \cos \beta = P' \sin \beta \cos \alpha$ &c. $P \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma = P' \sin \beta \sin \alpha \cos \gamma$ &c. Et la formule de l'équilibre deviendra $P \cos \alpha = P' \cos \beta = P'' \cos \gamma$ &c. $P \sin \alpha \cos \beta = P' \sin \beta \cos \alpha$ &c. $P \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma = P' \sin \beta \sin \alpha \cos \gamma$ &c. 3. Faifoit, ce qui est permis. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 18.07% accurate

Première Partie. 27 fubilituanc ces valeurs dans la formule précédente, on aura cette transformée, o « (P cof. * -P cof. «' ^ P" cof. «" H- &c) dx. (PcoC ^- P' cof. j8' H-F'cof. &c)</y cof. > -h P' cof. y' -f. P" cof. y" -t- ÔCC) -hP'(cof.«'<^|-»- cof.ia'i/, -l-coC yVç) H- F' (cof. •*4/e' cof. fñ^ H- cof. / rfC) , &c. Or X, Itérant les coordonnées abfolues du corps tiré par la force P, il eft clair que l« •> ^ , 1^ »S f « &c, ne fèronC autre chofe que les coordonnées relatives des autres corps par rapport à celui-ci pris pour leur origine commune ; de (brce que la pofition mutuelle des corps n« dépendra que de ces dernières coordonnées , & nullement des premières. Donc fi on fuppofè le fyftême entièrement libre, c*eft-i-dire, les corps fimplement liés entr'eux d'une m.micre quelconque , mais fans qu'ils foient retenus ou empêchés par des appuis fixes, ou des obftacles extérieurs quelconques, il eft aifé de concevoir que les conditions réfultantes de la nature du fyf^erne, ne pourront regarder que les quantités |, «, ^, I', C', c, & nullement les quantités x^^i^, dont les différencielles demeureront par conféquent indépendantes & indéterminées. ' Ainfi dans l'équation précédente, il faudra évaluer féparément à zéro , chacun des membres affèdlés de dx^dy^ d\\ qui donnera ces trois équations particulières. D z

The text on this page is estimated to be only 18.63% accurate

28 MÉCHANIQUE AKALITIQUE* j P cof. « -f- P' cof. /-f. P''
 cof. H- &c « o. Pcof.;? -^P'cof.i8'-+-'?''cor. ^"-h&c = o P cof. > -h cof. H- P''
 cof. H- &c o, ^ lefqaelles devront néceflairement avoir Uea dans Téquilibe
 d'un fyftême libre. Ce font les équations nécelTaires pour empêcher le
 mouvement de tranflation. '4: Si les pñflances P, P', P'', &c, étoient
 parallèles, on auroit « = «' = &c , /8 = i8'=r ^a" &c, ^ = / == Ôcc, ' & les
 trois équations précédentes fe réduiroient à celle-ci , . P-* -P'H.P''-H&c. —
 G. laquelle montre que la fomme des forces parallèles doit être ' nulle. En
 général il eft facile de concevoir que P représentant Taétion totale de la
 puiffance P fuivant fa propre direction , P cof. * reprécitcra Ton a(ffcion
 relative, eftimée fuivant la dire^{tion} de l'axe des jc , laquelle fait avec la
 dir^{ction} de la force l'angle a; de même P cof. 12 Se P cof. y , Icront les
 allions relatives de la même force, eftimées fuivant les d^{irections} des axes
 des ^ & & ainii du refte. Et de-là réfulte ce théorème , que la fomme des
 puiffances ejiimées fuivant la direSion de trois axes perpendiculaires
 entr^{eux} doit être nulU par rapport à chacun de ces axes, dans réqui&ére
 ttttn fyfiême libre, 5 . Prenons maintenant » ce qui eft permis, à la place des
 coordonnées x, y, x', y, x'y\ Sec, des rayons veâeurs f, p\ / , fcc, avec les
 angles ç , p'^ 9" y &c, que ces rayons font avec l'axe des jc; on aura, comme
 l'on fait, 3C = p cof y ^ p fin. ^, &c de même x' = p' cof. / , y = p' fin. 9',
 &c» Donc dx = cpf. fdf — ydf ^dy == fm. f -h i^c' a Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 20.07% accurate

Première Partie. 2p cof. $\wedge' < / p' \text{ — } \wedge d' \wedge \backslash dy' = \wedge \backslash w. / < / p' - f - x' ii V,$
 Ôcc. Ec 1 équation de l'arc, i deviendra par ces rubilications , o P (* cof. /B
 — y cof. .) H- P'(x' cof. ia'— y cof.) ' P" (x" cof. f — y cof.) dp" -i- &c.
 H-P (cof. 9 cof.«H-fin.f cof)8)t/p-hP'(cof. ♦'cof. «'H- fin. cof.(^)dt' -h P" (
 cof. f' cof. H- fin. cof. i8") -4- &c; -f. P cof. ^ -4- P' cof. H- P" Cof y"d:('
 &c. Or fi l'on faic = ^ -H ^« a. ♦ -f. /, &c. il eft vifible que &c (èronc Jes
 angles que les rayons p^f» ff'y &c. fopment avec le rayon p ; par
 conféquent les diftances des corps » tant entr'euz, que par rapport au plan
 des x, ^, & au point qui eft Torigine des coordonnées , dépendront
 fimplement des^ quantités p, p', p", &c: , &c, :(\ &c. Donc fi le fyftême a la
 liberté de tourner autour de ce point , parallèle- . ment au plan des x,y, c'eft-
 à-dîre, autour de l'.ixe des qui eH: perpendiculaire \ ce plan , l'angle ? fera
 indccci miné, & la différence d^ arbitraire. D'oii il fuit que le membre
 affeclé àc dans Téquacion précédente, devra être en particulier égal à zéro.
 6. On aun donc àinfi Téquadon , ■ P(xcof.i8— y cof «) -f-P'(x'cof ^'—
 rycoi:»') -t- P' (Jff' cof. /a" — y cof.) «ce « p ; laquelle devra avoir lieu
 dans l'équilibre de tout fydême qui a la liberté de tourner autour de l'axe des
 On trouvera de la mcme manière, par rapport à Taxe des fi le fyftême a la
 liberté de tourner autour ide cet aze^ réqnation

The text on this page is estimated to be only 20.47% accurate

30 MÉCANIQUE ANALITIQUE. P (X cof. r — ^ cof. «) -f. F (y cof. — cof. «') F" {x" cof. / — f cof.) -H &c o. Éc pareillement on aura par rapport à l'axe des il le fyftème efk libre de tourner autour de cet axe, l'équation $P_{iycoCy} - i \text{ cof. li }) P' (y \text{ cof. — cof. /} \gg') ^ F' (y \text{ cof. } y'' - f \text{ cof. }) -f. \&C - O.$ De forte que lorfcue le fyftème aura la liberté de Ce mouvoir autour de chacun de ces trois axes, il faudra pour l'équilibre, que-ces trois équations aient lieu à la fois. Si dans la quantité $x \text{ cof } y \text{ cof.}$ qui multiplie la force P dans la première équation , on met pour cof « » cof \$ les valeurs (în. > cof. i, fin. > fin. t (art. 7, Seft. 1), on a fin. > {x fin.» — jy cof. *) ; de cette quantité deviendra fin. 7 fin. (i — ç) > en fubftituant pour jc ôc^ leurs valeurs f cof. ç , p fin. 9. Or t eft l'angle que la projeâon de la direction de la force P fur le plan des * fie ^ fait avec l'axe des * , & ^ eft l'angle que le rayon veâeur p fait avec le même axe. Donc • ^ t fera Tangle que la projeéHon dont il s'agit ^t avec ce rayon ; par conféquent p fin. (• — 9) fera la perpendiculaire menée du centre des rayons p à la direâion de la force P projetée fur le plan des c'eft-à-dire en général la perpendiculaire menée de Tixe des \ (lequel eft lui-même perpendiculaire au rayon p), à la direction de cette force. Ainfi nommanc w cette perpendiculaire , on aura x coi. .s — y cof. « 9 fin. 7j & on pourra auifi réduire .l une forme femblable les quantités analogues j qui multiplieac les forces $P_y P \backslash P \backslash$ &c, dans les trois équations précédentes. 7. Quand le fyftème a la liberté de tourner ou pirouetter Digitized by Gopgle

The text on this page is estimated to be only 19.14% accurate

Premiers Partie, 31 en tout (en» aotour <l*im poînc» on pourroit douter s*U fiiffic » de coniidécer fôparémenc les rotations autour de trois axes perpendiculaires paflant par ce point, & fi ces trois rotations étant empêchées , conte autre rotation autour du même point le fera autiL Pour éclairdr ce doute > je confidere qu'en fuppofanc » comme plus haut x^y cof. p^y sa $^{\text{fin}}$. f , y s $f>$ ' cof. $f \ll f^{\text{fin}}$. $f \&c$; fic fuivant varier' fimplement les angles $f \theta f \&c$, de la même différence $df^{\wedge}$ on aura, $dx = i - ydf^{\wedge} dy^{\text{ss}} dx^{\wedge} dx^{\text{mm}} - ^{\wedge} dp^{\wedge} dy^{\text{ss}} s^{\wedge} d^{\wedge\wedge} c$. Ce (ont les variarions de $x, ^{\wedge}$, dues lia rotation élémentaire du fyftême autour de Taxe des On aura de même les variations de $y, y, i\&$, &c. dues i une rotation élémentaire $d^{\wedge}$ autour de Taxe des en changeant fimplement dans les formules précédentes, $y, y, \&c$, en $y, \%^{\wedge\wedge} \theta$ en $d^{\wedge\wedge} i$ ce qui donnera, ify es — «jr</4></<>> — $l^{\wedge\wedge} 5 \hat{i}' s=y \hat{u}^4$, &c Enfin en changeant dans ces dernières formules $^{\wedge}$, $^{\wedge} y \&c$ 'reipeâTementen $\{sX,;^{\wedge}, x^{\wedge} \&c, \& d^{\wedge} \text{end}\}^{\wedge}$ on aura les Variations provenantes de la rotation élémentaire $d^{\wedge}$ autour de Taxe des y , lefquelles (èront $dl^{\wedge} - ^{\wedge} x d^{\wedge} \theta dx^{\wedge} d^{\wedge} tdl (=a^{\wedge} \theta^4 dm^{\wedge} d^{\wedge} \theta ssa^{\wedge} dm^{\wedge} iCC$, Si donc on fuppofe que les trois rotations élémentaires $d^{\wedge} y \leq /4$, $^{\wedge} \ll$ aient lieu à la fois, les variations cicales des coordonnées $x', y, ^{\wedge} \&c$, feront, d'après les principes $^{\wedge}$ du calcul différentiel , égales aux fommes des variations par* Digilized by Googld I

The text on this page is estimated to be only 20.27% accurate

32 Mécanique analytique. tielles dues à chacune de ces rotations ; de sorte qu'on aura alors $dx = \frac{1}{r} \frac{dy}{dt} dt$, $dy = \frac{1}{r} \frac{dx}{dt} dt$, $dx^2 + dy^2 = r^2 \frac{d\theta^2}{dt^2} dt^2$, $dx = r d\theta$, $dy = r d\theta$, &c. 8. Je remarque maintenant que si les coordonnées x, y d'un point quelconque du système sont proportionnelles à $\cos \theta, \sin \theta$, les variations dx, dy deviendront nulles, comme on le voit par les formules qu'on vient de trouver. Donc tous les points qui répondraient à ces coordonnées, seraient immobiles pendant tout le temps que le système décrirait les trois angles θ, ϕ, ψ en tournant autour des axes des x, y, z . Or il est visible que tous ces points sont dans une ligne droite qui passe par l'origine des coordonnées; & il n'est pas difficile de Concevoir que cette droite fera respectivement avec les axes des x, y, z des angles dont les cosinus feront $\cos \theta, \sin \theta, \cos \phi, \sin \phi, \cos \psi, \sin \psi$. ainsi cette droite fera immobile pendant le même instant, & le mouvement du système ne pourra être qu'un simple mouvement de rotation autour de cette même droite, qu'on nommera à cause de cela, l'axe instantané de rotation. Pour avoir l'angle décrit en vertu de cette rotation, on considérera que $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ est en général l'élément de l'espace décrit par un point quelconque qui répond aux coordonnées x, y, z . Or en substituant les valeurs de dx, dy trouvées plus haut, on a $\sqrt{dx^2 + dy^2} = r d\theta$, &c.

The text on this page is estimated to be only 20.07% accurate

P f t E M I B il s P* A R T* X E. 3) ■ D'un autre coté il est facile de prouver par la Géométrie, que si on considère un plan passant par l'origine des coordonnées, perpendiculaire à la droite, pour laquelle les coordonnées seraient proportionnelles aux quantités données $\frac{1}{4} \theta$, c'est-à-dire, l'axe instantané de rotation, en désignant toujours les coordonnées par X, Y, Z . Donc l'espace élémentaire décrit par un point quelconque de ce même plan, peut être exprimé Amplement par $H - y - \frac{1}{2} Y^2$ etc. / $\frac{1}{4} \theta - \frac{1}{2} V \ll \frac{1}{4} \theta - d f^*$ etc. & comme $y \{ x^* - \frac{1}{4} \theta - H \{ * \}$ est la distance de ce point à l'origine des coordonnées, où le plan est l'axe instantané de rotation, il se coupe à angles droits, il s'ensuit que $v^{\frac{1}{4} \theta - H \ll \frac{1}{4} \theta \gg * - t - \frac{1}{4} \theta}$ fera l'angle élémentaire de rotation autour de cet axe, en vertu des rotations partielles $d^{\frac{1}{4} \theta} d^{\frac{1}{4} \theta} d^{\frac{1}{4} \theta}$ autour des axes des coordonnées $j^{\frac{1}{4} \theta}, j^{\frac{1}{4} \theta}, j^{\frac{1}{4} \theta}$. On doit conclure de-là en général, que des rotations quelconques $d^{\frac{1}{4} \theta} d^{\frac{1}{4} \theta} d^{\frac{1}{4} \theta}$ autour de trois axes qui se coupent perpendiculairement, dans un point, (et composent en une seule, $\theta^{\frac{1}{4} \theta} (dV \ll \frac{1}{4} \theta \gg - d \gg * - \frac{1}{4} \theta^{\frac{1}{4} \theta} f^*$), autour d'un axe passant par le même point d'intersection, & faisant avec ceux-là des angles A, M, r , tels que $\cos a = \cos A \cos M \cos r$, cor. M à j., corr. 8 & réciproquement qu'une rotation quelconque θ autour d'un axe donné, peut être décomposée en trois rotations partielles exprimées par $\frac{1}{4} \theta \cos A, \frac{1}{4} \theta \cos M, \frac{1}{4} \theta \cos r$, d'où il suit que si on a trois axes qui se coupent perpendiculairement dans un point de l'axe donné, & qui font avec lui les angles a, m, r ; E

The text on this page is estimated to be only 18.97% accurate

34 Méchanique an ALI tique. ce qui. fournit, comme Ton voie, un moyen bien iimple de compofer & de décompofer les muuvements de rotation. IO. Donc quelque rotation que le fydème puifle avoir autour ciu point qui eft l'origine des coordonnées, on pourra toujours la réduire à (rois <i4i dtt^d^ autour des trois axes des coordonnées x , y , z ; Ôcles variations dp toutes les coordonnées x^y^^^ ^9j^> ^» &c » des diâPérens corps du fyAême , provenantes uniquement de ces rotations, (è.ront exprimées généralem^t par les formules trouvées dans Taràcle 7. Subftitu.mt donc fimplement ces valeurs de dx, dy, d^y dx', dy\ &CC , d^ns l.i formule générale de l'équilibre (art. i), on aura les termes dûs aux rotations di, do>^ t/^du fyftcme , te comme ces rotations ioixt tout-à-fait arbitraires lorfque le f) iicme a la liberté de toiirner en tout fcns, il faudra dans ce cas que chacun des membres ail edcs de f/^, d'^yd(f(oit hvX en particulier ; ce qui donnera les mêmes trois équations ' déjà trouvées dans Tarticle^^ lelquelle^s ieront donc fuâifanées pour empêcher toute rotation du fyftême autour du point qui eft l'origine des coordonnées. I I . Si toutes les forces P, P\ P''_y £cc , étoient parallèles entr*elles, on auroit* c= «'s=«",&c;i9s=jî'=çBi8",&c; > y\ &c , & les trois équations dont nous venons de parler « dfviendroient . (Px^PV4-PV'-h&c:c)cof.<3--(Py-|Py-t-P'y-+-2cc) cof. * =. o (PjcH-i'VH-PV'-+-&c)cof.>^(Fl-l-P'i'H-i'Y-*-&<^)cof dont la troificmc ci\ dcja une fuite dés deux premières. Mais comme on a cof. cof. g* cof. 3,' = 1 (SefL x , art. 7) , Digitized by Coog

The text on this page is estimated to be only 21.82% accurate

P a £ M I E' R E Partie.' ^5 on pourra dérermlner par ces équations , les angles « , jS , > , & faifaic pour abrégér on ttouvera.cof. « « ..^^.^j.^.^, côf./»=- ^^.^^^j^^t Donc la pofîCion des corps étant donnée par rapport à trois axes 4 il faudra pour que tout mouvement de rotation da fyftême foit détruit, que le fyftême foit placé relativement à 1% direébion des forces , de manière que cette dîreâion fâflèaveo les mêmes axes les angles a , /3, >■ qu'on vient de déterminer. 12. Si les quantités Ly A/, iVétoient nulles, les angles « , ^, > dcmcurcroLcnt indéterminés, Se la pofition du fyftême , reiativemenc à k diredioa des forces, pourroic être quelconque ; d'oii céfulte ce théorème » que fi la fommc de\$ produits des forces paraUeUs , par leurs diftances a trois plans perpendicuiairts enu^eux^ efi nulle par rapport à chacun de ces trois plans » V effet des forces pour faire tourner le fyfihne amour du point commun d^intetfeBion des. mêmes plans, fe trouvera détruit, ' On fait que la gravité agit verticalement & propotlâohnellement à la mafTe ; ainfi dans un fyftême de corps pefants , li on cherche un point tel que la fommc de chaque maîïe par fa diftance à un plan paHant par ce point, foit nulle relativement à trois plans perpendicuiairej;» ce point aura la propriété que la gravité ne pourra imprimer au fyftcme aucun, mouvement de rotation autour du mètafi poinf.* G'eft ce point

The text on this page is estimated to be only 18.79% accurate

3[^] MÉCANIQUE ANALITIQUE. qu'on appelle centre *de gravité ^ & qui est d'un niage si écentii dans toute la Méchanique» Pour le détermiiiiir, il s'y a qu'à chercher la jiftance & trois plans perpendiculaires donnés. Or , puifque la Somme des produits des maïïes par leurs diftances à un plan pailant par le centre de gravité est -nulle , la somme des produits des mêmes mafles par leurs diftances à un autre plan parallèle à celui-ci , fera néceffairement égale au produit de toutes les m fies par la diftance du centre de gravité au même plan j de forte qu'on aura cette diftance en divifant la somme des produits des mafles , & de leurs diftances par la même même des mafles. Et de-li réfultent les formules connues pour les centres de gravité des lignes , des fufaces & des iblides. I 3 . Nous allons confidérer maintenant les maxima & minima qui peuvent avoir lieu dans l'équilibre i & pour cela nous reprendrons la formule générale. $Pdp - Qdq - Rdr - Udu = 0$, de réquilibre entre les forces P, Q, R, U , dirigées fuivant les lignes dx, dy, dz, du , &c. (Seâ. a , art. i). On peut fuppofer que ces forces foient exprimées de manière que la quantité $Pdp - Qdq - Rdr - Udu$ (o\z une différentielle exacte d'une fonñlion de x, y, z, u , &c, laquelle Çoit repréfencée par enforte que l'on ait $d(Pdp - Qdq - Rdr - Udu) = 0$. Alors on aura pour Téquilibt cette équation $Pdp - Qdq - Rdr - Udu = 0$, laquelle fût voir que le fyftême doit être difpofé de manière que la fonñtion $Pdp - Qdq - Rdr - Udu$ y foit généralement parlant un maximum ou un minimum. ■ • Je àà gérûraUment parlant \ car on fait que l'égalité d'une uiiy. ^uu Ly Google

The text on this page is estimated to be only 23.26% accurate

Pkbmiee Partie. 37 dlfféreadelle à zéro, n'indique pas toujours un maximum ou un minimum t comme . on le voit par la théorie des courbes. La supposition précédente a lieu en général lorsque les forces P, Q, R, Y, U, c, y tendent réellement ou à des points fixes ou à des corps de même système, & sont proportionnelles à des fondions quelconques des distances (Se61. i, art. 4) i ce qui est proprement le cas de la nature. AinH dans cette hypothèse de forces le système sera en équilibre lorsque la fonction « sera un maximum ou un minimum ; c'est en quoi consiste le principe que M. de Maupertuis avait proposé sous le nom de loi de repos » 1 4. Si on considère un système de corps pesants en équilibre, les forces $P, R, \&c$, provenant de la gravité, seront, comme l'on fait, proportionnelles aux masses des corps, & par conséquent constantes, où les distances $p, r, \&c$, concourront au centre de la terre. On aura donc dans ce cas $\bullet a - h Qq - H Rr - 4 - \&c$; par conséquent, puisque les lignes $p^q r^u c^v$ sont censées parallèles la quantité $p^q Q^R$ est $\propto p^{TM} \dots$ distance du centre de gravité de tout le système au centre de la terre; laquelle fera -donc un minimum ou un maximum lorsque le système sera en équilibre; elle fera « par exemple, un minimum dans le cas de la chaînette, & un maximum dans le cas de plusieurs globules qui sont étendus en forme de voûte; Ce principe est connu depuis long-tems. 15*^ Thypothèse de l'article 13, on « considère le système en mouvement, & que $v, u, a, \&c$, soient les vitesses, & $m, m', m'', \&c$, les masses respectives des différents corps qui composent le système y le Principe il connu de

The text on this page is estimated to be only 24.70% accurate

38 MÉCHANIQUE ANALITIQUE, la conservation des forces
vives » donc nous donnerons une démonstration directe & générale dans la
seconde Partie 9 fournira cette équation , Donc, puisque dans l'état
d'équilibre la quantité « est un minimum ou un maximum y il s'enfuit que la
quantité tendra à être un minimum ou un maximum , qui exprime la force vive de tout le
système, sera en même temps un maximum ou un minimum • c'est en quoi
consiste le principe de Statique proposé par M. de Courtyvon, que de toutes
les situations que prend successivement le système celle où il a la plus
grande ou la plus petite force vive , est la même que celle où il le faudrait
placer en premier lieu pour qu'il restât en équilibre, 15* On vient de voir que
la fonction est un minimum ou un maximum y lorsque la position du
système est celle de l'équilibre ; nous allons maintenant démontrer que si
cette fonction est un minimum l'équilibre aura de la stabilité; en sorte que le
système étant d'abord supposé dans l'état d'équilibre, & Tenant ensuite à être
tant soit peu déplacé de cet état, il tendra de lui-même à s'y remettre, en
faisant des oscillations infiniment petites; qu'au contraire, dans le cas où la
même fonction fera un maximum , l'équilibre n'aura pas de stabilité, 6c
qu'étant une fois troublé » le système pourra faire des oscillations qui ne
seront pas très-petites « & qui pourront l'écarter de plus en plus de son
premier état. 17. Pour démontrer cette proposition d'une manière générale ,
je considère que , quelle que puisse être la forme du système, sa position,
c'est-à-dire celle des différents corps qui le composent, sera toujours
déterminée par un certain L/ftjiiized by Google

The text on this page is estimated to be only 18.86% accurate

Première Partie. 3p nombre de variables, & que la quantité « fera une fonction donnée de ces mêmes variables. Or supposons que dans la situation d'équilibre les variables dont il s'agit soient égales à $a^e c^e$ &c, & que dans une situation très-proche de celle-ci, elles soient « H- », a^{-t} , c^{-f} , &c, les quantités x^a , &c, étant très-petites; substituant ces dernières valeurs dans la fonction ϕ , & réduisant en série, suivant les dimensions des quantités très-petites $x^a y^b \dots$ etc, la fonction ϕ deviendra de cette forme « $\phi = a^{-t} X^{-C} y^H - Z^t H - \dots$ ». Ici $F^* = -f - G - f - \dots$ (y' JC jc -4- Z; $a^j - H A f: [-f^e$ &c, les quantités a, y, B^C &c, étant données en $a, ^, c$, &c. Mais dans l'état d'équilibre la valeur de ϕ doit être nulle, de quelque manière qu'on fasse varier la position du système; donc il faudra que la différentielle de ϕ (bit nulle en général, lorsque $x > 0$, font sa 0; donc il faut que C es On .111 r.i donc pour une situation quelconque très-proche de celle de l'équilibre, cette expression de ϕ . $\phi = a^{-1} - Fx^{*'} Gxy^H f^K xX'^L yx^M f^H - \dots$ dans laquelle tant que les variables &c, sont très-petites, il suffira de tenir compte des premières dimensions de ces variables. I 8. Maintenant il est clair que pour quela quantité ϕ (bit toujours un minimum lorsque $x^a y^b$, &c, sont nulles, il faut que la fonction

The text on this page is estimated to be only 19.96% accurate

4© Mécanique analytique. que je nommerai soit conflagration
 polaire» quelles que soient les valeurs des variables x, y, z & Supposons (biens
 d'abord, & «non» on aura $X^2 + Y^2 + Z^2$ quaternité qui (est toujours positive)
 si elle est positive; ainsi on aura > pour première condition du minimum $F'' > 0$.
 Or puisque la quantité X est toujours positive, lorsque y, z sont nuls, il
 est clair que pour qu'elle demeure constamment positive, en donnant à ces
 variables des valeurs quelconques, il faut qu'elle ne puisse jamais devenir
 nulle. Donc il on fait 1 équation $JT = 0$, & qu'on en tire la valeur de z ! il
 faudra que cette valeur (soit imaginaire; mais l'équation $X^2 + Y^2 + Z^2 = 0$ donne donc
 11 faudra que la quantité $1 - V$. Soit / que j'appellerai Y soit toujours positive.
 Or cette quantité réduit à la forme $p \sqrt{u}$ pour abréger. Donc par un
 raisonnement semblable au précédent, on aura premièrement la condition $F'' > 0$;
 & il faudra ensuite que la valeur de z tirée de l'équation $Y^2 = 0$ soit
 imaginaire; or cette équation donne $y^2 = -V$. Soit J donc m

Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 20.05% accurate

P R £ M I f i H s P A B. T I s.. donc la quancicé — ? — v^{Tp-r}
 que je nommerai Z & qui fê réduit à la forme $Tiff j-h^c$ enÊdfàncpour
 abrèger devra être toujours positifve. Donc il fiudra de nouveau que Ton ait
 $7^*> 0$; & ainfi de fuite. Si la fbndion X ne contient que trois variables
 $x^y^{^t}$ il eft vifible que les trois conditions $F>- 0$, $P> 7^{*0}$, fuffiront pour la
 rendre toujours positifve; & par conféquent $\bullet covLT Y$ & minimum de la
 quantité «; s'il y avoit. une quatrième variable , on trouveroic une condition
 de plus ; fie en géi.tral le nombre d&-s condiùons lera toujours égal à celui
 des variables. Si au contraire la quantité o devoit être toujours un ma»
 ximum lorfqe $x^y^{T^{^}}$ &c font nuls, il faudroit que la ibnâion X fut
 confamniement négative. Par conféquent il faitdrmt d'abord que F fût une
 quantité négative , & enfuite que Téquacion X mmo ne donnât aucune racine
 réelle pour*} ce qui fournira les mèmès conditions qu'on a trouvées dans le
 cas précédent , favoir $jP^o, r> G$, &c. D'oii il s'enfuit que les conditions
 du maximum font les mêmes que celles du minimum ^ à l'exception de la
 première qui , pour le minimum $F o,y$ £c pour le maxinium 1 9. Je remarque
 maintenant que les quantités $Jr, F>Z>$ &c, peuvent (è mettre fous 1» forme •
 ' . ^ „ " • F

The text on this page is estimated to be only 11.98% accurate

¹ Mécanique analytique, ... $\langle r(t+\epsilon) \rangle + t_0$, Sec. Donc
fubiticuant fucceiTivement , on aura ϵ d'où l'on voit d'ailleurs que la
valeur de X pour les conjoints positifs , n , $\bullet Z'$, r , $\epsilon > 0$, & qu'au contraire
elle sera toujours négative, si $F < 0$ & $\epsilon > 0$. De-là il suit qu'en prenant,
pour plus de simplicité, à la place des variables j : $(, \theta$, $d\alpha$; les
variables $|$, ϵ , pourra donner à la fonction X cette forme
très simple que la quantité $\langle f e^{\alpha} \rangle$ les coefficients , α , A , $f(\epsilon$, feront
nécessairement positifs , dans le cas du minimum de $\diamond$, & négative dans
celui du maximum, $\blacksquare \blacksquare * 20$ « Cda pour dériver pour dériver ic. chéorème de
récurrence Digilized by Google

The text on this page is estimated to be only 13.14% accurate

P & E. |i I £ B. £ Partie.' 43. 1⁹ 11 ne fkttdra que fubftâier
res^{ieffion} précédente de ♦ dans Téquatoti de la confirmion des fines vives
(arc 15)» ce qui donnera celle-ci , . Or dans l'écac d'équilibre on ar(hyp.) «
o^{y-ê}a o, ô, &c; doncanffi|«BO,ii«o,çâ o»&c(art. i9)idonc,fion£iip' pofe
qu*on dérange le fyfiêBie de cet étAt, cin iinprimanc*sne
corpsM',Ar',M'',&c, les vitefles ctès-petêes il faudraque Pon ait a'»» ^, a"
^r»^^ ^ f^^ «CÇ, lorfque ^=3 0,»3=o,Ç'a=iO, &c. On aura donc M^r^' -h
M" f^{'''}-h M" V^{''}*-^ Sec. = conf. —i-4 i ce qui fervira à déterminer la
conllante arbitraire, • • ' Aioil l'équacion précédente deviendra d*oii il eft
aifé de tirer ces deux concluions. * Que dans le cas du minimum de dans
lequel les coëffidens fig^à^Ucy font tous' pofitifs,' la quantité tôo|ôlMS
poHtive , i/^{*}-^ 2¹¹* -H aA[^] -H &c, devra néceiTairement être moindre ,
o» du moins ne pourra pas êaet pins grande que la quantité éomie M
r^{*}'^M^r''*¥^qtSteAr cUe-même très^{tit}^; par confiSqaieir on fMmmr
cettèt quantité T, on aura pouf diacmie dss ^Quiables ^ , « , &c ,
<»liiiiitw±J/*-|.± &c. entre lefquelles el!e^e^erolit nêceflatement
renfermées[^] d'oii il fuit que dans ce cas le fyftême ne' pourra qlie s'écarter
très-peu de fon état d'équilibre , & ne pourra faire que dès offdl*•• tions
ttb'peûte\$,«fi& dHaioécendiie déiermioce. • . . uiLjiii^Cû by Google

The text on this page is estimated to be only 19.48% accurate

44 Mécanique analytique. 1°. Que dans le cas du maximum de « dans lequel les coefficients, α sont tous négatifs, la quantité toujours positive $\frac{1}{l} - \frac{z}{A}$, &c, pourra croître à l'infini, & qu'ainsi le système pourra s'écarte de plus en plus de son état d'équilibre. Du moins l'équation d'Hierius fait voir que dans ce cas rien n'empêche que les variables α , &c, n'aillent toujours en augmentant; mais il ne s'enfuit pas encore qu'elles doivent aller en croissant en augmentant; nous démontrerons cette dernière Proposition dans la Section cinquième de la Dynamique.

QUATRIÈME SECTION. . Méthode simple de trouver les équations nécessaires pour régler d'un système quelconque corps regardés comme des points ou comme des masses finies à tirés par des puissances données. I. Ceux qui jusqu'à présent ont écrit sur le Principe de vitesses virtuelles, se sont plutôt attachés à démontrer la vérité de ce principe par la conformité de ses résultats avec les principes Ordinaires de la Statique» qu'à montrer l'usage qu'on en peut faire pour résoudre directement les problèmes de cette Science. Nous nous sommes proposé de remplir ce dernier objet avec toute la généralité dont il est susceptible, & de déduire du Principe dont il s'agit, des formules analytiques qui renferment la solution de tous les problèmes sur l'équilibre des corps à-peu-près de la même manière.* Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 20.37% accurate

Première Partie. * 4J nière que les formules des focangences, des rayons ofcul^ teurSf &c, renferment la détermioadon de ces lignes dans fouces les courbes. • ' , . i . 2. La.Aiécfaode expofée <lans la- première 5efUon, ^uc être employée dans tous les cas, & ne demande, comme on l'a vu, que des opérations purement analiciqucs ; mais comme l'climination immédiate de ces variables ou de leurs différences, par le moyen des équations de condition , peut être fouvent embarrassante , 6c conduire à des calculs trop compliqués , nous allons préfenter la même mé* thode fous une forme plus fimple, en réduifant en quelque manière tous les cas à celui d'un fyftême enfiéreraent libre.' • • • 3 • Soient Xbso, il/aOjJVaso» &c. les différentes équations de condition données par la nature du fyflême, les quantités Z , Af , , ' &c , étant des fondions finies des variables v, jy, x',yy\y&cc; en difircnciant ces équations on aura celles-ci , d L = o ^ d Aî = a ^ d N = o, &c :c , lef^ quelles donneront la relation qu'il doit y avoir entre les différentielles des mêmes variables. En général nous repréfenterons par dL ss o, dMt=x o,dN^Oy&cc^ les équations de condition entre ces différentielles , ibiç qu^ ces éqna-> tiens foient elles-roêtfies des différences exaâes ou non y ftourvu que les différentielle^ n*y (oient que linéaires» . ^ Maintenant comme ces équations ne doivent ferrir qo^ éliminer un pareil nombre de dlflîEreNtienes dans Téquadon des vîteilès virtuelles , après quoi les coëfficieni des différentielles reftantes , doivent être égalés chacun à zéro , il n'eft pas difficile de prouver par la théorie de l'élimination des équations linéaires, qu'on aura les mêmes réfultats fi on ajoute iimplcmenc à l'équation des viceiTes viccuelics » ks

The text on this page is estimated to be only 18.03% accurate

4^e MÉCANIQUE ANALITIQUE Uⁿ Différentes équations de condition $dL = 0$, $dM = 0$ dites o, &c » multipliées chacune par un coefficient indéterminé, qu'enfuite on égale à zéro la somme de tous les termes qui se trouvent multipliés par une même différentielle; ce qui donnera autant d'équations particulières qu'il y a de différentielles; qu'enfin on élimine de ces dernières équations les coefficients indéterminés par lesquels on a multiplié les équations de condition. 4. De-là résulte donc cette règle extrêmement simple pour trouver les conditions de l'équilibre d'un système quelconque proposé. On prendra la somme des moments de toutes les puissances qui doivent être en équilibre (ccl. i, art. 5 j, &c on y ajoutera les différentes fonctions différentielles qui doivent être nulles par les conditions du problème, après avoir multiplié chacune de ces fonctions par un coefficient indéterminé; on égalera tout à zéro, & l'on aura ainsi une équation différentielle qu'on traitera comme une équation ordinaire de maxima ou minima. On tirera autant d'équations particulières finies qu'il y aura de variables; ces équations étant ensuite débarrassées, par l'élimination, des coefficients indéterminés donneront toutes les conditions nécessaires pour l'équilibre. 5. L'équation différentielle dont il s'agit, sera donc de cette forme, $\sum dL^4 dM^4 dN^4 \dots$ dans laquelle $\frac{dL}{L}$, $\frac{dM}{M}$, $\frac{dN}{N}$, &c sont des quantités indéterminées; nous la nommerons, dans la suite, l'équation générale de l'équilibre.

The text on this page is estimated to be only 17.85% accurate

Première Partie. 47 : iCepte i<|iatioo donaeMrelamsemeoc A
 chfque<oordoiinée» •CtUe qiiex« de chacun des cofps da fyftMie, une
 équadon de la forme (uivante, enforte c]uc le nombre de ces équations fera
 égal à celui tie toutes les coordonnées des corps. Nous les appellerons tions
 particulières de l* équilibre. * Toute U difficulté confilera doncà^miper de
 ces dernières jé<|uadojis » ks iadécermiiiées a', /*f &c; or c^eft ce qu'on
 pourra toujours exécuter par les moyens connus; -mais il conviendra dans
 chaque cas de clioi/ir ceux qui pourront conduire aux réûiltacs les plus
 fimples. . I«s équations finales «en^nnereoc tpucea' les* conditions*
 ndfcflâiies pour f équtfibrè . propofè» le comme lo nombre de ces
 équations, leçi égal \ celui de toutes lés coordonnées des corps du fyftême
 moins celui des indéterminées a, k, &c, qu'il a fallu Himîner , que d'ailleurs
 ces mêmes indéterminées font en même nombre que les équations de
 condition finies i/ = o, Af = o, iV^o, &c, i^ s'enfuit que les équations dont il
 s'agit, jointes à ces deriiieres, feront toujours en même nombre que les
 coordonnées de tous les corps s par conféquent elles fufHrom pour dé^r^
 jnioercei coordonnéeiS, /6c fâtise connoître la poition qnç chaque corps
 doit prendre pour être en équilibre. 7. Jerêmarqnemaîneenant que les
 ^n^v^^^A f^^M% ^» de réquationgénéraledePéquilibre»feuventêtreâdfi
 regardés comme reprélcntai^s les momenc de diflShfenœa forces appU>
 quées au même fyftême. • En effet, puifque dL une fon(£lion diflérctielle
 des variables y, y, ^> x" ^ y, &c, qui fervent de coordpnnçei

The text on this page is estimated to be only 25.40% accurate

48 Mécanique Analytique. aux différents corps du système, cette fonction sera composée de différentes parties que je désignerai par dL^y & dL''^y , en sorte que $dL^y dL^{*y} - \frac{1}{2} dL''^y dL^y$ ne renfermant que les termes affectés de dx^2 & dy^2 & $dL^{*y} dL^{*y}$ ne renfermant que ceux qui contiennent dx^2 & dy^2 & ainsi de suite. De cette manière le terme dL^y de l'équation générale sera composé des termes $X dx + Y dy + Z dz$ &c. Or si on donne au terme dL^y la forme suivante, il est clair par ce qu'on a dit dans l'article 8 de la 1^{re} section, que cette quantité peut représenter le moment d'une action sur les corps dont les coordonnées sont x, y, z , & dirigée perpendiculairement à la surface qui aura pour équation $dV = 0$ en n'y regardant que x, y, z comme variables. De même le terme dL''^y pourra représenter le moment d'une force corporelle $\frac{1}{r^2}$ à pour coordonnées x, y, z & dirigée perpendiculairement à la surface courbe, dont l'équation sera $dL''^y = 0$ &c. « en n'y regardant que x, y, z comme variables, & ainsi de suite. Donc en général le terme dL sera équivalent à l'effet de quatre forces exprimées par a, b, c, d & appliquées respectivement aux corps qui répondent aux coordonnées Digitiized by Google

The text on this page is estimated to be only 21.50% accurate

' Premiers Partie. 49 coordonnées $x', y', x''^y''y$ Sic, fiiivant d[^]s directions perpendicul.uies aux diiycrentes fiiifaccs combes reprclentccs pa# récluation d $L — o$, en y failanc varier premièrement y, y , enfuite $x\%y\backslash$ & ainli du refte. S* Il réfulce de-là que chaque équation de condition efl: équivalente à une ou plufieurs forces app!H|uées au fyftème fuivont des direâions données ; enforte que Tétat d[^]éqnilibre du fyfteme fera le même, (bit qu'on emploie la confiJ(irationii de CCS forces , ou qu'on aie et[^]ard aux équations de coadicion. Réciproquement ces forces peuvent tenir lieu des équations de condition réfulrances de la nature du (yftêmc donné; de manière qv[^]n employant ces forces , on pourra regarder les corps comme entièrement* libres & fans aucune liaifon. Écde-là on voie la raifon métaphyHque, pourquoi l'introduction des termes $dL^{^}/dM-hUc^{^}$ dans Téquation gén[^]nde de Téquilibre > fait qu'on peut eiiuite traiter cette équatioti comme & tous les corps du fyfteme étoiententièrementSt libres ; c*eft en quoi confifte Teiprit de la méthode de cette Seâion. A proprement parler , les forces en queilion tiennent lieu des reliftances que les corps devroient éprouver en vertu de leur liaifon mutuelle, ou de la parc des obltacls qui, par la nature du fylême , pourroient s'oppofer à leur mouvement, ou plutôt ces forces ne font que les forces mcmes de ces réfilbtnces, lefquelles doivent être CL[^]!es•& directe-' ment oppofées aux prefEons exercées par les corps. Notre méthode donne, comme l'oa voit, le moyen de déterminer ces forces & ces réfiftances ; ce qui nCeft pas on des moindres avantages de cette méthode.

The text on this page is estimated to be only 20.08% accurate

50 MÉCANIQUE ANALITIQUE. 9. JijijLuci nous avons
conficlé les corps comme des points; Se nous avons vu comment on
dcccminc les loix de IVtjuilhre de ces points, en quelque nombre qu'ils
foi[^]t, quelques forces qui a ; !lcnt (ur eux. Or un corps d'un volume & d'une
Higure quckont[^]ue» n étant que raflTemblage d'une infinité de parr'cs ou
points n atericls, il s'enfuit qu'on peut déterminer auH les loix de
Téquilibre des corps de figure quelconque » par Tapplicadon des principes
précédées. En effet , la manière ordinaire de réfoudre les queftions de
Mécanique qui concernent les corps de mafle finie, confifte à ne
confidérer d'abord qu'un, certain nombre de peints places à des diftances
finies les uns des autres, & à chercher ks loix de leur c[^]quilibic ou de leur
mouvement ; • à étendre enfulte cette recherche à un nombre indéfini de
points; cnHn [^] Aippoler que le nombre des points devienne[^] InHci, & qu'en
même tems leurs difbnccs deviennent infi[^] nimenc petites , ôc à faire aux
formules trouvées pour an nombre fini de points, les rédu[^]ions & les
modifications que demande le pafilage du fini à Tinfini. _ Ce procédé eft,
comme Ton voit, analogue aux méthodes géométriques & analitiques qui
ont précédé le calcul infinité.îmal; &i Ci ce calcul a l'avancage de faciliter
& de fimplifier d'une n aniere furprenante , les foluitions des queftions qui
ont rapport aux courbes, il ne le doit qu'à ce qu'il confidere ces lignes en
elles-mêmes, de comme courbes, (ans avoir befoin de les regarder ,
premièrement comme polygo* nés, & enfuite comme courbes. Il y aura
donc à peu-près le mSme avantage à traiter les problèmes de Mécanique
dont il eft queftion par de[^] voies direéles[^] & en confidérant immédiatement
les corps de KaaSe\$ finies comme des aflênw Dlgilized by Googl

The text on this page is estimated to be only 23.42% accurate

Première Partie. 51 blages d'une infinité de points ou corpuscules «animés chacun . par des forces données. Or rien n'est plus facile que de mo» difier & Amplifier par cecce considération , la méthode géométrique que nous venons de donner. I o. Mais il est nécessaire de remarquer, avant tout, que dans l'application de cette méthode aux corps d'une taille finie, dont tous les points sont animés par des forces quelconques, il y a présence naturellement deux sortes de . différentielles qu'il faut bien distinguer. Les unes- se rapportent aux différents points qui composent le corps; les autres sont indépendantes de la position mutuelle de ces points, & représentent seulement les espaces infiniment petits que chaque point peut parcourir, en supposant que la situation du corps varie infiniment peu. Comme jusqu'ici nous n'avons eu que des différences de cette dernière espèce à considérer, nous les avons désignées par la caractéristique ordinaire d ; mais pour que nous devons maintenant avoir égard aux deux espèces de différences à la fois, & qu'il est par conséquent nécessaire (aire d'introduire une nouvelle caractéristique , il nous paraît à propos d'employer l'ancienne caractéristique U pour désigner les différences de la première espèce qui sont analogues à celles que Ton considère communément en Géométrie, & de dénoter les différences de la seconde espèce qui sont particulières à la matière. que nous traitons par la caractéristique X , que nous avons employée autrefois, dans le calcul des variations , avec lequel celui dont il s'agit ici a une liaison intime Se nécessaire. Nous nommerons même, par cette raison, variations les différences associées de & nous conserverons le nom de différences relatives à celles qui seront associées de d . Du reste les G »

The text on this page is estimated to be only 21.17% accurate

J2 MjBCUANIQUE ANALitiQUE. m^mes forinules qui donnent les diffÉrencielles ordinaires» donneront auffi les variadons, en fubftituanc / à la place de t/, I I . Je rcmarr(Jue enfuire qu'nu lieu de confidérer la mafTe tlon-.cc comme un .afl'cmbl.n^e d'une infinité de points continus, il faiüira, fiiiivant IVIprit du calcul intinitclîmal , la confidérer plutôt comme compofée d'élcmens infiniment petits, qui foient du même ordre de dimenlîon que la mafle entière; quainH pour avoir les forces qui animent chacun de ces élémens» il faudra multiplier par ces mêmes éléments les forces P, R^icCf qu'on fuppoTe appliquées à chaque point, de ces élémens, & qu'on regardera comme analogues à celles qui proviennent de l'action de la gravité. Il . Si donc on nomme m la mafle totale , & Jm un de iês éléments quelconque , on aura Pdm^ Qdm^Kdm^ &c, pour les forces qui tirent l'élément dm^ fuivant les dirccbions des lignes &c. Donc multipliant refpettivement ces forces par les variations «T/?, ^q^ ^r, occ, on aura leurs momens, dont» la fomme pour chaque élément dm^ fera repréîentée par ia formule {Pfp -H (J'y -h Ai'/- 4- &c) dm^ & pour avoir la fomme des momens de toutes les forces du fyflême» il n'y aura qu'à prenflre l'intégrale de cette fbr« mule par rapport à toute la mafle donnée. Nous dénoterons ces intégrales totales, c*eft-à-dire, relatives à l'étendue de toute la mafle, par la caraâérifVique majufcule 5 , en confervant la caraélériftique ordinaire f pour défigner les intégrales parti. Iles ou indéfinies. I 3- On aura ainfi pour la fomme des momeiS de toutes les forces du fyftcmc, la formule intégrale

Digitized by Goo<?le

The text on this page is estimated to be only 24.51% accurate

P&EMiE&E Partie» Se cette quantité devra être nulle en général dans l'état d'équilibre du système. Or, comme par la nature du système il y a nécessairement des rapports donnés entre les différentes variations, S^p , Z^A , (Tr, θ, c, r) relatives à c^p, u, j, u, c pour. Je la maître, il faudra les réduire à un certain nombre de variations indépendances & indéterminées; &c les termes multipliés par ces dernières variations, étant égalés à zéro, donneront les équations particulières de l'équilibre. Mais comme ces réductions peuvent être embarrassantes, il conviendra de les éviter, par le moyen de la méthode que nous venons de donner dans cette Section. ' '. I 4" Pour appliquer cette méthode au cas dont il s'agit ici, nous supposons que $Z = 0$, $il/ = 0$, Sec, soient les équations de condition qui doivent avoir lieu par la nature du problème, par rapport à chaque point de la malle; & nous les nommerons équation de condition indéterminées. • Ces équations étant différenciées suivant r , on aura celles-ci $X^s, a, a, A^f, a, \&c$. On multipliera les quantités $fL, /Jlf, \&c$, par des quantités indéterminées $a, i, \&c$: on en prendra l'intégrale totale $\int$ qui fera par conséquent représentée par la formule $5 \{ \% \ll rZ - H iM. \wedge \&c \}$, & ajoutant cette intégrale à celle de l'article précédent, on aura l'équation générale de l'équilibre. Au reste, on observera qu'il n'en est pas nécessaire que $\ll Z, \&c$, soient les variations exactes de fonctions de $y^A, T^y, dx, dy^A \&c$, mais qu'il suffit que $\ll Z = 0, o M = 0, \&c$, soient les équations de condition indéterminées entre les variations de $V^A, dx^A, dy^A, S^L, c^A$ (art. 3). I 5* Mais pour embrasser à la fois toute la généralité

The text on this page is estimated to be only 17.67% accurate

J4 MÉCHANIQUE ANALITIQUE. podtble^ il faut remarquer qu'il peut se faire qu'outre les forces qui agissent en géni^ral sur tous les points de la machine, il y en ait qui n'agissent que sur des points déterminés de cette machine, lesquels points sont ordinairement ceux qui répondent aux extrémités de la machine donnée, c'est-à-dire, au commencement de l'intégrale désignée par S. De même il pourra y avoir des équations de condition particulières à ces points, que nous nommerons équations de condition déterminées ^ pour les distinguer de celles qui ont lieu en général dans toute l'étendue de la machine, & nous les représenterons par A-^ o, & nous les marquerons d'un trait^ de deux^ de trois 9 &c , toutes les quantités qui (se rapportent à des points déterminés de la machine, & en particulier nous marquerons d'un trait celles qui se rapportent au commencement de l'intégrale désignée par S, de deux traits celles qui (se rapportent à la fin de cette intégrale , de trois ou davantage , celles qui se rapportent à des points intermédiaires quelconques. Ainsi il faudra ajouter à l'intégrale $S \{ P^p + Q^q H - \frac{1}{2} (R^r + S^s) \}$, la quantité F si elle se rapporte à la fin de l'intégrale, & à l'intégrale $\int (a/Z - hM^M - H)$, la quantité $J^H - \int B^i$ si elle se rapporte à des points intermédiaires. De sorte que l'équation générale de l'équilibre fera de cette forme, 1 6* Cette équation, lorsque on y aura substitué les valeurs Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 21.60% accurate

Première Partie. ainsi que celle de //, $Sp^{Sc};^{S}Sq \hat{=} iJ, ^{S}$, en a', x"j &c, <rj>, <r.\", &c, a.v', &c, de Juites des ci •• confiances particulières de cli.ique proWcnie, aura toujours une forme analogue h. celles que /e çj/t./ </fj> variations fournies pour la détermination des maxima <2c minima des Fon-^ ipules intégrales ; ainsi il n'y aura qu'à y appliquer les règles connues de ce calcul. On considérera donc que, comme les caractéristiques ^ / marquent deux espèces de différences entièrement indépendantes entr'elles, ^uand ces caractéristiques (se trouvent ensemble, il doit être indifférent dans quel ordre elles soient placées, parce qu'en supposant qu'une quantité varie de deux ' manières différentes ^ on a toujours le même résultat, quel que soit l'ordre dans lequel se font ces variations. Ainsi <r./r fera la même chose que dSxy & pareillement c/V v fera la même chose que ^ x \ & ainsi de suite. On pourra donc toujours changer à volonté l'ordre des caractéristiques, sans altérer la valeur des différences; & ^pour notre objet il fera à propos de transporter la caractéristique d avant la <r, afin que l'équation proposée ne contienne que les variations des coordonnées, & les différentielles de ces mêmes variations. C'est en quoi consiste le premier principe fondamental du calcul des variations. ' 17. Or les différentielles $dSx^d^y^d^r^y d'fxy$ &c, qui se trouvent sous le signe 5", peuvent être éliminées par l'opération connue des intégrations par parties. Car on a $\frac{d}{dx} = a \frac{d}{dx} - p \frac{d}{dx} + f \frac{d}{dx}$ & ainsi des autres, où il faut observer que les quantités hors du signe se rapportent naturellement aux der

The text on this page is estimated to be only 19.38% accurate

j6 MÉCHANIQUE ANALITIQUE. niens points des intégrales ,
 mais que pour rendre ces intégrales complètes » il faut nécessairement en
 retrancher les valeurs des mêmes quantités hors du Hgne , lesquelles
 répondent aux premiers points des intégrales , afin que tout s'évanouisse
 dans ces points ; ce qui est évident par la théorie des intégrations. Ainsin
 marquant par un trait les quantités qui se rapportent au commencement des
 intégrales totales désignées par 5, & par deux traits celles qui se rapportent à
 la fin de ces intégrales on aura les réductions suivantes, $\int_a^b S(x) dx = S(b) - S(a)$
 — ci 'Sx' — S Sxdsi Ssxd'S^x=^aci"d Sx"-- 'd a" s x"— a'd^oc' &c.
 lesquelles serviront à faire disparaître toutes les différentielles des
 variations qui pourront se trouver sous le Hgne S, Ces réductions constituent
 le fécond principe fondamental du calcul des variations, ' ■ T 8« I'e cette
 manière donc 1 équation générale de Téqu^u libre se réduira A Li forme
 suivante, 5 (n «r jc s -t* * «T^l^) H- A «sa o , dans laquelle n»s» ^ feront
 des fonctions de x, ^, !(» &c de leurs différentielles , & a contiendra les
 termes affectés des variations /jc', Sx\ y, &c, & de leurs différentielles.
 Donc pour que cette équation ait lieu , indépendamment des variations des
 différentes coordonnées, il faudra que l'on ait J% 2, nuls dans toute
 l'étendue de l'intégrale J , , c'est-à-dire Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 25.65% accurate

•PaZMI£R£ Pa-rtie. 57 c'est-i-dire, dans chaque point de la fna0c, 2^ chaque terme de a audi égal à zéro. Les équations inckhnics n c=7 o , s = o, •«'*=r o, donneront en général la relation qui doit se trouver entre les variables Jc,y, ^; mais il faudra pour cela en éliminer les variables indéterminées a «a*, &c ^lequeiles font 6n mcme nombre que les équations de condition indéterminées X as ilf»Oy&c. (art. 14).. Or je remarque que ces équations ne fauroient être au-deJà de trois; car puifque ce (ont des équations indéfinies entre les trois variables » » y> &leursdifi'érentiel!es » il eft clair que s'il y en avoit plus de trois, on auroit plus d'équations que. de variables ; enforcc qu'il faudroit que la quatrième fût une fuite néceffaire des trois premières , ôc ainfi des autres. Donc il n*y aura jamais plus de trois indéterminées, /w, »' i éliminer; enforcc qu'on pourra toujours trouver les valeurs de ces indéterminées en fondions de a-, j/-, Au refte les équations qui difparoîtront par ces éliminations, feront remplacées par les équations mêmes de condition , moyennant quoi on pourra «oujours conoditre les valeurs dex^y^^y qui, doivent avoir lieu dans l'état d'équilibre de tout le fyftême. A l'égard des autres équations réfultaotes des diFérens termes de la quantité a, ce ne feront que des équations particulières qui ne devront avoir lieu que par rapport à <les points déterminés de la maflè , fie qui (èrviront principalement \ déterminer les confiantes arbitraires que les expreffions de Jc,^',^, déduites des équations précédentes, pourront contenir. Pour faire ufage de ces équations , on y fubli* tuera donc les valeurs déjà trouvées de a,/w, &c, enfuire on en éliminera les indéterminées «^jB^&Ci&oiyy joindra H Digilized by Google

The text on this page is estimated to be only 21.00% accurate

58 MÉCANIQUE ANALITIQUE. les équations de condition A
so, J?Bsio«&c, quî (êrviront à remplacer celles que l'élimination donc il
s'agit fera diffiarbître. I 9. Enfin on fera ici par rapport aux coordonnées
recta! : ^Ics , la même remarque qu'on a déjà faite à la fin de la seconde
Section, en appliquant aux variations $\delta x^i \delta y^j \delta z^k$, ce que nous y avons dit
relativement aux différences $dx^i dy^j dz^k$ mais pour ce qui regarde les
différentielles $dx^i dy^j dz^k$ la méthode de la Section précédente , il ne fera pas
permis d'employer à leur place d'autres différentielles » à moins qu'elles ne
résultent de la différentiation des « expressions finies de x^i, y^j, z^k .

CINQUIÈME SECTION. Solution de différents problèmes de Statique. Nous
allons présentement montrer l'usage de nos méthodes dans différents
problèmes sur l'équilibre des corps ; on verra par l'uniformité & la rigidité
des solutions, combien ces méthodes (ont supérieures à celles que l'on avoit
employées jusqu'ici dans la Statique. PALLADIAPHE PHEIFXBH. De
l'équilibre de plusieurs forces appliquées à un même point ; de la
composition & de la décomposition des forces, I . On va s'agiler de trouver
les lois de l'équilibre d'autant de forces qu'on voudra, $P, Q, R, \dots$, toutes
appliquées à un même point, & dirigées à des points donnés. Digitized by
Google

The text on this page is estimated to be only 15.82% accurate

. P K B M» I E R E Partie. Nommanç/, y, r, &c, les distaices
 reûilignes entre le point commun d'application de ces forces » & leurs
 points de tendance, on aura la formule • Qdq-^ Rdr-h ^c. pour la (omme des
 m o mens de toutes les forces, lacjuclle doit être nulle dans l'état d équilibre.
 2. Soient y, ^les trois coordonnées reflanglcs du point ' auquel toutes les
 forces font appliquées; & fbient de même i2 , /j, c les coordonnées
 re6banglcs pour le point auquel tend Ja force P ; f^gy A, celles du point
 auquel tend Ja force Q \/, m^n celles du point auquel tend la force /? , &:
 ainfi des autres ; ces coordonnées étant toutes rapportées aux mêmes axes
 tixes dans rcfpacc. On aura évidemment r« (x — /)• -H (j^ — " ^j* H- C î —
 &c. Et la quantité Pdp -♦•Ç</yH-jR<^r-l-&c,fe transformera en celle-ci ,
 dans laquelle on aura : .• r — ^ p + O « ^- «ce U n e(l pas inutile de
 remarquer dans ces expreiïions que Hi

The text on this page is estimated to be only 17.35% accurate

6q Mécanique analitique. les quantités $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ égales aux cosinus des angles que la ligne f fait avec les axes des x, y, z ; que de même, $\cos \alpha', \cos \beta', \cos \gamma'$ font les cosinus des angles que la direction de la force Q fait avec les mêmes axes; &c: ainsi <ic iuite (Se«St. i, art. 7). 5 . Cela posé , supposons en premier lieu que le corps ou point auquel les forces P, Q, R , sont appliquées, soit entièrement libre; il n'y aura alors aucune équation de condition entre les coordonnées x, y, z ; & la quantité $Xdx + Ydy + Zdz$ être nulle , indépendamment des valeurs dx, dy, dz (Seâ. i, art. 9) ; ce qui donnera sur le champ ces trois équations particulières , $\frac{\partial X}{\partial x} = 0, \frac{\partial Y}{\partial y} = 0, \frac{\partial Z}{\partial z} = 0$. Ce sont les équations qui renferment les lois de l'équilibre de tant de forces qu'on voudra concourantes à un même point. 4. Si dans les expressions de X, Y, Z , on fait $P = p, Q = q, R = r$ &c j (ce qui est permis, puisqu'il est indifférent à quels points pris dans les directions des forces , elles soient supposées tendre) on aura ces équations , $\frac{\partial X}{\partial x} = 0, \frac{\partial Y}{\partial y} = 0, \frac{\partial Z}{\partial z} = 0$; d'où il l'on tire , en supposant que le nombre des forces

Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 28.18% accurate

P R BMIBRE PaJLTII. 6t , c-l-â>fB-l-tce. î ; . . & ces expreilions de $jc, ^, ^$, font voir que le point auquel font appliquées les forces » est dans le centre de gravité des points auxquels ces forces tendent. De-U résulte le théorème de Leibnitz, que si tant de puissances qu'on voudra (ont en équilibre sur un point, &c qu'on * tire de ce point des droites qui représentent tant la quantité que la direction de chaque puissance, le point dont il s'agit fera le centre de gravité de tous les points auxquels ces lignes feront terminées. Si donc il y a que quatre puissances» & qu'on imagine une pyramide dont les quatre angles soient aux extrémités des droites qui représentent les puissances; il y aura équilibre entre ces quatre puissances, lorsque le point sur lequel elles agissent , fera dans le centre de gravité de la pyramide ; car on fait par la Géométrie, que le centre de gravité de toute la pyramide, est le même que celui de quatre corps égaux qui feroient placés aux quatre coins de la pyramide. Ce dernier théorème est dû à Roberval. 5 • Si on considère l'équation laquelle étant identique (art. 1), doit par conséquent avoir lieu en général, quelles que soient les différences $dx^{\wedge} dy^{\wedge}$ il est clair qu'on pourra la regarder comme l'équation de l'équilibre entre les puissances K , &c, dirigées suivant les

The text on this page is estimated to be only 18.60% accurate

61 MÉCHANIQUE ANALITIQUE. t lignes $\wedge$, r, &c, & les
 puîTances $Y^{\wedge}Z^{\wedge}$ dirigées fuiv.int les lignes — a:, — $\wedge$, — toutes ces
 puiflances étant a[p'i v]uccs à un même point. Donc les trois piuflances $y^{\wedge}Z^{\wedge}$
 font équilibre aux pui (Tances $Q_y R_y$ mais il ell vilible que les puillanc.s
 $A\% J', Z$, étant appliquées fuivant les direclions des lignes $x^{\wedge}$, te roient
 aulli équilibre aux mêmes puillanccs A, 1\ Z, mais dirigées fuivaic $\wedge$ — —
 $\wedge$; donc elles feront équivalences aux puilTances . P, $Q^{\wedge}R^{\wedge}$ D't il il s'enfuit
 que les quantités X, $V^{\wedge}Z^{\wedge}$ ne font autre chofe que les valeurs des
 puiflances P, Ç, 7?, ficc, réduites aux direciions des trois coordonnées
 rectangles $\wedge^{\wedge}\wedge^{\wedge}$ t» $\wedge$ tendantes à diminuer ces coordonnées» 6c les formules
 de l'article i donnent par ironféquent un moyen fort fimple de faire cette
 rédudUon, c'est-à-dire» de trouver les réfultantê; de tant de forces qu'on
 voudra qui concourent dans un même point, ôc qui aient des dire^kioos
 quelconques. - ■ 6. En général fi des forces quelconques P, Ç, ii, &c,
 dirigées fuivant les lignes $p^{\wedge}q^{\wedge}$ fy agifTent.fur un même point, & qu'on
 veuille réduire toutes ces forces à trois autres, s, dirigées fuivanc les lignes
 $r^{\wedge}$ il n*y aura qu'à confidécér l'équilibre des forces P, iî, &c, & r, n, :i,
 nppliqucs \ ce même point, & dirigées refpééVivement fuivanc les lignes $p^{\wedge}q^{\wedge}$
 $\hat{q} \hat{OCC}$, — $\wedge$, — y — fie former en confcquence l'équation, $\wedge$ laquelle
 doit être vraie de quelque manière qu'on fafle varier la polîcion du point de
 coneours de toutes les forces. Or quelles que foient les lignes[^] 't il eil clair,
 que pourvu Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 19.60% accurate

Première. Partie, 6^e qu'elles ne soient pas n^outes dans un même plan y elles fussent pour déterminer la position de ce point ; par conséquent on pourra toujours exprimer les liVncs p^r, &c, par des fonctions de^a, ■a', <r, & réquarior. prccc Jciice cl^{vi}.i alors avoir lieu , par rapport aux variations de chacune lie ces trois quantités en particulier; d'où il s'enfuit qu'on aura Ces formules peuvent être d'une grande utilité dans plu(teurs occasions, & fur- tout lorsqu'il s'agit de trouver les résultantes d'une infinité de forces qui agissent sur un même point , comme l'attraction d'un corps de figure quelconque, &c. 7. Si Ton veut que les directions des forces résultantes passent par des points donnés; alors nommant «(t),e,> les coordonnées rectangles du point auquel doit tendre la force & de même t, », & ^> a»> "> les coordonnées rectangles des points de tendance des forces n & s, on fera & Ton tirera de ces équations les valeurs de x, y, ^, en ^»"»> qu'on substituera ensuite dans les expressions de ^, ^ y r» fccc , de l'article i.

The text on this page is estimated to be only 21.50% accurate

'^4 MÉCANIQUE ANALITIQUE. On pourroit encore
 considérer directement les quantités p , q , y , r , & T y comme des fonctions
 de x & faisant varier chacune de ces trois quantités à part, on auroit CCS
 équations. -T- r^n par lesquelles on connoitra les trois forces r , n , s . Si la
 force s doit être dirigée comme auparavant à un point fixe, mais que les
 deux autres forces n & s doivent être perpendiculaires à celle-là dans des
 plans donnés; alors on prendroit pour « 8c r les arcs de cercle décrits du
 rayon r dans les plans dont il s'agit ; pour cela on regardera la droite . r
 comme un rayon vecteur, & nommant ϕ les angles que ce rayon fait avec
 des plans perpendiculaires aux plans donnés 9 il est clair qu'on aura
 $\frac{dr}{dt} = r \sin \phi$; d'ailleurs on pourra toujours , par les trois variables ϕ , θ
 & ψ , déterminer la position du point auquel les forces sont appliquées; par
 conséquent on pourra exprimer les lignes r , par des Fonctions de ces mêmes
 variables ; car il n'y aura pour cela qu'à exprimer d'abord les coordonnées
 rectangulaires x , y , z en ' ϕ ' & θ & substituer ensuite ces expressions dans celles
 de p , q , r , s . Considérant donc la variabilité de ϕ & θ on aura les
 trois équations» Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 23.17% accurate

. P j i E M I £ R E Partie. 6f On vole par-là comment on doit prendre dans tous les cas ièmbables, &c combien la méthode précédente est utile pour trouver les réfultantés de tant de forces qu'on voudra , & les réduire à des direéHons données. §. Reprenons les formules de l'article 2 , & Tuppcfons en iCecond lieu cjue le corps ou point sur lequel agissent les forces P, Q, Ry &c, ne soit pas to)it-à-fait libre» mais qu'il (bit contraint de Ce mouvoir iùr' une surface, ou sur une ligne donnée; on aura alors entre les coordonnées x, y, z une ou deux équations de condition, qui ne feront autre chose que les. équations mêmes de la surface ou de la ligne dont il . s'agit. Soit donc Z la o réquatipn de la surface sur laquelle le corps ne peut que glisser , on ajoutera à la somme des momens des forces $Xx + Yy + Zz$ le terme (Sect. quatrième, art. 4) $\int Xdx + Ydy + Zdz$ où l'on aura pour l'équation générale de l'équilibre $Xdx + Ydy + Zdz = 0$ X étant une quantité indéterminée. . Or L étant une fonction connue de x, y, z on aura par la différentiation » donc substituant U égalant ensuite séparément à zéro la somme des termes multipliés par chacune des différences dx, dy, dz on aura ces trois équations particulières de l'équilibre

The text on this page is estimated to be only 18.94% accurate

66 MÉCHANIQUE ANALITIQUE, dL d'ouchalTant
 rindéterminée a, on aura ces deux-çâ. > • d* dy * --^ -dT-^—'^'^r , .
 Icrquelles renferment par conféquent les cōndiâ6ti\$ cherchées de l'équilibre
 du corps fur la furface propofée. 9. Si on applique maintenant ici k théorie
 donnée daos farticle 7 de la Section quatrième , on en conclura que la
 furhice doit oppofer au corps une réfiftancc égale à •-^((4f)'-* -C-^)+(4|)"). •
 ■ & dirigée luivrint la perpendiculaire à la furface qui auroit pour équation
 $\frac{^}{Z} == 0$, c'eft-à-dirc , perpendiculairement à la même furface iur laquelle le
 corps elk pofé; Éc comme on a • dL ' ir » dl» . . "«r , ildx ' rfy . ^ d\ ' il
 s'enfuit que la preflion du corps fur la furface (preffion qui doit être égale
 & direâement contraire à la réfiftance de la furface) fera exprimée par |; (X'
 -H 1^' «4- } , & agira perpendiculairement à la même furface; c*eft
 uniquement à cette condition que ît rédoifent les deux . équations trouvées
 ci^defTus pour Téquilibre du corps , comme on peut s'en àTurer par la
 méthode de la compontion dcî forces. 10. Au rcfte dans le cas d'un feul
 corps tiré par des puiHances données , on peut trouver encore plus
 ilmplement Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 13.26% accurate

Première Partie. 6y les conditions de l'équilibre, en substituant immédiatement dans l'équation $Xdx' + Ydy - Zdz = vmo$ à la place de la différentielle de la fonction donnée sur laquelle le corps peut glisser, & égalant ensuite séparément à zéro les coefficients des différentielles dx, dy, dz qui deviendront indéterminées» suivant la méthode générale de Tartu de la section Seconde. On aura ainsi pour le champ les deux équations $Xdx + Ydy - Zdz = 0$ & $Xdx' + Ydy' - Zdz' = 0$ qui reviennent au même que celles qu'on a trouvées plus haut. Pareillement si le corps étoit assujéti à se mouvoir sur une ligne de figure donnée, & déterminée par les deux équations différentielles $dy = p dx$ & $dz = q dx$, il n'y auroit qu'à substituer ces valeurs de dy & dz dans $Xdx' + Ydy' - Zdz' = 0$ & l'on auroit, en divisant par dx $X + Yp - Zq = 0$ pour la condition de l'équilibre. Mais dans tous les cas où il y aura plusieurs corps en équilibre, la méthode des coefficients indéterminés exposée II

The text on this page is estimated to be only 20.95% accurate

6S MÉCHANIQUE ANALITIQUE. dans la Section précédente aura toujours l'avantage tant du côté de la simplicité que de celui de la simplicité de détermination. du calcul. §. 11. De l'équilibre de plusieurs forces appliquées à un système de corps considérés comme des joints & liés entre eux par des fils ou par des surfaces. Quelles que soient les forces qui agissent sur chaque corps, nous avons vu ci-dessus, (art. i, 5) comment on peut toujours les réduire à trois. Si ces trois sont dirigées suivant les trois coordonnées rectangulaires du même corps, les tendances à diminuer ces coordonnées. Nous supposons donc pour plus de simplicité, ici que dans la suite, que toutes les forces extérieures qui agissent sur un même point, soient réduites à ces trois X, Y, Z . Ainsi la somme des moments de ces forces sera exprimée par la formule $Xdx + Ydy + Zdz$; par conséquent la somme totale des moments de toutes les forces du système, sera exprimée par la somme d'autant de formules semblables qu'il y aura de corps ou points mobiles, en marquant par un, deux, trois, etc. traits, les quantités qui se rapportent aux différents corps que nous nommerons premier, second, troisième, &c. De cette manière on aura donc pour la somme des moments des forces qui agissent sur trois ou sur un plus grand nombre de corps, la quantité $Xdx + Ydy + Zdz + X'dx' + Y'dy' + Z'dz' + \dots + X''dx'' + Y''dy'' + Z''dz'' + \dots$

Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 19.38% accurate

P K E M I E R E Partie. t f p . Et il ne s'agit plus que de chercher les équations de condition $X \ll BO, ATa Nss \gg$ Ot xéfulcantes de la nature du problème. Ayaoc X, Af, JV, &c, ou feulement leurs différentielles en fondions de ae', y, y, α, β prenant des coefficients indéterminés $a, b, c, \dots$, on ajoutera à la quantité précédente les termes $xdL dM + f dN$, & on égalera ensuite séparément à zéro les menbres affectés de chacune des différences dy, dx, dz , &c, (Sed. précéd. 12, Considérons premièrement j Crois corps attachés fixement à un fil inextensible; les conditions du problème font que les distances entre le premier U le second corps, U entre le second & le troisième Seme fbient invariables, ces distances étant les longueurs des portions de fil intercutées entre les corps. Nommant / la première de ces deux distances, & g la seconde, on aura $df = 0, dg = 0$ pour les équations de condition; donc $JL = dfy dM + dg^{\wedge} f^{\wedge}$ f c l'équation générale de l'équilibre des trois corps fera $Y'dy - z'di - X'' dx + H - ruy - z'' d^{\wedge}$. Or il est visible qu'on aura donc en différentiant $. dg^{\wedge} f$

The text on this page is estimated to be only 15.83% accurate

MÉCHANIQUE ANALITIQUE⁴ ces valeurs étant déterminées, on aura les neuf équations suivantes pour les conditions de l'équilibre du fil»
-X''' — A. v' J m z''' i. ^C1^ «10, t ic il n'y aura plus qu'à éliminer de ces équations les deux inconnues x & /«\$ ce qui peut se faire de plusieurs manières » les (quelles) fourniront aussi des équations différences, ou présentées différemment pour l'équilibre des trois corps attachés au fil ; nous choisirons celle qui paraîtra la plus simple. Il est d'abord visible que si on ajoute respectivement les trois premières équations aux trois suivantes, & aux trois dernières, on obtient ces trois-ci délivrées des inconnues

Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 16.56% accurate

Première Partie. 7r kTqueUes montrent que la somme de toutes les forces parallèles à chacun des trois axes des coordonnées doit être nulle. Il ne reste donc plus qu'à trouver quatre autres équations; pour cela faisons abstraction des trois premières, j'ajoute respectivement les trois du milieu aux trois dernières » j'ai celles-ci où ne trouve plus ; $r^2 = r'^2 + r''^2 - 2r'r'' \cos \theta$ & qui par l'élimination de r donnent les deux suivantes $r''^2 - H r'' - (x^2 + y^2 - H X) = 0$ & $2'' H - Z'' - \{X''hX''\} = 0$. Enfin considérant séparément les trois dernières équations qui contiennent r & éliminant on aura ces deux autres-ci » $1) - III \_ \gg / \bullet *$ Ces sept équations renferment les conditions nécessaires pour l'équilibre des trois corps. 1 3. Si le fil suppose toujours inextensible , étoit chargé de quatre corps » animés respectivement par les forces $X^i y^i Z^i X^{*i} F^i, Z^i X^0$ &c, suivant les directions des trois axes des coordonnées rectangulaires , on trouveroit par

The text on this page is estimated to be only 26.11% accurate

72 MACHANIQUE ANALYTIQUE. des procédés (semblables, qu'il me parût inutile de répéter» les neuf équations* suivantes pour rééquilibre de ces quatre corps, $Z' - H Z'' Z''' \wedge Z' \wedge O Z' \gg \wedge Z''' Z'' - \{X'' \wedge X' \wedge X'' = O r \wedge \wedge r \wedge \wedge \zeta \wedge (X'' \wedge x n = \wedge O r \wedge \wedge y \wedge \wedge \wedge X' \wedge = \wedge O$ Il est facile maintenant d'étendre cette solution à tout nombre de corps qu'on voudra, &c même au cas de la funiculaire ou chaînette ; mais nous traiterons ce cas en particulier y par la méthode exposée à la fin de la Section précédente. 14. Si on veut que le premier corps fut fixe, alors les différences $dx', \wedge d(-$ feroient nulles & les termes affectés de ces différences disparaîtroient d'eux mêmes dans l'équation générale de l'équilibre. Ainsi les trois premières équations, faToir, JP 1. $(jc''_x') = O, r' - j(-y) = \ll 0, -y - iX' \wedge il) \wedge OyoWoien$ point lieu donc les équations Digitized by Gopgle

The text on this page is estimated to be only 21.79% accurate

PjtsMiřL£ Partie.' 73 dons JP ^- JK» H- 2C^^ «ce =s o, r -f. F'
H- r "h- «ce =- o , Z'^-f- Z'^^ Z'***\» dcc a o , h'aaroient pas lieu non plus
mais toutes les autres demeure roient les mêmes. Ce cas eft, comme l'on
voit, celui où le til ieroic attaché fixement par une de fes extrémités, & n le
H^étoit attaché par fes deux extrémités , alors on auroit non-feulement = o,
dy =^o, cî-(sss mais aulî dx" ss= G , dy" "««^ = o , =3 o ; & les termes
affedés de ces iix diff<irences dans l'équation générale de l'équilibre «
dilparoîtroient, feroient par conféquent difparoître auflî les Gsi équations
particulières qui en dépendent; 1 5. En général li les deux extrémités du fil
n'étoient pas tout-à-fait libres, mais quelles fuflent attachées k des points
mobiles fuivant une loi donnée ; cetré loi exprimée analitiquement,
donneroit une ou plufieurs équations entre les différences dx! ^ dy^ d-(qui
fe rapportent au premier coj^s» & les différences dx'^'^y *"> "i *S ^ ^® "P
portent au dernier; 6c il fkudroit ajouter ces équations multipliées chacune
par un nouveau coefficient indéterminé , i r^uation générale de Téquilibre
trouvée plus haut; ou bien on fubftitueroit dans cette équation générale ^ la
valeur d'une ou de plufieurs de ces difiFérences» tirée des équations dont il
s*agit , & on égaleroit enfuite à téro le coefficient de chacune de celles qui
reftent, ainî qu'on a fait ci-defTus (art. 9). Comme cela n'a aucune difficulté
y nous ne nous y arrêterons pas. I (5^ Si on vouloir çonnoître les forces qui
proviennent de la rcadion du fil fur les différens corpSj il n'y auroit qu'à
fiûre ufage de la méthode donnée pour-cet objet dani USeét précédente {m*
7). ■

The text on this page is estimated to be only 18.65% accurate

74 MÉCHANIQUE ANALITIQUE. On considérera, donc que l'on a dans le cas précédent &c. ' Donc 1° on aura par rapport au premier corps dont les coordonnées sont V, y , « $\frac{1}{r-H} V'$ » Ainsi le premier corps recevra par l'action des autres une force Bs / , & dont la direction sera perpendiculaire à la surface représentée par l'équation $dL = 0$ en y faisant varier finement or il est visible que cette surface n'est autre chose qu'une sphère dont le rayon est r , & dont le centre répond aux coordonnées x', y' , par conséquent la force y (être dirigée fuyant ce même rayon, c'est-à-dire à le long du fil qui joint le premier au second corps. On aura de même par rapport au second corps, dont les coordonnées sont x, y ; = » $y' = -\frac{y}{r}$ » — j 9 On a $K((-r')-r).+(-r'n$. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 23.74% accurate

d'où il s'ensuit que le second corps reçoit une force A , dirigée perpendiculairement à la surface dont l'équation est $z = 0$, en faisant varier x, y, z mais cette surface est de nouveau une sphère donc le rayon est y , mais donc le centre répondra aux coordonnées du premier corps; par conséquent la force a qui agit sur le second corps, sera aussi dirigée suivant le fil / qui joint ce corps au premier. 3°. On trouve de plus, par rapport au second corps $\frac{1}{r^2}$; donc $\frac{1}{((4r)^2 - (r^2)^2)} = \dots$. De sorte que le second corps sera poussé de plus par une force $=$ dont la direction sera perpendiculaire à la surface représentée par l'équation $z = 0$, en faisant varier x, y , cette surface n'étant autre chose qu'une sphère donc le rayon est il s'ensuit que la direction de la force f sera, suivant ce rayon» c'est-à-dire, suivant le fil qui joint le second corps au premier. On fera le même raisonnement par rapport aux autres corps, & on en tirera des conclusions semblables. 17. Il est évident que la force x produite dans le premier corps, suivant la direction du fil qui joint ce corps au suivant, & la force égale $^$, mais directement contraire, qui agit sur le second corps « Toitôt la direction du même fil » ne peuvent être que les forces qui résultent de la réaction de ce fil sur les deux corps, c'est-à-dire de la tension que K %

The text on this page is estimated to be only 28.94% accurate

7[^] MicHANTQUB ANALITlQUÿ!. foQjffre la portion du fil interceptée entre le premier & le fécond corps; de sorte que le coefficient a exprimera la quack tité de cette tension. £[^] même le coefficient m exprimera la tension de la portion du fil interceptée entre le lecond ^ le troisieme corps , ainsi de suite. Au reste[^] on a supposé tacitement dans la solution du problème dont il s'agit , que chaque portion du fil étoit , non-seulement inextensible, mais aussi roide, en sorte qu'elle conservoit toujours la même longueur; par conséquent les forces XyM« &c, n'exprimeront les tensions qu'autant qu'elles tendront à rapprocher les corps; mais si elles tendoient à les éloigner l'un de l'autre » alors elles exprimeroient plutôt les résistances que le fil doit opposer au corps par le moyen de sa roideur, ou incompressibilité. I 8* Pour confirmer ce que nous venons de démonstrer , et pour donner en même-tems une nouvelle application de nos méthodes, nous supposons que le fil auquel les corps sont attachés, soit élastique & susceptible d'extension & de contraction; & que F,G ^ Scc[^] soient les forces de contraction des portions du fil &c, interceptées entre le premier & le fécond corps, entre le fécond & le troisieme, &c. , Il est clair par ce qu'on a dit dans l'article 5 de la Section précédente, que les forces #*, 6cc, donneront les momens $\int f d^s G d^s g^s$ &c. Il faudra donc ajouter ces momens à ceux qui viennent de l'addition des forces étrangères, & que nous avons vu plus haut, être représentés par la formule $X' \text{ à } x' Y' dy' ^s , ' Z'd-(\backslash X'd=<!' ^s Y''\text{à} y'' -f- ZU'^{-}- X''4i'^{-} Y''dy'' ^s Z'dj'^{-} \hat{o} i Q$ (art. 10), pour avoir la somme totale des

The text on this page is estimated to be only 14.33% accurate

»■ f l» t P R E M I 16 K E Partie. 55; inomeDS du fyllême; Se
comme il n'y a d'ailleurs aucune condition particulière à remplir »
relativement k la diipofitioit des corps, on aura l'équation générale de
l'équilibre en égalant l'implemenc à xéro la fomme dont il s'agit, donc $X'^x'^$
 $Y'dy^-T di -If X' do(!' -H T'dy' -f- Z'Vij'^i X^{dod}''-^ Y'^d^-^-Z^{di}''^ ^-$
 $hFdfH-GdgJh \&c$ « o, Su1>ftituant les valenrB de d/, dg , &c , trouvées d-
deflms (arc. II), & égalant à xéro la fomme des termes afTeâés de chacune
des diiFérences • </x' , d/ , &c, on aura les équations fui vantes pour
l'équilibre du fil, dans le cas. dont il «agit. • • - f ■ • • f . ' jp^ |. C(«'''-^J -
0 ^ • • • • iefquelles font, comme l'on voit, analogues à celles du même
article, pour le cas où le ^ eft inexceflible, en fupposant A5jP,ms ^> to* ' ^
Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 16.98% accurate

7^ MlfecâÀ>fiQus arali^iqIje; D'où ion ▼ ôic qtie les qàancîciés
 G , Sec , qui expriment ici les forces des fils fuppôtès îlaftic^ues, font les
 mêmes que celles que nous avons trouvées ci-defTus (art. 16), pour
 exprimer les forces des mêmes fils , dans la fupporidon (qu'ils {bkat
 inextenûbles. " * * ip. Repc^eikofts 'tfntofre le cas d'nft â inextenfible
 chargé de trois -corps y mais Aippofons en même tems que le corps du
 milieu puîffe couler le long du fil ; dans ce cas la condition du problème
 fera <]ue la fomme des diftances entre le premier 6C le fécond corps, &
 entre le fécond & le troifieine foit conilance^ ainH nommant comme ci-
 deflus f U g ces didances, on flDua/«-h^ ^ coafb, U par coip Céqutnt df-
 ^dg^o. On mnpliefâ donc la quantité diflôitîeBe df^ég par un coefficient
 indéterminé a > & on fa]ûtera i la fomme des momens des différentes
 forces qu'on fuppofe agir fur les corps , ce <jui donnera cette équation
 générale de l'équilibre » . . d*ou (en fubftituant les v^nt de il f Se dgy U
 égalant \ zéro la fomme des termes affectés de chacune des différences dx!
 y dy £(c) , on tirera les équations fuivances pour l'équilibre du fil >

The text on this page is estimated to be only 19.40% accurate

K s 11 X B A s P A U 1 B.- . $7^\wedge$, $1' * -7'' -1''$ dans lesquelles il n'y
 aura plus qu'à éliminer l'inconnue $>$. On voit par-là comment il faudroit s'y
 prendre , s'il y avoit un plus grand nombre de corps donc les uns fufTènt
 attachés fixement au fil » & dont les autres y puilènt couler lihremenc» . m
 % •••• AO. Suppoiôns jnamfeaanc que les croîs corps (oient uott par une
 $^\wedge$ erge infleadUe, enforte qu'ils foienc obligés de garder toujours entr $^\wedge$ eux
 les mêmes diftances ; il faudra dans ce cas que l'on ait non-feulement d/ o
 Se d g = o, mais que la différentielle de la diftance encre le premier & le
 troifieme corps que nous défignerons par h , foit auflî nulle ; par conféquent
 en prenant trois coëfficiens indéterminés, ' A, on aura cette équation
 générale de l'équilibre, $xd^\wedge -4- r > dy -h z'j^\wedge -4- xu^\wedge -H r'dy z'^\wedge d:^\wedge$ Les
 valeurs àe df bi dg ont déjà été données ci-deiTus; à r $^\wedge$ ard de celle de dh, il
 eft clair qu'on aura

* & par conséquent Fai(anc ces fabitimiôns , & égalant \ zéro la (bmine des termes affefbés de chacune des différences </y, &c, ou aura ces neuf équations particulières \i ••• • . ■* - *r7 — '-T— g h * d*oîi il faudra éliminer les trois inconnues indéterminées . > , M , > , cnforte qu'il ne rçftçrg qu^ équati pns p.our les . conditions de l'équilibre. ^ . • a I . D'abord il ei(clair par la forme même de ces équations, qu'en ajoutant refpeûivement les trois preoieres aux trois fuivantes 8cenfuice aux trois dernières , on obtient fu^r le champ trois équations dclÎTréesdcA,/*, lesquelles feront Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 15.87% accurate

]P&sMisâ8 Partis. St Rien n'est plus facile que de trouver encore trois autres équations par l'élimination de x , $/^*$, r ; mais pour y parvenir de la manière la plus simple & la plus générale, je commence par déduire des équations ci-dessus, ces neuf transformées y^v — « $V f H^{111}{}^{11}$ -lit $j^{''-y/}$., Z^L -ili. --;*Xy— JU-« $\langle \rangle$, lesquelles étant, comme Ton voit, analogues aux équations primitives, donneront de la même manière, par la simple addition, ces trois-ci, L

The text on this page is estimated to be only 22.93% accurate

8à MiCHAÏIQTÏTB AKALITIQUÊ. — $-^y H- y'' f - ^y''' f'$
 — $^y'' ^*$ Les trois premières équations montrent que la Somme des forces
 parallèles à chacun des trois axes des coordonnées, doit être nulle; & les
 trois dernières renferment le principe connu des momens (en entendant par
 moment le produit de la puissance par son bras de levier) par lequel il faut
 que la somme des momens de toutes les forces, pour faire tourner le
 système autour de chacun des trois axes, soit aussi nulle. 2 a. Si le premier
 corps étoit fixe, alors les différentielles dx, dy, dz seroient nulles, & les trois
 premières des neuf équations de l'article 20 n'existeroient pas; il n'y auroit
 donc alors que six équations » qui par l'élimination des trois inconnues a, b, c
 se réduiroient à trois. Pour arriver à ces trois équations, on peut s'y
 prendre d'une manière analogue à celle dont on s'est servi pour trouver les
 trois dernières équations de l'article 21, pourvu qu'on ait soin de faire
 en sorte que les transformées ne renferment point les indéterminées x, y, z qui
 entrent dans les trois premières dont il faut faire maintenant abstraction; or
 c'est ce que l'on obtiendra par ces combinaisons, " Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 15.66% accurate

$P_k B K I s X s f A S r i t. S_3 l^k W) - 2'''(y''' - y_j - H'' (\bullet i''' - i'; f y'' - y; -$
 $r v'' w; f r - t''; \_ \& \text{ si l'on ajoute maintenant les trois premières de ces}$
transformées aux trois dernières, on aura sur le champ ces trois-ci, $\bullet X''$
 $(y'' - y')' - r''(x'' - \sim x') + X''' (y'''^{\wedge}) - r'''(x''' - x')^{\wedge} o \bullet$ Ici il y aura toujours
lieu, quel que soit l'ordre du premier co-ordonné, puisqu'elles sont indépendantes
des équations relatives à 00 corps*. Ces équations renferment, comme l'on
voit, le même principe des moments, mais par rapport à des axes qui
passent par le premier corps. 2 3* Supposons qu'il y ait un quatrième
corps attaché à la même verge inflexible, pour lequel les coordonnées
rectangles soient $j c'^*$, y''' , z''' , & les forces parallèles à ces coordonnées A''
 $, 1, *$. Il faudra donc ajouter à la somme des moments des forces la
quantité $X''' dx''' - Y''' dy''' - Z''' dz'''$ ensuite, comme les distances entre tous
les corps doivent demeurer constantes, on aura par les conditions du
problème, $non \{ \dot{e} a \dot{< }^{\wedge} \text{lement } d f^{\wedge} o, d g^{\wedge} o, \dot{< } / A \dot{< } o$, comme dans le cas
précédent; mais au lieu de $d l^{\wedge} o, d m^{\wedge} o^{\wedge} d n = a O y$ en nommant $/, m, A$ les
distances du quatrième corps aux trois précédents. Ainsi l'équation
générale de l'équilibre sera dans ce cas La Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 11.11% accurate

\$4 MéCHAN-IQUS ANAtITXQUE, ^ X "dx^'-^y
""dy""^Z""df^X"dx"-^Y'Uy""^Z"d:Crh^df^ t^dg ^fdh'^ndl^f dm *- r s o.
Les valeurs de dfy dgydh font les mêmes que ci-<icflus> quant à celles de
dl^ dm^ dn ^ il est vilible qu'on aura . / = V (x'^^ x'/t- (y- y/:*- d'- i / . mm:^
V (pt-^ ^7-^ ry— /'•+■ rt"- HT & par conféquent, . : . m C^f—jt"") (dx^—
dx"") -h ry— (dy'^-dy") (di""!' di"" } _ Faifant ces fubditutions » & égalant à
zéro la fomme de 9 termes affeâés de chacune des différences «/x^» </y, &c,
on trouvera douze équations particulières » - dont les neuf premières feront
les mêmes que celles de l'article ao, en afoutant refpeâivement à leurs
premiers membres les quantités AuvanteSy ' — »' y —y t'^ — x' m ' m * *
H dont les trois dernières feront uiyiiized by Google

The text on this page is estimated to be only 22.62% accurate

r Première Partie. 8^e R E M l y" l r = 0 II m it .as7 0 "H ' «= O. A
 4* Comme il y a en tout douze équations, & qu'il y y a fix indéterminées,
 x, /«, f, v, p, r à éliminer, il ne restera pour les conditions de l'équilibre, que
 six équations finales comme dans le cas de trois corps ; & on trouvera par
 une méthode {cmMablc à celle de l'article ii , ces cijuacioiis analogues à
 celle:» de cet article, y/ r F'^ = o Y' i—zy^ Y"i' z"f^Y""i"z"f^ r" z'y^ « o.
 Au lieu des trois dernières, on pourra auin subftituer les trois fuivantes,
 qu'on trouvera par la méthode de l'article Al , & qui étant indépendantes des
 équations relatives au premier corps , ont l'avantage d'avoir toujours lieu ,
 quel que foit l'état de ce corps, H- X"" — y> — i'^ Y*"" — — o , X" fï" —
 — z" (x" — x'j ^ X"" (f^ ^y—z' Y^""- ^) -X (f — i) — Z"" (^x"- 0 .
 Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 26.78% accurate

} S6 MicHANIQUE ANAtiTIQUE. y''i' - i) - z'ry-yj + ^:"Yî"' - i-;
 -2''' (y- y} H- y- (i - - iV - Z''- (y -y) « o. 25. On voit maintenant comment
 il faudroit s'y prendre pour trouver les conditions de l'équilibre d'un
 nombre quelconque de corps attachés à une verge ou à un levier inflexible.
 En général il est visible que pour que la position respective des corps
 demeure la même, il suffit que les distances des trois premiers corps
 entr'eux soient constantes, & que les distances de chacun des autres corps
 à ces trois-ci le soient aussi, puisque la position d'un point quelconque est
 toujours déterminée par les distances de ce point à trois points donnés; on
 fera donc pour chaque nouveau corps qu'on ajoutera au levier, les mêmes
 raisonnemens & les mêmes opérations qu'on a faites dans l'article 13 «
 relativement au quatrième corps; Se chacun d'eux fournira trois nouvelles
 équations particulières » avec trois nouvelles indéterminées à éliminer;
 en sorte que les équations finales seront toujours en même nombre que
 dans le cas de trois corps; de plus elles feront de la même forme que celles que
 nous venons de trouver dans l'article précédent. Au reste, il est visible que
 ces équations rentrent dans celles que nous avons trouvées en général pour
 l'équilibre d'un système quelconque libre, dans les articles 3 & 4 de la
 Section troisième. En effet, puisque, à cause de l'inflexibilité de la verge, les
 distances des corps entr'eux sont inaltérables, il s'ensuit que l'équilibre doit
 avoir lieu, pourvu que les mouvemens de translation & de rotation soient
 détruits; or l'on auroit pu par cette seule considération, résoudre le
 problème précédent, d'après les formules des

The text on this page is estimated to be only 20.31% accurate

Premiers Partic, \$7 articles cités; mais nous avons cru qu'il n'étoit pas inutile • d'en donner une solution dire Cle^ & C cirée des conditions parcitlières de la quefUon. a6» Confidérons de 'nouveau le cas de trois corps joints par une verge ; & fuppofons de plus que la verge foit élaftique dans le point oii eft le fécond corps, enforte que les diftances de celui-ci au premier & au dernier loient confiantes, mais que l'angle formé par les lignes de ces diftances foit variable, ôc que l'écart de l'élasticité conïille à augmenter cet angle » §C par conicquent à diminuer l'angle extérieur formé par un des côtés » & par le prolongement de l'autre; Nommons la force de rélafticité E , & l'angle extérieur lui-même l'angle α ; l'angle s'exerce c y il cil f;ici!e de conclure de ce que nous avons établi dans la féconde Section, que le moment de la force E devra être repréfenté par $E \sin \alpha$ forte que la fomme des momens de toutes les forces du fyftême fera $XU \wedge T d- / Z' \wedge \zeta' X'' d' \wedge Y'' d' !+. Z' V f H- J! r'' W'' - h T'' d' \wedge Z''' d' \wedge E d$. Or les conditions du problème font les mêmes ici que dans l'article ii, c'est-à-dire , d'effaier a g = 3 o. Donc on aura cette équation générale de réqui libre $X' dx' \wedge Y' dy' - \wedge Z' di - \wedge X'' dx'' - \wedge Y'' dy'' \wedge Z'' di (' \wedge X''' d \text{ il}''' \wedge Y''' d' \wedge Z''' di'' - k \wedge E d c - \wedge \wedge d f - \wedge f j . d g : ^ o i$ & il ne s'agira que d'y substituer les valeurs de $d e ^ \wedge f ^ \wedge d g ^ y$ celles de $d f$ & $d g$ font les mêmes que dans l'article cité; 6c pour trouver la valeur de d , on remarquera que dans le triangle dont les trois cotés font f , g & k (art. 20), 180° — eft l'angle oppofé au côté A cniorte

The text on this page is estimated to be only 22.14% accurate

8S* MicHANIQUE AKALITIQirff. que par le théorème connu ,
on aura cof. e sa $JL \pm JLzJ^i$ d'oLi l'on tirera par la diffÉrenciation la valeur
de de; &C comme par les conditions du problème on a $df = o$ 6C $dg = s$ o, il
TuiHra de faire varier c ce ^ui donnera sa - $J'' : ^{-}$; cette valeur étant
fubftituée dans l'équattoa précédente, il cil clair qu'elle deviendra de la
même forme que réquation générale de l'équilibre dans le cas de l'article 10
, en fupposanc dans celle-ci $' = /gtu€ ' P^{\wedge}$ conféquenc les équations
particulières feront encore les mêmes dans les deux cas , avec cette feule
différence , que dans celui de rarticle cité , la quantité r eft indéterminée, &
doit paf conleqient être ciiminee; au lieu que dans le cas préfent, cette
quantité eft toute connue , &i qu'il n'y a que les deux indcterminccs x, à
éliminer; enforce qu'il doit refter une équation finale de plus que dans le cas
cité , c'eft-à-dire > fèpt équations finales au lieu de iîx. Or conune, foit que
la quantité r (bit connue ou non, rien n*empêche de Téliminer avec les deux
autres /*, il eft clair qu*on aura aufli dans le cas prèlènt les mêmes
équations qu*on a trouvées dans les articles zi & zt ; & pour trouver la
feptieme équa-. tlon, il n'y aura qu'à éliminer a dans les trois premières, ou
/A dans les crois dernières des neuf équations particulières •dé Tartide x i •
6c AibAituer pour r fa valeur $—7-^{\wedge} — ' a 7-$ Au refte, fi dans la valeur de Je
on n'avoit pas . voulu fupposèp $df \& L dg$ nuls, on auroit eu une expréflion de
cette forme de $? = j \sim h - ^{\wedge} / H - . Bdg^{\wedge} \text{ ÀUB}$ étant . • 'des uiyiiiizua by Google

The text on this page is estimated to be only 20.86% accurate

.^RBltilts Partis. 89 des fbnâions de gy ûnes alors les trois termes Ede $\frac{1}{2} \frac{d^2 i}{dt^2}$ à l'équation générale, feroient devenus étant deux quantités indéterminées, il est visible qu'on peut mettre à leur place $x - EA \frac{dy}{dt}$; moyennant quoi Eh la quantité dont il s'agit deviendra $y^{\frac{1}{2}} \frac{dy}{dt}$ comme à, f bL g n'eutenc point varié dans TeicprelGon 28*
^i plusieurs corps étoient joints ensemble par des verges élastiques, on trouveroit de la même manière les équations nécessaires pour l'équilibre de ces corps , & en général notre méthode donnera toujours-, avec la même facilité, les conditions de l'équilibre d'un système de corps liés entr'eux d'une manière quelconque , si animés de telles forces extérieures qu'on voudra. La marche du calcul est, comme Ton voit, toujours uniforme, ce qu'on doit regarder comme un des principaux avantages de cette méthode. De l'équilibre d'un fil dont tous ses points sont tirés par des forces quelconques à qui soit opposé parfaitement flexible ou inflexible, élastique, 0 en même- temps extensible ou non, 19. C'est ici le lieu d'employer la méthode que nous avons exposée dans les articles 5 & suiv. de la Section quatrième* M

The text on this page is estimated to be only 20.46% accurate

p6 M é C H A N I Q * U E ; - A N A L I T I Q U E . ■ Nous
 fuppoièrois toujours, pour plus de; limpHcité» qnë toutes les forces
 extérieures qui agiflènt fur chaque point du û\ foient réduites à trois» $X^{\wedge}V^{\wedge}$
 dirigées fuivant les coordonnées reébuigles $x^{\wedge}y^{\wedge}$ de point. Aind ennom*
 inant Jm Télément du fil, on aura pour la fomme des momens de toutes ces
 forces, relativement à la longueur totale du fil, cette formule intégrale (Art,
 i3,5c« $^{\wedge}$. 4), $S (X^{\wedge}x -H r^{\wedge}K Zs^{\wedge}i) dm$, 30. Confidérons lé cas d'un fil
 parfaitement flexible & inextenîble; nommant l'élément de la courbe de ce
 fil , lequel eft exprimé par $|/ dy^* -h$; il faudra par la condition de
 l'inextenfibilité, que ds foit une quan-» tité invariable, & qu'ainii Ton ait par
 rapport à chaque élé« ment du fil , cette équation de condition indéfinie $^{\wedge}ds$
 $=s o$. Multipliant donc Ids par une quantité indéterminée*. a, $\pounds c$ |>renant
 l'intégrale totale, on aura $S^{\wedge}-^{\wedge}dsi$ êc ft Ton n'a point d'autre équation de
 condition , on aura l'équation gciicrale de]'cquilibic\, en égalant k zéro la
 fomme des deux intégrales qu'on vient de trouver. Or ayant $ds = l/</x^*H-$
 $<(y) di^*$, on aura en difi Térendant fuivant is • donc $Si<^{\wedge}ds = SJ^{\wedge}dx -h S$
 $Ji^{\wedge}idy-hS -^{\wedge}d^{\wedge}i$ changeant S'd en $i/<r$, & intégrant par parties pour faire
 dîlparoître le d avant «f», fuivant les régies données dans rarticle 17 de ia
 Sedion quatrième, on aura ces traas* formées ,

The text on this page is estimated to be only 10.99% accurate

P R B U ,I. s » E P A K T I E.. - ^t. % Ainf J'^quadon générale de l'équilibre deviendra ' S (iXdm^ d. ^)^^^ {Ydm^d. , y ^ ds" rf,' - 'y — 7^^i=^o» 31. On égalera d'abord à zéro (art. 18, Sed. citée) , les coflicicns de Sx, , <f:(fous le figne^ , ^ Ton aura ces trois é(]uations particulières & indciimcs , JLdm — a. - L ■ =3 o as ' d'où éliminant rindéterminée a, il reliera deux équatbiis qui ferviront à déterminer la courbe du 13. Cette élimination eft très-facîle , car on n*a qa*à intégeer les équations prccédeilres , ce qui donnera celltfei.

