

This book was produced in EPUB format by the Internet Archive.

The book pages were scanned and converted to EPUB format automatically. This process relies on optical character recognition, and is somewhat susceptible to errors. The book may not offer the correct reading sequence, and there may be weird characters, non-words, and incorrect guesses at structure. Some page numbers and headers or footers may remain from the scanned page. The process which identifies images might have found stray marks on the page which are not actually images from the book. The hidden page numbering which may be available to your ereader corresponds to the numbered pages in the print edition, but is not an exact match; page numbers will increment at the same rate as the corresponding print edition, but we may have started numbering before the print book's visible page numbers. The Internet Archive is working to improve the scanning process and resulting books, but in the meantime, we hope that this book will be useful to you.

The Internet Archive was founded in 1996 to build an Internet library and to promote universal access to all knowledge. The Archive's purposes include offering permanent access for researchers, historians, scholars, people with disabilities, and the general public to historical collections that exist in digital format. The Internet Archive includes texts, audio, moving images, and software as well as archived web pages, and provides specialized services for information access for the blind and other persons with disabilities.

Created with hocr-to-epub (v.1.0.0)

The text on this page is estimated to be only 31.79% accurate

em eg es cmt rat g TRE #8 Gr no rs | ap ee hate De A A a PS 7" 2

=

her LA» à A à

ŒUVRES BLAISE PASCAL. Cujus gloria neque profuit
quifquam laudando, nec vituperando quifquam nocuit, cm utrumque
fummi praditi fecerint égentis. Tir. Liv. Ex Hieronym. Prol. Lib. II, in
Ofeam. D SE TOME CINQUIEME. AT ——— © «+ A LA HATE, CHEZ
DETUNE, LIBRAIRE. — wt À° fÀ | M. DCC. LXXIX, L-17419) George
SARTOA o, rue St-Michel — GAND —

The text on this page is estimated to be only 47.50% accurate

%

L 2 + D RE RLSNEES 4 Da et Dre D ARE & J'en PRG et Jn'e
Dr'et, RE RENE EE D RER SR SE A SAA AN ER ET d + + de 4 de de de
+ + de 4% + + + + + D'FS2MATIE RES CoNTENUES DANS LE TOME
CINQUIEME. C UVRAGES de Mathématiques de Pafcal. Traité du
Trianole Arithmétique, age I vers ufages du Triangle Arithmeétique , u
riangle arithmétique pour les Or/ Ch YarŸ 4 AL L 20 ge du Triangle
arithmétique pour les CornUfage du Triangle arithmétique pour déterminer
les partis gw on doit faire entre deux Ufage du Triangle arithmétique pour
trouver ances des Binomes & À De numericis Ordinibus Tratatatus, De
numericorum Ordinum Compofitione, Problema primum 68 De
nuimericorum Ordinüm Refolutione, Problema II, e numericorum Ordinum
Refolutione, Problema I,

De numericorum Ordinum Summi, Problema 1 V De
 numericorum continuorum Productis, feu de numeris qui producuntur ex
 multiplicatione numerorum ferie naturali procedentium, Produéta
 continuorum refolvere , feu Refolutio numerorum qui ex numeris
 progreflione naturali procedentibus producuntur 8x Numericarum
 poteftatum generalis Refo- : lutio 8 Combinationes Yy0 Poteftatum
 numericarum Summa Jr, De Numeris multiplicibus ex folâ charatte lum
 numericorum additione agnofcendis, 123 FRoblérara de Cycloide propofita
 menfe Junii 16<8 1 De eodem argumento Additamentum, 1 Réflexions [ur
 les conditions des Prix attachés a la folution des Problêmes concernuünt la
 Cycloïde Annotata in quafdam folutiones Problematum de Cycloide,
 Hiftoire de la Roulette , appelée autrement Trochoide, ou Cycloide ; où:
 lon rapporte par quels

DES MATIERES. V quels degrés on est arrivé à la connoissance de cette ligne 16 *Hystoria Trochoidis, five Cycloidis, gallicè, la Roulette*, in qua narratur quibus gradibus ad intimam illius lineæ naturam conoscendam perventum fit I Récit de l'examen & du jugement des Ecrits envoyés pour les Prix proposés publiquement sur le sujet de la Roulette, où l'on voit que ces Prix gagnés, parce que personne n'a donné la véritable [olution des Problèmes , 193 Suite de l'Histoire de la Roulette, où l'on voit le procédé d'une personne qui avoit voulu s'attribuer l'invention des Problèmes proposés [ur n'ont point été *Hystoriæ Trochoidis five Cycloidis Continuatio*, in qua videre est cujusdam viri machinamenta qui se Autorem Problematum super hac re propositorum erat professus, 214 » Diverses inventions de A. Dettonville en Géométrie, Methode générale pour les centres de gravité de toutes sortes de lignes, de surfaces & de solides,