The text on this page is estimated to be only 12.21% accurate

Mécanique ANALYTIQUE; jtf Bf C étant des constantes
 arbitraires; ensuite on aura M en chassant a, dy B -h fy. {m ■ Jx C -><-f7.
 Les équations qui s'accordent avec les formules connues de la chaînette. ^ 3
 2. Si on veut parvenir directement à des équations purement différentielles
 &. sans figue/, on mettra les équations trouvées sous cette forme. ds dē d*oii
 éliminant on aura d'abord ces deux-d; Xdy—Ydx j / j dx d* J \ — ds — ^«-
 H-rfr^^--7r^-3r)» ensuite si on multiplie les mêmes équations
 respectivement par "77» i57> 77" > ^ -57- :5r dm^d^i & il n'y aura plus qu'à
 substituer dans cette dernière les valeurs de a tirées des précédentes. o
 Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 23.18% accurate

9 P]i£Mi£a£ Paktib* ^QonMétora mùnximSLt les termes de régnatibn générale qui font hors da ligne 5; Se fupposons première' ment que Je fil foit entièrement libre; dans ce cas les variations $S'x'y/y$, Se s -(y répondent aux deux points extrêmes du fil, feront toutes indécerniées & arbitraires; par conféquent il faudra que chaque terme affecté de ces variations foie nul de lui-même. Donc il faudra que l'on ait $x' o$ & $a'' o$, c'est-à-dire que la valeur de A devra être nulle au commencement & à la fin du fil. On remplira cette condition par le moyen des confiantes. Ainfi» comme les trois premières équations intégrales de l'article 31 » donnent pour le premier point du fil oii les quantités afièâées de f deviennent nulles, $\bullet^{\wedge} \text{---} L - B A , \gg B , -^{\wedge} J B a C^{\wedge} i C$ pour le dernier point du fil où y fe change en J , • • on aurt dans le cas dont il s'agit» $A^{\wedge} O j B \gg o$, $C s a o$, tt $S X d m B B o$, $S Y d m \ll sa O f^{\wedge} S Z d m = o$. Ces trois dernières équations répondent, comme l'on voit, aux trois premières de l'artitlc li de ia Sedion prcfente. 3 4* Supposons en (econd lieu que le fil foit attaché par ^ un de les bouts, ou par tous les' deux; & fi c'est le premier bout q|ui eft fixe, les variations $\ll r x'$. $J'y'$, ■(feront nulles , & il futîra dcg.iler à zéro les cocfficients de «Tx', $J^{\wedge} y$, c'est à-dire, de faire $a'' = o$. Par la même raifon, lorfque le lécond bout (era fixe, il ' fuffira de faut $a' os o$. Mais fi les deux bouts écoient fixes Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 21.74% accurate

y4 MéCHANIQUE ANALITIQUE. à la fois y alors il n'y auroit aucune condition particulière à remplir» puis<jue les variations δy , δy , $\delta^2 y$, $\delta^3 y$ feroient toutes nulles. 3 5*. Supposons en troisièm lieu que les extrémités du fil soient attachées à des lignes ou surfaces courbes, le long desquelles elles puissent glisser librement; Or soient, par exemple, $y = t^2 dx' - H b' dy' y$ & $(dx' - H b' dy' y)$ les . équations différentielles des surfaces auxquelles le premier & le dernier point du fil sont attachés; on aura pareillement en changeant d en dt ($t^2 ds^2 - i - b' dy' y^2 / ij$ SB $dt' J'x' - H b' dy'^2$) on substituera donc ces valeurs dans les termes dont il s'agit, on égalera ensuite à zéro les coefficients de x & y En général on traitera la partie qui est hors du signe dans l'équation générale de l'équilibre, comme si elle étoit (nulle, & qu'elle représentât l'équation de l'équilibre de deux corps . réparés & placés aux extrémités du GL 36^e. Supposons , par exemple, que le fil soit attaché par ses deux bouts aux extrémités d'un levier mobile autour d'un point fixe. Soient x, y, z les trois coordonnées rectangulaires qui déterminent dans l'espace la position de ce point fixe , c'est-à-dire , du point d'appui du levier , & soient de plus x', y', z' la distance entre ce point d'appui & l'extrémité du levier, à laquelle est attaché le premier bout du fil , x'', y'', z'' la distance entre le même point d'appui & l'autre extrémité du levier à laquelle est attaché le second bout du fil, A la distance entre . les deux extrémités du levier, & par conséquent aussi entre les deux bouts du fil; il est clair que ces six quantités $x, y, z, x', y', z', x'', y'', z''$ sont données par la nature du problème, ^ Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 19.18% accurate

. P a £ M I E A £ Partie. il est vu en même-temps que $x^{\wedge}$, $y^{\backslash}$: (étant les coordonnées pour le commencement de la courbe du fil , & $x^{\backslash}$ $y^{\backslash}$ les coordonnées pour la fin de la même courbe , on aura Or CCS quantités $y^{\wedge}$, h étant invariables, on aura donc en diHérenuanc par ces trois équations de condition déter« minées» qui étant multipliées chacune par un coefficient indéterminé, devront être aussi ajoutées à l'équation générale de l'équilibre. Ainsi prenant «, y pour les trois coefficients dont H s'agit, & égalant à zéro les coefficients des fix variations « Tx' , $x''y^{\wedge}y'y^{\wedge}$ « $T^{\wedge}r$ », on aura autant d'équations particulières déterminées, qui seront '(c-i)-Ai'-V — ^-'» Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 23.93% accurate

fô MiiCHANIQUE ANALITIQUE Et qui, par rélimination de x , y
 Ce réduiront à trois. Ces trois étant ensuite combinées avec les trois
 équations de condition ci-dessus, on parviendra à déterminer la position du
 levier. On voit par-là comment il faudra s'y prendre dans d'autres cas
 semblables. 37. Enfin, si outre les forces qui animent chaque point du fil, il
 y en a de particulières appliquées aux deux extrémités du fil, &
 représentées par X & F , Z pour le premier bout du fil, & par X' & Z' pour
 le dernier bout, ces forces donneront les moments U U' faudroit ajouter
 encore cette quantité au premier membre de l'équation générale de
 l'équilibre, c'est-à-dire, à la partie qui est hors du signe, laquelle
 deviendrait alors $JC \cdot H \cdot (r' \cdot H \cdot V + (Z'' + \wedge) X' - \wedge) \cdot v - (r' \cdot \wedge) \cdot y$ & sur
 laquelle on opéreroit dans les différents cas, comme on vient de le voir
 dans les articles précédents. 3 g. Supposons maintenant que le fil animé dans
 tous ces points par les mêmes forces X , V , Z & tiré de plus dans les deux
 extrémités par les forces X' & Z' , X'' & Z'' , Z' doit être couché sur une
 surface courbe donnée, dont l'équation

The text on this page is estimated to be only 15.19% accurate

• F a (I ï: .R E Parti' è.; ^ l'équation foie d^zp dx-^qdy y & qué
 Ton demande Ja figure & la pofirioii de ce fil fm: Ja même furface pour
 qu'il foie en éqûifâjw. ; ^ , i - . Ce problème qui ièroic peut-être aflèz
 difficile i traiter par les principes olrdinaîres" de la Mèchanique , fe réfouc
 trèsficiHement par notre méthode & par nos- formules ; en effet, féquation
 de la furface donnée , donne en chanjreant d en ^ , ^^ — p^x -q^y ainfi il
 n'y aura qua fubfticuer cette valeur de «r ; j dans les termes fous, le figne. de
 l'équation générale de l'équilibre du fil (art, 30) & enfuite égaler
 féparémcait i zéfo .quantités afièû^{es} de /x,, de Ij,, On àûmparice cç
 .deazr^{qui}^{ons} indé^{es}.» , ' . / • Xdm - d. -iili (Zdm^d d. -i^l-Y« o rdm-
 d^q(Zdmr^d)⁰,. .' Jefquelles fèrviront à déterminer là courbé du fÛ,
 étant .combinée[^] "avec J!équation; </j ais^{yjç} -J^q dy de la - furface, &
 étant débarrafRes , par l'élimination , dé findéterminée x. 3 9- plus, comme
 on fuppose que Iç fil foit appjiqué dans toute fa . longueur à la même
 furface, on aura auflî pouf fes deux points extrêmes, asa[^]/jc'-H q^{^y}\ 6C
 /[^]•«y j^{^y}-f-^{ây}. On- fera donc encorêr.ces fubftitutions dans les cennes
 hors d^u figne de l'équation générale (art. 30)[^] ott plutôt dans la formule
 donnée dans Tar* dote 37»[^] dans la^{uelle}[^] on- a ei[^] égardt aux forces X\
 Y*[^] 6cci on éga&èra enfuite fé^{irément} [^] zéro les quantités •afièâées de
 rducmie' desj Iquatre variations reftantes [^]x\ S y, /V'iiTy-j .ron[^]attfti.ces
 quatre nouvelles équations décçfmiaéeSy •.». • i » . ■< , i. -u • - . ' N

The text on this page is estimated to be only 11.03% accurate

\j8 MicH ANiqUE ANALITIQUB, auxquelles il faudra fâtsfaire
par le moyen des confante^r 4Ô. Ma» au .lieu de fiibftituer, ainfi que nous
venons de le faire, la Tideiir èè fiett^x & i> «irée de léquation — ^iTyaBp,
on pourroit regarder cette inême équation «omine une nouveHe- équation
'de: condition indéterminée; il faudroit aloo mîiWplicr çettfc équation par
un autre coefficient indéterminé/[^], en prendre l'intégrale totale, & l'ajouter à
l'équation générale de l'équilibre (art. 30). De cette manière, la partie fous le
iigne deviendrait & l'on auroit immédiatefflât ces trois équations
indéfinies. lefquelles par l'élimination de[^] redonneront lea mêmes équations
déjà trouvées (art. 38). Mais ces dernières ont de plus l'avantage de faire
connpître en mêinc-tems la, ptcflion Digitized by Goo<?Ic

The text on this page is estimated to be only 12.75% accurate

.P K E M I E B, E P A * T : l , i , : que chaque élémént du o x w c e
 < u i . la f u r f a i ^ : < l ' a | > r è s la c b é o r i e d o n n é e d a â s l ' a m c l e 7 d e la S e a i o n
 q u a â t e m e . 4 l * É n e f f e c , il e s t f a c i l e d e d é d u i r e d e c e t t e t h é o r i e q u e l e s
 t e r m e s $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y}$ p r o v e n a i i t s d e T é q u é d o n d e c o n d i t i o n $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} = 0$,
 p e u v e n t r e p r é - ' i è n t e r T e f i è t d ' u n e f o r c e é g a l e $i A^{*} > ^{\wedge} (i - f - ' y^{*})$, & a p - .
 p l l q u é e i c h a q u e é l é m e n n / M d a f i l é s i n s o n è d t r e à i o n p e r f f i e n d i c u l a i r e à l a '
 f u r f a c e q u i a p o u r é q u a t i o n $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} = 0$, d u b i e n d ^ $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} = 0$, c e s t À l a f u r f a c e m ê m e f u r J . i q u e l l e l e f i l c f l f u p p G f c c o u c h é . C e t t e
 f u r f a c e f a i t d o n c l e f l e t d e l a f o r c e e n q u e s t i o n ^ l a q u e l l e ^ \bullet f e r a ç a r .
 c o n f é q u e n t é g a l e & d i r e i f V e m e n t C o n t r a i r e i l j t p r e f l i o h e x e r c é e p a r l e f i l
 f u r l a m ê m e f u r Ê u t e (a r t . 8 , S e (3 b . 4) ;) ; J D e f o r t e q u e l a p r e f f i o n d e
 c h a q u e \$ p o f f l c ■ d k f i i T e À ^ ' ' ^ ^ ^ ■ ^ d m ' ^ ' ^ ^ > ® " f u b ^ t u a n t l e s v a l e u r s
 d e | f t / r , M f c i r é ^ j d e j é q u a t i o n s c i - d c i f l i i i , - O n a p p l i q u e r a e n f u i t e l e s
 m ê m e s r a i f o n n e m e n s à l a p a r t i e d e r é q u i û t i o n g é n é r a l e q u i e s t h o r s d u l i g n e
 « S » & F o n e n t à i m d e s c o o c l o f i o o s i ^ o a l o g u e s . * 4 2 v J o i q t t ' i c i ^ o n s a v o n s
 f u p p o f é q u e l e f i l é t o i t i n e x « . t e n f i b J e j r e g a r d o n ^ l e m a i n c e n à n c c o m m e u n
 ' r e f l o r t c a p a b l e d * c s t e n i k > a t e d e . c o n t r a é a o n ; & f o i t F h f o r c e a v e c
 l a q u e l l e c h a q u e é l é m e n t d s d e h c o u r b e d u f i l t e n d à * f e c o n t r a r i e r , o n a u r a ,
 c o m m e d a n s l ' a r t . 1 8 (e r t m e t t a n t d s ^ l a p l a c e d e y , f i e e « c h a n g e a n t e n /) ,
 F s - d s p o u r l e m o m e n t d o c e t t e f o r c e » & S F ^ d s p o u r l a f o m m e d e < ; m o m e n s
 d e D i g i t i z e d b y G o o g l e

The text on this page is estimated to be only 15.77% accurate

20Ç) M È^C'H Jk M S E 3. ^-iNlk L 1 T 9 Q U 1. tousi: les-
fiMte^ dd* c»ntr^î<A) qèî â^îfla^t fur- route la^ longueur du ••fil/ On
ajourera donc cette intégrale S F d s à l'intégrale S {X ^ x Y^y Z<r^) qui
exprime la somme des monicns de toutes les forces extérieures qui ainllent
fur lefil(ar£. ip), & égalant le tout à zéro» o|i aura r.é<juation générale de
l'équilibre du fil à reflbrt. . Or il est visible que cette équation fera de la
même forme qüe/celle de.ra^c ^q. pour, le cas d'un iîl jinexcnfible, 2é
qif*en y ^chan^au^ F. en les deux ëquaçÎQns deyiendronc^ même)
ldentl(^ues. Ojti aura dpnc dans le cas préfenc les mêmes équations
paVdçulieres pour l'équilibre du fil, qu*on 9, trouvées dans le cas de Tarticle
ji , en mettint feulement dans ccllc-ci F à la place de K Or comme la quan-^
tité JP-cft luppocce connue, on n'aura pas bcloin de l'éli-^ miner; c'est
pourquoi on aura ici une équation de plus pour l'équilibre du fil que dans le
cas cité; mais comme d'ailleurs l'élimination est toujours permiffê,» il
s'enfuit quç les équations réfultantes <le cette élimination, auront ézateiïicnt
ljeirpiD/iil u^ inexteniibleV icomn^e^biir ^ un , fil- extçniïb'lef leilbrt. *
On* peut conclure de-Jà que la qdadtite indéçê'rxiiInée'A âe la folutionde
rar|!!c]e 3 1 , n'exprime proprementfautteichofê' que la force avec laquelle
'cljaque élément du fil réfifte ' ^t' être allongé par l'afVion des forces
extérieures ; c'est à-dire, ce qu'on nomme communément la tenfion du fil.
C'est aulTî ce qu'on auroic pu trouver directement par la théorie de Tarticle
7 de la Scclion précédente, ainfi que nous l'avons • fait àPégard de la
preiffion eiercée par' le fil'fur une- fur-' face (art. précéd.). * • * ' ' * 43
•^(■Ppo^ons de nçttveaa le filiûextênfible, mais au lieu I Digitized by
Googh

The text on this page is estimated to be only 15.13% accurate

Première Partie. lor de le Aippofer en mi&me-teins parfaitement flexible, comme on l'a fait jttfqu'ici, fupponons^e élastique» enfone qu'il y ait dans -chaque point une force tjue j'appellerai qui s'oppose l'inflexion du fil, qui tende par cⁿfèquent à diminuer l'angle de contingence. Nommant cet angle onv aura, comme dans Tardcle 16 {en changeant feulement d en «f), £Se pour le moment de chaque force E; donc SES'c fera la loinde-des momens de toutes les forces d'élasticité qui agiient dans toute la longueur du fil , laquelle devra donc être ajoutée au ptemier membre de l'équation générale. de l'équilibre dans le cas' d'un fil 'inezienilble fC parfaitement flexible (art. 50}. . '. Toute la difficulté confie donc à ramener l'Intégrale SE.ie à'ia'ibnne convenable; pour cela il faut commencerpar chercher la valeur de c ; or nous avons trouve plus haut (art. i[^]), cof. e « il±?lrJL, d'oîi l'on tire 9 pouf appliquer . cette formule au cas présent, il fuffit de #.remarquer que les coordonnées V, ij', x", y, i", x^{'''}y^{''}\ ^" par krquelles jions zrOos exprimé les quantités f, g-, k (art. Il Se xo)\ deviennent ici xiyi Xi dx^ydy[^] X^diX'-hidx^{hd} x^y -^{idy}-h d^{*y}^{^^}zd[^]-^d^{^^} enforte qu'on aura /' «■ ^x* dy dX di[^] ^ f « {dx -4-d-«y + {iy ^.d'yY -[^]-adi -f-d'iQ* sBdx^{^^}dy* -»-</[^]*'-+- a {dxt^x '[^] dyd^y d^{^^}dⁱ) -f. d*x* ^{d'y}* -^d* 7[^] ^ ds' '+-t dsd's d* X* d'y* ^ (Ç î% (2 dx Hh / (2 dy[^]dyy U -i-[^]/' {>•

The text on this page is estimated to be only 17.22% accurate

101 MICHANIQUE ANALITIQUE. — 4 {Ji' -Jhdsd^ s-)* —
4i/#* (<^ H- ^ ^ ^« — ^ Donc enfia oo aura une wm • Comme cette valeur
de fin ^ eft infiniment petite du fécond ordre, il s'enfuit que fin 6, & par
conféquent aafli l'angle « fera infiniment petit, du premier ordre; de forte
qu'on aura c^^eft fexpveffion de l'angle de dintisgenoe e dan» unéf CDorbe
quelconque à dotxble courbure. 44. On différenciera maintenant luiranc
pour avoir la valeur de ^e, & comme par la conditîoa de Tinextettfibilité du
fil on a déjà ^ds aso (art. 11), le par conféquent auflî d^ds ea i^s «a» o , on
pourra traiter dans la diffÉvenciatton dont il s'agit» ds 9ct^s comme
conftantes * aiiiifi Ton aura fubftituanc dans^ , & faifant pour abrég^
d*^(d*»'fd'y*t-d^x*d'ê*i > • j . • . . . y aum done . • .
SSiê^SId^x^d'X^Sld^^idy-^'SId'ifi^^i, Digitized by

The text on this page is estimated to be only 9.86% accurate

^xiuiEKz Pau T II. 103. Ces iexpieffioQt ^canc traitées faÎTant les règles données dans l'article 17 de h Seâion quatrième, en 7 changeant d*abord en c/^, & intégrant enfotte par parties jponr faire diiparoître le ^ avant «r, on aura les transformées fui van ces , — / d'stidSx' ^ d, {l'd'x') Ixf - H Sd\ *) / , ^ idy dty^d. {ï d'y) ^y^sd^.iidy)iy^ ' Sld'lld^lr^Fd^i'dff- ^dA^^f)^' ^ld'idti'k'd. {,l'd'i)ti^Sd^. {Id^l)il, On ajoateta donc ces difiërens termes i ceiix qni forment le premier membre de Téquacion générale de Téquilibrede l'article 30, bc l'on aura ré<^iuition de Téquilibre d'un fil inexcenûble & élailique. 45- égalant d'abord à xdro les oocffidents des Tatia&ons ^\ ^® trouvent fous le iigpe on au» ces trois é(juacions indéfinies . Ydm^d-^ ^d\{Idy):^<^ Zdm ^d. ^- ^ . (/i^î) = 0, d*oîi il faudra éliminer Tindécermiiiée a, ce qui les réduira & deux, (^ui fuiEront pour déterminer la courbe du fil. , Une première int^tatieo donne ,

The text on this page is estimated to be only 10.13% accurate

104 MÉCANIQUE ANALYTIQUE. -ii d. $\{ld^x\}^{C':fZdm} >^{\wedge}$,
 B, C étant des constantes «rbitwies», «ç réiimination de A donnera dxd.
 $(Id^y) dy d. (Ux)^{(4 \wedge fXdm)} dy - (B \wedge fYd'm) dx dxdfJd^O - d, (l^{\wedge *}; \wedge (A$
 $\wedge fXdm) d: \wedge (C \wedge fZdm) dx dy d. (Id^i) - d^{\wedge} d. (Id^y) \wedge (B \wedge fYdm) d^{\wedge}$
 $(C \wedge fZdm) dy$, dont la dernière est déjà contenue dans les deux autres. Ces
 équations font de nouveau intégrables, & l'on aura ; $(dy, d^{\wedge}y - dy d^{\wedge}x J^{\wedge} F^{\wedge}$
 $f(A \wedge fXdm) dy \wedge f(B \wedge fY dm) dx^{\wedge} I(dx d^{\wedge} - \wedge did^{\wedge}x)^{\wedge} G \wedge f(A \wedge fXdm) d - \wedge fiC$
 $\wedge fZ dm) dx. j^{\wedge} 'jy d^{\wedge} : \wedge \wedge dxd * y)^{\wedge} H^{\wedge} f(B \wedge fYdm.) dx - f(C - \wedge fZ dm) dy, jr. G, H$
 étant de nouvelles constantes. Or nous avons supposé plus haut (article 44) f
 ' $\wedge \bullet$ le carré du dénominateur = $rdx^{\wedge} \wedge df^{\wedge} d:c) (\wedge^{\wedge} 1^{\wedge} (dx$
 $d^{\wedge}x^{\wedge} dyd^{\wedge}y^{\wedge} di^{\wedge} d^{\wedge} - \wedge r^{\wedge} (dxd'y - dydx)^{\wedge} (dxd^{\wedge} l - d^{\wedge} d^{\wedge} xr^{\wedge} i dy d^{\wedge} i - did^{\wedge}y)^{\wedge}$
 Donc si on ajoute ensemble les carrés des trois équations précédentes on
 aura celle-ci, sans différentielles, j $^{\wedge}$. -, $(F \wedge f(A - \wedge fXdm) dy -- f(B - \wedge fVdmJ$
 $dx)^{\wedge} (Q \wedge f(A - \wedge fXci m) d i - /r C \wedge fZ dm) dx)^{\wedge}$
 $\wedge (H^{\wedge} f(B \wedge frdm) dx^{\wedge} fiC^{\wedge} f^{\wedge} dmJdy) \setminus$ Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 15.15% accurate

Première Partie. Iof êc fi on divife enièmble deux des mêmes équations , on aura ceUe-ci ob rëlaftidtë n*entre pas, ■ dMd'j^d^ld'X G'hf(A'h'fXJm)dj-/(C^fZ dm dx Ces deux équations font ce qu'il y a de plus fimple pour déterminer la courbe élatique, en ayant égard à la double courbure. 46. Confidérons maintenant les termes de réquacion gcnéraJe qui font hors du iigne ces termes, font \ dt" — ^ . (r x"j ^ / H- r x' dix* ^ K ds" " / X'dx' ds' — d.Crd'aO) fiil'-Td^aidix' V ds* ^d.(i'd^y)) #y— T/^y^/zy ^d, (i'd^(j) i^^i>d^i(dti\ te il faudra les faire diiparoitre indépendamment des valeurs de /x",/y',&c. Donc,^ i^» fi le fil eft entièrement libre, il faudra que les coëiEcîens des douze quantités ^x", «ry, J'f^ d^xf' dff, dlf, ix', J^y, dix', dsy\ dJ^i' foient chacun nul en particulier. " Or d'après les premières équations intégrales de i'ardde 45 , on voit qu'en fiufant commencer les intégrations au premier point du fil » les coëfficiens de /x', zy, ^^'^ font O

The text on this page is estimated to be only 15.17% accurate

lo6 . MicUANIQU» ANALITIQUE. égaux à C, U ceux de $\sqrt{x}$,
 ly^* , deTiétuient A-t-SXdm, B-hSVdm, C- $\wedge$ SZdm. Aiofi il faudra que l'on ait
dans le cas dont il s'agit Assso y B = Oy C = 3 o , & S Xdm = 50,5" Yd /n =
o, STad m = o, P $\wedge$ nfuite il faudra que l'on ait auffi I"d* x" ^ o ^Td^y"— 2W
f -= o, & Id'v! ^ o, /V*y = o, /V»:f= o, pour faire difparoître les termes
affedés de dt7i!\ d^y\ & ci & il eil clair que les fécondes équations
intégrales du même article donneront Faso, G — OyHsstQ'^icS(fXdm.dy
 $\wedge$ frdmdx)^o^ S(fXdm,d\ ^fZdm,dx} — p, \$(fYdm.di ^fZdm,dy)^o. 2*. Si la
première extrémité du fil éfb fixe , alors /ji/ss: o , /y» o , c^^?/ ^ o ; par
conféquent Ay B^C ne feront pas nuls; mais la condition que les coefficients
de ^ x"y fy\ i":^' foient nuls, donnera y/ = — S Xdm, B = — SVdm ^ C=" —
STjJm; & fi la pofition de la tangente à cette extrémité étoit donnée
auffi, on auroitdc plus dS'x' = o di^/ s o, tss o , par conféquent Gy H ne
feroient pas nuls, mais la nullité des cocfficiens de </^x", ds^y" y donneroit
F^S{,\fi^fYdm)dx'^{4^fXdtri\dy) G ^S{{C '^fZdm)dx — {A '^fXdm)di)^
H^S{{C ^ fZdm)dy — ^/ydm)di)y On raifonnera de la même maniercf par
rapport k Tétat de la féconde extrémité du fil. 3**. Enfin, fi outre les forces
qui agiffient fur tous les points du fil , il y en avoit de faruculicrcs X\ T', Z',
X", V", Z", appliquées à l'une ôc à l'autre extrémité , il n'y auroit qu'à
ajouter aux termes ci-dellus les fuivans , X'^x'-h V'jy' -4- Z' Ji" ^x" -t- Z"<rf
, £(s'il y aYOtt de plus d'autres conditions relatives à l'état de Digitized t
(Google

The text on this page is estimated to be only 20.83% accurate

Première Partie, 107 ces extrémités, on opérerait tou)ottCS de k même façon 6c —d'après les mêmes principes. 47 > Si on YOttloir que le fil fût doublement élastique, tant à l'égard de l'extensibilité, qu'à l'égard de la flexibilité, alors on auroit dans l'équation générale de l'équilibre, à la place du terme $S \frac{d^2 s}{ds^2}$ celui-ci $S \frac{d^2 s}{ds^2} + \frac{F}{R}$, c'est-à-dire, simplement F à la place de $\frac{F}{R}$, en nommant F la force d'élasticité qui réfle à l'extension du fil (arc. 41). Mais il faut droit de plus, dans ce cas, regarder ds comme variable dans l'expression de par conséquent il faudroit ajouter & la valeur de de l'article 44, ces deux termes, dans lesquels je fais, pour abréger, $v^2 = \frac{ds}{dt}$ i(—d's') = — — donc on ajouteroit à la valeur de SE le du même article les termes $-\frac{1}{2} \frac{d^2 s}{ds^2}$ ce dernier se réduit d'abord (article 17, Section 4) à $\frac{1}{2} \frac{d^2 s}{ds^2}$; donc il faudra ajouter à la valeur de SE des termes — $\frac{1}{2} \frac{d^2 s}{ds^2} + \frac{1}{2} \frac{d^2 s}{ds^2}$ (d.--§^)^fds. Le dernier terme de cette expression étant analogue au terme SFS'ds fera susceptible de réductions semblables ; à l'égard des deux autres il n'y aura qu'à y substituer pour di's la valeur $dx \frac{d^2 x}{dy^2} \frac{dy}{dx} A^4 i^{\wedge \wedge \wedge}$ marquant toutes les lettres d'un trait ou de deux. De-là il est facile de conclure qu'on aura pour la solution du cas présent, les mêmes formules que dans les articles Oa

The text on this page is estimated to be only 20.07% accurate

108 MÉCANIQUE ANALYTIQUE. 31 & 32 en y meccaic
 feulement — $\frac{1}{2}a$ à la place de a ; 6c ajoutant aux coefficients de $i/i'x''$; d^2y/dx^2 , d^2x/dy^2 , $iZ-r'$, les quantités « Vy , « $V:\wedge$ », « $\wedge a$ »; $-V/$. . étant - - . 48*
 Venons enfin au cas d'un fil inextensible & incompressible; on aura ici pour la
 forme des moniers des forces la même formule intégrale que dans le cas
 de l'article 10, c'est-à-dire, $\int \{X^2x - Y^2y - Z^2z\} dm$; en suite la condition
 d'inextensibilité du fil donnera comme dans le même article, $\frac{ds}{dt} = 0$; &
 celle de l'incompressibilité donnera $\frac{d\sigma}{dt} = 0$, puisque l'angle de contingence doit
 être invariable; mais ces deux conditions ne suffisent pas encore dans le cas
 où la courbe est à double courbure, comme on va le voir. 49. Pour traiter la
 question de la manière la plus simple & la plus directe, je remarque que tout
 consiste à faire entendre que les différents points de la courbe du fil conservent
 toujours entre eux les mêmes distances: or en considérant plusieurs points
 successifs dont les coordonnées soient « $9 \wedge$ » t » $\int dx^2 dy^2 - 4H - 2x -$
 $* - H - idy * 4 - y^4 - aH - \wedge^2$ » &c. H est clair que les carrés des distances
 entre le premier de ces points & les suivants feront, exprimés par
 les quantités $\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} H - i/$, $\int dx^2 dy^2 \cdot A^2(xdy - (ty)' - (xd:\wedge - it-d')) \cdot$
 $3 - h 3 \frac{dx}{dt} - H \frac{dy}{dt} x - \frac{1}{3} \wedge^3 \wedge^3 \wedge^3 \wedge^3 \wedge^3$. Supposons pour abréger,
 $\frac{dx}{dt} - 4 - dy^2 - V d^2$ » « $\wedge^2 X^2 - f - \wedge^2 y H - l'it^2 ca/a$, $d^2j^2 d^2y^2 dl^2 - f mmy^2$ &c,
 les quantités précédentes étant développées, deviendront Digitized by
 Google

The text on this page is estimated to be only 8.66% accurate

IIO MÉCHANIQUE ANALITIQUE. laquelle par les
 tran^{ormactoi}» enfeignées fe réduira à Ja forme foivante » $\wedge S(Ydm^{\wedge}d.$
 $(Uy)'Jir\hat{a}^{\wedge}.(i^{\wedge}d^{\wedge}y)^{\wedge}\hat{a}K(fd>y))ty^{\wedge}S('Ldm^{\wedge}d,(\hat{d}i^{\wedge})^{\wedge}d\backslash(i,d^{\wedge}l)^{\wedge}d>.(U':Q)^{\wedge}l^{\wedge}$
 $(>!'dy^{\wedge\wedge}d,(i*"d^{\wedge}x")-h\ d\backslash(y" d' x") ; \ll Tx" <^{\wedge} — i/. (^{\wedge}d' 3^{\wedge})) dix!' -H d'$
 $Ixf\ fx"df — d,(nf'd' f)\forall d^{\wedge}(f' d' y"))^{\wedge}y" ^ d^{\wedge}f^{\wedge}d.(y" d' y"))dty"-\wedge r"d^{\wedge}y"$
 $d' <r f^{\wedge}(ii'di^{\wedge}d,(H!' d'i')\wedge d' (f' d'i'j)li' ^ (f," ^ j^{\wedge} — ^{. (^U'i'))d^{\wedge}7^{\wedge\wedge}$
 $d^{\wedge}fd*17(' \blacksquare _ ^x'./x' — ^{. f,"" d'x')-\backslash-d\backslash (f' d^{\wedge}sf))^{\wedge}xf \bullet^{\wedge}(y! d'x! ^ d.(f' d' x!$
 $))div! -^{\wedge\wedge} d^{\wedge}id d' isé - ^y- ^ : (^M'^y; 4- -i^{\wedge}. r^{\wedge} d^{\wedge}y')) _ i(u' dy — d.{v' d'$
 $y'))dfy' ^fd'^d' s^y 5 I . Ei^alant d'abord à zéro les coefficients de /x, /y, fous$
 le figue ga aura ces trois équations indéfinies, $Xdm'^{\wedge}d.(y<dx)^{\wedge}d\backslash (n^{\wedge}d* x)$
 $— d\backslash \{ *d'xJ^o y dm — d, f A d\backslash (^{\wedge}d^{\wedge} y)^{\wedge}d\backslash (fd'y Zdm -^{\wedge}d.fxdxJ-^{\wedge}d^{\wedge} (f^{\wedge\wedge}V$
 $— ^{\wedge\wedge}0^{\wedge} \backslash) — o \gg$ lefquelles renfermant trois variables indéterminées, >,
 /*,»', ne ferviront qu'à déterminer ces trois quantités \ enforte qu'il n'y aura
 aucune équation indéfinie entre les différentes Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 15.60% accurate

Première Partie. it forces JT, Z qu'on suppose appliquées à tous les points de la verge. " Pour déterminer les quantités dont il s'agit, il est clair qu'il faut intégrer les équations précédentes j or c'est ce qui est facile « & l'on aura ces crois-ci » $fYdm^Kdy^d.(fj^d*y)^{d\backslash}(>dy) = B - \blacksquare > C$ étant trois constantes arbitraires. Je remarque de plus, que si on multiplie la première par Jy ou y & qu'on en retranche la féconde ou la troisième multipliée par dxy pour éliminer a de ces trois équations, on aura celles-ci, $dy/Xdm - 4ix/ydm'^dyd, fr^xJ^dx d, (fAd^yJ - dy d". frd'xj-h dx d", Od'y)^{Ady-Bdx}, difXdm'-dx fZdm-did.(i*d'x)^dx d.(iMd^{:}) - dX^{\cdot} 0^{\wedge} x)^{\wedge} dx^{\cdot} (*d*l)mmAdl^{\wedge} Cdx . difYdm^dy fZdm^{\wedge} d\backslash d(fxd^y) - dyd (ij^d" iJ^did\backslash (fd\} yJ'^dyd^{\wedge}, (fd'Ti;)==Bdi^{\wedge} Cdy^{\wedge} \blacksquare$ lesquelles (ont aussi intégrables, & dont les intégrales (ont $yfXdm^x/Ydm - f(^y - Yx)dm (dy^{\wedge} Xr^d'xd^{\wedge} y) d y d, (f d^{\wedge} x) \gg 4' dx d, (f^{\wedge} y) 'Jry(d'y d\} x^{\wedge} itxd*y)^{\wedge} Ay - Sx'\backslash F^{\wedge} \backslash fXdm - xf2idm^{\wedge} f(X'\sim 24xJ dm^{\wedge} iJ^{\wedge} (dxt^{\wedge} x^{\wedge} dx^{\wedge} X)^{\wedge} d^{\wedge} d. (fd\} x)^{\wedge} \{ 'dx d.Od'l)$

The text on this page is estimated to be only 20.35% accurate

JI2 MéCHANIQUE ANALITIQUE. if $Y dm^{\wedge} - y f Z dm - f(Y^{\wedge} Z y) dm$
 F y G, H étant de nouvelles constantes arbitraires» Ces trois dernières
 équations ferviront à déterminer les trois quantités $/Xy$ r de d^* -, $^{\wedge}$ les trois
 premières équations intégrales donneront les valeurs de x , $^{\wedge}/\ll^{\wedge} d^*$ u A in fi
 on aura toutes les inconnues qui entrent dans les termes de l'équation
 générale (art. préc.) qui font hors du signe «S"; il suffira pour cela de
 marquer dans les dix équations qu'on vient de trouver » toutes les lettres
 d^* t n trait , ou de deux j à l'exception des constantes arbitraires-» ç n
 supposant nulles dans le premier cas les quantités affectées du signe /*,
 lesquelles font censées commencer au premier point du fil, & changeant
 dans le second cas, y en 5 dans les mêmes (Quantités, pour les rapporter au
 dernier point du fil. 5 2. .Cela posé , voyons maintenant les conditions qui
 peuvent résulter de l'antiéquilibration des termes hors du signe S dans
 l'équation générale de l'équilibre (art. 50). Et d'abord i n on suppose la verge
 entièrement libre, les variations $Sy^{\wedge} J^{\wedge\wedge}$, $d^{\wedge}x^{\wedge} ds^{\wedge}y^{\wedge} d^{\wedge}:(\backslash d' -Tx'$,
 $d^{\wedge}y^{\wedge} y d^{\wedge*}:(^{\wedge\wedge} \& /x"$, $^{\wedge}y"$, $l :(\backslash dix" y$ à cc, feront toutes indéterminées; par
 conséquent il faudra évaluer à zéro chacun de leurs coefficients; &: il est
 visible qu'il faudra pour cela que les quantités x' , $\ll'$, $d/^{\wedge\wedge} d' /$, ainsi que $A d$
 $d^{\wedge} t"$ soient toutes nulles. Donc les trois premières équations intégrales de
 l'article précédent » Digitized by G

The text on this page is estimated to be only 13.62% accurate

P&EMiEKE Partie. 113 précédent, donneront ces fix conditions, $o=s^{\wedge}, o=JS, 0=C, SXdm=:Ay SY dm^{\wedge} \ll SZ dm t= \zeta, \text{ \pounds c les crois dernière}^{\wedge}$ donneront celles-ci « $O - Bj/^{\wedge}F, o\ll ia^{\wedge\wedge} - Cx'-h(? , o=B: \{'$ $SfXi^{\wedge}ZxJdmcmAf^{\wedge}Cxr^{\wedge}G, :('Srdm S2dm^{\wedge}S \{Yi^{\wedge\wedge}yJdm^{\wedge} Bf-- Cy''^{\wedge} H, \text{ Donc}$ $Assso^{\wedge} Bt^{\wedge}Q^{\wedge} Cao, o, G^{\wedge}o^{\wedge} H - o; \& \text{ par conr\^e(Juenc } SXdm=sOySydm =$ $o, SZdm=ao^{\wedge} \cdot S(Xy^{\wedge}rx)dmw::\gg o, 5^{\wedge\wedge}:^{\wedge} - Z\ll; ./miB o, Zy;</;n \gg o. \text{ Ces fix}$ conditions font donc les feules qui foient néceffaires pour l'équilibre d'une verge inflexible lorfqu'il n'y a pas de point fixe; c'eil ce qui s'accorde avec ce que nous avons dit plus hait («t. 15)» & c'eft aui& ce qu'on auroît pa déduire immédiatement dç la. théorie donnée dans la Seâion troifieme , aînii que' not^ l'avons remarqué dans Tarticlecîcé. 5 3- Suppoforis maintenant qu'il y ait dans la verge un point fixe , ôc que ce point loit la première extrémité de la verge j dans- ce cas on aura $/jc' = o, /y = o, <r^{\wedge} = o;$ enforte que les termes affedés de ces variations dirparoi^* tiont d'eux-mêmes; il fuflfira donc d'égalér à zéro les coëf^ ficiens de $dlx^{\wedge}, di^{\wedge}fl dli(^$ $1^{\wedge\wedge}, \ll^{\wedge}y, d^{\wedge} rf^{\wedge},$ ainfi que les cœffîcîens de $i^{\wedge}f, \&c. \text{ Or il ell aifé de voir}$ que pour cela il fuiHra que l'-on • P

The text on this page is estimated to be only 13.96% accurate

XI4 MèCHANIQUE^ ANALI TIQUE,. ait />'=so, /<o, o; & en fuite
 $x'' - o, m'' \ll \square \wedge s = iOy \, dftf'e^o, dt^{\wedge}ssso^{\wedge} f'ts^{\wedge} o, comiQe$ (kosie cas
 précèdent; Sc Von trouvera les mêmes conditions que dans l'article
 précédent, à l'excüption de ce que By C ne feront pas nulles. On aura donc
 $A = SXdm, B^{\wedge}SYdm, C = SZdm^{\wedge}$ «nfuite $F^{\wedge}Bx! - Ay^{\wedge}G^{\wedge}C>^{\wedge} . Ai^{\wedge}H = Cy -$
 $B \wp, U$ les crois dernières équations fe réduiront à celles-ci, --SfXy
 $^{\wedge}Yx)dm = ^{\wedge} Bx^{\wedge}Ay, - S(Xi - Zx)dm \ll C \ll ^{\wedge} i', - Sfrx - ZyJdm^{\wedge} Cy -$ ^^ic'eftà-
 dire, $^{\wedge} SfXjr - ^{\wedge} rxJdm^{\wedge} iffS \, Y \, dm^{\wedge} ySXdm - o, S(Xi - Zxjdm - h \, S \, Z \, dm$
 $- : (S \, Xdm \, o, S(yi^{\wedge}Zy)dm^{\wedge} y \, SZdjn - ^{\wedge} 5 Jr < / OT =$ ou ce q[ui eft la même
 choie, à $5^{\wedge} \wedge - j^{\wedge}; - r \, f \, X - X \, V; ^{\wedge} = o \gg S(y (\wedge - 7:) - Z(y - y))dm^{\wedge} o,$ Ce
 font les feules conditions néceffaires pour l'équilibre, Zc il eft clair qu'elles
 répondent ^ celles que Ton a trouvées dans Tarticle 24. 54. Si 11 verge étoit
 fixement attachée par fa première extrémité, enforte que non- feule ment le
 premier point de la courbe fût fixe, mais aulfi la tangente à ce premier
 point, alors on auroit non-feulement $= 0, J^{\wedge}y \ll \bullet o, <r: \{ ' = o,$ mais auili
 $Sdx!^{\wedge} tsé^{\wedge} o, ^{\wedge} dy^{\wedge} si^{\wedge} y^{\wedge} o^{\wedge} d : (r = d \, o ;$ par conféquenc tous les termes
 aiïeclés de ces quantités difparoïtroient d'eux-mêmes, & il ne reftecoit qu'à
 faire Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 20.68% accurate

Prbmisks Partie. - 115 évanouir les termes affédés de t/iT^* , $<^*y, <^l>^$ de $/je'', iy\ d^x''^ d^fy$ &c. On n'aura donc dans ce cas que ces conditions ' $\ll O, X^' \ll \hat{u}, A^{*''} = \ll O, r' \ll O, = O, d^'' = O, <^r'' = O$. Donc les confiantes Ç auront encore les valeurs $A = \bullet SXdm^{\wedge} B^{\wedge} S Ydm^{\wedge} C0 SZdm$; enfuice les trois dernières équations de Tart. 5 1' étant appliquées au dernier point de la verge, donneront $F m \gg S (Yx - Xy) dmy G^{\wedge\wedge} SfZx - XiJdm, H^{\wedge 5} (Zy - y i) dm$. EiÇîovi applique ces mêmes équations au premier point, on aura $f, (dyddi^{\wedge\wedge} d^{\wedge} ddy) - d^{\wedge} (dyi'y!^{\wedge} d:^{\wedge} d' y; \ll^{\wedge} y - 5 j/-* - F / (di ddy^{\wedge} -^{\wedge} dx fdd^{\wedge}) - df' (d :(d' x' -^{\wedge} dx^{\wedge} \grave{a}\}())^{\wedge} A - (-Cx>'^{\wedge} - G (diddy -^{\wedge} d/ddi) - d^{\wedge} (diii' y'^{\wedge} dyd'i)^{\wedge} Bi - Cy^{\wedge} H^{\wedge} d^{*oii}$ éliminant /»' Il $d^{\wedge}^{\wedge}$ réfulte cette condition de l'équilibre $Açydi^{\wedge} idy) - H B(idx'^{\wedge} x'di) -^{\wedge} c(x'dy -- ydx') ' r^{\wedge} Fdii^{\wedge} Gdy^{\wedge} Hds^{\wedge\wedge} o$. Voyez ci-deffbus un cas femblable, art. 59, On pourroit réfoudre de la même manière tous les autres cas 5 & pardcnUêtement celui d'un corps de figure quelconque. dernière queftion mérite d'être eſcamittée avec plus de foin, & par une méthode plus (impie que la précédente. .

The text on this page is estimated to be only 21.80% accurate

II6 MÉCANIQUE ANALITIQUE. S. I V. De l'équilibre d'un corps solide de grandeur finie 0 de figure quelconque[^] ^nt tous les points sont tirés par des forces quelconques[^] ■ 5 S* Puisque la condition de la solidité du corps consiste en ce que tous ses points conservent constamment entre eux la même position les mêmes distances» on aura entre les variations $\delta x^i, \delta y^i$, les mêmes équations de condition qu'on a trouvées dans l'article 49; ainsi on pourra, par leur moyen, déterminer immédiatement les valeurs de ces variations. Pour cela je remarque que comme en passant aux différences finies, il est toujours permis de prendre une des différences premières pour constante, on peut supposer δx^i constante, & par conséquent $\delta x^i = 0$, &c; moyennant quoi la seconde & la troisième équation de l'article cité, deviendront $\delta y^i - \delta y^j = 0$ & $\delta y^i - \delta y^j = 0$. La première de ces équations donne d'abord. $\delta y^i - \delta y^j = 0$, - ' dly[^] — d où différentiant cette valeur étant substituée dans la seconde équation, elle se trouvera toute divisible par $\delta y^i - \delta y^j$ & on aura après la division $\delta y^i - \delta y^j = 0$; d'où l'on tire, en y intégrant $\delta y^i = \delta y^j$, il étant une constante. Àyant Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 22.21% accurate

PiiEMiERE Partie. 117 on trouvera $d^2y^2 - \frac{1}{2} \frac{dy^2}{dx^2}$ donc
intégrale de nouveau, & ajoutant les constantes $\frac{1}{2} \frac{dy^2}{dx^2}$ on
aura $\frac{1}{2} \frac{dy^2}{dx^2} = a \frac{1}{2} \frac{dy^2}{dx^2} - \frac{1}{2} \frac{dy^2}{dx^2} = \frac{1}{2} \frac{dy^2}{dx^2} - \frac{1}{2} \frac{dy^2}{dx^2}$ & ces valeurs étant
enfin substituées dans la première équation de condition, il s'en suit que
 $X^2 dy^2 + y^2 dx^2 = \frac{1}{2} \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{1}{2} \frac{dy^2}{dx^2}$ viendra $d^2x = t^2 \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{1}{2} \frac{dy^2}{dx^2}$. Enfin on aura par
une troisième intégration, & par l'addition des nouvelles constantes a, b , il y
a $X^2 \frac{dy^2}{dx^2} + y^2 \frac{dx^2}{dy^2} = \frac{1}{2} \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{1}{2} \frac{dy^2}{dx^2}$ & il est facile de se convaincre
que ces expressions ne satisfont pas seulement aux trois premières
équations de condition de l'article 49 « mais aussi à toutes les autres qu'on
pourrait trouver à l'infini, & qui sont toutes renfermées dans cette
équation générale $t^2 \frac{dx^2}{dx^2} < P^2 \frac{dy^2}{dy^2} \frac{dx^2}{dx^2} \frac{dy^2}{dy^2}$ Elles sont donc les
valeurs de x, y pour un système quelconque de points unis ensemble,
de manière qu'ils conservent toujours entre eux les mêmes distances & ainsi
ces valeurs serviront non-seulement pour le cas d'une courbe quelconque
mobile sans involution dans la figure, mais aussi pour le cas d'un corps solide
de figure quelconque. - 56. Puis donc que les valeurs précédentes de x, y
satisfont déjà aux équations de condition du problème, il est clair
qu'il suffira de les substituer dans la formule $S(X^2 \frac{dy^2}{dx^2} + y^2 \frac{dx^2}{dy^2})$ pour
faire en sorte qu'elle devienne nulle, indépendamment des quantités a, b ,

IIS MÉCHANIQUE ANALITIQUE. il n'y a que (ont les forces
indéterminées qui restent. Or comme ces quantités sont les mêmes pour
tous les points du corps, il faudra dans la substitution les faire sortir hors du
(signe 5; & Ton aura conséquemment cette équation générale de l'équilibre
d'un corps supposé de figure quelconque. $-\int \frac{h}{NS} Yx - Xy) dm = 0$
ou l'on tirera les équations particulières de l'équilibre,
en ayant égard aux conditions du problème. 77. Et d'abord si le corps est
supposé entièrement libre, les six variations $\delta A, \delta r, \delta L, \delta i, \delta v$, feront
toutes indéterminées, & il faudra élever séparément à zéro les quantités
par où elles se trouvent multipliées, ce qui donnera ces six équations déjà
connues, $\int S X dm = 0, \int S Y dm = 0, \int S Z dm = 0, \int S X^2 dm = 0, \int S Y^2 dm = 0, \int S Z^2 dm = 0$
 $\int S \{X^2 + Y^2 + Z^2\} dm = Q^2 S \{1\} dm = 0$. 58* En second lieu, s'il y a dans le
corps un point fixe autour duquel il ait simplement la liberté de pouvoir
pirouetter en tout sens, qu'on nomme a, b, c les valeurs des coordonnées
 x, y, z pour ce point; il faudra que l'on ait $\delta a = 0, \delta b = 0, \delta c = 0$; donc « $\int Ta -$
 $\int bs - \int cs = 0$, lif. $\int a^2 N - \int ciL = \int Q^2 if^2 atM - \int b^2 L^2 Q^2 y$ d'où l'on tire

Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 17.25% accurate

Première Partie. 115[^] Qu'on fiibftîcae ces valeurs dans Téquatlon générale de l'article précédent « & mettant fous le iîgne S les quantités CyhyC qui font confahtes par rapport aux difflîrens points du corps , on aura cette transformée » $\int MS(X(i-c)-Z(x-a))dm'^{\wedge}$ laquelle ne fournira donc plus que trais équations» (avoir, $\int S(Y(x - X(y^b)))dm^o$ S {JCfi^{^c}J[^] Z fx — ajjdmssso SfZfy^{^b}J[^]Yfi^{^c}JJdm^{^o}. 5 9. En troifieme lieu s'il y a dans le corps deux points fiaces, U que JT, h (oient les valeurs de y, ^ pour le lêcond de ces points , où aura de plus donc, comparant ces valeurs de /a» ^' ^vec os^{^i} de i'artide précédent > on aura (g— b)ll[^](h^{^f})[^]Mt:[^]0

The text on this page is estimated to be only 21.83% accurate

120 MÉCANIQUE ANALYTIQUE, Les deux premières de ces équations donnent & comme ces valeurs satisfont aussi à la troisième équation, il s'en suit que la variation de V demeure indéterminée. Faifint donc ces substitutions dans la transformée de l'article précédent, on aura $\int (g - b) \{ X[i' - c]^Z \{ x^a \} \} dm^a$ ainsi les conditions de l'équilibre feront renfermées dans cette seule équation, $\int (f, h - c) \{ r \{ x^a \} - X(y' - b) \} dm^a + i^f - a) \{ Z \{ y' - b \} - r \{ l - c \} \} dm^o, ^O$. En général si les deux points du corps que nous venons de supposer fixes ne seroient pas, mais qu'ils fussent mobiles sur des lignes ou des surfaces données, ou même joints entr'eux d'une manière quelconque, on auroit alors une ou plusieurs équations différentielles entre les variations des coordonnées x, y, z qui répondent à ces points; substituant à la place de ces variations leurs valeurs en J, r, θ, ϕ , etc., si M, N d'après les formules générales de l'article 55, on auroit autant d'équations entre ces dernières variations, au moyen desquelles on détermineroit quelques-unes de ces variations par les autres, substituant ensuite ces valeurs dans l'équation générale, on égalerait à zéro chacun des coefficients des variations reliantes; ce

The text on this page is estimated to be only 19.69% accurate

P&BMiERE Partie, ' m ce qui fbanura toutes les équations néceflâkes pour Téquilîbce. La marche du calcul eft, comme Ton voit, toujours la' même; & c'eft ce qu'on doit regarder comme un des principaux .ivancdi;cs de cette mcthode. ♦ 6 I . Au refte, les exprclîions trouvées plus haut (art. 5*5), pour les variations <rx, «ry, font ^oir que ces variations ce font que les réfulcats des mouvemens de trandacion Se de rotation , que nous avons confidérés en général dans la Section troifieme. En efiet, il eft vifible que les termes /a , /a* » qui Tonc .communs à tous les points du corps, représentent les petits efpaces parcourus ^ar le' corps , Aiiivant- les direâions des coordonnées x^y, en vertu d'un mouvement quelconque de tranflncion ; Se on voit par les formules de l'article 3 de la même Section, que les termes $s^{^r}Af - y^{^N} x^{^N} - ^{\wedge} \wedge L S^{^L} - X J'' Af$ reprcfentent les petits efpaces parcourus par chaque point du corps ^ fuivant les mêmes directions , en vertu de trois mouvemens de rotation iLy /ikf, s N autour des trois axes des x» y\ W ces quantités ^ L , i'N répondant aux quantités 1/4, i^f de Tartide cité Ainfi on auroic pu déduire immédiatement "ies «iq»reflionj^ done il f agit de la feule côneidératidn de ces mouvemens ^ ce qui auroit été plus iîmple , mais non pas diteéL I/anaJyfe précédente conduit natniellement à ces expreflions > 86 prouve par-là d'une manière directe ,6c générale , que lorfque les difFérens points d'un fyftême confervent leur polition refpe^live; le fydême ne peut avoir à chaque inflaot que des mouvemeps, de cranflation dans Tefpace, & de ro< udon aiitoar.de trois axes perpendiculaires êotr'eux. Q uiyiu^L-U Ly Google

The text on this page is estimated to be only 23.21% accurate

122 MÉCANIQUE ANALYTIQUE. SIXIÈME SECTION. . . -

5) Quant à l'Hydrostatique. où nous nous occupons de la constitution intérieure des fluides, nous ne pouvons douer que les particules qui les composent de forces matérielles, & que par cette raison les lois générales de l'équilibre ne leur conviennent comme aux corps solides. En effet, la propriété principale des fluides & la seule qui les distingue des corps solides, consiste en ce que toutes leurs parties cèdent à la moindre force, & peuvent (se mouvoir entre elles) avec toute la facilité possible, quelle que soit d'ailleurs la liaison & l'adhésion mutuelle de ces parties. Or cette propriété pouvant aisément être traduite en calcul, il s'enfuit que les lois de l'équilibre des fluides ne demandent pas une théorie particulière, mais qu'elles ne doivent être qu'un cas particulier de la théorie générale de la Statique. C'est sous ce point de vue que nous allons, les considérer; mais nous croyons devoir commencer par exposer en peu de mots les différents principes qui ont été employés jusqu'ici dans cette partie de la Statique, qu'on nomme communément Hydrostatique. Archimède est le plus ancien Auteur qui nous ait laissé quelques principes sur l'équilibre des fluides. Son Traité de *Methodibus* n'a jamais été retrouvé en grec; il y en a donc seulement une traduction latine assez défectueuse, lorsque Comraendin entreprit de le restituer & de le réviser by Google

The text on this page is estimated to be only 24.45% accurate

PHÉMI & XKT 12} par des notes; il parut par les
folds de ceXavant Comment caceur en 1565, sous le titre de *lis qua
vehuntur in aqua*» Cet Ouvrage qu'on peut regarder comme un des plus
précieux & cites de l'antiquité, est divisé en deux Livres. Dans le premier
Archimède pose ces deux principes, qu'il regarde comme des principes
d'expérience, & sur lesquels il fonde toute sa théorie, 1^{er}. Que la nature des
fluides est telle que les parties moins pressées sont chassées par celles qui le
font davantage & que. chaque partie est toujours pressée par le poids de
la colonne qui lui répond verticalement, 2^e. Que tout, ce qui est poussé en
haut par un fluide est toujours poussé suivant la perpendiculaire qui passe
par son centre de gravité. Du premier principe Archimède conclut d'abord
que la surface d'un fluide dont toutes les parties sont pressées vers le
centre de la terre, doit être sphérique pour que le fluide soit en équilibre.
Ensuite il démontre qu'un corps pesant qu'un égal volume de fluide
doit s'enfoncer tout fait parce qu'en considérant deux pyramides
égales du fluide supposé en équilibre autour du centre de la terre celle où
le corps neferoit plongé qu'en partie, exerceroit une moindre pression que
tantre fût le centre de la terre « ou en général sur une surface sphérique
quelconque qu'on imagineroit autour de ce centre. Il prouve de la même
manière que les corps plus légers qu'un égal volume du fluide ne peuvent
s'y enfoncer que jusqu'à ce que la partie submergée occupe la place d'un
volume de fluide aussi pesant que le corps entier d'où il déduit ces deux
théorèmes Uydrostatiques, que les corps plus légers que des volumes égaux
d'un fluide y étant plongés, en ont l'apparence de bas

The text on this page is estimated to be only 27.59% accurate

124 M] & CHANI*QUt ANALITXQUE. en haut avec une force égale à l'excès du poids du fluide déplacé sur celui du corps plongé, 5c que les corps plus légers y perdent une partie de leur poids égale à celui du fluide déplacé. Archimède se sert ensuite de son fécond principe pour établir les lois de l'équilibre des corps qui flottent sur un fluide; il démontre que toute Sphère plus légère qu'un égal volume du fluide, y étant plongée, doit, nécessairement se disposer de manière que la base en soit horizontale ; & (à démonstration contraire) à faire voir que si la base étoit inclinée , le poids total du corps considéré comme concentré dans son centre de gravité, & la poussée verticale du fluide considérée aussi comme concentrée dans le centre de gravité de la partie submergée, tendroient toujours à faire tourner le corps jusqu'à ce que sa base fût redevenue horizontale. • Tels sont les objets du premier Livre. Dans le fécond, Archimède donne, d'après les mêmes principes, les lois de l'équilibre de différents solides formés par la révolution des sections coniques, & plongés dans des fluides plus légers que ces corps ; il examine les cas où ces solides peuvent rester inclinés, ceux où ils doivent s'y tenir debout, & ceux où ils doivent culbuter ou se redresser. Ce Livre est un des plus beaux monuments du génie d'Archimède, & renferme une théorie de la Stabilité des corps flottants, à laquelle les modernes ont peu ajouté. • Quoique d'après ce qu'Archimède avoit démontré , il ne fût pas difficile de déterminer la pression d'un fluide sur le fond ou sur les parois du vase dans lequel il est renfermé, Stevin est néanmoins le premier qui ait entrepris cette re

The text on this page is estimated to be only 24.48% accurate

Première Partie. Z2f cherche, & qui ait découverte paradoxe Hydrostatique, qu'un fluide peut exercer une pression beaucoup plus grande que son propre poids. C'est dans le tome troisième des Hypomnemata Mathematica[^] traduits de l'Hollandais par Snellius, [^] publiés à Leyde en 1687[^] que je trouve la [^] théorie Hydrostatique de Sceleux. Après avoir prouvé qu'un corps solide de figure quelconque, & de même gravité que l'eau peut y rester dans une situation quelconque, par la raison qu'il occupe la même place, & pèse autant que, si c'était de l'eau, Stevius imagine un vase céleux rempli d'eau, & il veut voir aisément que son fond doit supporter tout le poids de l'eau qui remplit le vase. Il suppose ensuite qu'un solide de figure quelconque, & de même gravité que l'eau; il est tel que la pression restera la même; de sorte que si on donne au solide plongé une figure telle qu'il ne soit plus qu'un canal de fluide d'une figure quelconque, la pression de ce canal sur la base fera encore la même, & par conséquent égale au poids d'une colonne verticale d'eau qui aurait cette même base. Or Stevin observe qu'en supposant ce solide fixement à sa place, il n'en peut résulter aucun changement dans la situation de l'eau sur le fond du vase; donc la pression sur ce fond fera toujours égale au poids de la même colonne d'eau, quelle que soit la figure du vase. Stevin passe de-là à déterminer la pression de l'eau sur les parois verticales ou inclinées; il divise leur surface en plusieurs petites parties par des lignes horizontales, & il fait voir que chaque partie est plus pressée que si elle étoit horizontale & à la hauteur de son bord supérieur, mais qu'en même temps elle est moins pressée que si elle étoit placée.

The text on this page is estimated to be only 25.65% accurate

125 MieuANiQU£ analitique« horifoncalemenc à la hauteur de fon bord inférieur. D*ou en diminuant la largeur des parties » & augmentant leur *nombre'à Tinfini, il prouve par la méthode des 'limites, que la'prefllgn lur une paroi plane inclinée, eft égale au poids d'une colonne dont cette paroi feroit la bafe , à donc la liajiteur feroit la moitié de la hauteur du vafe. Il détermine enfuice la prelTion fur une p<irrie quelconque d'une paroi plane inclinée, & il la trouve égale au poids d'iyie colonne d'eau qui feroic formée en appliquant per* pendiculairement à chaque point de cette partie des droites égales à la profondeur de ce point fous Teau. Ce théorème étant ainS déj^ontré pour des (iiiéaces ^anes quelconques» fituées comme l'on voudra , il eft ^cile de Tétendre à des . furfaces courbes^ielconques, & d'en conclure que la prèA Hon exercée par un fluide pefant contre une furface quelconque, a pour mcfure le poids d'une colonne de ce même fluide, laquelle auroit pour bafe cette mcme furface, convertie en une furface plane, s'il eft nécelTaire , ÔC dont les hauteurs répondantes aux diflxrens points de la bafe , feroient les mêmes que les dii^ances des points correfpondans de la furface à la ligne de oivea» du fluide, ou ce qui revient au même, cette preflion fera mefuiée par le poids d'une colonne qui auroit pour bafe la furface prMTée, & pour .hauteur la diftance verticale du centre de gravité de cette même furface , à la furface fupérieure du Huide. Les théorie3 précédentes de l'équilibre ÔC de la preflion ,des fluides font, comme l'on voit, entièrement indépendantes des principes généraux de la Statique , n'étant fondées que fur des principes d'expérience, [Particuliers aux fluides; 9c cette manière de démontrer les loix de l'Hydroftatique,

The text on this page is estimated to be only 20.49% accurate

Première Partie.. 127 en di^uiiànt de la connoiTaiice expérimentale de quelc]ucsuoës de ces Joix» .celle de touces les aatrcss a été adoptée 'depuis par la plupart des Auteurs -modenies, U a ^t de THydroftatique une (cience^tout-à-fsit différentej» & indépendance de la Statique. Cependant il écoit imporcanc de lier ces deux fcienes enfembJe, 6c de les faire dépendre d'un fcul èc mcmc principe. Or parmi les difflérens Principes qui peuvent fervir de bafe à la Statique, U donc nous avons donné une cxpon* tjon fuccinte dans la première Se<H:ion, il eft vitible qu'il ,fi*y a que celui des viceilès virtuelles qui s^applique âatu* relleinent à. Téquilibre des fluides. Auflî «Galilée, AuteHr de ce Principe, s'eneft fšrvl également pour démontrer les principaux ^éorêmes de Statique & d'Hydroft^tique. Dans Ton Difcours intome aUe cofe che fltmno infu Paqua , o che in qudU fi muovono ; il déduit inniédiacement de ce principe l'cquilibre de l'eau dans un Typhon, en fai{ant voir que fi on fuppofe le fluide à I.\ n.cme hauteur dans les deux branches, il ne faupit defcendre dans l'une , & monter dans Tautre, faiis que les momens ne fcient égaux dans la partie du fluide quidefcend, & <lans celle qui monte. Galilée dé» montre d*une Manière (eroblable Téquilibre des fluides avec les (blides qui y font plongés; & quoique iès démonftrationt paroiflèiit n'avoir pas toute la rigueur qu'on y pourroit défirer, il eft cependant facile de l'y mettre en envifàgeant le Principe donc il s'agit dans une plus grande généralité, ainfi que l'a fait depuis l'Abbé (Tiandi dans fes notes, au même Traité de Galilée. Delcarres &: Pafcal ont égalemcuc employé le principe lies vitellès virtuelles dans l'hydrolbatique ; ce dernier fur-tout a fait le plus grand ufage dans foa

The text on this page is estimated to be only 23.12% accurate

128 MÉCANIQUE ANALITIQUE B. Traité de
règles des liqueurs y & s'en est servi pour démontrer la propriété
principale des fluides ; savoir qu'une pression quelconque appliquée à un
point, se répand également dans tous les autres points. ,
Néanmoins, quoique ce principe ait l'avantage d'être simple & général, soit
pour l'équilibre des fluides, soit pour celui des corps solides, il a été
abandonné par la plupart des Auteurs modernes qui ont traité de l'
Hydrostatique , & sur-tout par ceux qui ont entrepris de reculer les limites
de cette Science , en cherchant les loix de l'équilibre des fluides
hétérogènes, donc toutes les parties sont animées par des forces
quelconques ; recherche très-importante par le rapport qu'elle a avec la
fameuse question de la figure de la Terre. • • Huyghens a pris dans cette
recherche, pour principe d'équilibre , la perpendicularité de la pesanteur à la
surface. Newton a été parti du principe de l'égalité des poids des colonnes
centrales. Bouguer a remarqué ensuite que souvent ces deux principes ne
donnoient pas le même résultat, & en a conclu que pour qu'il y eût équilibre
dans un même fluide , il falloit que les deux principes y eussent lieu à la
fois, & s'accordassent à donner la même figure à la surface du fluide. Mais
M. Clairaut a démontré de plus qu'il peut y avoir des cas où cet accord ait
lieu, & où cependant il n'y auroit point d'équilibre. Maclaurin a généralisé
le principe de Newton , en établissant que dans un même fluide en équilibre,
chaque particule doit être comprimée également par toutes les colonnes
verticales du fluide, lesquelles appuient sur cette particule, & se terminent
à la surface; & M. Clairaut l'a rendu plus général encore , en faisant voir que
l'équilibre Digitized by Goo

The text on this page is estimated to be only 26.44% accurate

Prbmieie Partie. iip libre d*itne inafle fluide^ demande- que les efforts de toutes Jes parties du^ fluide, renfermées dans un canal quelconque , aboutissant à la surface , ou renfermées en lui-même , se détruissent mutuellement. Enfin il a déduit le premier de ce Principe , les vraies loix fondamentales de l'équilibre d'une masse fluide dont toutes les parties sont animées par des forces quelconques, & il a trouvé les équations aux différences partielles , par lesquelles on peut exprimer ces loix. Découvert qui a changé la face de l'Hydrostatique, s'en est fait comme une science ' nouvelle. Le Principe de M. Clairaut n'est qu'une conséquence naturelle du Principe de l'égalité de pression en tout sens. Aussi M. d'Alembert a-t-il déduit immédiatement de ce dernier principe, les mêmes équations différentielles que M. Clairaut avait trouvées par le lien; & il faut avouer que ce Principe renferme en effet la propriété la plus simple & la plus générale que l'expérience ait fait découvrir dans l'équilibre des fluides. Mais la connoissance de cette propriété est-elle indispensable dans la recherche des loix de l'équilibre des fluides ? Et ne peut-on pas dériver ces loix directement de la nature même des fluides considérés comme des amas de molécules très-déliées ^ indépendantes les unes des autres, & parfaitement mobiles en tout sens? C'est ce que je vais tâcher de faire dans les Sections suivantes, en n'employant que le Principe général de l'équilibre dont j'ai fait usage jusqu'ici pour les corps solides & cette partie de mon travail fournira, non-seulement une des plus belles applications du Principe dont il s'agit, mais servira aussi à simplifier à quelques égards la théorie même de l'Hydrostatique. On verra que les fluides en général (se divisent en deux

The text on this page is estimated to be only 19.80% accurate

130 MÉCHANIQUE ANALITIQUE. eipeces; eil fluides
incompreilibles donc les parties peuv^ changer de figures mais ians changer
de volume; 6c en fluides compreffibles U elaiHques donc les parties
peuvent changer à la fois de igitue & de volume « & tendent toujours à fe
dilater avec une force connue qu'on fuppose ordioairemenc proporriionnelle
à une fonction de la denficé. L'eau, le mercure, ôcc , appartiennent à la
première • efpece; & Tair , la vapeur de ieau bouillante, £cc, appartiennent à
U féconde. Nous traiterons d'abord de l'équilibre des fluides
incpmpreiTibles; 6c enfuite de celui des fluides coippreffibles 6c élaftiques.
SEPTIEME SEC T.I O N. Ve Véquilibre des fimdes incmfrtIpbUs, X* Soit
une mafTe fluide m% dont tous les points foient animés par des pefanteurs
ou forces quelconques 6cc, dirigées iuivanc les lignes r\9Lc^ on aura»
fuivant les dénominations de l'article ii de la Seétion 4, pour la fomme des
momens de toutes çes.fbrce^, la îot» mule intégrale $S \{PlpU^* C ^Rlr-h 6cc\}$
dm , laquelle devra être nulle en général, pour qu'il y ait équilibre dans le
fluide. • 2. Suppofons d'abord le fluide renfermé dans un canal ou tuyau
infinimenc étroit, 6c de figure donnée; 6c imaginons ce fluide divifé en
tranches ou portions infiniment uiyiu^uu Ly Google

The text on this page is estimated to be only 22.14% accurate

PS^{SKIERE} BaUTIX. I3I petites, dont la hauteur soit ds^{8c} la largeur -p[^] on pourra 'prendre dm[^] u ds[^] à cause que la largeur «# du tuyau est supposée infiniment petite, ds étant réellement de la courbe du tuyau. Or en imaginant que le fluide reçoive un petit mouvement, & change infiniment peu de place dans le tuyau, soit le petit espace que la tranche ou particule dm parcourt dans le tuyau; il est clair que mis fera la quantité de fluide qui passera en même-temps par chacune des sections du canal. Donc à cause de l'incompressibilité du fluide, il faudra que cette quantité (bit par-tout la même ; de sorte que faisant «^{is} *» la quantité « iera constamment par rapport à la courbe du tuyau. On aura ainsi < * s » & par conséquent dm «■^{iL}. ; de sorte que la formule qui exprime la somme des moments des forces, deviendra (en faisant sortir hors du ligne intégral 5* la quantité constante <*) Maintenant il est visible que puisque Xp, «^r, &c» sont les variations des lignes /», ^, r, &c , résultantes de la variation S s , ces variations doivent avoir entr'elles les mêmes rapports que les différentielles , </j, yr, ôcc, j j à cause de la figure du canal donnée; ainsi 01[^] aura "f^{^^^}» - j[^] = , -jj- «a* -jj , &c ; ce qui réduira la formule précédente à cette forme, ' ^S (Pdp'^Qdq'^Rdr-^iLc)^ 011 les différentielles dp[^] dq[^] dr[^] &c, se rapportent à la courbe du canal , & le ligne S indique une intégrale prise par toute l'étendue du canal. Faisant donc cette quantité m o » on aura

Téquadon

The text on this page is estimated to be only 24.27% accurate

1² MICHAÏQUE ANALITIQUE. laquelle contient la loi générale de l'équilibre d'un fluide renfermé dans un canal de figure quelconque. 3. Si outre les forces $P, R, 6v, c$, qui animent chaque point du fluide il y avoit de plus à l'une des extrémités du canal une force extérieure n' qui agît par le moyen d'un piston sur la surface du fluide perpendiculairement aux parois du canal ; alors dénotant par δ le petit espace parcouru par la tranche de fluide qu'on suppose déplacée par la force n' tandis que les autres tranches parcourent les différents espaces, il faudra ajouter à la somme des momens des forces $P, C, i, \&c$, le moment de la force n' , lequel sera représenté par $n'S'$. Or si on nomme la section du canal à l'endroit où agit la force n' , on aura « V' pour la quantité de fluide qui passe par la section tandis que par une autre section quelconque m » il passe la quantité de fluide. Mais l'incompressibilité du fluide demande que ces quantités soient égales par-tout les mêmes ; donc ayant déjà supposé $I, j = t$, on aura au lieu de J, s « i par conséquent //a Donc la somme totale des momens des forces qui agissent sur le fluide, sera représentée par la formule de force que l'équation de l'équilibre fera -h $S \{ Pdp + Qdq + Rdr + JhUc \}$. 4-11 est évident que dans l'état d'équilibre, la force n' doit être contrebalancée par la pression du fluide sur le piston. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 20.64% accurate

PREMIERE Partie. ijj piftofi donc la largeur est ; ci*ott il 8*enruk
que cette pression Ceta égale à n' , & par conséq. Donc en général la
pression du fluide sur chaque point du pUloa , Cen. exprimée par la formule
intégrale en prenant cette intégrale par toute la longueur du canal. Et cette
pression fera aussi la même» au lieu d'un piftoÀ mobile on suppoie un. fond
Immobile qui ferme le canal d'un côté. y. Si à l'autre extrémité du canal il y
avoit une autre force n'' agissante de même par le moyen d'un piston, on
trouveroit pareillement , en nommant u la section du canal dans cet
endroit, l'équation , pour l'équilibre du fluide. Donc si le fluide est parfait
que par les deux forces extérieures n' & appliquées aux surfaces u & t il
faudra $n' \cdot u$ pour l'équilibre que l'on ait $H = \rho \cdot g \cdot t$; d'où Ton voit que les deux
forces n' & n'' doivent être de directions contraires, & en même temps
réciproquement proportionnelles aux surfaces u sur lesquelles ces forces
agissent. Proposition qu'on regarde communément comme un principe
d'expérience. Ou du moins comme une suite du principe de l'égalité de
pression en tout sens» dans lequel la plupart des Attièun d'Hydrostatique
font consister l'essence des fluides. t

The text on this page is estimated to be only 18.03% accurate

134 MÉCANIQUE ANALITIQUE. 7. Connoissances des loix de l'équilibre d'un fluide renfermé dans un canal très-étroit & de figure quelconque, il n'est pas difficile d'en déduire celles de l'équilibre d'une maille quelconque de fluide renfermée dans un vase ou non. Car il est évident que si un fluide est en équilibre, & qu'on imagine un canal quelconque qui le traverse, le fluide contenu dans ce canal sera aussi en équilibre de lui-même, c'est-à-dire » indépendamment de tout le reste du fluide. On aura donc pour l'équilibre de ce canal, en faisant abstraction des forces extérieures (art. 1)^o $S(Pdp - Qdq - Rdr - 4ftiu) = iO$ & comme la figure du canal doit être indéterminée » l'équation précédente devra toujours avoir lieu, en faisant varier cette figure d'une manière quelconque. ²o Dénotons en général par $\diamond$ la valeur de l'intégrale $S^P dp - k - Qc/q - T - Rdr - ^{Sc}J$ prise par toute la longueur du canal, en sorte que l'équation de l'équilibre du canal soit $4 = 0$; & représentant les variations par la caractéristique $\wedge$, comme c'est l'usage, il faudra que l'on ait aussi en général $\diamond \diamond \diamond SB$ ou $\diamond S$. $S fP dp Qdq - hRdr \wedge icc / ^{Sl}Fdp \wedge Qdq - i'Rdr \wedge SicJu \wedge a$ $S(Fldp \wedge Q \wedge dq \wedge Rdr \wedge b : \zeta' \wedge iPdp \wedge h \wedge Qdq \wedge \wedge Rdr \wedge i' tccj$. Changeant $\wedge$ en d & faisant ensuite disparaître le double signe dJ par des intégrations par parties, suivant les principes connus, du calcul des variations, on aura $J < b^P Sp^Q Sq - R^r \wedge c. ' !. f^P dp - dP fp - sQdqr \sim dQiq \blacksquare * ^iRdr - ^dR^r - hUcJ$ Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 16.82% accurate

P & £ M I £ R £ Partie. 13 j où les termes qui font hbrs du (igne S
 fe rapportent aux extrémités de Tintégrale représentée par ce (igne, U
 répondent par conféquenc à la surface du fluide. Maintenant comme les
 quantités P, Ç , /t , 6cc ^ qui repréièntent les forces, font, ou peuvent
 toujours ccre fuppoftes des fon<D:ions de p , q y r , &c, il eft clair que la
 partie de <r * qui eft aiFeclée du figne 5, n'eft plus fufceptible de lédudlion
 ; donc pour que l'on ait en général » o, il ' faudra 1** que cette partie foit
 nulle dellemcme, te que par conféquent on ait pour chaque point de la maflè
 fluide» réqtiation identique ' x\ que Ton ait pour la furface extérieure du
 fluide, en fupposant que les différences fq, /r, &Cj fe rajH portent à cette
 furface. " • ♦ La première condition Servira à déterminer la nature des
 forces FtQfRfàcc^ parlefquellc^ le fluide pourra être en équilibre» & la
 féconde donnera la figuré même que le fluide doit prendre en vertu de 'ces
 forces. g. Supposons que les quantités P, Ç,/? , &c. foient telles que la
 première condition ait lieu» on aura dans ce cas iûnplement Or ^ * eft
 évidemment une différentielle exaële prise par rapport à la variable i; ainfi P
 fp'^ Qs-q ^ R'ir iLc^ fera aitifli une d^RSrentielle exaâ»; donc changeant i
 en

The text on this page is estimated to be only 19.58% accurate

1⁶ MÉCANIQUE ANALITIQUE. on aura la différentielle exacte $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \Delta \phi$, dont Δ fera l'intégrale. Réciproquement si $\mathbf{P} = -\nabla \phi$ une différentielle exacte la première condition sera nécessairement lieu. Car alors l'intégrale de cette quantité sera une fonction de x, y, z ; de sorte qu'en différentiant $\mathbf{P} = -\nabla \phi$ & de même $\nabla \times \mathbf{P} = 0$. $\oint \mathbf{P} \cdot d\mathbf{r} = 0$ Mais par les principes du calcul des variations, il est la même chose que $\delta \int \mathbf{P} \cdot d\mathbf{r} = 0$; donc on aura $\nabla \times \mathbf{P} = 0$ ce qui est la condition donc il s'agit. D'où il s'enfuit que cette condition se réduit à ce que les forces $\mathbf{P}$ soient telles que $\mathbf{P} = -\nabla \phi$ où ϕ soit une quantité intégrable. Nommant donc ϕ l'intégrale de cette quantité, la seconde condition de l'équilibre sera $\oint \mathbf{P} \cdot d\mathbf{r} = 0$ ou bien $\oint \mathbf{P} \cdot d\mathbf{r} = 0$ pour la surface extérieure du fluide; de sorte qu'en intégrant on aura $\phi = \text{const.}$ pour l'équation de cette surface. Si on considère l'équation même $\mathbf{P} = -\nabla \phi$ $\oint \mathbf{P} \cdot d\mathbf{r} = 0$ $\oint \mathbf{P} \cdot d\mathbf{r} = 0$, trouvée Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 17.66% accurate

• Première Partie. 137 trouvée dans l'article 7, on en pourra déduire les conditions analiriques qui doivent avoir lieu entre les* expreçffions des forces F, Q, &c;^car en regardant ces expreûions comme des fondions qi^conques de p^q^r^ &Ct on aura, fuivanc la notation reçue» $dP \wedge dp - J \wedge \text{---} \bullet \wedge dq - H dr \wedge c$; de mcme &C ainfi des autres différences ; fubftituant ces valeurs dans •rèquation précédente , & . ordonnant les termes , elle deviendra de cette forme, $(: \wedge \wedge \wedge) (\wedge rdq \wedge driq J \wedge 9cc \wedge o, 9c deVra \text{ ayoir}$ lieu indépendaflunent des diâître^ces $dp \wedge dq \wedge 'dr \wedge \wedge c; \wedge j), S \wedge qylrj \wedge CC. I O.$ Donc s'il n'y a aucune relation donnée entre les $\nabla \text{ariaUes } /f \wedge \wedge < [f \wedge \wedge c \wedge \wedge \text{ il}$ faudra faire féparémenc $I ' ' dr \wedge ' dp ' . rf < j > \wedge \wedge o ' ? ' ' * - ' \bullet . - \bullet (' \bullet \bullet \bullet - .$ Ce font les équations de condition connues pour rincé^rabilité de la formule $FdjfhQdq-hRdr \wedge \wedge cc \wedge ' \bullet S$

The text on this page is estimated to be only 19.46% accurate

138 MÉCHANIQUE ANALITIQUE. Mais si la variable r dépendoit, par exemple, des deux variables θ & ϕ en sorte que $ir^2 Adp - Bdq$ on auroit également $tr^2 A^p Btq$ donc $ir^2 dp^2 - B^2 dq^2$ — $dqlp$ — $drSq^2 A(pdq - dp^2 qj$; substituant ces valeurs dans l'équation générale, & égalant à zéro le coefficient de $dqdp - dqSp^2$ on auroit l'équation laquelle tiendra lieu des trois premières équations de Cœuvres, & ainsi du reste. 11. Lorsque la maille fluide n'a que deux dimensions » la position de chacun de ces points ne dépend que de deux variables; ainsi les différentes variables θ, ϕ, r & C pourront toujours se réduire à deux seulement; & il n'y aura alors qu'une seule équation de condition. Mais quand la maille fluide a trois dimensions, la position de ces points dépend en général de trois variables; par conséquent on pourra toujours réduire à trois toutes les différentes variables θ, ϕ, r l'on aura aussi trois équations de condition. . . . 12. Au reste, on a fait abstraction jusqu'ici de la densité du fluide, ou plutôt on l'a regardée comme constante & égale à l'unité; mais si on veut la faire varier, alors en nommant ρ la densité d'une particule quelconque dm on auroit (art. 1) $dm = \rho dV$ & moyennant quoi les quantités $P, \frac{1}{2} \rho, \rho c$, se trouveroient toutes multipliées par ρ . Ainsi l'on aura pour l'équilibre des fluides de densité variable les mêmes lois que pour l'équilibre des fluides homogènes.

The text on this page is estimated to be only 21.29% accurate

Partie, 135^e de densité ρ sur une surface dS
 multipliant les différentes forces par la densité du point fut lequel
 elles agissent } c'est-à-dire, en écrivant simplement ρdV , ρdV , ρdV
 place de ρdV , ρdV . ' ' I 3 • Nous avons commencé par chercher les lois de
 l'équilibre d'un fluide renfermé dans un vaisseau infiniment étroit, & nous
 en avons déduit ensuite les lois générales de l'équilibre d'un fluide
 quelconque On peut néanmoins parvenir immédiatement à ces dernières
 lois, en considérant d'abord la question dans toute sa généralité, & faisant
 usage de la méthode de la Section quatrième* Supposons, pour plus de
 simplicité, que toutes les forces qui agissent sur les particules du fluide
 (bient réduites à trois, représentées par X , Y , Z dirigées suivant les
 coordonnées rectangulaires X , Y , Z , c'est-à-dire, tendantes à diminuer ces
 coordonnées. Nous avons donné dans l'article 5 de la Section cinquième, les
 formules générales de cette réduction. Nommant dm la masse d'une
 particule quelconque, on aura pour la somme des moments des forces X ,
 Y , Z la formule intégrale $\int (Xx + Yy + Zz) dm$ or le volume de la particule
 dm peut être représenté par $\rho dxdydz$ en exprimant par ρ la densité, il
 est clair qu'on aura $dm = \rho dxdydz$; 6^e Le signe d'intégration $\int$
 appartiendra à la fois aux trois variables x , y , z , Il faudra de plus avoir égard
 à l'équation de condition résultante de l'incompressibilité du fluide, laquelle
 étant supposée représentée par $\phi(x, y, z) = 0$, on aura (en différentiant ϕ

The text on this page is estimated to be only 22.48% accurate

140 MÉCHANI'QUE A MALI TIQUE. içlon /» m^cipiant . par un' coefficient indétemiiiié ^> & intégraoc) la formule' 5a/Z à ajouter à la précédente. S'il n'y a point de forces accélératrices qui agiflènt fur la furface du fluide, ni de conditions particulières à cette TurFace , on aura fimplement pour l'équilibre cette équation, . (Setl. 4, art. 14) , dans laquelle il faudra prendre les intégrales relativement à toute la mafTe du fluide. 1 4* Cherchons maintenant les valeurs de L &c de Ta variation fX, Il eft viûble que la condition de Tincompreffibilité confifte en ce que le volume de chaque particule (bit conftant; ainfi ayant exprimé ce volume par $dx dy d^z$ on aura $dx dy d^z$ s'^conft. pour l'équation de condition; par conféquent Z fera $\int dx dy d^z = \text{conft. t.} (dx dy d^z)$. four avoir la variation $S . \int J x dy d^z$, il femble qu'il n'y auroit qu'à différentier l'impement $dx dy d^z$ félon (T; mais il y a ici une confidération particulière ^ faire , &c f^ms la* quelle le calcul ne feroit pas rigoureux. La quantité $\frac{dx}{x} \frac{dy}{y} \frac{dz}{z}$ n'exprime le volume d'une particule qu'autant qu'on fuppole la figure de cette particule , un parallélépipède redangulaire dont les côtés font parallèles aux axes des y cette fuppofitiôn eft très-permife, puifqu'on peut imaginer le fluide partagé en élémens infiniment petits d'une figure quelconque. Or $\int (dx dy d^z)$ doit exprimer la variation . • q jc (curire ce volume lorfque la particule change infiniment peu de ficuation, fes coordonnées x^y , \ devenant $x-f- <fx$, $Jf'^y^* \wedge \wedge \wedge V^* \wedge \wedge c^{\wedge \wedge \wedge}$ ue ii dans ce changement Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 16.06% accurate

F&£Ml£]l£. Fa &.T.I E. • 141 de Heu la particule changeoit auflî.
 de figure .•8c\de pblldon teladvement aux axes des oa ne pourroic plus
 mefurer fon volume par le produit des différences $d(x'^{fx})y$ J Cy-h $^y_j y f^{\wedge}$
 $^{\wedge}xJ$ 9 coordonnées;; ainfi pour avoir la variation exa(Sle du volume, il
 faut avoir égard à la fois au changement de poicion de figure de la par>
 ticule. • Pour cela il faut confidérerles coordonnées qui répondent aux
 angles dû parallélépipède $^x^j't/$:(dans fon ctac primitif» êc dans l'état
 changé. Dans le premier état il eft vifible que ces coordonnées ibnt $Xf \setminus x-$
 $^dx^ \setminus ^y^y^xi dy^ X'^dxy y-^dy^$ Bcde-là, en prenant les racines de la
 (omme* des carrés des différences des coordonnées pour deux angles
 quelconques, on aura la droite qui joint ces angles, &: qui fera ou uii cote
 ou une diagonale du parallélépipède; on trouve ainfi $dx^ dy^ d:^$ pour les
 côtés, & $\setminus^fdx^ -H dy^J^ (dx^ -f- d^*)^ (dy^-\wedge di)^ V (dx^ -k-dy-rh dfj$
 pôfic les diagonales. Suppofbns maintenant que les coordonnées \ac , j',,;
 deviennent «-*/-* -i- ^ytX -H ^ & regardons ^ac, comme des foi.âions
 quelconques de j .» :(; en'Êuiînt va-rier focceflivement les y, :^ de $dx^ dy$,
 $d:^$ on trouvera ce que doivent devenir les autres coordennées^ Ainfi en
 faifant varier fimplement x de $dx^$ on aura se^ $dx^Px-^ ^ dx^ y^i:y^ dx$, î î.
 $^Jj dx$ pour ce que deviennent les coordonnées $x^dx^ yi$ 1; faifant varier y -
 de $dy^$ on anra «H-^A

The text on this page is estimated to be only 22.32% accurate

MICHAMIQUE ANALITIQUE. $\int dy \cdot y^{-dy-i'iy'h} \wedge dy$, $\int JjA \cdot dy$
pour ce que deviennent $x^y \wedge dy \wedge$; & faisant varier $\wedge$ de $d:$ on aura $jc-$
 $t-/xH \wedge l^y Jj^Z- </\wedge$, $:j-h/j-4-j^:(-4- -^7p- <^{\hat{}} pott''^{\wedge}$ ce que deviennent
même en faisant varier à la fois x de $rfjc$ & y de $\wedge y$, on aura $\ll -1-4/* \wedge * dy*$
 $y^{\wedge} - dy^{\wedge} iy^{\wedge} \wedge dx^{\wedge} - dy^{\wedge}$, $\wedge'^{\wedge\wedge\wedge} dx^{\wedge} - dy^{\wedge}$, pour ce que deviennent $\ll^{\wedge} - \ll^{\wedge} fx, y$
 $\wedge dyt$ if & $\wedge i \& A$ des autres. De là en prenant U racine de k somme des carrés
des différences de ces nouvelles coordonnées pour deux $\wedge$ les quelconques
du rhomboïde dans lequel s'est changé le parâclepipède $d\%dyd\backslash$, on
trouvera aux quantités infiniment petites du troisième ordre près, ces
expressions pour les ceUes-ciponrle» «liagonale» $y/l\{\wedge d.\wedge\wedge d=\wedge^{\wedge}\{dy^{\wedge}-$
 $i^{\wedge}dyn$, ■ d'où il est aisé de conclure que le rhomboïde dont il s'agit est de
nouveau un parallélépipède redoublé, fie que. par Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 13.46% accurate

Première Partie. 143 conféaenc (on conteim peut êcrè exprimé par le prodaic Donc Iz variation du volume du premier parallélépipède , «'eft-à-diie, h valeur de i,(dx dy di^ lera exprimée par par conÂîquent développant les termes, & négligeant les infiniment petits des ordres fvipérieursy on aura. ç*eft là raleiv de qvtîi fluidra iîibftîntêr tfans Tëfputîoa de rardde précédent. I y. Cette équation deviendra donc de cette forme, en y mettant pour dm U valeur Adxdjd,:^ S(hX^x-i- A^^O'-h aZj^^^^a -iÛL 4. A -^^^ </x ass o; & il ne t*a^ra plus que d'y fsdié diif• paroître les doubles iîgoes «^i" par la méthode expoîée dans l'article 17 de la goacrieme S<étio»b. • . ' Coofidéroos d*aberd la quanrité S a ^ x i/y :[, où le /Igne 5 dénote une triple intégrale relative à x, ^, .^; il cft clair que comme la différence de n'eft relative qu'à la variation de il ne faudra aulE pour la Àire di/parottre ^tt*avoir égard à rintég^on relative ^ c*eft pourquoi on donnera d'abord à cette quantité la fo^me • . . ^ Sdyd^S^-'^ dxi enfuite on transforineca l'intégrale

The text on this page is estimated to be only 13.15% accurate

144 Méc H A.H.IQU B AN ALI TIQUE. fimple S A ^ 4x en a" x'
 -37- » quantités marquées d'an tfaît fe rapportent au commence^{*} ment de
 l'intégration, & celles qui en ont deux fe rapportent aux points où elle finit,
 fuivant la notation adoptée dans l'endroit cité. * Ainû la/quantité dont il
 s'agit fe trou^{*} vera changée[^] çî[^] celle-ci[^] . . . ■ . . . [^]ou, ce qui eft la
 même chofe , . . . * " ■ ■ ' Sff '[^]x[^]J[^]x'Jdydi—S-[^]lxJxiydx-' . ' De' h
 même'manièiei a: yki onirisûfbadeiïien»-' femblablev on changera^{*} les
 quantités ""T[^] *[^] *[^] ^ l » ^ Sx -[^] dx dydi, en ceiûes<U ,
 S {tK*[^][^][^]J[^]iiJdx.dyT-»S/[^][^]Xdx dy4i' • Faifant ces fubftitutions ^ on aura
 donc pour l'équilibre. • de la maffe fluide, cette[^]ûânétt<îétté«il[^]:' y. r : -H 5
 jc" — J[^]x'; dydi'JhS(j[^]fy"[^] V jc df ^ 'hS/>[^]"n"rr">ff,t!Jdx dy[^].Oi[^]:. . '
 ,v cAr -:f-....- i dans laquelle il n'y aura' plus qu'à égaler fèpàrément k zéro[^]
 les coëfficiens des variations indéterminées [^]x, 9 [^]\ (art. 8, Scd* 4). . . . •
 • ; • . ' . • Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 16.53% accurate

P & E M 1 £ & X Partie. 14[^] ! 1 5. On aura donc d'abord ces trois équations indéterminées lesquelles doivent avoir lieu pour tous les joints de la surface fluide.[^]* Ensuite si le fluide est libre de tous côtés., les variations $\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z}$ qui se rapportent au point de la surface du fluide feroient aussi indéterminées, & par conséquent il faudra encore égaler séparément à zéro leurs coefficients, ce qui donnera $\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \frac{\partial p}{\partial z} = 0$, c'est-à-dire, en général $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ pour tous les points de la surface du fluide. Cette équation servira à déterminer la figure de cette surface. « n'en fera de même lorsque le fluide est renfermé dans un vase, pour la partie de la surface où le vase est ouvert; mais à l'égard de la partie qui est appuyée contre les parois, il est clair que les variations $\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z}$ doivent avoir entre elles des rapports donnés par la figure de ces parois, puisque le fluide ne peut que couler dans leur direction, & nous démontrerons plus bas (art. 20, § 1), que quelle que puisse être leur figure, les termes qui renferment les variations en question sont toujours nuls d'elles-mêmes; -de sorte qu'il n'y aura aucune condition nouvelle à cette partie de la surface du fluide. Les trois équations qu'on vient de trouver pour les conditions de l'équilibre du fluide., donnent $\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y} = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial z}$ donc puisque $\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial x}$ Digiized by Google

The text on this page is estimated to be only 20.78% accurate

146 MÉCHANIQUE ANALITIQUE. $\frac{dy}{dx} = \frac{4}{x^3}$, on aura $A = \frac{4}{x^2}$ par conséquent il y a une quantité $A \frac{dy}{dx}$ qui est une différentielle complète en x , & cette condition renferme seule les lois de l'équilibre des fluides. On voit aussi qu'elle s'accorde avec ce qu'on a trouvé ci-dessus (art. 8) ; car par ce qu'on a démontré dans l'article 5 de la Section cinquième, l'on a en général $X dx + Y dy = 0$. Si on élimine la quantité A des mêmes équations, on a les suivantes $\frac{dy}{dx} = \frac{4}{x^3}$ & $\frac{dy}{dx} = \frac{4}{x^3}$. Ces deux équations qui diffèrent entr'elles, & donc l'une ne pourroit pas être, regardée comme la suite des deux autres. Ces conditions sont donc nécessaires pour que la masse fluide puisse être en équilibre, en vertu des forces X, Y . Lorsqu'elles ont lieu par la nature de ces forces, on est assuré que l'équilibre est possible ; il ne reste plus qu'à trouver la figure que la masse fluide doit prendre pour être en équilibre, c'est-à-dire, l'équation de la surface extérieure du fluide. Or nous avons vu dans l'article 16, qu'on doit avoir dans chaque point de cette surface $X dx + Y dy = 0$. Donc puisque $X dx + Y dy = 0$, on aura en intégrant « Digitized by Google »

The text on this page is estimated to be only 20.35% accurate

Première Partie. 147 $\int (X dx + Y dy + Z dz)$ - H confit ; par conséquent l'équation de la surface extérieure fera K étant une constante quelconque ; & cette équation sera, toujours en termes finis, l'équation (que la quantité $\int (X dx + Y dy + Z dz)$ est supposée une différentielle exacte. I g. Si la quantité $X/x^4 - 1/z^2$ est elle-même une différentielle exacte, ce qui a toujours lieu lorsque les forces X, Y, Z (bientôt résultent d'une ou de plusieurs attractions proportionnelles \ des fonctions quelconques des distances aux centres, puisqu'on a en général $X dx + Y dy + Z dz = P dp + Q dq + R dr + S ds + \dots$ (Secb. V, art. 5); nommant cette quantité « f », on aura alors $f = \int (X dx + Y dy + Z dz)$; donc pour que dx (soit une différentielle complète) il faudra que f soit une fonction de P par conséquent f sera aussi nécessairement une fonction de P. On, aura donc dans ce cas pour la figure de la surface l'équation f = c »
 = savoir « as à une constante; de même que si la densité du fluide étoit uniforme. De plus, puisque f est constante à la surface, & que f est fonction de r, il s'enfuit que la densité a doit être la même dans tous les points de la surface extérieure d'une masse fluide en équilibre. Dans l'intérieur du fluide la densité peut varier d'une manière quelconque, pourvu qu'elle soit toujours une fonction de r; elle devra donc être constante par-tout où la valeur de r sera constante; de sorte que « r = A, (era en général l'équation des couches de même densité, h étant une constante. Donc différenciant, on aura $0 = r dr + X dx + Y dy + Z dz$ »

The text on this page is estimated to be only 22.09% accurate

l'Équilibre ANALITIQUE. Vdy Hh.2</Y«sd ^ôur
équation générale de ces couchés; ' & il est visible que cette équation est
celle des surfaces à laquelle les forces Xy 1^» Z est
perpendiculaire, & que M. Clairaut appelle surfaces de niveau. D'où il
s'enfuit que la densité doit être uniforme dans chaque couche de niveau
formée par deux surfaces de niveau infiniment voisines. Et cette loi doit avoir
lieu dans la Terre & dans les Planètes, supposé que ces corps aient été
originellement fluides, in qu'ils aient conservé en se durcissant la forme
qu'ils avoient prise en vertu de l'attraction de leurs parties combinée avec
la force centrifuge. 19. L'équation $\int (Xdx + Ydy + Zdz) = K$ de la surface
des fluides en équilibre, a lieu également pour les fluides libres de tous
côtés, & pour ceux qui sont renfermés dans des vases du moins
relativement à la partie de leur surface qui répond aux ouvertures du vase
(arc 17}. Pour ce qui est de la surface concave aux parois du vase, il est
clair qu'elle doit avoir la même figure que ces parois; de sorte que si le vase
est inflexible, la figure dont il s'agit sera donnée & indépendante des
conditions de l'équilibre. Il faudra donc que par rapport à cette partie de la
surface du fluide, les termes de l'équation générale de l'équilibre, contenant
les variations $\delta x, \delta y, \delta z$, disparaissent d'eux-mêmes, puisqu'on ne
pourroit les faire évanouir par aucune condition particulière; c'est: ce qu'il
est bon d'examiner pour ne laisser rien à désirer sur la justesse & la
généralité de nos méthodes. 20. Considérons un point quelconque de la
surface du fluide contiguë aux parois du vase supposé inflexible & d'une
Djgitized by Google

The text on this page is estimated to be only 13.59% accurate

Première P a r t ! f.- , 149 figuré donhcc; ce J>oint répondra ndtefl'airemciiit au cornmënceinenc ôU à-'la fin de chacune des intégrations rcLitives à A» ^9 t« (iôfnmeifcement de Tune & à h fin des deux auttei, oii réciproquement (art. I5). Suppofons d'abord qu'il réponde à la fin de chacune des trois intégrations; les Variations de *» t relatives à ce point, feront alors Sx 'y Sy\ S'i" te les termes afleftés de ces varjarions kvonzy" ^x Uydi, >!' Sfdxdy >!' d x dy. De force qu'on aura pour tous les points fcmbables de Li furface du fluide, les •'intégrales S>!' i 0^ dy d^^ S >!' ^ y^ d x â Sy!^d:(' dxdy, dont la première doit être prife en faifant ▼ arief fépatémfent y & ç , après avoir fublLrué pour je /à valeur €Tiy donnée par la. nature de la furface ou de la paroi du Vafè j dont la fécondé doit ctrè prife en faifant Varier fëpai-émené « ÔC ^, & fubftituaht pour y fa valeur xèL \ donnée par là inêiie furface, & dont la troifiêrn-.e doit être prJfe pareillement, en faifant varier fucceflivfement Se férarcment x y , &c fubdituant pour ^ L\ valeur donnée en x y par la mC^me furface. Or il eft yifible. qu'on peut réduire ces trois inte'-ra'es à h même- forme , en fuppofant qu'on fubftitue. dans les deux premières , à la place de : {, Jà valeur en x ^ qu'on prenne enfuite danis la première x variable , èi dans h fecbnde y variable à la place de |t Ainfi fi on repréfente ipzTd\ — pdx-* - q dy réquàtion de la iTurfacé dohhiée , il n*y aura qu'à mettre dans rintégrale S x"fx" dy di^pdx à la place dé -ai, &C dans f intégrale S)i" Sy" dxd:^y qdy à la plaee de d\\ enfuite intégrer l'une fie l'autre relativement h. x 6i Ix y. Mais il y a ici une cb_ fervation importante à faire > la(2ueUe confii^e «;n ce que les

The text on this page is estimated to be only 20.27% accurate

1 I 5*0 M-i CHANIQUE ANALITIQUE. dilTcreiices ci x , dy ^
d-^ doivenc toujours être priles pofitivement, parce nu'elles font cenices
celles dans la parallélépipède re(ftangulaire dx dy d: ^ qui exprime le volume
de la paricule dm^ lequel ne peut jamais devenir négacii par la nature
même de la chofc. D'où il s'enfuît que clans les iubititucions àt pdx ^ qdy ^
\ la place de il faut toU' jours fuppofer p ^ q des quantités pofitives. ■ Nous
ruppo(érons donc en général que Téquation des pa- ' rois du vafe foie
repréfentée par P ^ ^ qdy y p ^ q étant toujours des quantités pofitives; Ôc
d'après ce que nous venons de démontrer, on aura au lieu des trois,
intégrales Sx" ^s'^dydi, Sx"Sy"dx d: ^y Sx" ^i'dxdy^ celle-ci unique S x"
(p^x" qSy" S t^') d x dy. Maintenant puifque nous avons fuppoié que les
points que nous confidérons de la furface du fluide , répondei\,C à la fin de
chacune des trois intégrations relatives à x, ^, ^, il eft. facile de fê
convaincre que cette fuppoftion ne peut avoir lieu à moins que les
coordonnées ^9 \ de ces points ne tombent toutes du même côté de la
furfacedont il s'ائيir, c'eft à-dire , du même côté des plans qui touchent cette
furface dans les memes points. Or pour cela il faut néceffairement q-.ie
réf^uarion diff^renciel'c de la furface foit dans ces points </:j = — p dx —
<i^y •% ^li" ^ ^ y croiffant^ diminue. Mais ^jc", ly"y S^i" étant fhypij les
variations de X, y , !(pour ces mêmes points , il eft vifible qu'elles doivent
autfi avoir entr'elles les mêmes rapports que les différentielles dx^' dy ^ d\y
du. moin s tant qu'on ^regarde la figure de la furface comme invariable. On
aura ddbc au!îi J*^" » — ^ ^vt* -~ q /y ' ; valeur qui étant fubftituée dans
rintégrale ci-deiTus, la rend évidemment nulle. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 18.04% accurate

Pr-bmière Parti. e, iji 2 I . Si les points dont il s'agit , nu lieu cic
répondre à la Hn des crois intéi;rations rcl.uives à x , y , répondoient au
commencement de ces nicmcs intégrations , alors on auroU dans l'équation
générale de l'équilibre (art. 15), relativement à ces points, les trois
intégrales $\int \frac{dx}{x} \int \frac{dy}{y} \int \frac{dz}{z}$ qui fe cliangeroient de
même en cell^^ci unique, $\int \frac{dx}{x} \int \frac{dy}{y} \int \frac{dz}{z}$ & Ton auroit aufC
dans ce'cas di^^^pdx'^qdy ^ Se par conféquent auflî $\int \frac{dx}{x} \int \frac{dy}{y} \int \frac{dz}{z}$; ce
qui rendroit pareillement cette intégrale nulle. Mais fi ces mêmes points
répondoient , par exempk: , au commencement de l'intégration relative à x,
&: à la fin des deux intégrations relatives k y ta \y alors les variacierts des
coordonnées $x^y^$ pour ces points , fêroient /jc', $y^t^f^t$ & les intégrales
correfpondantes (êroient dans leiqueiles a' feroit la même choie que $\int \frac{dx}{x} \int \frac{dy}{y} \int \frac{dz}{z}$ ces
intégrales iê cliangeroient donc en celle-ci, $\int \frac{dx}{x} \int \frac{dy}{y} \int \frac{dz}{z}$. Or il
eft facile de concevoir que pour que ce cas ait lieu , il faut que les deux
coordonnées y 6c : { le trouvent d'un même coté, & la coordonnée x de
l'autre côté de chaque plan touchant la furface dans les points en queftion;
c'eil^ ce qui demande que Téquatim de la furface ibit pour ces points de Ja
forrire $d\sqrt{pdx - qdy}$ de forte qu'on âura aulfi $S:(^ftx! - q^y^$ ce qui
étant fubftitué dans l'intégrale précédente la rendra. encore nulle:

The text on this page is estimated to be only 16.48% accurate

1^2 Mjîchakiqub- an àli tique. 4 On trouvera le même résultat pour les autres cas où Ton considérera des points relatifs au commencement des int'. Mais on voit qu'il y a à la fin de l'intégration relative à c'est-à-dire les quantités qui appartiennent à la partie antérieure de la surface du fluide par rapport au plan des x et y . Se qu'on dénote par deux traits les quantités répondantes à la fin de la "même intégration". Suivant c'est-à-dire, les quantités relatives à la partie postérieure de la surface du fluide par rapport au même plan, des x et y qu'enfin on représentera en général par $d''x$ et $d''y$. L'équation différentielle de la surface du fluide (p et q étant positives ou négatives) ; on pourra toujours transformer les trois expressions intégrales $S(>."lx" — >!tx")dydx - f. S(>'ly" — >!'y')dxdy$ et $S(>^" ^i' ^-K'i-Odxdy$ de l'équation générale de l'équilibre de l'article «n ces deux-ci, $S i' -f- ftx" -4- iy")dxdy$ Or puisque $d''x d''y = 0$ est l'équation d'une courbe, il s'enfuit de la théorie connue, qu'il y a nécessairement un multiplicateur : r qui peut rendre cette équation intégrable ; de sorte qu'on aura $r (d''x d''y + p dx dy + q dy dx)$ étant la différentielle exacte d'une fonction u par Google

The text on this page is estimated to be only 17.72% accurate

• Première Partie. 153 tion zi de a: , y , if. On aura donc aussi en changeant d qvl dans la différentiation de r ($l^{\prime}hp^Xq^yJ^iUi$ & par confcc^uenc S j} $Sx^qS^y=s$ — Donc en marquant toutes les quantités d'un ou de deux traits pour les rapporter à la surface intérieure ou postérieure du fluide , (8c substituaiit dans les expressions intégrales ci-defTus , ces expressions deviendront 1 3 . Soit maintenant d s élément de la surface du fluide » dont l'équation en général $d\sqrt{pdx^2+qdy^2}$ on aura , comme Ton fait, $dssdx dyV$ ($l'k'p^-(l^J$. Mais en regardant u comme une fonction de x^y on a suivant la notation reçue » $rta^{rp^J^s}$. donc $ds . ,$ » Donc fi' on .fût pour abréger , Zc qu'on marque toutes les quantités d'une ou de deux traits pour les rapporter à la surface antérieure ou postérieure du fluide , on pourra donner aux expressions intégrales dont il V

The text on this page is estimated to be only 24.50% accurate

1⁴ MÉCHANIQUE AMALITIQUE. 5 agit, cette forme S — -pû — « ^ ^ — pi — Or par ce qui a été dit dan[^] Tartide 8 de la féconde Section, on voit que la quantité xds x peut repréfenter le moment d'une force égale zxds[^]iL appliquée à Télé[^] ment </j de la fur&ce du fluide , perpendiculairement à cette même furface, dont Téquarion eft fuppofée t'a ou i/ua o (art. 11). Aini[^] lexpreûion intégrale S ■ j y., d s rcpréfentëra la fomme des momens des forces agiffantes fur chaque point de la furface poftérieure de la mafle fluide dans des diicâions perpendiculaires à cette furface; de même l'exprefîion 5 — yr~ ^ ^' rcpiélcntera la fomme des momens des forces a' appliquées à chaque point de la furface antérieure > & dirigées aufîi perpendiculairement à cette furface ; de forte que — S ^ dsi fera la fomme, des momens de ces dernières forces prises en fens contraire , c cilà-dire, en fuppofant leurs direâions oppofées à celles des forces a" par rapport au plan des x & y ; ce qui revient à ce que toutes les forces appliquées à la. furface de lamaflè fluide fbient dirigées perpendiculairement à cette furface y & tendent de dedans en dehors , ou de dehors en dedans. 2 4- l'onc puifque les exprefCons intégrales qui entrent dans l'équation générale de l'équilibre d'une mafle fluide incomprcfîible , ôc qui Te rapportent aux points de la furface de cette mafTe , font équivalentes à la fomme des momens d'une iniinité de forces a appliquées perpendiculairement à tous les points de cette furface; il s'enfuit que ces forces ont réellement lieu à la furface du fluide; &c il elk Digitized by Goot[^]l

The text on this page is estimated to be only 23.31% accurate

\ F&sMiBRE Partie* lyj ▼ jfible qu'elles ne font autre chose que la pression que le fluide exerce dans tous les points de sa surface, en vertu des forces qui agissent dans toute sa masse. 2 y. Cette pression sera donc exprimé en général par la quantité X, savoir par la formule $\frac{A^{\text{Jir}^x} - H^{\text{Tdy}^{\text{ZJi}}}}{\text{rapporté}^{\text{la force du fluide (art. 17)}}$; fie il est clair que par-tout où le fluide est libre, elle devra être nulle dans l'état d'équilibre ; mais par-tout où la surface du fluide sera appliquée contre la surface d'un corps solide quelconque , il faudra que ce corps soutienne l'effort des forces appliquées à sa surface. D où il est facile de déduire les loix de l'équilibre des fluides avec les solides qui les contiennent^ ou qui y sont plongés. Comme elles sont assez connues, nous ne nous arrêterons pas à les détailler; nous nous dispenserons aussi de donner des applications particulières de la théorie générale de l'équilibre des fluides incompressibles n'ayant gueres rien à ajouter à ce qu'on trouve sur cette matière , dans les Auteurs qui en ont déjà traité. HUITIEME SECTION, De l'équilibre des fluides compressibles 0 éhfiqâks, I . Soient comme dans l'article 13 de la Section précédente, X y Y y Z les forces qui agissent sur chaque point de la masse fluide, réduites aux directions des coordonnées $x^y z^t$ tendantes à diminuer ces coordonnées; on V» •

The text on this page is estimated to be only 25.13% accurate

Ij6 MÉCHAN.IQUE ANALITIQUE, aura d'abord $SfXi^x-h Y^y$
 $\bullet \forall Zi \backslash dm$ pour la somme de leurs momens. Dans les fluides élastiques il y a
de plus une force intérieure qu'on nomme élastique ou reflbrt , & qui tend à
les dilater , ou à augir. ciucr leur voiumc, Soit donc t l'élalHcité d'une
particule quelconque $i//77$; cette force étant diriL^ce à augmenter le
volume $dx dy d\backslash$ de la même particiflc tendra donc à diminuer la quantité —
 $dx dy d\backslash i$, par conféquent elle aura ou pourra être cénfée avoir pour moment
la quan* uité — $*f', (dx dy d\backslash)$. De manière que la somme des momens
provenans de Télasticité de toute la lAaflè fluide» fera exprimée par —
 $S\%l(dx dy d\backslash)$, Donc la somme totale des momens des forces qui agiflent fur
le fluide, fera $S(Xtx'Jf T^y^ZtTi) dm^S * l(dx dy di h 2c$ comme il n'y a ici
aucune condition particulière à remplir, on aura l'équation générale de
l'équilibre , en égalant . Simplement cette somme à zéro. 2. On aura donc
ainH pour l'équilibre des fluides élastiques» une équation de la même forme
que celle que Tob a trouvée dans la Seâion précédente (art. 13) pour
Téquilibre des* fluides incompressibles, puifqué dans celle-ci iL zsstS^
 $(d^dyd- \{)$ (art. 14^, ce qui rend le terme $5x/Z$. provenant de la condition de
l'incompressibilité entièrement iemblable au terme $S * S^dx dy d\backslash J$ dû aux
momens des forces clastiques. 3- 11 s'enfuit de-là que les formules trouvées
pour l'équilibre des fluides incompressibles , s'appliquent immédiatement &
fans aucune restriction à l'équilibre des fluides Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 19.38% accurate

Par ailleurs, les élastiques, en y changeant
 finalement le coefficient α en $\frac{1}{\alpha}$ c'est-à-dire en supposant que la
 quantité prise en compte α exprime la force élastique (Unité de chaque
 élément du fluide). Il n'y aura donc qu'à répéter ici tout ce que nous avons
 démontré dans la section précédente, depuis l'article 14 jusqu'à la fin. 4. On
 suppose ordinairement que l'élasticité est proportionnelle à la densité ou en
 général à une fonction quelconque de la densité ; on aura donc $\alpha = A \rho^4$
 (en nommant A la densité); donc la détermination de α «dépendra de
 l'équation suivante » (art. 17, Sect. précédente).
$$\frac{d}{dt} \left(\int \alpha dV - \int Y dy - \int Z dz \right),$$

 Cette équation donne $\int \alpha dV - \int Y dy - \int Z dz$, est une différentielle
 complète d'une fonction de A ; donc il faudra aussi que $\alpha dV - \int Y dy - \int Z dz$
 soit toujours une différentielle complétée; autrement
 l'équilibre ne sera pas possible. On a donc le cas de l'article de la Section
 précédente; on aura par conséquent aussi les mêmes conséquences. Fin de la
 première Partie de la Mécanique»

The text on this page is estimated to be only 16.54% accurate

IJS AI É C H A I Qi; £ A^IALI TIQUE, SECONDE PARTIE. ■ • •
DE LA MÉ C H A N I Q U OU LA DYNAMIQUE. SECTION
PREMIERE. Sur les di^ircns Principes de la Dynamique, JL A Dynamique
eft la Science des forces accélératrices ou retardatrices , ôc des mouvemens
variés qu elles peuvent produire. Cette Science e(l due entièrement aux
Modernes, & . Galilée eft celui qui en a jetcé les premiers fondemens:
Avant lai on n*avoit confidéré les forces qui agiflènc fur les corps que dans
Tétat d'équilibre ; t<. quoiqu'on ne pût attribuer]*accélération des corps
peHins, & le mouvement curviligne des projcclilcs qu'à l'a^lion confiante
de la gravité, perfonne n'avoir encore réulîi à dércrminer les loix de ces
phcnomcnes journaliers, d'après une caufe fi fimplic, Galilée a f^iit le
premier ce (Tas important, a ouvrc par là une carrière nouvelle £c immente
à l'avancement de la Mcchanique. Ces découvertes fontexpofcés &
développées dnns l'ouvrage intitulé : 'Dialoghi délie 'fcieta^t nuave , &c.
lequel parut pour la \ Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 25.72% accurate

Seconde P a r t . i e . i ^ p première fois à Leyde en 1 ^ 37; elles ne procurèrent pas à Galilée » de Ton vivant, autant de célébrité que celles qu ^ il avoit faites fur le fyfVême du monde, mais elles font aujourd' hui la partie la plus loiid e & L Ja plus réelle de la gloire de ce grand homme. Les découvertes des farelllres de Jupiter , des phafes de Venus 9 des taches du Soleil, &c, ne demandoient que des téléscopes & de Tafliduitc ; mais il falloit nn génie extraordinaife pour démêler les loix de la nature dans des phénomènes que Ton avoit toujours eus fous les yeux , mais dont rexplication avoit néanmoins toujours échappé aux recherches des Philofbphes. Huyghens qui parok avoir été deftiné à perfectionner & compléter la plupart des découvertes de Galilée, ajoura k la théorie de Taccélération des graves celles du mouvement des pendules Se des forces centrifuges, & prépara ainfi la route à la grande découverte de la gravitation univerfelle. La Alëchanique devint une Science nouvelle entre les mainS' ^ de Neiton , & fes Principe Mathématiques qui para- ' rent pour la première fois en 1 ^ 87, furent l'époque de cette révolution. Enfin l'invention du calcul infinitéfimal mit les Géomètres en état de réduire à des équations analytiques les loix du mouvement des corps; 8c la recherche des forces & des mouvemens qui en réfultent , eft devenue depuis le principal objet de leurs travaux. Je me fuis propofé ici de leur offrir un nouveau moyen de faciliter cette recherche ; mais auparavant il ne {éra pas inutile d'expoier les principes qui fervent de fonde:ent à la Dynamique» & de préfenter la fuite U la gradation des

The text on this page is estimated to be only 22.27% accurate

ANALITIQUE. idées qui ont le plus contribué à étendre & à perfectionner cette Science. La théorie des mouvemens variés & des forces accélératrices qui les produisent, est fondée sur ces loix générales, que tout mouvement imprimé à un corps, est par sa nature linéaire & rectiligne, & que différents mouvemens imprimés à la fois ou successivement à un même corps, (c'est-à-dire de différentes directions) le corps se trouve à chaque instant dans le même point de l'espace où il devroit se trouver en vertu par la combinaison de ces mouvemens, s'ils existoient chacun réellement & représenté dans le corps. C'est dans ces deux loix que consistent les Principes connus de la force d'inertie & du mouvement composé. Galilée a découvert le premier- ces deux principes, & en a déduit les loix du mouvement des projectiles, en composant le mouvement oblique, & l'impulsion communiquée au corps, avec la chute perpendiculaire due à l'action de la gravité. À l'égard des loix de l'accélération des graves, elles se déduisent naturellement de la considération de l'action constante & uniforme de la gravité, en vertu de laquelle les corps recevant dans des instans égaux des degrés égaux de vitesse suivant la même direction, la vitesse totale acquise au bout d'un tems quelconque, doit être proportionnelle à ce tems; & il est clair que ce rapport constant des vitesses au tems, doit être lui-même proportionnel à l'intensité de la force que la gravité exerce pour mouvoir le corps; de sorte que dans le mouvement sur des plans inclinés, ce rapport ne doit pas être proportionnel à la force absolue de la gravité comme dans le mouvement vertical, mais à la force relative, laquelle dépend de l'inclinaison du plan, &

Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 24.39% accurate

Seconde Partie. i6i > * & fe détermine par les régies de la Scacic]ue; ce qui fournit un moyen facile de comparer entr*eux les mouvemens des corps qui defceiidenc le long des plan» différemmenc in* cUnés. Cependant il ne paroSc pas que Galilée aie découvert de cetre manière les loix de la chute des corps pefants. Il a commence, au contraire, par fuppofer la notion d*un mouvement uniformément accéléré, dans lequel les vîtefles croiflènc comme les tems; il en a déduic géométriquement les principales propriétés de cette efpece de mouvement 9 ôc iiii-tout la ioi de l'accroiflément des efpaces en ni^oB des carrés des tems ; enfuite il s'eft zÛuté par <les expériences, que cette loi a lieu effeéHvement dans le mouvement des corps qui tombent fiir des plans quelconques inclinés. Mais pour pouvoir comparer €iitr*eux les mouvemens fur diiFérens plans inclinés, il a été obligé d*abord d'admettre ce principe précaire, que les vîteiïës acquifés en defcendant de hauteurs verticales égales, font .uilli toujours égales ; &: ce n eft que peu avant fa mort, & après la publication de fcs Dialogues, qu'il a trouvé la démonltration de ce principe y par la^eonfidération de l'adlion relative de la grar* Wiié fur les plans inclinés, démonibation qui a été enfuice ittfétée dans les autres éditions de cet Ouvrage. . Le rapport conftant qui dans les mouvement nniformé' ment accélérés, doit fubHiler entre les vîtefles êt les cems, cm encre les efpaces àc les carrés des tems, peut donc être pris pour la mefure de la force accélératrice qui agit continuellement fur le mobile ; parce qu'en effet cette force ne peut être eiUmée que par l'elïet qu'elle produit dans le corps, U qui eonllftei dans les vîteflès engenX

The text on this page is estimated to be only 20.54% accurate

162f MÉCHANT QUE ANALITIQUE, drées » ou dans les
efpaces parcourus dans des tems donnés, Ainfi il fuffit , pour cette
eftimation des forces , de confia dérer le mouTemenc produit dans un tems
quelconque ^ fini ou infiniment petit, pourvu que la force (bit regardée
comme confiante pendant ce tems; par conféqunc, quel que foie le
mouvement dit corps ôc la loi de fon accélération on pourra toujours
déterminer la valeur de la force qui agit fur lui à chaque infknt , en
comparant la vkeire en* gendrée dans cet infant avec la durée du même
infanc, Ok l'elpace qu'elle faic parcourir pendant le même inibuit avec le
carré de k durée de cet infant; & il-n'eft pas même fiécefiàire que cet
efpace ait été réellement parcouru par le corps, il fuffit qu'il puiffè ^tre cenfé
avoir été parcouru par un mouvement compofé , puifque l'effet de la force
eft le même dans l'un &c dans l'autre cas, par les principes du mouvement
cxpofés plus haut. C*eftainfi qu'Huyghens a découvert les loix des forces
centrifuges des corps mûs dans des cercles avec des vîtefles coni^ tantes, &
qn*il a comparé ces forces entr^elles, & avec lat force de la pefânteur & la
forface de Ja terre» comme ott le voit par les démonftradons qu'il a îsàTées
de Ces théo* rômes fur la force centrifuge , publiés en i6jy » à la fiadt
Traité Je Horologio ofcilUtorio. Alais HiTyghens n'a pas été plus loin, & il
étoit rcfervé à Newton d'étendre cette théorie à des courbes quelconques >
<Sc de compléter la fcience des mouvemens variés 6i des forces
accélératrices qui peuvent les engendrer. Cette fcience ne confifle
maioteDanc que dans quelques formules diffé«tentielles tiès-iimplea ; usais-
Newton a confiamment fût

The text on this page is estimated to be only 24.40% accurate

Seconde Partie, nage de la méthode géométrique iîmpHfiée par la considération des premières & dernières raifons , & s*jl s'eft queU quefois fervi du calcul analicique , cVH: uniquement la méthode des fériés qu'il a employée , J^quelle doit être bien diftinguée de la méthode différentielle, quoiqu'il foit facile de les rapprocher , & de les rappelkr à un même principe. Les Géomètres qui ont traité après Nevton la théorie des forces accélératrices , Ce font prefqué tous contentés de ^énéraiifer fes théorèmes , & de les traduire en expreflions différentielles. De-lk les différentes formules des forces centrales qu'on trouve dans la plupart des ouvrages de Méchanique , mais dont on ne fait maintenant plus-d'ufage dans les recherches fur le mouvement des corps animés par des forces quelconques , parce qu'on a une manière plus liniple de mettre ces problêmes en équations. Si on conçoit que le înouvement d'un corps & les forces qui agiffent fur lui foient décompofés fuivant trois lignes droites perpendiculaires entr'elles, on pourra confidérer féparémenc les mottvemens & les forces relatives à chacune de ces trois ilireélions. Car à cauiè delà perpendicularité des direéUons, il eft vifible que chacun de ces mouvemens partieb peut être regardé comme indépendant des deux autres, & qu'il ne peut recevoir d'altération que de la part de la force qui agit dans la direction de ce mouvement j d'oii Ton peut conclure que ces crois mouvemens doivent fuivre, chacun en particulier, les lois des mouvemens rediHgnes accélérés ou rerardés par des forces données. Or dans le mouvement rectiligne, l'effet de la force accélératrice ne confiftar.t qu'à altérer la vîceilb du corps , cette force doit être meiurée par le rapX t

The text on this page is estimated to be only 24.92% accurate

164 MÉCHANIQUE ANATOMIQUE. pour entre accroissement ou le décroissement de la vitesse pendant un instant quelconque » U la durée de cet instant ^ c'est-à-dire, par la différentielle de la vitesse divisée par celle du tems ; & comme la vitesse elle-même est exprimée dans les mouvemens variés, par la différentielle de l'espace divisée par celle du tems , il s'enfuit que la force dont il s'agit sera mesurée par la différentielle seconde de l'espace divisée par le carré de la différentielle première du tems supposée constante. Donc au lieu la différentielle seconde de l'espace que le corps parcourt, ou est censé parcourir (suivant chacune des trois- directions perpendiculaires , divisée par le carré de la différentielle constante du tems, exprimera la force accélératrice dont le corps doit être animé suivant cette même direction ; & devra par conséquent être égale à la force actuelle qui est supposée agir dans cette direction. U n'est pas nécessaire que les trois directions auxquelles on rapporte le mouvement instantané du corps, soient absolument fixes, il suffit qu'elles le soient pendant l'intervalle d'un instant; Ainsi dans les mouvemens en ligne courbe , on peut prendre pour chaque instant ces directions'. Soit dans la tangente, soit les deux autres dans les perpendiculaires à la courbe; Alors la force accélératrice qui agit suivant la tangente, Soit qu'on nomme force tangentielle , sera toute employée à altérer la vitesse absolue du corps , & sera exprimée par l'élevé. Soit de cette vitesse divisée par l'élément du tems. C'est ce qui constitue le principe si connu des forces accélératrices. - Les forces normales', au contraire, ne feront que changer la direction du corps, & dépendront de la courbure de la ligne suivie

The text on this page is estimated to be only 23.91% accurate

Seconde Partie, i6j décrit. En réduisant ces deux dernières forces à une seule il faudra, que la distance de ce point à l'arc dans le plan de la courbure, & la valeur de l'angle trouvera exprimée par le carré de la tangente du point divisé par le rayon de la développée y c'est-à-dire, par le rayon du cercle qui mesure la courbure de la courbe en chaque point, &c qu'on nomme cercle osculateur. C'est aussi l'expression qu'Huyghens avoit trouvée pour la force centrifuge des corps qui décrivent des cercles avec des vitesses uniformes; & elle est générale pour des courbes & des vireflés quelconques, en considérant à chaque instant le corps comme mu dans le cercle osculateur. Il est cependant beaucoup plus simple de rapporter le mouvement du corps à des directions fixes dans l'espace. Alors en employant pour déterminer le lieu du corps dans l'espace, trois coordonnées rectangulaires qui aient ces mêmes directions, les variations de ces coordonnées représenteront évidemment les espaces parcourus par le corps- suivant les directions de ces coordonnées; par conséquent leurs différentielles fécondées, divisées par le carré de la différentielle confluente du temps exprimeront les forces accélératrices qui doivent agir suivant ces mêmes coordonnées; ainsi en égalant ces expressions à celles des forces données par la nature du problème, on aura trois équations semblables qui serviront à déterminer toutes les circonstances du mouvement. Cette manière de déterminer le mouvement d'un corps animé par des forces accélératrices quelconques est par sa simplicité préférable à toutes les autres; il paroît que Madaurin est le premier qui l'ait employée dans son Traité des Fluxions imprimé en 1742; elle est maintenant universellement adoptée» Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 25.40% accurate

%66 MÉCHANIQUE ANALITIQUE, Par les principes qui viennent d'être exposés « on peut donc déterminer les lois du mouvement d'un corps libre » sollicité par des forces quelconques, pourvu que le corps soit regardé comme un point *. On peut d'ailleurs appliquer ces principes à la recherche du mouvement de plusieurs corps qui exercent les uns sur les autres une attraction mutuelle, suivant une loi quelconque qui soit comme une fonction connue des distances ; enfin il n'est pas difficile de les étendre aux mouvements dans des milieux résistants, ainsi qu'à ceux qui se font sur des surfaces courbes données; car la résistance du milieu n'est autre chose qu'une force qui agit dans une direction opposée à celle du mobile ; 8c lorsqu'un corps est forcé de se mouvoir sur une surface donnée, il y a nécessairement une force perpendiculaire à la surface qui l'y retient, & dont la valeur inconnue peut se déterminer d'après les conditions qui résultent de la nature de la même surface. Mais si on cherche le mouvement de plusieurs corps qui agissent les uns sur les autres par impulsion ou par pression, soit immédiatement comme dans le choc ordinaire, ou par le moyen de fils ou de leviers inflexibles, auxquels ils soient attachés, ou en général par quelque autre moyen que ce soit, alors la question est d'un ordre plus élevé, & les principes précédens sont insuffisans pour la résoudre. Car ici les forces qui agissent sur les corps sont inconnues» & il faut déduire ces forces de la loi que les corps doivent exercer' entre eux « suivant leur disposition mutuelle. Il est donc nécessaire d'avoir recours à un nouveau principe qui serve à déterminer la force des corps en mouvement « eu égard à leur masse & à leur vitesse. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 23.09% accurate

Seconds Pa&tib. \0j Ce principe confifte en ce que pour imprimer à une inalTe donnée une certaine vîtefle fuivant une direclion quelconque , foie que cette mafle foie en repos ou en mouvement, il faut une force dont la valeur foit proportionnelle au produit de la mafle par la vîtefle » & dont la direclion a é>tt la même que celle de cet c^ vitefle. Ce produic de la maille d'un corps ainlti^ée pâr fa viteile» s appelle communément la quantité de mouvemenc de ce corps, parce qu'en effec c*eft la fomme des monvemens de tontes les parties matérielles du corps. Ainfi les forces fe niefurent par les quantités de mouvement qu elles font capables de produire, & réciproquement la quantité de mouvement d'un corps» e(k la mefure de la force que le corps eft capable d'exercer contre un obflacle , & qui s'appelle la percuffion. D'où il s'enfuie que fi deux corps aob <ëlaftiques yientient à fe choquer direâement en iêoft contraires avec des quantités de mouvement ^ales» leurs force» ' ^ioîvent contrebalancer & iê détruire, par coaféquent le» corps doivent s'arrêter hc demeurer en repos. Mais fi le choc fe faifoit par le moyen d'un levier , il faudroit pour la deftruclion du mouvement des corps, que leurs forces jfuivifiènt la loi connue de l'équilibre du levier. Il parok que Dcfcarces a apperçu le premier le Principe que nous venons d*expo(èr, mais il feft trompé dan» ibn application au choc des corps » pour avoir cru que l» même quantité de mouvement abfbln. devok toujours fip «Ofxierver» ▼ allis eft proprement le premier qui ait eu une idée netté de ce Principe , &: qui s'en foit fervi avec fucccs pour découvrir les loix de la communication du mouvemenc dan^

The text on this page is estimated to be only 21.49% accurate

1^8 MÉCHANIQUÉ ANALITIQUE. le choc des corps durs ou élastiques, comme on le voit dans les Transactions Philosophiques de 1666)^ & dans la troisième Partie de son Traité de l'Action, imprimé en 1671. De même que le produit de la masse & de la vitesse exprime la force finie d'un corps «i mouvement, ainsi le produit de la masse & de la force accélératrice que nous avons vu être représentée par l'élément de la vitesse divisé par l'élément du temps, exprimera la force élémentaire ou naissante; & cette quantité j si on la considère comme la mesure de l'effort que le corps peut faire en vertu de la vitesse élémentaire qu'il a prise, ou qu'il tend à prendre, constitue ce qu'on nomme puissance mais si on la regarde comme la mesure de la force ou puissance nécessaire pour imprimer cette même vitesse elle est alors ce qu'on nomme force motrice, ' Ainsi des puissances ou des forces motrices» se détruiront ou se feront équilibre si elles sont égales & directement opposées ou si étant appliquées à une machine quelconque, elles suivent les lois de l'équilibre de cette machine. Lorsque des corps sont joints ensemble, de manière qu'ils ne puissent obéir librement aux impulsions reçues, & aux forces accélératrices donc ils sont animés, ces corps exercent nécessairement les uns sur les autres des pressions continues qui altèrent leurs mouvements, & en rendent la détermination difficile. Le premier problème & le plus simple de ce genre dont les Géomètres se sont occupés, est celui des centres de gravité. Ce problème a été fameux dans le siècle dernier & au commencement de celui-ci, par les efforts de la tentative 9 Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 22.68% accurate

tuives que les plus grands Gcomccrc'> ont faits pour eu venir à bout; 8c comme ccfl: principalement à ces tentatives qu'on doit les progrès immenfcs que la Dynamique a faits diCpuiS} je crois devoir en donner ici uae hidoire fuccinte, ^ur montrer par quels degrés cette Science s'eft élevée à la perfèâion oii elle pacoïc êtce parvenue dans ces derniers jrem Jjes premières traces des recherches for les centres d*o(^ jdUation , fe trouvent dans les Lettres de Defcartes. On y voit que Je Perc Merfcenne lui avoit propofé de déterminer la grandeur que doit avoir un corps de figure quelconque, |>our qu'étant fufpendu par un point, il falTe fes olcillaciôns dans le même tenîs qu'un fii de longueur donnée» Se chargé d'un feul poids i fi>n extrémité.. Defcartes obierve que cette queftiota « quelque rapport avec celle du centre de gravité*, & que de même que dans un corps pefant qui tombe librement , il y a un centre de gravité autour <}uquel les efforts de la pclantcur de toutes les parties du corps ic font équilibre , enforte que «ce centre defcend de la même manière que fi le relie du corps étoit anéanti, ou jqu'il fut concentré dans le même centre; ainû dans les corps pefans qui tournent autour d'un axe fixe» il doit y avoir on centre» qu'il appelle centre d^agitation » autour duquel les forces d^a^adon de tontes les parties du corps {e contrebalancent de manière que ce centre étant fibre de l'aâioo de' ces forces » puiflê être mu comme il le (eroit fi ks antres parties dn corps étoient anéanties , ou concentrées dans ce rncmc centre; que par coiifcquent tous les corps dans lefcjuels ce centre fera CL^ilement éloigné de l'axe de rotation » ' l'eront leu.r vibration djuis le mune cems. Y

The text on this page is estimated to be only 25.16% accurate

1 IJO MÉCHANIQUE ANALITIQUE. D'après cette notion du centre cl*agitation , Defcarte» . donne une méthode i^u^érale de le déterminer dans des corps de figure quelconque; cette méthode confifte à • chercher le centre de <Tr.iviLc des iorces d'aHtacion de toutes les parties du corps, en cilim.mt ces forces par les produits des malTes multipliées par les vitelles qui font ici propor<» tionnelles auxdiAancës de Taxe de rotatTon, & en fuppofant que les parties du corps iôîenc projetées fur le plan qui pafle par Ton centre de gravité & par Taxe de rotation , de manière (Ju*^Iles foient toujours à la même diibnce de cet axe» Aîaîs cette fupponction n*eft pas permife ici , parce que Teffet des forces ne dépend pas feulemment de la quantité du mouvement, mais encore de fa direclion; aulîi la règle de Defcartes n'eft-elle bonne que lorfque toutes les parties du corps font réellement ou peuvent être cenfées placées dans . un même plan pailant par Taxe de rotation ; dans tous les autres cas il ne faut confidérer que les mouvemens perpeil* diculaires au plan pailant par Taxe de rotation 8c par lecentre de gravité du corps, & on doit rapporter chaque particule au point oh ce plan eft rencontré par la direc-^ tion du mouvement de cette particule , direction qui eft toujours perpendiculaire au pian de cette particule &c, de l'axe de rotation. Ce défaut de la règle de Defcartes fut apperçu par Roberval ,, & devint le fujct d'une contefbtion entre ces deux Géomètres ^ dans laquelle l'avantage paroît être entièrement du côté de ce dernier. Roberval donne des déterminations exa£^es des cen* tresd'agitation des feé^enrsêc des arcs de cercle mus perpendiculairement à leur plan, &: il fait voir l'infuffifance de la. rc^Ie de Ton adverfaire danj ce cas i mais accoutume à cachée Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 23.28% accurate

Seconde Partie. Ses méthodes, il le contente d'indiquer ces réfulcats particuliers, & il est impossible de juger s'il étoit en possession d'une méthode générale. Au reste, Roberval remarque avec raison, que le centre dont il s'agit n'est proprement que le centre de percussion autour duquel les chocs ou les impacts de percussion sont égaux, & que pour trouver le vrai centre d'oscillation d'une pendule pesante, il faut en avoir égard à l'action de la gravité, en vertu de laquelle le pendule se meut. Mais cette recherche étant supérieure à la Mécanique de ces tems-là les Géomètres continuèrent à supposer tacitement que le centre de percussion étoit le même que celui d'oscillation, & Huygens fut le premier qui envisagea ce dernier centre sous son vrai point de vue; aussi crut-il devoir regarder ce problème comme entièrement neuf, & ne pouvant le résoudre par l'application des loix connues du mouvement, il inventa un principe nouveau, mais inconnu, lequel est devenu célèbre depuis, sous le nom de Conservation des forces vives. Un fil considéré comme une ligne inflexible, sans pesanteur & sans étendue, étant attaché par un bout à un point fixe & chargé à l'autre bout d'un petit poids qu'on puisse regarder comme réduit à un point, forme ce qu'on appelle un pendule simple, & la loi des vibrations de ce pendule dépend uniquement de sa longueur, c'est-à-dire, de la distance entre le poids & le point de suspension. Mais si à ce fil on attache encore un ou plusieurs poids à différentes distances du point de suspension, on aura alors un pendule composé, donc le mouvement devra tenir une espèce de milieu entre ceux des différens pendules simples que l'on auroit, si chacun de ces poids étoit suspendu seul au fil. Ya / i

The text on this page is estimated to be only 21.59% accurate

17[^] MÉCHANIQUE .ANALITIQUE. Car la force de la î[^]ravicé tendant d'un côté à faire deC cendre tous les poids également dans le même tems , 8c de l'autre rinilexibilië du fil les contraignant à décrire dans ce même tems des arcs inégaux & proportionnels à leur» di(^ tances du point de iufpenfion il doit (e faire entre ee9 poids une efpece de compenfation & de répartition de leurs mouvemens, enforte que les poids qui font les plus proches du point de fufpenfion, hÀterontles vibrations des plus éloignés» &c ceux-ci, au contraire, retarderont les vibrations des premiers.. Ainfi il y aura dans le fil un point où un* corps étant placé, ù>a mouvement ne (eroit ni accéléré, ni retardé par les autres poids ^ mab fêroit le même que s[^]il étoit ieul fulpendu au- fil.- Ce point fera donc le vrai centre d'ofcillation du pendule compofé , 9c un tel* centre doit fc trouver aufi dans tout corps folide de quelque figure ^ue ce foit, qui ofcille autour d'un axe horizontal. Huyghens vie qu'on ne pouvoit déterminer ce centre d'une manière rigoureufe, fans connoître la loi fuivantlaquelleJes[^] différens poids du pendule compofé altèrent mutuellement les mouTemens que la gravité rend à leur imprimer à chaque* biftant; mab aa lieu de chercher à* déduire cette loi des* Principes fondamentaux, de ht Méchânique,- il fe contenta d*y fuppléer par un Principe indired, lequel confifte à ftip[^] pofer, que fi plufieurs poids attaches, comme l'on voudra,, à un pendule dôfcendent par la feule action de la gravité , & que dans un inilant quelconque ils foienc détachés Se féparés les uns des autres , chacun d'eux, en vertu de fa vt• telle acquife pendant là chûce , remontera ^ une telle hauteur que le centre commun de- gravité trouvera remonté à !«. même hauteur d'oh il étoitdefcendu.. Ala vérité Huyghen» Digitized by Gopgle

The text on this page is estimated to be only 20.70% accurate

Secohds Partie. 173 n'établit: pas ce principe immétliatcmenr, mais il le déJuic de deux hypothcfes qu'il croit devoir trre admifcs comme des demandes de Méchanique; l'une cest que la* centre de gravité d'im fyilcnie de corps pefans, ne peut jamais remonter à une hauteur plus grande que celle d'où il eft tombé, quelque changement qu*on falTe à la difpofidon mutuelle des corps » parce qu'autrement le mouvement perpétuel ne feroit plus impoffible ; l'autre c*eft qu'un pendule compcfé peut toujours remonter de Itiî-même à la même hauteur d'où il eft defcendu librement. Au refte, Huyghen» remarque que le même principe a lieu dans le mouvement des corps pelans liés enfemble d'une nianiere quelconque CCkmmc auffi dans le mouvement des fluides. On ne faurok deviner ce qm » donné à cet Auteur l'idée «d'un tel Principe; mais on peut conjeé!fcurer qu'il y a été conduit par 4e théorème que Galilée avoit démontré fur la chûte des corps pefans^ lefquels (bit qu'ils deicendent verticalement ou fur des plans inclinés , acquièrent toujours des vîtefles capables de les fiiire remonter aux mêmes hauteurs d'oLi ils étoient tombés. Ce théorème généralifé & appliqué au centre de gravité d'un f^Hémo da corps pefans» donne le Principe d'Huyghens. Quoi qu'il en foit, il eft vifible que ce Principe fournit line équation entre la hauteur verticale , d'où le centre de gravité dur fyft&ne eft deicendu dans un tems quelconque « ^ les difFérêntes hauteurs verticales auxquelles- les corps qui compofènt k fyftême pourroient remonter avec leurs vîtefles acquifes. Se qui par les théorèmes de Galilée font comme les carrés de ces vîtefTes. Or dans un pendule qui ofcille auceiu: d'^A axe korilonuL le» vîceilès des diâérens poinc«>

The text on this page is estimated to be only 23.26% accurate

174 MicHANIQUE ANALITIQUE. font proportionnelles à leurs
distances de l'axe; ainsi on peut réduire l'équation à deux seules inconnues,
dont l'une soit la distance du centre de gravité du pendule dans un temps
quelconque, & donc l'autre soit la hauteur à laquelle un point donné de ce
pendule pourroit remonter par sa vitesse acquise. Mais la descente du centre
de gravité détermine celle de tout autre point du pendule; donc on aura une
équation entre la hauteur d'un point quelconque du pendule est
descendu, & celle à laquelle il pourroit remonter par sa vitesse, due à cette
chute. Dans le centre d'oscillation, ces deux hauteurs doivent être égales,
parce que les corps libres peuvent toujours remonter à la même hauteur
d'où ils sont tombés; Or l'équation fait voir que cette égalité ne peut avoir
lieu que dans un point de la ligne perpendiculaire à l'axe de rotation, &
passant par le centre de gravité du pendule, lequel soit éloigné de cet axe de
la quantité qui provient en multipliant tous les poids qui composent le
pendule, par les carrés de leurs distances à l'axe, & divisant la somme de
ces produits par la somme du pendule multipliée par la distance de son
centre de gravité au même axe. Cette quantité exprimera donc la longueur
d'un pendule simple, donc le mouvement seroit égal à celui du pendule
composé. Cette théorie d'Huyghens est exposée dans son Traité de l'Horlogerie
où l'on voit qu'elle parut en 1673, & qu'elle y est accompagnée d'un grand
nombre de savantes applications» Elle n'auroit rien de difficile à définir, Si elle
n'avoit pas été appuyée sur un Principe précaire; & il reloit toujours à «ic*
montrer ce Principe pour la mettre hors de toute atteinte, l'auteur le fit parurenc
dans le Journal des Savants de Paris, lequel Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 21.97% accurate

Seconde Partie. 17J qüies mauv.iifcs objections contre cette thcorie, aii-xquelles Huyghens ne répondit cjiie d'une manière vague 6c peu facisfaifance. Alais cette conteftacion ayant excité rattention de Jacques Beraoulll , lui donna occafion d'examiner à fond la théorie de Huyghens , & de chercher à la rappeler aux premiers principes de la Dynamique. Il ne confidere d'abord que deux poids égaux attachés à une ligne inflexible & droite , & il remarque que îa vîteffe que le premier poids , celui qui eft le plus prcs du point de furpenfion, acquiert en décrivant un arc quelconque , doit ccrc moindre que celle qu'il auroit acquiic en décrivant librement le même arc; &. qu'en xnême tems la vîteiTe acquife par l'autre poids , doit être plus grande que celle qu'il auroit acquiie, en parcourant le xnême arc librement. La iriteiTe perdue par le premier poids 8*eftdonc cdmuniquée auiecond, & comme cette communication Ce fait par le moyen d'un levier mobile autour d'un point fixe , l'Auteur fuppose qu'elle doit fuivre la loi de l'équilibre des puiïances appliquées à ce levier; de manière que la perte de vîteffe du premier poivis foit au gain de vîtelie du fécond , dans la raifon réciproque des bras de levier, c'eft-à-dire, des diftances au point de furpenfion. JDe-là & de ce que les vîtellès réelles des deux poids doivent être elles-mêmes dans laraîfbn direâe de ces diftances» on détermine facilement ces vîteflès , te par conféquent lé mouvement du pendule. Tel eft le premier pas qui ait été fait vers la fôûtiôn <lire<n:e de ce fameux problème. L'idée de rappoirer au levier les forces rcfulrantes des vîtefics gagnées ou per dues par les poids, eft rrcs-fii:e, 6c donne la c!cf de !a vraie il vone^ mais Jacques Bernouili s>'eSt trompé » en coniLdérant ks

The text on this page is estimated to be only 22.20% accurate

7y6 M É >C il A N I Q U E A N A L I T I Q U E. vîte0è\$ acquies pendant un tems quelconque Δt , au lieu qu'il • 9, l'auroic dû considérer que les vîteilles élémentaires acquies pendant un instant, & les comparer avec celles que la gravité tend à imprimer pendant le même instant. C'est ce qu'a fait • puis le M. irquis de l'Hopicaî, d.nvs un Écrit inréic dans le Journal de Rotterdam de i(j90. Il suppose deux poids quelconques attachés au lîl inflexible qui fait le pendule composé, & il établit l'équilibre entre Les quantités de mouvement perdues & gagnées par ces poids dans un intervalle quelconque» c'est-à-dire entre les différences des quantités de mouvement que les poids acquièrent réellement dans cet instant, celles que la gravité tend à leur imprimer. On détermine par ce moyen le rapport de l'accélération instantanée de chaque poids à celle que la gravité seule tend à lui donner, & il trouve le centre d'oscillation, en cherchant le point du pendule pour lequel ces deux accélérations feroient égales. Il étend ensuite la méthode à un plus grand nombre de poids, mais il regarde pour cela les premiers comme réunis successivement dans leur centre d'oscillation, ce qui n'est plus à dire & ne peut être admis sans démonstration. Cette analyse du Mémoire de l'Hopicaî a fait revenir Jacques Bernoulli sur la sienne, & donna enfin lieu à la première solution directe & rigoureuse du problème des centres d'oscillation, solution qui mérite d'autant plus l'attention des Géomètres, qu'elle contient le germe de ce Principe de Dynamique, qui est devenu si fécond entre les mains de M. d'Alembert. L'Auteur considère les mouvemens que la gravité imprime à chaque instant aux corps qui composent le pendule, & comme ces corps, à cause de leur liaison ne peuvent les suivre Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 13.57% accurate

Seconde Partie.' 17/ fuivre eaendef ^ â conçoit les mouTOMens imprimés coihme compoiib-cle éeoK que les corps peuTent prendre <l*atitres mouvemens qui doivent être détruits, 'ÔC Jh» vertu defquels le pendule doit demeurer en équilibre. Le problème fe trouve ainli ramené aux principes de U Statique, & ne demande plus que le fecours de ranalyfe. Jacques Bernoulli trouva par ce moyen des formules générales }our 'les centres d'ofcilJadon des } corps de .âgoio i'qimktmqiie , fit Voir - IW cord avec le principe de Huyg^iens , 6c démontra 4'idèdâki^ des centres d'-olcillation de percoflîônii-iS^tte fcikiiidh àv6it été ébauchée dès 1^91 darii lés antes de Leipfic ^ mais elle' n'ai été donnée d'une manière complerce qu'en 1703, dans les Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris. '* '' Pour ne rien laifler à dcfrirer fur cette hiftoire du problème' du centre d'ofcillation , je deVrois rendre compte aulî de hi folutioh que Jean Séfâoutli W à donriée énifuice dans les mêmes Méiiiôires^, & qtt^ ipht^été tiècr^ée èi: publiée ^yeu.^ près eh <mêm&4effris 'aV* Taybf.'^dâfis^ 'îouvrage itititidë:.^ Mctkodus incrememonm^ a éi?iifotc3fibïi'd^uhè vive difpute' entre ces deux Géomètres; mais quelqUe ingénieufe que foie Pidée fur laquelle eft fondée cette nouvelle folution, & qui corififte à réduire tout d'un coup fé' pendule compofé en un/ pendule fimple^ én fubïfitaot à fes différens poids, d'autres poids réunis dans un feul point & dont les niaflès fie les peian-* teurs foirent teUies qu'il faut 'jKmr que leurs accélération an-; gukûfes de leurs^'iîibinéas,- par ckppoit 4 raxe#dè' rotattioRibieiy les • nêMW^- il^ fiuMc déiiiiim5Uisc4^^r ' cdtte 4dée^ n*eft ni fi naturelleP, ifi â Jfimiaeu fa'qiIel «^'Âb T^i^brîsl^ encre teè ftiotrreirfèns déthrîts 'à'lûquellé-Jacsqites B^tnbnlfi^avoit eu i arc de réduire cette recherche.' - .. •

The text on this page is estimated to be only 19.82% accurate

178. MÉCHANIQUE ANAÏ<1TIQUE. On cmvè encore dons U PhoranmU d'Herman, publiée en «ne nouv^ manière de réfoudre le même pro* blme. Se qui eft fondée! fur. ceï. autre principe, que les force? motrices, dont les poids qui forment le pendule font réellement animés , pour pouvoir être mus conjointement » doivent être équivalentes à celles qui proviennent de l'action de la gravité y eiiforte que les premières étant fupposées dirigées en fens.contnûre» doivent faire équilibre à ces dernières. ./ • . . - , - Ce frindpe préfénté de. cette manie?e, n'eft cependant pas ai^z lumineux pour pouvoir, êtrç pris pour un axiome de l^échanîque; mais, il n'eft' pias- difficile de le démontrer par le moyen de celui de Jacques Betnoulli, dont il eft en effet une fuite néceflaire. M. Euler lui adonné depuis une plus grande généralité, &. l'a appliqué à la folution de différens problèmes touchant les ofcillations des corps flexibles ou inflexibles, dans un Mémoire imprimé en 1740 , dans Jer tonie yU des anciens. Commentairés de Pétersbourg. •H feioit trop long de parler des autres problèmes^ de Dy* namique:.qui bnt exercé la fagacifié des -Géomètres après celui diî centre d'efcillation, (Se avant que l'art ;de^ les rd* foudre fât réduit 1 des règles fixes. Ces problèmes que MM. Bemoulli Clairaut , Euler Te propofoient entr'eux > fe trouvent répandus dans les premiers volumes des Mémoires de Pétersboi^j^g de Berlin, dans les Mémoires de Paris (années 173^ & 1741), dans les Œuvres de Jean Berno^lli, damlei Opufcttles de M. Euler. Ils.cpt/tftent à déternaînet lermouvemens de plufieucs' corps pefansou non qui iè pouflènt oa fe tii«ktt par des iils <m d!«iem» inflexibles • » Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 21.06% accurate

Seconde Partie, lyp Ott ils foQC fixeineac attachés» ou le long
defquels ils peuvent couler tiManeot, U qui ayant reçu des impulsions
quelconques,, font . enfuice al>andonné8 à eux-mênies , ou contraints de &
mimir fur des courbes ou des furfaces données. " • .. • • Le principe de
Huyghens ^ôic prefque toujours employé dans la foiution de ces problêmes
; mais comme ce principe ne donne qu'une feule équation» on. cherchoic les
aures^par la conâdératioi^.des.forces inconnues MVtQ ierqueliei on co«[^]
^voit. que les ççtps deyoienti fe poudèr iè tirer» èc qu'on legaidoit comme
des ibrcesi élaftiqueft agiflânt également fin fens çonttaires ; l'emploi de
ce& forces ^i^nroïc- d'avoir égant à la liaifon des corps , & permettoit de
Faire ufage des loix du mouvement des corps libres; cnfuite les conditions
qui par la nature du problême dévoient avoir lieu entre les mouvemens des
differens corps , fervoient à déterminer les forces inconnues qu'on avott
introduites dans le caJcuL Mais U failoit toujours une adreflè particulière
pour démêler dans chaque problême contes les ibtces amiqueUes il éooic
néectùàsc d'avoir ^atd; œ.i^.rendeit ces pmMêmes piquants & propres à
eidtier rémnlation. . . Le traité de Dynamique de M. d'Alcmbeîît qui parut-
6ft 1743, mit fin i ces efpeces de défis, en offrant une mé-» thode directe
ÔC générale pour réfoudre, ou du moins pour mettre en équations tous les
problêmes de Dynamique que i'jon peut imaginer.* Cette méthode réduit
tôutes les loix dn mouvement des corps 'à-o^es 4e leur équilobie» xamene
ainii la Dynamique à la Statique. Nous avons déjà temaf^oé que le principe
employé par Jacques fiernéulli dans la recherche du centre d'ofcillatioii,
avok l'avantage de mre

The text on this page is estimated to be only 22.29% accurate

180 M É C H A N I Q U E A N A L I T I Q U E. dépendre cette recherche des conditions de l'équilibre du levier; mais il est réservé à M. d'Alembert d'élargir ce principe d'une manière générale, & de lui donner toute la simplicité & la fécondité dont il pourroit être susceptible. Si plusieurs corps tendent à se mouvoir avec des vitesses & des directions, qu'ils soient forcés de changer à cause de leur action mutuelle, on peut regarder ces mouvemens comme composés de ceux que les corps prendront réellement. On suppose qu'ils sont détruits; d'où il suit que ces derniers doivent être ceux que les corps animés jouissent de ces mouvemens se fassent équilibre. • ' Tel est le Principe que M. d'Alembert a donné, le dont on a fait de très utiles applications. Ce Principe ne fournit pas immédiatement les équations nécessaires pour la solution des différents problèmes de Dynamique, mais il apprend à les déduire des conditions de l'équilibre. Ainsi en combinant ce principe avec les Principes ordinaires de l'équilibre du levier, ou de la composition de forces, on peut toujours trouver les équations de chaque problème à l'aide de quelques constructions plus ou moins compliquées. C'est de cette manière qu'on en a usé jusqu'ici dans l'application du Principe dont il s'agit; mais, la difficulté de déterminer les forces qui doivent être détruites, ainsi que les lois de l'équilibre entre ces forces, rend souvent cette application embarrassante & pénible; & les solutions qui en résultent sont presque toujours plus longues que si elles étoient déduites de Principes moins simples. Dans la première Partie de ce Traité, le Principe des vitesses virtuelles nous a conduits à une Méthode analytique »

The text on this page is estimated to be only 23.52% accurate

Seconde Partie. iSr t^s-(imple » ponr réfoudre toutes les qaeftioas de Scatiqtie. * Ce même Pnndpe combiné avec celui que nous venons d'ex' poief y ibuniira donc auflî une Méthode femblable pour les problèmes de* Dynamique , &: qui aura les mêmes avantages: Pour fe former d'abord une Idée de cette méthode , on fe rappellera qUe le Principe gënêrâl des vîtclles virtuelles con(iil:c en ce que , 4orfcju'un fyftême de corps rédui^ à des points, & animés de forces, quelconqiiei çft.en équilibre» fi on donne i ce fy^ênîe un pedt mouveopent quelconque en vertu duquel chaque corps. parjure . un efpace infini^ ment petit, la fomme des forcés «a puiiTances multipliées diacunec par 'Fefpace que le poinjc jt)ù elle eft. appliquée parcourt fuivant la diredion de cette puiïïance , eft toujours ^gale à zéro. Si maintenant on fuppoie le fyftême en mouvement, & qu'on regarde le mouvement que chaque corps a dans un infant comme compofé de deux , dont l'un foit celui que .Je corps aura dans Tindanc fuivant, il faudra, que l'autre foit détruit par Taélion réciproque des corps, & par celle des forces motrices dont ils font sâueilement animés. Ainfi il devfa y avoir équilibre et)tre ces forces & les preffions ou réfiftances qui réfultent des mouvemens qu'on peut regarder comme perdus par les corps d'un infant i Vautre. D'où il fuit que pour étendre au mouvement du fyftême la formule de Cqn équilibre, il fupira d.y termes dûs à ces dernières forces. Or fi on confidere^ ainû' que. nous l'avons, dë)a fait plus, haut, les vîteiles que chaque corps a fuivant trois directions fixes U perpendiculaires jentr'eUes, les décroillèmens

The text on this page is estimated to be only 24.50% accurate

iS2 Mécanique a nautique. *de CCS vicellês repréiieateronc les
mouvemens perdus fuivanc les mêmes directions « 8c leurs accioiflémens
feront par Gonféquenc les mouveméos perdus dans des direâions op*
pofées. Donc les ftdBoùB réfultanees de ces mouvemens perdus fèronc
exprimées en général par la maflè multipliée par rélément de la vîctfTe , &:
divifée par réiémenc dutems , te auronc des diredionS directemènc
contraires à celles des v9ceflti^ De cette manière on pourra 'exprimer
anaitique^ ment les termes dont il 6*agit, & l'on aura une formule gé»
nérale pour le mouvement, des corps » laquelle renfermera la folution de
tous les problèmes de Dynamique» U dont le (împle développèilienc
donnera les équations héceftaires pour chaque prdblème v comme on .le
verra dans la fuite de ce Traité. Mais un des plus grands avantages de cette
formule , eft d'offrir immédiatement les équations générales qui renferment
les Principes , ou théorèmes connus fous les noms de çonfirvMtiên des
forces vives , de confervaûon du mouvcmnt du coure de gravité^ de
confen'otion du momeni du mo»de roioticn^ ou Principe des mires > ^ de
principe de la moinire quûsuti tPacHon, Ces Principes doivent être
regardés plutôt comme des réfultacs généraux des loix de la Dynamique,
que comme des principes primitifs de cette Science, mais étant fouvent
employés comme tels dans la folution des problèmes, nous croyons devoir
en dire auffi mot, en indiquant en quoi ils confident, & à quelj Auteurs ils
font dûs, pour ne rien laiffer à defirer dans cette expofition préliminaire des
Principes de la Dynamique. Le premier des quatre Principes dont nous
venons de parler , celui de la çoniêrvation des forces vives , a été trouvé I
Digitized by Google i

The text on this page is estimated to be only 24.42% accurate

Seconde Partie. 183 par Huyghens, mais sous une forme un peu différente de celle qu'on lui donne présentement & nous en avons déjà parlé à l'occasion du problème des centres d'oscillation. Le principe tel qu'il a été employé dans la solution de ce problème, consiste dans l'égalité entre la descente & la montée du centre de gravité de plusieurs corps pesants qui descendent conjointement, & qui remontent ensuite séparément, étant réfléchis en haut chacun avec la vitesse qu'il avoit acquise. Or par les propriétés connues du centre de gravité le chemin parcouru par ce centre dans une direction quelconque, est exprimé par la somme des produits de la masse de chaque corps & du chemin qu'il a parcouru faisant la même distance, divisée par la somme des masses. D'un autre côté, par les théorèmes de Galilée, le chemin vertical parcouru par un corps grave est proportionnel au carré de la vitesse qu'il a acquise en descendant librement, & avec laquelle il pourroit remonter à la même hauteur. Ainsi le Principe de Huyghens se réduit à ce que dans le mouvement des corps pesants, la somme des produits des masses par les carrés des vitesses à chaque instant, est la même, soit que les corps se meuvent conjointement d'une manière quelconque, ou qu'ils parcourent librement les mêmes hauteurs verticales. C'est aussi ce que Huyghens lui-même a remarqué en peu de mots dans un petit Ecrit relatif aux méthodes de Jacques Bernoulli & du Marquis de l'Hôpital, pour les centres d'oscillation. Jusques-là ce Principe n'auroit été regardé que comme un simple théorème de Mécanique mais lorsque Jean Bernoulli eut adopté la définition établie par Leibniz « entre les forces mortes ou pressions qui agissent sans mouvement absolu, &

The text on this page is estimated to be only 23.51% accurate

184 MÉCHANIQUE ANALITIQUE, . les forces vives
accompagnées de ce mouvement» ainfi que la mefore de ces dernières par
les produits des mafles ic des carrés des vîteflès , il ne vit plus dans le Prin-i
cipe en queftion, qu'une conféquence de la théorie de» forces vives, 6c une
loi générale de la nature, fuivant laquelle la fomme des forces vives de
plufieurs corps fe conierve la même pendant que ces corps agiflent les uns
fur les autres par de iimples prelTions , ôc eft conAamment égalé à la
limple force vive qui réfulte de i'aâion des forces af^ueUes qui meiiivent les
corps. U lui donna a>nfi le nom de coît' firyatipn des^ forces vives, tL il
s'en fervit atec fciccès pour réfbudre quelques problèmes qui ne Tavoient
pas encore été, & dont il paroiflbit difficile de veqir à bout par des-
méthodes diredes. > • • Son illuftre fils, Daniel Bcrnoulli , a déduît^ fuite de
ce' Principe, les loix du mouvement des fluides dans des vafes,' matière qui
n avoit été traitée avant lui que d'une manière vâgue & arbitraire. Enfin il a
reiidu ce même principe très-' général dans les Mémoires de Betlin pour
Tannée 1748,' en faifant voir comment on peut «l'appliquer au mouvement
des' corps apimés par des attraétions mutuelles quelconques, ouatdrés vers
des centres fixes par des forces propôrtonnéUes à quelques fonélions des
difances que ce foit. ■ ■ ' Le gr.md avantage de ce Principe eft de fournir
immédiatement une équation finie entre Jes vîccfles des corps 6c les
variables qui déterminent leur .polition dans lefpace ; de forte que lorfque
par la nature du problème, toutes ces variables fe réduifent k une feule ,
cette équation ftiâit pour le réfoudre' complètement^ & c'eft le cas de celui
des centres dorciUacion. En général la cdnferviition des forces vives •
donne Digitized by Googl(

The text on this page is estimated to be only 24.94% accurate

Section D E Par t i e. i[^]j donne toujours une intégrale première des différentes équations différentielles de chaque problème ; ce qui est d'une grande utilité dans plusieurs occasions. Le fécond Principe est du à Newton, qui, au commencement de ses Principes Mathématiques , démonstre que l'état de repos ou de mouvement du centre de gravité de plusieurs Corps n'est point altéré par l'action réciproque de ces corps quelle qu'elle soit; de sorte que le centre de gravité des corps qui agissent les uns sur les autres d'une manière quelconque, soit par des fils ou des leviers ou des Indes d'attraction , &c , sans qu'il y ait aucune action ni aucun obstacle extérieur, est toujours en repos, ou demeure uniformément en ligne droite. Ald'Alembert lui a donné depuis , dans son Traité de Dynamique, une plus grande étendue, en faisant voir que sur chaque corps est sollicité par une force accélératrice constante, & qui agit suivant des lignes parallèles, ou qui est dirigée vers un point fixe , & agissant en raison de la distance, le centre de gravité doit décrire la même courbe que si les corps étoient libres ; à quoi on peut ajouter que le mouvement de ce centre est en général le même que si toutes les forces des corps quelles qu'elles soient, y étoient appliquées chacune suivant sa propre direction. Il est visible que ce Principe sert à déterminer le mouvement du centre de gravité, indépendamment des mouvements respectifs des corps, & qu'ainsi il peut toujours fournir trois équations finies entre les coordonnées des corps Se ie tems , lesquelles feront des intégrales des équations différentielles du problème. Le troisième Principe est beaucoup moins ancien que les Aa

The text on this page is estimated to be only 24.08% accurate

tS6 MéCHANIQUE* AKALITIQUE. deux picccJens , Se paroît avoir été découvert en mcmctcms par MAI. Euler , Daniel Bernoulli ^ fi^ le Chevalier d'Arcy mais sous des formes différentes» Selon les deux premiers, ce Principe consiste en ce que dans le mouvement de plusieurs corps autour d'un centre fixe, la somme des produits de la maille de chaque corps» par l'élément de circulation autour du centre , & par la distance au même centre, est toujours indépendante de l'action mutuelle que les corps peuvent exercer les uns sur les autres , & est la même que qu'il n'y a aucune action ni aucun obstacle extérieur. M. Daniel Bernoulli a donné ce Principe dans le premier volume des Mémoires de l'Académie de Berlin» qui a paru en 1746 » & M. Euler l'a donné la même année» dans le premier tome de ses Opuscules; & le même problème qui le» y a conduits, l'a avoir la recherche du mouvement de plusieurs corps mobiles dans un tube de figure donnée, qui ne peut que tourner autour d'un point ou centre fixe» Le principe de AI. d'Arcy, tel qu'il l'a donné à l'Académie des Sciences de Paris» dans un Mémoire qui porte la date de 1746 » & qui n'a paru qu'en 1751 dans le Recueil pour 1747» est la même des produits de la maille de chaque corps par l'aire que son rayon vecteur décrit autour d'un centre fixe , est toujours proportionnelle au tems. On voit que ce Principe est une généralisation du beau théorème de Newton, sur les aires décrites en vertu de forces centripètes quelconques ; & pour en appercevoir l'analogie, ou plutôt l'identité avec celui de MM. Euler & Daniel Bernoulli» il n'y a qu'à considérer que la vitesse de circulation est exprimée par l'élément de l'arc circulaire divisé Google

The text on this page is estimated to be only 26.05% accurate

Seconde T a r t i e. 157 par l'élément du tems , fie que le premier de ces élémens multiplié par l'élément au centre » donne l'élément de l'aire décrite autour de ce centre & d'où Ton voit que ce dernier Principe n'est autre chose que l'expression différentielle de celui de M. d'Arcy. Cet Auteur a présenté ensuite son Principe sous une autre forme qui le rapproche davantage du précédent » et qui consiste en ce que U Comme des produits des maflès » par $1^{\wedge} - v^2$ & par les perpendiculaires tirées du centre sur les élémens du corps » est une quantité constante. . Sous ce point de vue il en a fait même une espèce de Principe métaphysique , qu'il appelle la conservation de l'action , pour l'opposer , ou plutôt pour le substituer \ celui de la moindre (quantité d'action; comme fi des dénominations vagues arbitraires faisoient l'essence des loix de la nature, & pouvoient par quelque vertu secrète ériger en loix finales » de simples résultats des loix connues de la Mécanique. & ainsi qu'il en (bit) le Principe (bnc il s'agit a présent) généralement pour les systèmes de corps qui agissent les uns sur les autres d'une façon quelconque, soit par des fils » des lignes inflexibles , des loix d'attraction , &c , & qui sont de plus sollicités par des forces quelconques dirigées à un centre fixe, soit que le système soit d'ailleurs entièrement libre, ou qu'il soit assujéti à se mouvoir autour de ce même centre. i«a somme des produits des maflès par les aires décrites autour de ce centre, U. projetées sur un plan quelconque » est toujours proportionnelle au tems; de sorte qu'en rapportant ces aires à trois plans perpendiculaires entr'eux » on a trois équations » différentielles du premier ordre entre le tems & Aa a

The text on this page is estimated to be only 22.25% accurate

188 MjfeCHANIQUE ANALIIIQUE. les coordonnées des courbes décrites par les corps; & c*eff proprement dans ces équactoaas que conMe la natare du Principe dont nous venons de parler. Je viens enfin au quatrième Principe que j'appelle de la moindre action^ par analogie avec celui que feu M, de Mau>percuiss avoic donné fous cette dénomination , & que les écrits de plusieurs Auteurs illudres ont rendu enfuite fi f>> .meux. Ce Principe envifagé analitiquement , confifte en ce que dans le mouyement des corps qui a^flènç les uns fur les autres » la fomme des produîts^ des mafles par le» viteilès & par les efpaces paffoums, eft voi- minimum^ L*Auteur en a déduit les^ loix de la réflexion fie de. la réfraction de la lu.miere, ainfi que celles du choc des corps, daps deux MéAïoires, l'un à l'Académie des Sciences clc Paris en 1744». ÔC l'autre deux ans .-rprès à celle de Berlin. Mais il faut avouer que ces applications font trop partie Gulieres pour (ervir à établir la vérité d'un Principe général; elles ont d'ailleurs quelque chofe de vague & d'arbitraire ». qui ne peut que rendre incertaines les conféqiencies qii'onea' pourroic cirer pour Texaditude même dii Principe. AufB V%ti auroic tort, ce me femble-, de mettre ce Principe préfent^ ainfi fur la même ligne que ceux que nous venons d'expofer. Mais il y a une autre manière de l'cnvifager plus générale Ô£ plus rigoureufe, &: qui mérite feule l'attention des Géomètres* M. Euler en a donné la première idée à la Hn de Ton Traité des Ifopérimètres , imprimé à Laufanne en 1744» en y fant voir que dans- les trajectoires décrite» par des forces- cen* traies, l'intégrale de la viteilè multipliée par Téléroenc de la courbe, fait toujours nn maximum ou nn minimum. Cette propriété que M. Euler n'av<>»it reconnue que dans

Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 22.98% accurate

{Seconde Partie. 189 le mouvement des corps isolés, je l'ai étendue depuis au mouvement des corps qui agissent les uns sur les autres d'une manière quelconque » & il en a résulté ce nouveau Principe général que la somme des produits des masses par les carrés des vitesses multipliées par les éléments des espaces parcourus est constamment un maximum ou un minimum. Tel est le Principe auquel je donne ici, quoique improprement le nom de moindre action, & que je regarde non comme un principe métaphysique, mais comme un résultat simple & général des lois de la Mécanique. On peut voir dans le Tomo II des Mémoires de Turin, l'usage que j'en ai fait pour résoudre plusieurs problèmes difficiles de Dynamique. Ce principe combiné avec celui de la conservation des forces vives & développé suivant les règles du calcul des variations, donne directement toutes les équations nécessaires pour la solution de chaque problème; & de-là naît une méthode également (simple & générale pour traiter les questions qui concernent le mouvement des corps; mais cette méthode n'est elle-même qu'un corollaire de celle qui fait l'objet de la seconde Partie de cet Ouvrage > à qui a en même-temps l'avantage d'être tirée des premiers Principes de la Mécanique. SECONDE SECTION. Formule générale pour le mouvement d'un système de corps, animés par des forces quelconques^^ Lors que les forces qui agissent sur un système de corps (ont été posées conformément aux lois exposées dans la première Partie de ce Traité, ces forces se détruisent ma-^

The text on this page is estimated to be only 25.73% accurate

ino MÉCHANIQUE ANALITIQUE. tuellement, &c le fyfbême demeure en équilibre. Mais quand rëquilibre n'a pas lieu , les corps doivent déceflairement le mouvoir[^] en obéiffanc en tout ou en pardeà l'aâiondes forces qui les foUicitenc La détermination des mouvemens produits par des forces données, eft Tob jet de cette féconde Partie. Nous y confidércrons principalement les forces accélératrices ou retardatrices , dont l'action eft continue, comme celle de la gravité , Se qui tendent à imprimer à chaque infant une vîtefle infiniment petite égaie « à toutes les particules de matière. Quand ces forces agiffent librement ôL uniformément [^] elles produifenc néceflairement des vîtefles qui augmentent comme les tems ; & on peut regarder les vîteflès ainfi engendrées dans un tems donné , comme les eflêts les plus fimples de ces fortes de forces, & par conféquent comme les plus propres à leur fervir de mefure. Il faut, dans la Aléchanique, prendre les cfFets fimples des forces pour connus; Se l'art: de cette fcience coniiiVe uniquement à ea déduire les effets compofés qui doivent réfulter de TacHon combinée 6c modifiée des mêmes forces. 1. Notis fuppoferotts dpnc que l'on cennoiffè pour chaque . force accélératrice la vîteflè qu'elle dk capable d'Imprimer, i un mobile en agidanc toujours de la même manière[^] pendant un certain tems, que nous prendrons pour l'unité des tcnis j nous entendrons fimplcmnt par Jorc<; a[^]cclératrlcc cette même vîtefle. Elle doit s'eftimer par TeTpacc que le mobile parcourroit dans le même tems , H elle étoit continuée uniformément; & on fait par les théorèmes de . Galilée, que cet efpacc eft toujours double de celui que le corps a parcouru réellement par l'aétion confiance de la [^] force accélératrice* uiyiu[^]uu Ly Google

The text on this page is estimated to be only 23.06% accurate

Seconde Partie. jpi . On peut d'ailleurs prendre une force accélératrice connue pour l'unité, & rapporter à celle-là toutes les autres. Alors il faudra prendre pour l'unité des espaces, le double de l'espace que la même force continuée également feroit parcourir dans le tems qu'on veut prendre pour l'unité des tems, & la vitesse acquise dans ce tems par l'action continue de la même force, fera l'unité des vitesses. De cette manière les forces, les espaces, les tems & les vitesses ne seront que des (simples) rapports, des quantités mathématiques ordinaires. Par exemple, si on prend (ce qui est très-naturel) la gravité sous la latitude de Paris pour l'unité des forces accélératrices, & qu'on compte le tems par secondes, on devra prendre alors 30¹/₉₆ pieds de Paris pour l'unité des espaces parcourus, parce que 15,098 pieds, est la hauteur d'où un corps abandonné à lui-même, tombe dans une seconde sous cette latitude; L'unité des vitesses fera celle qu'un corps pesant acquiert en tombant de cette hauteur. 3. Ces notions préliminaires supposées, considérons un système de corps disposés les uns par rapport aux autres, comme on voudra, & animés par des forces accélératrices quelconques. Soit m la masse de l'un quelconque de ces corps, regardée comme un point; & soient les trois coordonnées x, y, z les angles qui déterminent la position absolue du corps au bout d'un tems quelconque. Ces coordonnées sont supposées toujours parallèles à trois axes fixes dans l'espace, & qui se coupent perpendiculairement dans un point nommé l'origine des coordonnées. Elles expriment par con

The text on this page is estimated to be only 18.49% accurate

Ipl MéCHANIQUE AKAIITIQUE « fréquents les distances-
 reàilignes fia corps k trois plans passant par les mêmes axes. Ainii à cause
 de* la perpendiculaire de ces plans, les coordonnées J^* » ^ représentent
 les espaces parcourus par le corps en s'éloignant des mêmes plans ^ par
 conséquent représenteront les vitesses (Iès <]ue ce corps a dans un instant
 quelconque pour s'éloigner de chacun de ces plans-U; . & ces vitesses, fi le
 corps étoit enfiute abandonné à lui-même, demeureroient constantes dans
 les instans suivans, par les principes fondamentaux de la théorie du mou-
 vement 4* Soient maintenant $P^Q^$ & Cy les forces accélératrices, qui
 dans le même instant font agir chaque point de la masse m suivant des
 directions données, c'est-à-dire, les vitesses que chacune de ces forces
 imprimeroit à la masse m , si elles agissoient séparément ^ également
 pendant le tems qui ci\ pris pour l'unité. Quelque variable que puisse être
 l'une de ces forces, on peut néanmoins la regarder comme constante
 pendant un instant. Par conséquent, comme les vitesses engendrées par des
 forces accélératrices constantes, sont proportionnelles au tems, il s'enfuit
 que les vitesses que les forces $P, R^$ & cc , impriment ou tendent à imprimer
 au corps m pendant l'instant sont exprimées par Pt, Qdt, Rdt & cc . On ont
 les mêmes directions que ces forces. Donc dans l'instant suivant le corps
 tendra à se mouvoir à la fois avec les vitesses $J^{\pm}$. Il ^ $Jl. p_j^ n^c^ Rdt y 6cc$;
 & il prendroit effectivement un mouvement composé Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 15.15% accurate

SscoNDS Partie. ip} compôfé de ceoz-ci, s'il devenoît libre; mais
 ce mouvemenc eft altéré par la liaifbn mncuelle des corps. Or puifque , -^^^
 , expriment en général les Tîteilès efièdivès du corps après le ceins les vl*
 dx icees par • tefTes après le xems t-\-dt feront repréfentées par -j^ - ' dt ^ '
 Ainfi le corps aura perdu les vîtefTes V dt ^Q^dt ^Rdt ^ &c, 6c gagné à leur
 place les vîtefles d, d, à» tendantes à augmencer fes coorlonnéeâ *»y y ^
 revient au mêmey il aura perdu à la fois les vkeflès fd tyQdt^ Rdt , &c, £C
 les vîtefles </ . -^7-, d. -^jj-» d , dirigées en fens coor iraire» c^eA-àrdire^
 fiÛTanc les lignes mêmes ^«f* Donc 'auffi les forces accélératrices
 capables de produire ces diiFérentes vîccflès auront été détruites , & fe
 feront par coaféquẽnt fait mutuellement équilibre. Donc enfin il y aura eu
 équilibre dans le fylkême, en fuppoiant chacun des corps m g^ui le
 compofent , animé à la fois par les forces accélératrices P, Q9 ^9
 données, U de plus par les forces dm . ^ dy ^ di accélératrices , . ' , ^' , ou
 bien (en faidt dt dt iant dt confiant) "H^^ -i^, dirigées fuivant Jes lignes
 »»»^, ^ . D'oà l'on voitque les loix du mouvemenc da fyftême font les mêmes
 que celles de fon équilibre , en ajoutant (împlement les nouyeliès forces
 accélératrices 5* Oa pourra donc aulli trouver une formule gé(iérale Bb .