. La même méthode générale pour les centres de gravité, énoncée autrement, l'aité des Trilignes rectangles, & de leurs onlets, Rapports entre les ordonnées à l'axe & Les ordonnées à la bafe d'un triligne rectangle quelconque Rapports entre les finus [ur la bafe d'un triligne quelconque, & les portions de [a ligne courbe comprises entre le fommer. & Les ordonnées à l'axe 28 6 Méthode générale pour trouver la dimenfion & Les centres de gravité d'un triline quelconque & deifes doubles onglets, par la feule connoiffance des ordonnées à l'axe ou à la bafe, 2 Méthode pour trouver la dimenfion & le centre de gravité de la furface courbe des doubles onglets, par la feule connoiffance l'axe Propriétés des fommes fimples, triangulaires & pyramidales, Traité des finus du quart de cercle, Traité des arcs de cercle, Petit Traité des [olides circulaires, général de la Roulette, ou couchant la Roulette, propofés publiquement & réfolus par À. Dettonville, Traité Réfolutioæ

DES MATIÈRES. vif Réfolution des Problèmes touchant la
 dimenfion & le centre de gravité du triline & de {es demi-folides, 286
 Réfolution des derniers Problèmes touchant la dimenfion & le centre de
 gravité des furfaces des demi-folides de la Roudette, 39\$ Dimenfion des
 lignes courbes de toutes les Roulettes. Eertre de M. Dértonville à M.
 Huguens de Zulichem , | 402 - Dimenfion des lignes courbes de toutes les
 Roulettes, 403 \ De PEfcilier, des Triangles cylindriques, & de la fpirale
 autour d'un cône. Lettre de M. Dertonville a. M. de Sluze, Chanoine de la
 Cathédrale de Liege, 414 Pour la dimenfion & le centre de gravité de
 l'Efcilier, 416 Pour la dimenfion & le centre de gravité des triangles
 cylindriques , 419 Dimenfion d'un Jolide forme par le moyen d'une fpirale
 autour d'un cône, 422 fgalité des lignes pirale & parabolique. Lettre de M.
 Dettonville a M. 4. D. D.S., 426 Propriétés du cercle, 429 Propriétés de la
 fpirale, | 432 Propriétés de la parabole, 435\$. Pour

viÿ TABLE DES MATIERES. Pour inscrire une figure en la
parabole, 437 Pour circoncrire une figure à la parabole , 4338 Pour inscrire
une figure en la spirale, ibid. Pour circoncrire une figure à la spirale, 439
Rapports entre la parabole & la spirale , qui ont la condition supposée pour
être à $\hat{O} \hat{e} \hat{e} \hat{\$}$ UOJLUCIILÉ 5 Lettre de M. Huguens de Zulichem a M.
Dettonville , 453 Lettre de M. Sluzye à M. Pascal, - 456. Lettre de M. Sluze
a M. Pascal 458 Lettre de M. Leibnitz a M. Périer, 459 l Fin de la Table du
Tome cinquieme. OUVRAGES

Je, set se 1 de set és, À RET ALN Je m Er DE RATE, 2 Cu 174
 VE RÉ Ce ACUe UE . ne NUE AN UE x f E RER RE PRO FT
 OUVRAGES DE MATHÉMATIQUE DD nc @ AE TRAITÉ DU
 TRIANGLE ARITHMÉTIQUE. DÉFINITIONS. APPELLE Triangle
 Arithmétique , une figure dont la construction est telle. Je mene d'un point
 quelconque, G, deux lignes perpendiculaires , lune à l'autre, GF, G&, dans
 chacune desquelles je prends tant que je veux de parties égales & continues
 à commencer par G, que je nomme 1,2, 3, 4, &c.; & ces nombres font es
 exposants des divisions des lignes. Ensuite je joins les points de la première
 division TOME F. À fin

» TRAITÉ pu TRIANGLE fon qui font dans chacune des deux
 lignes, par une autre ligne qui forme un triangle dont elle eft la bafe. Je
 joins ainfi les deux points de la feconde divifion par une autre ligne, qui
 forme un fecond triangle dont elle eft $\frac{1}{4}$ bafe. Et joignant ainfi tous les
 points de divifion qui ont un même expofant, j'en forme autant de triangles
 & de bafes. Je mene par chacun des points à livifon, des lignes paralleles
 aux côtés, qui par leurs interfections forment de petits quarrés, que j'appelle
 cellules. . Et les cellules qui font entre deux paralleles qui vont de gauche à
 droite; s'appellent ce//ules d'un même rang parallele , comme les cellules
 G,c, 7, &c., ou v,ld, D. &c. Et celles qui font entre deux lignes qui vont . de
 haut en bas, s'appellent cellules d'un même rang perpendiculaire, comme
 les cellules G , ç, 4, D, &c., & celles-ci, «+, B, &c. Et celles qu'une même
 bafe traverse diagonalement ; font dites cellules d'une même bafe, comme
 celles qui fuivent, D,B,8,a,& celles-ci, 4,4,7. Les. cellules d'une même bafe
 également diftantes de fes extrémités, font dites réciproques ; comme
 celles-ci, E, R&B, 8; parce que l'expofant Qu rang_parallele de l'une eft le
 même que l'expofant