The text on this page is estimated to be only 16.38% accurate

MÉCHANIQUE ANALITIQUE. Soit le mouvement, comme on en a donné une pour l'équilibre; 8c cette manière de moins ne sera autre chose que celle de l'équilibre, en appliquant chaque Corps à la fois par les forces P, Q, R &c suivant les directions des forces accélératrices P, Q, R , dont on le suppose animé, & de plus par les forces m, m', m'' suivant les directions de ses coordonnées. Concevons pour cela que la position des différents corps du système change infiniment peu, en sorte que les coordonnées, deviennent $x = f^x, y = f^y, z = f^z$, les quantités étant infiniment petites; il est visible que ces quantités expriment les petits espaces que le corps aient parcourus suivant les lignes x, y, z parce que ces lignes étant perpendiculaires entr'elles, l'espace parcouru parallèlement à l'une ne dépend que de la variation de celle-ci nullement de celle des autres. Ainsi on aura d'abord $m \cdot x = m \cdot f^x$ &c. $m' \cdot y = m' \cdot f^y$ &c. $m'' \cdot z = m'' \cdot f^z$ &c. Considérons maintenant les forces accélératrices P, Q, R , &c, comme tendantes à des centres donnés; & soient r, r', r'' , &c, les distances de chaque corps m à chacun des centres. Que r, r', r'' , &c, représentent les variations des lignes ou quantités f^x, f^y, f^z &c. provenant des variations dx, dy, dz des lignes x, y, z ; il est clair, que ces quantités dx, dy, dz , s'exprimeront en même

The text on this page is estimated to be only 17.21% accurate

s B c o N D B Partie. ipjf cems les eij|>aces parcourus par le*corps m fuivant ks lignes P%q% Donc mP mQxifq^ mkxir^ &c, ièroDt les mkai des fi>KesmP, nÇ»]RjR,&c, agiflànies fnivaiic ces mêmes lignes , /y , ^ , r , ficc. Or la formule générale de Téquilibrè confifte en ce que la fomme des momens de toutes les forces du fyftème doit être nulle (Part. I, SeOt, 2, art. 1); donc on aura la formule cherchée ea égalant à zéro I4 fomme de tdutes les quantités celatÎTes à chacun des corps du fyftème prôpo(& 7» Donc fi cm dénote cette fomme par le ligne intégral «S*, ^ui doit embrailèr tous les corps du fyftêmc > on aura pour la formule générale du mouvement d'un fyftème quelconque de corps j regardés comme des points, & animés par des forces accélératrices quelconques P, R, &c. Pour fàûre uii^ de cette formule » on fuivra les' mêmes règles 91e' pour la foimide de l'éqidlibies atpfi il fendra appliquer ici tout ce qui a été dk dans la foconde Sec tioo de la première Partie, depuis l'article 3 jtrfq' à Uûtk, en oUêrvant' que les différentielles marquées par la note ou cara<aériftique dans la formule précédente répondent aux différentielles marquées par la caradériftique ordinaire d dans la formule de réquibre, & fo déierminienc par les . niêmes règles êclei mêmes opéraeios. • . - ' Bba • Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 16.96% accurate

Xp6 MÉCUANIQUE ANALITIQUE. • Nous nommerons dans k
 faite ces diffrénâmes α quées par des $\sin$ 9 pour les distinguer
 des autres marquées par β qui ient troient dans la même formule 9C qui
 expriment les accroissements ou décroissements successifs des variables, à
 raison du tems t du mouvement des corps ; tandis que les variations sont
 relatives au changement instantané qu'on introduit dans la position
 instantanée des corps , & qui est coté-à-côté indépendante de leur
 mouvement effectif. S. En général, il faudra commencer par chercher les
 valeurs de α , en S_x , l_y ^ ce qui est facile, parce que, nommant y les
 coordonnées rectilignes qui déterminent la position du centre des forces P ,
 on a, d'où l'on tire, en faisant varier uniquement x^y ; » « - $\frac{1}{2} \frac{d^2 y}{dt^2}$.
 C'est-à-dire que, comme nous Pavons déjà observé dans l'endroit cité, peut
 se réduire à cette forme générale & indépendante de la position du centre
 des forces $\frac{1}{2} \frac{d^2 y}{dt^2}$ $\cos \theta$ $\sin \theta$ $\cos \theta$ $\sin \theta$ {en nommant θ les
 angles que la direction de la force P ient avec les coordonnées y , ?) ou bien
 encore à celle-ci $\frac{1}{2} \frac{d^2 y}{dt^2}$ $\cos \theta$ $\sin \theta$ $\cos \theta$ $\sin \theta$, 4 étant Tan que
 cette direction est projetée sur le plan des

Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 22.10% accurate

Seconde Partie. i^y y avec V^{ss} des x . $\&c$ adnil des autres
relations $^ft^$ De cette manieie le» termes $Pip-h$ Qt^q $-i-$ $Rir^{^^}$ &c, fe
réduiront à cette forme Xix Vty $-t-$ $Z<r:$ $\{;$ Ôcles quantités $1^$, Z feront les
valeurs des trois forces parallèles aux axes des coordonnées $x,yy\backslash^$ &
équivalentes i toutes les forces P , ζ , Ry &c, comme nous l'avons déjnoocré
dans l'article 5 de la Sedion cinquième de la première Partie» Enfiite en
ayant égard aux équations de ccuidition^ «ïon** nées par la nature du
fyftème propofé , entre les coordonnées des différens corps, on réduira les
variations de ces coordonnées au plus petit nombre poffible , enforte que les
variations reliantés foienc toiu-à-fait indépendantes entr'elles te abfoiument
arbitraires. Alors on égalera à zéro la femme de $xsxQs-$ les termes affeâés
de chacune de jces dernières $7a>$. fiations; & iVm aura toutes les équatioqs
néceflaires pour la détermination du niouTeineht duXyflême. 5?. Si le
fyftème dont. on cherche le mouvement eft un corps continu, & d'une figure
invariable comme les corpe iblides, ou variable cômme les corps flexibles
& les fluides; sdcnrs déhoiaflt par m la jnaflè entière du coi^ff, ft par dm
l'un quelconque de fes éléinens, c'elUà-dire» une particule quelconque du
corps, on confidérerace corps comme un aA ' feinblage ou fyftâmc d'une
infinité de corpuscules $dm^$ animés, chacun par les forces accélératrices P ,
 $/?$, &c; & il n'y aura qu'à mettre dans la formule générale' de l'article 7, dm
à la place de ^tz , fie en mome-tems regarder le ligne S comme un (îgne
d'intégration relatif à toute l'étendue du cofpSj c'eft-ànlire» à la **pofitioa .
infntantané» toutes

The text on this page is estimated to be only 16.04% accurate

ipS MÉCHANIQUE ANALITIQUE* des pascal/mais
indépendant à la position de chaque particule. . En général ,
il faut remarquer relativement aux variables , qu'elles ne se rapportent
qu'à l'espace & non à la durée « en sorte' que dans les différentiations
manjnte par 9 la variable / » qui teprésente le tems devra toujours être
regardée comme constante. Or il peut arriver suivant les circonstances du
problème que les équations de condition * renferment elles-mêmes le tems r
, auquel cas elles feront , à proprement parler, variables d'un instant à
l'autre; alors quelques-unes des coordonnées se trouveront exprimées en
fonction des autres coordonnées & de la variable /; &c il faudra avoir égard
à la variabilité de t dans les différentiations marquées par mais on supposera
t invariable dans les différentiations marquées par 9. La même supposition
devra aussi avoir lieu relativement au signe Intégral S qui ne se rapporte qu'à
l'étendue même du corps dans chaque instant. * . ;T: fin O I 3.1 p M B S fin jÇ
TION. . frpprésentes géométriques du mouvement déduites de la JbrmuU .
précédente, X • C o N s 1 D é R O N s un système de corps disposés les uns
par rapport aux autres, 4c ensemble comme l'on voudra» mais sans qu'il
y ait aucun point ou obstacle fixe' qui gêne leur mouvement i il est évident
que dans ce cas Mes comliDigitized by Coogl

The text on this page is estimated to be only 18.29% accurate

Seconde Partie; xpp ^iis da Cy&èm ne peuvent tarder que la position respecuïye des corps entr'enxi par conséquent les équations de condition ne pourront contenir d'autres fonctions des coordonnées que les expressions des distances mutuelles des corps, • • • ^ient J , y , ^ les coordonnées d'un corps quelconque déterminé du système, tandis que x , y , ^ représentent en général les coordonnées d'un autre corps quelconque, faisons, ce <]tti est toujours permis, a est visible que les quantités jt' , y . ^ n'entrent point dans les expressions des distances mutuelles des corps mais ^ ces distances ne dépendront que des différentes quantités », r , qui expriment proprement les coordonnées des différents corps, rapportés à celui qui répond à x' , /, par, conséquent les équations de condition du CjOème feont entre les seules variables «, <, & ne varieront point > $y|i'$ - . point Donc û dans la formule générale du mouvement on substitue pour J^x , fy , J' ^ leurs valeurs $J^x' - f - <re$, $-f$. . J^f ^li: ^ ces variations $iTjc'$, ly , t :(seront indépendantes de toutes les autres, & arbitraires en elles-mêmes; ainsi il faudra évaluer séparément à zéro la totalité des termes affectés de chacune de ces variations i ce' qui donnera trois équations générales et indépendantes de la constitution particulière du système. 2 . En mettant dans la formule générale de l'article 7 de la Section précédente, à la place de la quantité $ffp'^{Qi}q$

The text on this page is estimated to be only 9.08% accurate

aOO MicHANIQUE ANALXTXftUE. il- JC #f -4- 6cc, fa
transfonnée $X^x^Yfy-^Z n^{^*}$ Seû. citée), cetce formule de[^]ienc [^] de4à on
laie le champ ces p:oi\$ équaûons générales, ■ kfqadktaomu tonioa» lieu
dans le mouvement d'un fyftême qadco«rie i|e «wpt, Jotfioe k fyftême ell
eocire3. 5B»olbn\$ maintenant que le corps auquel répondent le. ««données
y.y. i foit pUcé «lans le centre de $px^.$ é de tonc le fyMme. On aura, p» les
propriété, connue, d. «e (P)rM, Se& art. .x). les ic,.[^] Sf,=.o, *.«-o,
Îf»=.0ilefqwlles,«nd4t&en, tUnt par rapport à f, donner»»» eeBe»», Donc
on «m S [^]i-»-* «- [^]".P"*** que Jc' ayant la même valeur pour tous les corps,
cft ilwWpeiidaQtt figoe 5; on anta paieillement S [^] [^] :fjL
SmfUS[^]m[^]ifSm.AmCi les trois équations Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 21.33% accurate

Seconde Partie. Les équations de la mécanique précédente prendront cette forme plus simple $\sum m_i \ddot{x}_i = \sum F_i$. Ces équations serviront à déterminer le mouvement du centre de gravité de tous les corps, indépendamment du mouvement particulier de chacun d'eux. Il est évident que le mouvement de ce centre ne dépendra point de l'action mutuelle que les corps peuvent exercer les uns sur les autres, mais seulement des forces accélératrices qui agissent sur chaque corps. C'est en quoi consiste le principe général de la conservation du mouvement du centre de gravité. On voit au reste que les équations pour le mouvement du centre de gravité sont les mêmes que celles du mouvement d'un seul corps qui (seroit) animé à la fois par toutes les forces accélératrices qui agissent sur les différents corps du système. En effet, si on conçoit que tous ces corps soient réunis en un point qui réponde aux coordonnées x, y, z , on a alors dans la formule générale $\sum m_i \ddot{x}_i = \sum F_i$, & égalant à zéro la totalité des termes relatifs de chacune des trois variations $\ddot{x}_i/y, \ddot{y}_i/z, \ddot{z}_i/x$ on aura les mêmes équations que ci-dessus. C'est de là résulte ce théorème général, que le mouvement du centre de gravité d'un système libre de corps disposés les uns par rapport aux autres, comme l'on voudra, est toujours le même que si les corps étoient tous réunis dans un seul point. Ce

The text on this page is estimated to be only 23.04% accurate

201 MicHANIQUE ANALITIQUE. fu'en même tms dtarni d'eux fut animé des mêmes forces attractrices que dans leur état naturel J. Considérons ici le mouvement d'un système quelconque autour d'un point fixe, soit que ce point appartienne lui-même au système ou non; Or pour cela employons d'abord, ainsi que nous l'avons fait dans la première Partie (Sc³, art. 5) un rayon vecteur r avec l'angle θ décrit par ce rayon le plan des coordonnées x & y à la place de ces mêmes coordonnées, en conservant d'ailleurs la troisième coordonnée z perpendiculaire à ces deux-là. On aura de cette manière $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, & différenciant, $\frac{dr}{dt} = x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt}$ aw $\cos \theta = \frac{y}{r}$ — $\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{r} (y \frac{dx}{dt} - x \frac{dy}{dt})$ fin ç iCf H- « . Soit pour un corps quelconque déterminé du système » 9^e la valeur de l'angle θ } 6^e qu'on fasse en général pour chacun des autres corps $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 4. On peut prouver, comme dans l'endroit cité, que si le système a la liberté de tourner autour de l'axe des z , les variations de l'angle feront indépendantes de celles de toutes les autres variables. Dans ce cas donc la totalité des termes affectés de $\frac{d\theta}{dt}$ dans la formule générale du mouvement devra être séparément égale à zéro; ce qui donnera, une équation générale & indépendante de la constitution particulière du système; 8^e pour avoir cette équation, il est clair qu'il n'y a qu'à mettre les quantités $\frac{dx}{dt}$ & $\frac{dy}{dt}$ à la place de $\frac{dr}{dt}$ & $\frac{d\theta}{dt}$ dans la formule générale donnée ci-dessus (art. ij, 8^e faire ensuite une équation séparée des différens termes affectés de $\frac{d\theta}{dt}$. ' . ' 6^e Cette équation fera donc

Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 21.37% accurate

Seconde Partie, 503 aura lien en général pour quelque système» de $\cot p^*$ que ce soit, pourvu qu'il ait la H_{ber}^* de tourner autour de h ligne BO fis» qui ibrt d*axe aux coordonnées i . Et comme ce qui est relatif à l'un des trois axes des $coor^*$ données, peut être rapporté également à chacun des deux autres, on trouvera d'une manière semblable, par rapport à l'axe des coordonnées y y fi le système a la liberté de $COU|>?$ aer autour de cet axe, l'équation $\lambda a H_n$ on aura $a u_i H$, relativement à l'axe des coordonnées $9c$, en supposant que le système ait la liberté de tourner autour de cet axe, l'équation Ces trois équations auront donc lieu à la fois, lorsque le système aura la liberté de tourner autour de chacun des trois axes; c'est-à-dire, toutes les fois que le système (être disposé de manière qu'il puisse pirouetter librement en tout autour du point fixe où est l'origine des coordonnées; car nous avons vu dans la première Partie, (Sect. 3, art. 7), que tout mouvement de rotation autour d'un point fixe, peut toujours se résoudre en trois autres autour de trois axes passant par ce point. Pour se former une idée plus nette de ces équations, on remarquera que les quantités $x^{*/\wedge}$ — : ($\int x, y t^{\wedge}$ — " $\{d^{\wedge}y$ ne font autre chose que les différentielles de celles-ci $\wedge x dy - y dx^{\wedge} x d^{\wedge} - \wedge dx^{\wedge} y d^{\wedge\wedge} dy y e(\llie\llts$ cgcptiment à double des éléments élémentaires décrits par le Cet

The text on this page is estimated to be only 19.22% accurate

3104 MÉCANIQUE ANALITIQUE. corps m sur les plans des y, des x, & des y⁰ y c*elb4U dice» sur les plans perpendiculaires aux axes des des & des x; en effet y fi dans xdy—ydx^ on subftitue pour xty lw valeurs f coff» ^ fin f , il vient f^dp^ double de Faire comprime entre le rayon yeateur p 8c le rayon cbnfé. cutif qui fait avec lui l'angle élémentaire ci <p. i^ . Que les • quantités X, K, Z représentent les forces qui follicitent chaque corps m fuivant les direfbions des coordonnées x -{y & qui réfultent de toutes les forces P, &c, agiffantes fur ce corps fuivant des direfbions quelconques (art.* 8» Seû. i); 8c qu'ainfi les quantités xJK -r yX^xZ y^Z^Y^ expriment les momens des forces qui tendent à faire tourner le corps , autour de chacun des trois axes des coordonnées , x ; en prenant le mot de moment^ dans le fens ordinaire » pour le produit de la fi>rce 8c de la perpendiculaire menée fur fa direction. 7. Si le fyftême n'étoit animé par aucune force accélérat^ trice , ou j^il Tétoit feulement par des forces quelconques » tendantes toutes au point que nous avons pris pour l'origine des coordonées i alors les quantités .v Y — jyX, xZ — , y Z ' -{ y, feroient nulles. Car dans le premier cas, les quancités JC, -K, Z , feroient elles-mêmes nulles; fie dans le fécond, ces quantités feroient de la forme — , — x p ^ p % (art. 8 s Sedion fécond^) en nommant P la force tendante au centre , &c: faifant les coordonnées a, c nulles , parce que le centre des forces eft fappofé tomber dans l'origine des coordonnées. - . ■ Les trois éiuiacions de l'article .6 deviendront alors, i

The text on this page is estimated to be only 13.77% accurate

V Seconde Partie. 20J c/ \ ♦ ... iefquelles étant intégrées par rapport à la variable donnetont en prenant crois cooitances arbitrages $^{B^{'}}$ • • • l.'i . r Ces dernières équations renferment évloemment le Frln* cipe des aires donc nous avons parlé dans la , première Seétion. * \ V: 8* Si le fyftèmè eft libre , c*eft-i-diêré , qifSĪ vfy^vit aucun point fixe , on peut prendre l'orîginei dû8 coordonnées, ^ T » par-tout où Ton veut ; par conféquenç le^ pfQpriëtés des aires & des momens que nous venons de ' démontrer , aucpnc lieu dans ce cas par rapport à un point fixe quelconque pris à volorîte dans reſpace. M^is je vais prouver qu'elles auront lieu' également par rapport centre . de gravité de tout le iy£» tême, foicque'ce dentrc fpkiBxfi ^ inot^r, ,a : Pour cela il n'y a qu'à fubfticuer dan* les trois équations de l'article 6, pour, x^y 'y les quantités 4^ H-.C (i^rt. x), en rapporsaut^ Spmne dans rarricle j.» Iç,^ coocdonnées j<,y, i au.oentrç^fis.gîavijp à^fyUafs.^,^ ^ . Ly Google

The text on this page is estimated to be only 16.24% accurate

1^ MicHÀlfIQUE AKALITIQUE* Par cesfttbâictttioiis, la -
ptemiere des é^oatioos en qneCtion deviendra d'abord ^ ^ T?- * «
i'rryJK:)/» -« A. . Efifuite par les équations donnas dans le même article 3 »
elle fe réduira à Les deux autres équadons de l'article 6 fe réduiront de.
Blême à. celles-ci. On voit que ces trois équations font femblables à celles
de ce même article <j , & que toute la différence conlîfte en ce qu*à la place
des coordonnées x y y y parunt d'un point fixe, il y. a les coordonnées I , Ç>
dont l'origine eft dans le centre de gravité du fyftême. D'oii il fuit que les
xo6fO€9 propriétés qui avoieat lieu par rapport u(point fixe^ ont auffi lieu
par rapport à ce centrer p. En général, de quelque manière que les difilrena
corps du fyftême fdient difpofés ou liés eotr'euz , pourvu que cette
diipoficion foit ind^ndaine du tems » c'eft-ii^diie» que les équations de
condition entre les coordonnées ne Digitizad by Googl(

The text on this page is estimated to be only 18.36% accurate

Seconde Partie; * "kciy i^enferxnenc point la variable r j il c(l
clair qu'on pourra toujours» dans la formule générale du mouvement ,
supposer les variations $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, égales aux différentielles dx^{dt} qui
représentent les espaces parcourus par les corps dans l'instant dt
tandis que les variations dont nous parlons doivent représenter les espaces
quelconques , que les corps pourroient parcourir dans le même instant, eu
égard à la loi de disposition mutuelle. ... • Cette supposition n'est que
particulière , & ne peut fournir par conséquent qu'une seule équation ; mais
étant indépendante de la forme du système , elle a l'avantage de donner une
équation générale pour le mouvement de quelque système que ce soit.
Substituant donc dans la formule générale de l'article 7 de la Seconde
partie à la place de Va , $-Ty$, les différentielles ordinaires dx , dy & dz ,
& par conséquent aussi, au lieu de $S'p^2$ «Tr, ôcc, les différentielles
correspondantes dq^2 & dr^2 , on aura ' . . * l'équation générale pour quelque
système de corps que ce soit I O. Lorsque la quantité $Pd\pi^2 - QdRdr^2$
& C , est intégrable & elle l'est toujours quand les forces accélératrices
tendent à des centres fixes, * on a des corps mimes d'un système , & pour
proportionnelles à des puissances quelconques des distances, ce qui est
proprement le cas de la nature; alors donc , si on nomme n l'intégrale de
cette quantité , on voit que l'on ait $dn = p dr^2 - QdRdr^2 - Ucdt^2$ équation
précédente devient i "

The text on this page is estimated to be only 15.72% accurate

ao8 MiCHAMIQUB AHALITIKUK.) dont rint[^]rale est ea
d sign t par F une constante arbitraire  c égale   la Vitesse du (premier
membre de T uacioa dans un iniiiinc donné. Cette dernière équation
renferme le principe connu sous le nom de Conservation des forces vives. En
effet, $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum m_i v_i^2$ étant le carré de l'espace que le corps parcourt
dans l'infinitesimal ds fa force vive. Donc $\sum (m_i v_i^2)$   fera U somme des
forces vives de tous les corps , ou la force vive de tout le système; & on voit
par T quacioa dont il s'agit que cette force Vive est  e   la quantité $\sum X$
 $\frac{1}{n}$, laquelle dépend (iquement des forces accélératrices qui agissent sur
les corps , & est la même pour des corps libres que pour des corps liés
ensemble d'une manière quelconque, pourvu  ue leur liaison ne varie point
vitesse etc. 1. En nommant u la vitesse du corps m on a
 $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum m_i v_i^2$,  c l'équation précédente devient $\sum (j^2 n) / \sum S^2 X$ laquelle étant
différenciée par rapport   la caractéristique $\langle \rangle$ ue if   donne Suiwi- njmssao,
Or n étant une fonction finie des variables $r^2 Scc^2$ teik  ue $f/n = F \frac{df}{dz} Qd^2$
li  rrt-  c, il est clair qu'on L'iyiu u Ly Google

The text on this page is estimated to be only 9.28% accurate

Seconde Partie. aop aura ë^alen^eiM; ea changeant ^ «a /f^MP.i^^ ^ Qfq «4- Rir -H &c. Donc on auta S(utu"^^ Et cette équation aura coiqours lieu ,^ pourm que Pt//r i4-Ç'i/^-Hiîi/r-+-&c, Toit une quantité intégrable, ôc que^ la liaifon des corps foie indépendante du tems ; elle ceflèrok à^ède vnûe il l'une de ces conditions- n'avoit pas hém. ■ - •• ' - - ' ' ' T 1. Qn'on (Û1>(tittie'tiaâttmlûuic)à Valètir précéctèiMe SA fa même formule générale de ĨJituç^lâ& h kGOnin S^on » ^lle deviendra 9 é * . t Or' if* y «H!» d^y i^y-f. i^ I #: {,eflr /V'x^ir dyry que les caraâériftiques d bc l repréfèncèflc des dîffiSrèncet ou variations toitt*^-faic indépendantes les unes; des autres» il eft aifé de concevoir, que dxf, d^Jy dti^ doivent être la même chofe que Idxy S'dy y S'd^y ainii qu'il a. déjà été remaîqué dans la première Partie (art. i^, Se6b. 4). D'ail* leurt il eft YÎfiblë qne «4^ dyfdy ttn^_^ i. (dit ^ d^^ -4*^ dT^), ' 'Donc- oo'^ aiira^* dt mtn rl- d^y «»* d, {d^lx -H dy f y -h d^^i^ S(MC < rei^taoe on),*art ciùviligné décrit par coi;ps » 4noi kJtm 0«:MI. ««s H»^ dy^ ^^v^

The text on this page is estimated to be only 14.89% accurate

I aïO MicHAKIQUE ANALITIQUE» AiolT Ja ifbi^mule
générale dont il s'agit deviendra OU, en mahipliant tous les termes par dt=si
, . ^^^é.,»^éj^i^^é^Jt) ^^^^^ ^ ^ ^ • ■ . ; Et comme le figne intégral 5 n'a
aucun rapport au:< fignes dilFéretîtiels J Sc <r, on peut faire fortir " ceux-ci
hors de f^uirlà)^ aioxs rétjuati^ pi;é^ddei]ite. preadra cette fqrme, irr.: î'»"
»'» " 'S T^* l'î- î! l.V. *.i >..•!:-!•!- . . -j ' ' . t Intégrons par rapport iu figbe
différentiel </, & dénotons cette intégration, par ie ligne intégrai ordinaire
ÀOHS aurons ^ ' ^ . ~ . < * . iif i ' , 'i * , , , ' ■ . , ■ . f . ' ^•D"r le figne f
à^viiXéi^x^oxt'ft: S m udr Ti^ pouvant re^* jîtfder que les variables ^ & &
n'ayant aucune relation avec les fignes 5" <r, il efl: clair , que. cette
exprefiion eft la même chofe que celle-ci^ t,Smfi4,d s. Et fi q;i luppose que
dans les pbiots ou commencent les uitegrales j uds on uiyiii^LU by Google

The text on this page is estimated to be only 19.14% accurate

s E C O N D E P A R T I E. ' àll • «rbitnûre.fcnt'niiiie; par» que le
 piemîet membie de i*ét qnation .4efîâic nâl dans ces points». Aiafi tfa .ium
 .di|i|9 ^ r /• ^ -S r^^jf /*-f- d'v /y H- </^'|^r) « . . . • i^,ùmfuas = — ■ — ^^ - ^
 — . ' ponc fi on (tippo(è de plus que les variations ^y, / j foient aii(fi nulles
 pouif les points oîl lès intégrales iniScnt\ on aûrà abrs i". •Sm/iti/jr »6;' t'eft-
 ànlire, qUè la variation de la quantité Smfuds lèra nulle; par confô^ quent
 cetre quantité fera un maximum ou un minimum, . ■ .: ^ > ■ :. ■ ■ . - ' . / . .
 '1, 13. De^là réfulte donc ce théorème général i que le Qiouvemeoit d'un
 iyftême quelconque de corps animés paç des forces mutuelles 4*f^traétion«
 ou tendantes à des centres fi^eSy tc proportionnelles ^ des fbnâion»
 quelconques des dîftance's, les courbes décrites par les diffèrens corps, 6ç
 leurs vîteffes, font nécedairement telles que la fomme de's produits de
 chaque mailc par l'intégrale de la vîteffe multipliée par l'élément de la
 courbe eft un maximum ou un minimum y pourvu que l'on regarde les
 premiers les der^ niçrs ^points de chaque courbe comme données , en forte
 que les, variations des coordonnées .ré^isdantes à ces points foient nulles.
 CeA le théorème dont npt^ gavons parlé à Ja ÎBn de la première Scâtion,
 foug le nopi de Principe de la moindre âétion.' • Mais ce théorème ne
 contient pas feulement une propaiété très-remarquable du mouvement des
 corps , il peut Servir à déterminer ce mouvement. En effet, puifque la
 formule Smfuds doit être un maximum ou un minimum ^ a n'y a qu'à
 chercher par la méthode des variations ^ les oondidoDs qu» peuvent «e^die
 ttiie.i^ en emplqiaat

The text on this page is estimated to be only 10.25% accurate

^Il MicMANIQUE ANALITIQUE. F^quMîdii ^lénàtsàù é^ k
oenièrvjaioii clies forces .vires » ea ' trcHWtfM i|oo)oiinr nbnBes ks ;
éepaàom- nfefffâîffcf . pour cw nofcrc le mouvement de chaque corps ; car
pour Itmaximun ou minimunj. , il faut queià vtriâtîon (bit nulle , 8ç que par
conféquent on ait <r, S m fuds^o\ &c de-ià en pratiquant â^ns un ordre
rétrograde les opérations .expofées ci-deflut , Dn , rètrouyéca' k. mêmeç
(of^ule ^généralç .4'oii^ l'on écok 14, Poiir. rendre, çeniB>m2^iodiepli3
feofible, nous aHons Texpoier ici en peu de mots. La comédon du
maximum ov MiHtUm donne en général r.Smfu^dr^^^^ hâim'^iBkt
Wf%ie dîffiSféntiel #^rotts fes ^pit9»SWf{èé^f^ éSi Mdemînent permis par
la nature -de ces Smrens 'figues), on aura l'équation S mfs (uds) =• o, ou
bien Smf(ds fu ♦ ' 5e confidere d'abord la partie Smfdfs fu^ & mett w pour d j
fa valeura it ^elle devient Smfu s^udt^ 00 changeant iïfbrdre des ^g^es S te /
qui font abfolument indépendans l*nn de izUxtt^ fdtSmuii. Or Téquattoh
générale du printipe dbs 'forces *yl^ donné (art. ix) S iâm «a t F ^;a'S.ii/R,
tfnétairit te3 Pi(p -t- (?</^ ^4- JI ^/r* Hh êcc ; 'donc dilRîrentiiiilt 'AtiVâm
^, ■= — SfP^p-^QS'q-JrRs-r'^ £ccj;w, parce que n étant fuppofée une
fonction algébrique de / , ^, r, &c, la difFéiencielle n eft la itiême que la n
en changeant feulement d &a i, AÎDÛ la fluaatité Sm/dsTu le réduira à
pélce ferme, " i . — 5/P H- <2 -h /r ficc J /n. . ' Je coàffidefe-énfatieTâiiB^
'^ardeS^J^i'ifi fj fuln Digitized by Gopgl

The text on this page is estimated to be only 12.02% accurate

Seconde P a h t i e. ai[^] ftiœ' à la place de ds ia valeur exprimée par des coordonnéetiétangles, ou par d'autres variables quelconques. So dhploiyaut -les cbosdoiDifes teâangles y, :{ , oh ilJs j±a√ dx[^]-h dy* -H di[^] ; donc 4iflFéfendant luivaAc ids - . ottbîen.en wafpofcent les lignes écrivant zm. lieu de J'i[^] (ce 4)tti db toojouï* permis à caiife de l'indépendance de ces lignes, & forme le " pfemier principe fondamental de la méthode cſes variations) , J'ai [^] . [^] [^] — *-) on aura ainJi en lubftituant cette valeur , & mettant à la place de . Comme il le trouve ici fous le ſigne intégral / , des différentielles des variations , /y , s-^{^^} il faut les Êiire difparoître par l'opération connue des intégrations par. parties ; te c'ed en quoi coniiſte le fécond Principe fopdatnental da la méthode des variarions. On ttans[^]Eirmettf doatc la-[^]naatité J* '[^]dt* celle-ci qui lui eſt équivalente -- / ac y/ X d , * [^] fuppofant que les deitztetmes'de la courbe fbient Joanés, enforte que les coordonnées qui répondent atk commencement èc à la lin de Tincégrale , ne varient point} on aura fimpfementy-^{^^^^} [^]r[^]P • trouveiſi de même f -^{^^^} -^{^^}pyd. [^] , «c paieiliemieiiic J[^]T^{^^^} a*ç— //y[^] , -Û- i de ibrte[^]*on.aufa cette «ani

The text on this page is estimated to be only 21.98% accurate

^14 MiCUANXQUE ANALITIQUE. formée Donc la quantité
Smfu^ds deviendra, en tran^iâatj ce qui est toujours, petmîs» les signes S
ic.f. L'équation du maximum ou minimum fera donc laquelle devant avoir
lieu en général pour toutes les varia' tions possibles; il faudra que la quantité
sous le signe/soit nulle à chaque instant; on aura ainsi l'équation indéfinie
équation qui est la même chose que la formule générale du mouvement (art.
7, Seéib, première), U qui donnera par conséquent, comme celle-ci, toutes
les équations nécessaires pour la solution du problème. I y . Au lieu des
coordonnées « , y , z , on peut employer d'autres indéterminées quelconques,
& tout se réduit à exprimer réciproquement de Tarç ds en fonction de ces
indéterminées. Qu'on prenne , par exemple , le rayon ou la distance
rectiligne 4 Origine des coordonnées, qu'on nommera avec deux angles,
dont l'un 4 ibic rindinailbn de ce rayon sur le plan des x, y, & l'autre l'angle
de la projection * (9 Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 14.33% accurate

.S.£COND£ pARTI£. aj[^] du même rayon fur ce plan ^vec Vzife des x; oti aiua iin4> j[^]«"rcof4[^]f»«"pcof4cof,&de-U on dÇfd&Qn qu'on pourroic aoiE trouver dîreâemenc par U Géométrie. DifFérentiant donc par j[^], & changeant S[^]d qhx d^{^^} on aura dsi-dsos» d fd[^]f -H f(44[^] cof.4* ^fji'p f*(d[^]d[^]4[^] Gn4cof4df*i[^] rh €oÇ[^],*d[^] ^^fji' d'où en divifanp[^] par aei ôc intégrant » on aura /* ^ V ^ ^ — fio 4. cof W'y» -H cor4>» rfy . . On fera diiTparoître de deiTons le fignè/^ies doubles figne» d par des intégrations par parties[^] êc on rejettera- d'abdrd les[^]cermes qui contiendroient des variations hors du figne parce que ces" Variations devant abrs fè -Tapporfter aux extrémités, defintégrale » deviennent nulles par la fuppoñon que les premiers ÔC^^derniers points des courbes décrites par les corps foient donnés & invariables. On aura ainfi cette transformée ' ' par conféquenC' Téquation du maximum ou. minimum fera • ^/ZdtS(?ifpJlrQïq,i'Rit4*tcé}m --' '^ •

The text on this page is estimated to be only 13.84% accurate

MICBAKIQUE ANALIIIQUE. (-iL^/'^-'*' -t-i.-^). H+d: .2^/,] « *
ou Egalant à zéro la <jianticé qui eft ùms le figne /, on aura une équation
indéfinie , analogue à celle de l'article précéëent, mais qui au lieu des
variations «^y, / :ç , contiendra IcsS'ff ifjf-^i ëc oa en tirera les équations
néceilàires poui^ *]à ^Aabop. da pr^bli^pi^» ca.oédui^imt d'abord toutes
le*. variatioii5 aa plus pcftic .nomhte poilible , faifant enfuice des
éqvtaàosai fixées dès tenue» alfeâés dio^ chjiciiiià des var riauDS
reftanoei. . * En employant d'antres- Indéterminées , on auia des for» mules
dififérentes ; âc oo' (èrz aflUré d'avoir toujours dans chaque cas les
formules les plus fimples que la nature des indéterminées peut comporter.
Voyez le iecoiid volume àfis Mànoirei de TAcadémie de Turin. Q U A T R I
£ M E 3 E C T I p N. iiéthodt la pàu finpic fwrparvemr cm ^Hoetons qui
diter* mnau U 'mouvement J^mfy^mt quelconque de eofpswiimés jfor dfii
firees acceUmriçes quelconques, I. La fotmnlè générale à laquelle nous
avons réduit dans la féconde Seâion , toute la théorie de la Dynamique , n*a
befoin que d'être développée j pour donner les équations néceOaires à la
folution de quei^ue problème do cette fcience . ^ue ce foit ; & ce
développement , qui n'eft qu'une affaire de pur calcul, peut encore être
Amplifié à piufieirs égards. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 17.79% accurate

s E C .0 N D E P ▲ Il T I I. aty par les moyens que-nç^us aUons
expofer dans 'cette Seaion Comme tout coniUb à réduira tes diffiSrentes
variables entrent daps la formoie dont il s'agit , au plus petit ^inbre poflible
par le moyen des équations de condition données par la nature de chaque
problême; iuie des prin«pales opérations eft de fubftituer à la place decés
▼ ariablet des. fondions d'aRtrjes variables. Cet objfc eft tqulQur. ft. cile i
remplir pai les méthodes, ordiouies; mids non» aliopt donner une mantei«
particulière dy (àtisfkicc lelati^emenc A Ja formule propdfiê, ac qui a
favahtage de conduire tonJouis direûement i la transformée la plus fimple.
a. Cette formule eft compose de deux parcieiKiifiéfeaiei qu'il faut
confidérer féparément. * ^ . première contient les termes ' qui proviennent
uniquement des forcés réfuitantes de linerCÎe des corps. la féconde eft
compofée des termes dûs aux forces accélératrices <?, Jl, te, qu'on gippoTe
agir efièâivement fur chaque corps, fuivaot ici lignes ppf^r, te, 9c qui
tendeuc à diminuer ces lignes. Je défignerai pour plusT de iîmpHcité la
première partie paf r , 6e la féconde par a , de forte que r -f- a = o fera la
formule générale du mouvement (art. 7, Seék, a), 3* Cdniidéioiis d'abord la
quantité €^xlx • J^ ^yi^y ^î^l, il eft fikir que ii on y ajoute cellerci dxd^x Ee

The text on this page is estimated to be only 12.91% accurate

!2iS MÉCii AN')<iU B ANALITiqUE. •4* dy i^y d\ àt^ \^ la
fonifilé ièra intégrable , jSc auri poar intégrale i/ip/>c •Jir dy ^ y d^S''^,
D*o^ fl fait que Ton a i^*xirx-4- <^*j^/y-f- <^*^<f^=i d . (dx f x-^dy ^y
Hu-^dxdsx — dydS'y — d-^^J^^. Or, comme nous r.ivons <irj a remarqué
plus haut, le double figne ds eft équivalent à td (Se&i préc. arc. ii); de force
que la quantité dxdlx'^ ^ydfy ^d\é\ peut fe réduire \ la forme dx/Jse^*
^d'yVdy 4- diiix , i?eft.il^dlre , \ "-^ i.(dx^^ dy' -4- diC), Àit^ on aura cette.
rédu43;ion d'xfx-Jhd^yiy •^d\i\ ma d, (dxt9t'^dyly*^d\fi(^) î-
ifés^^jy^J^CM par laquelle on voit que pour calculer la quantité propofée
d* xS'x d'y S'y d^-{-{- il fuffit de calculer ces deuxci qui ne contiennent
que des différences premières , dxS'x "•^ dyS'y^di^l , (/x' -4- dy* -h & de
différentier enfuite Tune j^d^ l'autre par a . 4, Suppofomr. 4^nc «ju'il
s'agiflè de'fubftitjaer pour les wiabes x^y^y des fondions données d'autres
variables 4, çy &c; difFérentiant ces fondons., on aura des expreffioDS de
la forme dx ^Ad^^Bd^^-Cd^^h &c , i(y =^V^-h J5'f/4-+- C'dp-^Ucydi ==
A"d^-+-B'd-{- ^ C"d^9 -f- &c , dans iefquelles A\ £ , jB' &c, feront
des'fonâions connues des mêmes variables | > 4 > ^ > &c , ' & les valeurs
de.i'x, ieronc ei^rimées auifi de la même manière en changeant feulement d
en A fFaif^nces fubflitufions dans la quantité dxlx'^dyiy H-^^x^, eUe
deviendra de cette forme, F dm -4- G(dkH din) H- Hd^i^] Digitized by
Googl(

The text on this page is estimated to be only 10.86% accurate

s Ei Q p. H P E P A R T I 1. aip Donc cbangeaiit i'.etï d^ on
aiuaaafil layalendr dp dîfrff dy^di^^ laquelle fètà , Fd^'
^xGdid^^Md'k^^r^^id^di^^^ , \ Qu'on diffÉrentie par la première de ces
deux quantités » on^ra la diffÉreatielle ■ ' - • • ' d.
(FdnfHti^Fd^%dfl^d: (Gdt)^t^ ^ •4- d. (Gd4)>t, ft^G'd^ df4iM-'G4fdpi o^-:-^
différenciant enfuite la féconde f»ar'/^^ on aura celles ^ tFdV -^
xFd^^d^^tGd^ d-^-^x Cd^rd^ Si donc on recranchp la moitié de Getce.
dernière diiBrentielle de la première » te qu'on obferve ^tie d'^9c idfôot
kmêfflecliore.,,offam ^ r , - l ^ . (Fd^Jx^ '-' ^ iFd^^d.fGd^JxM 2 V
•i'd.fGd4j} ifi.'^^i^Gd('d4'^dy(Hd^Jxi4 ^ . i . • • " • ! • • • ..! • • pour la valeur
de la quancité cherchée d'xlx -h d^ysy ^d^X^^* Or il efl; ViTible que cette
vâlear.pettt re déduire immÎ6diatemeoc de la demiete di£Féreimelle » en
divilant tous lei cernfes par a , en changeant les.fighe\$ de çmxs. qui nor
contiennent point la dodble caraâériftique U en effaçant dans les .autres la
4^ apc:è5 la pour T^^pliquer aux quantités qui £e a

The text on this page is estimated to be only 16.10% accurate

aïo M i.<: H A N-a Q u £ an a.li tique. muluplitot le^ doubles
diffêretujes iifioâto éit id. Ain/i'lc terme * FdV àonnt-^'-^Fdv le terme
xFd^fd^ * ■ y.. ■ » donnera d.(Fd^) x^ç, le terme x^GdÇd^ donnera
^/(y<^i/4'/Je tèrmtf i>&ii^4^i/r<2ottneia ^.(^i/^x^f» fie ainiî, 4es autres.
..... , 5 . D'où il s'enfuit que fi on défigne par « la fon6lion transferiKieVla
iquànit^ti- Cdiî^^4y^.'¥^di{*J^2r'i, fulv ftitution des valeurs dex,y, ^, eff
|, 4, ?,&c,.on aura en général,, cpite transformée . ■ . ■ • • . * * * • en
dénotant» fuivant l'ufage, par le coefficient de dans la différence /"«/par le
coefficient de /«/f daat la même diâPérence , aiiiÂ des autres. 6. Ce qu'on
vient de trouTer d'une manière particulière » auroit pu l'être anffi
iimplement 6c plû» g^éndeînent par les principes -de la métiode des
variations. / • Soit en effet « une fonction quelconque de x, y ^ , 6cc , ufac,
t/y, i/^, d*y^d^\\^ £(U;, &c, laquelle devienne une fon(5lion de. 4^ f» &c» d-
\\y df ^ &cc^ ■ d^^t ^4» » &c, &c» pat la fubftitution des valeurs de x, ^,
êcc; exprimées en |, 4, ^ , ficc; en difil^ fendant par rapport à /, on aura cette
équation identique » Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 10.72% accurate

.•Seconde Partie, aai -4- -yj- / 1 ^ î J> ï H- &c. «ce. Qu'on y change les doubles signes / <^9^^S&c»cn ieuti équivalents ii^^d^.l^Uci qu*enfuite on intègre par rapport & qu'on fâilè difparoître par des intégrations par par* ties tous les doublés Agnes JI^ d^i^icc^ fous le %ne intégral /qui fè rap^rte au figne difi&endel d; on aura une équation de* cette forme , 4lans laquelle •y •'«jr •'."7 0CC. ùiyiiized by Google

The text on this page is estimated to be only 13.40% accurate

MiCH ANIQUB. ANALtTKJVE? — -+■</■. -j^ — «ce. -* - &C.)
/{H- </'lH. &c. V Ht Donc redifFérentianc & tranfpofant, on aura
]c\|nacioa u< ^ «-4- B -H C/'l-fr- &c — i^^ — J3'* 4 — Cj^f ~ &c laquelle
doit être identique & avoir liea quelles que foient le!|^variatioQS ou
différences marquées par la ieore A Ainfi puifque le (ècond membre de cette
équation eft une différentielle exaâe par rapport à la caractéristique il faudra
que le premier membre en foit une auflî par rapport à la même
caractéristique, 6c indépendamment de la caractéristique ^; or c'eft ce qui ne
fe peut, parce que les termes de ce premier membre contiennent
(Implemeac les * Digitized by Gopgle

The text on this page is estimated to be only 12.35% accurate

SECONDS Parti Bt 113 YarÉMbns J'x , ly $\wedge l^{\wedge\wedge} \text{à} \text{LCj} \& c, \&$
ûuUement les diffÉrentielles de ces variations. J>'où il fuie que pour que
Téquation puiflè fubfifter , il jàndra néceflàifement que les deux 'membres
foient nuls chacun en particulier; ce* qui donnera ces deux équadons
identiques $Afx^{\wedge}Biy^{\wedge}C^{\wedge}i - H \& c$, « $\wedge' rf - jB' C' / \# - * - \& c$. lefquelles peuvent
être utiles dans difltbentes occafions. Soit, par exemple * »« -i- (d: $\wedge$ H- -I-
</iV, on $\wedge$ tura $4^{\wedge}$ « o, = $dx^{\wedge}i - 0$, &c, & ainû des autres quantités
femblables; donc enfuite comme « ne contient que des différences du
premier ordre, on aura fimplement -jj- — d, -jj $\wedge$, B' — $\wedge C - 4j$. - «te. Donc
on aura l'équation identique qui s'accorde aarei: «eUe;)de JI $\wedge$ iascicl $\wedge$ j/ ; . 7.
Il téTuliè de-tf, que pour avoir k . valeur de la quantité r(art. i),en
fon $\wedge$ ondcl, 4,*,&c,il fuffira de chercher la valeur de la quantité S (-
 $\wedge\wedge\wedge\wedge\wedge\wedge r^{\wedge}i'''$ en.fonc

The text on this page is estimated to be only 17.07% accurate

124 MÉCHAKIUB AKALITIUH. tion de $\wedge$, 4, $\wedge$, &c, & de leurs diâTérencielles $\wedge$ caill $\wedge$ n! $\wedge$ manc T cette fonâion» on aura fur le champ . Éc cette transformation aura lieu également » quand même parmi les nouvelles variables il (ê tcouveroît le tems t $\wedge$ pourvu qu'on le regarde comme confiant , c'est4.-dire » qu'on Au refte , il eH bon de remarquer que fi l'expreffion de T renferme un terme dA $\wedge$ qui foit la différentielle cornplete d'une fondUon A dans laquelle une des variables comme $\wedge$ n'encre que fous la forme finie» ce terme ne donnera rien dans la valeur de r rebtivement à cette var nable. Car faiiâat 7*» dj $\wedge$ -i $\wedge$ d $\wedge\wedge$ - $\wedge$ d $\wedge\wedge$ c $\wedge$ oaz d'A . d'A . , $\wedge$. dA — dV dld $\wedge$ ' — ' di ' Donc d . « $\wedge$ coefficient do deviendra j dA j dA 0 8*cnfuit de-là que. li Tczpitflioii de T contenoit on terme de la forme BdA $\wedge\wedge$ étant fiinâioii de I» $\wedge$ 9 &c» fans &: B une fiinâion quelconque fans $\wedge$, ce terme donneroif (implement dans la valeur de relativement 4 la variation de | le terme dB Car donnanc au terme 3dA Ufbcme d.(BA) $\wedge$ 4dB $\wedge$ on voit d'abord que le Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 17.70% accurate

Seconde Partie. al y .fermé V. (B A) né donneroic rien
relativement à la Tari»* tion de f , puisque AB contient Ç fans ^; enfiite
comme dh contient point ^ ni & que A contient l fans y on voie qu'en faianc
T sss»^ A dB^on aura "jj^" ^ . 6c SB âff; de forte que le coëffident de ians r
iè réduira à i i?. 8- A l'égard de la quantité a (art. i }, elle est toujours facile
à réduire en fondion de | , 4 » f > &c , puisqu'ii ne s*agit que d'y réduire
séparément les exprefTions des distances p9 ^»^» ' & C^ & des forces Ç, i?,
&c. Mais cette opération devient encore plus facile » lorsque les forces font
telles que la somme des momens, c'est-àVdire la quantité Pdjf^Qdq-
t'Rdr^^UcttSt intégrable « ce qui « comme nous Tayons déjà obfervé , eiV
proprement le cas. de la na* ture, (arc. lo, Se£k. préc.). Car fuppofant,
comme dans l'endroit cité, • on aura n exprimé par une fbnâion finie de/, ^,
"9 par conféquent on aura auffi / n » P Q^q-hR &c ; donc A = SS'nm^* f ,
J'nm, puisque le %ne S est indépendant du figae ^ . U n'y aura ainfi qu'à
chercher la valeur de la quantité Snm en fbndion de ^ , 4 , « , &c ; ce qui ne
demande que la fubftitution des valeurs dedp,y,:(,enf,4,f,&c, dbns les
expreffions dsp , ^ , êcc, (art. 8 » Se£t 1); & cette Tâlenr dé «Snm étant
nommée on aura immédiatement • • Ff

The text on this page is estimated to be only 17.15% accurate

226 MÉCANIQUE ANALYTIQUE. p. Dtt cette manière la
 formule générale du mouvement $f = \frac{1}{2} a v^2$ (arc a) sera transformée en ceUe-
 d». Laquelle on aura te» en faisant $r = 5$ ($J = i^2$; ;,, , $A = 5 n m$,
 icdnwitFdp'-hQciq-Mdr^{ecc}. Si donc dans le choix des nouvelles variables
 r, θ, ϕ , &c, on a eu égard aux équations de condition données par la nature
 du système proposé, en sorte que ces variables soient maintena't touc4-fâc
 indépendantes les unes des autres» & que par conséquent leurs variations
 $J^1 \gg Z^1 \gg \wedge >$ demeurent absolument indéterminées » on aura iur le champ
 les équations particulières $m \frac{d^2 i}{dt^2} = 0$, $e = 0$ &c» lesquelles serviront à
 déterminer le mouvement du système ; puisque ces équations sont en même
 nombre que les variables r, θ, ϕ , d'où dépend la position du système à chaque
 instant. Mais quoiqu'on puisse toujours ramener la question à cet état,
 puisqu'il ne s'agit que d'éliminer par les équations de condition,, autant de
 variables, qu'elles permettent de le être» 6c de prendre ensuite pour r, θ, ϕ
 » $f > te$, les Tanables

The text on this page is estimated to be only 15.56% accurate

Second» Partis. 227 refmtes; il peur néanmoins y avoir des cas où cette voie foie trop pénible, & où xi foie à propos, pour ne pas trop compliquer le calcul, de cooierver un plus grand nombre de rariables. Alors Its équations* de condition auxquelles on n'aura pas encore (àtisiàit, devrçnc être employées à éliminer <lans la formule générale ^ quelques-unes des variations ^ I , 4» ; mais au lieu de l'élimination afluellic , il fera plus fimple d'employer la méthode expofée dans la quatrième Section de la première Partie. ZO. Soient donc comme dans l'article 3 de la Seââoa citée, $Z = 0$, $MtsaOy\ 0$, &c , les équationt dont ii s'agit, réduites en fon£lions de $^,4\rangle^{\wedge}$ &c; enforte que $Zi\ 9\ M\ y\ N\ y\ \&CC.$ foient des fondrions données de ces variables» On ajoutera au premier membre de la formule générale (art, préc.) la quantité $\rangle^{\wedge}dL\ i^{\wedge}dAf\ -f\ -r\ dN\ \&c.$ dans laquelle $a, \#t\rangle\ r, \&c,$ font des coëfHciens indéterminés; & on pourra tegarder alors les vatiacions • te» comme indé, endantes &' arbitraires» On aura aiafi l'équation générale $jr/l*4\ -*H\ -l\ -*AH\ -\&c\ -!-A/Z^{\wedge}/*/ilf\ -Kr/JV+to\ \ll\ll\ll o,$ laquelle devant être vérifiée indépendamment des variation! te, donnera ces équations particulières. * « $-h\ A\ -H\ A*4\ -$, $H\ -te = \ll\ 9\ -\ ôcc = \gg o \bullet IN\ H\ n \bullet 4\ -f\ H\ IL\ ^{\wedge}$ il , $^{\wedge}1\rangle$, $f\ \blacklozenge\ H\ -A\ -TT\ -rr\ -f\ -*TT\ -hte\ \text{---}\ O\ te. ,\ Ffa$

The text on this page is estimated to be only 17.77% accurate

aiS MÉCHANIQUE ANALITIQUE. Elimioanç les inconnues
 $x^f A^f U^c$. reftera les équations aéceflâtes pour la iblutîon du
 problême. . On peut faire d'ailleurs fur les difFérens termes Af , &c, des
 remarques analogues i celles de Tardcle 7 de la Seâion déjà citée, ôc en
 déduire des concluions femblables. Au refle rien n*empêche que les
 équations de condition $X B = 0$, $M s o$, $6cCf$ ne puiffent contenir auifi la
 variable x qui xepréfence le rems ; (eulement il &udra la regarder commo
 confiante daiis la diflîSrenciatîoii foivant /> comme nous ra;Tons déjà
 preicrit plus haut. I I. En employant cette méthode, on peut conferver fiJ'oa
 veut les variables primitives x , y , pourvu que l'on ait égard à toutes les
 équations de condition données par la «atnre du fyftême entre ces variables.
 Il n'y aura alors qa'à ajouter au premier membre de la formule générale de
 l'ardde 7 de la féconde Seâion, la quantité $x^L \wedge / AT \bullet \wedge -r / jy^H - \&c$, 9c
 vérifier enfuite Téquation par rapport it chacune des variations relatives aux
 diâPérens corps du fyftême. De cette manière on aura donc pour chaque
 corps;» trois équations de ce {te forme, (art. S, Seû. citée) n *•» la •-
 $\diamond \bullet \& Cea O^* \bullet i-r$) il 'W m -H r /If /y H- &C = 0 > -* -/* ^1 •f' » ^t -h&c«»o^
 de forte que le nombre total des équations fera triple de celui des corps. *
 Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 24.65% accurate

Seconde Partie. U Êiadra' enfitite éliminer les indéterminées r , donc le nombre est égal à celui des équations de condition XSB ou yJf isas o , JV ss o , &c, ce qui diminuera d'autant le nombre des équations-trouvées; mais en y ajoutant les équations mêmes de condition, on aura de nouveau autant d'équations que de variables. 12, Cette méthode est (ùr-tout utile lorsque le Cyfème proposé est composé d'une infinité de particules ou éléments) dont l'assemblage forme une masse finie de figure variable. On emploiera alors une analyse semblable à celle que nous avons développée dans la même 5e^e quatrieme de la première Partie (art. ^ & suiv.); mais à la place de la caractéristique $</$, doit nous nous (bmes fervis dans cet endroit pour désigner les différences des variables relatives aux différents éléments du système » U conviendra ici de faire usage d'une nouvelle caractéristique D pour pouvoir confondre l'autre caractéristique J dans l'emploi auquel nous l'avons déjà destinée plus haut. » . * • Il y aura ainsi trois forces de différences indépendantes essentielles; les unes marquées par dy 6c relatives au figae intégral; celles-ci se rapportent uniquement aux courbes décrites par chaque corps ou élément du système; les autres marquées par D & relatives au figae intégral 5, lesquelles se rapportent aux différents éléments du système, & à la position instantanée de ces éléments entr'eux; enfin les différentielles ou variétés inarquées par $<J^$, lesquelles se rapportent uniquement au déplacement arbitraire qu'on suppose dans la position du système « U diraiflènt d'elles "mêmes à k fin d« cahnL * uiyiiizea by CjOOgle

The text on this page is estimated to be only 24.58% accurate

A30 MÉCANIQUE ANALYTIQUE. I 3 . Soit donc DmU , masse de chaque élément du système, il faudra mettre Dm à la place de m dans les expressions de r_A (art. 2), *6c par conséquent aussi dans celles de TSc (art. 9) il en résulte qu'il faudra ajouter au premier membre de la formule générale $r_a =$ ou les termes dus aux différentes équations de condition. Or ces équations peuvent être de deux sortes : les unes indéterminées & appartenances également à tous les éléments du système; les autres déterminées de propres seulement à quelques-uns de ces éléments. Soient $X = 0$, $itf = sO$, &c, les équations de condition de la première espèce, on aura les quantités X , Af , &c, exprimées par des fonctions des coordonnées x, y, z & de leurs différences suivant D , savoir $Dx, Dy, Dz, \dots$; &c ; &c comme il n'y a que trois variables x, y, z , il est clair que les équations entre ces variables ne peuvent être qu'au plus trois. Prenant donc des coefficients indéterminés $A, B, C, \dots$ on aura par rapport à chaque élément du système, les termes $Ax^2 + Bx + C$ à ajouter à la formule générale; donc la totalité des termes qu'il y faudra ajouter, sera représentée par $\sum (Ax^2 + Bx + C)$. 1 4^

Désignons maintenant par x, y, z , les équations de condition éliminées les quantités $B, C, \dots$, feront aussi des fonctions des coordonnées &c de leurs différences suivant D , mais seulement pour des points déterminés du système. Nous marquerons ces coordonnées par un ou plusieurs traits ^ en particulier nous marquerons par un trait toutes les quantités qui se rapportent aux points 011 commence l'intégrale représentée par le signe $\int$, par deux traits celles qui se rapportent aux points où la même

Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 16.99% accurate

Seconds Partie. 231 • grade finit, U par crois traits ou davantage les quantités relatives à d'autres points décenninés du fyftênie. Ainfi les valears de C, ftc, iêtont données ea fenétions de x' , y , $x \setminus f$, f , $^{\wedge} y$, &c; Px' , Dy , $P^{\wedge}$, Px'' , Dy , &c, &c ; &'les termes à ajouter à la formule générale en conféquence des équations de condition ' $A = o^{\wedge} 5 = \blacksquare o$, &c, feront « $t < r^{\wedge} -4 - /3 < r^{\wedge} -4 - > /^{\wedge} C - h$ &c, en prenant pour « $, / \} y > 9$ &c, de nouveaux coeffidens $ixk - ^{\wedge}$ déterminés. , 15* Op aan donc pour le mouvement du fyflême cette ^uation générale, * laquelle doit avoir lieu ^neUes-qoe foient les diffl^renoes oa variations $/x$, $^{\wedge} y$, $^{\wedge} \dot{y}$, $/y$, &c. Cette équation eft entièrement analogue à celles que 1 oa trouve par la méthode des variations pour la détermination des maxima & minima des formules intégrales ; & il faudra la traiter fuivant les mêmes règles. Voyez ce que nous avons déjà dit là-deiTus dans la Section quatrième de la première Partie (art. i^&fuiv.). * I 5. Tout fe réduit à faire difparoître de deffous le iigae S les doubles différences aâè^lées de//?, fD^^ Soit, par exemple, le terme 5o ID x , on changera d'alk>nl S^D, en X>/, enfuice on int^tera par parâe lelativement k jjigiizèd by GoOglc

The text on this page is estimated to be only 18.01% accurate

23 2 MicHANIQUE ANAtltlQUE. k caraûériftique D qui fe rapporte au figne S , &: complectaxiX Kntégralc, on aura félon la notation de rarticle 14 , $\wedge o/P \gg \text{---} oVy \text{---} 5/3eD\hat{u}$. Oa trouvera de même en intégrant autant qu'il eft poffible ; par rapport à $17 \wedge \&$ complétant, $5oJ^{\wedge}Z > * \langle \rangle \text{---}$ $\hat{u}^{\wedge}I ? / \langle \rangle \text{---} Pa'^{\wedge}JC'^{\wedge}o'D^{**\wedge} I > n'^{\wedge}3c' - H'yi^{\wedge} \langle l \rangle \gg n$, & ainfi des autres. * Par de femblables rédu^{ions}, on ramènera donc Téqua^{ion} Cion générale de l'article précédent à cette forme , $\wedge ("k \blacklozenge / j^{\wedge} + e X = \gg o f$ dans laquelle k, $\blacklozenge$ feront des fbénéHons d $\langle t \rangle Z)x$, Vy , $D \setminus \gg D^{\wedge}x$, &c, ainfi que de a, m, &c, $Dx^{*} X)/x$, &c i 5c où s fera comporée de différens termes affe^{kés} chacun de quelqu'une des vai iations $Sx'y ly'y \langle i: ^{\wedge}, x''$, &.C, ou de leurs dif^{érences} $U^{\wedge} x'y s x' hic$. On égalera ak^{rs} féparément à zéro chacune des quantités afièâées des différentes variations , comme fi ces variations étoient toutes indépendantes 8c arbitraires. Ainû on aura d*abord ces trois équations indéfinies $s^{\wedge} o$, $e = so$ pour ipus les élémensdu fyftême; enfuite chaque terme de la quantité x donnera une équation définie & relative à des points déterminés du même fyftême. Par le moyen de ces différences équations, on éliminera les indérerjninées a, /, $\gg$, &c, $\langle i8$, $>$, $\hat{o}cc$, $\hat{o}c$ les équations réfultantes étant combinées enfuite avec les équations de conr ditioB $Z = 0$, $M = 3 0$, &C, $\wedge = 0$, $BsaaO$, $C s = O$, &C. donneront dans chaque cas la folution complétée du pro|)iême. Le refte ne fera plus qu'une affaire de pur' calcul CINQUIEME uiyiiizua by Google

The text on this page is estimated to be only 21.24% accurate

Seconde. Partie. 233 CINQUIEME SECTION. . ■ ■ • So&uian
 de tlijfîrens problèmes de Dynamique, s Avons donné dans la première
 Partie (Se&et, V) , la solution de plusieurs problèmes sur l'équilibre des
 corps. Rien n'est plus facile que d'appliquer au mouvement des mêmes
 corps les formules trouvées pour leur équilibre ; car d'après ce qu'on a
 démontré dans la féconde Sedioa (arc. 4), il ne faut qu'ajouter aux forces qui
 font suppo&ées agir sur chaque corps , les nouvelles forces accélératrices
 $TT \gg 'TF'' > \ll i^g^es \text{ suivant les lignes } *, ^, \text{ en nommant / le tems écoulé,}$
 8c faisant dt confiant. Aind dans les problèmes oti Y y Z déiignent les forces
 absolues qui tirent le corps m regardé comme un point suivant les
 coordonnées $x^y^ \setminus ^$ il n'y aura qu'à mettre par-tout à la place de ces forces
 , celles-ci $X -i- / \gg \ll Y ^^^Z-^m U$ ainfi pour les -forces qui agissent sur
 chacun des corps du syst&eme. Mais dans les problèmes où l'on tient compte
 de la masse des corps , Se oh Vy Z n'expriment que les forces qui agissent
 sur chaque point de la masse finie m» &c font par COnséquenc du genre des
 forces accélératrices, il faudra mettre limplement & la place de JT, J^, 2 ,
 les quantités $X -H. \blacksquare > Kh- 4^, Z-i- \& \text{ ainfi de sui} \gg$.

The text on this page is estimated to be only 22.13% accurate

334 MÉCHANIQUE ANALITIQUE. De cette manière les équations trouvées pour l'équilibre donneront immédiatement celles du mouvement, & les mêmes problèmes se trouveront résolus également pour les deux états de repos & de mouvement. Il est vrai qu'en cas du mouvement, les équations étant différentielles du second ordre, elles demandent ensuite des intégrations relatives aux différentes variables $t, y, y', x', y, \&c$; mais d'est au calcul intégral à s'en charger; & la Dynamique a été tout ce qu'on étoit en droit d'attendre d'elle, en donnant les équations fondamentales. Cependant comme ces équations peuvent avoir différentes formes plus ou moins (simples, & surtout plus «u moins propres pour l'intégration, il n'est pas indifférent sous quelle forme elles se présentent d'abord; & c'est peut-être un des principaux avantages de notre méthode, de fournir toujours les équations de chaque problème sous la forme la plus simple relativement aux variables qu'on y emploie, & de mettre en état de juger d'avance quelles sont les variables dont l'emploi peut en faciliter le plus l'intégration. Nous allons donner ici pour cet objet quelques principes généraux, dont on verra ensuite l'application dans la suite des problèmes.

2. Il est clair par les formules que nous venons de donner dans la Section précédente, que les termes différentiels des équations pour le mouvement d'un système quelconque de corps viennent uniquement de la quantité T qui exprime le double de la somme des carrés des vitesses $J = \sum m \dot{x}^2 + \sum m \dot{y}^2 + \sum m \dot{z}^2$; chaque variable finie, comme I , qui entrera dans l'expression de J donnant $k \frac{dI}{dt}$,

The text on this page is estimated to be only 16.53% accurate

Seconde Partie. 235 .chaque variable différentielle, $\frac{dy}{dx}$ Mimie
 .40aoattf le terme $\frac{dy}{dx}$. D'où l'on voit d'abord que les termes donc il
 s'agit ne pourront contenir d'autres fonctions des variables, que celles qui
 se trouveront dans l'expression même de $\frac{dy}{dx}$ par conséquent en employant
 des fonctions $\frac{dy}{dx}$ * d'angles y ce qui précède naît. Jémenc dans 4a
 «lution de plusieurs problèmes» il arrive que les fonctions $\frac{dy}{dx}$
 •disparaissent de la 7^{ème}, elle ne contiendra alors que -les
 différentielles de ces angles, &c les termes en question ne contiendront aussi
 que ces mêmes différentielles. Ainsi il y aura toujours à gagner pour la
 (Implication des équations du problème -à employer ces fortes de
 substitutions. . Par exemple, si à la place des deux coordonnées x, y , on
 emploie le rayon vecteur p mené du centre des mêmes coordonnées, & fait
 Tant avec l'axe des x l'angle on aura $x = p \cos \phi$, $y = p \sin \phi$, Ôc
 différentiant $dx = \cos \phi \cdot dp - p \sin \phi \cdot d\phi$, $dy = \sin \phi \cdot dp + p \cos \phi \cdot d\phi$; donc $\frac{dx}{dy} = \frac{\cos \phi \cdot dp - p \sin \phi \cdot d\phi}{\sin \phi \cdot dp + p \cos \phi \cdot d\phi}$; donc $\frac{dx}{dy} = \frac{dp}{p} \cdot \frac{\cos \phi - \sin \phi \cdot \frac{d\phi}{dp}}{\sin \phi + \cos \phi \cdot \frac{d\phi}{dp}}$
 +: $\frac{dx}{dy} = \frac{dp}{p} \cdot \frac{\cos \phi - \sin \phi \cdot \frac{d\phi}{dp}}{\sin \phi + \cos \phi \cdot \frac{d\phi}{dp}}$ expression fort simple qui ne contient ni fonctions
 $\frac{dy}{dx}$ de ϕ mais seulement la différentielle $d\phi$. De cette manière la
 quantité $H \cdot dy - H \cdot d\phi \cdot y$ se trouvera changée en $p \cdot \frac{dH}{dp} \cdot \frac{dp}{p} - H \cdot r \cdot \frac{d\phi}{dp} \cdot \frac{dp}{p}$. On
 pourroit encore substituer au lieu de p un nouveau rayon vecteur r avec
 l'angle θ que ce rayon fait avec p qui en est la projection; ce qui donneroit
 $p \cdot r = r \cdot \cos \theta$; $y = r \cdot \sin \theta$ & par conséquent $dp = -r \cdot \frac{d\theta}{\sin \theta} + dr$ de force
 que la quantité $\frac{dx}{dy} \cdot \frac{dy}{d\theta} - \frac{dx}{d\theta}$ seroit transformée en celle-ci $\frac{dr}{r} \cdot \frac{dy}{d\theta} - \frac{dx}{d\theta}$
 $\frac{dx}{dy} = \frac{dr}{r} \cdot \frac{dy}{d\theta} - \frac{dx}{d\theta}$. Ici il est clair que r fera le rayon mené du centre des
 coordonnées» Au point de l'espace où est le cosinus $\frac{dy}{dx}$ » 4^{ème} la Finclinaison
 Ggi

The text on this page is estimated to be only 27.57% accurate

2⁶ Mécanique analytique. de ce rayon sur le plan des x & y
 Tangente de. la projection de ce rayon sur le même plan avec l'axe des x ; U
 Ton aura $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$. Enfin on pourra employer à
 volonté d'autres substitutions ; & lorsque le système est composé de
 plusieurs corps, on pourra les rapporter immédiatement les uns aux autres
 par des coordonnées relatives ; les distances de chaque problème
 indiqueront toujours celles qui feront le plus propre. On pourra même,
 après avoir trouvé d'après une substitution, une ou quelques-unes des
 équations du problème, déduire les autres d'autres substitutions; ce qui
 fournira de nouveaux moyens de déterminer ces équations de trouver les
 plus simples & les plus faciles à intégrer. 3. Les autres termes des
 équations du mouvement dépendent des forces accélératrices qu'on suppose
 agir sur les corps, & des équations de condition qui doivent subsister entre
 les variables relatives à la position des corps dans l'espace* Lorsque les
 forces $P, R, \&c$, tendent à des centres fixes ou à des corps du même
 système, & sont proportionnelles à des fonctions quelconques des distances, .
 comme cela a lieu dans la nature, la quantité qui exprime la somme des
 quantités $m/(P \text{ ou } Q \text{ ou } R \text{ ou } \dots)$ pour tous les corps m du système, (êra
 une fonction algébrique des distances, & fournira pour chaque variable x
 dont elle se trouvera composée, un terme fini de la forme De même les
 équations de condition $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = 0$, &c ,

The text on this page is estimated to be only 22.42% accurate

Seconde Partis. 237 fourniront pour la même variable f les termes $x^h - \dot{y}^h$, &c, & ainsi des autres. De sorte qu'il n'y aura qu'à ajouter à la valeur de F les quantités x^h , &c: en regardant ensuite x , y , &c, comme constantes dans les différenciations en t . Si donc quelques-unes, des variables qui entrent dans la fonction T n'entrent point dans $\dot{x}$ ni dans $\dot{y}$, &c; les équations relatives à ces variables ne contiendront que des termes différentiels & l'intégration n'en fera que plus facile, sur tout si ces variables ne se trouvent dans T que sous la forme différentielle. C'est ce qui aura lieu lorsque les corps étant attirés vers des centres, on prendra les distances à ces centres, & les angles décrits autour d'eux pour coordonnées,

4* Une intégration qui aura toujours lieu lorsque les forces sont des fonctions de distances, & que les fonctions $\dot{x}$, $\dot{y}$, &c, ne contiennent point la variable finie t , est celle qui donne le principe de la conservation des forces vives. Quoique nous ayons déjà montré comment ce principe résulte de notre formule générale de la Dynamique (Seau m, art. 10), il ne sera pas inutile de faire voir que les équations particulières déduites de cette formule « fournissent toujours une équation intégrable qui est celle de la conservation des forces vives. Ces équations étant chacune de la forme $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dots$ si on les ajoute ensemble après les avoir multipliées par les

The text on this page is estimated to be only 11.05% accurate

^3 8 M É C H A N I Q U E A N A L I T I Q U E. diâFéreacieiles
 rerpecllves &c» & qu'on falTe attention que les quantités A^t &c, fonc par
 i'hypothère tles fbitââons algébriques des yatiaUes |, 8cc, (ans il eft clair
 qu'on aura Téquadon mais $X = 0$, ^9 étant les équations de condi* tiott, on
 aura généralement $\wedge MssO, dCC\}$ par conféquent réqnanon précédente (è
 réduira à . $\bullet t!^{\wedge} - 4f)^{\wedge \wedge \wedge \bullet}$ & ooinme 7* eft une fonâion algébrique des
 variables $\wedge \gg$ &c $\gg$ & de leurs difi&entielles fans r , on aura d r« 4r "Tir d'^ $\wedge$
 àLc^ donc réquation deviendra « Uquelle eft évidemment incégrable» &
 dont l'intégrale eft -i-^ic — r+ ^=3à une conftante. Maintenant puifque
 $T^{\wedge} S^{\wedge \wedge \wedge \wedge} f^{\wedge} \text{—} i \gg$, il eft vilible que quelques variables qu'on fubftitQCi pour
 |» la fbnâion réfultante iêra nécelHuremenc homogène & de deux
 dimenfions relativement aux différence^ /le ces variables ; donc par le
 théorème connu on aura i/| H- &c a 7*, Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 17.96% accurate

Seconde Partie, a^p Donc l'intégrale trouvée fera Amplement T-
hf^{sse} confl. laquelle contient le principe de la confertacion- des forces
vives (Seél. ITI, art. lo). Si la quantité V n'écrit pas une fonction
;ilgëbn(ue y on ii*airoit pas $\frac{dL}{dt}$ &c; <c si les. quantités T y L ^ M y &c
, contenoient auf la variable t , alors leurs différentielles dT[^] dL[^] dM, &c,
contiendroient aum les termes $\frac{dL}{dt}$, , -i[^] &c; donc les réduisons qui ont
rendu l'équation intégrable n'auroient plus lieu» ni par conséquent le
principe de la conservation des forces vives. 5 . Quoique le théorème sur les
fonctions homogènes dont nous venons de faire usage » a[^] soit démontré
dans diiFérens ouvrages , & qu'on puisse' par conséquent le supposer comme
connu , la démonstration que voici est si simple , que je ne crois pas devoir
la supprimer. Si F est une fonction homogène de différences variables jc,
&c, & qu'elle soit de la dimension x^r; il est clair qu'en y mettant ax ^ ay ^
Sec, a la place de y, &c, elle deviendra nccesTKiremenc <l" F y quelle que
soit la quantité a. Donc faisant a = i h& regardant « comme une quantité
infinitement petite, l'accroissement infinitement petit de F dû aux accroissemens
infinitement petits •y ^ ftc, de x[^]y[^] &c, fera n[^]kF[^] Afais en faisant Varier x>
y 9 ^c, de «x, on a en gé^{* n}éral pour la variation de F, *x H — *j[^]-+-&c.
Donc égalant ces deux expressions de l'accroissement de F* & divisant par «
on aura , uiyiiizea by Google

The text on this page is estimated to be only 22.54% accurate

240 MÉCHANIQUE ANALITZQUE. 6. L'intégrale relative k la conservation des fonu vives $\wedge$ est d'une grande utilité dans la solution des problèmes de Méchanique» (or-touc l'orique la fonction 7^* ne contient que la différentielle d'une variable qui ne se trouve point dans la fonction $f^{\wedge}$; car cette intégrale se vira alors à déterminer. miner cette même variable, & à éliminer des équations différentielles. A l'égard des intégrales qui se rapportent k la conservation du mouvement du centre de gravité y (le principe des aires, & que nous avons déjà trouvées d'une manière générale dans la Section troisième) elles se présenteront d'elles-mêmes dans la solution de chaque problème 9 pourvu qu'on ait soin dans le choix des variables de séparer le mouvement absolu du système des mouvements relatifs des corps entières; ainsi que nous l'avons fait dans la Section citée (art. 15). Mais ces différentes intégrales ne suffisent pour la solution complète du problème, que lorsque leur nombre égale celui des variables. Dans tous les autres cas il faudra chercher encore de nouvelles intégrales; mais on ne sauroit donner là-dessus de règle générale. Il y a cependant un cas très-étendu, qui est toujours susceptible d'une solution complète; c'est celui où le système ne fait que de très-petites oscillations autour de sa position d'équilibre. Comme cette solution se déduit facilement de nos formules, nous commencerons par la donner ici, en y joignant quelques remarques nouvelles & importantes.

The text on this page is estimated to be only 19.18% accurate

Seconde Partie. 241 § . I. • Solution générale du Problème des oscillations irh-pcdus Jyflèmc quelconque de corps, ' • « ^ > 7* Soient b^c les valeurs des coordonnées rectangulaires X, y , de chaque corps m du système proposé dans le état de son équilibre. Comme on suppose que le système dans son mouvement s'éloigne très-peu de sa situation d'équilibre, on aura en général $U = sa - l - \frac{1}{2} j^2 - \frac{1}{6} j^3 + \dots$, les variables u, v, w étant toujours très-petites ; U il suffira par conséquent d'avoir égard à la première dimension de ces quantités dans les équations différentielles du mouvement. La même chose aura lieu pour les autres quantités analogues, qu'on distinguera par un, deux, &c, traits relativement aux différents corps m', m'' &c, du même système, Considérons d'abord les équations de condition qui doivent avoir lieu par la nature du système. Se qu'on peut représenter par $\phi = 0$, &c, étant des équations algébriques données des coordonnées x, y, z , &c. Comme la position d'équilibre est une de celles que le système peut avoir, il s'ensuit que les mêmes équations $Z = 0$, $A = 0$, &c, devront subsister, en supposant que x, y, z , &c, deviennent a, b, c , &c, d'où il est facile de conclure que ces équations ne faussent renfermer le temps t . Or soient &c, ce que deviennent u, v, w , lorsque x, y, z , &c, deviennent a, b, c , &c, il est clair qu'en substituant pour x, y, z , &c, leurs valeurs a, b, c , &c, on aura à l'équation de la petitefle de u, v, w , &c,

The text on this page is estimated to be only 22.77% accurate

MÉCHANIQUE ANALITIQUE. tCsÎDGî àe fuite. Donc 1% on aura $-<^=0$, $i5=0$, &c, relativement à l'équilibre » on aura les équations dk a $-4dA$ »' -f» &C «a O , dB dt • lefquelles donneront la relation qui doit subfifter entre les ▼ variables«, iS, 7, &c. En négligent d*abord les quantités très-petites du fécond ordre & des ordres' fupérieurs , otf aura des équations linéaires par lefqueHes on déterminera' les valeurs de quelques-unes de ces variables par les autres; enfuite par ces premières valeurs on en trouvera de plus exactes , en tenant compte des fécondes puiffances , Se des puiffTances plus hautes comme on voudra. On aura aind les valeurs de quelques-unes des variables /B> >^ »y &c. exprimées par des fondions en férie des autres variables} & ces variables reftantes feront alors abfolument indépendantes entr'elles. Au refte, on pourra fouvent auflî , en ayant égard aux cor.ditions du problème, réduire les coordonnecs iijnmediatcmenc par des fublittutions, en fonctions rationnelles & entières d'autres variables indépendantes entr'elles, & très-petites 9 dont la valeur foit nulle dans l'état d'équilibre.

uiyiiiii^LO Ly Google

The text on this page is estimated to be only 23.23% accurate

Seconde Partie, Ainfĩ nous fupposẽront en gẽnẽrai que Ton ait & ainfĩ des autres coordonnẽes y, &c , les quantitẽs $a^B c^{ai} h_i$ &c, font confiantes ,& les quantitẽs $^4, *, \&c$, Ibnt variables, trẽs-petites, & nulles dans l'ẽquilibre. 8* Il ne s'agira donc que de (aire ces (ubitinitions dans les valeurs de T ic $F(irt. i, 3)$; & il fuffira de tenir compte des fẽcondes dimenfions, pour avoir des ẽquations diffẽrentielles linẽaires. Et d'abord il eft clair que la valeur de T fera de cette forme. H — en fupposant pour abrẽger &c... = S faĩai-hBiBi ^{cicxJm} ($^{^l}$) ' ^{S} (axa $^{^l}$ - $^{^l}$ BxBi' ^{ezc} }) m &c, '' Uka

The text on this page is estimated to be only 14.37% accurate

244 MÉCHANIQUE ANALITIQUE. OÙ le signe S dénote des intégrations ou formations relatives à tous les différents corps m du système, & en même temps indépendances des variables I, 4» f% àcc. ainû que du Enfuite Ci on dénote par F la fonction algébrique $f(P dp - Qdq - Rdr - c^2)$, en y mettant u, c , à la place de x, y, z , il est clair que la valeur générale de $f(F dp^2 - Q dq^2 - R dr^2 - c^2)$, fera représentée ainsi, $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ - $\int \frac{dy}{\sqrt{ay^2 + by + c}}$ - $\int \frac{dz}{\sqrt{az^2 + bz + c}}$, où il s'agit d'avoir égard aux différentes dimensions de x, y, z . Multipliait donc cette fonction par m, & intégrant avec le signe on aura en général $V = H - \frac{1}{2} m \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ - $\frac{1}{2} m \int \frac{dy}{\sqrt{ay^2 + by + c}}$ - $\frac{1}{2} m \int \frac{dz}{\sqrt{az^2 + bz + c}}$ Sec. * fa fappoiant $H = \frac{1}{2} m \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 9.94% accurate

Sbcomds Parti e« 1245 Tf *T — Ç ^ . I fi . ^ ^1 uiyiiiii^ed by
Google

The text on this page is estimated to be only 18.54% accurate

1 2J⁶ MÉCHANIQUE ANALI TIQUE. 9. Ayant ainfi les valeurs
àeT &c exprimées ea fonctions 6es variables |, 4, ^9 indépendantes
enr*elles, t>n n*aura plus aucune équation de condition -à employer , U
comme la quantité T ne contient que les .diffSàceytielles. des variables, on
aura fur le champ pourrie mouvement du fyftcme, les équations fuivantes,
dont le nombre fera, comme Ton voit» ég^ à celui des variables. Ces
équations doivent avoir lieu aulTî dans l'état d'équilibre , • puifque le
fyftême y étant une fois y refteroi^t toujours de lui-même; or dans
l'équilibre on a conftamment $x = a, y = ^, c, Bso', <Scc$, par rhyphothèfe;
donc $^ = o, o, . ^ o, \&c$, ainfi que $= o, \ll = o, \&c, \hat{c} = o, \&c$. Donc les
termes $7^, -JW' \wedge \wedge \wedge \wedge \wedge$ les termes $4T''^f' \wedge^7$ » &c . fe réduiront à Hi^fli ,
if 3, ôcc. Par conféquent on aura $H \setminus = 3 o, Hi = o, \pounds[3 \&c$; ce font les
conditions néceflaires pour que aybjCf «te, foient les valeurs de ^» $P@''*^$
l'éat d'équilibrt«^ comme on le fuppofo. Eneffet,ileftvifibleque</^«5^^/^4-
Ç<^fH-i?^>H-acc> exprime la fomme des momens de toutes ley forces P ai
, Qi» , Rm,&cc, appliquées À tous les corps m du fyftême, &• qui doivent
fe détruire mutuellement dans l'état d'équilibre; donc par la formule
générale donnée dans la feconJe Sedion de la première Partie > il faudra
que l'on ait $= o$, par Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 22.89% accurate

Seconde Partie. 247 rapport à chacune des variables indépendances; par conséquent $\sum_{i=1}^n x_i = 0$, $\sum_{i=1}^n y_i = 0$, &c, feront les conditions de l'équilibre, lequel étant satisfait répondra à ces observations, &c. On a fait $\sum_{i=1}^n x_i = 0$, $\sum_{i=1}^n y_i = 0$, &c. De force que les premières dimensions des variables x , y , &c, dans l'expression de U disparaîtront toujours. Substituant donc dans les équations générales les valeurs de x & de y , & faisant $H_1 = H_2 = \dots = H_n = 0$, on aura pour le mouvement du système » $\sum_{i=1}^n \frac{d^2 x_i}{dt^2} = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial x_i}$ &c 5 C3] $\sum_{i=1}^n \frac{d^2 y_i}{dt^2} = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial y_i}$ &c. • équations qui étant sous une forme linéaire avec des coefficients constants, peuvent être intégrées rigoureusement &c généralement par les méthodes connues. 10. On peut supposer d'abord que les variables dans ces fortes d'équations ayent en elles des rapports constants; c'est-à-dire, que Ton ait $\frac{y_i}{x_i} = \text{constante}$ » $f \propto x^1$, &c ; par ces substitutions elles deviendront

The text on this page is estimated to be only 19.08% accurate

148 MicHANIQWB ANALITI^{UI}. lesquelles donnent 4- « o, en faifant $C_3^{\wedge} \cdot r > \hat{o}$; -«-Cm;/-!- *e Le nombre de ces équations e(1, comme Ion voie, égal à celui des inconnues $f^{\wedge} g^{\wedge} \hat{o} Lc^{\wedge} Ki$ par cooféquenc elles décerminenc exa£bement ces inconnues; ic comme en retenant pour premier membre le terme JST » & le muldplianc refpeiElîvement par le dénominateur du fécond, on a des , équations linéaires en $f^{\wedge} g, \hat{o}cc$, il fera facile de les éliminer par les méthodes connues, & il n'cft pas difficile de voir par les formules générales d'élimination , que la réfuitante en K fera d'un degré égal à celui des équations, & par conféquent égal à celui des équations différentielles propcfées ; de forte que Ton aura pour K un pareil nombr[^] de différences valeurs , dont chacune étant fubftituée dans les expteffions àe fy $icc^{\wedge}$ donnera les valeurs cōrrefpondanGes de* cés quantités. Maintenant l'équation $\sim|- iST^{\wedge} \gg o$, donne par l'intégration

Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 12.97% accurate

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ deux constantes arbitraires ; ainsi comme on a supposé $4 - \alpha - \beta > 0$ on aura des valeurs de α, β , &c. Cette solution n'est que particulière, mais elle est en même-temps double, triple» Sec, selon le nombre des valeurs de K , par conséquent en les joignant ensemble, on aura la solution générale » puisque d'un côté la somme des ∇ d'un polynôme de ≥ 4 f » Ue, satisfait également aux équations différentielles, à cause de leur forme linéaire, ôc que de l'autre cette somme contiendra deux fois autant de constantes arbitraires qu'il y a d'équations, Ôc par conséquent autant que les intégrales complètes peuvent en admettre. Désignant donc par $K \setminus X$, $K^{(1)}$ &c, les différentes valeurs de x c'est-à-dire, les racines de l'équation en $K \setminus X$ par $'$, $\wedge$, iicir, $g^* \setminus \wedge > f^0 \setminus \wedge$ «ce, acc, le» valeurs correspondantes de $g^0 \setminus \wedge c^9$ prenant on pareil nombre de coefficients arbitraires $E^y E^x E^z$ tnc yé, d'angles aussi arbitraires $\setminus$ on aura ces valeurs complètes de $4^{\wedge} \setminus \pounds$ iin $(t \setminus K^{(1)})^{\wedge} f^x E^z$ En $(t \setminus K^{(2)})^{\wedge} f^y \setminus \pounds$ Un(t)/IL $^{(1)} \setminus \wedge$ &c $\wedge^{mm} \wedge^{mn} (t \setminus K^{(1)})^{\wedge} f^x E^z C^{\wedge \wedge \wedge \wedge}$ «ce . dans l'écrit H9 les arbitraires $E^x E^y$ &c » &c. dépendront des valeurs initiales de $\wedge, 4, f$, &c, $\wedge t^9 dt^9 4\$ y$ **** il. j $\wedge \bullet$; li uiyu ^{L} -U Ly Google

The text on this page is estimated to be only 14.86% accurate

3jO MÉ.CHANIQUE ANALJTQ7S. I r. Comme U folution
précédeate eft fondée fur It fuppoftioa que les variables[^], 4 > , &c, foient
très-petites y il faut pour qu'elle foie légitime, que cette fuppoftion ait lieu
enc&t ; ce qui demande que les racines A', JC\ ficc[^] foient toutes réelles,
poilcives fie inégales, afin que le ttms>t • qui croit À l[^]infini, foit coujburi
lenfemé iibus le» lignes de ûnus. Si quelquoriuiies[^]de ces racines
deneaoienc n[^]»tir& an &iag[^]ttaiws/el]es; încifKitikoîenc-.dauB8 les finus
te[^]ondflosfdes.expoencieU'és céciles, & fi elles deveoioeat (împlement
égalcis, elles y introduiroient des puiffances air gébriques de l'arc; c'eft de
quoi on peut s'afTurer en met* tant dans le premier cas, .\ la place des linus
, leurs expreflions . exponentielles irai;inAires, fie en Tuppcfanc dans le
fécond que les racines égales différent entr'elles de.quanthés infimmenc
petites indéterminées ; mais comme le déve[^] loppemehc de ces cas eft
inutile pour Pobjet préfent[^] nous fie ttoiB 7 'arrêterons [^]olne. ■ Si la
condition de la réalité & de l'inéiralité des coelîciens de r a lieu, il eliviUble
que les plus grandes valeurs de I, de , ficc feront moindres que les fommes
"die «ce, de /' J?V/[^] J? V f E% 9cc, en prenant toutes ces quantités
pofitivement; par conféquent Ci elles font fort périeures, on fera aiiuréqueles
valeurs des variables le feront toujours auic. Mais comme les coëfficiens £\
£\ ficc» font arbi«rà[^] -ft -dépendent UhiqOfeiaâiV'idu déplacémètit
primitif [^]u"J[^]itè;e, il eft poffible que Ie\$VartaWèSi[^],4, &c,reftent fetC
petites, quand même parmi les quantités V~K"y fite, il y en auroic
d'imaginaires ou d'égales [^] car il fuffic pour cela uiyiizied by Google

The text on this page is estimated to be only 10.59% accurate

Seconde Partie. ajfi que les quanocés. <3êaf%0Qd«iic«s E*^ E\ ^c» foî^nc nulles» ce qui fen cUfparo)cn^ les teimes qu| croictoient avec le (ems /. Alors la folution, (ans être exa^ en général, le ièra néanmoins dans le cas particulier où la condition précédente aura lieu. ■ " . 1 2. Quant k la détermination des confiantes arbitraires £*f £*\ t'^ / &c, dépend^ comme . kau^ Tavons -dé)a die, de Tétat initial du fyftême. Er^ effet ^ fi dans les expre/lions trouvées de ^, 4, &c, on farc-' / = oj &: qu'on ruppoie données les valeurs de ^, 4 » ^ ^ ^*^ -» on ^ura des écjuaruMii linéaires eatièlc^iaconnueis-Ê'. ilu fin»", &c, par kiquitiifir où p^uiivaidéesmiiltee (dbapiiiede ce&InconnaesL De moroc h on fait r = o dans tes diflTcurenâcîles des» mêmes expiV. îTi i, ; 6c qu'ohtêgânU auili comme dosséesles vâtêursde "7*' ' ~77 9 "77" ' on aura un {êcotted» fyft^ne «l*équa*> tioiii lii^aires encre J^' co[*\ £'''<of 6cc, lefcjtieties fer▼ iront à leur déterminàjiejBi Jî^Wk jQl^i^ir^ra, ^fément. % yaleurs de E\ £%.ècç\, ainfi qu^d». WS/«iiftBg & enfin celles de\$ aogjb& Jn^es. ^ • : . ;> IfisÀs voici «n moyeAiiort Cmple d^ déoerpHner .ces, 1% coatuies-dire^en^ene fans -les eoil^atra^d^ lelJjBiipatloç/. Je remarcjoe qu'en ajoutant enfemble les équations diffdrentieUes de Tarticie après avoir multiplié la féconde par /, la troifieme par 9c ainfî de fmtr; £c ^ufaiHi pour abrégér- - \ ' *. -, . . . : ; . ► ~ v v H»> "«(^) ■+- (i,x)/^Ct,3)^H^«^c li».

The text on this page is estimated to be only 12.91% accurate

a^X MicHANIQUE ANALITIQUE. on a l'équation Mais par les équations de condition de l'article 10, on a $P = A'$, $Q = Kq \wedge R = iK \text{ Sec.}$ Donc substituant dans l'équation* précédente 9 elle deviendra de la forme
$$4\pi \int_0^H \left(\frac{1}{4} - \frac{f}{4} \right) dz = \frac{Z}{H} \frac{1}{K} HZ \wedge A \text{ étant deux constantes arbitraires.}$$
 - Cette équation doit avoir lieu également pour toutes les fonctions y qui résultent des mêmes équations de condition, 9c que nous avons dénotées par JT' , $K'^{\wedge} 9cc$, Ainsi, désignant de «line par $/$, $p^{\wedge}$, $\&c$, $\&c$, les valeurs correspondantes de $/$, $^{\wedge}$, $\&c$, $\&$ prenant différentes constantes arbitraires $2^{\wedge}$, $1,^{\wedge} \&c, a'$, $x^{\wedge}$ on aura les équations suivantes $f \text{ i } -h \text{ i } 4 -h \gg z^{\wedge} \gg r7c X$

The text on this page is estimated to be only 13.17% accurate

Secomde Partie. 2JJ Ces équadoos fèrviroient également à dècemiiuer Jes Jeitcs de I» 4» f « 9cCf ic il eft dair qne ces valeurs âfivroitm coïncider avec celles q^'on a crotivées d-deflbs (arc. lo) , puifqu'eBes réfoltenc les unes & les autres des mêmes ëqua< lions diâ^ërentielles. Ainfi en AiblVituant ces mêmes valeurs de l'article cité dans les équations précédentes, elles de-» 0 Tront devenir entièrement identiques. P'oà il eft fsucile de conclure que pour la premiefc équsition » on aura $H-7+- \&c = c G, / H-/' (i \wedge -g''' r' ficc \Rightarrow o$, &ci que f on aura de même pour la féconde équation $= .V \ll (f < i' \wedge \ddot{e}' E \wedge^f f f, 4- \&c \Rightarrow o \wedge^f i' \wedge \wedge \&c == o$, ôcciôc ainlî des autres. Donc fubftituant dans les équations d-delTus pour a', $L \wedge \wedge X''$, $A \% L^{* \wedge \wedge}$ te, les Tueurs qu'on vient de trouver, on aura cêlles-d. W fin (tVZ! ^ « /" *-«"/' -+ " ^' -H *c «ce. ^ui font les réciproques de celles de Tarcicle lo. Maintenant la détermination des arbitraires $E' \wedge E \% tCc^ i' \wedge i$ n'a plus ép difficuUé^ car, t^ en Atppofaiic \$ a> o-^

The text on this page is estimated to be only 12.09% accurate

2J4 MèCHANIQUE ANALITIQUE. les' premiers membres des équations précécieoces deviennent Ef fia E'* (it> *'^9cCf bL les>feceacb fonce tous coofius» «n Aippoïâne les ▼ aleuts âtr'\$y4i &c « doméer dons, le pfemiér inftAQ. l^ Eq- dilSiâremUinc les mênwB é^pKatons » ^ ft iu[^pofa#ic enfoïré t m» o, les* prêmief^'bieinbieëTenuit ^:'.£*'cof ^^T^/^'^cof i", &c, & les féconds feront auifi tous connv^s, en regardant comme données les quantités Jh^ 4f>47^ ^» lorfqie i'==±0. Doncv&c, - ^ ' ^ . I 3. La folucion du problème eft donc réduite uniquesnemr à k détermination des quantités K ,f, ècc; èc nous avons vu dans l'article iq que cette détermination dépen d d c la réfolution des équacions p K — F = o i*^ à i rJC ^ iï^ao, iCc, etc^ cenervanc I^s expreffions f.% ficc». F, i2« &c»de Partkte ». Or fi on repréfente par A ce que devient la quantité T en Y changeant , -^, 4r * ^^'» ^>f* g*^<^* & par ce que devient la partie ^ la quâbtîtë 6& les variables f, 4, f, &c, forment en femble deux dimenfions, en changeanc de mcme ces variables en Sic; il e(l aifé de voir, âic on pourroit mcme s en convaincre à priori que i-oiMura p^^JA.^ ^ 47 » ^^' î. . • .. Donc en gcocfal. il oct i^A^ rr> a » les é^mtloijis |>our k décerminatioii des'.inconnæes K^, /* fcioDt Digilized by Googli

The text on this page is estimated to be only 19.56% accurate

Seconde Partie. 255 Aiofi comme la quantité a se forme immédiatement des quantités T & A^2 , on pourra aussi trouver directement les équations dont il s'agit sans avoir besoin de les déduire des équations différentielles du mouvement du système. Je remarque maintenant que puisque a est une fonction homogène de deux dimensions de x , y , & z , on aura par la propriété de ces sortes de fonctions démontrée dans l'article - ;

■ ' . . t $AH - J^2$, + &c. • Donc on aura aussi a 04 par conséquent les inconnues y , g , h y &c, doivent être telles, que non-seulement la quantité a soit nulle, mais que chacune de ses différentielles relatives à ces inconnues le soit aussi ; d'où il s'ensuit que la quantité K regardée comme une fonction de ces inconnues dépendante de l'équation $a = 0$, devra être un maximum ou un minimum ■ Si on d'abord $1 \gg$ & qu'on teniprise par a comme l'équation $= q''^2$ on aura pour la détermination des inconnues y , g , &c les équations $a = 0$, $\gg$ $\gg$ $\gg$ &c i fi donc on tire d'abord la valeur de y de l'équation $-y = 0$, & qu'en la substituant dans $a = 0$, on change cette équation en $a' = 0$ il n'y aura qu'à faire coïncider a' avec a de même la valeur de g &c - • tirée de cette dernière équation dans $a' = 0$; alors nommant a'' l'équation résultante, on fera de nouveau

The text on this page is estimated to be only 17.25% accurate

2⁶ MiCHAHIQUE AMALITIQUE. J![^]=e o « & ainG de fuite.
 Par ce moyen on parviendra à une équation finale qui ne contiendra plus les
 inconnues y, ^, , &c, mais seulement la quantité K, 6c qui fera l'équation
 cherchée en donc les racines ont été nommées a; k\ k\" kc. m On peut même
 réduire cette équation en une formule générale en considérant que puisque
 les quantités /, g, y, ^ &c, ne forment ensemble dans la valeur de a que deux
 dimensions, la quantité > précédemment l'ans/» - la différentielle relative
 à / étant & par conséquent nulle. De sorte qu'on pourra faire a' » j fie comme
 dans cette quantité les inconnues restantes ^, A, & C, ne montent au lieu qu'à la
 féconde dimension, on pourra faire de même a'' » h . l'il ^ l'fi ^; & ainsi de
 suite. La dernière des quantités a, a', a'', &c, étant égale à xéfo » for
 l'équation cherchée en K. Il est vrai que cette équation pourra monter à un
 degré plus haut qu'il ne ^uc, à cause des hSbeivam: étrangers introduites
 dans les équations a'' ss p, A'*= o, etc; mais si en développant ces
 équations on a soin de les débarrasser successivement de ces mêmes
 facteurs, on ne prendra garde pour les valeurs de a'', à''\ Sec, que leurs
 premiers membres ainsi simplifiés, l'équation finale se trouvera réduite
 d'elle-même à la forme ^u degré dont elle doit être. • Quant aux valeurs de
 /, g, &c, on les déterminera en » jfiit^ pv équation ^s ^x>, « » o, etc, en
 commençant Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 21.91% accurate

Seconde Partie. 257 mençant par la deriiieme, &. remontant à la première par U .iubftitution fucceffivè des valeurs trouvées. 1 4. On a vu dans l'arcide xx que la folution neH: bonne tXk général cfuc iorCque les racines de l'équation en K (ont toutes réelles » pofitûres l'inégales. Or on a des méthodes pour réconnaître fi une équation ^nnée Je quelque degré - qu'elle foit «* toutes Ces racines réelles ou non^ & pour juger dans le cas de la réalité» de leur figne 6c de leurioé* galité , mais rapplication de ces méthodes étant toujours un peu pénible, voici quelques caractères fimples & généraux qui ferviront à juger de la forme des racines dont il s'agit dans un grand nombre de cas. La prenant l'équation $AK - ^ B = bs o$ » (art. préc.) on a $K ^$; or il eft facile de te contenir que la quantité A a toujours néceffairement une valeur pofitive, tant que /, g, &c, font des quantités réelles; car la fonction T d'où elle réfulte en changeant $\sim$ » $^{9 77*}$ » $^{>}$ en $^{fff g9}$ êce, eft compofée de là fomme de plufieurs carrés multipliés par des coefficients néceffairement pofitifs. Donc fi la quantité B eft auffi toujours pofitive , ce qui a lieu lorfque la partie de la fonction où les variables $\hat{>} ^j 9$, &c, forment enfemble deux dimenfions, eft réfultante à la même forme que la fonction T; on eft affuré que les valeurs de c'eft-à-dire, les racines de l'équation en K feront toujours toutes les fois qu'elles feront réelles. Au contraire» fi la quantité B eft toujours négative, ce qui arrivera quand elle fera compofée de plufieurs • carrés multipliés par des coefficients négatifs» les valeurs de K (eroat toutes négatives. Daai ce dernier cas la {blutxim Kk

The text on this page is estimated to be only 17.17% accurate

a^S MÉCH. AKIQUE AHAttTIQUI. ne pourra pas être tionoe,
 parce que les racines de l'équation en K ne peuvent être qu'imaginaires
 ou réelles négatives; qu'ainsi les expressions des variables $\wedge$, -1 , &c,
 contiendront nécessairement le tems / hors des signes de $\pm$ mis 6i cofinus.
 Dans le premier cas on voit seulement que il les racines {ont rédués, elles
 sont nécessairement positives; & il ieroic ' peut-être 4i&ciJe de démontrer
 direâeoient qu'elles doivent en même-tems être réelles;. mais on peut fis
 convaloci» d'une autre manki» que cela doit être ainfi En effet» riftégnde
 $T^{\wedge}V^{\wedge}$ confit» ayant nécessairement lieu, puis ($\wedge$ <|tte TU y ibnc feiiâioiis iâns
 t\ fi on désigne par V la partie de V qui contient les termes de deux
 dimensions, en sorte que $\wedge = \wedge'$ à cause de $H^{\wedge}o$, $Ux - 0, \wedge^3 = 0$, & g (art. 8, 5),
 on aura $TH-H-i-J^{\wedge}n = \text{const}$, ($\wedge$) $H-t-f$ en dénotant par les valeurs de jT &
 V premier instant; donc $T-h V = (T) (V)$. Donc, T étant par sa forme une
 quantité toujours positive, & V étant aussi par l'hypothèse, il s'en^t qu'on
 aura nécessairement $V^{\wedge}o^{\wedge} 9C < \{TJ^{\wedge}$ - donc la valeur de $f^{\wedge}^{\wedge} U$ d'inféquem»
 sera aussi celles des variables $|, 4\rangle f\rangle$ &c> seront renfermées dans des
 limites données & dépendances uniquement de l'état initial. Ces variables
 ne pourront donc pas contenir, le tems t hors des signes de $\pm$ mis 6i cofinus,
 parce qu'alors elles pourroient aller en croissant à l'infini. Donc les racines
 de l'équation en $\wedge$ seront nécessairement toutes réelles, positives &
 inégales (art. 11). 15- C'est de cette manière que nous avons démontré à U
 fin de la troisième Seâipn de la Statique, que lorsquela Fonction « est un
 minimum dans l'état d'équilibre, cet état est stable» c'est-à-dire, que k»
 système en étant tant fottpeé Oigitized by Google

The text on this page is estimated to be only 18.42% accurate

Seconde Partie. d'érangie » ne peut être que de petites oscillations. U est vu Hbly ea effe[^] «pis la f^muioA aommée • dam Fanicfe xj'deJa SeâSoti citée, est la même que mms repté&nconi ici par puifque rtme & Taime est Fimégrale de la to»* Iké des mooieiu éa forces agifTantes fiir le» différenft cofpt db fyftême , totalité qui doit être nifk dans l'équilibre. Aiiliî comme l'on z s=s H -h & que f['] ne contient les variables 4, &c, qu'à la féconde dimenfion , il s'enfuit que feha un minimum ou un maximum , félon que la valeur de [^] fera poûcive pu négative en donnant à ces variables des valeurs queleconques.pr faifant'f[^]■-/^ytr^{^^^^} k vaieuc de devieac = [^]* Jî (art. ij) , écamî [^] t j dons [^] ou {en im mjfffrftff lorfque £ feca. ane [^]ynotiGé tou jouis poûtive , & un maximum lorfque B fera toujours une quantité négative. Par cooféquent dans le pteinier cas les expreffions des vatiabfes ne contiendront le tenu r que (bus lies figes de lînus fie de oolmus, & réquiCBre féia IbBIe; (dans le (écond elles contiendront nêceflaîremenc d[^] termes oîi e fera hors de ces figes, & l'équilibre ne pourra pas être fiable, mais le fyftême en étant tant foit peu déplacé , s'en éloignera toujours davantage. Cette féconde partie du théorème énoncé dans l'endroit cité de la Statique , n'auroit pu y être démontrée faute des principes nécelTaires [^] nous en aviba» remis la démonftration à la Dynamique, S>c celle que nous Venons de donner ne laiflè plus rien à délirer. Au refte , entre ces deux états de fiabilité & de n[^]n ftahilité abfblueydanslefquels Téquilibce étant tant foie peu érangé .d'une manière quelconque , tend' à rétabfir de hii-même, ou à (é déranger de plus en plit[^] il peut y avoir des états dfe' ftabilité conditionnelle U relative , dans lefquels le rétablif

The text on this page is estimated to be only 24.02% accurate

!160 MicHANIQUE ANALITIQUE. femenc de l'équilibre dépendra du dépljicemeac initial du fyftême. Car il quelques-unes des valeurs de K font imaginaires, les termes correrpondans dans les valeurs des ^ riabks contiendront des arcs de cercle « & Téquilibre ne fèrà pas ftable en général ; mais £ 1^ coefficients de ces œr* mes deviennent nub» ce qui dépend de Tétac initial du fjC* tême» les dtcs de cercle difparoîtront , £c l'équilibre ponna encore être regardé comme ftable » du oioins par rapport & cet état particulier. 1 6. Lafblutionque nous venons de donner , demande que les coordonnées puiflenc êcre.exprimées par des fondHoBS eù, férié de variables très-petites, &qui foient nulles dans l'état d'équilibre , ainfi que nous Tavons fuppofé dans ^article 7, Or c'eft ce qui eft toofours poffible , comme nous Tavons vu , îorfque les équations de condition réduites en férié contiennent les premières puiïïances des variables fuppofées très-petites, parce que ces termes donnent d'abord des équations réfolubles rationnellement , 5c qu'enfuite on peuC toujours^ par la méthode des fériés, avoir des foluùons rationnelles de plus en plus exaâes. ' ^ • Il peut néanmoins arriver que lès termes de la première dimenfion manquent dans une ou plufieurs des équations de condition, ce qui aura lieu , par eiemple, û. dans l'équ»* tion Xeso, les valeurs des coordonnées pour^ l'équilibre font telles , qu'elles rendent non-feulement L nulle , mais flufîl chacune de fes dîflRhrences premières ; car on aura alors $\sim d7 \sim = 0 > "47 \sim = ^\circ > ,$ & l'équation $i \ll = 0$, ne coa-^ tiendra que. les iècoïkies pui&ices & les ultérieures de 0» £ec, (art. 7). Dans ce cas fi on réduit les coor-. Digitized by Google

Seconde Partie. Soient données en fonction de variables indépendantes « ces fonctions ne pourront plus être rationnelles » & les équations différentielles ne seront ni linéaires, ni même rationnelles. Ainsi la supposition des mouvements très-petits du système ne servira pas alors à simplifier la solution du problème, ou du moins ne la rendra pas susceptible de la méthode générale que nous avons exposée. Pour résoudre ces sortes de questions de la manière la plus simple on fera d'abord abstraction des équations de condition, où les premières dimensions des variables ne se trouveroient pas; on parviendra ainsi à des expressions de T & ϕ de la forme de celles, de l'article 8. ensuite on ajoutera à cette valeur de ϕ les puissances des équations de condition, auxquelles on aura pas encore en regard, multipliés chacun par un coefficient indéterminé, & qu'on supposera constante dans les différentielles par ϕ ; & il suffira dans ces termes dus aux équations de condition, de tenir compte des puissances des différentielles des variables très-petites.- De-U on trouvera les équations différentielles à l'ordinaire, & il s'agira d'en éliminer les coefficients indéterminés. Si les équations de condition étoient du second degré, & que les coefficients indéterminés pussent être supposés constants, la valeur de ϕ feroit encore de la même forme que dans la solution générale; par conséquent on pourroit l'appliquer aussi à ce cas; on détermineroit ensuite les coefficients, en sorte que les équations de condition fussent satisfaites. On pourra donc toujours commencer par adopter cette supposition, on verra ensuite si les valeurs qui en résultent pour les variables, peuvent satisfaire aux équations

The text on this page is estimated to be only 14.72% accurate

3162 MÉCHANTQUB A1fA.X.ITXQVS. de condition, auquel cas la ruppolution iera légitime, de la iblocioa eaaûⁱ ûnoa il Êiudm chierchcs à iooégscs les é[^]Miiott» diffibenoeltès par des mécfaodo- parricniieig» S. IL

• Du mwemem Jtm corps attiré vers- nt <ut jUufamt emtms* I 7. Suppofons en premier lieu que le corps foie attiré vers un feul centre fixe, par une force i?, fonélion de ht diftance r du corps au centre. Prenons ce centre pour Forigine des coordonnées, & la droite r pour le rayon vecteur; foit de plus 4 l'inclinaifbn de r fur le plan 4ps x & C ^ , • l'angle' de la ptojeâioa de r fur ce plan , avec Taxe • àeS'9t i on aura donc-» aommç on Pardéja vi[^]plus haut , (art. i) , Aînfi n'y ayant qu'un feul corps , dont la mafc peut être prifè pour l'unité , la quantité T fera fimplement égaie à . . • . TJ? • A l'égard de k quantité F^{''} elle fe réduira à f Rdr. Donc ^jmSa[^] o'j a aucune condition patticaUece ^ lem* plîr, & que les trois variables 4> f » r font indépendances , on aura pour chacune ces variables une équation xle la

^»«ûe d, -j[^] H- = q; ce qui donnera les trois équations {êt étant conibnt) -h .

. r*fin[^]cof.,],rf)»» rf.r» cof4.*<[^]f Digiiiized by Google

The text on this page is estimated to be only 14.69% accurate

Seconde Paktxb. 26} la féconde est intégrable par elle-même, & son image grade est 4 où on tire = — cette valeur étant substituée à la pteouere, elle devient Mffii intégrable si on la multiplie par $i/4$, «c l'intégrande ■ $A \wedge B$ sont deux constantes arbitraires. Je remarque d'abord sur cette intégrale, que si on suppose $\wedge^4$ & $4^\wedge$ soient à la fois dans m inAant, ils seront nécessairement toujours nuls; car faisant $4 \text{ st} = 4/4 = 0$, on aura $= i$ où l'équation deviendra alors $r f. -H^\wedge \text{ cang} 4^* : \hat{a}so$, qui ne peut avoir lieu qu'en faisant 4 & nuls. Or la supposition donc il s'agit revient à faire en sorte que le corps se flMUVt dans «n instant C dans le plan d«s»fc>; or ça est toujours possible, puisqu'il y a position de ce plan est trbkraiiM; Alors donc le corps continuera à le mouvoir dans ce plan; par conséquent il décrira nécessairement une orbite plane ou ligne à simple courbure. C'est ce qu'on peut démontrer aussi directement par l'intégration même de l'équation dont il s'agit. En effet, si on substitue pour dS le valeur $\wedge^4 fA$

The text on this page is estimated to be only 17.50% accurate

2⁴ MiCHAMIt^tJB ANALITXgrÛB. tirée de la précédence , oq
aura celle-ci , Sole lorfqe , -j^{^^} « tang «, on aura B*smA^{^^} tang «% &
Téqnation deviendra -[^]/[^]vt[^] =stang«» — tang[^]Sd'oik Ton tua df = , laquelle
à cauiè de sa </tang4> aura pour intégrale [^] [^] jgs arc. iîa {i«»r, -fia r».- '
tont 1» valeur arbitraire de p lorfqe 4 = o. Cette équation fait voir que f —
/s fç 4 font les deux côtés d'un triangle sphérique reâangle , dans lequel «
eft Ta&gle oppofé au c6cé 4. Ainfi, puifque Taie f— # eft pris fur le plan
ées » U ic que Tare 4 eft toujours perpeafUculaiie à ce même plan, il
s'enfuit que Tare qui joint ces 4eux-ci9 & qui forme Thypothénuiè dû
triangle, fera avec la baie p — [^] un angle conftant « ; par conféquent le
même arc paflera par les extrémités de tous les arct 4, & tous les rayons r fe
trouveront dans le plan de cet arc , lequel fera ainû le plan même de lorbite
du corps , dont l'inclinaifon fur le plan des x & [^] fera exprimée par Tangle
conftant «. * • 1 8» L'équation finie qu'on vient de trouver entre f & 4 ,
pourtott lervir à éliminer une de ces inconnues des autres équations; mais
puifqu'on eft alTuré que l'orbice du corps sft toute dans un pian fixe , 00
limplifiera])eaucoup le calcqj Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 14.29% accurate

s s C O M D s P A U S. 26f en prenant ce plan pour celui des » &
y * ce qui doôtietà Alors la croifième équacion deviendra ' ' ^ ^ - ^ Rsmoi
mais Fintégrale de la féconde donne $clf = \dots$; donc fubftitoanc cette valeur de
, Se multipliant enfuice par $Jr^{\wedge}$ on aura une équation intégcable » dont
Tint^rale (èra $\blacksquare + \bullet \sim - \wedge / R dr^{\wedge} Ci$ d'où l'on tire / r ' Zc enfuite équations
fdparées, iL dont rincégradon (bra .connoître les valeurs de ? 6c r en r. La
(econde de ces (équations donnera ' ' • i $\blacksquare$ * la figure de l'orbite » & k
première lâ^pofition du corps I diaque ini^t:. 1 5^ . Pour appliquer cett^.
folurion au mouvement de^ Planètes auloiwr. du Soleil, on i^tfl $R^{\wedge} m^{\wedge} F$,
éfant la force atàaâlTe du folêil îat U Planese-à le diifeance i ; c» qui
donnera /TS foires . Subftituanc cette valeur dans ks équations précédentes,
on Voit que la -quantité fous le (igne deviendra $C4? f^{\wedge}$ qu'on pçu.t.. jnettre
ibus 1^ forme C-h Ll

The text on this page is estimated to be only 14.36% accurate

266 MicH ANIQUB AN ALITIQUB^{^ ^ ^ . i-.)}*; alors la valeur de
df fc trouvera égale à la diffÉrentielle de l'angle , dont Je co(mus fera ; de
forte. qn*on aura en inUgrant introduifant une cpnftante arHtraire d'oïl en
fâifant pour abrégér (m auta.rs)[^] rrzrdriTr» On voit par cette formule que
les plus grandes & pli» l»etites valeurs de r répondent àf =>& à[^] =>-+-i
80°, «C qu'aina dles ibnt fur une même droite. La plus petite Valeur fera ^ -
^{^7-} » & U p'w » la demi-forome ou la 'valeur moyenne fera . » & .1» demi-
diffÉrence fera ; de forte que e fera le rapport de la demi-différence de. ces
valeurs à leur demi-iomme. StOQ fait ^ «=> -f- po°i auquel cas la diredion
de r fera perpendiculaire à la ligne des plus petice^s & plus grandes valeurs,
on aura alors r[^]P' connoStte:.]a:i|fl|ure 4e l[^].iwufbe[^].il n'f a qu'à la
rapporter à deux coordoimé[^], «: .f[^] >;» prises, depuis le centré dès rayons
veàeurs» & dont Tune x foit dans la direction du plus grand layon. On-aoïa
ainfi, ^uifqoe f — > Digitized by Googl

The text on this page is estimated to be only 16.18% accurate

Sbconoe Partie. 26j est l'angle de r avec ce rayon $\angle x$ coC ($p \wedge yj$, $y \wedge r$ Çm($p \wedge y$) $^{\wedge}$ U l'équation $r = \text{ercoCff} = \text{deviendra } K(\wedge^* + y; \text{---}^{\wedge}; c = 3;,,$ laqueUe étant délMe à l'irrationalité monte au fécond degré; 8c donne une section conique. Donc —7- $\wedge$ era le demi-grand axe de la section que nous dénoterons par a, & c fera l'excentricité ou le rapport de la distance entre l'un des foyers 6C le centre i au demi-grand axe, conséquemment j'/tf^* « $V^{\wedge}$ ou ai/ft fera le demipetit axe, & $-\wedge^{\wedge} \text{I}\hat{\text{U}}$. ou $\wedge^{\wedge^{\wedge}} V$ » c'est-à-dire, p fera le demi-parametie. Mais par l'équation entre x on a lorsque — p, donc l'origine des coordonnées est dans l'un des foyers où TcMi fait que l'ordonnée est égale au demiparametie. Ainsi les orbites des Planètes fondees sur des sections coniques, qui ont le Soleil dans l'un de leurs foyers, & leur équation générale est $\pm(iLZ * iL_ a$ étant la distance moyenne, e l'excentricité, & r le rayon Yeôeur, qui fut «rte i» ligne de l'apellée l'an $\wedge^{\wedge} = >. . \wedge'$ Pour déterminer le tems employé à décrire un angle quelconque, il faut intégrer encore l'autre équation $\wedge - T - TT \sim p =$; mais auparavant nous y $V \wedge \sim T "7")$ fitbftitoçons pour A èc ù leurs valeurs en & or & K (« -h JL: ^), donc - 4» $\wedge \text{fgX}^{\wedge} \text{zfl}^{\wedge} C^{\wedge} ('--\blacksquare 0'-, .^{\wedge} \text{wfl}^{\wedge}$ par ces substitutions l'équation dont il s'agit deviendra • LU

The text on this page is estimated to be only 12.24% accurate

a68 MiCHANIQUE analitique. Faifons âscof e, ce qui donne
 rasiⁱ-f^{cof} ^; on aora es X (i H-c cof a;[^] • ; & intégrant r — ^ Or. en
 cooiparant les deux exprelHons de on a — , ^ » , ^ ^ co(\$i d'oîi Ton tîfc
 cof* _cofr»--y)f# • ^ ^ éliminant l, on aura t en fono l — « cof(^f — y)
 (ion; de f & PP^{^*} facilitet cecce éliminaeion, on fqrte qu'en faifânt cette
 combinaiiôn —fj- = 4⁷" 21. On appelle en Ailronomie l'angle f —
 Tanoinalie Vraie, l'angle — V[^]-^ranomalie moyenne, & l'angle auxiliaire <
 l'anomalie éxcenttique; &ie problème de décei[^] miner f — > par eft connu
 fous le nom de problème de Kepler, fin Toit par le» formules précédentes ,
 qu'il ne peut être réfoin rigoureufèmeni ; mais en. fupposknt l'eKcentricité e
 fort petke, comme eOe l'eft dans lesoibicea de-^utes les planètes , on peut
 avoir des foludons aulfi ' approcli[^]es que l'on voudra. On commentera par
 tii[^] de l'équacioii tang ^{^*} Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 13.54% accurate

Seconde Partie. $26^{\wedge} V^{\wedge} C^{\wedge} T T t)^{\wedge \wedge} S^{\wedge} 7$ de f Cfn ce qu'on obtiendra
aifément par le moyen des expreflions exponentielles imaginaires connues.
En effec , en faifanc pour abrégér ($\sim 7^{\wedge} 7$) 6c prenant / pour le nombre dont le
logarithme b^rbolique eft Twiicé, où «m cette tian» Ibiméo laquelle Ce
réduit à cello-d » * • - ^ d'où prenant les logaridunes » on aura rédui&it ces
logarithmes en fërie , £c fobftito^t enfute 4 la place des exponentielles
imaginaires, les finot réels qui j répondent , on aura enfin . . • ' Digitized by
Google

The text on this page is estimated to be only 11.36% accurate

ajO MicHANIQUE ANALITIQUE. o^reffion ibct fimple , dans
 laquelle E fera — ^Tn-Q- t^r«-'0 ou bien Il ne s'agira plus maintenant que
 de fubftituer à la place de A fa valeur ea r -r ^ donnée par T^uacion . • • . Or
 par le cbéorème que j'tt démontré ailleurs, £ l'ona une équation de la forme -
 H /• ô,/*.* étant une fondion quelconque de â , on aura réciproquement Se fi
 • . • dénote une fonâion qoelonque de •» de qu'on 7T faûTe ô = ^î t * >
 **** ^^^^ f — X Ainli il n'y aura qu'à fuppofer u » 7~iir~v — s os « fin I,
 êc e.i a I — a £ fin t^- -^-7— fin al — ' fin 3^ H- &C9 par conféquent en
 changeant ê çn •^7^ finj it!-l*^£ & fubitiitiianc cet valeoKs dans la
 £»rDigitizerfby Google

The text on this page is estimated to be only 17.74% accurate

Seconde Partie. 2^{je} mule précédente, on aura l'expression de $\langle \rangle$. 0
, c'est-à-dire celle de $f \rightarrow$ en w. . . . faisant pour abréger . on aura donc •
* ■ * $f \rightarrow \langle \rangle \leftarrow 1 \text{ fin } K - H - i \wedge \text{ fin } 1 \text{ tt} \leftarrow - i \text{ fin } 3 \text{ le } -4^*$ &c. où il n'y
aura plus qu'à exécuter les différenciations indiquées. aa. Supposons en
fécond lien que le corps fût attiré à la fois par deux centres fixes par des
forces proportionnelles à des fondons quelconques des distances. Soit
comme dans le problème précédent, l'un des centres dans l'origine des
coordonnées, où il la force attractive; fût pour l'autre centre supposons que
sa position soit déterminée par les coordonnées $t, 3, c$, parallèles aux x
7, $\wedge$; soit de plus Q la force attractive » fût $\wedge$ la distance du corps à ce
centre., il est clair qu'on aura # c'est-à-dire , en substituant pour x, y i leurs
valeurs en $4^* (\arcsin 13) 9^* q^{\wedge} V C^{-i} r((a \cos^{-i} - 3 \sin 4-4^* \cos^{\wedge}) - \backslash -$
 $k^*)^{\wedge}$, . en faisant $A = f^{\wedge} a^* b^{\wedge} c^*)^{\wedge}$ distance des deux centres* Il est clair
que la valeur de T sera la même que dans le cas

The text on this page is estimated to be only 18.38% accurate

yf% Mj&chaniquis akalitxquc. blême précédent (art. 17) mais la
 valeur de $f^{\wedge}$ Ce trouvera, aug. mencedutermes/Ç ; 8c comme Çeftbnûion de
 $\wedge$, & $\wedge$ fondion de r, 9, 4 , ce terme donnera dans les différentielles ilfl IL.
 ceux-ci P O . qu'il faudra par confëi^uent ajouter refpëélivement aux
 premiers membres des équations di^iérentielles de Tarcide cité. On aura
 donc pour, le monvemem du corps attiré vers . deux centres par les forces R
 tcQ^ les équations fuivances, — 77 ■♦-V T^r *»® •••• 0) IF 7? hit 4- t^j^
 «o . . . (3), ^ Et fi le corps étoit attire en mcmc-tems vers d'autres centres, il
 n'y auroit qu'à ajouter à ces équacion& dès-termes femblables pour chacun
 de ces centres. : Nous avons déjà Sût voir en général (arc 4)« qnelorTque r
 $\wedge \wedge$ ne coodennent point on « toujouia l'intégrale -4- » confi , laquelle
 renferme la conîervation des fbrcet vives. Elle fera donc, dans le cas
 preicnt, TT? hfRdr-k-fQdqw^X/i , . . (4); & il eft vifibie, en effet, que les
 trois équations précédentes étant multipliées relpedivement par d-^, dfy dr,
 & ajoutées enfemble , donnent ufie équation intégrable » & donc .
 l'intégrale eft celle que nous venons de préfenter. . On Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 16.51% accurate

Seconde Partie.. 273 On tire de cette équation . valeur qui étant substituée dans l'équation (5) , multipliée par, la réduit à $\frac{1}{r^2}$ Or, puisque $q^* = \frac{1}{r^2}$ $\frac{1}{r^2} = \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2}$ (facilement) $\frac{1}{r^2} = \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2}$ « fin 4^, on aura, en faisant varier r, $\frac{1}{r^2} = \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2}$ (in 4 0 r $\frac{1}{r^2} = \frac{1}{r^2}$ ssa • donc substituant cette valeur de $\frac{1}{r^2}$ aura enfin $\frac{1}{r^2} = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2}$ « r+ t/Rdr^Q "l'-" -t- >/ie^g-4^(). Cette équation a l'avantage qu'elle ne contient que les deux variables r & ^, ôc indique en même tems qu'il .doit y avoir une pareille équation entre ^ & r en changeant simplement r & ^* .ainsi que R^Q entre elles; car il est inutile de rapporter le mouvement du corps à un ou à l'autre des deux centres fixes, & il est clair qu'en le rapportant au centre des forces Qy on trouveoit par une analyse semblable à la précédente, ainsi on pourra par ces deux équations» déterminer directement les deux rayons r & r^* .

The text on this page is estimated to be only 20.69% accurate

I⁷⁴ MÉCANIQUE ANALITIQUE. Je remarque maintenant qu'on peut sans rien ôter à la généralité, supposer les deux coordonnées a & b du centre des forces Q , nulles, ce qui revient à placer l'axe des coordonnées Q dans la ligne qui joint les deux centres. Par cette supposition, on aura $c = A$, & la quantité q deviendra f , — x Arfin^H laquelle ne contenant plus $\wedge$, on aura $d;nc-\sim = 0$. Par conséquent l'équation $\{xj$ se réduira à $SIII^HL$ « $o^{\wedge}$ don't intégrale est $II^{\wedge} = \xi$ d'où l'on $\wedge^{\wedge}[_{+} ' :>$ ■ par conséquent en substituant cette valeur, on trouvera de forte que connaissant r & $c^{\wedge}$ en on aura aussi f en r . Or, *puisque fin 4 & sont déjà données en r & $c^{\wedge}$, il est clair qu'on peut réduire l'équation (4) à ne contenir que r & c & alors elle fera nécessairement « à raison de la constante arbitraire JP , une intégrale complète des deux équations (5) & ($>$). En effet, on aura • ■■" • • -. •« . ajoutant dr/U réduisant, il viendra Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 17.19% accurate

Seconde Partie. $\wedge_{jj}$ De plus on aura « $nr > nr$ $\pounds$ $faBt$ ces substitutions $\leq$ dans Téquadon (4), k étant le décomitéateur on aura . . * * 7? $' - \wedge (j^h f^{\wedge\wedge} f^{\wedge\wedge} l e^{\wedge f}) (f R d r^{\wedge} f Q d f^{\wedge} x A)^{\wedge o}, , (8)$ Et il est facile de voir maintenant d'après I.1 forme de cette équation, quelle résulte des équations (5) & (6) multipliées respectivement par $x d . r^{**} - (\wedge - + - h^*) d \setminus q^* \wedge a r^* d, q^* - (r' - \wedge q^* - h^* J d . r^*, .$ ajoutées ensemble & intégrées ensuite; mais il aipit.été ailez difficile de découvrir cette intégrale à priori, 1 3 . Pour achever la solution , il faut avoir encore une autre intégrale des mêmes équations; mais on ne fauroic y parvenir que pour des valeurs particulières de A & Q. . ' Si on suppose» ce qui est: le cas de la nature » -jR a $\pounds s = s$ i on trouve alors que l'équation (5) multipliée par $d, f^{\wedge\wedge}$ ajoutée .à l'équation ((S) multipliée par $j^{\wedge d} r^*$ donne une forme intégrale dont l'intégrale est $\bullet d, r^* x d . q^* - \bullet d^{\wedge} - \wedge l^{**} \wedge) ' ' ' ' * d t^* r f - \bullet \dots j$, Cette équation étant fluhnpKée $' \wedge n i K' f^{\wedge} \wedge \wedge 9 c$ ajoutée à l'intégrale (8). trouvée précédemment , donne dans l'hypothèse présente une réduite de la forme - $\bullet M m a$

The text on this page is estimated to be only 12.35% accurate

MÈCHAKIQUE ANAUTIQttE. Et la même équation étant multipliée par $tr^{\wedge}$, & ensuite ajoutée à celle-ci ou retranchée, donnera cette double équation $^{\wedge} . ' ' . \pm r)' - lf(q \pm r)) \text{---} A((r \pm l)' - ^{\wedge} > \blacksquare T^* - C(r \pm ^{\wedge} \text{---} jB' (iij. De forte qu'en \&ifant } r^* + - j \lll i, r \text{---} on ann ces denz-d \gg d'où l'on tire d'abord cette équation féparée, \bullet \blacksquare du . _ * ensuite . . s^* ds ^ . - M^* d'il .. . toSn rëqoatioa (7) d\ll viaidrft, \ll A cmployint k \gg mlincl fid)fticiitk \gg it \gg Digilizecl by Google$

The text on this page is estimated to be only 15.75% accurate

Seconde Partie. 177 4B A' / I L—'N • de ptif çQnféqtçnc elle donne» . . ." i! ' Si on pouvoit intégrer ces différences différentielles, on auroit d'abord une équation entre ihL en suite on auroit I & f en fonctions de j & donc on auroit f » & de 4 à & ^ en fonctions de r; fie çomme fin 4 =» > ®û auroit au(C 4 en r. Mais ces différentielles ie rappohfctc à la feâificationⁱ des (êâions coniques, on ne (àaroit les imëgret que par approximation» <c la meilleure méthode pour cela eft celle que. j'ai donnée ailleurs pour l'intégration de toutes les différendellês qui renferment un rs|dicat carré oft larariable' monte \: la quatrième dlmenfion fbbs' le figne. ' ~ Si outre les deux forces & qui attiient la cofps ▼ers les deux centres fixes, il y avoit une troifieme force proportionnelle à la diftance qui l'attirât vers le point placé au milieu de la ligne qui joint les deux centres, il efl vi* fible que cette force pourroit fe décomposer en deux tendao* ' tes àozmfmes points» &'propoirtionnelles atiffi aux diftancesⁱ Paiⁱ ce cas donc on ^uroit/ⁱ=a-ⁱ<+i xtr, le fon tronverôit que l'intégrale (91) ânxoic «uffi Jieii daiui ce cas f ièolemènc il' firadroit ajouter à ion premier membre les tetmes

The text on this page is estimated to be only 13.97% accurate

i/t MéCHANIQUE AKAL'ÏTIQUE. enfuice il y auroit à ajouter
au prentieF membté de l'^ua' don (lo), les termes . . — — - - - « . <• & par
conféquent, au premier membre de l'équatîon (ii), fes termés" •^■'--••^ ' «rn
' :.r,,; .. . , » « X ({r±f/.-. h'(r ± ,/). ■■■■■■■■ ■ Dft iottç qu'il n'y iigura qu*à
augmenter les polynômes en l\^ ià. fous le %ne radical des -termes
rerpe^iift.. . ' ; î ^« '■% • •*• • .. te qui ne' rend gueres la iblucion plus
compliquée. 24. Quoiqifii.foic imponible d'intégrer jpn général l'équadbn
trouvée encre ^ & & d'avoir par conféquent une tdâtfoh finie ebtrë ce^^
deaX VâriabW» on peut néanmoins eifawtf 4ciiximégtale&pariâ^
repréfèat^par^s^cA^ 9ç,M^ cor^.i fiq ^^t» H on" repf;ëfent0 en giépffral
cette éqiatton par -^sar'y^, il cft élsât ^u^eile aura auffi^ièn en faifant Js ou
</2» nuls, pourvu que les dénominateurs f/" S ou y/" U foient auffi nuls en
même tems, & du même ordre. Pour déterminer les, conditions néceffairès
dans ce cas, on fera j ==/'-4- «,/ étant une conf tante, & w une quantité
4^tiainei)C p^i^cet. & .défignanp^ pai; ./^ ce quç .envient S lorfq'on
change s en le membre -^jHdenendni Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 20.53% accurate

Seconde Partie. ay^2 ; il Éiudra donc pour ^{u} il y aie le mcme nombre de dimenfions de « en haut & en bas $^$ que l'on aie $Fsao^2$ & a 6; alors à caufede • infiniment petit, la différentielle dont il s'agit s réduira à ^prfl dont l'intégrale est $— x/2$; * étaUc une confiante arbitraire. Si donc on fait « = 0, & qu'on " prenne en même-tems aufi $As=0$, il est vifible que la valeur de $/ — ^$ deviendra indcterminee j ôc l'équation pourra toujours fubfiAer , quelque valeur que puillè avoir l'autre .membre $J^{~'}j/-' ^y$ & il est vifible par foi-même que $F= 0 = 0$, font les conditions qui rendent/* une racine double de l'équation F^0 . D'où il s'enfuit en général que ù. le polynôme S a une ou plufieurs racines doubles , chacune de ces racines fournira une valeur particuliert $^$ de 5; il en (êra de même pour le polynôme V^* Maintenant il estvihble que l'équation $s =/''$ ou $r+-y — f$ représente une cilipfe , dont les deux foyers font dans les deux centres des rayons r èc q , èc dont le grand axe est; égal à f . De même l'équation $u = g o\backslash x r — <i ^ g$ représente «ne Kyperbole dont les ibyers font dans le même centre « .& dont le premier axe est Ainfî les feintions particulières dont nous venons de parler, donnent des ellipfcs ou . des hyperboles décrites

The text on this page is estimated to be only 26.29% accurate

So MICHANIQUE ANAZ. ITIQUE* Mtour' des centres des forces pris pour foyers. Éc comme les polynômes S & F' contiennent les trois constantes arbitraires A^B & C dépendances de la direction $^$ de I .i vitesse initiale du corps, il est visible qu'on pourra toujours prendre ces éléments, tels que le corps décrive une ellipse ou une hyperbole donnée autour des foyers donnés. Ainsi la même fonction conique qui peut être décrite en vertu d'une force tendante à l'un des foyers en raison inverse des carrés des distances $^$ ou tendante .au centre en raison directe des distances, peut l'être encore en vertu de trois forces pareilles tendantes aux deux foyers & au centre ; ce qui est très-remarquable » a 5 • $^$ centre des forces Q dont la position a été déterminée en général par les coordonnées a^b^c (art. 21), n'étoit pas $Hx^e^$ mais qu'il eût un mouvement connu » alors ' ces quantités $a, ^, ^$ ne (eroient plus constantes , mais de» viendroient des fonctions du temps t . Cependant il est visible que les équations (1), auroient lieu de même » puisque la quantité F resteroit la même, ainsi que fêssent des différentielles relatives à $r, 4, 9$; mais l'intégrale (4) r'uroit point lieu , comme nous l'avons déjà remarqué en général dans l'article 4. Il n'en (eroit pas de même si on vouloir que le centre des forces auquel nous rapportons le mouvement du corps, fût lui-même en mouvement. Alors pour avoir les coordonnées relatives $x, ^, \backslash$ du mouvement absolu du corps, il faudroit prendre la somme de celles de ce centre rapporté à un point fixe dans l'espace , &c de celles du corps rapporté à ce même centre, _ Ainsi Digitized by

The text on this page is estimated to be only 17.20% accurate

Sbcqndc Partie, a8r Ainf nommant X, V, Z les coordonnées pour
 le centre des forces Ry & reprclentaac comme ci-deflus le mouvement du
 corps autour , de ce centre par le rayon & les deux angles θ & ϕ » on auroic
 dans le cas préfènc $x = X - r \cos \theta \cos \phi$, $y = Y - r \cos \theta \sin \phi$, $z = Z - r \sin \theta$;
 d'oiiTon rirè $d^2x/dt^2 = -g \cos \theta \cos \phi$, $d^2y/dt^2 = -g \cos \theta \sin \phi$, $d^2z/dt^2 = -g \sin \theta$
 lUrd.Crcoi[^] Cm p) -4- $X dZ/dt$, fran 4; H- /^{*} $j^2 \cos^2 \theta$ d4[^]) -4- VA De force
 qu'il faudra ajouter à la valeur de T de Tarcicle 17, la quantité '*** 5*» "
 laquelle étant désignée par T' , on aura donc à ajouter aux .ccois cquacioDS
 de l'article cité» ou plus généralement à celles ^ Tardcle 21, les termes * •
 "734" "7F " "WfT " "77"» • "îSr "77"» A l'égard de la valeur de elle
 demeurera la même , pourvu qu'on continue à prendre le centre des forces R
 pour l'origine commune des coordonnées a» ^, c des autres centres. Or en
 fegaidancle mooyement du centle comme coniuu » {es coofdomiées JT, J[^], 2
 doivent être considérées comme des fondions données de f. Ainf la partie
 Nn

The text on this page is estimated to be only 19.54% accurate

a8a MÉCHANIQUÉ ANALITIQUE. Àt Texpredion de T fera une iimple fonûidnde & s'évanouira dans la diffèrebciaion par A IlTufEra doncde prendre pour T les autres termes ; & d'après la remarque faite dans l'article 7 de la Sedtion quatrième, on trouvera facilement que les termes à ajouter rcfpeclivemûnt aux premiers membres des équations CO» (0>(3) de l'article xx feront , $\sqrt{x} - r \sin 4 \cos H - \sqrt{x} - r \sin 4 \cos t - \sqrt{x} \cos 4$, $\sqrt{x} - r \cos 4 \sin xz - \cos^4 \cos^9 - 4^4 - X \cos^4 \sin^* - + - x \sin 4$. Si le mouvement du centre étoit uniforme 6c réailigne , on auroit alors $- * s o$, $-j^4 = 0$, a. o ; & ies termes précédens s'évanouiroient d'eux-mêmes. Dans tous les antres cas ces termes rendront les équations du mouvement du corps plus compliquées & plus difficiles à inté- • grer; comme l'expreflion de Treniermeni toi^ours le temt. c à rail on des quantités , $\sqrt{x}$, l'intégrale $T^4 F'$ ' esfonfi;, n'aura jamais lieu. a 6". Nous avons fupposé jufqu'ki que le corps étoit cnttéiemenc libre. S'il étoit xcmcraint de fe mouvoir fur une îurface courbe donnée» le taylor r ferok alors une fonOion connue de f & 4, qui contiendrait aufli dans le cas ehkfnf^Ke^le^même fefôic «««iable, tm fenkinenr mohîi^ fuivant une Un donnée/ H n'y anroir donc ^% &bftitner <««tte valeur de r dans les éiciireffions de TtL àt F9 &L faire varier enfuice les deux variables 4 ^ onanioïC Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 14.89% accurate

Seconde Partie, 283 ainsi deux équations qui (serviront à déterminer le mouvement du corps. Si r est égale à une constante ou à une fonction simple de t dans 4ⁿⁱ; les variations de cette quantité relatives à la caractéristique «f seront nulles, & l'on aura alors les équations (i) 6c (z) de l'article ii, dans lesquelles il faudra substituer à r la valeur donnée. Ce cas renferme en général la théorie des pendules de longueur constante ou variable. Imaginons en effet un pendule simple dont la longueur soit r , & qui soit suspendu au centre des rayons r . Supposons les forces K dirigées vers ce centre, nulles; & les Arcs ζ parallèles, en éloignant leur centre à l'infini. Prenons enfin pour une plus grande simplicité, l'axe des ordonnées vertical, & dirigé de haut en bas, & les forces Q dans la même direction, on aura toujours, $\frac{d^2r}{dt^2} = 0$; donc $\frac{dr}{dt} = 0$ — 1. A la fin $r^{*5} = A r^{*4} y$ & les équations (i) & (ii) de l'article cké deviendront $-t - \frac{1}{2} p^2 \hat{t} - \frac{1}{2} \zeta r \cos. 4 = 0$. o. L'angle 4 exprimera l'inclinaison du pendule à l'origine; il l'angle t sera celui. ^il décrit en tournant autour de t * La seconde équation donne d'abord * $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{r}$, » & cette valeur étant substituée dans $\frac{d^2r}{dt^2} = 0$!^ % on • Nna

The text on this page is estimated to be only 21.95% accurate

284 MÉCHANIQUE ANALITIQUE, Si r 6c Q (ont confians
comme dans les pendules ordinaires » Q désignant la force de la gravité»
l'équation précédente devieiiAntégrable étant multipliée par r^4 ; 8c Ton a
alors $\frac{d^2r}{dt^2} + \frac{Q}{r^2} = 0$ Ton tire U en fuite $\frac{dr}{dt} = \sqrt{2Qr}$ Mais ces
différentielles en r ne font point intégrables à moins de supposer que les
Variations de r ne soient très-petites». Cependant on peut démontrer par un
raisonnement semblable à celui de l'article 14, que la valeur de r peut être
constante, pourvu qu'elle rende la quantité sous le signe nulle, ainsi que la
différentielle i c'est le cas où le pendule décrit la surface d'un cône droit.
Si le rayon r est variable, comme lorsqu'on demande le mouvement d'un
poids suspendu par un fil qui se raccourcit ou s'allonge suivant une loi
donnée l'équation n'est plus intégrable en général; mais elle le feroit dans
le cas malheureux où la force Q feroit réciproquement proportionnelle au
cube de la distance au plan horizontal qui passe par le point de suspension.
Car faisant $Q = \frac{c}{r^3}$, & multipliait toute l'équation par $r^{\frac{5}{2}}$ on auroit
l'intégrale. I Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 16.60% accurate

Seconde Partie. a8; d'où $IV > n$ tireroic $dt^6 c$ en fuite df ea
fonâipns diiFéren<tiéUes de 4. En général si on représente par $Z = 0$, la
surface sur laquelle le corps doit se mouvoir, L étant une fonction donnée de
 r, θ , «p & / ; il n'y aura qu'à regarder cette équation comme une équation
de condition, qui doit avoir lieu entre les variables r, θ ; & ajouter par
conséquence aux premiers membres des équations (i) de rôle ix, les
termes $-j^{\wedge}y^{\wedge} - 7^{\wedge} \rangle^{\wedge} "JT >^{\wedge}$ quantité indéterminée, qu'il faudra éliminer,
en sorte qu'il ne restera que deux équations, qui combinées avec l'équation
 $L = 0$ serviront à déterminer complètement la courbe & le mouvement
du corps. Mais si la courbe même dans laquelle le corps doit se mouvoir
était donnée, on aurait alors deux équations, $X = 0$ & $^{\wedge} = 0$; & il faudrait
ajouter respectivement aux premiers membres des équations
différentielles, (i), (2) & (3) * « termes $x -^{\wedge} x - 4 -^{\wedge} -^{\wedge} X 1 \rangle -^{\wedge} j^{\wedge}$, les
deux quantités x & f étant indéterminées, & devant ensuite être
éliminées. Lorsque L & M ne contiennent point f , on aura sur le champ
l'intégrale $T^{\wedge} V^{\wedge} c o D f t, : < \rangle$ ut est en même temps délivrée de Δ & $^{\wedge}$; «mais
cette intégrale n'aura point lieu lorsque le temps / «qu'on a dans les équations
de la surface ou courbe donnée.. * . •

The text on this page is estimated to be only 18.06% accurate

a8^ MéCHANIQUE ANALITIQUE. De cette manière*on
trouvera très^facilement les équations pour le mouvement d'un corps dans
un tube mobile félon une loi quelconque, problème dont la Solution par les
méthodes ordinaires est aflèz compliquée. §111. Du mouvement de
plufieurs corps qui agijferu Us uns fur les ■ autres , fou par des forces
d'attroBion , fou en fc tenant par dti fils Oit par dis Leviers^, 27* Nous
nommerons $m^{ml} m^{\backslash}$ &c, les mafles des difi^cens corps du fyftême,
regardés comme des points, x^y^X ks coordonnées reétang^es du corps m,
 $x', y, ^\ll$ celles du corps né y ^ ainfi de fuite, ces coordonnées étant toutes
rapportées aux mêmes axes fixes dan^Telpace; Zx: pour mieux fixer les
idées , nous rупpofermis toiieiirf les axes des x & y horifontaux , & les
axes des \ verticaux &; dirigés de haut en bas. Nous employerons d'abord
CCS coordonnées dans les formules générales, mais nous les
transformerons enfuice en d'autres plus appropriées à la nature des fyftêmes
propofés. Oa aora donc en général Noms nommerons de plos P, &c, les
forces accélératrices «vec lefqœUes chaque point de la mafle ai tend vett
des centres donnés fixes oa iioD,-en pienanc, fi fon fent, la force
accélératrice de la gravité pour Taniiei & ncNit * Digitized by Google'

The text on this page is estimated to be only 16.00% accurate

Seconde Partie. Soit supposons ces forces proportionnelles à des fonctions des distances respectives, $\frac{1}{r^n}$, $\frac{1}{c^n}$, du corps m à ces centres. Les mêmes lettres marquées d'un trait représenteront des quantités analogues relativement au corps et ainsi de suite. On aura ainsi. Et si les corps sont animés par une force verticale & constante*» telle que celle de la gravité, alors P , P' , &c, feront &c «deviendront — $\frac{d^2}{dt^2}$ — $\frac{d^2}{dt^2}$ icc , à cause que les $\frac{1}{r^n}$ diminuent en montant. Conséquemment on aura dans ce cas, Quant aux attractions mutuelles, il est clair que si R exprime rationnellement la force accélératrice avec laquelle chaque point de la masse ^{A} est tiré par chaque point de la masse ^{B} la force totale avec laquelle chaque point de m tend vers le corps ou centre m' sera exprimée par mR . Ainsi nommant r la distance entre ces deux corps, on aura mR pour le terme dû à cette attraction dans la valeur de & ainsi des autres. Enfin si après avoir introduit dans les fonctions T et V de nouvelles variables f , g , h , chacune d'elles est indépendante des autres; on aura relativement à ces dernières variables, des équations de la forme $\frac{1}{T} \frac{d^2}{dt^2} f = -\frac{1}{4} f - \frac{1}{2} g^2 - \frac{1}{2} h^2 - \dots$ si W variables doivent encore être ajoutées au système d'équations, il y a W équations de la forme $\frac{1}{T} \frac{d^2}{dt^2} f = -\frac{1}{4} f - \frac{1}{2} g^2 - \frac{1}{2} h^2 - \dots$

The text on this page is estimated to be only 21.39% accurate

a88 MéCHANIQUE analitique, chaque variable | donnera pour le mouvement du corps l'équa* tion di&rencielle» les quantités $h-Uc^{\wedge}$ éunc indéterminées, & devant être éliminées. Et Ton fe fouviendra que fi les fondions $VJt^{\wedge} M \backslash tcc$, ne renferment point le tems t , on .aura toujours l'intégrale $7^* \wedge - \wedge s \text{ conf}t^{\wedge}$, laquelle renferme le principe des forces vives ; mais que cette intégrale cédera d'avoir lieu, fi la variable finic t entre dans Tune ' des fondions dont il s'agit. 2 g. Cela pofé > tonfidérons d'abord deux corps $m \text{ \& } c \text{ jm'}$ qui s'attirent mutuellement avec une force abfôlue $J?$ » & fuppofons qu on ne demande que le mouvement du corps autour du corps m . Nommant |, «9 C les coordonnées rectangles du corps fnf par rapport au corps m pris pour centre, ces coordonnées étant, rapportées à des axes parallèles à ceux des $3c, \wedge$, & paflant par le corps m -on aura -4- $f, y^{\wedge}y-i-n^{\wedge} \wedge=i^{\wedge}t^{\wedge}$ Ç; Donc, 1% On aura $r- fm^{\wedge}m'J^{\wedge} \wedge .y^{\wedge} \wedge V H-/\rangle$ "T-m $\wedge i \backslash$ On aura $V^{\wedge}mnêfKdry$ en fâifant Mùntenant comme les variables $x, \wedge, \wedge$, font indépendances encr elles & des autres » $\wedge$ chacune de ces variables Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 11.40% accurate

S'econde Partie, i8p riabiles fournira une éqoacion; 6t ces
 équations^feronc (m -H m'J ■+• » o, d*oit Ton tire , en intégrant , dy m* f
 dn ' > x dt m^m' iir -♦-^« Ces valeurs étant fublUcu^es dans l'exprei&OQ
 générale de 7» elle deviendra ' rj, mm' ^ aT-f-a'r'-f-^;:* , ' a' -f- -f- <;» ^ ^ =
 ^ . » ^ ainfi T &c Vne contiennent plus que les variables ^ , » , Ç de l'orbite
 de m' autour de m, ♦ Si donc on nomme r le rayon vecteur de cette orbite, 4
 rinclinaifon de ce rayon fur te plan des | & i»; fie f l'angle de fa projeéHon
 fur ce plan aVec l'axe des |» on aura , comme OA Ta déjà vu, Ç Œ r cof -l
 cof ♦ , » rcof 4 fin f , C = /■ fin 4 ; & de là i/r-Hi/.*-* - dC^i^ (cof 4' dp^-
 ^dVj-hdr'. Aiaii faifant T « — -r x — j ^ • (fomecs la oonftaotei parce
 qu'elle difpaioît dans lesdîfiSS*Oo • Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 17.82% accurate

apO MéCHÂNIQUE AMAtlTIQUE. renciationsj & $V^{mm'f^{dr}}$
 les variatioxis de 4» f & f donneront» après avoir divlfé coui h» termes par
 $m m 3? \# \_ ^ \text{---} A = \gg oi ^ nations$ qu'on voit être fêmblables à celles que nous
 ayons déjà trouvées & réfblues pour ^le mouvement d'un corps attiré vers
 un centre fixe (art. 17); de forte que le mouvement fera le même dans les'
 deux cas, en fuppofant la. force dirigée au centre iixe, exprimée par $(m -$
 $^m'JR$, a p. Suppofons enfuite trois corps jr, m\ m' qui si*attîlent
 mutuellement; favoir m 8c y par la force accélératrice $Ry m \& w''$ par la
 force R' , Sc m' èc m'* par la force qu'on ne demande que le mouvement
 relatif .de. ces corps. . Confervant les diânominaçons de Tarticle précédent
 rela« dves aux corps m 9c nf^ foit de plus» pour le corps /» f les
 coordonnées xe^bngles rapportées au corps m comme au centre; on aura
 $jc'^{bs} 7$ Donc !• T «Y« H- V; -^^^^^ , ' dt* ^ x4t* • rfi» • fat . . , ^, » ' • • l»/
 Digitized by CoogLe

The text on this page is estimated to be only 9.33% accurate

Seconde Partie. 2¹ en faifanc $r = V \frac{4}{4} \frac{Ty}{j} ; j \frac{f}{f} \frac{-t}{-t} \frac{-l}{-l} \frac{-C}{-C} \frac{A}{A}$
& $f = 1^{\wedge} - 1 ; \gg \wedge . \wedge H - -0')' \bullet$ Puisque les variables \ font indépendantes , tant
entr'elles que des ai^icres variables , leurs vadatioiis fournirooc d'abord d«s
é<juadons de cette forme» n A a tire, en intégrant — dt Ces valeurs étant
fubfUtées dans l'expreâion générale de la réduiront à celle<i »
dUX^M^JiriW m' m" M» -f- ^' -t. tf» Ooa

The text on this page is estimated to be only 16.80% accurate

ipa MicHAKiQUE aîla'litique. laquelle ne contient plus que les variables $\theta, \phi, \psi, \chi, \lambda, \mu, \nu, \xi, \eta, \zeta, \delta, \epsilon, \gamma, \beta, \alpha$ qui entrent dans la fonction V et qui expriment les mouvemens relatifs de $m' U m''$ autour de m . Comme ces fix variables sont indépendances entr'elles en pourroit d'abord en les faisant varier. séparément avoir fix équations différentielles entre ces variables; on pourroit auili réduire l'expression T en fonction des rayons vecteurs r, r', r'' & des angles $\theta, \phi, \psi, \chi, \lambda, \mu, \nu, \xi, \eta, \zeta, \delta, \epsilon, \gamma, \beta, \alpha$ par les substitutions de $\theta = r \cos \phi \cos \psi, \phi = r \cos \theta \cos \psi, \psi = r \cos \theta \cos \phi, \chi = r \sin \theta \cos \phi, \lambda = r \sin \theta \sin \phi, \mu = r \sin \theta \sin \phi \cos \psi, \nu = r \sin \theta \sin \phi \sin \psi, \xi = r \sin \theta \cos \phi \sin \psi, \eta = r \sin \theta \sin \phi \cos \psi, \zeta = r \sin \theta \sin \phi \sin \psi, \delta = r \sin \theta \cos \phi \sin \psi, \epsilon = r \sin \theta \sin \phi \cos \psi, \gamma = r \sin \theta \sin \phi \sin \psi, \beta = r \sin \theta \cos \phi \sin \psi, \alpha = r \sin \theta \sin \phi \cos \psi$. Mais il est facile de prévoir que ces équations ne se présenteroient pas sous la forme la plus simple, du moins pour les termes différentiels, à cause du mélange des variables dans l'expression de T . Pour séparer ces variables, je donnerai à T cette forme, • • • • •
 $T = \frac{1}{2} m' \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m'' \dot{r}'^2 + \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m' m'' \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m' m'' \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} m' m'' \dot{\psi}^2 + \frac{1}{2} m' m'' \dot{\chi}^2 + \frac{1}{2} m' m'' \dot{\lambda}^2 + \frac{1}{2} m' m'' \dot{\mu}^2 + \frac{1}{2} m' m'' \dot{\nu}^2 + \frac{1}{2} m' m'' \dot{\xi}^2 + \frac{1}{2} m' m'' \dot{\eta}^2 + \frac{1}{2} m' m'' \dot{\zeta}^2 + \frac{1}{2} m' m'' \dot{\delta}^2 + \frac{1}{2} m' m'' \dot{\epsilon}^2 + \frac{1}{2} m' m'' \dot{\gamma}^2 + \frac{1}{2} m' m'' \dot{\beta}^2 + \frac{1}{2} m' m'' \dot{\alpha}^2$
 • • • • • Digilized by Google

The text on this page is estimated to be only 12.40% accurate

Seconde Partie. " 293 on aura $7^{\wedge}$ & F exprimées en fonction de $e^{\wedge}, \ll, ^{\wedge}, *, i8, ^{\wedge}$; & ces variables étant au C indépendantes contr'elles., fourniront autant d'équations différentielles. Introduisons maintenant au lieu de $e, \gg, ^{\wedge}$ le rayon r & les angles θ & ϕ , félon les formules données ci-dessus, la $\sqrt{V/\wedge^{\wedge}^{\wedge}}$ de k valeur de r deviendra «HTM' $\wedge * \wedge$ — S & c'est la seule qui fournira des termes dans les équations dépendantes des variations de r, θ & ϕ . Regardant donc aul' / & r'' comme fonctions de ces mêmes variables, on aura d'abord ces trois équations, $m^{\wedge} m^* \backslash^{\wedge} T^{\wedge} \bullet)^{\wedge} mm'' B! \sim -$ $\wedge m^{\wedge} m' R . \_ / \_ // n // ^ >'' - j^{\wedge} mm El ^$ Et pour avoir les valeurs de $\wedge / \wedge / r''$ en $\wedge 4, j^{\wedge}, /r$, il n'y a qu'à considérer que $\wedge . Tr'ss h- \ll J^{\wedge} Z-i- < f \zeta^{\wedge} \wedge \wedge \zeta i^{\wedge}$ qu'en faisant abstraction de la variation de $m-i- m' ' fl \gg m' . ' , \bullet in^{\wedge} fl.' ^ HOT/w'/C'-$ $j — m'' R'' ^ = o mm'$ Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 8.61% accurate

ip4 MicHANIQUE ANALITIQUE. Or en substituant pour », C
^eurs valeurs, & mettant au lieu des valeurs semblables à la place de c'eû-
adiie , en représentant par $z^{\wedge}$ le mouTemenc du cotps ni' autour de ;n
par le rayon vedent $z^{\wedge}$, & par ks angles $4' \wedge f^{\wedge}$, on trouve $r^{\wedge 1} - 4 - \ll V. \gg 4 - = \gg$
 $\diamond \wedge^4 H - \diamond - 4 - n$, en supposant pour abréger $\wedge^{\text{marr}} * \wedge^{\text{fin}} 4' \text{ cof } 4 - \text{ cof } 4'$
Tm 4 Qoi(*' — 9)J « acr/ cof 4 cof 4' fin — n «y ($\wedge^{110} 4' \text{ lm } 4 H - \text{ cof } 4' \text{ cof } 4$
ÇoC — f)) \ de force quQn aura * Ainil les équations précédentes
deviendront en les divisant par m-Hi»' > 7? " * " 7? ^ \ r» ^ . « V * ^ » . 27^
T^J'^^^* Jefe^ueUes ont, pour les termes diffinitifs la même forme /
Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 19.88% accurate

Seconde Partie. que cellcs-tlo mouTenieDC d'un corps attiré vers
ua centre fixe. • . • On peut rrbuver de la même manière trois équations
femblables pour le mouvement du corps m" autour de fc même comme
dans les expreflionis de 7* & de ^, les quantités relatives aux corps ni U,nf.
font permutables entr^elles, il fttffira <(e changer dans les équations
précédentes « les quantités r, 4» f, J{ £c ff/ en r\ 4'» f^» K 8c in", ec
réciproquement eelles-ei en celle»-} à ; la quantité f demeurant la même,
puîfqu^elle* appartient également aux deux corps dont elle exprime la
diftance. S'il y avoit plus de trois corps qui s'attiraflênt mutuellemeotyOn
réfbudroit toujours le problème de la même manière, flc Ton trouveroit des
équations fèmbables aux précédentes, mais augmentées des termes- dus
aux attràdions de tous les autres corps. Ettfaifant dans ces équations $R = B!$
« -jj^, . . , . Jt»«-.._L. ^ &c, on a le cas du mouvement des Planètes, en tant
qu'elles s'attirent mutuellement, & font* attirées par le Soleil Et & oa prend
m pour la Terre, n^pour b Lune, 8c td* pour le Soleil^ les trois équations
trouvées ci-defliu deviendront celles du problème connu (bus le nom de
Problème des trois corps , & dont les Géomètres (e font tant occupés dans
ces derniers tems. La circonftance des orbites de la Lune & du Soleil
prcfque circulaires , le rend fufceptible d'être réfolu par approximation, &:
l'on peut voir dans les oi}vrages où Ton en traite , les artifices qu'on a
imaginés pour rendre rappcoximâiion ktfffi exaâie^u'il eft poffible.

The text on this page is estimated to be only 17.27% accurate

ap6 MicHANIQUE ANALITIQUE. 30. Imaginons maintenant <^e les trois corps m, m', m'' ^âttlieudes*attirerentr*cuxt soient pefans & unis par un fil inextensible; de manière que m' & m'' soient attachés aux deux bouts du fil & que m soit dans un point quelconque intermédiaire; & qu'ainsi les distances entre m' & m'' y demeurent nécessairement invariables. En faisant $x' = x$, $y' = y$, $z' = z$ & $x'' = x - h$, $y'' = y - k$, $z'' = z - l$ C'est on trouvera pour T la même expression (a) de l'article précédent. Et la valeur de F sera comme dans l'article 17, en exprimant par » la force accélératrice de la gravité. Comme la seule condition du problème consiste dans l'invariabilité des distances entre m & m'; & entre m & m'' & que ces distances ne dépendent que des variables x, y, z , x', y', z' , il est clair que ces variables x, y, z sont indépendantes entre elles & de toutes les autres? par conséquent en les faisant varier séparément, on aura d'abord trois équations qui seront les mêmes que les équations (a) de l'article précédent, si ce n'est que la troisième contiendra de plus les termes constants $-w$ (m H - w - t - $\frac{1}{2} g t^2$). De-là on tirera pour z les mêmes expressions que dans l'article 17, en mettant à la place de c la quantité $c + \frac{1}{2} g t^2$ (m - $\frac{1}{2} g t^2$) t. Donc on aura au/Ti pour T la même transformée (c), en ayant soin d'y diminuer la quantité $\frac{1}{2} g t^2$ de $(m - \frac{1}{2} g t^2)$ t. Préférerait si on fait | se r cof 4 cof ^ « « r cof 4 fin ♦ \$ r = s riin4 > éc de même f aa/cof 4' cof fVas/cof4'fin»» Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 15.95% accurate

Seconde Partie. $\bullet$ 297 f as $\gg r'$ fin 4', il est clair qu'« les rayons
 vecteurs r des orbites de m' de m'' autour de m » c'est-à-dire leurs distances
 de $7z$, devront être constants par la nature du problème sainii* en fait ces
 substitutions, il n'y aura <pe quatre variables $\gg 4$ $\gg 4$ i f $\gg r'$, qui étant
 d'ailleurs indépendantes $\gg$ ioumiiionc au/fin quatre équations. 3 I* Comme
 la recherche de ces équations n'a point de difficulté, ne demandant qu'un
 calcul purement mécanique ; bornons-nous au cas où les trois, corps se
 n'ont pas dans le même plan horizontal, lequel a l'avantage d'admettre une
 solution complète. On fera donc dans ce cas $\{(\dot{r}^2, \dot{\theta}^2, \dot{\phi}^2)$ par
 conséquent $B \dot{\phi}^2$ nuls. Ainsi on aura F'_{so} , $\dot{\theta}^2 = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta})$ $\hat{=}$ $\frac{1}{r^2} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta})$
 $\dot{\phi}^2 = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{d}{dt} (r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi})$ $\hat{=}$ $\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{d}{dt} (r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi})$,
 puis $\dot{\phi}^2 = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{d}{dt} (r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi})$ $\hat{=}$ $\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{d}{dt} (r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi})$,
 nuls. $\dot{\phi}^2 = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{d}{dt} (r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi})$ $\hat{=}$ $\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{d}{dt} (r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi})$,
 variétés de p & de q ces deux équations différentielles; d'où dépend
 la solution du problème

The text on this page is estimated to be only 11.86% accurate

■.) ap8 MÉCHANIQUE ANALITIQUE. $m'(m^{-m}j^*, 2^m n^f$
 $rr\{^{\wedge} -j^{\wedge} \text{ — — «ft tîfibk}^{\wedge} \text{ la iboMiie de ces deax}^{\wedge} \text{uadeiis cift incégrable, \&$
 que Con intégrale eft » ■ O[^]aiileurs puiifqiie T ne renfone point r , de que
 o» on aata l'intégrale $r^* = \text{çonft}$; de forte que par ces deux intégrales le
 problème eft déjà réduit aux premières différences. Mais comme Jes
 indéterminées font encore mêlées entruelles , pour les féparèr , on fera
 $^{\wedge} \text{^} \blacklozenge = sj \& ^{\wedge} \text{ — } ^{\wedge} = m$; favoir, » $-\text{^} \text{^} tL. ^ f.$ » ; les deux intégrales de- ' viendront
 par ces.fubftitutions,. : $m'(m^{\text{'}}m'') (ds \text{ — } du)^{-m''} (m^{-m'}) (ds \text{ — } du)^{\wedge} \text{■ } ^ X$
 $m' m'' r / coU (ds^* \text{ } ^ du') Bdt \backslash AicB$ étant deux conflanses arbitriôres. ■
 Soit pour abrégèr M M'Y» «7/' H- »Y«» -t ""-^ » Digiiiizea by Google

The text on this page is estimated to be only 17.10% accurate

Seconde Pautis. app on aura * fM—'i m'm" r/coiuJds-^N dn^Adt,
CM -^xm^mf r/coCuJds^-i- (M^x m')»" r / çoÇu) du* la piemieie donne ds
« M^t'jJtf!^^ » ^ leur étant fbbftitoée dans la féconde , on aura (A di —
Ndu/^(M" —41»" ^"r* r'* Qoçu*)dtâ
^^N(Adt^Ndu)du^B(M^xnéii^r^€oçu}dt\ . favotr, en réduifant (M*'N*-
^né'*i*t^cofiâ)diâ^: ^M^J^^2ii^n^Wço{i^âi d'où Ton cire & mettant cette
valeur de dr dans X^T^t^on précédente de ^5 on aura auffi ds exprimée en u
êL du, ■ , • » • ' Ainû le problème eft réfola, ou du moins ne dépend plus
que de l'intégration ou confnifkîon de difièremàeliee à une feule variable. .
' . . ' ^ \ • 32. Si le corps m du milieu pouvoit couler le long du fil, on auroit
toujours la nicme expreflion de 7" que dans la formule (c) de l'article 19;
mais dans les fubflitutions de r cof 4 cof^, r' cof 4' cof r cof 4 fm ^, &c, i la
place de, I , ^9 « 9 &c, les rayons. r & / qui expriment les dIA tances des
corps m' Se m" au corps m, ne {croient plus tous deux conflans» mais
ikuieraent leur (bmme r «4- V qui eft Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 17.17% accurate

}00 MiCHANIQUE AlfALITIQUE. égale à la longueur du fil par lequel les deux corps mfUni* font joints. Aiiiifi nonunant a cette longueur, on auroic |/0ii»r,&ily auroit après les fubftitutions^cînii variables indépendantes, $r, 4, <P, 4$, dont chacune foumiroit une équation différentielle, d'après la formule générale. ■ 33« tliim fi on fttppôfoit le corps m fixement arrêté, enforce que le fil qui joint les deuzcorgs $V^{\wedge} \wedge'$ dûcpafier par une efpece d'anneau fiice danal'efpace; en prenant, poir plus de fimpiidté, ce' point pour Torigine des coordonnées, on feroit dans les formules précédentes, x, y , nuls j 8C l'expreliion (a) de T deviendrait $\wedge$ — « 7d? . Td? > laquelle, par les fubftitudons précédentes, fè changeroît en celle-cL. dm»m : " «4-1» $\wedge TJT \bullet \bullet V$ » $\wedge$ Pour la valeur de $\wedge$, on auroit, comme dans l'article 30, en fupposant les corps peTans, $= -w \text{ fm}'\zeta \ll 4-w''\zeta'^{\wedge}$ » on bien ..: * .. ' r« — » «'r fin4 — r; fin4'. Et Ton auroic de' nouveau cinq équations pour les cinq Variables, $r, \bullet! > 4$ » f, & 9 $^{\wedge}$ favoir, fl — -f*J» rfr» — wm' fin 4 -t- w/tt" fin 4' » o. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 15.05% accurate

Secondi Partie. 301 ' — V COI 4 o j Les deux decnietes font incégrables, & donnent d'abôfd • rf» • B ▼adeurt qui étant fubflicués dans la iSconde & la troifieme les transforment en celles-ci , dont l'intégration n'est gueres poffible en général. Elle le deviendrait fi on faifoit abftraction de la pefanteur des corps; en fuppofant $w = 0$; alors les c[on]uations étant multipliées 9 la première par la féconde par (« — $r\}^4$ » on auroit les intégrales d'où l'on tire $dt \, d4f \, dt \, d-y$ on a d'ailleurs l'intégrale $7'h- f^{\wedge}=conf$ t, laquelle à caufe de $K \, c=3 \, o$, devient, après la fubftitution des valeurs précédentes de df , $df^{\wedge} \, d^{-y} \, d4^{\wedge}$ Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 19.93% accurate

302 MÉCHANtQUS A I T A L I T 14^ Û S* U par coufé^uenc V
T^rTF-) Cens Yienr ài&dt éaaxt enfuite fUbfîniée dans hixpaxn intégrales
précédentes, on aura des équations féparéeSypar lefquelles on pourra, au
moyen des quadratuces , déterminer ' , 4 , 4' , ^ , en r. • Au refte , fi le même
corps m du milieu , au-lieu d'être fixement arrêté , comme nous venons de
le fuppofer , pouvoir gliflér librement fur une furface, ou fur une ligne
donnée , alors les coordonnées x, ^ , ^ né feroient pas nulles , mats tune
d*entr'eile» fetoit une fon£Uon donnée des deux autres, ou deux de ces
coordonnées feroienc données en fbnétio'ns de la tioîiiiienie; il n'y aoroît
qu'à faire ces fubstitutions dans les mêmes expreflions de 7* & de f^, en
ayant enfuite l'égard k la variabilité de ces coordonnées. 34*^^ le ^ étant
fixement arrêté par une de fes extrémités, efi: chargé de deux corps pefants
m Bc tafl dont le premier foit le plus proche dn>point fixe, on iêra d'abord
x'sBx-Hf ^yssjf^»^ & les expreflions de r & de ^deviendront fñfuite
nommant r la portion du ^ interceptée entre k point fixe 9c. le corps U / îz
portioif interceptéo entre Ge..€otpi» ac le fuhraiit i^,.ofi fer% xsesrea£4
cà£9^ » Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 20.23% accurate

' Sbconob Partie. 305 ysasrcof 4/mf , r fin 4 , |s;b i^cof 4'
cor/,»UB/cor4'fiiif'^ 2; =s / fin 4'» êc regardant r 8c / comme conftantes., on
troo> vera quatre équations pour les quatre variables 4, ^, 4', ç'. Mais ces
équations* ne font pas intégrables en général , éc il n'y a que le cas où les
corps le meuvent fur un plan horizontal qui foit fufceptiWe d'une foktion
complete. On fera dans ce cas 4 flc 4' tkuk » ce^iii donnera ^«=a o, & •
Cette exprciïion de T eft, comme l'on voit, de la mcme forme que celle de
l'article 3 i ; elle fournira donc des équations fcmbables, aux cocfficiens
près, & qui s'iacégreroti(par confcquent de la même manière. On trouvera
^ar an procédé femblable , les équations dtt mouvement d'un fil chargé de
tant de corps qu'on voudra ; mais la difficulté condflera dans leur
intégration ; & je ne connois qa'un feul cas où die pUiflè réuffir en général;
c'eUt celni oti Ton fnppolè que les corps s'éloignent tr^peo deîa verticale;
car comme la pofidon verticale du ^ eft celle . de Son équilibre» ce cas (et^
fufceptible .de la méthode g^ nérale donnée dans le Paragraphe premier de
la Se^oa préfente. . • . t - ? 3 5 • l'Orfque les corps s'éloignent peu de la
verticale, qui eft Taxe des i^, les coordonnées x^, y, &c, font très-, petites ;
c'eft pourquoi. îl conviendia d# conièiver ces coor* données dans le calcul.
Nommant donc r» / j &c ^ les portions du ûï interceptées entre h point ûxè
& le premier corps m , entre ce corps êc le fuivant m', entre celui-ci & le
corps mf^ U ainfi de fuite, on aura r sasK^H*-^*.-!- l'J^

The text on this page is estimated to be only 11.35% accurate

'304 MÉCHANIQUE ANALITIQUE. (($\wedge$ — H- $-\wedge y y^{\wedge}$ H- fï' — V
f «ce i d*oà l'on — — $\wedge/\wedge 9$ c*eft4r<lire, à caufède la pettieflè de &c,y,y &c,
♦ • • _ • , ace; «inii 2es valeurs de $\wedge/t''$ » feront $\wedge .y j$ «* $-\wedge y^*$ - $r^{\wedge}$ -xz-nry-yj* •
• • î »r ♦r' *r'' * ' On les fabftimeni donc dans les exprefflons générales de
7* & F'' de Tarticle 17 , en faifant r, r'' &c , çonibantes , & rejceant les
termes où les variables x, y, x', y', &c , monO^roient au-delà à& la féconde
dimenilon, on aura $r=/\ll$ — h/if — &c , On voit que dans «es expreffions les
variables $9t^{\wedge}f!^{\wedge} 9ff \backslash$ flec» font réparées des variables $y^{\wedge}y^0 y^*y$ &c, & qœ
les unes 9k, les avtyes y-entrenc de la même manjete ; d'oà Von peat
d*abord Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 22.47% accurate

Sbcondb Partie. 30 j d'abord conclure quç Ton aura deux fyftèmes . d'équations différentielles^ indépendans & femblables entr'euz y l'un entre * , &c , & Cancre encre y , j''' , %cc ; de forte qu'A fuffira de conHdérer un feu\ de ces fydêmes ; & même on pourra s'en difpenfer , car on aura immédiacemelic pour les valeurs finies de x, x', x'', &c, des expreffions telles qUe celles de i^, 4, &c, données dans l'article 10", & les valeurs de y^y^y* £^Cy feronc auflî de la même forme» te ne dilFéieront que par les confiantes arbitraires, • L'expreflîon de ^tlans laquelle la partie variable eft com* pofée de carrés tous pofiti& , fait voir d*abord que les va» leurs de x', a/i&c, & de y, y, &c, ne faurpienc contenir des arcs de cercle » mais feulement des finus 9c cofinus réels, enforee que. les corps ne pourront faire què de petites o(cîllatîoris autour de la verticale, conune nous " Pavons démontré en général dans l'article 14. Ainfi on eft déjà afTuré que les valeurs des cocfKciens V k^f^g, h,&cCf feront toutes réelles ; Ôc il ne s'agira plus que de les déceiminer par les méthodes de l'article 13. Puisque ces valeurs font les mêmes pour les expreiCons dex^x', x'', &c, jte dè >,jr'»y» Sec , il fuffira de tenir compte des premières de ces' variables > dans la ibrmatioa des quantités A êc J^.' Oa changera donc dans' T te V kê quantités -if , &c, ainfi que x, x', x'',&c^ ^*%f*g% te» & rejeccant tous les< autres termes, 00 aura - ' . l^•^flH^^w^-&c;-îl-4-1r(^^ . • Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 16.96% accurate

^o6 MACHANIQUE ANALITIQUE. d'où y eafafant ÂK'^ Bssa^
 & enfuitf^ çn tirera ces éqnadonsj ok il faudra fe Ibuvenir que e doit
 acre»i,. m Le nombre de ces équations fera égal à celui des variables 9C , x',
 , &c, c'est-à-dire , à celui des pôles « , m', m'', &c , in^hés au fil; & par
 conféquent égal au nombre des quantités e,/,^, &c; de forte que puifque «ai,
 il-teftera toujours une équation pour la détermination de A. Ainfi en fàifant
 d'abord i , la première équation donnera y, Ja féconde^*, &c , en polynômes
 de k du premier, fécond , &c, degré; & la dernière ne contiendra plus que U
 fera d'un degré égal à Ton quantième. Mais on facilitera cette détermination
 en commençant par la dernière équation, & remontant fucce(Evement à
 celles qui précédent, Pour cèla nous déiîgnerons par M» m', h'', &c,7, f\ p'',
 tcc, a', tf'', &c, les quantités Ifs, m', w'', &c, r, /, r'', &c, ^, &c prifès à
 relioiis; & les .équations priées auffi dans Tordre InTerfe» Digilized by
 Google

The text on this page is estimated to be only 15.04% accurate

Sbconob Par. txz* 307 feront ixak — w /* tf- a' = O ix^u'h^^Ct^-
^H-'J ""^f -Hir^ -î=fL =;ao. Or yioiiiiiiianCAleiiomlMe des poids, on:ai2ta
tf"*" « s.s., de plus on voie par la première des équations â-defTus,*
laquelle fe trouve ici la dernière, que le terme qui précéderoit e dans la férié
Cyf^gy £cc , doit être nul ; par coo^* féquent il faudra faire a" = o ; 6c cette
condition donnera l'équirion en k. Eu clîet, fi on tire 1 uccclTivement des
équations^ prcceJeiues les valeurs de a\ a", û", ôcc, elles feront de cette i
orme ^a' ^ (\) a, a' = f\)^, = (■^)^ cl^^c ^oi\ (\) ^ <V» (V> ôcc, dclignent des
polynômes en k du premier ,^ fécond ^ croifieme , &c, degré. Ainiî la
condition a " s i « donnera/» — i itfsas i , d'où Ton tire tf — ^ — Ôcenfuite
la condition a* o » donnera ^ a o ; c ell l'équation en ky dont on fait déjà
qua les racines doivent être toutes réelles, podiives inégales* '> . Si les
poids font tous égaux entr'eux, ainfi que leurs diA tances fur le iil» on aura
alors » y\ ^c» Sç. f = { p ', fiçcssr; donc faifant — f, les équadoni
deviendront .

The text on this page is estimated to be only 13.48% accurate

^OS- MICHANIQUE ANALITIQUE. d'oii Ton ure $a' = \frac{1}{2} \{ \dot{a}^2 + a''^2 \}$
zs: (ija, &c, en faifant te, & en général poocréquadon ea A fera' mais la
réfoludon générale de cette équation n'ei); pas encore connue. ' An lefle»
comme le dernier terme de cette équation te tffuive divifé par $i . a \gg j \dots$ », fi
on la multiplie toute par ce nombre, & qu'on k diipqfe dans un ordre
tenyerfé, elle devient de cette' forme , $\frac{1}{2} \dot{a}^2 + \frac{1}{2} a''^2$ mais n'en eft pas plus facile à
réfoudre. • 3 6. Si le fil étant prolongé au-delà du poids le plus bas, • ,
paffbic en fuite dans un anneau placé dans la verticale, & qu'il (butine
encore un poids M attaché à fon extrémité, U Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 20.53% accurate

Seconds Partie. ' jop lèftant, pour ainfi dire, à le tendre; il ne s'agiroit que d'ajouter aux expreffions de T & de $\wedge$ les termes dûs à l'action de ce nouveau poids. Or comme par la nature du problème ce poids ne peut que monter ou deicendre, en refant toujours dans la même verticale que nous prenons pour l'axe des ;{ $\wedge$ il eil clair qu'en nommant $\wedge$ la diftance au point fixe que nous avons fuppofé être le centre des coordonnées, il n'y aura qu'à ajouter à T le terme $M - \wedge^p$, & à $\wedge$ le terme " Vif Ç' (art. 17); & il ne s'agira que d'avoir Ç exprimé en fonction de x^y , y, &c. Pour cet efi^t il n'y a qu'à regarder l'anneau & le poids M comme deux nouveaux poids attachés au fil, mais donc le premier peut touter le long du fil, en refant toujours à une même diftance > j du point fixe du fil, & dans la même ▼ verticale; alors y U Ç feront les deux derniers termes de la férie: (, [(y Bec $\wedge$ 6c feront par conféquent exprimés par les mêmes formules, çn obfervant que les termes correfpon" daAs dans les fériés jc, x', x'', Sec, j', &c, doivent être nuls. On aura ainfi $\wedge \gg \ll rH-Z+V+accHl, - \wedge (\wedge -,) . \wedge ry-yj \sim "$ $\gg r^* > r?i \text{ — } ' ' \acute{e} \text{ — } \wedge \text{ — } ' \text{ (les expofans } n \text{ — } i \text{ Bcn dénotent, comme Pon voit, des quancien.es \&c non des puiffances) } n \text{ étant le nombre des$

The text on this page is estimated to be only 17.97% accurate

310 MÉCHANIQUE AKALITIQUE, poids attachés au fil encre le point de suspension & VantAaa, $\frac{1}{r}$ - f. & c est la longueur de tout le fil depuis le point fixe jusqu'au poids iV , laquelle est: donnée & par conséquent constante, & que nous désignerons par r' & c - f- r'' ei\ la longueur du fil depuis le point de suspension jusqu'au dernier des poids m^m I» — », laquelle est. auU donnée, & que nous désignerons par K Ainsi la première équation donnera la valeur de r portion du fil interceptée entre le poids m & l-anneau ; SC cette valeur fera , aux quantités très-petites du fécond degré px , égale à y — $\frac{1}{2}$. De sorte qu'on aura ' ça. $\frac{1}{2} r$ 7 TT" $\frac{1}{2}$ • — : — 7? f r — «c — ., y-A; • Or puisqu'on néglige dans T & F les termes très-petits d'un ordre au-dessus du fécond , il est clair que la quantité M "fjl à ajouter à T fera nulle; de sorte que la valeur de r , Se par conséquent aussi celle de A qui en est dérivée , demeurera la même que dans l'article précédent. Quant à la valeur de F, à laquelle on doit ajouter la quantité — $\frac{1}{2} A/C$ on voit qu'il n'y aura qu'à augmenter de jM les coefficients de $(\frac{1}{2} r - \frac{1}{2} Cy' - \frac{1}{2} y^2)$, dans l'expression de y du même article, & y ajouter de plus les termes vM , iif i£211±l211L.. Ainsi la quantité B deviendra, ennommant /le dernier terme de la série, $tf, /$ » g $\frac{1}{2}$ c. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 15.36% accurate

Secoi4j>£ Partie. 3x1 Désignons, comme^{ci-deiTus^} psir^x, /ia', &ç, p, /y &c, tfy â', ô'j &c» les qiundcës jv1, m', m"» &c, r-, r[^]» ^9 f» 'g*^{^^9} ' pfi^{^ ^} rebours ^ il est clair que les valeurs âc A UB exprimées par ces q[ttaiititës, feront Ainfî Jfs équations entre a, û', &c, feront . = o, 90 o, &c, en fâiTant A as — faToir» &c, dans lesquelles oT" devra être = i, & = o, . On procédera pour la résolution de ces équations» comme on Ta dit pour celles de l'article précédent, & il o^y aura (Atts qu'à fubftituer les valeurs qu'on aura trouvées dans les formules générales de Tardcle 10. Mais* comme ces équations Â>nt encore plus compliquées que celles-là ^ on ne (auroit* Ce flatter d'en avoir une résolution générale, fi ce n'est dans le cas où l'on fuppofe le poids M qui tend le fil infiniment plus grand que tous les poids m, m', &c, dont le fil ed chargé j dans ce cas les *équacions fe fimplihenc, ÔC deviennent

The text on this page is estimated to be only 12.12% accurate

jri MÉCHANIQUE ANALITİ^US» ■ «ce. Sappof^nt de pl'^s les
dUVances $p, p', p'', \&c$, entre les poids égales» amft q;d les poids y » i>:'^
£cc» fsufiuic .Jî|. f sa c, en aura • ' ^ ■' ovi l'on voit que les quantités $a!, d\$
 $c!\backslash \&c$; forment une férié récurrente, donc le terme général tC fera de la foi
aie $Aa^B^{^}$ en nommant « les deux racines de réqtialion -f» ^c— * H- 1 »
o, Soit I — . ^ «M cof M, les deux racines de l'équacion feront cof « $\pm^Cm$
 $u\}/''$ — i , & changeant les conftantes B en d'autres C, Z?, on aura $\hat{u}^* = C$
cofr« -f- Z)finr«»,oa bien encore $a' ^EÇin. (i^*t^*)^ E\&L\%$ étant deux
conftantes • indéterminées. » Il faut d*abord que cette eipreffion fatisfaflè à
la j>remiere ^nation ^ eft d'une (bmie diffi&rcnce des aucrei. Qr £ûfaat / *
Digitized by G'OOgl(

The text on this page is estimated to be only 15.80% accurate

• Seconde Partie. 313 rso &r.s lyonatf 3sa£iiti*,a'BB£iia(^«»-Ha^, Ac comme < B t — 1 oof la premieie éqnadon deviendra • • (I — i cof fin »-f-fin (»-^r*J =p, d'où Ton tire (1:1 cang. « = cof *• — I -f* n faut enfttite que l'on aic*^si>£c »"caao; donc £ fin ^^ff — Ht: s» I > £ fin/iiii -4-«^ s o'; d'oil l'on rire- ■ j étant un nombre quelconque entier. Cette demête équation iêrvira ^ déterminer 1», qui /era par conféquent toujours un angle réel; &.Êii(ant fucceffiTe' ment isao» 1 ^i^&c^ Ji«^ i, on aura n valeurs diâfiii«ntes de • qui donneront les- n racines 'de. k par les formules k y» —, eêcsa X w 1 côf» ao^^fin ^ . Si oji 'fàifoit i plus grand, que. ff, on ne retrouveroit que les mêmes valeurs de c. Ainfi tout eft déterminé, & on a l'avantage dans ce cas d'avoir .des ei^reifions générales, tant pour k que pour «, ofi 0?', 6cc., c'eii-à^re, pour les ^ëffidens /, ^, 8cc, Be<r*,4*-», &C. Cette folution fe iimplifie encore lorfque s >— a, c'eftà'dire, loirCquë la portion du fil comprife entre les derniers des poids «r, vi^ tcc^ & l'anneau fixe eft égaie à rin« •tervalle commua f des' marnes poids; ce qui a lieu lotique tons \tr poids divifenc eir parties égales la portion 4a ^ Rr

The text on this page is estimated to be only 22.37% accurate

314 Mé:CH A M IQtJ s " A N A L S.T I Q U E. • comprife çntre le point 6xe Si, l'anneau. Dans ce cas on aura & fl • ^^^^y', ou bien (àcaufe de fa-h ijm^ iZo'.s) Ce dernier cas eft, celui d'une corde vibrante chargée d'un nombre quelconque n de petits poids égaux & placés à diftances égales encreux, & qui étant fixe dans une extrémité » eft tendue par une force M qui agit à l'autre extrémité , foit ' que cette force vienne d'un poids Attaché au fil» ou d'un ressort, ou même ^ élafticiî. du fil ft^pofé capable d'extenfion & de contraîon. Auffi la (blution qui réfulte des formules préc^ntes, s'accorde-t-elle entièrement avec celle que nous avons donnée autrefois par une analyfc différente. 37* Ce que nous venons de dire fur l'identité des effets de la tenfion produite par un poids , ou par l'élafticité même du fil , parçît évident de foi-même , du moins tant que Ici ofcillations font très-petites. Cependant comme le problème du mouvement d'un fil Inextensible efl, par fà nature, différent de celui des dcfçillâtons d'un fil extensible 0e daftique^ nous allons donner auffi U fôlutîon direûe de ce dernier. Il n'y a ici aucune équation de condition à fatistaire , mais il faut tenir compte de la force élaftique du fil , dont l'effet eft de raccourcir chaque portion r, r',/, Acc. Soient donc R"% &c, les élafticités refpeâives des parties du fil r, /, /, ^èccy qui joignent les difi^BS corps yélailicités qui tendent à diminuer les lignes /*i r", flcc, & qu'on peut fuppofer exprimées par des fi>iiâio»r de ote nênes ligbès^ il en xé» I Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 15.42% accurate

s B C O M D B P A » T T 31^ Alitera dans la valeur de V les nouveaux termes f E dr •^-fK'.dr' ^fE" dr"-ir &c; & il ne s'agira que d'y lubllituer pour r,rf, &c, leurs valeurs en , \^ ^y^y &ci & de traiter enfuite tçUfes Cel cootnioiinée\$ oonitne des va»riables indi^pendances. Ainfi dans le cas oh le fil eft fixe dans Todgine «les coor* données, & qu'il eft chargé des poids vm^ itm'^ ôcc, on aura en général ' ', . . * - ' • * * • * j^- il n'y aura qu*à mettre pjMir.i'y-, /y^y leq» valeufi des formules $r = f/\wedge/x'$.-+- y îV; ^ ^((^' — */ -4- — y y -h (: (~ tJ^) ^S>iQ\ enfuite chacune des variables Xy y ^ &cj donnera une équation diâ^érenùelle de la forme générale — - "TT 7^ Dans le cas où les corps s'éloignent très-peu de la vertiçijequi efiçi Taste des coordonnées les valeurs des autres coordonnées x, jr, x',y^.&c, font très-petites, & celles des .qiaDtice8.r, r', «ce, ij, î', &c , difflerent très-peu de ce «p'elles font dans Tétac d'équilibre, oùr.x, y, x'»y> &c» font nulles. • Suppofoos qu'alors on ait r « />, &c; ij—»^, ^=^, ^'«=^', &:c, & foit en général rsF/» -H f, /ray-4-^^&cii(«pifH-C» -+- &c. On aura donc <r4a>ord , / — Y — fi/' î"— f* ^ i Rra

The text on this page is estimated to be only 13.46% accurate

MÉCH ANIQUUB ANALITIQUÛB. $\wedge C y^{\wedge} y / \wedge (q' - y - f - c' - \zeta - / \wedge,$
&c, doù l'oa cire Ctt négUgeaot lés dimenfions des quantités très-petités
 $x^{\wedge} y^{\wedge} X f y, y, \&c \gg aii^{\wedge} \text{flus du feconiid degré, } f'^{\wedge} - \wedge . >^{\wedge} \text{---}^{\wedge} \wedge \wedge \ddot{i} ? \gg^{\wedge}$ Soient
maintenant P, P', &c, les valeurs de /?, &c, lorfquer, r', &c, font / , / ^, &c, ceft-
^t-dire, les élafticités des fils lorfque leurs longueurs font réduites kp, p', &c
; on aura par les formules connues , en metFant / 4-^ au lieu . autres
fondions fR'dr'^ tcc. Donc faifant ces fubftitutions, & rejettant les tern^ où
les quantités très-petites, monteroient au-deiTus du fécond degré; on aura >
' ^ 77? Id? , ^ ^" ^ l * ■ • è -H.^rg-.çy. Or pour que l'équilibre ait lieu dans la
fituation où les quantités très-petites Ç, x', y, &c, font nulles, il hnt , comme
nous- l'ayons va dans l'article 9 » que les preitaieres diroenfions de ces
quantités difpttroiflènt dans l'esDigitized by Google

The text on this page is estimated to be only 17.30% accurate

Section 3.17. Par la condition de $V = 0$ ainsi qu'à zéro les coefficients de χ^* et, on aura, ces équations lesquelles donnent., $F^{mJP} \cdot P^m(m^n \% F^F \bullet)$ (nuaⁿM-m[^] et. En comparant maintenant les expressions de r et «ICK». avec celles qui conviennent au problème de $V^{^^} \wedge \wedge \wedge \wedge$ voit qu'elles sont de la même forme» d'ailleurs la partie qui contient les variables x, y, V, y_j et, & qu'elles de- , 'viennent -même- identiques de part & d'autre en faisant $P = * \ll r^{\wedge} \text{ilf} -4- / \gg -iW -4- iw'' -H \text{ et } c^{\wedge}$; de sorte que les valeurs de ces variables («seront nécessairement les» mêmes "sont les deux problèmes. Quant aux autres variables χ ", > auront aussi des valeurs semblables, en changeant seulement les quantités — , &c, $n^{-3^{\wedge}}, ^{\wedge}$, &c, .comme on le voit d'abord par les expressions précédentes de $TSc V$, Ainsi nous ne nous arrêterons pas davantage sur ce problème. 3 8- cas que nous venons d'examiner, sont tous susceptibles de solutions complètes, parce que la supposition des mouvements très-petits rend les équations différentielles presque linéaires», & par conséquent intégrables, comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédent. Il peut cependant y avoir des circonstances qui détruisent les avantages de cette supposition. Par exemple, si le fil est fixe par ses deux extrémités, ou qu'il fût en même-temps inextensible, incapable de contraction, ou plutôt si les corps étoient unis par des verges droites jointes ensemble par des charnières, U. donc

The text on this page is estimated to be only 17.29% accurate

318 MICHAÏQUE AN ALI'KJB B. la première Ôc' la dernière
fvilènt tITijèttiès ^ dû deux points fixes ; alors en -fiipporant toujours que
les corps s'éloignent très-peu de la verticale , on auroit d'abord pour T ôc K
les mêmes valeurs que dans l'article 5 ^ , mais avec cette différence que les
variables ϕ cc, au lieu d'être entr'elles tout-à-fait indépendante», devroient
satisfaire à l'équation ϕ culcanre de la condition que l'extrémité inférieure
du fil, soit au point fixe. Or nommant ρ la distance verticale entre ce point
fixe et le point fixe supérieur; on aura $J = \rho \sqrt{1 + \phi^2}$ où toutes les
variables ϕ, ρ, r, r', r'' , &c , r'' sont donc : 'es, puisque ce sont les longueurs des
différents fils ou verbes, qui unissent les corps, de manière que leur intégrale
soit $\int -f - V - f \phi^2 - \phi^2 . r^2$ exprime la longueur totale du fil entre les deux points
fixes. Se par conséquent $r = \sqrt{h^2 + \phi^2 r^4} - r >$ pdt l'excès de la longueur du fil
sur la partie de l'axe à laquelle il répond. Nommant donc ϕ cet excès qui est
connu , 'on aura l'équation " $\phi^2 < \phi^2 . \phi^2$ dans laquelle on voit que les variables
forment par-tout deux dépendances, en sorte qu'il est impossible d'en
déterminer une quelconque , sans employer les autres. On a donc ici le
cas dont on a parlé en général dans l'article Digilized by Google

The text on this page is estimated to be only 17.99% accurate

. s E C î O N D B P -A. R T. ^ I B; * 5 ip 16 y & C qui échappe à la méthode générale pour la détermi» nation des mouvemens très-petits ; ce qui est d'autant plus liogulier qu'en fupposant les fils ou les verges ont soit peu extensibles & cbnoadibles, le piobUme .èiédêvîent fufcepN-' tibhe d'une A>lacîô& complenis» 'comme noinf fivbiis'vâ deIfIKs. Cest ut» rainarqiiêcùnaiiêy'Sc'^ n'ayok pas en^ COI© été faite. Pour rendre encore plus feoùbie cetce-rérité » nous altoot réfoudre le cas précédent dans la fupposmon ^u'U n'y. ai(que deux poids attachés au fil» & «que les monvemens Ce iâflènc dans un même plan. On n'aura ainfi qn'à .déterminer deux variables je & x', toutes les 'autres étaut nulles par l'hypothèTe. • • : : ' ; . • L'équation de condition fera donc dans ce cas &<les valeurs de 7 &- sièront oomw daxis. Vtinkk 5; , J — rT"*+"» — j~r s « * ' * , ^» . . . On peut, pour plus de facilité , employer rintégralc générale T'^ C0a>2» laquielle lieu aui& dans ce cas, pui^ que l'équation de condition ne renferme point / (arc. 4). On aura donc à étant noe cooftanie arhitfaiit^|^petwéqfft9itM»iicciilllMaé« Diguized by Google

The text on this page is estimated to be only 21.30% accurate

320 Mi'CHAMi'QQB ALTALtlQ-ijS. ftvec l'équation de condition ci-deiTus[^] fervira à décerminet Suppofons, pour fimpifier davantage , les deux poids égaux, ainfi que les longueurs r, r" des trois verges, & I ; 8c faifons $xs^{^^} \{m \text{ } xf.^{^^}cof \text{ } f \gg$ Téqui[^]cioii de condition donnera $\hat{r} \cdot \hat{i}w. ; -^K^f= ' 1 \text{ } T\hat{i}a, \text{ } cof \text{ } f \text{ } i \text{ } -.^{\hat{}}iii-^{\hat{}} \bullet \bullet . * . \bullet \gg \dots \blacksquare \bullet \dots \blacksquare \dots - * ' \bullet ^$ "T?- $\gg -^{\hat{}}/fii^{\hat{}} * ^{\hat{}} - cof = , ' \text{ } d'oii \text{ } l'on \text{ } tire \text{ } en \text{ } fubftituant \text{ } pour \# * \text{ } fa \text{ } valeur, \text{ } tirée \text{ } de \text{ } lléqim-? \text{ } tion \text{ } précédente \blacksquare \blacksquare \gg ' \bullet > , \bullet \dots \dots 0 \text{ } (tt? - 0^{^^} - C"; \ll'^{^^} 0 ' \text{ } différentielle dont l'intégration dépend de la redification des feñlions coniques. De forte que , même dans le cas le plus (impie , le problème eft d'un ordre fupérieur aux fondions lo[^]ithmiques fircAilaires. $\bullet \bullet \ll , 39.$ En cpniêrvant la Tuppolidon d[^] corps unis par, des verges droites 6c inflexibles, imaginons itiaintenant que les charnières par lefquelles ces verges font jointes, foient élastiques, c'ell-à-dire , douées de forces qui tendent à remettre tous ces côtés du polygone en ligne droite les uns avec les autres; il ne s'agira que d'introduire dans l'exprelTion de les termes dûs à ces différentes forces $\gg$ dont l'effet conMe à diminuer les 'algies de contingeàôe' du polygone. Soient Digilized by Google$

The text on this page is estimated to be only 22.98% accurate

s F c o D E Partie, ' Soienç ^, E\ &c, les forces élastiques qui agiflênt dans les angles ou jointures dès verges r 6c / ù, r" r^' flc Bec , dans lefquels font placés les corps m , m\ m", &c; & foiept ff^ f!"v&c , les complémens de ce, angles à 1 80°, c*efl-à-dire, les angles de contingence du polygone, dont r, &c, font les côtés fucceffifs; les termes à ajouter à r (^vonzfEde^fE'de'^fE"dc" -f- &c, en regardant, ce qui eft toujours permis, £, F', &c, comme des fondions données de c, e' , c\ &c. On déterminera ces angles en fondions des. coordonnées, comme nous l'avons fût dans le paragraphe fécond de la Seâipn cinquième de la première Partie ; en effet, iX eft clair que fi on imagine une droîns p qui: joigne lçs extrémités des deux côtés continus r ac on aura dans le triangle, dont r, p foât les trois côtés, & dont iSo'^^e eft Tangle oppofé au côté /, on aura, dis-je, cofc = "^^.7^^ > & de même 011 aura cole^aa-r ^ , en prenant / pour le troifieme côté du triangle, dont Çx. t^' font les deux premiers, ôc ainfi de fuite. De plus il eft aifé de voir quW aura/ « K^*'H-y* H- ^V»/ - i^rr*^-*/ ^d' - - i^ rr*'" - ry ' - y/ H-A'" — f/^'» Donc puifque r==K^x'H-y.4^^y/ Thr/^y/^Yf-?'/;, &c, on aura rftfr- *r^'-^^+^y^y)t.y(y'^^') S» Digilized by Google

The text on this page is estimated to be only 18.81% accurate

322 MÉCANIQUE ANALITIQUE. ; $\text{COI} < \text{---} \blacksquare \text{fji}^{\wedge} \text{it T} ! \blacksquare \text{i}^{\wedge} \bullet$

* On suppose communément que la force élastique dans les lames à flexion est proportionnelle à l'angle même de condogence» mais on peut la supposer également proportionnelle au sinus de cet angle» parce que dans l'infiniment petit, le sinus se confond avec l'angle même; il paraît même que cette supposition est plus conforme à la manière dont on peut concevoir que la force élastique est produite dans la courbure des ressorts. Quoi qu'il en soit, si on fait $\text{JE}/$ étant un coefficient constant, on aura $\text{fEdc}^{\wedge} \text{Hfi} - \text{cofE}^{\wedge} \text{E'd} / \text{Hfi}^{\wedge} \text{cof}^{\wedge} \text{J, te;}$ & il n'y aura qu'à substituer pour $e, \text{cof } f, \text{cof } c \backslash$ & c, les valeurs précédentes « & procéder ensuite comme à l'ordinaire. * Lorsque les coordonnées $x, x', x'', \&c, y, y', \&c,$ sont très-petites, comme nous l'avons supposé dans l'article 35 de Cniv, alors on a, ainsi qu'on l'a vu dans cet article, donc substituant ces valeurs dans les équations de $\text{cof } e, \text{cof } f, \text{cof } c, \&$ négligeant les termes où $x, x', y, y', \&c,$ sont élevés à des puissances plus grandes que la première, on aura

The text on this page is estimated to be only 18.68% accurate

Seconde Partie. 323 hautes que la lècotide, on aura . ^ te. Ainfi les termes dûs à l'ëlaHcicé dans l'expreflion de feronc Afoutaot donc ces tennes «à la ▼ateur de F" de l'article 3; , 2c achevant enfoice le calcul de la même manière, on mira le mouvement d'un fil claltique fixe par une de fes extrémités } charge d'un nombre quelconque de poids. Tous les problèmes qu'on pourrok encore ^rofoCev fur le Inottvement de plufieurs corps qui Ce. tiennent par des fils" on par des verges, fe r^ibodrohc toujours facilement par Tapplication de nos formules générales, & nous ne croyons pas devoir nous étendre divann.i^e fur cette matière, qui n*eft au fond, que de pure curiosité. ' . , . ' 40. An reftsy la foludon de ces Ibrtes de problèmes €9 (implifie beaucoup , lorfqu'on regarde le fil ou la verge qui joint les différens corps, comme inflexible & d'une figure donnée. Alors il n'y a de vatiabes que celles qui dépendent Ss 1 Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 21.18% accurate

324 MéCANIQUE ANALITIQUE. du mouvement du fil dans l'espace, & du mouvement des corps le long du fil; & Ton aura les formules les plus simples, en exprimant par ces variables mêmes les valeurs des coordonnées » & introduisant ces valeurs dans les expressions générales de T & de car chaque variable { donnera toujours une équation de la forme — assés comme nous l'avons démontré. . * Supposons, pour donner un exemple des plus simples, qu'une verge droite mobile autour d'un point fixe, soit chargée de tant de poids m, m', m'', &c, qu'on voudra, & qui soient ou fixement attachés, ou libres de couler le long de la verge* Prenant le point fixe pour l'origine des coordonnées, on nommera r^» &c, les distances variables ou constantes des corps m, m'^ m'' y &c, à ce point, & 4.^ les angles de la verge^ avec le plan horizontal dès x fa y^ d^ fa projection sur ce plan avec l'axe des il est clair que les coordonnées x^y^ ^, seront exprimées comme dans l'article 17, par r cos^ cos^, r cos^ sin^, r sin^, & .que les autres coordonnées z', y, z, x'', y, &c> seront exprimées de la même manière, en changeant seulement r en r':c, puisque les angles 4 & ? sont les mêmes pour tous les rayons r, /, &c; par conséquent on aura $dx' = -\frac{r}{y} \frac{df}{f} - r f \cos^4 \frac{df}{f} - \frac{d}{VJ} \frac{f}{z}$ &c, en supposant tous les corps m, &c » mobiles à la fois. Ainsi en ayant égard à leur pesanteur ou force pesante ou verticale on aura (art. xy) r Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 13.58% accurate

.•: Sbsonoe Partie, 32/ & comme les variables $r, \theta, r'', \phi, f, \psi$ sont indépendances, chacune d'elles donnera une équation différentielle. En faisant d'abord varier f , on aura l'équation différentielle $\frac{d^2 f}{dt^2} + \dots = 0$ dont l'intégrale est $f = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$ on aura cette autre équation différentielle, $\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \dots = 0$, laquelle en substituant θ (à valeur tirée de l'intégrale précédente, devient $\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \dots = 0$, 1

The text on this page is estimated to be only 18.53% accurate

f j atf MÉC MANIQUE ANALITIQUE. Celle-ci ferait intégrable, étant multipliée par $(m r^2 - m' / -t - 1) \gg H - 6cc^4$, filaqtanritéir^{flif} - fW/»H-i«'V'»-^«çç; /O» r -h nv' -4- m'V'^- 8cc^ éi»it çonibiite ou ni^ fonction- <le 4* Le premier cas a lieu en général quand toutes les quantités $r, /, r'', \&c$, sont constantes, c'est-à-dire, lorsque les corps sont fixement attachés à la verge. Dans ce cas il est évident que les deux équations en « & 4 » & par conséquent aussi les oscillations de la verge feront les mêmes que s'il n'y avait qu'un seul corps M placé à une distance R du point fixe, en sorte que Ton eût $MR' = mr' : m' - h m'' r'' H - \&c$, ' Jlf J { M m r -H mV -t- nf^/ -H &C. La valeur de R fera donc la distance du centre d'oscillation, où celle de M fera la masse à placer dans ce centre, ' . pour que la même impulsion produise le même mouvement dans le pendule simple que dans le composé. * Le cas où $\sqrt{H^2 V} \gg H - \frac{m'}{V} \&c$; ^/» /-hmVHVBVM-^ ferait une fonction de 4 » est purement imaginaire, & nous nous dispenserons de l'examiner. Nous ne^ - contenterons donc de discuter l'autre cas, où cette quantité est réelle, où du moins disparaît par la supposition de $t = 0$, ce qui arrive lorsque on lue abstraction de la planéité des corps ^ &c que par conséquent la valeur de V est nulle. Rejetant donc dans la dernière équation en 4 1^ termes, $\int \frac{r H - m' / -4- m'' f}{f} \} \cos 4 \backslash \&$ multipliant toute l'équation par $(mf^2 - H m' - f^2 m'V^2 - 4 - \&c^4$, elle devient intégrable, & l'intégrale est. i I I i Digitized by Google |

The text on this page is estimated to be only 15.45% accurate

Sb. condb Pa&tix* 317 Soit $\wedge^*$ on aura -jj; «jg, dou ion tire . . . -
» » - .:f. -Ij Îv». . : 1 l & intégrant, on aura . . $\wedge^*$]/-2~y X fin 4 « fin f-e K ,
« huit une conftatite $\wedge$ bittaire , ainfi que A U On an» enfuite df « $\wedge^j\wedge^V$ 9 à
forte que ceminé on' à' déjà fin 4 en fonction de ô, on aura aui& , en
iubftitlianc & intégrant, f en fondion de A. ' H rèle eocote à détermine» les
. ▼aleuts des diftaacei / , &c. $\wedge$ our embtailer toute la géo $\wedge$ ndîté poiffible ,
nous fupposeonsr que parmi les corps dont la verge eft chargée, il y en ait
un ou plufieurs de fixes , enfiarte qiê leurs diftances au centre demeurent
confiantes ; & nous défignerons par M R* la fomme des produits des mafles
de ces corps par les carrés de leurs diftances. Ainfi regardant Jes malTes m ,
m', m" &c, coname mobiles, il n'y aura qu*à ajouter à la fi $\wedge$ mme des
termes, mr* - $\wedge$ mfr'* $\wedge$ m"/'* 4cc, la coiiff> tante MK $\wedge$, De cette manière
donc la valeur Jde T deviendra, en faifant pour abrégér " $\wedge\wedge\wedge\wedge/\wedge$ " $\wedge\wedge\wedge\wedge$ «, i*- ,
/ L7iyu, $\wedge$ cd by Google

The text on this page is estimated to be only 15.21% accurate

518 MlfcCKANIQUE - AN A LITX:QUB. T e»;(MR' -^Air'-^ m' -
 I- &c)y - - ' * ^ • « & la variabilité de ' / 9 dcc,tlônneia (à caufe de q } ' ces
 équations lerquelles donnent d'abord en chafTant u* rd'r'—r'd^r r r"—~ r" 4^
 r ,, 4F— 7? «o, &ci &««^a^t ..y, ; * , ^ , &c , étant des confitaiites
 arbitraires. •r • • • , • " • * • ' Soit / r,* /' < ss ^ r , &c , on aura donc i*dpwm
 adt^ inème «f- r» &<: i», r « &c , étant d'jiutres confiantesr arbitraires.
 Maintenant je prends l'intégrale générale T*-!- =? confia laquelle à caufe de
 K ~ o , fe réduit ici à la forme îî' -H a»/-* OTy'^- H- &c/ «• & fubitimant
 par y* i^,y*«», &c, les valeurs • &c , tirées des équations . . d^ 9 4\$*
 9 dt* 7 ^ * ^ — r«'=:o, -^— V«* &c, jela réduis à la • ■ . forme - - ^ . » . , .
 . Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 13.57% accurate

$s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{O}$. $\ell \in \mathbb{P} \setminus \mathbb{A}$ -a T I B. $32^{\wedge} \cdot \cdot^{\wedge} \gg (\mathbb{M} \mathbb{R}^{* \wedge - \wedge} \mathbb{a} \gg \mathbb{r} \gg -\text{fut}^* 1^{\wedge} *$
 $\mathbb{H} - \mathbb{w}')$ laquelle donne, par une double intégration, $\text{if}^{\wedge -4} - \text{mi} - \mathbb{H} - \mathbb{m}' / \gg^{\wedge} \mathbb{y} \gg$
 $\mathbb{H} - \&c = 3 \ 2 \ \mathbb{C}^* \mathbb{f}^* - \mathbb{h} - \mathbb{H} \ \ell \ \mathbb{J}$) Se E étant deux, nouvelles coof tante $\gg^{\wedge} \text{it}$ pour,
 abréger - $\cdot^{\wedge} \text{iHi}^{\wedge \wedge} -4 - \mathbb{w} - \mathbb{f} - \mathbb{m}' \ \mathbb{r}'' + \mathbb{m}' \mathbb{V}''^* - \mathbb{f} - \&c = \mathbb{c}$, on aura $\wedge = 1 \ \mathbb{C} \backslash \mathbb{t}^{* \wedge} \mathbb{D}$
 / -ff, $\mathbb{d}^* \text{pii}$ Toii tire t en fbnâion de nous dénoterons cette fbnâion pâr 2,
 enforte que $\cdot^{\wedge} \gg^{\wedge} 8 \mathbb{t}$ différendant $\mathbb{d} \mathbb{t} = \text{sst} \mathbb{L} \mathbb{Z}$; mais nous avions fupposé $\mathbb{i}$ (en
 ajoutant $\mathbb{M} \mathbb{R}^*$ aux termes $\mathbb{m} \mathbb{r}^* - \wedge \mathbb{m}' \ \mathbb{r} \ \&c$, comme nous Tavons prefcrit ci-
 deflus) donc — $\mathbb{d} \mathbb{Z}^{\wedge} \mathbb{d} \mathbb{e} \ \&$ intégrant « $\ll \mathbb{y}''$ —, Ayant ainfi « en fbnclion de :(
 , on aura réciproquement : (en fondion de 6 , $\&$ nous défignerons par e cette
 fondion , enforte que $\mathbb{j} = 9$. Par conifquenc on aura d'abord $\mathbb{d} : \mathbb{e}^{\wedge} / \hat{\mathbb{o}}$, $\&$
 intégrant $\mathbb{t} \mathbb{s} = \mathbb{z} \mathbb{f} \& \mathbb{d} \mathbb{i}$ de force que. l'on aura auifi par-là t en' fonction de fl. *
 Ox il dans la valent de fubftitue pour $\mathbb{V}^*$, $\mathbb{Z}'^{\wedge}$, $\&c$, leurs valeurs $/ \mathbb{r}^*$, $\&c$, $\&$
 en fuite - $\mathbb{i} \mathbb{j} - \wedge / \mathbb{s}$, $\mathbb{j} 8 \mathbb{c} \mathbb{c}$, à la place de $\&c$, il cfl: clair qu'on aura $\mathbb{i} = \mathbb{i} \mathbb{M} \mathbb{R}' - \mathbb{t} -$
 /'P, F étant une fondion de $\gg$ rationnelle, entière $\&$ du iècond degré. Donc
 $\wedge''^{\wedge \wedge} \ \&$ fubflituant cette valeur ainil * $\cdot$ que celle de $\mathbb{d} \mathbb{t}$ dans l'équation
 différentielle $\mathbb{t}^{\wedge} \mathbb{d} \mathbb{p}^{\wedge} \mathbb{a} \mathbb{d} \mathbb{t}^{\wedge}$ trouvée plus haut, on aura $\mathbb{d} \mathbb{j} \gg = \mathbb{a} \& \mathbb{d} \mathbb{t}$ favoir, $\mathbb{T} \mathbb{t}$

The text on this page is estimated to be only 18.12% accurate

3JO AIÉCHANIKUK AVALIT.tQUC. dp a(à ti é :! (I d i T y- ^
T^ÂTSi" ^ -V- AÏK^ ' équation Téparée, dont Hatégraûon donnera p en
fonâion de t. Et cette valeur de p étant enfuite fubftituée dans 'la précédente
de r*, favoir, $r' = \frac{y''}{y'^2} - \frac{y'''}{y'^3}$ 9 ^^^^ «^" fondion de «; & de-là à
"cauîs de pr^ « • • (-^ r) &c » on aura encore z^, r^» en fbnéHons de fl.
Ainli toutes les variables <p, r', &c , feront connues en fondlions de ô , &
chalTanc ô , au moyen de la valeur de < en A, on aura f«4i ^c, en fondions
de ^ ; ce qui donnera la pofition de la verge , & celle de chacun des corps
mobiles 9 à chaque inftant. Fuique Je terme confaoc Mi^ exprime la
fbfmne det mafles des corps attachés à 'la verge, multipliées par les canes
de leurs diitances au centre de rotation , il ed clair <^ue fi on veut avoir
égard à la raa {le même de la verge , il n'y a qu'à fuppofer le nombre de ces
corps infini, & alors MA* ièra la fomme de> produits «fe chafjoe particule
de la verge par le carré de fa diftance au centre de rotatiôii* Aiofi le
problème n'eA; pas plus compitijae dans ce cas que quand on fait abftraûio|i
de la mafle de la verge. 4 X • fn général quand on veut avoir égard à la
ihaflê & à la fiL;iirc des corps mobiles, il n'y a qu'à confidérer chaque corps
comme l'aflemblage d'une infinité de particules qui conlervent entr'elles la
même fituation fi le corps eft follde, ou qui peuvent la varier, fuivant
ceruines loix, lorfque le corps eft flexible ou fluide; & nous avons montré à
la fn de la Sedion précédente (art. iièL fuiv.) comment 'é Digitized by
Google

The text on this page is estimated to be only 21.86% accurate

Sec o n d s P a r t i e. 331 on peut réduire cette considération en calcul , par des différentiations &c intégrations relatives à la figure du corps. Nous traiterons dans des Sections particulières du mouvement des corps solides & fluides , parce (que cette manière donne lieu à des recherches importantes &c) nous contenterons j'en finira DL'celle-ci ^ de donner un exemple de la méthode donc il s'agit sur le mouvement des cordes vibrantes. - Supposons le cas de l'article 57, dans lequel le fil est, pesant & extensible, & désignons par P la masse d'un élément quelconque du fil dont la longueur soit D prenant la caractéristique S pour représenter les intégrations relatives aux différences marquées par la caractéristique D y retenant d'ailleurs les autres dénominations du même article, il est visible que les valeurs de 7 de $^{\wedge}$ se réduiront à la forme ... ' . . • R étant relatif à la force de contraction de l'élément Ds , laquelle peut toujours être supposée une fonction de ce même ' élément. • Ainsi comme il n'y a ici aucune équation de condition \ satisfaisante, on aura, selon la formule de l'article 15 de la Section citée , cette équation générale pour le mouvement , du fil ou de la corde» Or il est clair. que Ds élément de la courbe du fil est Tta Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 16.53% accurate

33 a MicHANIQUE ANALITIQUE. représenté par $V(Dx^{\wedge} - Dy^{\wedge})$
i'Di^J'j donc différentiant selon on aura $s \rightarrow A - H \rightarrow fer^{\wedge}$,
& par conséquent $iJ^2?5 \gg 5ii \bullet i - i^{\wedge} - i^{\wedge} \bullet 4^*$ 5il '^^^^^ ^ oii il .faïUca encore
faire disparaître les doubles différences marquées par / P sous le signe 5 ,
comme . nous l'avons enseigné dans l'article 16 de la même Section. Ainsi
on changera le ternie $SR < . , .$ il" $\sim 57^{\wedge} \wedge j57 - 5^{\wedge}$, en marquant par un trait
les quantités qui (è rapportent au commencement de l'intégrale, c'est-à-dire»
à l'extrémité supérieure du fil , & par deux traits celles qui (è rapportent
au dernier point de l'intégrale, c'est-à-dire« à l'extrémité inférieure du fil]. On
opérera de la même manière sur les termes (emblables , U Ton aura cette
transformée, dans laquelle il ne se trouve sous le (îgne S que les simples
variations $x^{\wedge} i'y^{\wedge}$ Comme ces variations -font indépendantes entre elles, on
Dymzed by Google

The text on this page is estimated to be only 17.59% accurate

Sbcondb Partie. 333 aura d'abord ces trois équations indéfinies pour tous les points du fil. Quant aux termes affectés de $\langle T_x^{\wedge}, y^{\wedge\wedge} \rangle$ on remarquera que si le fil est supposé fixe à ses deux extrémités, ces variations seront nulles d'elles-mêmes, & les termes dont il «s'agit disparaîtront; de sorte qu'il dans ce cas la solution du problème dépendra uniquement des autres équations précédentes. Mais si le fil étant fixe dans son extrémité supérieure à l'extrémité inférieure libre, alors il n'y aura que les trois variations x', y, S^i qui seront nulles. Se pour faire disparaître les trois autres il faudra supposer $R'' = 0$. Ainsi dans ce cas il faudra encore satisfaire à la condition que M , soit nul à l'extrémité inférieure du fil. A l'égard des valeurs de l^j & de $V_m^{\wedge}$ il est clair que Dx , élément de la courbe du fil, est $= \sqrt{1 + P_x^2} \cdot (-I > / H - P; V_i)$ 9c que Dm y mène de cet élément, est $as t$, • étant l'épaisseur de cet élément. , 42. Si on suppose que le fil s'éloigne très-peu de la figure rectiligne c'est-à-dire de l'axe des y en sorte que » Se y soient toujours très-petites vis-à-vis de $6c$ par conséquent au lieu de Dxy Dy vis-à-vis At on aura aux quantités du second ordre $\frac{1}{h} \$ D s s s : ^ D \backslash * J E t f i$ on suppose de plus que

The text on this page is estimated to be only 20.21% accurate

334 MICHAÏNIQU'E ANALITIQU'B* lé fil foie crès^u
 excenfiblé^ enforce que les longueurs s foient prefque cooftances
 relativement au cémf , on «ura '^^27~ f conféquent aiiiffi prefque nuls. La
 dernière équation (e réduira donc à $rtDm'^{DR} = o^{\wedge}$ d'où l'on tire en
 intégrant, $R == \text{confit} - \bullet vS^*Dsy$ puifque Pans la théorie ordinaire des
 cordes ▼ ibrances» on faît abftraâion de la pefanceiir de leurs particules» &
 on . les fuppofe fixes par les deux extrémités. Faifanc donc dans ce cas V
 nul , on aura R confiante , & prenant t auie l'élément D s oa D\ pour
 confiant, on aura ces deux équations auxdifférences partielles « dont
 rintégrale complète eft, dans le cas de • confiante, /, U F dénotant deux
 fondions arbitraires. Cette formule contient toute la théorie des vibrations
 des oordes-lonores, comme on peut le voir dans les Mémoires des
 Académies de Berlin , de Péteisbonrg & de Turin. Dans le cas d'une chaîne
 pcfante vibrante, l'extrémité inférieure étant libre , il faut que R y Toit nul ;
 par conféquenc li on fait commencer les intégrations repréientées par la
 caraûériftique S au bout fupérieur de la chaîne où : { = o , on aura Rssam
 $f^{\wedge}\wedge St DsJ^{\wedge} A$ étant la valeur de l'intégrale $StDs$ pour toute la longueur de la
 chaîne. FaiCant donc cette fttbfittution dans les deux premières Digitized by
 Google

The text on this page is estimated to be only 13.46% accurate

Seconde Partie. 335 équacioAS, on aura, à caiffe Dm^*D en ptenanc $^{\wedge}$ « pour éooiUnte, $TT'^{\wedge}$ rD? Lorfque la chaîne eft uniformément épaifle, alors • cft Tunité, $S^*Ds = ^{\wedge}Sy A^{\wedge}$ i longueur de U chaîne, $^{\wedge}$ ies équatioAS deviexmeoc — — — . mais elles ne font intégrablçs par aucune méthode connue jufqu'ici. . . ■ ' • 4 Si on vouïoit regarder le fil comme inextenfible, il faudroit effacer dans l'expreflion. de V le terme $SfRdUs^{\wedge}$ & par conféquent dans TéquatioagàiéFale le terme $S^{\wedge}-^{\wedge}Cs^{\wedge}$ mais il faudroit d'an autre côté tenir compte de rinvadabi-* licé des élémens $Ds'^{\wedge}$ laquelle donne l'équation de condition $Ds - confi = o$; d'oà réfultera le terme $S^{\wedge}lDê$ \ ajouter au premier membre de la même équation (art. 13[^] Se**£**b. précéd.). De forte que comme ce nouveau terme eft entièrement femblable à celui qui doit être effacé , en prenant A à la place de on aura toujours les mêmes mules. ' . . Mais il faut remarquer à l'égard des cordes vibrantes, que dans le cas de rinextenfibilité , on n'en peut pas foppoier les deux extrémités fixes comme dans celui de l*«3ueiii(Sb)»*

The text on this page is estimated to be only 19.76% accurate

33[^] MÉCHANIQUE ANALITIQUE. Jicé; car pour que la coi'<-ic
foie tendue, il faut que l'une des extrémités soit tirée par une force qui
tende à l'allonger; & l'application la plus simple est d'imaginer, comme
dans l'art. 36, que la corde passe dans un anneau fixe, & l'autre extrémité enfile
un poids donné m . De cette manière on aura pour l'extrémité inférieure
de la corde x & y nuls, & par conséquent $x'' = 0$, & y'' sera
variable « & exprimera la distance verticale du poids m depuis l'origine
des coordonnées. Et il faudra pour avoir égard à l'action de ce poids, ajouter
à l'équation de K le terme $-w$, parce que le poids m tend à
augmenter & par conséquent au premier membre de l'équation générale, le
terme différentiel $-v^2$, Or puisque v n'est pas nul ici comme dans
le cas de l'article 41, il doit entrer dans l'équation générale le terme a en
remplaçant R au lieu de R dans la formule de l'art. 41. Ce terme, étant ajouté au
précédent, donne. . . — « $M \frac{d^2x}{dt^2} + w = 0$ » quantité qui doit être nulle
indépendamment de x , ou bien, à cause de D^2x très-
peu près, $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{w}{M}$. Ainsi comme i » & par conséquent on a une
quantité constante dans le cas des oscillations très-petites » et en fait. En
supposant l'oscillation de la pesanteur de la corde, on aura en général $X = \cos \omega t$. Il d'où
l'on voit que la force de tension v est dans le cas de l'inextensibilité égale
à la force de contraction R du fil supposé extensible. 44- Ces différents
exemples renferment à peu-près tous les problèmes que les Géomètres ont
résolus sur le mouvement d'un corps ou d'un système de corps; nous les
avons Digiiized by Google

The text on this page is estimated to be only 21.98% accurate

SecoK'DE Partie. 337 avons choisis à delîcin, poui- qu'on puilîe mieux juger des avantages de notre méthode, en comparant nos lolutions avec celles que Ton trouve dans les ouvrages de MM. Euler , Clair raut, d'Alembere, &c, & dans lesquelles on ne parvient aux équations diâTérentielles que par des raifonnemens, des conf* trublions & des analyfês Souvent aflèz longues & compliquées. L*aniforfflité , & la rapidité de la marche de cette méthode font ce qui doit la diftinguer principalement de toutes les autres , &c ce que nous voulions fur-tout faire voir dans ces applications. SIXIEME SECTION. Sior la rotatioa des Corps. L* iJifFOft.TA|fCB & la difficulté de cette queftion m'engagent à y deftiner QneSeâion à part , &c à la traiter à fend. Je donnerai d'abord les formules le? plus générales, & en même-tems les plus (impies pour repréfenter le mouvement . de rotation d'un corps ou d'un fyftcine de corps autour d'un point. Je déduirai enfuite de ces formules, par les méthodes' de la Setflion quatrième, les équations néccflaires pour déterminer le mouvement de rotation d'un corps animé pat* d# forces quelconques. Enfin je donnerai difiéientes appli* cations de ces équations. Quoique ce fujet ait déjà été traité par plufieurs Géomètresy b théorie que nous allons en donner, n'en (éra pat nmins utile. D'un côté elle fowmra de nouveaux moyens de ■ Vv

The text on this page is estimated to be only 17.52% accurate

338 M é C H A N I Q U E ■ A N A L I T I Q U E . tcfondre le
pi;oblème célèbre de h rotation des corps de 'fi;ure quelconque; de l'autre
elle fervira h rapprocher SC téanir Paus un même point de vue , les
folations qu*on x déjà données de ce problème » & qui font toutes fondées
£ir des principes différens , & présentées fous diverfes formes. Ces forces
de rapprochemens jfbnc toujours inftruéti6,&*ne (meuvent qu^être
très>uciles aux progrès de l*analyte ; wk peut même dire qu*îls y font
liéceflatres dans Técac oti elle eft au* jourd'liui ; car à mefore que cette
Science s*évend & s*enrichic de nouvelles méthodes, elle en devient auffi
plus complique; &: on ne iauroit: la finiplitier qu'en généralifant ÔC
réduiféinr tout-à-la- Fois les méthodes qui peuvent être fufceptibles de ces
avantages. • \$. I. Formules générales, relatives au Mouvement de rotation. I.
Les formules diâTérentielles trouvées dans la première Partie (art. 5 j , Seâ:.
cinquième) pour exprimer les variations que peuvent recevoir les
coordonnées d'un Tyrtme quelconque de po;iirs, dont les diftances font
invariables, s'appliquent nacurcilment à la recherche dont il s'agit ici. Car
cette luppoficion ne fait qu'anéantir les termes qui réfuiteroient des
variations des diftances entre les didérens points ; enibrte que les termes
teftans expriment ce que dJts le mouvement du fyflême, il y a de générai &
de commun à tous les points, abftraâion fake de leurs mouvemens relatifs;
or c*eiib précifémenc ce mouvement commun 6c abfolu que nous nous
proposons ici d'examiner. uicjiii^ca by Google

The text on this page is estimated to be only 15.63% accurate

Seconde Partie, 3³p a. En changeant dans les formules donc nous venons de parler, la caractéristique itn on ma pour le mouvement ab/bltt du fyftême > ces trois équations $J_{xssidii}^{ldM} = y, dN \, djf9ssdfi-hxdN \sim dL \, di^{dp} \, ^{ydl} - ^{xdMs} \wedge$ dans lesquelles x, y, z représentent à l'ordinaire les coordonnées de chaque point du système par rapport à trois axes fixes & perpendiculaires entr'eux; & où dx, dy, dz sont des quantités indéterminées, les mêmes pour tous les points, & qui ne dépendent que du mouvement du système en général. • 3. Soient maintenant x', y', z' , les coordonnées pour un point déterminé du système, on aura donc aussi dx', dy', dz' & par conséquent si on retranche ces formules des précédentes on aura pour plus de simplicité $x = j^{TM} \% y = y^{\langle \rangle} \wedge - ij^{\wedge}$ est ζ^* , on aura ces équations différentielles $d^3M - dN \, dw^{\wedge} dN = t: dL \, r' \, d\zeta^{udL} - dM$, dans lesquelles les variables ζ, η, χ représenteront les coordonnées

The text on this page is estimated to be only 21.86% accurate

t / 340' MiCHANIQUE . ANALITIQUE.. données des difflTérens points du fyftême , prifes depuis un point déterminé du même fyftême , point que nous nommerons dorcnavant le centre du lyllcnie. 4. Ces écju.uions étant lincaircs &c du premier ordre feulemenCyil s'enfuit de la théorie connue de ces fortes d'équations V que fi on défigne par $\wedge$ trois valeurs particulier Js de I, & par $\prime y$ & f, C les valeurs correipondautes de « & on aura les intégrales complectet h i c , étant trois confiantes arbitraires.. . Il eft clair i^{ue} $\wedge y$ K[^] ne font autre chofe que les coor*. données d'un point quelconque donné du fyfténie, & que de même r, K" & l"', C", font les coordonnées de deux autres points du ryftême 'aufli donnés à volonté ; ces coordonnées . ayant leur origine commune dans le centre du fyftême. Ainiîy en connoiff^{mt} les ordonnées pour trois points don» nés» on aura, par les formules précédentes, les valeurs des coordonnées pour tout .autre point, valeurs qui feront des fonâtohs linéaires femblables des coordonnées données. Mais il faut déterminer les* confiantes tf, 3, c* Pour cela je remarque que puifque dans les équations différentielles on a regardé comme invariables les difftances ctitre les différcns points du fyftême, ces difftances doivent être des fondions des confiantes* introduites par l'intégration ; ainû il faudra prendre qtielqueS'Unes de ces difftances Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 15.65% accurate

Secokdb Paitie. pour données, afin de pouvoir déterminer les
confiantes dont il s*agit. Soit donc les diftances $A, A \setminus A \setminus A \setminus B \setminus B$ &ci étant
fuppofée^ données; & fairant pour abréger $C'aB.^!\pm\x!l z\x!l g//\_^-$
 $<<^Hv<<''^*-c^* \wedge,, \wedge^;[\wedge\xjj\rangle\_fw$ « on aura, à la place des flx dernières
é<juations, celles-ci plus limples.

The text on this page is estimated to be only 21.39% accurate

•34^ MiCHANIQUE AMALITIQyB, Or , fi dans les trois premières de ces équations on substitue les valeurs de I , < de l'article précédent » on aura en vertu des autres équations, les trois points du système d'où l'on tirera aisément les valeurs de B , t. y. Si les trois points du système que nous avons pris pour donnés (art. 3) forment des triangles rectangles autour du centre, lequel en fera le sommet commun , c'est-à-dire « que ces points soient pris dans trois droites passant par le centre j & formant entr'elles des angles droits, il est visible qu'on aura alors Or'sso, $G'' = G''' = s$; & les trois équations ci-dessus donneront * sur le champ $r * F'' r'' - 6$. Au reste, quoique les trois points dont'il s'agit soient à volonté , si on regarde comme données les fix quantités $A'y A'', A'' \backslash G \backslash G'', G'''$ y il est clair que les coordonnées d'un quelconque de ces points seront déterminées par celles des deux autres; par exemple, les coordonnées $4''$, $4'''$ seront déterminées par les trois équations

Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 16.48% accurate

Seconde Partie. 54} ^// ^/// ^ ,// ,/// ^ ^1 j^ii ,, Jeqttelles, dans le
 jcts de =s o ^ o 9 l?^'aso , donner «'''=r"<"-«'''V 7. Quoique l'analyse
 précédente soit très-direâe, on peut néanmoins parvenir aux mêmes résultats
 par une voie plus naturelle, en partant de cette considération géométrique,
 que la position d'un point quelconque dans l'espace, est entièrement
 déterminée par ses distances à trois points donnés» En effet, supposons que
 les 'coordonnées de ces points soient jr'» : (pour le premier, $s^y \backslash i$ (pour le
 second, $\& ^9 y \gg ^$ pour le troisième » & que ^ (oient en général les
 coordonnées d'un autre point, quelconque donc les distances à ces trois
 points-là - soient ■ représentées par /, /72 , /z ; il est clair qu'on aura ces
 trois équations $^ \_ ^ (y - h / i - i' f * \bullet$, à l'aide desquelles on pourra
 déterminer $x^j^ \backslash$ en fonctions de $x \backslash y \backslash x$, &c. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 11.87% accurate

344 MÉCANIQUE ANALYTIQUE. g. Pour faciliter cette détermination, nous nommerons de plus r, h les distances entre les trois points donnés, c'est-à-dire, les trois côtés du triangle formé par ces points, ce qui donnera ces trois équations, $r^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha$, $h^2 = x'^2 + y'^2 - 2x'y' \cos \alpha'$, $r^2 = x''^2 + y''^2 - 2x''y'' \cos \alpha''$. Nous ferons ensuite pour abréger, $a = r, b = h, c = r$, & par ces substitutions les équations précédentes, ainsi que celles de l'article précédent, deviendront $r^2 + b^2 - c^2 = 2ab \cos \alpha$, lesquelles peuvent être changées en celles-ci plus (simples) $e' = -f, r = -f$, •

The text on this page is estimated to be only 12.96% accurate

Seconde Partie. $iA < \bullet \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$. 9. La difficulté confite maintenant \
trouver les Incoii'* nues $\wedge$, , Ç dans les crois dernières équations ; or en fai«
/anty pour abréger y » . f-» j » . on tirera d*abord des deux «• ESB ■ I ..--1
— _ & ces valeurs étantYabftituées dans réquation $1^* - f^* \gg^{\wedge} - t - \wedge >$ on
aura» après avoir ordonné les termes, H- a rr** ç*»»^' Y**-" — rî*^-' (V^'-
^» wç* Repiéièntons par $\wedge$ le coefficîent de par a B celui de e par C
lesdeuxietmes $\wedge"/*^{\wedge}$ — .ff/**. ^M*" — $\wedge > */$, on aura à réfoudre l*équation $\wedge$
{• -h » 5« = r** •" V -» c, Xx

The text on this page is estimated to be only 11.93% accurate

34[^] MicHANIQUE ANALtT I Q U E, laquelle donne . m Or on a
 5- — ^ C= C^^' — (^/* — r = - rr<' - ^' (f^ - - r -v H- r«' - ^" - ^ ^v/ de ferte
 qu'en Êiifanc encore oi;i aura ' * Mais les valeurs àe AyB y D Ce réduifent
 aifôment aux expreflions fuivantes , A^(^* -4- ."4- { 'V (t* — { r «"■4'«'C7
 Digitized by GoogI(

The text on this page is estimated to be only 13.71% accurate

Second- B Partie. 347 — V H- $\wedge^*$ / • - M " -H r - À V ; n donc on
 fubiticue ces valeurs, qu'on fafle pour plus de fimplicicé» . • on anni Pour
 anvoir les valeurs de | & de « » il fuffira de remaiu quer que les équations
 primitives demeurent les mêmes $\wedge$ en y changeant à la fois les quantités $\wedge$,
 $C'^\wedge$ en' « , on en l'y I"; or les quantités $a^\wedge B$ écânt des fondions rationelles de
 $f^\wedge y^\wedge$ % Jt* ne peuvetit que demeurer les mimes auffi ; ꝑc la quantité c étant-
 exprimée par une fonâion radicale des mêmes • quantités / , g, &c, pourra
 changer de figne y c'eft pourquoi on aura en général , • . Xxi

The text on this page is estimated to be only 22.61% accurate

• 34[^] M £ c H A N t Q U I A N A L I T I Q 4 J £ • De plus pour déterminer les (ignés de il fu£ira de conildérer l[^] deux équacions |'Ç-h*«h-ç'Ç=*a', ||-f-t'V+î"≤sr; 8c fibftinanc les valenni précédentes de « » |» on Yena que pour la vérification de ces équations , il fera nécefluter de prendre les lignes inférieurs de c dans les expreffioos de • & de Donc enfin on aura I O. Il eft dair que dans ces expreffions , les quantités a y h y c étant des fonéUons des diftances /, g, h , / , m, n , ne dépendent que de la poficion refpe[^]live des différens points les uns par rapport aux autres ; enforte que fi on regarde cette pofition comme invariable, ce qui a lieu à l'égard de tout corps folide , il faudra que » demeurent conP tantes, pendant que le corps Ce mèut;«& ces quantités feront ieulement variables d'un point du corps à l'autre j aulieu que les quantités [^], w'» C[^] l[^]i»^{'^}[^] qui fe rapportent [^] des points* déteiminés du .corps, feront les mêmes -relatiyeitient à tous les autres points , U varieront d'un moment à l'autre pendant le mouvement da.corps. Pour fe fermer une idée plus nette de ces différentes qnan- , tités par rappôri [^] un corps quelconque , on confidéfe qœ û par le point donné du corps qui répond aux coordonnées Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 26.20% accurate

Secondé Partie, 349 $\ast^{\wedge}y^{\wedge}\rangle\rangle$ & $9\ast 1^{\wedge}i^{\wedge}o^{\wedge}$ avons nommée ci-
 defTus'le premier point , mais que nous nommerons dorénavant le centre du
 corps, fi par ce point , dis-je,.on mené trois axes parallèles anzascas
 de&coordonnées $x,^{\wedge}, i\{$, les* différences $x - y, \hat{i} - ^{\wedge}$, c*eft-à-dire, les
 quantités I, $\rangle\rangle$, Ç ne feront autre choie que les coordonnées d*un point
 quelconque du corps par rapport à ces mêmes axes; de même les quantités
 f $\rangle\rangle$ & $\ddot{i}^{\wedge}\rangle\rangle$ A (f feront les coordonnées des deux autres points donnés du
 corps rapportés aux mêmes axes. Or comme la poficion de ces points dans
 le corps cft arbitraire, on peut fuppléer pour plus de fimplicité, que leurs
 difti $^{\wedge}$ nces au centre du corps foieac $=3 i$, de que de plus les droites menées
 par le centre & par les deux points dont il s'agit, forment enti'elles un angle
 droit; moyennant quoi on aura $/ - i > g \Rightarrow i$, & $A' \rangle\rangle/* -f - ^{\wedge}$ an 1 ;.ce qui fim*
 plifiera beaucoup les valeurs de a, 5, c. • . Qu'on imagine maintenant que le
 corps ibic placé de manière que les deux droites dont nous venons de parler,
 coïncident avec les axes des coordonnées $^{\wedge}$ & enforte que l'on ait dans ce cas
 $r = i, o, \Ç' = \langle\langle o, o, \rangle\rangle - i, = o$; les formules de l'article $^{\wedge}$ donneront pour
 lors D'où il s'enfuit que a $^{\wedge} b yC$ ne font autre chofe. que les coordonnées
 reûangles d'au point quelconque du corps , rapportées à trois axes paflant
 par fon centre, U fixes dans ion intérieur $^{\wedge}$ dont Tun paflè par le point qui
 répond aux coordonnées f,!/, $^{\wedge}\rangle\rangle$ l'autre par le point relatif aux $\langle\langle V$, & le
 troifieme foit perpendiciUaire $^{\wedge}$ ces deuX'U. 1 1. Ainii donc on aura pour
 chaque point du corps ou

The text on this page is estimated to be only 16.77% accurate

350 MÉCANIQUE ANALYTIQUE. système des coordonnées»
dans lesquelles en faisant pour abréger, mais il faudra que les six quantités
 2^x , » satisfassent à ces trois équations de condition (art. 8) » en sorte qu'il
n'y aura en tout que six variables dépendantes du changement de situation
du corps; savoir, les trois x, y, z qui déterminent la position du centre
dans l'espace, & trois des a, b, c Ces variables, feront les mêmes
relativement à tous les points; au contraire les trois quantités b, c feront
différentes pour chaque point, & ne dépendront que de la position respective
des points les uns par rapport aux autres. Il est bon de remarquer, au reste,
que les trois quantités n, K, L sont aussi telles que ^ Digitized by Google :

The text on this page is estimated to be only 23.91% accurate

Seconde Partie. La première de ces équations fait de ce que (tft!'^l(»T |"-4-«'»"-HC'Ç"/' = i> & les deux autres sont évidentes par elles-mêmes. Ainsi l'on aura entre les neuf variables, x , y , z six équations de condition toutes semblables ce qui fait que ces quantités sont permutable entre elles. 12. Les formules qui viennent d'être trouvées par des considérations particulières, peuvent se déduire aussi immédiatement de la simple considération des coordonnées rectangulaires. En effet, puisque x , y , z sont les coordonnées d'un point quelconque du corps ou système par rapport à trois axes qui se coupent perpendiculairement dans le centre & que x' , y' , z' sont aussi les coordonnées du même point, mais par rapport à trois autres axes qui se coupent pareillement dans ce même centre; il s'en suit, I^e que I⁹ peuvent s'exprimer en fonctions de x , y , z & que ces fonctions ne sauraient être que linéaires; car si on suppose entre x , y , z une équation linéaire le plan quelconque, il faudra que la transformée en x' , y' , z' (soit linéaire aussi, puisqu'on fait que l'équation d'un plan est toujours du premier degré, quelles que soient les coordonnées auxquelles on le rapporte. Ainsi les expressions de x , y , z en x' , y' , z' ne peuvent être que de la forme suivante »

The text on this page is estimated to be only 19.66% accurate

352 MÉCANIQUE AMALXTIQUE. les quantités $I', l^{\wedge}$ & c, étant les mêmes pour tous les points du corps, & dépendant uniquement de la position des axes des $a, \wedge$ c par rapport à ceux des $|, t$ I 3. Or comme les coordonnées $0, \ll, \zeta$ & $\hat{u}, ^5, <r$ ont la même origine $\wedge$ répondent à un même point quelconque il est clair que la distance de ce point à l'origine connue des coordonnées, sera exprimée également par $-H 9^*4- CJ 8c$ par $-h c^*$; donc il faut que les deux quantités $r-4\ll^{\wedge}H^*r$ & soient identiques te que par conséquent la première dérivée la. iêoode > en y substituant les valeurs de $\wedge \gg \gg \gg$ (1 en a, i c. . Faissant ces substitutions , & comparant les termes semblables on aura les six équations de condition, $\wedge/-H/. \wedge \zeta^{\wedge}as 1, r''^*-*- \blacksquare'''^*-\bullet I$, par lesquelles les neuf variables $\wedge, \gg' \gg C^{\wedge}$ (è réduiront k trois indéterminées ; & ces équations s'accordent comme Ton voit, avec celles de Tartide ii. l[^]. En général on considère deux points quelconques, dont l'un réponde aux coordonnées & l'autre aux coordonnées $1 1, \ll i, \&: que a, 3, ai \gg 3i, \wedge i$ soient les autres; coordonnées répondantes aux mêmes points il est clair que la distance entre ces deux points sera exprimée également

The text on this page is estimated to be only 14.57% accurate

Seconde Partie. 3³ c-alemenc par $\frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{i}{J} \sqrt{U} p.i.r \right)$
i/ ffa — a iZ-^{fh} — ^{fc} — c i j'y'; de forte qu'il f.iudra que l'on ait toujours
cette équation identique — 1 1 H- — " — Ç .fl ^ - i/-l- ci/. Mais il est
visible que pour av«tr|i', m, (i, il n'y a qu'à chat^{ger} a^{Bt}Cenai^{éif}Ci dans
les expressions générales ^I » * > Ki & qu'ainllr pour avoir les valeurs de |—
| f , • — •I» ^— (i,iln*y aura qu'à mettre dans les mêmes espreffioos
tf^{tfi},[^]-^{^^}!» c^{ci} à la place de , c, Substituanc enfuice ces valeurs dans
Téquation identique précédenre[^], & comparant les termes , on aura les
mêmes équations ic condition trouvées ci-deflTus. D où Ton peut conclure
que ces équations lonc les feules nevclilires pour taire enlorcc que la
position respecclive des différens points du systême les uns par rapport aux
autres, soit déterminée uniquement par les quantités a , ^ , ôc ne dépende en
aucune manière des quantités « , d ^"y &c. I 5 • On peut trouver auffi par la
même méthode d'autres relations remarquables entre les mêmes quantités
[^] > C'y ^\ &c, &c qui peuvent être utiles dans ptufléurs occasions. Et d'abord
fi on ajoute ciijemble les trois formules de l'article iz, après les avoir
multipliées respecclivement par ^, ou pat è\ n% c", ou par T, on aura, en
vertu des équations de eondicîoot de rartide précédent , ces formules
inyeriès 9 ^ «

The text on this page is estimated to be only 12.73% accurate

3⁴- MÉCHAMIQUE ANALITIQUE. donc fubiVituant cçs
valeurs de $\hat{a}$, $\hat{c}$, r dans Téquatlon identique $-+ 3^* -H^{\wedge} = \hat{c}^* -H^{\wedge} \gg \gg^* -f- \zeta^*$,
on aura par la compa[^] raifon des termes » ces nouvelles équations de
condition, l'» H , $\hat{c}$ » $H - r^{**} 1$, $\bullet^* \ll^{\wedge} -f- H - I$, $\hat{c}$, lesquelles font
iiéce0àirement une fnête de celles de l'ardcla précédent, puiqu'elles
réfulcentde lamême é[^]ationoden* tique. 1 6- Mais fi on cherche direâement
les valeurs de a , $\hat{c}$, c par la rclokition des équations de l'article -ii, on aura[^] •
■d'après les formules connues» 'jt f en fuppoTant Cès expreffions doivent
dodb êtp» identiques avec celles de l'article précédent; ainfi en comparant
les coefficients des quantités $C > \ll^{\wedge}$ on aura les équations faivantes, $\hat{c} \text{ — } \ll'$
 $\ll A | \ll, \hat{c} 1 \gg \ll \text{ifc } y, I''' \text{ — } r \text{ — } A: \zeta''$, Oi fi, oa ajoute enfèmble les can[^] des
trois premietes» Digitized by Coogle

The text on this page is estimated to be only 16.44% accurate

Seconde Partie. 3⁵ on a $t_j'' - y^{\wedge} (X''?.''^{\wedge}) * H- . , '' = A : *$
 $\zeta''^{\wedge} j$ le premier membre peut se mettre sous cette forme $f''^{\wedge} - f-^{\wedge} j (^{\wedge}'''*$
 $-4- j-$; — donc par les équations de condition de l'arcide 13, oecte équadon
se réduit $ki^{\wedge}k\% d^*où^{\wedge} = \pm 1$. Pour favoir lequel des deux figoes on doit
prendre, il n'y a qu'i considérer la valeur de k dans un cas particulier; or le
cas Je plus îiniple est celui où les trois axes des coordovft[^] tff c
coUhcideroient avec les trois axes des coordonnées •> Ky auquel cas on
auroit $|= a, 1 = 5$, $|= c, -6c$ par conséquent par les formules de l'article 1 1 ,
 $f = 1$, $= i$, & toutes les autres quantités[^] , &c, nulles. En feifant ces
substitutions dans l'expression générale de clk devient $= i$. Donc on aura[^]
toujours $A = i$. Au reste , on voit que les trois dernières équations cideflus
font les mêmes que celles que l'on a supposées dans l'article 1 1 ; les iix
autres s'en déduisent naturellement par analogie. 17» Ainsij si on vouloit
réduire les neuf quantités [^]> s'' , &c, à trois indéterminées, il suffiroit d'y
réduire les fix f , $i''^{\wedge} \zeta''$, par le moyen des trois équations de condition
«•'-4- $\zeta''^* = i$, $e' |'' - f - \ll'' - f - C' C'' = o$, puisque les croi[^] autres [^]V'' , ζ''' font
déjà connues en fonctions de celles-là. En prenant , par exemple, $n'^{\wedge}fc^{\wedge}$
pour indéterminées[^] la première équation d'abord . ' 6c il n'y aura
plus <ju a déterminer par les deux équations

The text on this page is estimated to be only 16.15% accurate

MiCHANIQUE AMALITIQUE. tions $n''^{-h} I - f''\% \& \ll V' - 4 - r'^{\wedge} = - f'.t''$. Or on a $f n' f f' - h r y - f - f r - r = ^{\wedge} V f$; équation identique ; donc i' $H - t' = (n - \zeta' V ^{\wedge} V$ Ainfî en combinant les deux équatioas C Enfyite les trois dernières formules de l'iircicle précédent donneront I 8. Pour réduire toutes ces ezpreiHons à une forme rationnelle fie entière V il n*y anra qu'à faire $^{\wedge} = \text{cof } x$, $a' 8 = B \text{ fin } X \text{ cof}/*$, $^{\wedge} \gg \text{fin } X \text{ cof} \gg$, ce qui donnera $C = \text{fm } x \text{ fin } a^*$, $8 \ll - \text{cof } x \text{ cof } M \text{ Cofr} - \text{finj itfinr}$, $\{ " ssa - \text{cof } X \text{ lm}/* \text{cof} \gg$ $4. \text{cof} / \ll \text{fin} \gg \ll | " s s \text{fin} > \text{fi Br} \ll \ll " \gg " \text{fin} / \ll \text{cofr}^{\wedge} \text{cof } x \text{cofi} \gg \text{finr}^*$. $^{\wedge} \text{éa} - \text{cof} / \text{ucof } r \gg \ll * \text{cof } x' \text{fin} / \gg \text{fin} \gg$ '. Et il n'est pas difficile de concevoir d'après ce qui a été dit dans l'article lo, que x fera l'angle que l'axe des coordobnées 0, fait avec celui des que a^* fera celui que le plan , paï Tant par ces deux axes , fait avec le plan des coordonnées $^{\wedge}$ fie fie qu'enfin v fera l'angle que le plan dei coordonnées a, b fait, avec le pian paflànt par les axes des toordonnées f fie $^{\wedge}$. De forte que- fi on regarde l'axe des coordonnées qoî eft cenfé païlèr toujours par les mêmes points dtt fyftême, comme on axe de rotation du fyftêmei Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 22.19% accurate

« Seconde Partie. 3^e A fera l'inclinaison de cet axe à l'axe fixe des coordonnées /" fera l'angle que le même axe de rotation décrit en tournant autour de cet axe fixe, & > fera l'angle que le système lui-même décrit en tournant autour de son axe de rotation. Mais nous donnerons plus bas une manière plus (simple & plus naturelle, d'employer la considération de ces angles. 19. 1^{er} (qu'il s'agit d'un corps solide, les quantités > ^ > doivent demeurer constantes, tandis que le corps change de situation dans l'espace ; parce que la condition de la solidité confie en ce que tous les points du corps gardent invariablement les mêmes distances entr'eux. Ainsi dans ce cas les axes des coordonnées x, y, z , doivent (être censés fixes dans l'intérieur du corps, mais mobiles par rapport aux axes des autres coordonnées X, Y, Z , axes qui sont fixes dans l'espace. Or quel que puille être le changement de situation du corps autour de son centre, on peut démontrer qu'il y aura toujours une ligne droite passant par ce centre, laquelle conservera la même situation, & pour laquelle les coordonnées x, y, z , > feront les mêmes. Car puisqu'on a en général, pour une situation quelconque du corps, les formules $x = \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$, $y = \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma$, $z = \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma$, si on suppose que dans une autre situation quelconque du corps, les quantités α, β, γ , &c, deviennent α', β', γ' , etc, on aura aussi pour cette nouvelle situation, $x' = \cos \alpha' \cos \beta' \cos \gamma'$, $y' = \sin \alpha' \cos \beta' \cos \gamma'$, $z' = \sin \alpha' \sin \beta' \cos \gamma'$, (si l'on a $\alpha = \alpha', \beta = \beta', \gamma = \gamma'$ &c, il y a, d'ailleurs, une

The text on this page is estimated to be only 16.04% accurate

MéCHANIQUE AMALITIQUE. points qui ne changent pas de place, il est clair qu'on aura pour chacun de ces points les conditions $\frac{b}{i}$, «bb» $\frac{i}{i}$ De sorte que tous les points de cette espèce se trouveront déterminés par ces trois équations $l^{\frac{f}{f}}sso,* — ri:sso, < — Cf = ao;$ (avoir, $a(i' — i'i; + - \frac{r}{i}; - t - c^{\frac{r}{i}}; s = o, fl^{\frac{r}{i}} I I ; ^c Cn''' — « o, (t\{<; - o) - H - ^ a'' - c'' a''' - »$; « .< ». Ainsi les valeurs de $a, 3, c$, tirées de ces équations « donneront la position de ces mêmes points dans le corps ; mais il est visible qu'en éliminant deux quelconques des trois inconnues $a, ^$ » la troisième s'en ira aussi ; Il faudra donc que l'équation résultante ait lieu d'elle-même ; & elle a lieu en effet, comme on va le voir. 20. Pour cela j'ajoute ensemble les trois équations précédentes, après les avoir multipliées respectivement par $^i - h^i i, » - 4 - «' I, ^ - 4 - C i ;$ & ayant égard aux équations de condition de l'article 13, ainsi qu'aux équations semblables qui doivent avoir lieu entre $i, '' i »$ & c , on aura $\bullet f - c I I r ! " t ! I - V I — - 1 ! r I$ Si on ajoute ensemble les mêmes équations, même après les avoir multipliées respectivement par $\bullet f - ^i, tJ' < ^ - t - ^ - i »$ on trouvera de la même manière. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 13.40% accurate

Seconde Pautii, Enfin les mêmes équations étant multipliées
ie(pe^vement par e^{*+} . (H i i, " $\wedge \wedge 1 \wedge$. r'i, «c en fuite ajoutées , donneront
Omm a Tl -H h" i 4- C Ç" $!$ — f k'i — -l $\wedge$ C Ç'i $\wedge$ " Ces transformées
équivalent vitibiencnc aux équations propofées; ainû, en faifsmnt pour
abrégér ' ' ' 1 p i=, e' $\wedge$ " I -4- I $\wedge$ ç'T I - f f I _ 1, *! _ $\wedge$ ""i , 1 Q «i'r'i H- «' $\wedge$
ç $\wedge$ i — i $\wedge$ i* I — **v I — ç*' <' I $\wedge$ a/ $\hat{i}$ = r r I -H Cl - 1' f 1 — I — r I > on
dura à réfoiidre ces trois équations « * dont la troideme eft, comme Ton
voit, une fuite des deux premières* Or celles-ci donnent = $\wedge$ » D'où Ton tire
ft $\wedge$ kP $\wedge$ h $\wedge$ kQ. $\wedge$ c $\wedge$ sshR $\wedge$ en prenant pour k. une quantité arbitraire. 21.'
Telles foniTdône les valeurs des coordonnées a $\wedge$ h $\wedge$ c $\wedge$ pour tous les points
du corps qui (e retrouveront dans la même poncion après la rotation du
corps autour de {on centre fuppofé immobile; & il eft clair que ces
coordonnées répondent à une ligne droite païiant par ce centre, & faifanc
reTpedivemenc avec leurs axes des angles donc les coinus font by GoogleJ

The text on this page is estimated to be only 22.02% accurate

^60 MÉCHAUIU : ANALITIQUE. Ainsi la rotation du corps, quelque compofce qu'elle foit, fera en dernier, réfultat, équivalente à une rotation Ample qui fe ferbit faite autour de la ligne dont il s'agit , fuppofée fixe ; & par conféquent on pourra appeller cetcce même ligne. Taxe de rotation du corps. 2 2. On peut donc détéryniner la pofcior de cec axe, relativement aux axes des coordonnées ii, 3, c, par le movcn des trofs quantités P, , Ry ainfi qu'on vient de le voir; mais fl on vouloit rapporter cette poruion .lux axes des coordonnées ^, il n'y auroit qu'à fui r.ier dans les eaçreflions de ces coordonnées (art. 12) à .1 pl.;ce de tf, ByCy leurs valeurs kPyhQy hR; ce qui donneront »Bs;ijlf;CasibiV^en faiiànc pour abregcr Ces valeurs de |, «» C répondenc donc à tons les points de Taxe de rotation; par conféquent cet axe ^t avec ceux' des coordonnées |, », des angles dont les cofinus fônt repréfentés relpeaivement par ^^Xr*-*-Jtf»-*-N»; > • • • ^ ^ De forte ane les quantités L y M y N font entièrement analogues aux quantités P, Qy Ry avec cette différence, que tandis que celles-ci fe rapportent aux axes mobiles des coordonnées ût ipC, celles-là fe rapportent aux axes mobiles des coopdonnées Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 15.05% accurate

Seconds PARTic, 3¹ données |, », Ec l'on remarquera que Z* -f-
iW* aV* »=:P*-hÇ'-4iiî% ce qui fuie de ce que l'oa a généralejnenc ••-4- =
a* 4- ^* -4Au refte, ^ fi dans les expcdfions de Z, ilf , JV, on fab-<' (titue les
Talents de P, il (art. lo), & qu'on y emploie les rēdnâions de l'^rdcle 1^9 on
aura Si on confidete que le mouTemenc da corps' dans un inftant» l'axe de
locadon dont nous venons de ' parler, fera fixe pendant cet inftant» & le
corps ttotment réellenient 6c fpontanéfflent autour de cet axe, qui fera par
conféquent l'axe fpontanée de rotation du corps , comme on l'appelle
ordinairemeac Pour déterminer donc cet. axe» on fuppôiera quelesquan*.
tités f I, I, ^ I, ^" i^Ucy ne foient qu'infiniment peu différentes de e', 1^9
6cc, enforteql'onaitf 1 ms^Ç-^d^^ 1/ 1 « 1/*', C I -i- rfÇ' , r I « , ficc; ce
qui donnera (art. 10) %PwM» 1^" dK""^*""d,/' ^Ç»dÇ"^^"d^^^n'd»""-^^' d^t
%Qmm^d^ -^ddJ*» H-ifdif^ ^d^ — i'W — dtt Mais les trois dernières
équations de condition de Uarrîde 13 étant différenciées, donnent f^^r JdJ'-
^tld^ — - — ^dit ^^'dri^ ^""d^ + d"d^ ^ ^dK^ Zz

The text on this page is estimated to be only 12.90% accurate

$3^2 M_t \text{CHXNIQUE ANA.LITIQUE.} = 5 - d'' - m'' d n'' - \zeta''$
 $<^{\wedge}$; donc substituant ces valeurs 'fc changeanc, pour conferver
 Tiioinogaiéité $P > ^{\wedge}$ » $i^{\wedge}$, 'itr=>.il"i'^^d^r>'*dri'y dQ^^ de^'-h^ d^''^^' dti\
 $dK m^l'' d^{\wedge} t^{\wedge} \text{àt} : .^{\wedge}(^{\wedge} i > .^{\wedge} j > ^{\wedge} j t >)$ feront les coûques des angles que Taxe *
 Jpontwiic de rocatioo fera avec lès axes coordonnées a^h y c (art. xi\ 24* ^1
 mêmes subditucions dans les expreA fions de $M^{\wedge} N$ de l'article ii^èc qu'on
 aie égard aux trois dernières équatioAs - de condition de Tarcicle 1 5 ,
 diffifrentiées, on aura» en changeant $M^{\wedge} \text{tiend} L^{\wedge} dM^{\wedge} dN_j$ ces formules ' i/Z
 $= * <^{\wedge} -h n'' d ; '' -+- d(f', dM^{\wedge} i : d^{\wedge} h^{\wedge} d ? * J^{\wedge} d \zeta \backslash dN^{\wedge} i' d n'^{\wedge} d n ! ' r '' d$, par
 lesquelles on pourra déterminer lapofitionderaxej^o»* tank de rotation à
 L'égard des axes des coordonnées «,^|; car lé premier de .ces axes fera avec
 les trois autres des angles, dont les cofinifs feront exprimés par
 $.^{\wedge} j^{\wedge} t^{\wedge} y^{\wedge} j$ Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 12.08% accurate

Seconde Partie. 3 53 Et si l'on veut faire dépendre les valeurs $6c$ JLy $dM^{\wedge} dN$ de celles à dP y dQ y $dR^{\wedge}$ on aura, comme dans iû. même article ii, les formules $dN^{\wedge} TMi^{\wedge} dP^{\wedge\wedge} dQ^{\wedge l''}$ d R'y lèfqtuelles donnent sur le champ» en $T^{\wedge}rtu$. des équacioiil de condidoa de Tarcicle 13, $*^{\wedge} dL'^{\wedge} dM'^{\wedge} dN'^{\wedge} dP'^{\wedge} dQ'^{\wedge} dR^{\wedge}$ 25* Les quantités $dL^{\wedge} dM^{\wedge} dN$ ont encore ime aatra inilicé dans la détermination du mouvement du corps ; elfes iènrent à ezpfilkier d'une manieie fort fimple les difiéreq« tielles des coordonnées |, «, $^{\wedge}$. En eflèt» si on difféxientie les fotmules de Tarcicle la » en y regardant tonjonrt a, comme confiantes» par U nature des corps folides; on 4 d'abord $dt^{\wedge}adi: ri^{\wedge}bdï: " ^{\wedge}cdC^{\wedge}l$ si enfoké on inbfûaie dans ces formules $\backslash^{\wedge}$ expreifions de $c^{\wedge}hy$ e trouvées dans Tarticie 1 5 , & qu'oa ait égard aux équations de condition de ce même article différentiées , on aura sur iur le champ (art. 24) $M::^{\wedge}UM'^{\wedge}ndN^{\wedge} . dn^{\wedge\wedge}dN—KdL^{\wedge} dl^{\wedge}ndL -^{\wedge}idMy^{\wedge} Zz$ a

The text on this page is estimated to be only 17.19% accurate

r I 1 364 MÉCHAMIQUE ANALITIQUE. équations endétement
fembUbles à celles de Tamcle 3 » 8c qui font voir par conféquenc que les
f{üuaités d $L^{\wedge} dM^{\wedge} dN$ font les mêmes de part & d'autre. 2 6* Ces
formules font aufTi de la même forme que celles qui ont été trouvées' dans
l'article 7 de la troUieme Seâioii de la première Farde, par la confidération
des rotadons pardculieres autour des trois axes* des coordonnées; d'oii l'on
peut conclure imiâédiatement, 1*. que les quandtés d $L^{\wedge} dJ^{\wedge} dN$
repréfentent les angles élémentaires décrits parle corps autour des axes des
coordonnées $^{\wedge}$, $^{\wedge}$, $^{\wedge}$; & comme les quantités d $P^{\wedge} dQ^{\wedge} dR$ font relativement
aux axes des coordonnées $a^{\wedge}$, $^{\wedge}$, $c^{\wedge}$, ce que d $L^{\wedge} dM^{\wedge} dN$ font à l'égard des
axes des $^{\wedge}$, $^{\wedge}$, il s'enfuit aufTi que d $P^{\wedge} dQ^{\wedge} dR$ font les angles élémentaires
décrits autour des axes des $<2^{\wedge}$, $^{\wedge}$, $c^{\wedge}$, x° . Que ces rotations particulières fe
compofent en une feule autour d'un axe, faifant avec ceux des coordonnées
 $^{\wedge} C^{\wedge}$ oua $^{\wedge}$, $^{\wedge}$, $c^{\wedge}$ des angles dont les a>finiisfimt $> dL^{\wedge} dM^{\wedge} dN^{\wedge} dP^{\wedge} dQ^{\wedge} dR^{\wedge}$
dM dN dP VCd $L^{\wedge} dM^{\wedge} dN^{\wedge} dP^{\wedge} dQ^{\wedge} dR^{\wedge}$ y v {4L*hdll£*%-dli*) 9 ®" V(dP'-t-dQ'-
hdR')9 ■ dQ dit . p , l» déjà vu ci-defltis. f. Que l'angle élémentaire décnt
autouc de cet axe , fera exprimé par $L^{\wedge} -f - </JVf^{\wedge} -+- iV^{\wedge}$) , ou par (d P*
'■i' dQ* dR* Jices deux quandtes étant égales . par l'article 24. » 27* Nous
Tenons d'exprimer les dilRfrentielles d $^{\wedge}$, dt $^{\wedge}$ dl $^{\wedge}$ ' d*uQe manière fort
iiropie par les quantités d $L^{\wedge}$, d $M^{\wedge}$ d $N^{\wedge}$ on peut également ks exprimer par les
quantité» ansdogue» d $P^{\wedge}$ d $Q^{\wedge}$ d $R^{\wedge}$ U pour cela il n'y a qu'à fttbftituer & la
Digitized by Google[^]

The text on this page is estimated to be only 18.95% accurate

place de ces quantités-là leurs valeurs données par les dernières formules de l'article 14. On aura ainsi ces transformées, lesquelles, en remettant pour χ , ζ , leurs valeurs (art. 1^{er}) , & ayant égard aux réductions de l'article 16, se réduisent à cette forme, $\Delta = (B \cdot c^{\Delta}) dP' Ar(cJ - aJ') dQ^{\Delta} (aJ^{\Delta} hJ) dfi^{\Delta}$ de $\{B\zeta\}^{\Delta} - cCjdP - (ctI - aXI^{\Delta}) dq^{\Delta} (aXi^{\Delta} - bt;) dR$. Et comme ces expressions doivent être identiques avec celles qui résulteroient de la différenciation immédiate des mêmes formules de l'article 14, on aura par la comparaison des termes affectés de Δ , $h d^{\Delta} = \Delta f dR - \Delta^{\Delta} dQ^{\Delta} d^{\Delta} :: e^{\Delta} dP^{\Delta} \wedge f dR^{\Delta} \wedge \Delta f^{\Delta} \wedge dQ^{\Delta} - rdPy$ in $\Delta^{\Delta} dR - \Delta^{\Delta} dQ^{\Delta} d^{\Delta} > f^{\Delta} :: n^{\Delta} dP^{\Delta} \wedge dR^{\Delta} \wedge dj^{\Delta} \wedge dQ^{\Delta} - J^{\Delta} dPy$ dl $= - l f dR^{\Delta} K^{\Delta} dQ, ii^{\Delta} \wedge \} \Delta^{\Delta} dP^{\Delta} - \}^{\Delta} d - R^{\Delta} dC^{\Delta} \wedge \Delta dQ^{\Delta} \wedge dP$.

The text on this page is estimated to be only 13.90% accurate

Δ § MÉCANIQUE ANALITIQUE. 2^e S' ^ eiçreffiions
 précédentes de , ^ » , ont été trouvées, en fupposant a, c constante; si on
 vouloit V regarder aoiB ces qaaQmés comme variables, iln'y auroic qu'à
 ajouter à ces expreffions les termes dus aux diffi&rences de a , ^ , c ; & on
 yerroit par les formules de Fart. 1 » » que ces termes feroient $\Delta da^l \Delta dh^$
 $d\zeta, \Delta da^l \Delta dh^ \Delta dc^ da^l \Delta (' db 'C'dc$; on auroic aidfi pour lei valeurs
 complectes de $d^y dn, dt, y dt^{\Delta}(cdQ^hdR^da)^{\Delta} i'(adR - c dP - \Delta dbjy, \Delta \zeta$ "
 $(bdP'^adQ'^dc)^{\Delta} d\dot{E} = \Delta n' (cdQ - hdK - \Delta daJy \Delta n^*) \Delta ('adR - cdP'^db)^{\Delta} J^{\Delta \Delta}$ "
 $(bdP' - adQ - \Delta dcJy dK^{\Delta} fcdQ - BdR'^d'aJ^{\Delta} Id'radR - \Delta cdP - \Delta db)^{\Delta}$
 $\Delta C(\Delta dP'^adQ^dc)$. Ces formules font fort remarquables par leur simplicité
 & uniformité, & ont cela de particulier que les quantités ^, i/, &c,
 difparoiffent totalemew de la quantité $d^l - \Delta d$ » ■ car en vertu des équatioiis
 de condition de l'article • • • 13, on aura Amplement $d^{\Delta} - \Delta dn^{\Delta} - dC$
 $= \Delta fcdg^{\Delta} \sim hdR^da / \Delta (adR - cdP'i'db / 'i'fbdP'^adQ'hdc / y ei^reflion$ qui nous
 fera fort utile» Digrtized by

The text on this page is estimated to be only 23.42% accurate

Seconde Partie. ⁶ / A 9. Nous avons déjà montré dans l'article 1^{er} comment on peut exprimer rationnellement toutes les quantités l'y ⁹ par des finus le continu de trois angles indéterminés ; mais il y a un moyen plus direct & plus naturel de parvenir ces mêmes réductions, & ce moyen consiste à employer les transformations connues des coordonnées rectangulaires. En effet, puisque α, β, γ sont les coordonnées rectangulaires d'un point quelconque du corps, par rapport à trois axes menés par son centre parallèlement aux axes fixes des coordonnées x, y, z , & que a, b, c sont les coordonnées rectangulaires du même point par rapport à trois autres axes passant par le même centre, mais fixes au dedans du corps, & par conséquent de positions variables à l'égard des axes des I il s'enfuit que pour avoir les expressions de α, β, γ en a, b, c il n'y aura qu'à transformer de la manière la plus générale, ces dernières coordonnées, dans les autres. Pour ceci nous nommerons m l'angle que le plan des xy fait avec celui des α, β ; & θ l'angle que l'intersection de ces deux plans fait avec l'axe des α ; enfin nous désignerons par ϕ l'angle que l'axe des a fait avec la même ligne d'intersection ; ces trois quantités α, θ, ϕ , environnant, comme l'on voit, à déterminer la position des axes des coordonnées a, b, c relativement aux axes des coordonnées x, y, z , ô par conséquent on pourra, par leur moyen, exprimer ces dernières par les autres. Si, pour fixer les idées, on imagine que le corps proposé soit la terre, que le plan des xy soit celui de l'équateur, & que l'axe des a passe par un méridien donné ; que de

The text on this page is estimated to be only 20.47% accurate

3^8 MÉCHANIQUE AKALITIQUES. plus le plan des «, soit celui de l'écliptique, & que l'axe des ^ Toit dirige vers le premier point d'Aries ; il est clair que l'angle <« deviendra l'obliquité de l'écliptique, que l'angle 4 fera la longitude de l'équinoxe d'automne, ou du nœud ' ascendant de l'équateur sur l'écliptique , & <jue f fera la distance du méridien donné à cet équinoxe. En général f (fera l'angle que le corps décrit en tournant autour de l'axe des coordonnées c , axe qu'on pourra, à cause de cela, appeler simplement l'axe du corps, po° — «, fera l'angle d'inclinaison de cet axe sur le plan fixe des coordonnées ^, «, Ôc 4 — ^o''' fera l'angle que la projection de ce même axe fait avec l'axe des coordonnées 30. Cela posé, supposons d'abord que Ton change les deux coordonnées a , ^ , en deux autres a\ B\ placées dans le même plan , de telle manière que l'angle des i/ û At dans l'intersection des deux plans; et que celui des ^ soit perpendiculaire à cette intersection on aura Supposons ensuite que les deux coordonnées B', c, soient changées en deux autres c', dont l'une B' soit toujours perpendiculaire à l'intersection des plans, mais soit placée dans le plan des |, m, 6l dont l'autre ^ soit perpendiculaire à ce dernier plan; on trouvera pareillement à s=aB^cos — ^fin», c's=é: cos » H- ^ fin Enfin supposons encore que Ton change les coordonnées a^, b^t <v à font déjà dans le plan des ^, if , en deux autres fi", b" placées dans ce même plan , mais telles que l'axe des

Digitized by CopGI(

The text on this page is estimated to be only 15.30% accurate

SscoN])B PaiLtis. 3(\$p des tl* coïncide avec Taxe des ^ i on trouvera de la même manière tf'«a'cof4 — i^fin4, A'''«iA"cof4-*—a'im4. Et il-est visible que les trois coordonnées a", h"\ c' feront la même chose que les coordonnées Ç , >i , ^, puisqu'elles sont rapportées aux mêmes axes; de sorte que substituant successivement les valeurs de c', h\ h\ on aura les expressions ^ ^9 «» K* en a y 3^ CyleTquelles se croiseront de la même ^»ine que celles de l'article la, en supposant Ç ss= cof ^ cof4 — fin f fin 4 cof «j. l'^sM fin « cor4 coff fin 4 cof* » ^'sa fin 4 fin*», as coff fin 4 ^în t cor4 cof», •"sa» — fin^fin4-f» cof ♦ cof 4 cof <*, «^'es*— cof4fin'», • ^ ssfinf fin«» { "ascof^finM, Ces valeurs indiquent ainsi les équations de Cuvier de l'article 13, ainsi qu'à celles de l'article 15, & rétablissent ces équations dans toute leur étendue, puisqu'elles renferment, trois variables indéterminées y 4> 31.^ maintenant on substitue ces valeurs dans les expressions des quantités dP^ dQ^ dR de l'article 13 » on aura, Aaa

The text on this page is estimated to be only 15.51% accurate

370 MÉCHANIQUE A>(ÂLITIQUE. après les réduâioiis ordinaires des finnts<& cofinns, </P s iîn ^ fin u 4 -H coff y JQ) s cof^ fin • £a f ^ Et fi on iââJL lies mêmes fuhftentioas dans Içs ex^mÉiom des quantités ^1 9 dMy dN6c farticle 14» on cioavcra i/Z lin 4 £n « -H /cof 4 Ainfi on pourra par le moyen de ces fimnles décefsûner les élémens de la rotation inflantée dn corps autour de l'axe fpontanée , en connoiCTant la rotation du corps autour de fon axe, & la pofition de cet axe dans l'efpace. 3 2. U faut bien diftinguer ces deux axes &ies mouve* mçûs de rotation qui s*y rapportent* Nous venons de repréièntet le momrement du corps autour de fon centre par les trois angles f , ««4» dont le piremier f exprime l'angle décrit par le corps, en tournant autour d'une droite ou axe qui paflè par ce centre, & qui ait une pofition confiante à l'égard des difFrens points du corps, in-.iis qui foit d'ailleurs mobile avec lui; le fécond angle a* (crt à déterminer rinclinaifon de cet axe fur le plan des coordonnées ? , « , dont Li direction eft fuppofée donnée & fixe dans refpace, ôc cette inclinaifon eft exprimée par l'angle 90° — enfin le troifieme angle 4. détermine la pofition de la proje^on du même axe fur ce plan, cette pro« Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 19.76% accurate

.Seconde Partie. 371 jcc lion faifane avec l'axe des abfciffes $\wedge$ » un angle $= 4 - 90^{\circ}$. Mais cet axe de rotation étant mobile avec le corps » n'est pas le vrai axe autour duquel le corps tourne réellement à chaque infbnt; ce dernier est celui que nous avons nommé tte (pontanée de rotation « & dont la polition dans Tef- $\ast$ pace d'nd des quantités $dL^{\wedge} dM^{\wedge} dN$ (art. 14). Or ayant trouvé ci-deflus les vâleurs de ces quantités en « , 4 , & « # , il est facile de déterminer auffi la pofition de ce même axe , & l'angle de rotation autour de lui par des angles analogues aux angles $4^{\wedge}$ « , & que nous dcfigncrons par ζ' , $4'$, $té'$. En effet, les expreffions de dL , dM , dN en f , 4 > $\ast$ • étant générales pour telle pofition de l'axe du corps qu'on voudra, elles auront lieu aulli pour Taxe fpontanée de rotation, en y changeant # , 4 » en $p \setminus 4'$ mais comme la propriété de ce dernier axe est d'être immobile pendant un înfant, il fâudra que les diffècenti^es $d-\wedge$ à $d\%$ dues au changement de pofition de cet m ftiient nulles. De îbrte que l'on aura rolativemeni à cet Sote, $dl = \sin 4' \sin \ll dp'^{\wedge} d - \cos 4' \sin \ll Vf'$, Comparant donc ces nouvelles expieffions à $eilL^{\wedge} dM^{\wedge} dN$, avec les piemîeres , on auia ces trois équations, $\sin 4' \sin \ll Vf' SB \sin 4 \sin -4- \cos cor4' \sin </ a oor4 \sin \ll df \gg \sin 4 \gg \cos \ll 1/ jpf \text{ est } \cos \ll f - f - ^4 \gg$) Icfquelles (ervirpnt à déterminer les éiémens relatifs à l'axe fpontanée de rotation par ceux qui fe rapportent à l'axe même du corps, ou réciproquement ceux-ci par ceux-là, ce qui peut être utile en diff&entes occafions. Aaa 1

The text on this page is estimated to be only 21.72% accurate

37^ MÉCHANIQUE ANALITIQUE. I I I. Équations pour &
nmvemeiu de rotation ^un corps f^idc » de figure quelconque» animé par
des forces fuekongues* 3 3 • Nous venens de voir dans le Paragraphe
précédent, que quelque mouvement que puiiie avoir un corps folide, ce
mouvement ne peut dépendre que de fix variables, donc trois, fe rapportent
au mouvement d'un point unique dv corps , que nous avons appelé le centre
du corps, & dont les trois autres fervent à déterminer le mouvement de
rôcation da corps autour de ce centre. D'où il fuit que les équations qu'Û
s'agit de trouver ne peuvent être qu'au nombre de fix au plus; & U-est clair
que ces équations peu• Tent par conféquent ie déduire de celles que nous
avons d^a données dans la Seétion troifieme (ait. i» tf^'S), leA quelles (ont
générales pour tout iyftême de'corps. Mais pour cela il faut diftinguer deux
cas, l'un quand le corps eft toutà-fait libre, l'autre quand il eftjajTujctLi à fe
mouvoir autour ^d'un point Hxe. 34* Gottfidéron» d'abord un corps foEde
abfotument libre ; prenons le centre du corps daos fon centre même de
gravité ; êc nommant x' , y , ^ les trois coordonnées feâangles de ce Centre,
m la maflè entière du corps, dm chacun de fes élémens^ & X , K , Z les
forces accélératrices qui agtflent fur chaque point de cet élément fuivant les
directions des mêmes coordonnées, nous aurons en premier lieu ces trois
équations (Sçcl. 3 ^ art. 5). Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 14.51% accurate

Seconde Partie. 373 m-hSZJmtsaOt data ieTqiieiles la
caraûériftique S dénote des intégrales totales relatives à toute la mailè du
corps; & ces équationt fenriront, comme l'on voie, à déterminer Ut
mouvement du cedtre de gravité. En fécond lieu, fi on défigne par $\wedge$, $*$,
Çles coordonnées leâangles de chaque élément dm , prifes depuis le centre
de gravité»6e parallèles aux mêmes axes des coordonnées x,y, $\wedge$ de ce
centre, on aura ces trois aunes équations (Seû. citée, ut. 8). $*$ (« — -ïr -
 $*-\langle \rangle'-.jr)$ rf»-.o. Or nous avons prouvé dans le Paragraphe précédent que I«s
valeurs des quanticés Ç , « , ioQC toujours de cette forme, te nous y avons
vu que pour les corps folides , les quantités

The text on this page is estimated to be only 24.60% accurate

374 MÉCANIQUE ANALYTIQUE. On suppose, comme on l'a supposé précédemment, que les axes de coordonnées sont fixes dans le corps, & que les axes de coordonnées sont fixes dans l'espace; qu'on suppose les quantités 1^x , &c, sont variables par rapport au temps, & constantes pour tous les éléments du corps, ces quantités étant toutes des fonctions de trois angles $\phi > 4$, > qui déterminent les différents mouvements de rotation que le corps a autour de son centre. Si donc on fait, dans les équations précédentes, ces différentes substitutions, en ayant soin de l'enlever hors des signes S les variables θ, ϕ, ψ & leurs différences, on aura trois équations différentielles du second ordre entre ces mêmes variables le temps t , lesquelles serviront à les déterminer toutes trois en fonctions de t . Ces équations feront semblables à celles que M. d'Alembert a trouvées le premier pour le mouvement de rotation d'un corps de figure quelconque, & dont il a fait un usage utile dans ses recherches sur la précession des équinoxes. Par cette raison, & parce que d'ailleurs la forme de ces équations n'a pas coûté la simplicité dont elles sont susceptibles, nous ne nous arrêterons pas ici à les détailler; mais nous allons plutôt résoudre directement le problème par la méthode générale de la Section quatrième, laquelle donnera immédiatement les équations les plus simples & les plus commodes pour le calcul. 35 • Pour employer ici cette méthode de la manière la plus générale & la plus simple, on supposera, ce qui est le cas de la

Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 16.22% accurate

Seconda Parte. 37^a c. que chaque particule d'un corps attirée par les forces $\propto Q$ proportionnelles $\propto$ des fonctions quelconques des distances f » &c. de la même particule aux centres de ces forces, sera 00 forme de la quantité algèbre, On considérera ensuite les deux quantités en rapportant la caractéristique intégrale S uniquement aux éléments D du corps, & : aux quantités relatives à la position de ces éléments dans le corps. ' On réduira ces deux quantités en fonctions de variables quelconques, x, y, z, f , &c, relatives aux divers mouvemens du corps, & on en forme la formule générale suivante (Seu. quatrième, art. p), &c. Si les variables x, y, z, f , &c, sont par la nature du problème indépendantes l'une de l'autre (& on peut toujours les prendre telles qu'elles le soient) on égalera séparément à zéro les quantités multipliées par chacune des variations

The text on this page is estimated to be only 19.99% accurate

37[^] MI&CHAMIQUE AMALITXQUS. indéterminées / [^] » / 4 » 'f »
 &c » & Ton aura ainsi autant d'équations entre les variables 4 » f s qu'il y a
 de ces variables. Si les variables donc il s'agit ne sont pas tout-à-fait
 indépendantes, mais qu'il y ait entre elles une ou plusieurs équations de
 condition, on aura par la différentiation de ces équations, autant d'équations
 de condition entre les variations <sup>^ |, [^] 4, <sup>^ 9 » &c, par le moyen de laquelle »
 on pourra réduire ces variations à un plus petit nombre. Ayant fait cette
 réduction dans la formule générale [^] cm y égalera pareillement à zéro,
 chacun des coefficients des variations reliantes; & les équations qui en
 proviendront » * jointes à celles de condition données, suffiront pour
 résoudre le problème. Dans celui dont il s'agit ici, il n'y aura qu'à faire
 usage des transformations enseignées dans le Paragraphe précédent. Ainsi on
 substituera d'abord V-HI[^]y-H[^]j[^]i'-t-Ç", au lieu de *,y,:(,enfin t[^]f l'-t-[^]f -H c
 in" -4- en", af[^]h hç' -4- eÇ"t au lieu de |, «, C ([^]c* 1 1 } » eo[^]n met* tant
 pour 6cc, leurs valeurs en 9, mais l'article 50, on aura les quantités 7*,
 Ke:q>rimées en fonctions des iix, variables indépendantes x', 9, 49 [^] Is
 place de[^] quelles on pourra encore, si on le juge à propos, en introduire
 d'autres équivalentes; & chacune d'elles fournira pour la détermination du
 mouvement du corps, une équation de cette forme, . #r ... i[^]r « étant nue de
 ces variables. ° 39 Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 23.92% accurate

Seconds Partie. 377 3 6. Commençons donc par mettre dans l'expression de r , à la place de x, y, z , ces nouvelles variables $x' - t^2, y' - H$, $z' - H$ & faisant /br> hors du figue S les $ac', ^, i^'$, qui font les mêmes pour tous points du 'corps, puisque ce font les coordonnées du centre du corps } U fonction T deviendra i , . Cette expression est composée, -comme Ton voit, de trois parties. , dont la première ne contient que les seules variables «'« $y, ^,$ & exprime la Taleffr de T dans le cas où le corps ferolt regardé comme un point. Si donc ces variables font indépendances des autres variables 1» Ci ce a lieu, lorsqu'ue 'le corps est libre de tourner en tous sens autour de son centre» la*- formule dont a^2 agit devra être traitée séparément, ic fournira pour le mouvement de ce centre, les mêmes équations que il le corps y étoit concentré; ainsi cette partie du problème rentre dans celui que nous avons résolu dans la Section précédente, U auquel « nous renvoyons. La troisième partie de l'expression précédente, celle qui contient les différences $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$, multipliées par les différences $4^{11}, di\%tfo!c$ d'elle-même dans deux cas; lorsque le centre du corps est Hxe , ce qui est évident» parce qu'alors les différences $dx', ^dT$ (des coordonnées) nées de ce centre font nulles; bi lorsque ce centre est supposé placé dans le centre même de la cavité du corps, car Bbb

The text on this page is estimated to be only 19.95% accurate

57[^] MÉCHANIQUE. alors les inégales Sd^{dm} , Sd^{dm} , Sd^{dm} deviennent nulles d'elles-mêmes. En effet, en y substituant pour $J^{1} dnj d <$ leurs , valeurs $ad^{bd} ad, ' ^ bdn" ^cd^{adC^{hdC' - ^cdi; "}$ {ztt. préc), & faifanc. fortir hors du Hgne S les quantités $d^y d^"$, qui iôitt indépendantes de la poficion des particules dm dans le corps, chaque terme de ces intégrales fe trouvera multiplié par une de ces trois quantités » $Sadm^{Shdm^{Scdm}$; or ces quantités ne font autre chofe que les fommes des produits de chaque élément dm , multiplié par fa diftance à trois plans pailanc par le centre du corps, & perpendiculaires aux axes des coordonnées $a, ^, c$; elles font donc nulles, quand ce centre coïncide avec celui de gravité de tout le corps, par les propriétés connues de ce dernier centre. Donc aufli les trois intégrales $S d^{dm} Sd^{dm} Sd^{dm}$ feront nulles dans ce cas. . . . Dans l'un & dans l'autre cas, il ne reftera donc à confidérer dans l'expreflion de 7*, que la formule J^{dnty} qui eft uniquement relative au mouvement de rotation que le corps peut avoir autour de fon centre qui (êrvira par conféquent à déterminer les loix de ce* mouvement, indépendamment de celui que le centre même peut avoir dans l'efpace. Pour rendre la folution la plus fim^le qu'il eft poffible, il eft à propos de faire ufage des expreflions de $d^y dn, di^{de}$ de l'article iS, lesquelles donnent en faifanc $a = 0$ » $db \ll 6, <^c = 0., dV^{-dn^{dC^{fdQ-^{dR/ \cdot J^{}$ itized by Google

The text on this page is estimated to be only 15.80% accurate

Seconde Tartie. . Or les quantités $\dot{r}$ étant ici les iéoles yambles, idatiyement à la poition des pamcules P in dans le corps; il sienfuic que pour avoir la valeur $\dot{r}^5(d^{\wedge} - \dot{r}^{\wedge} n^{\wedge} C) Dm^{\wedge}$ il n*y aura qu'à mulciplier chaque terme de la $\dot{r}^{\wedge}$ quantité précédente par $D m, S)C$ intégrer enfuite relativement à Isr oaradkériftique S , en faifanc fortir hors de ce figne les quantités $dp y dQ y dRiiuiQn$ font indépendante*. Ainli la (juanen $\dot{r}$ ànt pour abrégér, $F^{\wedge} bc Dm^{\wedge} G^{\wedge} z^{\wedge} Sac Vm, a^{\wedge} Sak Dm..$: Ces intégrations jfont relatives à toute la malTe du corps, en forte que $\dot{r}, B^{\wedge} C^{\wedge} F^{\wedge} (7, H,$ doivent être déformais regardées & traitées comme, des coialkantes données par la figure du corps. ?.. 3 ' Si on $\dot{r}$ ic pour plus de iùnpiicité $\dot{r}^{\wedge} P$ » ssa sar on aura ,enne confidérant dans la fonc,tion r , que les termes relatif au mottvement de rotation, Bbba Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 9.74% accurate

3S0 MécHAKIQU^S ANALITIQUE. ainfi T n'étant fondion que
de/ , j , r on aura en différenciat félon - . Or par les formules de IVutîde
31 , oa a Sak^ùkmi^^cot^ dm ps^ jj- ^ + coi' ài d • ' 9 dQnc {dt étant
toujours confant) • • '41*' d'oil Ton aura fur le diamp, pour le inouvemeiie
de rota tioB da corps, ces trois éqnacioiis du iecond ordre, --.^ jH,—./,^.^
=0,. . fin ç fin«» H — ~-cof^fin«-f--^ cof») dt ^T^ Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 19.13% accurate

M Seconds JP a r t i e. 381 A l'égard de la quantité 9 comme elle dépend des forces qui follicicent le corps» elle fera nulle il le corps n'est animé par aucune force j ainli dan» cç cas les trois quantités -jj- , , —J^ , (êronc nulles auflî ; & la féconde des trois équations précédentes fera intègrable d'ellemême; mais Tincégration générale de toutes ces équations reliera encore fort difficile. En général» pnifque $y^{\text{SuDm}^{\wedge}}$ & que n eft une fbnâon algébrique des diftances p -, q y ôcc (art.) , dont diacune eft exprimée par $l'' ((x - f)^* - ^ (y - g / - ^ f ^ {^} /) y$ en défignant par f-, g-, A, les coordonnées du centre fixe des forces ; il n'y aura qu'à fiire dans la fonction n les mêmes fubftitutions que ci-delTus, & après avoir intégré ' relativement à toute la mafle du corps , on aura l'expref- • ûon de ^ en f » » d'où Ton tirera par la dif ërentiation ordinaire les Talents de , , -jf^ , qui font le^ • mêmes que celles de ^ *7^* Comme ceci n'a point de difficulté, nous ne nous y arpêterons point; nous remarquerons feulemēt que les équations précédentes reviennent à celles que j'ai données autrefois dans mes pre* mieres recherches fur la Lihrcuion de la Lune' . « 38* Quoique Remploi des angles f»4»«*» paroillè être ce qu'il y a de plus (impie pour trouyer par notre méthode les équations dè la rotation du corps; on peut néanmoins parvenir encore plus diredement au but , obtenir m^mé Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 12.83% accurate

" 38a M^{CHAMIQUE} AMALITIQUE. * des formules plus élégantes & pkis commodes pour le calcul dans pluêurs cas, .en conhdérant immédiatement les va', riations des quantités 1% &c, & réduifant en-' fuite ces différentes. Tarlations à trois indécerminées » par des formules analogues à celles de l'article «7. Ainfi , puifque $p = * -jj- \bullet =$ (article 13) * . . * . ■ $t^{-f} \cdot y^{riC} \wedge \wedge, \wedge \wedge$ diffifacDciant $p \gg /, \backslash dt$ étant confiant), — d, — ' $\wedge$ — , dT dp $\wedge$ formule générale de l'article 3f » lês termes donc le terme de la valeur de /T donnera diuis la $-r^{-r} \cdot dt \blacksquare \cdot \backslash p$ favoir, • 5C* Pareillement le terme donnent dans la mêoie 6»rimule les termes Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 15.13% accurate

Seconde Partie, 383 & enfin le eKine --^ donnera ceuz-cî; - • >• -.
.. - , - Or ayanc troavé en général ' * . $d^{\wedge}VdQ^{\wedge}dP^{\wedge}d^{\wedge}dR^{\wedge}$ ---^i'dQ, &c.
(art. à7)y $dP^{\wedge}dQ^{\wedge}dR^{\wedge}$ étant des quantités indécerminées , il eft clair qu'on
peut donner aoffi aoz variations $J^{\wedge}f$, $Z^{\wedge}$, &c, la même ibrme en cliangeant
d exi.ly aiofi on aura «a f' / C — s F , i^/. IR — «'''/Ç, &c, .]es trob
quantités $I^{\wedge}P$, $\#Q$ » /it' étant aui& indécerniineeî indépendantes* enti^elles# .
* Faîfant ces .fttbftntions, & ayant ^gard aux équations de condition de
Tartide 13 , on trouvera ' ^

The text on this page is estimated to be only 6.34% accurate

384 Mj&ghaniqub an ALI tique. expreflions analogues à celles de $dP \wedge dQ \wedge dR$. (art. 13)5 & de plus , $d^n n^{m^d} u^{di} i^{!m^d RiQ} \cdot ' .$ Donc lesquantités croavées d-deiTus $r^{\wedge}$ oltances des ceones "İT" ff. If "57" $^{\wedge} \wedge$ valeur de iJ, devieadroM en q,etMW;>, r pour 4£-, $\wedge \wedge$ dont la fonune ièn par conféquwent le réfiilcat des cermef dûs à h variation de* Ty.dans l'équarion gjSndfale dont «il Quant ans tetmei lelatift i la ▼ ariarion de Vy puifquo V devient une Ibnaaon algébrique de I", 1% &c , après la fubftitution de V -H -H $\wedge c^{\wedge} y^{\wedge} \bullet \acute{e} - \wedge$ »" aulicu de JC, $\wedge$,i, le

The text on this page is estimated to be only 15.04% accurate

le signe intégral S n'ayant rapport qu'aux quantités $a, e, c^{\wedge}$ il n'y aura qu'à différencier par $j^{\wedge}$, & mettre ensuite pout ' $f, ^1$ '; Soient valeurs dans $^F^iQ^{\wedge} / Jj^{\wedge}j$ ainsi puisque $\blacksquare ^i i\%' y TF'' ^{\wedge} \gg \textcircled{u}$ aura dans la même équation les termes suivants, r. Donc $^{\wedge}$ n'embrassent tous les termes multipliés par chacune- des trois quantités f, i, t, K , on aura une équation générale de cette forme. $\bullet . \gg . - \dots$ dans laquelle. $\blacksquare . .$ Ccc Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 15.69% accurate

jSd MicUAMIQUE ANALIXIQUE. Et comme les trois quantités
 f P» iQ[^] iR font indépen[^] dantes entr'elles, & en même tems' arbitraires «
 on aura donc ces trois équatioQS particulières (P)=s*o[^] (Q)=[^]o[^] (R) e=
 lefqueires étant combinées avec les (ix équations de condition entie les neuf
 variables Ç', f', &c, (art. 13), ferviront à déterminer chacune de ces
 variables. On peut mettre, fi l'on veut, fous une forme plus fimple, les
 termes de ces équatipns dépeodans de[^] quantité V. Car puifque SnD nty
 aura (\ caufe que le îigne S nft jegard[^] point le» Tariabte[^] ^» 1[^]9 âcc) « . •
 «■ comme- 11 eft une fdn6bion. algébrique de m[^]|"-f<[^]""^ 4,'-!-[^],"[^]
 c*"" ,tff'[^]*Ç"H-<rr, il eft aifé de voir qu>n fâifànt vanOT ii[^]pacémeiit [^]» c,
 on 'aura . • . w// dn . ^,, dit dn idn p, dn u [^] "37«r = [^] "âïï"» [^] iuitQ, De
 forte qu'on aur;[^] » . « • de cette manière, -i,,w dr .,jr[^] ^dv_ // y/[^]« / [^]Wn •
 dn \ ' * Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 16.92% accurate

s E C O N D E P A R T 1 E. 387 Mais si cette transformation simplifie les formules, elle ne simplifie pas le calcul, parce qu'au lieu de l'intégration unique contenue dans on en aura trois à exécuter. $3 \cdot 9 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ centes des forces au centre, dont les corps sont les vis-à-vis des dimensions de ce corps, on peut alors réduire la quantité à une seule force tangente de la surface intérieure au point de contact & aux produits de r ; de sorte que l'intégration. $\int \frac{1}{r^2} \cdot r^2 \cdot dr$ n'a aucune difficulté; c'est le cas des Planches en tant qu'elles s'attirent mutuellement. • Si la force attractive est $\frac{1}{r^2}$ proportionnelle à $\frac{1}{r}$, l'expression que $P \gg \frac{1}{k} \cdot k$ étant au coefficient constant, le terme $\frac{1}{P} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot r^2 \cdot dr$ la fonction n (art. 5 j) devient = $\frac{1}{2} \cdot r^2$; & comme est exprimé en général par $y'(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot r^2 \cdot dr - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot r^2 \cdot dr)$ en désignant par $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot r^2 \cdot dr$, les coordonnées du centre des forces; le terme dont il s'agit donnera ceux-ci, $-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot r^2 \cdot dr$ donc substituant par $Xy \cdot y \cdot \frac{1}{r^2} \cdot r^2 \cdot dr$ leurs valeurs $x^2 - l^2$ y $H - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot r^2 \cdot dr$ multipliant par Dm^2 & intégrant (donc on aura dans la valeur de $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot r^2 \cdot dr$ les termes suivants, $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot r^2 \cdot dr$ • $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot r^2 \cdot dr$ • $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot r^2 \cdot dr$ Or $e = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot r^2 \cdot dr$ - $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot r^2 \cdot dr$, • $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot r^2 \cdot dr$ • $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot r^2 \cdot dr$ • $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot r^2 \cdot dr$ - donc, .. C C c z

The text on this page is estimated to be only 19.04% accurate

388. MÉCANIQUE ANALYTIQUE. & ainsi des autres ; & 5/r-
 $l - \frac{4}{3} r^2 \frac{d\omega}{dt} = S^i H^{**} - K y_i$ (arc 13) s3 à une constante que nous
désignerons par $\frac{1}{2} \omega^2$. Mais si on prend pour le centre arbitraire du corps, le
centre même de gravité, on a alors $S \frac{d\omega}{dt} = S \frac{d\omega}{dt} \cos \theta$.
comme nous TaTois de) a yn d-; de plus (art. 6). Ainsi dans ce cas la quantité
ne - contiendra relativement à la force dont il s'agit, que les termes de
(ordre que coûtent les 4^{es} puissances partielles - g^{**} feront nulles. D'où il
s'enfuit que l'effet de cette force sera nul par rapport au mouvement de
rotation autour du centre de gravité. Et comme l'expression précédente au
terme constant — $\frac{1}{2} \omega^2$ près, est la même que si tout le corps étoit concentré .
dans son centre , auquel cas $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$, on aura pour le
mouvement progressif de ce centre , les mêmes équations que si le corps
étoit réduit à un point; car les différences partielles de relativement aux
variables x, y, z feront les mêmes que dans cette hypothèse. ; Si on veut
considérer le corps comme pesant , en prenant la force accélératrice de la
gravité pour unité, & l'axe des coordonnées x dirigé verticalement de haut
en bas, on a $\frac{d^2 x}{dt^2} = -g$; donc $\frac{d^2 x}{dt^2} = -g$; A — Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 21.32% accurate

Seconde Partie. $\text{^gp} \text{^a}(\text{^h S}''' - c$; de force que la quanciré
 ^ contiendra, à raifoa de la pefaneenrdu corps ^ les termes $r m^* \% * \text{^}$ ÀinË. fi
le centré dn corps eftprîs dans ^ Ton centre de gra ^ ▼ ité, les termes qui
contiennent les variables $C'y \{ \text{^9} \&c$, difparoîtront, & par conl<iquaent
Teflèt de la gravité fur la rotation fera nul, comme dans le cas prêchent:* Là
valeur de ^ en tant qu'elle eft due à Ja gravité, fe réduira alors ^ (h ^ :()) S
Dm y c'eft-à-dire, à ce qu'elle feroit fi le corps, étoit réduit à. un point, en
confervant fa mafie SDm\ donc aufTi le mouvement de tranilacion du corps
fera le même dans ce cas». •\$.111. ■ IDétemùnOnùn du
mouvement étwi corps g/rave de fgufe ^ uelcon ^ uc. 40. Ce problème,
quelque difficile qu'il ibit,-eft néanmoins un des plus fimples que préfente
la Mëchanique , quand on confidere les choies dans l'état naturel & fans
abftraclion ; car tous les corps étant ciïentiellémenc pcfîns & étendus , on
ne peut les dépouiller de l'une ou de l'autre de ces propriétés fans les
dénaturer , & les queftions dans lefquelles on ne tiendrait pas compte de
toutes les deux à la fois, ne feroient par conlëqaent que de' pure curioftté.
Nous coikunencerôns par examiner le mouvement des* corps libres ,
comme le (but Jes projeâile\$; Aôus examine* rons enfuite celui des
corps ^ retenus par un point fixe, comme le fônè 1er pendules» ^ .: ' ; vl./l —
s -. - , • c .' .

The text on this page is estimated to be only 15.74% accurate

3pO M^GHANIQUB ANALit.IQOI. 'Dans le premier cas on prendra le centre du corps • dans son centre de gravité , & comme alors l'effet de la gravité est nul. sur la rotation^ aiûfi qu'on vient de le voir, on déterminera les loix de cette rotation par les trois équations suivantes (art. 58)9. $\hat{A} \cdot dT * r_{fj} \gg dT 'd. \bullet it \bullet ' . . \gg dT \ll \text{à} dp dr dT 1. dT df dT dT > . ' - l ' I - \bullet$ en supposant (art. 37). ? — "TT > i dT 9 dR -é. * . • ■ 1 • A regardé dtt centre même du corps» il fiiim les loix connues du mouvement" dcs projettiles considérés comme* des points i ainsi la détermination de son «mouvement n'a aucune difficulté, où nous ne nous y arrêterons point. dans le second cas on prendra (e point fixe de suspension pour le centre du, corps / .& fopppafit I«? ordonnées ic yedcales , «c dirigée» de bas. js^W on aura (art- jp) d'oii Ton urc r Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 14.72% accurate

Seconds Partie. 391 'jç,, r= — Se D m, ôc toutes les autres différences partielles de $\wedge$ feront nulles. De forte que les équations pour le nouTeçicnc de rotation 'feront (art. 58)/ dt iT dt iT dT , àt à • fes quantités SaDm , SBDm $\wedge$ ScDm $\wedge$ devant être regardées comme' def 'coiilbatcs données par -la lEgure dn corps , par le lieu du point de fufpeiiaon. 41- l'a folndbn du premier cas, où le corps eft fupposé endérement fibre, ic oh. Ton ne confidere qu(B la rotation anfovr dv centre db granté $\wedge$. dépend uniquement dé TiAtégration des trois équations {A), ' Or il efl d'abord facile, de trouver deux intégrales de ces équations; . ' car 1% fi. en le $\wedge$ -nulcvlki telpeâlTemetit par -j $\wedge$ j --J-- , & qu'enfuite on les ajoute enfomble , on a évidem• ■ • 1 ment une équation intëgrable, & dont Tintégrale iëra / $\wedge$ énarwie conduite arbîtni«.

The text on this page is estimated to be only 17.75% accurate

3² Mécanique analytique. 1^o Si on multiplie les mêmes équations par f » $\wedge$ qu'on les ajoute ensemble on aura celle-ci, laquelle cause que T est une fonction de r , $\wedge$, r uniquement, U que $t > ar$ conféquenc^e T^* » - $i^{\wedge} ij^{\wedge} j^{\wedge} JJ^{\wedge} j^{\wedge} j^{\wedge}$ - H dreà aulfi intégrable, son intégrale étant A^* étant une nouvelle constante arbitraire. En mettant dans ces équations, au lieu de T , $\wedge \bullet \bullet \bullet$ leun Valeurs, on aura deux équations « la 9^e de Tecond degré entre p , par lesquelles on pourra déterminer les valeurs de deux de ces variables en fonctions de la troilicmc ; 8^c ces valeurs étant enfuire fublHcuées dans une quelconque des trois équations (yi), on aura une équation du premier ordre entre r & la variable dont il s'agit | ainfi on pourra connoltre par ce moyen les valeurs de f , r en t , C'est ce que nous allons' développer. Je remarque d'abord qu'on peut réduire la féconde det 4|eux' intégrales trouvées, à une forme plus fimple, en fai-' Tant attention que puifque F est une fonction homogène de deux diœenîons de $\wedge$, r , on a par la propriété connue de ces fortes de fondions, * da ' $dr^{\wedge} dr^{\wedge}$ $dr^{\wedge} dr^{\wedge}$ qui réduit réquation intégrale dont il « agit à $T^{\wedge} k^i$ laquelle Digitized by Gopgle

The text on this page is estimated to be only 15.93% accurate

Secovdb P a% t I e. laquelle exprime la confervacion des forces
vivei du mouvemeac de rocation. Je femarque enûiite que 'comme la
quantité . • , eft équivalente à celle-ci, $(p^* J x, \dots, (. \{jt^H-tt) -^i-dT-J$
 $yv-dr'^{-dr}'-d7-)$ » laquelle devient $/\blacksquare -f\tilde{7}^* - 4 A^*$, en vertu des deux
intégrales précédentes, on aura ime équation diffi[^] rentielle plus (Impie, en
ajoutant enfemble les carrés des , valeurs de d . , d . ^ d » dans les trois
équatioBS différentielles f AJ; équation qu'on pourra ainfi ployer à la place
d'une quelconque de celles-ci. De cette manière la déterminatibn des
quantités /7 , q[^]r, en / dépendra iimplemenc de ces trois équations. • dans
lefquellw • 4 2. Cette dérermiaationi eft aflèz facile , lorfque les troif
confantes F, B iônc niillei. Car on a alors fimplemeiic Ddd Digitized by
Google

The text on this page is estimated to be only 12.21% accurate

3P4 MÉCHANIQUE ANALITIQUE. s jg^y .^L, Cri [^] forte <\u[^]
ks crois équaûons à réfoudre feront de Ja forme fuivanc[^]. ' A^y-h B'q * -H
, Si done on fitc H-r* a» n , [^] qu'on tire lef va* lauri dçp, r.» de on uois
équations» [^] / -4- 5 4 A Son aura , •. / [^] (A — B) (A—C) 9 ces
valeurs étant fabftituées dans l'équation di[^]rentielle ci* de flfus » le premier
membre de cette éqoatioli d||riendra , aprb , les réduâtons» A'B'C'C i[^]k[^]p
)du* . ■& le fécond membre deviendra 4 Â% de force qu'en Digitized by
Google

The text on this page is estimated to be only 23.41% accurate

S.ECONDE Partie. 3⁵ divifaor toute Téquadon par/'ie⁴i(*, 8c tirant la racine carrée « on aura enfin dtss:— — ' " , à^{oh} l'on tirera par l'intégration r en », réciproquement. 43* Suppofons maintenant que les conibntes JP, H ne foient pas nulles, & voyons comment on peut rameher . ce cas au précédent \ au moyen de quelques fubAicution[^]. Pour cela je fubflicue à la place dec variables q% r » des fo clions d'autres variaSles x^y[^] \% qu'ail ne faudra pas confondre» avec celles que nous avons employées qu'ici pour reprélènter les coordonnées des diffiérems points * ^ du corps ; & |è fupposê d*abord ces fbnéHons telles » que Ton ait p* *• - H[^]* . Il eft évident que pour . fatisfàire \ cette condition , elles ne peuvent- être que U* néaireSf & par conféquent de cette forme , Les quantités p' , p\ p''' , q\ &cc , feront des cndftantes arbitraires, entre lefquelles, en vertu de l'equacion p* q* r* — X* -4- y* -4- ^ , il faudra qu'il y ait les fix équations de condition que voici. pY-[^]H"[^][^][^][^]p[^][^][^][^]T'[^][^][^][^]-[^][^]Y"[^][^][^] de forte que comme les quantités dont il. s'agit font au nombre de neuf, après avoir fatisfait à ces fix équations , il en reftera encore trois d'arbitraires. Je fubftituerai maintenant ces expreffions étp[^]q ^ r dani k valeur de 7, & je ferai enforte, au moyen des trois Dddi Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 18.48% accurate

3p(^ MicHANIQUI ANALITIQUE. arbirAircs donc je viens de parler, que les trois termes qui contiendroient les produits xy^y disparaissent de la valeur de enbrce que cette quantité Te réduise à cette Mais pour rendre le calcul plus simple, je substituerai immédiatement dans cette formule les valeurs de x, y : { en q, r , & comparant ensuite le résultat avec l'expression • de Ty je déterminerai non-seulement les arbitraires donc il s'agit, mais. au/E les inconnues «, jft» y . Or les valeurs ci-dessus de f, r étant multipliées respectivement par $y^{\frac{1}{2}}$ par $p''r q''y$ & par $p'''^r r'''$, ensuite ajoutées ensemble, donnent sur le champ, en vertu des équations de condition entre les coefficients ϕ , la substitution de ces valeurs dans la quantité $m^{*-}y^{*-}ryt^{\wedge}$, fic $Ij^{\wedge}$ comparaison avec la valeur de T de l'article 41, donnera ainsi les six équations suivantes» qui serviront à la détermination des six inconnues donc il s'agit. . Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 18.25% accurate

Seconde Partie. 3⁷ * Et Cette détermination n'a même aucune difficulté ; car si on ajoute ensemble la première équation multipliée par jfy la quatrième multipliée par êc la cinquième multipliée par on a« en vertu des équations de condition déjà citées t en ajoutant la féconde, la quatrième, & la fixieme, multipliées lespeâivement par p'^ /, on aura parellemenc » ajoutant enfin la troiHeme, la cinquième, 6c la fixieme, multipliées refpe^vement , /, p'^ q\ on aura & ces trois équations étant combinées avec Féquation'de condition , ■ • ferviront à ticrminer les quatre inconnues «, p'y /, Les deux premières équations donnent fubftituant ces valeurs dans la troifieme, on aiira^ après avoir divifé par p', cette équation en r« - A) ^ Bj - ç) - 4iî;/— - 4GY— laquelle éduit du troiûemo degré, aura nécelTairement une zadne réelici. .

The text on this page is estimated to be only 18.16% accurate

39^ MÉCHANIQUE AKÂLITIQUE. Les mêmes valeurs étant substituées dans la quatrième équation, on en tirera celles de ρ , μ en lesquelles, en faisant pour abréger, seront exprimées ainsi, JT) (75 Si on fait de nouveau les mêmes combinaisons des équations ci-dessus, mais en prenant pour multiplicateurs les quantités $\frac{1}{r}$, à la place de on en tirera ces équations (9) qui étant jointes à l'équation de condition $\frac{1}{H} f - f - t$, . serviront à déterminer les quatre inconnues f, μ, ρ, σ & comme ces équations ne diffèrent des précédentes qu'en ce que ces inconnues y sont à la place des premières inconnues « ρ, p, q , on en conclura sur le champ que l'équation en (9), ainsi que les expressions de $\frac{1}{r}, \rho$ en μ (sont les mêmes que celles que nous venons de trouver en «. Enfin si on réitère les mêmes opérations mais en prenant p, μ pour multiplicateurs on trouvera de même les trois équations, , Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 13.12% accurate

Second. E Partie. 3r;p auxquelles en joindra l'equation $p'''^{\wedge} q'''^{\wedge}$
i Se comme ces équations fous en touc femblables aux pré« cédentes, on
en tirera des conclu Hons analogues. On conclera donc en général que
l'équation en « trouvée ci-delTus, aura pour radnes les -râleurs des trots
quantités $\bullet 909 r_9^{\wedge}$ ces trois racines étant $\wedge$ Atbftittées fuccefn*. yement
dans les expreflions de en «, on aura tout de fuite les valeurs de /, j*, r*, de
r", & de f\ r'''i_ de forte que tout fera connu moyennant la réAtlution de
l'équation dope il :s>git. $\wedge$ « *Au refte , comme cette équation du $\wedge$ troifieme
degr $\wedge$, elle aura toujours une racine réelle, qui étant prife pour i-, rendra
aiilli réelles les crois quantités p\ q\ A l'cgard Ces deux autres racines ;3 &:
> , li elles croient imaginaires, elles feroient, comme Ton Hiit , de la forme
 $\wedge$ -i- c j/" — - i 6c h — c V — I i de lorte que les quantités p\ ç[\ r" qui font
des fondions rationnelles de $\wedge$, feroient auâi de ces formes»' m- $\wedge$ n V — I , m'
-f- n'V $\wedge$ — i , n" V — i ; & les quantités $\wedge^{\wedge\wedge\wedge\wedge}$ (emblables fondions de
jp ièroient des formes fécipMiifae ««— «f/" — $\wedge$ /i/" — i , in<5 — i ; 4onc
Péquadon de cooditioa $\wedge$ - cf $\wedge$ 'iri" $\wedge$ "a $\wedge$ o ,* deviendroie4a*rHff*-H
«'MW*«4-«"« « o $\wedge$ &: par conféquentim $\wedge$ flble tant que m $\wedge$ n, m\ n\m\ n"
feroient réelles; d'où il'Vfenitrft < $\wedge$ ue /s & > ne peurènt~être injagînaires.
Pour fe convaincre directement de cette vérité, d'après Téquation mcme
donc il s'agit, je mets cette équation fous la forme

The text on this page is estimated to be only 13.34% accurate

V 400 MÉCHANTQUB ANALITIQUE, j'y fubftitue
 fuccettivemenc, au lieu de $*$, les deux autres racines /S & : & je retranche
 les deux équations réfultantes l'une de l'autre; j'aurai, après les réductions &
 la divifion par cette transformée $((^ - ^; — - (y^A)(y^B)-^ 4^=**;+. f G'-$
 $j-i/y-J- 1 G (A-hBJ F G H-h^ (A IP-i-B G'J$, laquelle eft réduifible à cette
 forme, $^:^^ (H(fL^AJ — r-F g; (H (y --AJ^zFGJ$. qu'on voie être U même
 chofe que l'équation $ff^ ^" ^f q''' o« 9C$ qui fournît par conféquenc dès
 conclufions iemblables» « - Donc les trois racines «, ^, y feront
 néceffairement toutes réelles, les neuf coefficients $q', /, &c$, qui font des
 fonctions rationnelles de ces racines, feront réels aufi. 44* Nous Tenons de
 déterminer les valeurs de ces coefficients, enforte que l'on ait j'-H H- &
 $•♦^y -* -yV$ or en Édifant varier fuccettivemenc' /j» ^, r, on aura^ à caufe
 que $x^y^ \setminus$ font fondons de ces variables 9 éT Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 11.36% accurate

• Seconde Partie. 401 $\wedge < / * \text{ ds df . -jj-} = . X + \wedge \wedge \_i + \wedge \wedge \_x , \hat{i}$
 $= / V \hat{i}''' \hat{i} H - , . \text{comme on Ta déjà vu plus luuc j donc } 4^{\wedge} = \text{ay, -}\mathfrak{f}\text{Lassa' } \text{---} \text{---} /$
 $\text{--- n'' y --- V' At}^{\wedge} . \text{fubilicuant c\`es valeurs , on aura donc De forte qu'en}$
 vertu des équations de condition entre les coefficients $q', r \setminus / >'' , \&c$, on aura
 « » Par conséquent les trois équations &iales de Tactide 41 U réduiront à
 celles-ci Eec Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 18.39% accurate

401 MICHAÉNIQUE ANALYTIQUE. • Je fuppofe, comme l'on voit, tout-à-fait femblables à celles de l'article 41 les quantités $J, j, \langle \rangle i$, > répondant aux quantités p, q, y . D'où il fuit que fi on fait $\wedge$ comme dans l'article cité on aura entre les variables $x, y^{\wedge}$, les mêmes formules que Ton avoit trouvées entre $p^{\wedge} q^{\wedge} r^{\wedge} t^{\wedge}$ en changeant feulement A en S en « , » y » Ayant ainfi les valeurs de $Xy^{\wedge}$ en n ou on aura les valeurs complètes de $/, \wedge, r$ par les formules de l'article 45. Les quantités $\wedge$, ne fuffifent pas pour déterminer toutes les circonftances du mouvement de rotation du corps, elles ne fervent qu'à faire connoître la rotation infinimentale. En effet, puifque $\dot{\wedge} = -\wedge, r \ll -$, il enfuit de ce qu'on a vu dans l'article 36 que l'axe fpontanée de rotation, autour duquel le corps tourne à chaque instant, fera avec les axes des coordonnées $a^{\wedge}, c^{\wedge}$, des angles dont les cofinus feront répétitivement $—, , , \dots I^{\wedge} \blacksquare \gg t \text{ t } \backslash f \ll / \wedge — 3-r \bullet \text{ fit } < iue$ la vîteffe angulaire autour de cet axe fera repréfentée par $V(p^{\wedge} f^{\wedge} i^{\wedge})$. Pour la connoiffance complète de la rotation du corps y il faut encore déterminer les valeurs des neuf quantités $y^{\wedge} \backslash \wedge, I^{\wedge}$ &c, d'où dépendent celles des coordonnées $I, \langle, 2; ,$ lesquelles donnent la pofition abfolue de chaque point du corps dans l'efpace relativement au centre de gravité regardé comme immobile (art. 34); c'eft ce qui demande encore trois intégrations nouvelles. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 16.69% accurate

Sb'CONDe Fautxe. 403 Pour cei effet je reprends les formules différentielles de l'ardcle 27, & mettant $pJtj \, qdt^{\wedge} \, rdt^{\wedge}$ au lieu de $dP^{\wedge} \, dQf$ dRy j'ai ces ét^uations, $d^{\wedge} \, ^{\wedge}(q^{\wedge}{}^{\wedge}{}^{\wedge}rf)dt^{\wedge}o^{\wedge}$ « autant d'ëquacîons ièraWables en en «'.C.C . en changeanr feulement f en •» & en C^Ces équations ëcanc.comparées avec les équations différentieUes {A) de.rarticle 40, entre les quantités -il- , , il eft vifible quelles font entièrement femblaWes,- $d\# \, dr^{\wedge}$ ^ " ibrte que ces quantités répondent aux quantités ^ , Ç", comme auflî aux quantités »'» ^\ & «ux quantités D*où }e conclus que ces dernier^ variables peuvent être regardées comme des valeurs particulières des variables ^Z. ; & qu'ainû , puifque les équations entre ces variables font fimplement linéaires» on aura, en prenant trois confiantes quelconques />!,>,<> ces trois équations intégrales complètes^ dT £ee z

The text on this page is estimated to be only 23.55% accurate

II 404 .MéCHANIQUE AKALITIQUE. or en combinant ces trois équations avec' les fix équations de condition entre les mêmes variables &c., il semble qu'on pourroit déterminer ces variables , qui sont en tout au nombre de huit ; mais en considérant de plus près les équations précédentes j il est facile de se convaincre qu'elles ne peuvent réellement tenir lieu que de deux équations; car en ajoutant ensemble leurs carrés, il arrive que toutes les inconnues disparaissent à la fois en vertu des mêmes équations de conservation (art. 15) de sorte que Ton aura simplement l'équation laquelle revient, comme l'on voit, à la première des deux intégrales trouvées plus haut (art. 41); or la comparaison de ces équations donnent $\frac{1}{2} = -H \frac{m}{H} - rC$ en sorte que parmi les quatre constantes $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ il n'y en a que trois, d'arbitraires. ^ Doit l'on. doit conclure que la solution complète demande encore une nouvelle intégration » à laquelle il faudra employer une quelconque des équations différentielles précédentes , ou une combinaison quelconque de ces mêmes * équations. ' . 46. Mais on peut rendre le calcul beaucoup plus général & plus simple, en cherchant directement les valeurs des coordonnées mêmes x, y, z , qui déterminent immédiatement la position absolue d'un point quelconque du corps, pour lequel les coordonnées relatives aux axes du corps » sont x', y', z' , c. I Pour cela , j'ajoute ensemble les trois équations intégrales 0 Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 12.02% accurate

Secondé Par«tie. 40; (Z)) trouvées ci-defTus, après avoir multiplié la première par a , la féconde par $'$, la troifienie par $<$: j ce qui donne (arc X^2), cette équation , $>$ Or on a déjà par la oacuré des quantités $I \gg \ll$, ζ , (art. 13). Enfin on a auffi (art. 18) en mettant $pdt^\wedge qdt^\wedge rdt$ au lieti«de $dP^\wedge dQ, dR^\wedge$ Se faîfant $a, iy c$ conftans $^\wedge$ Ainll yoilà trois équations d'où l'on pourra tirer les va* leurs de $f \gg \ll \gg C \gg$ moyennant une feule intégration* Enfnite fi on vouloit coimoitre féparément les valeurs dé $I' \gg K'i^\wedge y$, il n'y auroît qu'à fuppoiêt dans les cxpreffions générales de $^\wedge, \ll, \zeta$, les conftantes $^\wedge asai, ^ = o, c = o, ou < z s = s 0, ^ = i, < := \ddot{o}, ou a = , o, ^ . pap,, ^ = i$. Suppofi)ns pour, abréger •n aa $^\wedge$ donc à réfoudre ces ttois équations»

The text on this page is estimated to be only 14.57% accurate

405 MÉCANIQUE. ANAL., T. QVS. dans les cas où il y a une constante donnée, N, dont les fonctions sont connues en fonctions de C et n sont des fonctions arbitraires. J'observe d'abord que si α , β et γ sont nulles à la fois, la première équation donnerait α^2 cette valeur étant substituée dans les deux autres on aurait des équations très-faciles à intégrer, en faisant $\alpha = \cos \phi$, $\beta = \sin \phi$, ce qui les change en ces deux-ci, dont la première donnera la valeur de ϕ , la seconde donnera l'angle ϕ par l'intégration de cette formule. Supposons maintenant que α , β et γ ne soient pas nulles, voyons comment on peut réduire ce cas au précédent. Il est clair que si on pose $H = \alpha \sin x + \beta \cos x - \gamma$ — $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ on aura également. . . . , $H = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \sin(x - \phi)$ — γ ainsi les équations proposées se réduiront d'abord à cette {on a} Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 16.43% accurate

Seconde Partie. Si on fût ensoite on aura encore*» h- ^« -f. , & ^ix* ^^^^^^^^ ^ donc on* aura ces transformées , qui font, comme l'on voit, entièrement femblables à celles que nous venons de réloudre ci-deilus ; enforte qu'on aura pour Uy y ^ les mêmes cxpreHlons que nous avons trouvées pour ^ , » » en y changeant feulement ; i en . . yp^ «• ^ ^ . Ces valeurs étant connues , on aura les valeurs géaéraltt ^4 « » par les formules 4 47* Telle eft, fi je ne me trompe , la iblotton la plus générale," & en m^me tems la plus fimple qu'on puilTe donner du fameux problcme du mouvement de rotation des corps libères ; elle jeft: analogue à celle que j'ai donnée dans les Mémoires de l'Académie de Berlin pour 1773 , mais elle eft en même-cems plus diret^e & plus lunule à queli^ues

The text on this page is estimated to be only 22.62% accurate

408 MÉCHANIQUE AKALITIQUE. égards. Dans celle-là je suis parti de trois équations intégrales qui répondent aux équations (D) de l'article 45 ci-dessus, équations qui m'avoient été fournies directement par le principe connu des aires & des moments, & auxquelles j'avois joint l'équation des forces vives $7' = h^*$ (art. 41), Ici j'ai déduit toute la solution des trois équations différentielles primitives, & je crois avoir mis dans cette solution, toute la clarté & (si j'ose le dire) toute l'élégance donc elle est susceptible ; par cette raison je me flatte qu'on ne me désapprouvera pas d'avoir traité de nouveau ce problème, quoiqu'il ne soit guères que de pure curiosité, sur-tout, si comme je n'en doute pas, il peut être de quelque utilité à l'avancement de l'astronomie. Ce qu'il y a, ce me semble, de plus remarquable dans la solution précédente, c'est qu'on y, trouve des quantités $1^{\wedge} 9 f'^{\wedge} J^{\wedge}$ connoître leurs valeurs, mais seulement les équations de condition auxquelles elles sont soumises, quantités qui disparaissent à la fin de la suite du calcul ; je ne doute pas que ce genre d'analyse ne puisse aussi être utile dans d'autres occasions. Au reste, si cette solution est un peu longue, on ne doit l'imputer qu'à la grande généralité qu'on y a voulu conférer ; on a pu remarquer deux moyens de la simplifier, l'un en supposant les constantes F, G & H nulles (art. 4»), et l'autre en supposant nulles les constantes α & m (art. 416). La première de ces deux suppositions avoit toujours été regardée comme indispensable pour parvenir à une solution complète du problème, jusqu'à ce que je donnai dans mon Mémoire de 1773 la manière de s'en passer dans cette supposition.

Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 19.44% accurate

• Seconde: Partif. 40[^] tion confiée; en cHct, ;i prendic pour les :t:cs des coordoniK[^]es a[^]h y c, des droites, telles que les lonuîcs Sab Dm , " Sac Dm, ShcDm foieuc nulles (.irt. 56); & Euler a démontre le premier que cela clt toujours pouible , quelle [^]ue foie la figure du corps»*& que les axes ainfi déterminés, font des axes de rotation naturels [^]c'est-à-d ire, tels que le [^]rps peult tourner librement autour de chacun d'eux. Mais quoiqu'on puiffè toujours trouver des axes qui aient la propriété dont il s[^]agit» & que d'ailleurs la pbiition des axes du corps (bit arbitraire > U n'est pas indifférent d'avoir une foludon tout-à-Êût direâe fie indépendante de ces confidérations particulières. ' . ' La féconde des deux fu{[^]ncions dont il s'agit, dépend de la pod[^]on des axes des coordonnées dans l'efpaces poficion qui fÉcant pareillement i[^]rbitraire, peut tQujours*être " fupposée telle que les confiantes l U.m deviennent jiuiles» comme on peut s'en convaincre directement d'après les expreffionsagén[^]rales de l, m , C que nous avons trouvées. • • 48- Tuppcfant F, Gf H nulles > on a[^] comme on l'a vii'dans i'arcicle 41, [^] . & ces valeurs étant fubftitues dans les trois équations différentielles ([^]),. il vient celles-ci, . lefquelles s'accordent avec celles que M. Euler a employées dans la iolucion qu'il a donnée le premier de ce problcme ' • ' Fff

The text on this page is estimated to be only 20.74% accurate

410 MÉCHANIQUE ANALITI-QUE. (voyez les Mémoires de l'Académie de Berlin pour 175 S) ; pour s'en convaincre , il suffira d'observer que les constantes A, B, C { art. 36) , ne font autre chose que ce que M. Euler nomme les momens d'inertie du corps autour des axes des coordonnées x, y, z & que les variables p, q, r dépendent du mouvement instantané & spontanée de rotation , de manière que si on nomme α, β, γ , les angles que l'axe autour duquel le corps tourne spontanément à chaque instant, fait avec les axes des $0, x, y$ la vitesse angulaire de rotation autour de cet axe , on a (art. 45), $\frac{1}{p} = \frac{1}{A} \cos \alpha = \frac{1}{B} \cos \beta = \frac{1}{C} \cos \gamma$ l'égard des autres équations de M. Euler, lesquelles servent à déterminer la position des axes du corps dans l'espace, elles se rapportent à nos équations (C) de l'article 45. En effet , comme les neuf quantités α, β, γ , ne font autre chose que les coordonnées rectangulaires des trois points du corps pris dans les trois axes à la distance a du centre (ce qui fuit évidemment de ce que ci-dessus résultent des trois $\frac{1}{p}, \frac{1}{q}, \frac{1}{r}$, en y faisant successivement $\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0$, on trouve $a^2 = \frac{A}{p^2} + \frac{B}{q^2} + \frac{C}{r^2}$ — Or $h = Oy \sin \alpha$) il est clair que si on s'engage avec M. Euler, par les complimens des angles d'inclinaison de ces axes sur le plan fixe des x, y & par les angles que les projections des mêmes axes font avec l'axe fixe des x on aura ces expressions, $r = \frac{1}{A} \cos \alpha, q = \frac{1}{B} \cos \beta, p = \frac{1}{C} \cos \gamma$ — $\frac{1}{p} = \frac{1}{A} \cos \alpha, \frac{1}{q} = \frac{1}{B} \cos \beta, \frac{1}{r} = \frac{1}{C} \cos \gamma$;

Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 15.20% accurate

\ Seconde Partie. 411 & par -le moyen de ces substitutions, on trouvera aisément les équations auxquelles M. Kuier est parvenu par des considérations géométriques Se crigeomécriques. 49>' Aa refte, en adoptant à la fois les deux suppositions de F, H nulles, & de /, m y ntâts auili, on'aura la solution la plus simple par les trois équations (D) de Tarticie 45, en y substituant les valeurs de C, C'', K''' S>C de p y q\ r en 9y iy té (art, 30, 37). Car on aura de cete rnaucfc ces trois é<ju^uois du premier ordre, ji -j t=a n im ç lin tt, mt leiquelles se réduisent évidemment à celles-ci, * * • ndt — Bd^^^ ^ f toCm. • Or fi on élimine dt & 1/4, en ajoutant ensemble ces trois équations', après les avoir multipliées respectivement par Cr- i5, A-^ C, 5---4,.on aura réquation laquelle se réduit à cette forme, . ' • Fft2 Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 14.75% accurate

412. Mécanique analytique. 6ai nagf OÙ les variables Tonç
féparées. Le. iècood membre ^ cette équation, $\int C(B - \frac{1}{2} J \sin^2 \theta) d\theta$
Change en. $B(A^2 C)(m^2 \cdot a(c - \frac{1}{2} a j^2 \cot^2 \theta) + OK \text{ encore en } C C B - A) C m t$
 $\int iAM - C(A^2 - B) - hC(A^2 A) \cos x dx$, 9 donc, en intégrant logarithmiquement,
& paflant en Toîte des logarithmes aux nombres » on a M^K étant une
constante arbitraire $j \cdot \dots$ » or $\tan \phi = \frac{1}{(i \cot^2 f)'} \frac{d\phi}{df}$ substituant la
valeur précédente « on aura $\tan P = y(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \theta)$; & mettant cette valeur de
 $\tan t$ dans les deux premières équations différentielles , on aura équations,
où les indéterminées font feparées, & qui étant intégrées , donneront r & ϕ
en fonctions de t . Cette solution revient à celle que M. d'Alembert a donnée
dans le tome quatrième de ses Oeuvres. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 20.86% accurate

Seconde Partie. 413 5'0. Venons au (second cas où l'on suppose le corps grave (pendu par un point fixe) autour duquel il peut tourner librement en tout sens. En prenant ce point pour le centre du corps s c'est-à-dire, pour l'origine commune des coordonnées $I, R, j^{\wedge}Sc \hat{a}$, & supposant les ordonnées $\wedge$ vectorielles, & dirigées de haut en bas, on «ira pour le mouvement de rotation du corps, les équations (B) de l'article 40. Ces équations sont plus compliquées que celles du cas précédent» à raison des termes multipliés par les quantités $Sadm^{\wedge} iS^{\wedge}Pm, ScPm$, lesquelles ne sont plus nulles « lorsque le centre du corps dont la position est ici donnée, tombe hors de son centre de gravité ; on peut néanmoins encore faire évanouir deux de ces quantités, en faisant passer par le centre de gravité l'un des axes des coordonnées u, v, c , dont la position dans le corps est arbitraire ; ce qui simplifiera un peu les équations dont il s'agit. Supposons donc que l'axe des coordonnées c passe par le centre de gravité du corps; on aura alors par les propriétés de ce centre $\wedge \int U/B \gg 0, SBD m = \& \int$ on nomme k la distance entre le centre du corps, celui-ci le point de suspension, son centre de gravité, il est visible qu'on aura aussi $S'k'^{\wedge}c)Dm = 0$; donc $Se Dm - SkD m \ll AD m = kmf$ en nommant m la masse du corps.' * Faisant ces substitutions, & mettant K pour $km^{\wedge}$ on aura les trois équations suivantes, .. •

The text on this page is estimated to be only 13.26% accurate

414 MÉCANIQUE ANALITIQUE. $dT^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = dr^2 + r^2 d\theta^2$ •
 $\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}}$ dans lesquelles J I. On peut d'abord trouver deux
intégrales de ces équations en les ajoutant ensemble, après les avoir
multipliées respectivement par p , r , ou par t^2 car $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = h^2 a'' - r \frac{dr}{dt}$,
 $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = K (i' - i'')^2$ (art. X7), on aura ainsi les deux
équations • ■ dont les intégrales. sont • • f et k , étant deux constantes
arbitraires. Il paraît difficile de trouver d'autres intégrales, & par
conséquent de résoudre le problème en général. Mais on y Digitized by
Google

The text on this page is estimated to be only 18.76% accurate

Seconde Paktie» 41; peut parvenir, en supposant que la figure du corps soit assujettie à des conditions particulières. Aioii |n ruppofaac $F = o^{\wedge} G$ — $o^{\wedge} H$ ss fc. de plus $A^{\wedge} B^{\wedge}$ on aura $^{\wedge} A p^{\wedge} = \&$ la troineme des équations (E) deviendra d» sa donc TintédT grale est $-j^{\wedge} s^* co^{\wedge} t/?$. • " • Ce cas est celui où l'axe des ordonnées c , c'est-à-dire, la droite qui passe par le point de suspension, & par le centre de gravité « est un axe naturel de rotation, & 'o&' les momens d'inertie autour des deux autres axes sont égaux (arc 48); ce qui a lieu en général dans tous les solides de révolution, lorsque le point fixe est pris dans l'axe de révolution. La solution de ce cas est facile, d'après les trois intégrales qu'on vient de trouver. En effet, puisque $^{\wedge} (p'^{\wedge} - ^{\wedge} i^{\wedge})$ est variable que ces trois intégrales se réduiront à cette forme $a y$, /ly n étant des constantes arbitraires. * ' Donc si- en substitue pour ζ' , $\zeta \setminus 4'^{\wedge}$, & pour $r, ^{\wedge}$, leurs valeurs en fonctions de f , 4> » (arc 30, 37 }, on aura ces trois équations $^{\wedge} / \bullet \bullet ' . " \bullet . ' \bullet ** \sim \setminus$

The text on this page is estimated to be only 10.52% accurate

41d MÉCHANIQUE ANALITIQUE. ~ ssff, • leftiuelles onr ,
comme Ton voit, l'avantage <jue les angles finis 4 & <p lie s'y trouvent pas.
' . la féconde donne d'ab^d • ^ cette valeur étant lubflituce dans la première,
on aura enfuice la féconde & la troifieine donneront ,j • • (k—CncoÇm)dm
ifin»[^] C-[^] fin..' rx/—Cn«-<-» jreof«»)—C A— Ciic©f*)»J > t C >^/» — A
Cof <# r v4 n Cof a -)</» , ^ fiu «v[^] I[^]Aimcé- (if—Cn[^]-hx K col.)— (A
-2- (« cof * / j ^ équations OÙ les indéterminées font féparées, mais dont
Tintégradon dépend en général de la reâifioation des ferions coniques. J2.
Reprenons les équations (£), & fubftituons-y les valeurs de -5[^], ^ P* î*
deviendront . Dans Digitized by Gopgle

The text on this page is estimated to be only 19.33% accurate

Seconde F. artie. 417 Dans l'état de repos du corps les trois quantités y , r , sont nulles, puisque $(p^{\wedge} \sim h r^* J \text{ cilla vîcefle instantanè« de rotation (art. 45) ; donc on aura alors } =rv o^{\wedge} \text{ Se } o ; \text{ enforte qu'à caufe de } ^{\wedge} \text{'^} -4- -4- l''' = i , \& \text{ par conféquenc de } i ; ,''' = i \gg \text{ l'axe des coordonnées coïncidera avec celui des ordonnées } c ; c^* \text{ eib-à-dire , } ^{\wedge} \text{ que ce dernier axe qui pailè par le centre de gravité du corps, } 9c \text{ que nous , nommerons dorénavant } ^{\wedge} \text{axe du corps } ^{\wedge} \text{ fera vertical; ce qui est l'équilibre du corps ; \& cela se voit encore mieux par les formules de l'article 30, lesquelles donnent fin } f \text{ fin } \ll \text{ as } o , \text{ cof } ? \text{ Hn } \ll s == o , \& \text{ par conséquent } \ll =s o \gg \text{ m'étant l'angle des deux axes des coordonnées } c \text{ \& } ^{\wedge} . l \text{ Si donc en luppofant le corps en mouvement, on fup*3 pofe en même-tems que fon axe s'éloigne très-peu de la verticale , entorte que l'angle de déviation } \ll \text{ demeure toujours très-petit , alors les quantités } ^{\wedge} \& \text{ feront très-petites, \& l'on aura. lb cas où le corps ne fait que de très-petites oscillations autour de la verticale, en ayant en même-tems' un mouvement, quelconque de rotation autour de fon axe* Ce cas qui n'a pas encore été réfolu peut être facilement \& complètement par nos formules. Car en regardant } i \text{ te comme très-petites du premier ordre, te négligeant les quantités très-petites du second ordre \& des ordres fup* vans, on trouve, par les équations de condition de l'article*^ 15, } = 1 , == \text{ — } r - f^{\wedge} y = 3 - \bullet < r \text{ — , \& } f^* l^* = I , , , \gg - f - I , I' / - H I'' o ; \text{ donc } r = \text{ fin } ^{\wedge} , = . \text{ cof } ^{\wedge} r , = \text{ fin } 6 , t = \text{ cof } \hat{o} , \& \text{ cof } ^{\wedge} \text{ — } = o ; \text{ d'où } T = 90^{\circ} -4- \hat{o} , \& \text{ par conféquent } ^{\wedge} = \text{ col } fi , \text{ — } \text{ fin } 6 , \text{ Subftituant ces valeurs dans les expreffions de } d dQ^{\wedge} d R \text{ de l'article 13 } ^{\wedge} \text{ onzwdFy } ^{\wedge} i^{\wedge} d^{\wedge} - ^{\wedge} dtl^{\wedge} dQ^{\wedge} i^{\wedge} d^{\wedge} dt : ^{\wedge}$

The text on this page is estimated to be only 17.00% accurate

• ■ • 418 MÉCHANIQUE ANALITIQUE $\hat{i}^3 = 3 < /6$, en
 négligeant toujours les quantités du second ordre. • • * Ainsi donc on aura
 les valeurs qui étant substituées dans les équations
 différentielles ci-dessus, donneront, en négligeant les puissances des
 produits des équations linéaires pour la détermination de ces
 variables. Mais avant de faire ces substitutions, on remarquera qu'en
 supposant $i' \& \hat{c}'$ nuls, les équations dont il s'agit, donnent 0 » tft* dt* ' dt*
 » *« Donc peut-être C ne faut-il pas devenir nul » à moins que le corps ne se
 réduise à une ligne physique, C étant $\dots \hat{S}(a'-i' B'J Z) / 7i$, il s'enfuit qu'on
 ne peut satisfaire à ces équations qu'en faisant $-jjr$, & en fait ou $-jp \rightarrow o^{\wedge}$ ou
 $F = 0 \& (r = 0$. De là il est facile de conclure que lorsque $\hat{c}'$ ne font pas nuls,
 mais seulement très-petits, il faudra que les valeurs de ou de G soient aussi
 très-petites ; ce Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 15.23% accurate

s E C O N D L r A R T I E, qui fait deux cas qui demandent à être examinée fèparément. 5 3» SuppofoQS premièrement que foit une quantité très-petite du mcmc ordre que $\wedge$ fie on aiii, aux cpantités du fécond ordre près » /» «■ — $\wedge 7$ - » $\hat{1} = * "77"*$ Par ces fubflicutions , en négligeant toujours les quantités du fécond ordre» àc changeant pour plus de fimplicité les ieccrés en 2/, les équations différentielles de Tato cicle précédent» deviendront $Ad'u — Gd't - \wedge Hd^j \_ Je* Cd't — Fd^S' \wedge Gd^u$ la dernietè donne - $\hat{1}\hat{1} = - \wedge \wedge \wedge - \wedge \wedge h$ & cette valeiir étant fubftituée dans les deux premières « on aura ces deux-ci 9 $(AC^{\wedge}G^*)d'u - \wedge (CH^{\wedge}GF)d't$, $r^{\wedge}TT^{\wedge}$ à I' -H,UAtt = 0, dont l'intégration eft facile, p^r les méthodes connues. Qu'on fuppose pour cela is«iin($\wedge \wedge / \wedge 3 \wedge /$ «as:>iin ($ff^{\wedge} - \wedge Jt$ « • Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 9.71% accurate

420 MÉCHANIQUE ANALYTIQUE. » P étant des constantes indéterminées; on aura après ces substitutions, ces deux équations de condition» $(BC^r J^f - hfCH - HGjFJ^f - il) = 0$ lesquelles donneront $2_$ $(CH - CF)^* CK - (B f - t - r) y^*$. Soit réduite cette équation en $^{\wedge} . ^{\wedge} - ^{\wedge} - f$. $\pounds$; $c + F^* - <? \bullet$; $^{\wedge}$ laquelle aura, comme l'on voit, quatre racines égales deux à deux & de signe contraire. Si donc on désigne en général par p & p' les racines inégales de cette équation, abstraction faite de leur ligne, & qu'on prenne quatre constantes arbitraires «, $*' > Z^{\wedge}$, $^{\wedge} \wedge$ on aura en général $s^m \ddot{U} x_i (f t^{\wedge} \$ / H - \text{fin} (f i^{\wedge} f t)^{\wedge}$ & par conséquent $(-g - CF; y)^{\wedge} \text{fin} (y t - 4 - / \gg)$ ■ Enfin on aura en intégrant la Valeur de $-j j^{\wedge} 9$ Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 17.67% accurate

Seconde Partie. 421 De forte que l'on connoîtra ainfi toutes les variables en fondions de θ , & le problème fera réfolu. « . Aurefte, comme cette folutionefl fondée fur l'hypothefe » quej, U foient de très-petites quantités, il faudra, pour qu'elle foie légitime, i" que les conftantes α , & β à foient aufli crès-petites ; 2.°. que les racines- f^+ , p' foient réelles &: inégales, afin que l'angle θ foit toujours fous le figne des iinus. Or cette féconde condition exige ces deux-ci» 4 $((A B - \text{iry } Q - h(A F^* - B G') \} C)$ $< ((A - ^{BJ} C - hf^{G^*} / ;$ lefquelles dépendent uniquement de la figure du corps, & de la ilcuacion du point de fufpeufioa. 5 4. Supposons en fécond Hen que les conftantes F 9c G foient aufli très-petites do* même ordre que α & C y alors négligeant les quantités du fécond ordre, 5c mettant j , u à la place de $C\%$ $C\%$ les équatiotis différentielles de l'article 51 deviendront $(C - 'B)(udt - ds)dt Fdê^*$ de dt^* de Digitized by Gopgle

The text on this page is estimated to be only 13.48% accurate

412 MÉCHANÎQUE ANALITIQUE. (A—C)(sd«-i-du)dt Cdi*
— . — O* La dernière donne mo, & intégrante -j^ « «» ff étant une
conibmte arbitraire de grandeur «^ucicon^ue. Subftituant cette valeur de
dans les deux équations» on aura celles-ci, G «• -4- H »* a X =■ o , dont
l'intégration n'a aucune difficulté. Qu'on lesdivife par n\ & qu'on y remette,
poufT»Ius. de fimplicité, à la place Ae ndt^ en fc fouvenant que eft
déformais confiant, on aura, eij ordonnant IfiS termes, & faifant X« ^ (art.
jo). Pour intégrer ces équations , je commence par faire difDigitized by
Google

The text on this page is estimated to be only 16.55% accurate

SbcondbPaktie. 433 paroStre les termes tout conftans, en fuppofant $i = au = y - h A$, & déterminant les constantes $/, h$, cnforte que les termes F Se G dllparoillent j ce ^ui donnera ces deux équations de condition, m d'où Ton tirera $h GH^F(C'-ji'hL)$ & Ton aura en x, y, e , les mêmes équations qu'en $s, 9$, avec cette feule différence <jue les termes conftans F n'y feront plus. Je fuppofe maintenante sas tttf' ^eaj^e", «,18, &/ étant des conftantes indéterminées, & « le nombre dont le logarithme hyperbolique eil i ; comme tous les termes des équations à inçégrer contiennent x Scyzh première dîmenfion , il s'enfuit qu'ils feront après les fubflirutions , tous divifibles par & il reliera ces deux équations de condition , $(C - A - ^L ^Bi^*) \ll ^-(^ (C - A - ^B) / -h H(i -h i'JJ^ = o$, iefquelles donnent $* ^ (C - A ^B)i'fH(t'^i^* C - Jt^L - fAi^* ' f m$ de forte qu'on aura , en multipliant en croix , cette ë<jua' liou en

The text on this page is estimated to be only 21.23% accurate

424 MiCHANZQITE ANALITXQUS. laquelle » en faifanc i -4-
 Ce réduit à cette forme » $\{AB'H'Jt'(A'hBj(L^CJ^JfrhL^*iL\{A'^B'CJ^o.$
 Ayant déterminé p par cette équation , on aura la confanrc * demeurera
 indéterminée. Or comme l'équation en /) a deux racines , &c que le radical y
 (f ^ij peut être .pris également en plus & en moins , on aura ainH quatre
 valeurs diâ^'é rentes de x,y, leiquelles étant réunies, iatîsferont également
 aux équations propofées, pnifque les va^ dablesx»^» n'y font. que fous la
 forme linéaire. Prenant donc quatre confiantes diffiSrentes pour oniura de
 cette manière les valeurs coihplettes de x 6c y y puifque ces valeurs ne
 dépendant que de deux équations difflîh^tîeUes du fécond ordre , ne
 fauroient renfermer au-delà de quatre conilantes arbitraires. 5 J. Pour que
 les expreffions de « & ne contiennenc point d*arcs de cercle, il ^ut qae y(f
 —i) fbit imagi* ûaire , & qujainfi f foit une quantité réelle 8c moindre'que
 l'unité. Dénотons par p «* les deux racines de lequation en p , fuppofées-
 réelles & moindres que l'unité^ £c donnons aux ' quatre -confiantes
 arbitraires cette forme. imaginaire. on Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 12.32% accurate

Sbcondb Partie. 42^ on aura en faianc ces fubihcucions , & paflaie des exponentielles aux finus Sc cofmus, ces ^expreflfoiu complettet & réeies de x U, y, oit «9 7, y • font des conftantes arbitraies» dépendantes de Tétac Initial du corps. Àyanc ainfi « 0C y « on aura Donc prenant pour « un angle quelconque proportionnel au cems, on aura (ait. 51 } ces valeurs des neuf variables I"— fin cof#, . . — f cof ô -h fm a,/"=-- j lin fl — .« cof 5""= » i 1 eoiforte «)tt*oii coanoîtia ks caoïdoimées |» »» Cdie chaque HhJi
Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 27.94% accurate

4⁵ MÉCANIQUE ANALITIQUE, point du corps pour un
 infant quelconque (article ii). Si on compare les expressions précédentes de
 θ & c, avec celles de l'article 30, on en déduira facilement les Ta^* leurs des
 angles de rotation ϕ, ψ & c. U Ton trouvera ϕ^4, ψ^4 un fin «SB[^], coff cof» & c;
 d'où l'on tire; Et il est facile de voir d'après les définitions de l'article 19,
 • que « fera l'inclinaison supposée très-petite de l'axe du corps avec la
 verticale, que ϕ fera l'angle que cet axe décrit en tournant autour de la
 verticale, & que ψ fera l'angle que le corps même décrit en tournant autour
 du même axe, ces deux derniers angles pouvant être de grandeur
 quelconque. 6. Mais il faut, pour l'exactitude de cette solution, que les
 variables s & u demeurent toujours très petites. Ainsi, non-seulement les
 constantes « & » qui dépendent de l'état initial du corps devront être très-
 petites; mais il faudra que les valeurs des constantes (redonnées par la
 figure du corps) soient aussi très-petites; & que de petites racines soient
 réelles & positives afin que l'angle θ soit toujours renfermé dans des sinus
 ou cosinus. Si on suppose $F = 0, G = 0$, savoir, $ShcDm^o^ Sac Dm = 0$, on
 aura les conditions nécessaires pour que les moments des forces centrifuges
 autour de l'axe du corps, qui est en même-temps celui des coordonnées r, ϕ , se
 détruisent, en sorte que le corps puisse tourner uniformément & librement
 autour de cet axe. Or on fait qu'il y a dans chaque corps trois axes
 perpendiculaires entr'eux» U paï Tant par te Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 21.94% accurate

Seconde Partie. 427

Ufifre de gravité , lefquels ont cette propriété, ôc qu'on nomme communément, d'après M. Euler, les axes principaux du corps. Donc puifque nous avons fuppofé que l'axe du corps paffoit en même-tems par le centre de gravité & par le point de fufpenfion , il s'enfuit que les quantités F & G feront nulles , lorfque le corps fera fufpendu par un point quelconque pris dans un de fes axes principaux. Donc pour que ces quantités » ians être abfolument nulles » iôient du moins très-petites, il faudra que le point de fufpenfion du corps foit très-près d'un de (es axes principaux ; c'eft la première condition néceffaire pour que l'axe du corps ne falle que de très-petites ofcillations autour de la verticale j le corps lui-même ayant d'ailleurs un mouvement quelconque de rotation autour de cet axe. La féconde condition néceffaire pour que ces ofcillations (ôient toujours très-petites, dépend de l'équation en θ , & le réduit à celle-ci, $AB^2 H^2$ lefquelles dépendent i k fois de la pofition du point de fufpenfion & de la figure du corps. La folution que nous venons de donner, embraffe la théorie des petites ofcillations des pendules dans toute la généralité dont elle eft fufceptible. On verra que Huyghens a donné le premier la théorie des ofcillations

The text on this page is estimated to be only 21.00% accurate

4⁸ MéCHAMIQUE ANALITIQUE. circulaires; fevt M. Qairaut y a ajouté ensuite celle à oscillations coniques j qui ont lieu lorsque le pendule écarté de sa ligne de repos, reçoit une impulsion dont la direction ne passe pas par cette ligne. Mais si le pendule reçoit en même-temps un mouvement de rotation autour de son axe » la force centrifuge produite par ce mouvement pourra déranger beaucoup les oscillations, soit circulaires, soit coniques ; ôc la détermination de « ces nouvelles oscillations est un problème qui n'avoit pas encore été résolu » plettement, U pour des pendules de figure quelconque. C'est la raison jui m'a déterminé à m'en occuper id. SEPTIEME SECTION. Sur les Fluides & l'Hydrodynamique, T. A détermination du mouvement des fluides est l'objet de l'Hydrodynamique; celui de l'Hydraulique ordinaire se réduit à l'art de conduire les eaux , & de les faire servir au mouvement des machines. Cet art a dû être cultivé de tout temps, pour le besoin qu'on en a toujours eu; Scies anciens . J'en ont peut-être autant excité que nous « S'en juger par ce qu'ils nous ont laissé dans ce genre Mais l'Hydrodynamique est une science née dans ce siècle. J'évton a tenté le premier de calculer par les principes de la Méchanique , le mouvement des fluides ; & M. d'Alembert est le premier qui ait réduit les vraies loix de leur mouvement à des équations analytiques. Archimede & ♦

Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 22.74% accurate

SscoNOE Partie. 429 GalOëe (car rintervalle qui a fèparé ces deux grands génies , dirparoît dans l'hiftoire de la Méchanique) ne s'étoient occupés que de rcvjuilibrc des fluidei. Torricelli commença à examiner le mouvement de l'eau qui fort d'un vafe pnr une ouverture fort petite, 2c à y chercher une loi. Il trouva qu'en donnant au jet une direction verticale , il atteint toujours à très-peu-près le niveau de l'çaa dans le vafe; & comme il eft à préfumer qu'il ratteindroïc, exzékement iàos la réfiflance de l'air Se les frottemens , TorricellU en conclut que U vîteflè de l'eau qui s'écoule eft la même que celle qu'elle auroit acquife en tombant librement de la liauteur du niveau, 8C que cette vStellè eft par confôquent proportionnelle àlaracîne quarrée de la même lyiuteur* Né pouvant cependant parvenir k une d^mouHratioa rî'gonreufè de cène propoûtion , il (è contenta de la donner comme un principe d'expérience , à la fki de fon Traite Je Motu naiuralier accekraio, imprimé en 1543. Ne^KCon entreprit de la démontrer dans le fécond livre des Principes mathématiques qui parurent en 16S7; mais il faut avouer que c'eik l'endroit le moins fatisEùfant de ce grjtth Ouvrage, Si on confidere une colonne d'eau qui tombe librement dans le vuide » il eft aifé de {e convaincre qu'elle doit prendre isL figure d'un ceoeSde ^cmé paria révolution d^uae hyperbole du quatrième ordre autour de Taxe vertical; car la vkeflè de chaque tranche horiaontale eft d*un côté comme la racine quarrée de la hauteur d*oh elle eft deicendue, 6c de l'autre elle doit être par la continuité de Tean^ en raifon inverfe de la largeur de cette tranche , & par conféquen en raifon inverfé du quarrc de fon rayon ; d'où il rcfulte que la portion de l'axe oui'abiciile i^ui xcpréfemeia hauteur»

The text on this page is estimated to be only 25.01% accurate

430 MÉCHANIQUE ANALITXQUE. Eft en raifon iaverCe de la quatrième puiffance de. rordotmée de rhyperbole génératrice. Si donc on fe repréfente unTafe qai ait la figure de ce cono'ide, 6c qui foit entretenu toujours plein d'eau , &c qu*on fuppo(e le mouvement de Teaa parvenu à. un état permanent ; il eft clair que chaque particule d'eau y delcendra comme II elle ecoïc libre, & qu'elle aura par conféquent au fortir de l'orifice , la vîteile due à la hauteur du vafe de laquelle elle eft tombée. Or Newton imagine que Teau qui remplit un vafe cylin<* drique vertical , percé à fon fond d'une ourerture par laquelle elle s'échappe, fe partage naturellement en deux parties» dont Tune eft ièule en mouvement, & a la %uie. du cor noïde dont nous venons de parler, c*eft ce qu'il nomme la catara**fb**; l'autre eft en repos, comme fi elle étoïc ^bcée^ De cette manière il eft dair que Teau dôle s'échapper avec une vîteiTe égale à celle qu'elje auroit acquife en tombant de la hauteur du vafe , comme Torricelli Tavoit trouvée par l'expérience. Cependant Newton ayant mefuré la quantité d'eau fortie dans un tems donné, &c l'ayant comparée à la grandeur de* l'orifice, en avoit conclu, dans la première édition de Tes Principes , que la viteile au forcir du vafe n'étoit due qu'à la moitié de la iiauteur de l'eau dans le vafê^ Cette errieur venoit de ce qu'il n'avoit pas d'abord fait attention à la contraâion de la veinei il y eut igucà dans- la féconde édition qui parut en' 1714» & il reconnut que la.ièction la plus petite de la veine étoïc k l'ouvercuie du vafe i peu près comme i ài/i; de forte qu'en prenant cette ièûion pour le vrai orifice, la vkellè doit être augmentée dans la même raifon de i à |/" 1 , & répondre par confô» quent à la hauteur entière de l'eau. De ceue manière fz

Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 27.49% accurate

SicôNDB Partie. 43I théorie fè trouva rapprochée de l'expérience , mais elle n'en devint pas pour cela plus exacte ; car la formation de la cascade ou vase fictif dans lequel l'eau est supposée se mouvoir y tandis que l'eau latérale demeure en repos, est évidemment contraire aux lois connues de l'équilibre des fluides; puisque l'eau qui tomberoit dans cette cascade , avec toute la force de sa pesanteur, n'exerçant aucune pression latérale , ne résisteroit à celle du fluide stagnant qui l'environne. Vingt ans auparavant Varignon ayott donné à l'Académie des Sciences de Paris , une explication plus naturelle & plus plausible du phénomène dont il s'agit. Ayant remarqué que quand l'eau s'écoule d'un vase cylindrique par une petite ouverture faite au fond, elle n'a dans le vase qu'un mouvement très-petit & sensiblement uniforme pour toutes les particules , il en conclut qu'il ne s'y faisoit aucune accélération, & que la partie du fluide qui s'échappe à chaque instant , recevoit tout son mouvement de la pression produite par le poids de la colonne de fluide dont elle est la base. Ains ce poids qui est comme la largeur de l'orifice multipliée par la hauteur de l'eau dans le vase, doit être proportionnel à la quantité de mouvement engendrée dans la particule qui sort à chaque instant par le même orifice. Or cette quantité- d'impulsion est > comme l'on voit, proportionnelle à la vitesse & à la surface » & la surface est ici comme le produit de la largeur de l'orifice par le petit espace que la particule parcourt dans l'instant donné, espace qui est évidemment proportionnel à la vitesse même de cette particule ; par conséquent la quantité du mouvement dont il s'agit, est en raison de la largeur de l'orifice multipliée par le carré de la vitesse. Donc enfin la hauteur de l'eau dans

The text on this page is estimated to be only 20.99% accurate

432 Mi CH'ANiX2tTB analitSqIje. le vase est proportionnelle au carré de la vitesse avec la^{aeU*} • elle s'échappe , ce qui est le théorème de Torricelli. • ' Ce raisonnement a néanmoins encore quelque chose de vague; car on y suppose tacitement que la petite masse qui s'échappe à chaque instant du vase , acquiert brusquement toute la vitesse par la pression de la colonne qui répond à . i*6rice. Or on fait qu'une pression ne peut pas produire cont-à-coup une vitesse finie. Mais en' supposant, ce qui est naturel, que le poids de la colonne agît sur la particule pendant tout le tems qu'elle jette à sortir du vase» il est clair que cette particule recevra un - mouvement accéléré, donc U quantité , au bout d'un tems quelconque, fera, proportion* nelle à la pression multipliée par le tems. Donc le produit du poids de la colonne par le tems de la sortie de la particule, fera égal au produit de la masse de cette particule, par la vitesse qu'elle aura acquise ; 6c comme la masse est le produit de la largeur de l'orifice par le petit espace que la particule décrit en sortant du vase, espace qui, par la nature des mouvemens uniformément accélérés, est comme le produit de la vitesse par le .Temps; il s'en suit que la hauteur de la colonne, fera de même comme le carré de la vitesse acquise. Cette .conclusion est donc rigoureuse, pourra qu'on accorde que chaque particule en sortant du vase , est pressée par le poids entier de toute la colonne du fluide qui a cette particule pour base; c'est ce qui auroit lieu en effet, si le fluide contenu dans le vase y étoit stagnant, car alors la pression sur la partie du fond où est l'ouverture, seroit égale au poids de la colonne dont elle est la base ; mais cette pression doit être différente, lorsque le fluide est en mouvement. Cependant il est clair que plus il approchera de l'état Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 22.10% accurate

Seconde Partie. 433 • de repos, plus auHî fa pre0ton Tur le fond
approchera du •poids total de la colonne verticale; d'ailleurs Texpérienco
luc voir que le tnottVement du fluide dans le vafe, eftd*au« tant moindre
que l'ouverture eft plus petite. Ainfi la théorie précédente approchera
d'autant plus de ià vérité , que les di~ menfions du va(e iêibnc plus grandes
relativement à roa« verture par laquelle le fluide s ccoule; & c'eft ce que
l'exn périence conhrmo» Par une raifon contraire,' la même théorie devient
infuffifante pour déterminer le mouvement des fluides qui coulent dans des
tuyaux dont la largeur eft aflez petite , Se varie peu. Il faut alors confidcrer
à la fois tous les mouvemens des " , particules du fluide, de examiner
comment ils doivent être^ changés altérés par la flgote du canal. Or
l'expérience apprend que quand le tuyau a une direction peu différente de la
verticale, les diffih^nces tranches horifontales du fluide confèrvent à très-
peu-près leurfitallélifme , enforte qu'une .tranche pieod toujours la place de
celle qui la précède; d*oii il fuie, à caiiie de Tincompieflibilité du fluide j
que la vîceflè de chaque tranche horifbntâlo» eftitaiée fui* ▼ antle iens
vertical, doit être en raifon- inverfè de la lar* g^r de cette tranctie, largeur
qui eft doon& fox h figure' du vafe. ' • ' . ■ • • • Il fuffit donc de déterminer
le mouvement d'une feule tranche, & le problème eft en quelque manière
analogue à celui du mouvement d'un pendule compofé. Ainfi, comme félon
la théorie de Jacques BeraouUi, les mouvemens acquis Se perdus à chaque
indant pâr les difflérehs poids qui forment le pendule , fe font mutuellement
équilibre dans io ^ kvier » il doit auifi y aroit équilibioe dans k tuyau taat
les lii .

The text on this page is estimated to be only 23.31% accurate

434 Mii'CRAMiQUE analitk^{ub}» différentes tranches du fluide animées chacune de ki vîceflè acquife ou perdue à chaque infant; & de là par l'application des principes déjà connus de l'équilibre des fluides , on auroit pu d'nhoi d déterminer le mouvement d'un fluide dans un tuyau, comme on avoit déterminé celui d'un pendule compofé. Mais ce n'eft jamais par les routes l^s plus fimples & les plus diie^{les}, que i'efpric humain parvient aux»véricés 9 de ipielque génie qu'elles foient ; U la^{atiece} que nous traitons en fournit un exemple .frappant. Nous avons espo^{fe} dans la première Seâion let ^{^^}kSéteos pas qu'on' avoit laits pour arrivée à ia.ibration du problème * du centre d'ofcillation; & lions y avons vu que la véritable théorie de ce problème n'avoit été découverte par Jacques *fiemoulli, que long-tems après que Huyghens[^]l'eut réfpltt par le principe indire^{fb} de la confervation des forces vives. Il en a été de même du problème du mouvement des fluides dans des vafes; &. ibiefl: fu r prenant qu'on n'ait pas Tu d'abord profiter pour celui-ci des lumières que l'on avoit déjà, acquifef par l'autre. Le même Principe de la confervation des forces vives, fournit encore la première folution de ce dernier problème, & fer vit de bafe à f Hydrodynamique de Daniel. £!emcralii» imprimée en 1738 , Ouvrage qui brille d*aillears pot une AnsAfCe auffi élé^{te} dana^a marcfæ[^] que finale dans £es réfultats. Mais TinexaéHtude de ce principe qm «'avoit pas. encore été démontré d'une manière générale, devoit en ' jeteer aulfi fur les propofitions qui en réfultent, & [^]foit défirer une théorie plus sâre, & appuyée uniquement (uï les loix fondamentales de la Mcchanique. Maclaurin &: Jean Bernoulli entreprirent de remplir cet objet, l'un dans fon Digitized by Gtx^{^^}Ic

The text on this page is estimated to be only 21.09% accurate

Sbgonde Fautie.' 43jp Traité des FlauofiSt«6c l'autre dans fa nouvelle Hydraulique, ^ imprimée à la fin dâ fes (Eurres; l'^sut» méthodes, quoique tfès-difiîSfeBees, condnlient aux mêmes réiîiltats que le priiw cipe de la confervation des forces vives ; mais il faut avouer que celle de Maclauriii n'cfl; allez rit^ouieufc , &i paroît arrangée d'avance, conformcmcnr aux t el ultats qu'il vouloit obtenir; &: quant àlaméthode de Jean BernouUi , fans adopter en entier les difficultés que M. d'Alembert lui a oppofés, on doit convenir quelle laiO^ encore àdéliîrer dttcôté de la clarté &c de la préclHon. On a va, dans la première Seétion, comment M. d'Alem^ l^ert , en généralifanc la théorie de Jacques BemoulU fur let pendules, éniirparveBu.& un Principe de Dynamique fimple êc général, qui réduit les lois du mouremoot d^ corps & celles de * leur équilibre. L'application de ce Principe ' «Ai mouvement des fluides & préièntoît d'elle-même, & l'Auteur en donna d'abord un eSu à la fin de fa Dynamique , imprimée en 1743 ; il Ta développée en fuite avec tout le détail convenable dans fon Traité des Fluides qui parut Tannée fuivar>te, & qui renferme des folution? aufîi directes qu'élégantes des principales queftions qu'on peut propoler fûr les fluides qui fe meuvent dans des vafcs. Mais ces folutioins» comme celles de Daniel Bernoulii^ étoient appuyées fur deux fuppolitions qui ne font pas vraies en général. 1°. Que les difTérentes tranches du fluide coo* fervent exadement leur paiallélifme, enforte qu'une tranche . prend toujours la place de celle qui la précède, a**. Q" la vîteflè de- chaque orancfae ne varie point eja diredîpn, c^eft à-dire, que tous les points d'une même traocbe font fupposés avoir une vtcelj^ égale & parallèle. Lorfque le . Ilia

The text on this page is estimated to be only 23.29% accurate

43^ M6<:h.amiqub alitiq.ue. fluide coule dans des Tases ou tuyaux ibic étvoîts, les fupponcions dont il s*agic iont très-plaofibles , & paroîflènt' confirmées par l'expérience ; mais hors de ce cas elles s'éloignenc de la vérité^ & il n'y a plus alors d'autre moyen pour déterminer le mouvement du fluide, que d'eKaminer celui que chaque particule doit avoir. M. Clairaut avoir donné dans fa Théorie de la figure de la Terre , imprimée en 1745 , les loix générales de Téquilibre des fluides, dobt toutes les particules font animées par des forces quelconques , il ne s'agiilbit donc que de paflèf éifi' ces loix à celles de leur mbnvemeat, par le moyen duptm* cipe auquel M. d'Alembert avoir réduit» à, cette même époque 9 toute la Dynamique. Ce dernier fit quelques années, après ce pas important, à l'occafion du prix que l'Académie dte Berlin propofa en 1750 » fur la Théorie de la*réiiftanoedes fluides ; ôc il donna le premier, en 17)2 , dans fôn-Eflâi d'une nouvelle théorie fur la réfiflance des fluides , les équations rigoureufes & générales du mouvement des fluides, foit incompreffibles , foit cômpreffibles & élaftiques; équations qui appartiennent à la clafle de celles qu'on nomme à différences partielles^ parce qu'elles font .entre les diffl*érenies parties des différences relatives à plufieurs variables. Par cetce découverte » tonte la Méchanique des fluides fut réduite à lu feul point d*analyfe ; & fi les équadoos- qui la renfanaènt éuûenr intégrables, on pourtoft dans tous ks cas déterminée complettemenc les circonftances.du mouvemeoc 8c de Tac^on d*Hn fluide mu par des forces quelconques; malheup leufemeot ^Ics font fi rebelles, qu'on n'a pu jafqu'à piéCènt 9U vemr à bour que dans des cas très-limités. Cèft donc, dans ces équations à(, daos leur intégration que Digitized by GooqIc

The text on this page is estimated to be only 18.31% accurate

& B C O M l> S P A H T.I B« . 437 confitc toute la théorie de rHydrodynamic[ue. M. d'Alembert employa d'abord pour les trouver, une méthode un peu compliquée j il en donna enfuire une plus iimpie ; mais cetM méthode étant: fondée fur les loix .de ^équilibre particulières aux fluides > fait de rNycLrodynamique une fcience féparée de la Dynamique des corps folides. La tévniion qua nous avons faite dans la promieie Farde. de cet Oumge^ de tomes les loâ de Téquilibre des corps» tant iblides quei flnîdes dans une wnèm» fiftnvile» 9c l'^Iicatioa ^e.noiiiic venons de faire de cette formule aux- lolz dû mouvement^ nous condtttièotnatttreltement iréunir de même UDyn^niquo 9ç l'Hydrodynamique comme des blanches d*un principe unique » U comme des ^éfidiats d'une feule formule générale. Ocft. l'objet qui refte à remplir pour completer notre travûl fur la Méchanique,' &c acquit^cer rengagement pri\$ dans le cicic de cet Ouvrage. HUITIEME SECTION. Du Mouvement des fluides incomprejibier. ^ ' pourroit déduire immédiatement les loix du mouvement de ces fluides , de celles de leur équilibre, que nous avons trouvas dans la Sedlion feptieme de la première Partie ; car par le Principe général ezpofé dans la féconde Seétion» il ne finit qu'ajouter aux forces accélérattices actuelles , les nouvelles forces accélératrices , , ,

The text on this page is estimated to be only 21.65% accurate

438 MÉCHANIQUÉ AHALITIQTÏ. diri'-écs fuivant les coordonnées ' reébmglés le, y, \i ■ Ain fi, comme dans les formules de l'article 13 & fuiv. de la Section feptième citée, on a Tuppocé toutes les forces accélératrices du fluide déjà réduites à trois, X, Z, dans • la direction des coordonnées x, y, \ il ny aura pour appliquer ces formules au mouvement des mêmes fluides, qu'à 'm X y 3 ^ . Mais nous croyons qu'il est plus conforme à l'objet ^ WouTrage d'appliquer directement aux fluides les équations générales données dans la Section quatrième pour le mouvement; d'un système quelconque de corps. • ■ Equations générales pour U mouvement des Fluides incompressibles, ' a. On peut considérer un fluide incompressible comme composé d'une infinité de particules qui se meuvent librement entr'elles sans changer de volume; ainsi la question rentre dans le cas de l'article ix de la Section citée ci-dessus. . ■* - v • Soit donc Dm la masse d'une particule ou élément quelconque du fluide; ^, X, Z les forces accélératrices qui agissent sur cet élément, réduites pour plus de simplicité aux directions des coordonnées rectangulaires x, ^, ^, & .ten- ^ » dantes à diminuer ces coordonnées; Z = 0 équation de . . condition résultante de l'incompressibilité, ou de l'invariabilité du volume de Dmy^ une quantité indéterminée i & Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 18.43% accurate

s s C C M D E P A. R T I E. S une caractéristique intégrale
 correspondante à la caractéristique différentielle Z , & relative à toute la
 masse du fluide ; on aura pour le mouvement du fluide cette équation
 générale (Scol. IV, art. 15). Il faut maintenant substituer dans cette
 équation les valeurs de Dm & de J^Z & après avoir fait disparaître les
 différences des variations j si il y en a égalité formeront à zéro les
 coefficients des variations indéterminées i^x i^y , $X' \dots$ Retenons la
 caractéristique D pour représenter les différences relatives à la situation
 in(Changeée des particules contiguës, tandis que là caractéristique H que d C
 rapportera uniquement au changement de position de la même particule
 dans l'espace; il est clair qu'on peut représenter le volume de la particule Dm
 par le parallélépipède $Dx Dy D^z$ ainsi en nommant ρ la densité de cette
 particule, on aura $Dm = \rho Dx Dy D^z$. De plus, il est visible que la
 condition de continuité sera contenue dans l'équation $Dx Dy D^z$:
 $[a \Rightarrow \text{conf. de forme qu'on aura } L^2 Dx Dy D^z \text{ — conf. Se par conf. — } \text{qu'on}$
 $s^L = \int L^2 Dx Dy D^z]^{*}$ pour déterminer cette différentielle, il faut employer
 les mêmes considérations que dans l'article 14 de la Section septième de la
 première Partie } • ainsi en changeant seulement ρ en D dans les
 formules. d« cet endroit » on a

The text on this page is estimated to be only 12.21% accurate

440 MICHAÏMI-QUE AMALITIQUE. Cette quantité étant multipliée par a , & intégrée relativement à toute la masse du fluide, on aura la valeur de S_{fil} dans laquelle il faudra faire disparaître les doubles lignes par les mêmes procédés déjà employât dans l'art. 15 de la Section citée. On aura ainsi : En faisant donc CCS substitutions dans le premier membre de l'équation générale, elle contiendra premièrement cette fonction intégrale totale » dans laquelle il faudra faire $f < S$ Arétnent égaux à tiso les coefficients des variations $/x$, $< r^3$; ce qui donnera ces trois équations pour tous les points de la cavité fluide. I Digitized by

The text on this page is estimated to be only 18.74% accurate

§ 441: Il refiera à faire disparaître les intégrales partielles, lesquelles ne se rapportent qu'à la Surface extérieure du fluide; 6^e l'on en conclura, comme dans l'article 16 de la Section 9 (cité, que la valeur de a devra être nulle pour tous les points de la surface où le fluide est libre; on prouvera de plus, comme dans les articles II de la même Section 9 que relativement aux endroits où le fluide sera contenu par des parois fixes, les termes des intégrales précédentes se détruiront mutuellement, en sorte qu'il n'en résultera aucune équation; ici en général on démontrera par un raisonnement semblable à celui des articles 4, 5, 6, que la quantité x rapportée à la surface du fluide - y exprimera la pression que le fluide y exerce, & qui, lorsqu'elle n'est pas nulle, doit être contrebalancée par la résistance ou l'action des parois. 3. Les équations qu'on vient de trouver renferment donc les lois générales du mouvement des fluides incompressibles; Kkk

The text on this page is estimated to be only 16.94% accurate

44^ MicHAKIQUE ANALITIQUE* mais il y faut Joindre encore
 Téquation même qui réfutte de h condition de Tincompreffibilité du volume
 $DxDyD^{\wedge}$ pendant que le âuide le meut; cette équation fera donc représentée
 par $d.fDxDyD^{\wedge}J=3o$; de forte qu*en chan* geint S en d dans i'cxpreflîcn
 de $^{\wedge}.fDxDyD^{\wedge}J$ trouvé[^] ci-dclîUs , Se égalant à» zéro , on aura $^{\wedge}$ Cette
 équation combinée avec les trois équations (A) de Tarticle précédent, ièrvira
 donc à déterminer les quatre inconnues $x,^{\wedge} \hat{y}^{\wedge} < Bc a$. 4. Pour avoir une idée
 nette de la nature de ces équarions, il faut confidérer que les vnrinbles
 $x^{\wedge}y^{\wedge}$ qui déterminent la poîition d'une particule dans un infant quel*
 conque , 4o[^]vent appartenir à la fois à toutes les particules dont la madè
 fluide efl: compofée ; elles doivent donc lètte des fondions du tems 8c des
 valeurs que ces mêmes variables ont eues au commencement du
 mouvement ou dans un autre înfnt donné. Nommant donc $a,^{\wedge},c$ les
 valeurs de $Xy y y^{\wedge}$ {t lorfqe $/ = o$; il faudra que les valeurs complettes de
 $x, \backslash y$ foient des fonctions de c, t . De ceice nr.nicre les diffÉrences marquées
 par la caractéiifliq D, fe rapporteront unicucment à la variabilité de $a, h y$
 c ; les différences mnrquc'cs par l'autre earaclériflique d fc rapporteront
 linipiement à la variabilité de t . Mais comme dans les équations trouvées il
 y a des différences relatives aux variables mêmes $a; y, t^{\wedge}$ il fai[^] dra, pour
 runiformité* réduire celles-ci aux différences re* latives $^{\wedge}a^{\wedge}h^{\wedge}c^{\wedge}$ ce quieft
 toujours poffible car on n'» Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 15.10% accurate

Seconde Ba&tie. qtt*à conceroir qu'on ait f^bfticué dans les fondions avant la différenciadon les valeurs mêmes de $x, ^, t^{^^}> ^> ^'$ 5- En regardant donc les variables y, comme des fondions $a^b^$ ài représentant les différentielles félon la notation ordinaire .des diiTérences partielles > on aura ■ $D:i\sim JS.da^{\pm}db^{^}dci$?C regardant en même-tems la fonclion a comme une fonction de Xy y'i't ^ comme une -fondion de a, on aura * . CCS deux expreflions de devant être identiques, (! on fubfticue dans la premicie les v.iU uis clc $DxyDy^$ en da, dh ^ de ^ \\ fliudra que les coëfKciens de da^db y dcy foient ks mêmes de part 5c d'autre ; ce qui fournira trois équations qui ferViront à déterminer les valeurs de , ce Iera la même choie fi on fubftitue daos la féconde exprelTion de $Z>a$ les valeurs de ddj $dh^ dc^$ en $Dx^ Dy, D\backslash$ tirées des expreflions de ces dernières quantités; alors -la comparaifon Kkki

The text on this page is estimated to be only 14.22% accurate

; } 44 MÉCRÀHI[^]US AMAtlXIQUS. des. termes afièâés de Z>x,
Vyy D\ donnera Immi» diatcmenc les valeurs de [^] Sec. . . [^]- Or par les
règles ordinaires de rëlimînattoA on 9 , « D ; 4- n [^] - H- « " D 7 I . 9 — —
_____ r [^] en fuppofant dk [^] de de dk dk m " dk X de 9 d* db X dy de' de m
dk d\ dj_ dm da X M . de 9 ix d\ dx dr ' ix dy dx dy de -7— [^] de da da da •
K 179 ly dr dy — — X dk [^] / dx dx dx X dl dk da dk [^] da da db 9 dx dy •
dy — " X da dk '-Vk" da dx X , 'h : dk 'h ■ X-ri- [^] dt dx ,dk [^] da ■ H de' '
dk de -X dl dû dx "7- X dy dk X ii .V de "lu i-[^] dx [^] ~dk "57 de ■ X , dx dk'
Faifànc done ces fublittodons dans Texpreffion d a H* JT '^^'^ [^] comparant
enfuire avec Texpremon identiijue J)xr\^^Dy'[^] |[^] Z?[^], où 4ura Digitized by
Google

The text on this page is estimated to be only 10.80% accurate

SseoNDfiPÀHTis» jL V a.JL)é^^ y« ''' ' *d7 — r ~r # ^ ~> J>z ^
i ^ t ■ dk i ^ TT» Aififi fubftitaaait ces valeurs dans les uois équations (A^
de Tardcle a, elles deviendront de cette forme» après avoir multiplié par «/A
da —3' de • dx d» du dk OÙ il n'y a, comme l'on voit, que des diffErences
par* tielles relatives ka^b^c^t, i/^ Dans ces équations la quantittf A qui
exprime k dcniltc', cft une fonction donnée de <2, ^, c fins r puifqu'elle doit
demeurer invariable pour chaque particule ; &: fi le Huide cit homogenc, a
fera alors une conlhnte independ.mre de Ai h, c, t. Quant aux quantités X,
Z qui feprcleutent les forces accélératrices , elles feront le plus ibuvenc
données en- fondions de ^ , ^ r. 6. On peut, au rcdc, réduire les équations
précédentes À une iornic plus lîmple, en ajoutant eniemble, après les avoir
multipliées refpeâivement fie fucceifiv)em6nt*p%r --j^p

The text on this page is estimated to be only 16.73% accurate

MicRÀNIQVS ANALITÎQVt^ ^ car d'après les expreflîons de « ,
« , ^ , > , iS' , &c , don- . oées d-deflîis , il eft aifé de voir qu'on aura ê ss «
"TT ^ • ~ HT ^ ^ dk H-*' 4^." if = o, & ainfi de fuite. Deforte que par ces
opérations & ces réductSbioQS » on aura les traiistormées 7. On
transformera, d'une manière iemblable, rèquauoiit IS) de Tarticle 3; & po"r
<^ela, comme, d'après la remarque/le l'article 4, les différentielles dxy dy^
ne font relatives qu'à la variable / , on les réduira d'abord aux différences
partielles dt^ f// i eiifortc cjue l'équation dont il s'agit étant divifée par , fera
de la foim» d t ■ s= O, Digitized by Go<^le

The text on this page is estimated to be only 14.43% accurate

s E c o H]> B Partie. 447 Or, par les foi^mules trouvées ci-detTas pour les valeurs de $9^{\wedge}$, &c, on aura pareillement, en f ubiUquant &c, à la place de a. $dx dt Dx m dx dt d^* ix dh d. dx dt dt$ comme dans le fécond membre de cette équation, I2 quantité $x cA$; regardée comme une fonâion dea,5»c,/» dx on aura $da = s^{\wedge\wedge\wedge\wedge} \blacksquare$, 6c ainfl des autres dilicincs partielles de x ; de forte- qu'on aura (implement $dt Dx T^{\wedge} dtdt dtdt *$ On trouvera des expreffions femblables pour les valeurs $-j^{\wedge}$, & il n'y aura pour cela qu'il changer dans la formule précédente x en $\&^{\wedge}$. Faifaot donc ces fubftitutions dans l'equation ci-delTus^ cUe deviendra après y avoir effacé le dénominateur $ocàxk^{\wedge} mun^{\wedge} x$. « $d^{\wedge}k$. 4Pr dûdt d'y 9! dhdt dedt dfdt dhdt dedt^ da-dt Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 13.58% accurate

'44^ MjâCHAKIQUE ÀKALITIQUE* .. Le premier roeiabre de cette équation n'est autre chose que la valeur de $-\hat{j}j-t$ comme on peut s'en affirmer par la différentiation à l'égard de l'expression de A (art. 5). Ainsi l'équation devient $-j- = \text{donc}$ l'intégrale est $B = \text{const.}$ ($a^b y^c$), Supposons dans cette équation, f es o, & soit $\frac{1}{x}$ ce que devient alors la quantité $\frac{1}{x}$, on aura $\frac{1}{x} = \text{const.}$, ($a^b y^c$) i par conséquent l'équation fera $\frac{1}{x} = \text{const.}$ Or nous avons supposé que lorsque $\frac{1}{x} = \text{const.}$, on a $x = 5^{\frac{1}{x}}$ donc on aura aussi alors $-J^{\frac{1}{x}} = \text{const.}$ Ces valeurs étant substituées dans l'expression de A (art. 5), on a 9 SB I , donc $iCca i$. • Donc remettant pour $\hat{o}$ sa valeur, dans l'équation dont il s'agit elle fera de la forme $\frac{1}{y} \ll f \ll f_v \ll f_y \ll \frac{1}{x} \ll f_y \ll f_c$. Cette équation combinée avec les trois équations (C) ou (P) des articles 5 » servira donc à déterminer les valeurs $\frac{1}{9} \frac{1}{x} \gg J^{\frac{1}{x}}$ en fonction de $\frac{1}{x}$. 8. Comme les équations dont il s'agit sont à différences partielles, l'intégration y introduira nécessairement des fonctions arbitraires j $\hat{o}^U$ déterminées de ces fonctions & Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 23.70% accurate

Seconde Partie. 44^ tions devra fc déduire en partie de l'état initial du fluide , lequel doit être fupposé donné « & en partie de la confidéraeion de la furface extérieure du Auide, qui elb auU donnée ù. le fluide e{V renfermé dans un vafe , 5c qui doit être feprésentée par l'équation a aso, lorfqe lo fluide eft libre (art. i)* En eflèt, dans le pfemier cas fi on r^réfente par réquation des parois du vafe , A étant une fbnéHon donnée des coordonnées Xy y , :^ de ces parois, en y mettant pour ces variables leurs valeurs en j, 5, c, on aura une équation entre les coordonnées initiales b, c, ÔC le tems / , laquelle représentera par confèquenc la furface que ^ormoient dans l'état initial les mêmes particules qui aprèt le tems t forment la furface tepprésentée par équation donnée A a» o. Si donc on veut que les mêmes particules qui font une fois à la (nrfàce y demeurent toujours; condition qui paroît néceflàire pour que le fluide ne & divife pas » qui eft xe^ue généralement dans la théorie des fluides, il faudra que Téquation dont il s'agit ne contienne point le tems/; par coriféquent la fonâ:ion A de x, y ^ : { devra être telle • que t y difparoifl'e après la fubftitution des valeurs de x ,y , :][en a, ^, . » _ •. • ■ . Par la même taifon Téquatiott a «s o de -.la furface libre ne devra point contenir. /; ainfi la valeur do a devra être one Ample fonétion de , 5, « fans t, . ' An refte, il y a des cas dans le mouvement d'an fluide qui s'écoule d'un vafe , où ja condition dont il s'agit ne doit pas avoir lieu; alors les déterminations qui réfultent de, cette condition ne. font plus néceflàties.

The text on this page is estimated to be only 12.87% accurate

4⁰ MÉCANIQUE ANALITIQUE. • 5[^]. Telles ibnc les
équations par lesquelles on peut déier* miner directement le mouvement
d'un fluide quelcooqae incômpreffible. Mais ces équations font fous «ne
forme un peu compliquée, 6e il eil poffible de les réduire à une plus lifflple,
en prenant pour inci>nnues ^ k Ut phce des caordon* nées X_i^y les
vlccITes — dans la direction des coordonnées, & en regardant ces vîtedès
comme des fonctions Ae x, y, r . - En efièc, d'un côté il eft dairque pnifqueic,
 $y, ^{bnc}$ fondions de $t, ^, c, /$, les quantités $j > "TT >$ ieront auffi
fondions des mêmes variables a^{byC} y t-, donc fi on confoSt qu'on
Cubittue dans ces fonâûons les valeurs de $a, 3, c$ en $, ^$ tirée» de ceQés
dèw ly[^] tnaj^{^^}ci ***** > "77 > exprimées en fondions de $x, ^, :(& r. . .$
D*ua outre eècé, il eft dair que pourk connoiffance ac« tuelle du
mouvement du fluide , il fafiit de connoîtreà chaque infant le mouYemcoc
d'une pardcidé quelconque qui occupe un lieu do.nné dans l'espace, fans
qu'il foît néceffaire de favoir les états précédens de çetcc particule , par
conféquent il fuffit d'avoir les valeurs des vStefies -jj-, «n fondions' de $x > ^,$
 $^, r$. !D*aiHeur9 ces valeurs étant connues, (i on l[^] nommé p y q y r ^ on
aura les équations $dx = pd t y dy = ssqdy J: ^ ^ rdt y$ entre $x, y, ^ \setminus yt,$
lefqaelles érant eufuite intéi[^]rées , ét manière que $Xy y, ^$ deviennent a, h
y Cy lorlque r G, donoecons ks valeurs mêmes de ^, en Digitized by G()
(>glc

The text on this page is estimated to be only 12.45% accurate

Seconde Partie. 4¹ - Au idb j fi on chafTe de- dt «ces ^équations
diiFéretitieilfiSy QO aura ces deux-d pdy[^] qâx[^]pd\mirdxy kf[^]oellet
«Epriment Ja nature des différentes courbes dam lef<|ueUes tout le fluide (è
meut à chaque- înlanc» courbes qui changent de place de forme d'un
infant à Taiitre. I o. Reprenons donc les équations fondamentales {A) &
(B) des artîdes s & 3 , êc incipdaifons[^]ks variables/ » ^ q av ^ I / «88 ^7*9
regivd[^]es comme des fon[^]lions deII eft clair que les quantités -7;[^], y -J[^]
peuvent • d.[^] d.-[^] être miles fous la forme * — f — — j * oii les quantités -
[^]T 9 ^ cenfées ((es îônâioai de t. En les regardanc donc comme telles[^] on
aura pour la dx TT ~rt différence complete de y ' • di-i [^]<*• j d» , m dm jj-
[^] — dh'[^]- [^] - — rfc, 8c ainfi des autres; mais en les regardant comme
fonfi:ions dey, / ,flc les défignant par[^], [^] , leurs di[^]rences complettes feront
• ■^{^^} "S"[^]*"[^] 6c ainfi des autres dififërenpes ; donc A dans ces dernières
expreffions on met pouri/«« dy[^] d'\ leutsvalettrs en r, il fuidca Llla
Digitized by Gopgle

The text on this page is estimated to be only 10.01% accurate

4² MICHANXQUS A^N A L I T I Q Û E. quelles deviennent -
 identiques avec les premières; mais étmt regardé comme fonâion de
 $a^b c^t oaa$, d.x demmenc en fuppofâat qu'on necce dans /r, les vor fleurs
 de X» jr» en , £[^] tf, r. Ainû on aura $dx=jfdf -i^*-^$. da -H.6cc; U de même
 SubAituant ces Talears dans TexpreiSon de k difitSrence complete de ^ Içs
 termes afièûés de[^] 4 f lèront $i-^-\wedge p^ \hat{0}'^$ identiques avec le terme
 cojrrefpondant — i . dt[^] ou bjea on aura d[^]x , ^ dp , dp dp £c l'on trouvera
 de la même manière -iï' dt dx • ï iïy On fera donc ces fobftitutions dans les
 équations {A) ; <c comme dans ces mêmes équations les termes , , -jg[^]
 xepré(ènient d[^] différences partielles de a, relativeDigitized by CoogLe i

The text on this page is estimated to be only 18.93% accurate

Seconde Partie. 4³ ment à y, en ruppofane t confiant» on y pourra changer la caraâériftique D etid. On aura ainfi les transformées -H/ dp dx dl ix d» xaB.o dx H- ^ -'a -h r dq dl i dx dx = 0 -H/ dr dx • dr dx A l'égard de 1 équation (5) de l'article 3, il n*y aura <ÏU*à y mettre à la place de dx^ dy ^ d-;^^ leurs valeurs pdt^ qdty rdtty S)C changeant la caraclérillique D d , on aura fur le champ, à caufe de di confiant. On voit' que ces équations font beaucoup plus fimples que les équations (C) ou (Z?^ & (£) auxquelles elles répondent; ainfi il convient de les employer de préférence dans la théorie des fluides. .II. Dans les fluides homogènes & de denfité uniforme, la quantité a qui e^pdno Jil 4onfité , eft tout*à-£dt confiante; c*eft le cas le plus ordinaire, & le ièul que nous examinerons dans la fuite. Mais dans les fluides hétérogènes , cette quantité doit être une fonction confiante relativement au tems t pour la même particule , mais variable, d'une particule i l'autre » félon une loi donnée. Ainfi en confidérant le - fluide dans l'état initial, ou les cootdonnées ^, y , \ font a, ^, c,»la • • • Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 21.11% accurate

4J4 MÉCHANIQUE ANALTTIQUE. quanti[^] A Cetz une fonâlon
donnée &c connue de a^hc[^] fans t ; par conTéquenc le terme afièdè 4e dt
dans la différentielle complecte* de a regardée comme ibnétioa de c[^] t
devra être aul; mais par un railbnnement ieniblable à celui que nous ayons
dans Tardcle précédent pow trouver la valeur de -[^]-[^] , on trouvera qu'en
regardant A comme une fbnétion de x, y, le terme dont il s*agît (èra
exprimé par Ainfî on aua f^{uatkm} i[^].[^]., 4iL +5 4[^]-r 4[^]- W it dx dy di
qui fèmra à déterminer l'inconnue, a, dans les équations (F) , parce que dans
«és équations on doit traiter a comme une fondion de x,y, t, A cet égard
elles font moins avanugeufes que les équations (C) ou (D) dans lefquelles
on peut regarder a comme une fonûion connue de tf, 12. Ce que nous
vcnons.de dire relativement à la fonction a, il faudra rappliquer auffi à la
fonaion A, en unt que 4 «a o, eft l'équation des parois du vafe. Car la
condition que les mêmes particules reftent toujours à la furface demande,
comme on Pa vu dans l'article 8 , que [^] devienne une fonétion de fl, fans r;
de forte qu'en regardant cette quantité comme une fenâioA de sf » [^]> ï » [^] r
on aura aufli réquation Digitized by

The text on this page is estimated to be only 19.93% accurate

, MÉCANIQUE ANALITIQUE. '7x9 9^ If 9 rf, — lesquelles étant en suite substituées dans les trois équations' (F) du ioièxDe article , il n'y aura plus que trois inconnues & même il fera très-facile d'éliminer x par des différentiations partielles. De sorte que de cette manière , si la densité à. est constante» le problème se trouvera réduit à deux équations uniques entre les inconnues « & i; & si la densité a est variable, il y faudra joindre l'équation (JET.) de l'article 1 1. Mais l'intégration de ces équations surpasse les forces de l'analyse connue. I 5. Voyons donc si les équations [{F}] considérées en «elles-mêmes» ne finissent pas susceptibles de quelque simplification. • • • . En ne considérant dans la fonction a que la variabilité de ^ ^ » on a = -55. </x H- ^> rf^ . . Donc substituant pour y leurs valeurs tirées de ces équations, on aura Le premier membre de cette équation étant une différentielle «Somme, il faudra que le second en soit une aussi relativement Digitized by Gopgle

The text on this page is estimated to be only 18.06% accurate

• s fi C O N D E P. A 11 T I E « relativement à x, y, z ; & la valeur de a qu'on en tirera » (à satisfaire à la fois aux trois équations (F). Supposons maintenant que le fluide soit homogène, en sorte que la densité A soit constante ; nous supposons-la, pour plus de simplicité, égale à l'unité. Supposons de plus que les forces accélératrices X, Y, Z soient telles que la quantité $Xdx + Ydy + Zdz$ soit une différentielle complète. Cette condition est celle qui est nécessaire pour que le fluide puisse être en équilibre par ces mêmes forces, comme on l'a vu dans l'article 17 de la Section septième de la première Partie. Elle a lieu toujours, lorsque ces forces viennent d'une ou de plusieurs attractions proportionnelles à des puissances quelconques des distances aux centres, ce qui est le cas de la nature, puisqu'en nommant les attractions P, Q, R , &c, & les distances r, s, t , &c, on a en général $Xdx + Ydy + Zdz = Pdp + Qdq + Rdr + \dots$ (Part. I, Sed. V, Faisant donc $a = 1$, & $Xdx + Ydy + Zdz = Pdp + Qdq + Rdr + \dots$ l'équation précédente deviendra & il faudra que le second membre de cette équation soit une différentielle complète, puisque le premier en est une » Mmm

Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 19.75% accurate

4j8 MicHANIQUE ANALITIQUE. Cette équation équivaldra
 ainsi aux équations {F} de l'ap* tle xo. Or en considérant la différentielle
 de prise relativement à x , y , z , il n'est pas difficile de voir qu'on peut
 donner au second membre de l'équation donc il s'agit » cette forme, & on
 voit d'abord que cette quantité fera une différentielle Complète toutes les
 fois que $p dx + q dy + r dz$ le fera elle-même ; car alors la différentielle par
 rapport à r , favorise » $dx^{i/-4-} dz$ le fera aussi, & de plus les conditions
 connues de l'intégrabilité, donneront $\bullet$, $\bullet$ $dp dq + dp dr + dq dr$ 4r 7j 55" "df ^ ir —
 °»"jr D*oii il s'enfuit qu'on pourra satisfaire à l'équation fZJ par la simple
 supposition que $pdx + qdy + r dz$ (est une différentielle complète; Se le
 calcul du mouvement du fluide fera par-là beaucoup Amplifié. Mais comme
 ce n'est qu'une supposition particulière, il importe d'examiner avant tout,
 dans quels cas elle peut ou doit avoir lieu. 17* Soit pour abréger $dp dq - dp$
 $dr dq + dr$ ^ Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 12.25% accurate

. s fi C O M D s . P A J L . T I s. il ne s'agira que de rendre une-
differentialle exacte la quantité Supposons d'abord < que la variable e ait
une valeur fort petite, on pourra alors, donner à p% r, les formes suivantes
en fonction, dans lesquelles les quantités p, p'', p''', y, y'', y''', j', y', y'', y''', r', feront
des fonctions de x et y. Ces valeurs étant substituées dans les trois
équations > f(x, y) y' y'' y''' deviendront * « as «' -h H- H- *^ -4-*&c, en
supposant y' — dx dy' - ^ dx dy' i/l dy' ^ M m m 1 Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 12.12% accurate

"460 MéCHANIQUE ANALITIQUE* Ainfî la quantité $\int \frac{dx}{x^4} - \frac{dy}{y^4}$ deviendra après ces différences substitutions & en oïdout les termes par rapport aux puissances de x et y , $\int \frac{dx}{x^4} - \frac{dy}{y^4} = \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{3y^3} + C$. J'ajoute à la différentielle $\frac{dx}{x^4} - \frac{dy}{y^4}$ la différentielle $\frac{dx}{x^4} - \frac{dy}{y^4}$ multipliée par x^3 et y^3 et j'obtiens la différentielle $\frac{dx}{x^4} - \frac{dy}{y^4} + \frac{dx}{x^4} - \frac{dy}{y^4} = \frac{dx}{x^4} - \frac{dy}{y^4}$. Cette quantité doit être une différentielle exacte indépendamment de la valeur de x et y il faudra que les quantités qui multiplient chaque puissance de x et y soient chacune en particulier une différentielle exacte. Cela posé, supposons que $\frac{dx}{x^4} - \frac{dy}{y^4}$ soit une différentielle exacte on aura, par les théorèmes connus, $\frac{dx}{x^4} - \frac{dy}{y^4} = d\left(\frac{1}{3x^3} - \frac{1}{3y^3}\right) + C$; donc la première quantité Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 14.82% accurate

Se COUDS Partie. Δt qui doit être une différentielle exacte, se réduira à $Jx - hq^{ii}y - hr^{ii} \Delta i$; & Ton aura par conséquent ces équations de condition « $\Delta = 0$, $jS'' = r \Delta$, $\Delta = 0$. Alors la féconde quantité qui doit être une différentielle exacte, deviendra $x(p'' dx - q'' dy - r'' dJ - j \Delta i)$ & il réfutera de là les nouvelles équations « $\Delta = 0$, $(i'' = q' \Delta y)$. De sorte que la troisième quantité qui doit être une différentielle exacte, fera $i(p''' dx^2 + q''' dy^2 + H - r''' dJ)$; d'où l'on tirera pareillement les équations « $\Delta^2 = 0$, $i8^{\Delta} \Delta o$, » G; & ainsi de suite. Donc si $p'dx - t - f$ est une différentielle exacte, il faudra que $p''dx - q'' dy - h - r'd^{\Delta}$, $p^{\Delta}dx - q^{\Delta} dy$, $i'di, f'dx \sim f'dy^{\Delta} d^{\Delta}$, &c, soient aussi chacune en particulier des différentielles exactes. Par conséquent la quantité entière $pdx^{\Delta} + qdy - r d^{\Delta}$ fera dans ce cas une différentielle exacte, le tems t étant supposé fort petit. 17 Il s'ensuivra de-là que si la quantité $pdx - A - qdy - A^{\Delta}rd^{\Delta}$ est une différentielle exacte lorsque $r = 0$ « elle devra l'être aussi lorsque t aura une valeur quelconque très-petite; d'où l'on peut conclure en général que cette quantité devra être toujours une différentielle exacte, quelle que soit la valeur de t . Car puisqu'elle doit l'être depuis $t = g$ jusqu'à $t = fl$, (fl étant une quantité quelconque donnée très-petite) si on y substitue par tout $0 - t - \Delta$ la place de t , on prouvera de même qu'elle devra être une différentielle exacte, depuis $t = 0$ jusqu'à $t = \Delta$; par conséquent elle le fera « depuis $t = 0$, jusqu'à $t = \Delta$ & ainsi de suite. Donc en général, comme Tdridge des t est arbitraire » U qu'on peut prendre également t positif ou négatif, il

The text on this page is estimated to be only 19.77% accurate

. MicHAKIQUE ANALITIQUE. . s*enrii:c cv.c il L\ nuanritéyKî
 .v H- qdy -\ rd-[eft une diffÉrenriciic cr.a.lo d.'ns un ir.iLuic quelconque ,
 elle devra l'ctrc pour tous les auucs inltans. Par conléquent, s'il y a un fcul
 indaîU <.îan:..Ic^]UwI cliC ne foie pas une differenciclle exacte, cJle ne
 pourra jamais Terre pendant roue le mouvemenc ; car fi elle l'étoic dins ua
 aucre iiiibac quelconque, elle devroit* Tccre auill dans le premier. I g.
 Lorfque le mouvement (Commence du repos , on a rclors $\dot{x} = 0$, $q = 0$ y r—
 0 , lorlque $r = 0$; donc $\dot{u}^x - H qjy - \dot{f} J \setminus$ lera inccgrable pour ce moment,
 2c par conféquenc devra l'être toujours pendant toute la durée du
 mouvement. $\dot{u}^x$ " Mais s'il y a des vîteflès imprimées au fluide , au
 commencement tout dépend de la nature de ces vîteflès , félon qu'elles
 feront telles que $pdx - \dot{q}dy - \dot{r}d\dot{u}^x$ une quantité incégrable ou non; dans le
 premier cas- la quantité $pdx - qJy - H rdi$ fera tpu|ours incégrable ; dans le
 fécond elle ne le Iera jamais. * • Lorfque les viteiles initiales font produites
 par une impullion quelconque fur la furface du fluide, coifime par Tackion
 d'un pifton, on peut démontrer que $pdx - \{ - qJy - \dot{r}d\dot{u}^x$ doit être intégrable dans
 le premier inftant. Car il fiut que les viteflès $p^x r$ » que chaque point du
 fluide reçoit en vertu de. Timpulfion donnée à la furface $\dot{u}^x$ foient telles que
 fi on détruiroit ces vîteflès, en imprimant eh même-tems à chaque point du
 fluide des vîteflès égales & en fens contraire, toute la maflè du fluide
 demeurât en repos ou en équilibre. Donc il faudra qu'il y ait équilibre dans
 cette malle, en vertu de l'impulfion appliquée à la Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 19.43% accurate

Secondes Partis» 4^3 surface, & des vîceflês on forces $*-/'\rangle^{\wedge 9-}$
 $\wedge r$ appliquées à chacun des points de Ton incérieur j par conféquenc,
d'après la loi* générale de Téquilibre des fluides (Partie première , Se[^]on
septieme» article 17) , les quan- . tites r , devront être telles , que $pdx-\wedge qdy$
 $-\wedge rd:$ foit une difflérentielle exacte. Ainfi dans ce cas la même quantité
devra toujours ctrc une dillérenticlle exacte dans chaque inilanc du
mouvement. Ip« On pourroic peut-être douter s'il y a des mouvejns
poilibles dans un fluide, pour lefquels $pdx q^{\wedge}dy rd\backslash$ ne foît pas une
diâTérentielle exa[^]le. Pour lever ce doute par un exemple très ofimple » il
n'y a qu'à confid[^]rer le cas où Ton auroit / $\wedge gy^{\wedge} \wedge \text{ — ' — } gx > \text{rao}$ » pétant
une conf tante quelconque. On voit d'abord que dans ce cas $pdx qdy'^{\wedge}rd\backslash$ ne
fera pas une différentielle complete , puifqu'elle devient $g (ydx \text{ — } x dy)$
qui n'eft pas intégrable; cependant l'équation (£) de l'article 15 fera
intégrable d'elle-même ; car on aura $\implies \wedge > \text{ — } \text{£c}$ toutes les autres
différences par déliés de /j &: $\wedge$ feront nulles j de force que lequacion dont il
s'agit deviendra $dx-\wedge dV^{\wedge f}(xdx^{\wedge}ydy)^{\wedge}$ dont l'intégrale donne $X == \wedge f x^{\wedge} f)$
H- fond, valeur qui fatisfera donc aux trois équations {F) de l'article lo. A
l'égard de l'équation ({?) du même article, elle aura Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 20.05% accurate

Second I Paxtib* $4^{\wedge\wedge}$ donc l'intégrale relativement à y est évidemment On pourroit y ajouter une fonction arbitraire de puisque cette variable est regardée dans l'intégration comme constante ; mais j'observe que cette fonction peut être elle-même renfermée dans la valeur de $^{\wedge}$; car en augmentant $<?$ d'une fonction quelconque. Toutes les valeurs de p, r demeurent les mêmes qu'auparavant , & le second membre de l'équation précédente se croit augmenté de la fonction qui est arbitraire. On peut donc sans déroger à la généralité de cette équation, se dispenser d'y ajouter aucune fonction arbitraire de t . On aura donc par cette équation, $^{\wedge} = ^{\wedge} * + 4: 4- (^{\wedge}y + T(4^{\wedge}))$ valeur qui satisfait à la fois aux trois équations (F) de l'article ic; & la détermination de 9 dépendra de l'équation {G} du même article, laquelle, en substituant pour $>, r, \text{leu}$ valeurs "Sf AinH toute la difficulté ne consistera plus que dans l'intégration de cette dernière équation. 21. Il y a encore un cas très-étendu, dans lequel la N a n •

The text on this page is estimated to be only 14.36% accurate

/⁶⁶ Mécanique ANALITIQUE. quantité $ptlx, *^{\wedge} qdy -I- rd\backslash$
 doit être une différentielle « $xa^{\wedge}le$ »; c'est celui où Von suppose que les
 vitesses y, r , soient très-petites, & qu'on néglige les quantités très-petites
 du second ordre & des ordres suivants. Car il est visible que dans cette
 hypothèse, la même équation (L) se réduira à ce que Ton voit que $\sim dy$
 $-f-$ devant être intégrable relativement à v, y , la quantité $p dx - \backslash - q dy$ d'⁷
 devra l'être aussi. On aura ainsi les mêmes formules que (dans l'article
 précédent, en supposant une fonction très-petite, négligeant les secondes
 dimensions de y de les différentielles*, On pourra de plus, dans ce cas»
 déterminer les valeurs mêmes de $x^{\wedge}y^{\wedge}$ pour un temps quelconque. Car il n'y
 aura pour cela qu'à intégrer les équations $dx = p dt^{\wedge} dy$ & $q dt^{\wedge} d\backslash - r dt$ {9 St,
 9) ^ dans lesquelles, puisque q, r sont très-petites » & que par conséquent
 $dx^{\wedge}dy^{\wedge} d\backslash$ sont aussi très-petites du même ordre vis-à-vis de $dt^{\wedge}$ on pourra
 regarder $Xy, y, y \backslash$ comme constantes par rapport à u . De force qu'en traitant t
 (comme variable dans les fonctions /», r , ajoutant les constantes c , on
 aura pour le champ $x - a - \backslash p d L^{\wedge} y r = b^{\wedge} \sim f d i, \backslash - c - r - Jrur$. Donc faifnii-
 pour abréger « i » — $y? t/r$, & chanL;cant dans * les variables $x^{\wedge}y, a, ^{\wedge}, c$, on
 aura finalement où la fonction. » devra, être prise de manière qu'elle soit I
 Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 16.82% accurate

Seconde Partie. 4⁷ nulle lorsque $r \rightarrow 0$, à condition que a, c soient les valeurs initiales de ψ . Ce cas a lieu, par exemple, dans la théorie des ondes, comme on le verra plus bas. 1. 1. Au reste, la maille du fluide étoit telle que l'une de ses dimensions fût considérablement plus petite que chacune des deux autres, en sorte qu'on pût regarder, par exemple, les coordonnées x, y comme très-petites vis-à-vis de X ou cette circonstance feroit à faciliter la résolution des équations générales. Car il est clair qu'on pourroit donner alors aux inconnues i, a , la forme suivante, $i = \frac{1}{H} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \dots$, $r = \frac{1}{H} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \dots$, $i^* = \frac{1}{H} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \dots$, $U = \frac{1}{H} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \dots$, $A = \frac{1}{H} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \dots$, $a = \frac{1}{H} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \dots$, $x = \frac{1}{H} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \dots$, $H = \frac{1}{H} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \dots$, dans lesquelles $p, q, U, C, a', a'', \dots$ seroient des fonctions de a, t sans de sorte qu'en faisant ces substitutions on auroit des équations en ψ , t , y , z , lesquelles ne contiendroient que des différences partielles relatives à ψ, y, z, t . Pour donner là-dessus un exemple de calcul, supposons de nouveau qu'il ne s'agit que d'un fluide homogène, où $a = i \cdot C$ et commençons par substituer les valeurs précédentes dans l'équation (C) de l'article 10; ordonnant les termes par rapport à a aura

The text on this page is estimated to be only 10.35% accurate

4⁸ MÉCHAHIQUE AMALXTIQV⁴ dx dy De force que,
 comme p', p'' y &c; ^', &c, ne doivent poiuc couccnir on aura ces équacions
 parcicuucres $\wedge dp' \wedge d^4/* \wedge <y dx \wedge éy = 0, 1/\gg$ ""[^] dy parlcfcuelles on
 déterminera (î*abordlesquantités",r"',/^^&c, &, les autres quantités i[^]t/t p''[^]
^{9^9} ^ > &c , demeoreronc encore indéterminées. Oiï fera les mêmes
 fubftitudons dans r[^]qfuacion (Z) de Tarticle 15, laquelle ëqnivauc ans
 croiV[^]uations (F) de l'article 10, & il eft aifé de voir qu'elle fe réduira à la
 forme fiuvante» '[^]t(*"4x'^li'*[^]dy[^]y"d:0^{^^} en faifant pour abrèger Digitized
 by Coogle

The text on this page is estimated to be only 13.82% accurate

$$i \text{ SieoKDt Partis}^* 46^{\wedge} dt^{\wedge} P dx dy^{-\wedge\wedge*} \text{ --- } -^{\wedge}P -TT^{\wedge}i \sim dj \bullet$$

$$^{\wedge\wedge}T^{\wedge\wedge}P dx^{\wedge}P dJS dy dy y'^{\wedge\wedge\wedge}p'^{\wedge}-^{\wedge}p'^{\wedge\wedge\wedge\wedge}-^{\wedge}i''''^{\wedge} \text{ \& ainf\& de fuite. Donc pour}$$
 que le fécond membre de cette équation foie intégrable « il éiudra que les
 quantités m ' y'ldii^l((. "dx^(i"dy) «ce, foient chacune intégrable en
 pardcuUer. ^ Si donc on dénote par « une fondion de x ^ y ^ t fans 5 , on
 aura ces conditions -"= -4r-> 18" \&C. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 15.30% accurate

470 MÉCANIQUE ANALYTIQUE. Alors l'équation intégrée donnera & il ne s'agira que de satisfaire aux conditions précédentes, par le moyen des fonctions indéterminées α, β, γ . Le calcul deviendrait plus facile encore, si les deux variables y & z étoient très petites en même-temps vis-à-vis de x ; car on pourroit supposer alors, $\alpha = \alpha' y - \alpha'' z - \alpha''' y z$ & les quantités $\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha'''$, étant de simples fonctions de X . En faisant ces substitutions dans l'équation (G), & égalant séparément à zéro les termes affectés à y^1 & de leurs produits « on auroit $\alpha' = 0, \alpha'' = 0$, & ensuite l'équation (L) deviendrait de la forme en supposant Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 15.17% accurate

Seconde Partie. $\sqrt{1-s'^2} I'^2 \cdot)$ Il t II" ■... $\bullet = \bullet -37-4r \hat{I} \blacksquare \cdot ' =$
 $\wedge + / + ' -g-t-x \hat{I} > " + \hat{I} " / " + r'^{\wedge} + \wedge > "$. m & Ton aaroic pour i'hitëgrabilkë de cette
ëquation, le»coii« ditions «' = s , «" ss ^ & c , . moyennant quoi elle
donneroic . $A = A^{-4} - y a < ^x - f - ^y - 4 - > : (-f -$ Sic. Enfin on pourra aufl
quelquefois fimpliHer le calcul par le moyen des fnbflitutions » eh
introduifant. àJa place des coordonnées $x^y^{\wedge} i^{\wedge}$ d'autres variables |» «,
lelquelles foient 4es fonctions données de cedes-là; & fi par la nature de la
queftion, la Yariâble ^, par exemple, oà Jes. deux variables « 8c Ç font tt-ès-
petites vis-à-vis de |, on pourra employer des rcclufions analogues à celles
que nous venons S. 1 1. . Du mouvement des fluides pcfans ù homogènes
dans des vafis ou canaux de figure quelconque* 2 3* Pour montrer Tufage
des principes & des form'ules que nous venons de donner», nous .allobs les
appliquer aux

The text on this page is estimated to be only 17.85% accurate

47[^] MéCRAKIQUB ANAL'ITI(iUC. Auides qui fe meavent dans
 cles vâlÀs ou dei canaux de iîgnre donnée.' Nous fupporerons que le fluide
 foit homogène ^cpefant, &: qu'il parce du repos , ou qu'il foit mis en
 mouvement par l'impulfion d'un pifton applique à ù furface ; ainfi les
 vîtelFes ^, /■, de chaque particule, devront erre telles que la quantité p dx q
 dy -^^ r d\ foit intégrable (arc. 1 8 } ; par coi)ié<)ueac on pourra employer
 les formules de l'arcicle io. Soie donc f une fbaâion de ^, de r » déterminée
 par 1 equatibn on aura d^abord pour les viteflès de chaque particule «
 fuiTant Jes direâions des coocdonnée», y* ^9 ces exprefdp âp dp Enfuie
 <m aura quantité qui devra '6tre nulle ^ la furface extérieure libre du fluide (arc. 1).
 Quant à la valeur de V qui dépend des forces accélératrices du
 fluide (arc. 15.) ^ fi on exprime par^la force accélératrice de la gravité, &
 qu'on nomme ««ç les angles que les axeS des coordonnées ^ fbntayecla
 Verticale' menée du peint d'interfeâion de ces axes , êc dirigée de banc en
 bas, on aura X «a— ^ cof rr ^cof»» Z Digitized by Gopgle

The text on this page is estimated to be only 13.54% accurate

ss c 6 M o B t k tTi t: '473 ^ xSr s9— ^ cofC ; fe donne le figie-
>anx vâlears des forces J[y 7, pircc que ceS forces font fap(»ofôes tendre à
idiminuér les coordonnées jc , yy'^ ^^^^ puifque $dV = - \int C dx - \int V dy - \int Z dz$
on a«ra en intégrant , .. Soie mainteoat on ^^«00, f^quatfoii ^une des
parois du canal , « étant une fonction donnée de $-x^y^$ l'ans i^mt. Pour qq^
les mêmes particoles du fluîc^ . Ibieifc toujours contiguës à cette paroi , il
faudra remplir 3*équation (I) de rarticle. ix , en y Aippofant $yi/s = \zeta$ — «,
On aura donc éf 4 m d» équation à laqueHe devra facisfaire la valeiir {a!s«.
Qbaqae paroi fournira auflî une équation femblable. De même puifque a r=
o eft l'équation de la furface extérieure du fluide , pour que les mêmes
particules foienc confammenc dans cette furface , on aura l'équation
laquelle devra avoir ' lieu , & donner par conféquenc une même valeur de :(
que Téquation a Ow Mais cette équa^ tion né fera plus néceffTaire dès' que
k .coîidiaon donc il f'agit celTera d'avoir lieu. % 5 • CeU pofé > il
Êiuccoouiieficer par déterminer la fonction f. Or réquation dfoù ' elfe
'dépéhii "b*éc^ intéjg;i^ble fOi général par nuo^ne m^tliade. connue «-
'fioux/upj^iferons ^ue funê dès djinettfions>dé^la înaiftf' fluide foie fort
petito Ooo

The text on this page is estimated to be only 10.11% accurate

^474 M^-ÉCİ? A.HIQUE ANALITIQUE YÛ^à-vis des tlèinc
aatres, «nforte que les coordôoaées \ » par exemple »roi»nt très-pertes
relativement 6c y. Par le moyen de cette fnppolîtioii, oa pourra reprèièncer
la ▼ alear dé f par nne fôrie de cette forme » ♦ - 1 9" r f" ^ H- ficc,)oà f,
&c, feront des fbnéUons de jc, y, r fans !(. Faifant donc cette fubftitiuioa
daas i*ë^uatioa précédente» elle deviendra * ' Tir * ? ^ De force qu*çn
égalant fôparëmenc à zéro les terme» .4lfièâé\$ des différentes puilTances de
on aura • • V»— ^^1*1 —£11 ' ^ ' ' - ' d^f J*f d*^ 6cc. • Aind i^^iefion
de .f -devkodnfc Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 10.08% accurate

« / s B c o H Bi[^] B i 1 1 1 [^]ns laquelle les fbnâioxv V & f[^]foht
indëcerminiéest ce qui voir que cette àpiei&oa eft rihtégraie complete Àt
rëquatioii p[^]pofée.' i • . ' [^] • Ayant twuvé rexprefion de f « on aura paf la
diffëreodadon[^]xeUe* <ie/>» y, r, comiiM[^] il t<[^]' > [^] /,, ' • • - ' \ . . é " ' Et
fubflicuant ces valeurs diuis l'exprellipacdç A de Ttru[^]r [^]e z3 > elle
deviendra de cette forme , 4ans Uquelle, . > . ' a' — — [^]fxcof [^]-h;[^] cof H•
-■ ■ • " Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 14.60% accurate

• . . . • . , • » . . a 6^ Maintenant fi ^a». ^i'éqaatK>o dîe\$ pato» » . •
ébuK: une fi>oâioft fi>rt petite âex.èLy iaos,^, Téquadon de con4in6à poir'
quelles .m^dics- patticoles ibient.tc^joan coq,"^ t^uës à ces parais ^att.. x^/
s- (ieiûêndik par les fabilit^cionft précédentes » . • . ff . dp" ,, dm rfy' ^ ^T^^
• /. ■ *:» ^ jL /i'iîi . r . dt.^> \ â, ^ - . laquelle devant avoir lieu,
lorfc[u'ofl fait = fe réduirai • ^ à cette forme plus fimple, Digitized by
Gopgle

The text on this page is estimated to be only 7.05% accurate

, s S e o 11 i[^]. f F A U T 1 s. 477 H TîTî[^] • U £indr»qie cet»
éqaatîoii foie naîe «femî touie Pé»»* due des pafois doiKié«s. • . Enfia
réqincioa de b îîr&c» iofiémiire do. flnid# dtmc xws o ^ fera de k fecmet *
le réquation de condîrioft pour que les mfimes pardcufe» ^i^eurenc à la fu/
fj»ce ^art. x^yl , fera.. * Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 15.77% accurate

.47[^] MiCHANIQUE -AWALITI QUE. Châssant 11 de ces deux équacioiis» on' eh ann une qui devra subijUr d'eUe-même » pour tous les points de k fur* face extérieure. » ApriicATiON cef /ôrmaUs au moavcmau ttun fiait qui cottU dans m vafe étroit & prefpu vtnîcaL a S. Imaginons mtfDCenant que le fluide coule dans na vafe étroit, & à-peu-près vertical,. & fupposons pour plut fimplicité,qB4».]ès abfciflès x foient verticales & diviféet de haut en bas, on aura fat, $13^{\wedge}$, $f = o$, « $= 5,0^{\circ}$, $= 90^{**} = ^{\wedge}$ donc $\cos I \gg I$, $\cos \gg = o$, $\cos \{ = 0$. Supposons de plus pour fimplifier la <jueftion autant qu'il éft poffible que "le vafe foit plan , epforte que des deux ordonnées[^] & les premières[^] foient nulles, & les fécondes \ foient fort petites. Enfin , foient $=)8$, les équations des deux parois du vafe , « & [^] étant des fonaions de x connues , & fppt petites. On aura •felàtiv«tam A"ccs.p«rois.[^] les 'deitf.[^]équa[^] lion* (art,[^](îj, - , » •'''-■27—[^] [^] -5 -4- &c. = 0 0 * ♦ TîF[^]-H&c.- o, lefqueiles /er[^]irout 4 déterminer les [^]onéUons V & Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 11.26% accurate

Seconds Paatib. 479 Noos regarderons les quantités \$9 comme très-petites du premier ordre » 8c nous négligerons du inoins dans Ja première approximation^ les quantités du fécond ordre, & des ordres fuirans. Àii>fi les deux équations précédentes fe réduiront i celics-ci ». - •
w — — . — - $\text{EBO}^f \wedge \blacksquare . \wedge a$.Ie(qnelles étant wtraocJiéei Tuoe de raucre ,
donoenr. $r \blacksquare \wedge \langle \wedge \text{itéquadoli donc llnt}^{\text{iale}} \text{eft bsI}^{\text{I}} \text{étant une fonâion}$
arbitraire de laquelle doit être très-petite du premier ordre. Or il eft vifible
que » — j8 eft la largeur horifontale du Tsdê que noos repréfèRcereiis par
Ai&fi on aura $\wedge$ le intégrant de nouveaii , par rappott à t'as $\blacklozenge$ en défignant
par 3- une nouvelle fbn $\wedge$ Uon: arbitraire de t, . Si . on ajoute enièmble les.
mêmes équations $\wedge$ & qu'on $\wedge \pm d$ on en tireca $f \text{wm}^{\wedge} dH^{*} \wedge \wedge \wedge$ Aîniiiiic la
valeur de $> / \gg * \wedge 2 \# \wedge$ puifque fimc des quantité crè $\wedge$ fetites du premier
ôfdre , 9" fera anffi très-petîte da mfime oidre.. Donc en négligeant toujours
les quantités du fécond ordre, on aura ptr les formules de rarticle 15 » la
vîteflè $\text{Wfdctle} / \text{SB} ==$, la fWfe $\text{JWMo}^{\wedge}$

The text on this page is estimated to be only 13.59% accurate

480 M-6c HANZQUlt AKALXTXQTri Enfuice, à cau^ê de cof
 Çœo, la quantité fera aii^{fl} très-petite du premier ordre. Par coiifécjuent, la
 valeur de [^] se réduira à ' Cette Valenr égal[^] à zéro» donnera figure de la iur*
 face du fluide; & comme elle ne renfermé point l'ordoonde mais feulement
 rabfciflè & le tems r » il s'enfuit que la surface du fluide devra être à chaque
 xnftant plane 91 borizontale. Enfin l'équation de condition pour que les
 mêmes particules foienc toujours à la surface, se réduira par la même raifon
 à celle-ci 4r 4r 'i^{^^^} * . • «'a * y dm [^] laquelle ne contient pas non plus \ ,
 mais feulement x U t. 29. Pour diftinguer les quantités qui se rapportent à la
 surface fupérieure .du fluide de celles qui se rapportent k la surface
 inférieure-, npua marquerops les premières par pn trait , &c les fécondes par
 deux traits* Ainfi» x', &C>» feront l'abfcifTe [^] la largeur du vafe[^] &c, pour
 la surface fupérieure; y", &c» ièont de môme l'a[^]fciiTe[^] Iji geur du ya(ç»
 &c, à .larfur&ce. iafi[^]rieure, Ponc auib x', x'/ dénoteront d[^]s la fi|ite les
 valeurs do [^]> pour les deux furfacês; de Cotte que Fpa [^]ura pour h /urfacp
 fupérieure , réqaattoa [^] a* Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 13.91% accurate

^ pour la fur&ce inftrieute, Téquadon iêmU^U. . Enfin , x-^;^/ ©
f«» l'équation cie con. Cation , pour que .les mēbies panīctiles qut font une
fois à la furface fupérieure y relieut cdtijours i &— ^ T^i''''®» fera
féquatiott de condition , pour que la furface inférieure contienne toujours
les fflēiies particules du fluide. Cela poTé , il iâut diftinguer quatre cas
dans U auniéto <k>iit un fluide peut couler dans un vaiei Ce chacun de ces
* cas dciiiande «ne iblucion parocntiere^ 3 I« piemier cas eft celai ojiiiDe
goaadcédoaBfe de fluide* coale dm on wk iadéfioi. Oan» e» cas» il eft tJ^
que Tune fc*rautfe fiiri|we doit voujoass cootenir les mēmes pardcules , 9c
qu'aînfī on aura pour ces deus (udsLces^ les équations «s o» x^aso , 0c de
plus .^t» éqoatiiM» ^ kprumm i dtemncè -kt lumèles » ac'^ «, » en A • . " ;
L'équation x'«b © étant difféicntiée , [donne

The text on this page is estimated to be only 13.38% accurate

:48a M tcm JiJX I tf E - À M A L 1 T I Q tJ B. valeur dans
l'équation $V = \frac{1}{5} \frac{dV}{dt}$ On trouvera de même A combinant
l'équation « o , avec l'équation «-r 7^ X -77- > ceie-ci _ ^,, . Donc on aura
•</r*«j/</x'=>"</«", équation séparées; par conséquent n aura en intégrant
m étant une constante, laquelle exprime évidemment la 'quantité donnée du
fluide qui coïlle dans le vase. Cette équation donnera ainsi la valeur de V
en 'x^ ' ' Maintenant G on substitue dans l'équation x'«ff'o, pour la valeur
-2^^ elle devient — -^f-j^ 4. -4t- = o, laquelle étant multipliée par —
>' dx' . donne celle-ci y 3/ </x' — idùj^ ^ 6^3— ■™®» - • ■ ' t • . . .
'qu'on voit être intégrable, & dont l'intégrale Xera» On trouvera de la même
manière en substituant ^ '^^ à la place de ai dans l'équation x'^ss o, &
multipliant par 4 I. ucto ^aveUe éi^ua^oii .-uit^nble v'tt ; donc L'intégrale
fera . • . . Et ainsi Suit ces deux équations Tune de l'autre , pour . kj _ L y
Google

The text on this page is estimated to be only 14.08% accurate

Secondes $\forall a' e t x i \gg '$ en éliminer le terme $fdd^{\wedge}$, on aura celle-ci, dans laquelle les quantités $/ >''$ $sif'da^{\wedge} -^{\wedge}fy^* s^{\wedge}dx \&l f^{-\wedge} - f \sim -$ expriment les intégrales $yxdXf$ Se ds prifes depuis $X = .v' jul^{\wedge}ju'à a: = x''$; &. où // est une confiante. Cecrc équation donnera donc $\hat{o}$ en $x \backslash$ puifquex" est déjà connue en x' , par 1 équation trouvée plus haut. Ayant aind $\bullet en^{\wedge}$, on trouvera attffif en $j/$, pat réquadon dtsB $JL^{\wedge} - ^{\wedge}$ dont l'intégrale est $^{\wedge}J^{***} H \ll$ H étant une conf* tanre arbitraire. , A l'égard des deux conAantes $\pounds$ & H on les déterminera par Tétat initial do fluide. Car lorfque $^{\wedge}bo$, la valeur de lèra donnée par la pofidôn Initiale du 'fluide ' dans le vafe; & fl-oa fuppofe que les $i^{\wedge}tèflès$ initiales du fluide fbient nulles, il fàiidra que Ton ait $\bullet o$, lorfque tsss $o^{\wedge\wedge}$ pour que les expreffioisrde $/^{\wedge}, ^{\wedge}, r$ (art. i8), deviennent nulles. Mais H le fliiide avoir été mis d'abord en mou* Vement par des impiilfions quelconques, alors les valeurs $4c >>' \& \backslash''$ leroient données, lorfque $/ \Rightarrow o$, puifquc la quantité a rapportée à la furface du fluide exprime la preffion que le fluide y exerce, & qui doit être contre balancée par la. preilion extérieure. (ar; i). Qcoaa (.au. .19)^ $\hat{a}ff^{\wedge} en^{\wedge}$ -foifiAt $tf=**b'$, on *aorâ unî^ $\hat{e}qûâtîob$, qui feryi'ra à déterminer la vali^ur initiale de fl. Ppp X Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 10.76% accurate

Alnfi le problème est résolu; U le mouvement du fluide est
évidemment déterminé. *3 I* ^6 (écoulement a. lien lofujue le vase est d*aiie
l'on<^ gaeat déterminée, & que le fluide s'écoule par le fond du-, vase. Dans
ce cas on aura, comme dans le cas précédent pour la surface supérieure, les
deux équations $\sim -f - X *^>v o$; mais pour la surface inférieure j o&
aura simplement l'équation $x''=0$, puisque à cause de l'écoulement du fluide
il doit y avoir à chaque instant de nouvelles particules à cette surface.
Mais d'un autre côté à l'égard de {Te act* pour cette même surface, sera donnée
& constante; de sorte qu'il n'y aura rien de particulier à déterminer,, à l'égard
x', « , dv. le » deux premières. écrivons donc d'abord, dans le cas
précédent, celle-ci $1=$ Jllifl Ugtfx'dxi «ilmm,td»^ M o; ensuite l'équation
 $a'' = 0$ donnera . ■ • ■ • «ta — g« -^j-J—^n- 77^" «u i on rc* l^iiera<]tte
je^V» & /"s fontdes 0ii(bme8.^iie am» dénoterons pour plus de simplicité
par /, A, Ains éa* représentant k dt sa valeur multipliée ensuite par Donc
le calcul Mttit de ceUe^i^ré^ptOM précédente, pour éliminer les termes «
011 «m Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 14.49% accurate

s X C 0 M O X ' P A K r t & 48^ équation qui ne contient que les deux variables x/ScB^{Sc} par laquelle on pourra donc dccermiuer une de ces variables en fonciion de l'autre. Enfoice ooâim t exprimé par la même variable, en in^ tégrant réquacion dt a ■*. Ec Toii déterminera les confl' tantes pat l'état initial du âuide», comme dans le problème précédent. 3 a*. Le troisième, cas a lieu , lorfqu'un iluide coule dans ttttTa(ft indéfini, mais qui eft entretenu toujours plein kîa même baoteur, par de isouveau âuide qu'on y'veiîe con* tinuellement. Ce cas eft Finverfe du précédent ; car on aura, ici pour la furÊtfe inférieam « les deux équation» ^^eso^ le -f- "-pr ^ asa o ; fie pont la furface fupérieure^ on aura, fimplement féquation x' cbo, i caufe du- changement continuel des particules de cette furface. Ainfi ii n'y aura qu'à changer dans les équations de l'article précédent les quantités en xfyy'y fie prendre pour/^ô,.ft les va.Jàoiil données de a?, r'^J*'^"* Au reite , nous fupposons que Taddition du nouveau: Ibide iê fait de;, manière que çkaqfm €Oiidie fottiid. d'abord U viceile de celle qui la fuit immédiatement^ 9c qu'ainfit^nffoeatÊÛon eu la diminmioi de «Sieflè de cette cou» cbe , peadaic ie pfcmier îoftaat, eft h même que fi M Plie «'dcoît fis «admis fltm kk mkoi^ ÎËntùcm 4mam

The text on this page is estimated to be only 15.69% accurate

48[^] MiCHAKiqUB ÀNàXITXQUS.' 3 3* ^ dernier cas est celui où le fluide fort d'an fiCù de longueur déterminée , 2c qui est entretenu toujours plein à la même hauteur. Ici les particules des surfaces supérieures ôc inférieures se renouvellent entièrement ; par conséquent on aura simplement pour ces deux surfaces , les équations $y > < " o$; mais en même-temps les deux autres $x' & x''$ feront données 6c confiantes, en sorte qu'il n'y aura que les deux inconnues A & à déterminer en t* Soient donc $x' > ' = A^{n^{\wedge}} : / ^{\wedge} F, ^{\wedge} = JJ^{\wedge} * \bullet J'^{\wedge} \text{saa} N^{\wedge}$ les deux équations $*^{\wedge} \text{asso}, Vw\grave{c}$ deviendront , $\bullet -H. 1 \gg \blacksquare a^{\wedge} o\grave{i}i * \text{chaflant}$, on aura , I , d'oii Ton tire , équation séparée , & qui est intégrable par des ttes de cercle ou des logarithmes. 3 4. Les solutions précédentes (ont conformes à celles que les premiers Auteurs auxquels on doit des théories du mouvement des fluides, -ont- trouvées • d'après k' Tuppofitioil que les différentes tranches du fluide contiennent M^{bmeât} Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 18.16% accurate

... s fi Ç .9 N;.D..l 3?- A:K- T l E. "487 Mun parallélifine en deiceodant dans le vafe. { J'^qyci I Hy;drqdinanitique de Daniel BernôuJli , l'Hydraulique de Jean BernouUi , & le Traité des Fluides de M. d'Alembert). Notre analyfc fait voir t]uc cette fuppoiiicion n'eft cxado que lorl^ que la largeur du vale efi: inHnimcnt petite; mais cju'eHe peur, dans tous le^ cas, être employée pour une premitic approximation, ôc que les lolutioas qui en r^ulccnt ibnc exactes aux quantités du fécond ordre près , en regardanc les largeurs du vafe» comme des quantités du premier ordre. Mais le grand avantage de cette analyfe , eft qn*on peut par (on moyen approcher de plus en plus du vrai mouvement des" fluides , dans des vafes dç figure quelconque.; car ayant trpuvé» ainfi quç nous vénons de le faire, les premières valeurs des inconnues, en négligeant les fécondes 'dimenfions des largeurs du va(e, il fera facile de poufler l'appioxiimation plus loin, en ayant égard fucccfliuement auî^ termes néiiligés. Ce détail n'a de difficulté que la longueur du calcul , & nous n'y entrerons point quaiu à préicnc.

'ApvtiCATiOK mêmes fotihuUs au mouvement m ~ fluide contenu dans un canal peu- profond^ & pfefque hori* Jontalt & en particulUr au mouvement des ondes» - * , ' 3 5. ^fqn'oik Tuf^M»^ >lbi fajjntéar, 4a 'fluide Çirt Retire, il iàndra prendre les ordonnées ^ Verticales U dirigées de haut en bas , les abfciflès^ , & fes autres ordonnées y deviendront horifontales, &c l'on aura (art. 13), cof f « o » "îcof » s= G , cof 5"= I. En prenant les axes des x 6c y dans le plan horizontal , formé par la furface fupérieure du fluide, dans l'état d'équilibre, foit :^ == « , l'équation du foud du •canal, « étant une fondion donnée de x & j".

The text on this page is estimated to be only 9.60% accurate

j 488 MéCHAH^IUS AMAI.XTIQUB. Non» zegarderons let
quantité t[^] * CQnmie t^{fib} pedces éa piemieff ordte, êc nous
tiégligeroosles antttéi du fécond ordre, & des ordres Airrai», c^{*oft-l}-dire ,
cellet ^{ui} contiendront les carrés & les produits de & «. L'équation de
condicioa relative au fond du canal , doutera (art. x6)^f t[^] , t⁻ ;ç , di[^]oà Ton
Totc que f^{*} cft une anâcié du premleT ocdie. Enliiite U valear de la
quantité a iê réduira à f (art. 15); fie il faudra négliger dans Texpreffion de
x' les quantités du fécond ordre , & d.in[^] celle de a", les quantités du
premier. Aiofi , à caufe de cof Ç=:o, cof« = Oj .cof (» 1 3 on aura par les
formules du même article. * -jT[^]T t-irj [^]TV.[^]j[»] — — [^]• On aura donc (art,
17)9 pour la furface (ûj[^]érieure du fluide» réquacion a' — es o , & ensuite
l'équacioa de condition, . iTxr . jV [^] « » L*équatioB x' — [^] [^] [^] o , donne
fur le champ i poo* la figure de ki furiace iipërieiie du. fluide à chaque
infant , fie comme féqpndoa do oodiriott dote avoir lieuauffi relacivcmeoi
à la mine fttrÊMae» il fuidra qa^{*}eUe foie viaic[^] en Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 17.14% accurate

. SS CONOB PaET $\wedge$ gp t en y fubfticuaoc à $\wedge$ cette même valeur $J^{\wedge}$ Cette équatioa deviendra donc par là de cette forme : & fublLtuant encore pour f' fa valeur trouvée ci-deûus , elle fe réduira à celle-ci, d, H 77- •! rfy '.t=0, dans laquelle il n'y aura plus qu*à mettre à la place de $\backslash$ fa valeur, $Jf. + \wedge (\wedge) - h. 4. (j$ & une $\wedge$ uation aux différences partielles du fécond ordre » qui fervira à déterminer ff en fonûion de r. Après quoi on connoîtra la figure de la furface fupérieure du fluide, par lequarion, & n on vouloir connoître auflî les viteflès horifontales $p, \wedge$ de chaque particule du fluide , on les auroit par les forma⁶. Le calcul intégral des équations aux dîffîrences paptielles , eft encore bien éloigné de la perfêûion néceflaire * pour rincégration d*équations auffi compliquées que celle dont il s'agit; & il ne refte d*aatre reHburce, que de fimplifier cette équation , par quelque limitation. Nous fupporerons pour cela > que le fluide dans fon

The text on this page is estimated to be only 19.48% accurate

«3 '490 MiCHAKIQUE ANALtTIQUE. mouvement, ne s'élève ni ne s'abaiflè au-defTus on ande0bus du nlvesui , qu'infiniment peu , enfbrc que les or* données ^, de la furfàce fapérieure, foient toujours très-petites , & qu'outre cela , les vjtclflès horizontales p ti q ^ foient auÛi infiniment petites. Il faudra donc que les quantités , ^T" ' -^^ foient infiniment petites» & qu'ainfi la quantité ^' foie elle-même infiniment petite. Ainfi nés;ligeanc dans l'écjuation propofce , les quantités infiniment petites du fécond ordre , & des ordres ultérieurs» . elle fe réduira à cette forme linéaire. _ , — a . a. JPt* ^ — . JL^ se O ut* & S dy * te Fon aura , de' df^ ^at ait ' ^ "y * Cette équation contient donc la théorie générale des pe> tites. agiurions d'un fluide peu profond , & par confèquene vraie théorie des ondes formées par les élévations » 6c les abaidemens lucccllits , & . infiniment petits d'une au ftagnante 6c contenue dans un canal ou bailîn peu p.otonJ. La théorie des ondes que Newton a donnée dans la propofition qunrantc-fixieme du fécond Livre , étant fondée fur la fuppoûtion précaire fie peu naturelle , que les ofciilationa verticales des ondes , foient analogues à celles de l'eau dans un tuyau recourbé , doit être regardée comme abfolument iifuffifinte pour expliquer ce problème. 3 7* ^ <^ Tuppoi^ que le canal oa.baflia ait ua fond hocL» Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 23.32% accurate

Sbcoside Partis. 491 fonçai , alors !a quantité « fera confiante 6c
cf-^ale à la profondeur de l'eau j ôt lcc^uation pour le mouvemenc des ondes
deviendra , d* <p' f d' &' d*o' \ Cette équation ert: entièrement femblable à
celles qui détermine les pecices agitations de l'air, dans la formation du fon ,
en n'ayant égard qu'au mouvement des particules parallèlement à l'horifon ,
comme on le verra dans l'article 9 delà fection fuivante. Les élévations \^
au-ded'us du niveau de l'eau, répondent aux condenfations de l'air, U la
profondeur « de Teaa dans le canal, répond à la hauteur de ratmo(phere
fuppofée homogène ; ce qui établit une parfaite analogie entre les ondes
formées à Ja.furfice d'un'e eau tranquille parles élévations, & les
abaillemens fucceîîfsde Teau , & les ondes form^ dans Fair , par les
condenfations & raréfactions fuccefEves de Pair, analogie que pluHeurs
Auteurs avoient déjà fuppofée , mais que perfonne jufqu'ici n'avoir encore
rigoureufement dcmontrce. Ainlicoriimc la vîteflè de la propagation du fon
fe trouve égale à celle qu'un corps grave acouerroit en tombant de la moitié
de la hauteur de ratmofphere fuppoicc homoglne, la vîtefle de la
propagation des ondes, fera la meiuc que celle qu'un corps grave acqucroit
en defcendant d'une hauteur égale à la moitié de la profondeur de l'eau dans
le canal. Par conféqunt, (i cette profondeur eft d'un pied, la vîteife des
ondes fera de 5, 495 pieds par lèconde; & fi la profondeur de Teau eft plus
ou moins grande, la vîtellè des ondes variera en raifon foudoublée des
profondeurs , pourvu qu'elles ne (oient pas trop conlidérs|bles. Qqqa

The text on this page is estimated to be only 21.94% accurate

49% MiGHANIQUB AKALITIQUE. Au refte, quelle que puifle être la profondeur de l'eau, & la figure de Ton fond , on pourra toujours employer la théorie prcccdente , fi on luppoie que dans la formation des ondes l'eau n'eft ébranlée remuée , qu'à une profondeur très-petite, fuppoition qui ei\ rrcs-plaufible en ellemême, à caufe de la ténacité &c de l'adhérence mutuelle des particules de l'eau, & que je trouve d'ailleurs confirmée par l'expérience , même à l'égard des grandes ondes de la mer. De cette manière donc la vîtefle des ondes déterminera elle-même, la profondeur « à laquelle Teau eft agitée dans leur ibrmation ; car Ci cette vSteflè eft de n pieds par ièconde » »* • j on aura $a = \text{pieds}$ ' On trouve, dans le tome X des anciens Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris , des expériences fur la vSteile des ondes , faites par M. de la Hire, âc qui ont donné un pied & . demi par féconde pour cette vîtelfe, ou plus exaûement i » 411 pieds par ièconde. Faifant donc $n \approx 411$, on aura la i rofondeur * de pied , favoir de $\frac{1}{2}$ de pouce ou 10 lignes à peu-près* NEUVIEME SECTION. Du moimment des Fkides am^reJibUs & ilaftiquai I. Pour appliquer à cette forte de fluides, l'équation gé* oérale de larude a de la 6edion précédente , on ^bfervera que le terme Sx_iL doit j être efiacé, puilque la condi* . tioo de i'i&compreâibilité i laqHcUe ce terme eft dû , A*exifte . Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 19.12% accurate

SscoNDfi -Pautie* plus dans l*liypothe(è pré(ente ; inaûid*dn
 aatre cM t U y faudra tenir compte de Tacbioa dt rélafticicé qui 8*oppo(ô •
 k la. compreflion, éc qui tend à dilater le fluide. Soit donc • rélafticité d'une
 particale quelconque D m du Huide; comme fon effet confifte à augmenter
 le volume D X Dy I ' ài certî particule, «5c p r conclquent, à diminuer a
 quantité — Dx Dy D\\\\ en réfultera pour cette particule le moment —
 %t»(Dx Dy D\\) ^ ajouter au pre* mier menibre de la même équation.
 Deforte qu'on rura pour toute les particule , le terme intégral — S %S. (D
 xDy D \\) à fubftituer à la place du terme Si^i'L. Or, sL étant rs A (Dx Dy il
 cft cl.ir que l'équation générale demeurer^ de la m£me forme en y
 cfaoogeanc fimplement x en * «. On parviendra donc aufit par les même:
 procédés ^ à rtois équations finales, femblabks aux équations (A)^ favoir ,
 Et il faudra de mcme que la valeur de t foit nulle à la furfiic; du fluide. Ci le
 fluide y eft lib e ; mais s'il eft contenu par des parois , la valeur de t lera
 égale à la réfiftance que les parois exercent pour conten r le fluide , ce qui
 cft évident , puisque • .exprime la ibrce d'élafUcité de fes par« ûcules. a«
 Dana les fluides compreffibles, la denfité a eft toujours donnée par xmfi
 fonâioa connue de «yX^jr^t^^r, dé

The text on this page is estimated to be only 21.74% accurate

494 MÉCHANtQUR AKAtRtIQUB. * pendante de la loi de Maftidcé du fluide , & de celle de h chaleur qui eft ruppofée régner à chaque inllant, dans tous les points de lefpa e. Il y a donc quatre inconnues, «, à licterniiner en f, Sc par conlcquenc, il faut encore une quatrième équation pour la folution complete du |>Toblême. Four les ftuides incompreflîbles , la condition de l'invariabilicé du volume a donné l'équation (BJ de l'artide 3 s & c^Ue de l'invariabilité de la denftté d'un inftanc à l'autre z donné l'équacion (HJ de l'article ii.JDans Içs fluides compreffibles aucune de ces deux conditions n'a lieu en particulier, parce que le volume 6c la denftté varient • k la fois; mais la mafle qui eft le produit de ces deux élémens doit demeurer invariable. Atnfi on aura d, D mamou^ ou bien d, (ù.DxDyD \) » o. Donc , en difiFérentiant logarithmiquement -i- ^^DmDyD\^' *TM ® , fc-fubllituant la • valeur de d. (T)xDyD:^J , (^cette valeur eft la même que celle de ^.(D xDy D iJ de l'article 2 de laSedion précédente , en y changeant d en i)^ on aura Téquation , laquelle repond à l'équation [Bj de l'article 3 de la Section citée , celle-là étant relative à l'invariabilité du volume, & celle-ci à l'invariabilité de la ma{Iè. . 3. Si on regarde les coordonnées Xfy'^^y comme des fondions des coordonnées primitives tf^^^Cj&du tems t écoulé depuis le conunencement du mouvement « les équar tions (a) devicndronti par 'des procédés iemblables. à ceux de l'article 5 de la Seàion précédente, de cette forme. Digitized by Gopgle

The text on this page is estimated to be only 11.86% accurate

SscoNDB Partie. 495 OU de celle-ci plus fimple, CCS
transformées étant analogues aux transformées ($C^i J$ de Jendroit ciré. '
A l'égard de réquarion f) , en y appliquant les transformations de l'article 3
de la Seûion pr[^]édente , elle fe réduira à cette forme $Hh -r^* \wedge o$, les
difTcrentielles d a 9c d^e écanc relatives uniquement i la variable t. De forte
qu^{*}eh intégrant , on aura a • 0 fonâ (a ,b ,c) Or lorfc[^]ue f asso , nom jtuiij
»u dm 4*grciefe cité , que • devient ss . ; . donc fi on fupj[^]ofc que H Toit
alors la vaîear de a , on aura H as fonâ î (afb,cJ,&L l'équation deviendra a t
«s iT, ou bien l=Bt— ; c^{*}eft-à-dire« en fubftituant pour A fa valeur[^] dm it i\
i» dy dj ix d\ âr ak '«« at- da àe. uk de d[^] d» _dy_ dj ,Jf_ _fy_ _fy_ « ' ^
Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 18.98% accurate

MéCHANIQUE ANALYTIQUE. • transformée analogue à la transformée (E) de Tarticte cité* Enfin il faudra appliquer aufl! à ces équations , ce qu'on a dit dans Tarcide 8 de la même Seûioii » lelacivement à la furiàce du fluide. 4. Mais fi l'on veut , ce qui e/l ()eaucoup plus fimple , avoir des équations entre les vîteflès p » r des particules fuivant les direAions des coordonnées ^, en regar- . dant ces vîcelTcs ainfi que les quantités & t comme des fondions de jc, ^, ^, / , on emploiera les transformations de l'article 10 de la Sccl:ion précédente , ÔC les équations (a) donneront fur le champ ces transformées analogues a|x trans* formées (F) de ce dernier article , * C4r -s- +î ^ ->-^ Dans l'équarion (h) outre la fubftitttion de pdt^qdt^ rdt, au lieu de dx, dj, & le changement de Z> en d^ il iâudra encore mettre pour </a fa valeur complete» & r«a aura, en divîfant par dt^ cette transformée; ^ Ad* Arfç ^inr^^j^^ laquelle étant multipliée par a, Te réduit à cette forme plui fimpie , if A Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 12.81% accurate

Sconds Partie. $j;^{\wedge}^{\wedge} dy^{\wedge}{}^{\circ} \bullet \bullet \bullet A^{\wedge}$ rég^{de} la condition relative au.
 mouvement des pat* dules à la. futface » elle (èra repréfént^{de} également par
 l'équation $j^{\wedge}$ de l'article 12 de la fêâion précâiente» favoir, $\hat{A}A dA dA . ' dA$
 ... — $'^{\wedge}F — '^i TGr-^{\wedge}TT''''** \bullet$ cil fuppofanc que $A^{\wedge}o^{\wedge}$ foit l'equation de la
 fur&ce. 5- eft aifè de fadsfaire à l'équation. en ruppofant tions inconnues de
 $x, 7, , r$. Par ces (abfttations y Téqui» <ion donc il s'agit deviendra
 laquelle eft intégrable , relativement à donc l'intégrale donnera $^{\wedge} dx \bullet dy 'di^{\wedge}$
 jF étant une fboâion* arbitraire de $t^{\wedge} > t^{\wedge}P^{\wedge}iV'$ liante de la loi de Ja dcnfité
 initiale dn flnide. On aura ainii , $-f_2 f — dy \bullet \bullet \ll dm dA ''''^{\wedge} dé y \gg Rrr$
 Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 15.74% accurate

4[^]S MiCHAftXQUE AKAX.ITrQV2. Donc'fbbfticaaat ces valeurs dans les ëqiiadoas (f)^{^ ^} mettant de plus poar « fa valeur en fbnéHon de a, x, y [^] r [^]art. tJ, on aura trois équations aux différences partielles entres les inconnues «, js , [^] &. les quatre variables x[^]y [^]r^{^^} t'y & la folution du probltme ne dépendra plus que de l'intégration dâ ces équations ; mais cecce iutégation furpailb les forces de l'analyfe connue. 6. En faifant abftraâion de la chaleur , & des autres circonftances qui peuvent faire varer l'élafticité indépendamment de la denficé» la valeur de Télafticité * fera donnée par une fbnâiod de la denfité a-, delbrte que (èra une diffcencielle à une feule variable , & par conféquent incé[^]grable, dont bous fuppoferons l'intégrale exprimée par £• • Soit de plus la quantité X d x Ydy'-[^]Zd\ une diffé[^] lentieUe complete» dont Tintégrale foit comme dat» l'article i } de la Seûôo piécédenie. Les équations'[^] diè Tarticlé 4'» liiultîplî[^]s re(pec[^] . y&f[^]mta[^] i[^]d'k[^]ijtrdi* enfuit[^] Routées enfemble, donneront a[^]rès la:divifiott par l uiie. éqiiatioii de la ibtm» « 4eat le piemêr m'[^]&Bre étant intcgrable , il faudra que Je fécond le foit anffi. Ainfi on aura de nouveau le cas de féquation (L) de Tardcle 1 5 de la ScéHon précédente , fie oa fanriendxa par confé[^]uent à des réiuJcats femblables. bigitized by Google

The text on this page is estimated to be only 14.24% accurate

7* Donc en général, si la quantité $p dx + q dy + r dz$ se trouve dans un inibnt quelconque une différentielle complete, ce qui a toujours lieu au commencement du mouvement, lorsqu'il le fluide part du repos, ou qu'il est mis en mouvement par une impulsion appliquée à la surface; alors la même quMiUU devra être toujours «ne différentielle complete /»rt 17 , Seét préc.J. Dans cette hypothèse 00 fer[^]. comm[^] dans l'article de la feâion pn[^]edenve fdxw[^]dy[^]fd[^]df[^] ce qui donne «—£1. [^]ét, [^].réquation (1) éuac inNfgr[^] après ces iohftinitient. tkmneray. valeur qui facisfera en même-temps aux trois équations (fj Or £ étant = fera une fondion d[^] a , puisque • est une fondion comme dé donc a fera une fon£Uon de E, Snbftimant douC U, vuleitf d6 a.icîtde [^] l'équation pré[^]» c4dente, ainfi que celles de f , r dans réquation de l'article 4[^] on. auesi uoç équ[^]m en dî[^]férences partîmes de [^]laquelle ne contenant que cette inconnue suffira pour la déterminer. De forte que toute la [^]tifieii)cè- fer[^]-réduioe À cette unique intégration. • 8. Et dans les fluides élastiques connus, l'élasticité est toujours proportionnelle à la densité de sorte qu'on a pour Rrr a

The text on this page is estimated to be only 14.66% accurate

^o6 M i C H A N I Q U E A A L I T I Q U £. ces fluides I»! A» i
étant un coefficient conlbnt qu'on dé* tennincfa en connoilanc la valeur de
rélaftîcicë pour une denficë donnée. Ainfi pour l'air TilalBâdté eft égale à
poids de la lonne de mercure dans le baromètre; donc ii on nomme JST la
hauteur du 'baromètre pour une certaine denfité de Tair qu'on prendra
pour.runicé, n kdenfité du mercure, c*eft à-dire, le rapport numérique de la
denfité du meicure à celle de l'air, rapport qui eft le mcino ^|uc celui des
gravités fpécifiques, la force accélératrice de la gravité ; on aura lorfque $A =$
 I , par conféquent $i = \sqrt{z}$; où Tort remarquera que $\sqrt{z}$ H eft la hauteur de
l'atmofphere fuppofée iiomogene. Deforte qu'en déllgnant cette hauteur par
on aura plus funplement $i^{\wedge h^{\wedge}}$ de deU. »=ssghA, Donc puifque $E j^{* \wedge \wedge}$ on
ama Éms^gh / » a. Or l'équa^ tion (g) de Tartide 4 peut Ce mettre Cous la.
forme * • Donc fubfUtuant $\sim j^{\wedge i\hat{u}},^{\wedge}$ à la place de /a,/, r, fit midtipiânt par
^ik, elle deriendia .Iln'y ^ufa donc plus qu'à fubftttuer ponrCfa ▼ afenr
trouvée ^: ^m i dc^cette rnb^Únicioa donnera T^iutioa fiûale ea ^ Digiiiioa
by Goo^lc

The text on this page is estimated to be only 13.90% accurate

Seconde !Partie. ' fox • 'ÎV.^je» ^ df^ ^ 4ff\ d^9 } IF' àV dV dp ^
d» ^ d» dy ^ dV ~ il ^ d p d^p ^ d^ d}p F^* rf* ^ d*dt ^ dy ^ dydt ' ^ rf* ^/ ^
^«|fy ^ d« ^ di ^ dndi dp d^i> ' _i ^iquelle concienc (èule la tliëorie du
mouTenuiit étS flnîcfef iSaftiques dans Hiypochèfe dont il s'agît. # c^.
Lorfque le mouvement du fluide eft très-petit, 8C qu'on n'a égard qu'anx
quantités très-petites du premier ordre, nous avons vu dans l'article *zi de la
Section précédente que la quantité p dx-^^dy -^r eft auâi néceffaireiiient
une difTércntielle compiette! Dans ce cas donc,, les formules précédentes
auront toujours lieu , de quelque manière q[oe ^on^bmmmmmmJmAmàe
ait été engendré , pourvu qu'il foie toujours très-petit» ^ ^ue par
coniQîque&t la ionâipn \ foit eUe-même très-pedte. Dans la théorie du fon
on fuppofe que le mouvement 3es particules de l'air eft: très-petit; ainfi ,
regardant dans l'équation (n) la quantité ^ coinm# très-petite , & négligeant
les termes oii elle monte au-delà de la première diAienlion> «a aura pour
cette théocie;; Inéquation g,éacxaie»

The text on this page is estimated to be only 13.29% accurate

foi MâCBAMXQUf AMALXT.IQQB. *" V_{rfx} » $\wedge$ 4y» $\wedge$; di\ d y
 rff 4/< $\wedge$ dx $\wedge$ dT dy $\wedge$ dj TC $\wedge$ J $\wedge$ $\wedge$ Or en négligeant de même les fécondes
 dimen fions de $\wedge$ dans la valeur de $\pounds$ de l'arcicle 7, oa aura iimplemenc. On
 peut fu $\wedge$ pofer que k fonâfon 9 foit nulle dans XixdSt de- repos ou
 $\wedge$ *é<}aUibre. On atira. donc âa/fi dg $\wedge$ cet état — $\_r$ $\wedge$ «o, Ôcpar
 conféqaeûtir*/. A«ipi-J?rj &A=tf Lorfque l'air eft en vibration , foît {a
 denihé naturelle augmentée en raifoQ de i \"r s $\wedge$ 1 > $\wedge$ ësnc une quantité
 fore ' ' ' ■ . ■ -K petite > on aura donc en général a « " ' $\wedge$ i $\wedge$ J $\wedge$ 3 $\wedge$. de là , en
 négligeant les carres 4e .f $\wedge$ 00 wra /4 «ap $\wedge$ -il $\wedge$ A l'égard de la valeur de y
 qui dépend des forces accélératrices, en fuppofant le fluide pefant , &
 prenant pour plus de fimplicité les ordonnées verticales, & dirigées d»haut
 en bas, on aura par la formule de l'article 33 fSeûU ptéc J y = ' $\wedge$ YX* T
 $\wedge$ orce accélératrice de ia gta $\wedge$ irijté. Donc Téquacioi» de la théorie du ion
 fem \ dx- $\wedge$ $\wedge$ d $\wedge$ j\s-Tr- $\sim$ i $\wedge$ Ayant déterminé <p par cette équation , on aura
 les vî $\wedge$ deif $\wedge$ q $\wedge$ r de l'air» ainfi que fa condenfation $\wedge$ par let IO« % on ne veut
 avoir égard qu'au mouvement hori* (ofit $\wedge$ de Ttir, on fu $\wedge$ pofera que la
 fonc $\wedge$ oo P ne conçienna Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 13.65% accurate

' s t C-0 K » B F A R T I K. JOJ point Xi nuûs Teulemenc Xy y,L
Abris l'éi^uacion en 9 clcTiendra : Mais avec cette (ixhplification même,
elle dk eitecote trop compliquée pour pouvoir s'intégrer rigoureofèment. Au
refte, cette équation eft entièrementi^êffblable à celle 'du mouTement des
ondes dans un canal iioiiMfid & pu profond. Foyci la Seétion précédente ,
artîcîe 37. ■ Jnfqa'aprêfent on n'a pu réfoudre complètement que le * cas
cil l'on ne confidère dans la malTe de l'air qu'une fêule dimenfion, c'cd-à-
dire , celui d'une ligne fonore, dont les particules ne font que des excurfions
longitudinales. Dans ce cas, en prenant cette même ligne pour l'axe x, la
fonction p ne contiendra point^ > fie l'ét^uacion ci-deÛu^ fe réduira A. o- A
'^^ — '^^ — di^ 9 laquelle eft fêmlable à celle de» conte» vibcanxes» 9ç «
jponr intégrale complete en dénotant f 1 ■Muft^wOiii^nf s ou fignes F tcf,
deux Ibnâions arbitraires. Cette formule renferme deux tbéorfes
importatires , celld du fon des flûtes ou tuyaux d*orgue » & celle de la pro'
Ration dn fon dans Tair libre. Il ne ^agtc que de déier-' miner
convenablement les deux fonfkions arbitraires; '9C tlolci les prmcpes c^i
doîvenc guider dans cetce déosnaiir ♦lariftBi. * . * ' *

The text on this page is estimated to be only 16.01% accurate

!1 JO4 MécfiANIQUE. 1 1. Pour les flûtes, on ne confidère que la ligne foaOf^e qui y est contenue ; on suppose que l'état initial de cette ligne soit donné, cet état dépendant des ébranlements imprimés aux particules, de on demande la loi des oscillations. Faisons commencer les abscisses x à l'une des extrémités de cette ligne, & soit l la longueur, c'est-à-dire, celle de la flûte, égale à a . Les condensations & les vitesses longitudinales v feront donc données, lorsque $r = 0$, depuis $x = 0$, jusqu'à $x = a$ nous les nommerons «S & Maintenant puisque $b = \frac{1}{2} \frac{d^2 s}{dx^2}$, si on différencie l'expression générale de v de l'article précédent, on désigne par F les dérivées des fonctions marquées par F & /, en sorte que $v = \frac{1}{2} \frac{d^2 s}{dx^2}$, $f(x) = \frac{1}{2} \frac{d^2 s}{dx^2}$ on aura $P = \frac{1}{2} \frac{d^2 s}{dx^2}$, F changeant en P , & S en F . On aura ainsi comme, P & S sont données pour toutes les abscisses x depuis $x = 0$ jusqu'à $x = a$, on aura aussi dans cette étendue, les valeurs de F & de f ; par conséquent, on aura les valeurs de p & s pour une abscisse & un temps quelconque, tant que x & t se trouvent renfermés dans les limites où se trouve le temps t ou les abscisses x $\frac{1}{2} \frac{d^2 s}{dx^2}$, $t > 0$ fortont bientôt de la limite & la déterminent. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 16.80% accurate

.Sbcomdb Partie. 50; des fondions $P_{fx-h} tV^{gh} J J' f x^{t^{gh} J^{\wedge}}$
aëpendraalors des conditions qui doivent avoir liea aux excrétnités de la
ligne fonore, lel on que la Hûte fera ouverte ou fermée. 12. Suppoions
d'abord l.i Iluce ouvei ce par les deux bouts , eororre que ia ligne fonore y
communique immédiatemcr.c avec Tair extérieur; il e{k clair que fon
élafticité dans ces deux points^ ne pouvant être contrebalancée que par la
preffion confiante de i'atmofphere , la CDadenfation s y devra être toujours
nulle. H faudra donc que l'on aie dans ce cas s^Oy lorique « o, 8c lorfqe a»
quelle que foie la Tileur de ce qui donne les deux conditions à lemplij:» '
 $F(tvrgh)^{f(-tv^{gh}):^{\wedge}o \cdot \backslash^{\wedge}}$ lefquelles devront fubfifter toujours , t ayant une
valeur poljtive quelconque. Donc en général , en prenant pour \ une quantité
quelconque poiitive» pn aura» ■ $F(a^{\wedge}l)^{f(a-^{\wedge}V^{\wedge}-}$ Donc l* tant que
ij^'éft ^ a » on connoîtra les valeurs de '/ya-H^y^ K ^yt^iÊm^j^ pu^'u'elles
fe réduifent à celles de $f(a-\backslash)t \&$ de qui font données. > Mettons dans ces
fetinules au lieu de donneront , * é--'/■r«-.i).- "r«-t-ï;=/Y'— DoiàcV, (au
qoe l An < 0 , 'on connoîtra auffi les v»

The text on this page is estimated to be only 13.43% accurate

J06 MÉCRANIQUE ANATITIQUE. valeurs de FY^a-k-i , U de ^{a} — a — , puisqu'elles Te rédoifent à celles de $F\backslash y$ & de ffa — i) qui font données. • Mettons de nouveau dans les dernières formules $a-h:^a$ pour & les combinant avec les premières , puisque ^{a} peut être quelconque, on aura, $r-r-^*$ « - i) $r-1$; - tv Donc 3^* tant que $:j$ fera $<a, -o$ » connostra encoie les valeurs de $Pf^a^i^U$, à $Jf-tû^x$, $|^a^*ellès$ se réduifent aux valeurs données de P^a , U de ffa^i . On trouvera de même., en mettant de rechef « $H-i^a$ pour $i^a F'(^a^:0-^f:(^Or-F^ D'oU$ Ton connoîtra 3 » les valeurs de FY^a^iJ & de $/'(^— 3 tf — ^$, tant que ^{a} fera $<a$. Etainii de fuite. ' - " On aura donc de cette manière , les' valeurs des fonctions $i^?rA.-.4'.^i<^A;,,\&$; de $/rx--ifrgA;^q>f,,.ff^]^\wedge$ tems / ccoulé depuis le coëmeBcemept du mouvement de. la ligne fonore j aiufi on connoîtra pour cha(jue inftaot. rétat de cette ligne, c'eft-à-dire, les vîtelTes $^{^te}$ les COU. denfations s de chacune de fes particules. Et il eft vifible par les formules précè ^Jentes qqe les valeni» de ces fonctions demeureront les niêmei en 'augmentant k quantité $tyghirA^ :a$, ou de $4a, 6a$, «et: Defbtt)qoe îaligne fonore reviendra exiMaeinent au $^même^cat$., après chaque Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 15.70% accurate

. . s)I c a M D X P A & T I j07 iofierîrjdlle it tema détèiiiiuié*par
Téquacion tVghmmmtaiG» •qui donne pour fqt întetYalle, Ainft la durée des
ofcillacions de la ligne fonore eft in<iépendante des ébranlemeiis primitifs ,
& dépend feulement de la longueur a de c^cce ligne de la hauteur k de
l'acxnofphere. En fujipofant. la- >fbrce accélératrice de la gravité g égale à
Tunicé , il faut prendre pour i'oiucé des eipaces , le double de celui qu*an
corps pefant parcourt librement dans le tems qu'on'ptênd]pour' Tunlié
fSe^on II'»' art.^ xj. Donc fi on prend y-^ce qui eft {Jermis, I& p6arr««ité
des eipaces» Tunité des rems ièra celnî qa*un corps pefant met à defcendre
de la hauteur ~i & le tems d'une ofciliation. de Ja ligne fonore » iera
exprimé par xa, Ou^ ce qui* . revient au même^ le tems d'une ofcîliadon
fera' à celui ' de la' chute * / > » - • ' d*uB corps par la hauteur comme xa k
h,' 13- Si la flûte écoit fermée par fes deux bouts, alors les condenfations s
peurroient y ccre quelconques , puifque l'élarticité des particules y feroic
foutenue par la réfiftance des cloifpns î"mary par-ta même, f aifpn , les
vîteilès ^ y devroient être nulles j; çe ^ûl dbnnéroît de nouveau Içs '
conditions. * * Ces formules feriennent -à œBes ^e îtoos -avons eicaini*
nées ci-deiTus» en y^fupporanc feulement la^ fettidoon toix» Sssi

The text on this page is estimated to be only 12.55% accurate

j⁰⁸ MÉCFLANÎQUS ÀHALITIQUE. quée par/ négative; Ain H, il en réCiiltm des conclufiotiv femblables, & on aura encore la même expreHioa pour la durée des ofcillacions de la fibre fonore. Il n'en feroic pas de même , il la âûce étoic ouvene par un bout. Se fermée par l'autre. U faudroic alors que s fût toujours nulle dans le bouc ouvert , & que p le fût dans le bout fermé. Atnfi en Tuppoianf la flûte ouvert» on «ao » & fermée ou X ma[^] on aaroic ks condicioas jyoh par une analyse iêmblahle à celle de Fardcfe iz [^] on tirera les formules iiiivantes[^] ' tL jinfî lit niiwir ' v . Or tant que :(eft<'a, les foncllons F U f{ a'^\) [^] font données par l'état primitif de la fibre fonore j donc on connoicra auili par leur [^]yen les valeurs des autres fonc> fions » , . F(a[^]lJ, Pfî ôcc ,/Y- V>f (-^{^^}0[^]1 [^]par.confii(|ttent» on . aura Vétac[^]de lafibce» après un «en» 4|aelcon[^] [^] ■ , . . •

The text on this page is estimated to be only 19.37% accurate

Miif on voie par les formules précédentes» que cec étas ne
reviendra, le même , qu'après un incenralle de tems dé* : terminé par
réquation $tVgh=s^{\wedge}ay$ d'oii il s'enfuit que la durée des vibrations fera une
fois plus longue que dans les flûtes ouvertes ou fermées par les deux bouts;
6c c'est ce que l'expérience confirme , à l'égard des jeux d'orgue qu'on
nomme bourdons , tc qui étant bouchés par leur extrémité fupérieure»
oppoféc à la bouche » donnent un.ton d'une oâave plus bas que s'ils écoienc
ouverts, Voyez an refle fur la théorie des flûtes , les deux pre« . miers
volumes de Turin, les Mémoires de Paris pour 17^» » . & les ihw
Commemarii de Pétersbourg , Tome XVI. 1 4» Conhdrons maintenant une
ligne fonore d'une Ion* gueur indéfinie , qui ne foit ébranlée au
commencement , que dans une très petite étendue , on aura le cas des agita«
cioQS de l'air produites par les corps fonores. ' Snpp^ôns donc que les
agitations initiales ne s*étendene que depuis $xssbq^{\wedge}$ jufqu'i $xsma^{\wedge}$ étant
une quantité très^^ petite. Les vîteflès & les condenfations initiales $P^{\wedge}S^{\wedge}$
feront donc données pour toutes les abfcifles tant po« fitives que négatives ;
mai^ elles n'auront de valeurs réellef que $ili\}iiiiii\ ii[i> \blacksquare j\ jiiiiii"i\ II\ awijj$
 $twiii\ eee\ Jiaiiier,$ «Uee feront tout-^*fsût nulles. Il en fera donc avffi de
mime des fondUons $F'x$, & fx y puifqu'en faifantr^^o, on $z\ Pa=t\ Fx-^{\wedge}-f'x$,
 $Fjc— \bullet/3c,&pai'confcquent\ F^*aB$ » . ; D'où il sWuit» qu'en ^nanc pour i une
quantité pofi-^ lîve, moindre que $0^{\wedge}$ les $hnSdooiF'Cxri'ty'ghJ\ ufcx't$

The text on this page is estimated to be only 15.78% accurate

jro MicīTANIQ WB - A WAtlTĪ^UE, ' tV qhji n'auront de valeurs réelles que tant qu'on aura jc'-f? ' t]/' gh—\ . ViX confcquent, après un tems quelconque r, les viteiTés ^, & les condenfations s feront nulles pour tous les points ^ la ligne ibnore , excepté pour ceux (qui répoa• dront aux abfciiTes xss^^/^ ' . On explique par là^ eoinment le (on Ct propage, '6c com« nient ti fe forme rucceffivjemenc de parc & d^utre dti cbi^s ' iofiore, £v dans des téms égaux , èes fibres fonores , égales en longueur, à la tîbre initiale a. " ' La vitciTe de la propagation de ces fibres fera exprimée par le coL'fîTcientK^ Ai elle fera par confèqùerit conftanre ÔC indépendance du mouvement primitif ; ce que rcx|>ériente * confirme , "pmfque' tous les Tons forts ôA'fbibleii paooiflenc fe propager avec une vneUe tenfiUeMérit égale. - ' • ' * Quant àila" Valeur abfolue de cette • vîcefle en faî/ànc comme dans l'article li, g^i'Zc A = i , elle deviendra " auflî = I. Or l'unité des vitelTes eft ici celle qu'un corps pefaitt doit acquérir en tombant de la moitié de l'efpace A, qui cft pris pour l'unité (^Seclion 11. art. xj. Donc la vîcefle ' dtt fon fera due à la hauteur—. ■ ' ' 15 •• En ruppouLUitavcc la plupart deis Phyficiens, l'air 850 fois plus léger que l'eau, & . l'eau 14 fois plus légère que le • mercure, on* i à 11900 pour le rapport du poids Ipéciflîque de l'air à ctiui du mercure.. Oc .prenant la baujçeur moyenne du baromètre de x%. pouces de France , il .yJent * 353x00 ponces, ou 277^^ pieds pour la hauteur h d'une ^ • colonne d'air uniformément dcncle & fa Tant équilibre à la coloime de mercure dans le baromètre. Donc la vîtelic da

The text on this page is estimated to be only 17.00% accurate

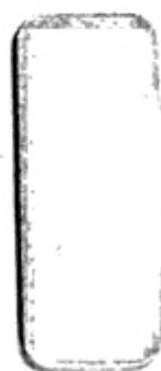
.Sbc.onob Partie, 51X Ton fera due 4 une bautear de 15883 -|-
pieds « $\wedge$ {êia par conféquencde $\wedge$ i $\wedge$ par féconde. ' * L'expérience donne
envircm' 1088 ; ce qui nné' dtflîfk rence de près d'un iixfeme;-ii!làts' cette
difi%i%nce ne'^peut être attribuée qifà f incèrdtnde des réfulbts-fevrim pir
'l*4Hc-t* périence. Sur quoi voyez fur-tout un Mémoire de feu M. Lambert,
parmi ceux tic l'Académie de Berlin, pour 17⁸, I 6. Si la ligne lonore étoit
terminée d'un coté par un obftacle immobile i alors la particule id'âir '
contiguë à cet obftacle, n auroit aucun mouvement ; par conféquent » il a eft
la valeur de Tabfcifle x qui y répond » il faudra que la vSteffè p {oit 'nulle »
lorique » a a , quelque foit r ; ce qui donnera la condition Or on a vu que la
fondion ffa— $\wedge$ tt'/ghj a une valeur réelle tant que a — / $\wedge$ $\wedge$ g $\wedge$ — $\wedge$ f- $\wedge$ $\wedge$ $\wedge$ - i
donc puifque F'fa- $\wedge$ t y $\wedge$ g h) « — J' ($\wedge$ i — tV' gh)y\ :x fonction F U "h t ghjy
aura auffi des valeurs réelles, lorfque a — t Vg h » \ , c'eft-i-dire , lorfque r
]/" A = a Par conféquent la fonction F' f x- $\wedge$ tygh) fera non- feulement réelle,
lorfque x~h t V $\wedge$ giirmmtffmÊmifFmBCOtet lorfque x- $\wedge$ t y g h =* a a — $\wedge$;
d'oii il fuit que dans ce cas les viteiFes $\wedge$, & les condenfations i feront anfli
réelles pdiir les abfcifiès x $\wedge$ xa AinH la fibre fonore après avoir parcouru
l'cfpace a. fera comme réfléchie par l'obftacle qu'elle rencontre , &
rebrouffera avec la même vicefle ; ce qui donne une explication bien
nataiellie des. écho» ordinaires.

The text on this page is estimated to be only 14.16% accurate

MéCHANIQUE ANALITIQUE On expliquera de la même
manière les échos réfléchis, en supposant que la ligne sonore soit terminée
des deux côtés par des obstacles immobiles, qui réfléchiront successivement
les fibres sonores, & leur feront faire des espèces d'oscillations
continuelles. Sur quoi on peut voir les Ouvrages cités plus haut (arc 13),
ainsi que les Mémoires de l'Académie de Berlin pour 1754 & 1755. . . Fin
de l'U Stconde Fardé: -. ^o * * ^BmBBsssaBSBmesassssssssss^ A PARI S,
• Pe l'Imprimerie de Philipe-Denis Pierrei le premier Imprimeur Ordinaire
du Roi &c. ' Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 0.00% accurate

r



The text on this page is estimated to be only 24.67% accurate

Digitized by GooQle