ÂARITHMÉTIQUE. + à 3 fant du rang perpendiculaire de
 l'autre, comme il paroît en cet exemple, où Æ est dans le fécond: rang
 perpendiculaire, & dans le quatrieme parallele; & fa réciproque R est dans
 le fecond. rang parallele , &-daäns le quatrieme perpendiculaire
 réciproquement.. Et il est bien facile de démontrer que celles qui ont
 leurs'expofants réciproquement pareils, font dans une même bafe, &
 également diftantes de fes extrémités. Il est auñli bien facile de démontrer
 que lexpofant du rang perpendiculaire de quelque cellule que ce foit, joint à
 l'expofant de fon rang parallele, furpaffe de l'unité. l'expofant de fa bafe.
 Par exemple, la cellule F-est dans le troifieme rang perpendiculaire, & dans
 le quatrieme parallele, & dans la fixieme bafe, &c les deux expofants des
 rangs 3 + 4 furpaflent de Punité l'expofant dé la bafe 6; ce qui vient de ce
 que les deux côtés du Triangle font divifés en un pareil nombre de parties ;
 mais cela est plutôt compris.que démontré. Cette remarque est de même
 nature, que. chaque bafe contient une cellule plus que là précédente , &
 chacune autant que fon expofant d'unités ; ainfi la feconde o « a deux
 cellules, la troifieme Ar en.a trois, &c Or les nombres qui fe mettent dans
 chaque cellule fe trouvent par cette. méthode. Le nombre de la premiere
 cellule qui est à l'anF A2 ole Le)

4 TRAITÉ Du TriANeLE gle droit est arbitraire; mais celui-là étant placé, tous les autres sont forcés, & pour cette raison il s'appelle Ze générateur du triangle; & chacun des autres est spécifié par cette seule règle: Le nombre de chaque cellule est égal à celui de la cellule qui la précède dans son rang perpendiculaire, plus à celui de la cellule qui la précède dans son rang parallèle, Ainsi la cellule F, c'est-à-dire, le nombre de la cellule F, égale la cellule ©, plus la cellule Æ; & vainfi des autres. D'où se tirent plusieurs conséquences. En voici les principales, où je considère les triangles, dont le générateur est l'unité; mais ce qui s'en dira conviendra à tous les autres. CoNSÉQUENCE PREMIERE. En tout Triangle Arithmétique, toutes les cellules du premier rang parallèle & du premier rang perpendiculaire sont pareilles à la génératrice. Car par la construction du Triangle, chaque cellule est égale à celle qui la précède dans son rang perpendiculaire, plus à celle qui la précède dans son rang parallèle ; or les cellules du premier rang parallèle n'ont aucunes cellules qui les précèdent dans leurs rangs perpendiculaires, ni celles du premier rang perpendiculaire dans leurs rangs parallèles; donc elles sont toutes égales entre elles, & partant au premier nombre générateur. Ainsi

ARITHMÉTIQUE. \$ \hat{U} ! / ? \setminus 2 / \$ Ainsi 9 égale G + zéro, c'est-à-dire, ç égale G. Ainsi 4 égale ç + zéro, c'est-à-dire, c. Ainsi « égale G + zéro, & 7 égale « += zéro. Et ainsi des autres. Conséquence II. En tout Triangle Arithmétique, chaque cellule est égale à la somme de toutes celles du rang parallèle précédent, comprises depuis son rang perpendiculaire jusqu'au premier inclusivement. Soit une cellule quelconque » : je dis qu'elle est égale à RH6-+4-+9, qui sont celles du rang parallèle supérieur depuis le rang perpendiculaire de « jusqu'au premier rang perpendiculaire. Cela est évident par la seule interprétation des cellules, par celles d'où elles sont formées. Car © égale R + C. -n p+ B +4 — Car À & @ sont 9 égaux entre eux par la précédente. Donc w égale RH + À 3 ConNsÉQUENCe

G TRAITÉ du TRIANGLE CONSEQUENCE III En tout
 Triangle Arithmétique, chaque cellule égale la somme de toutes celles du
 rang perpendiculaire précédent, comprises depuis son rang parallèle
 jusqu'au premier inclusivement. Soit une cellule quelconque C': je dis
 qu'elle est égale à B + 4, qui sont celles du rang perpendiculaire
 précédent, depuis le rang parallèle de la cellule C jusqu'au premier rang
 parallèle. Cela paraît, de même par la seule interprétation des cellules. Car
 C égale B + 6. HT ; — Car 7 égale « par la première. Donc C égale B + 4
 + 0. Conséquence IV, En tout Triangle Arithmétique, chaque cellule
 diminuée de l'unité, est égale à la somme de toutes celles qui sont comprises
 entre son rang parallèle & son rang perpendiculaire exclusivement. Soit une
 cellule quelconque £: je dis que — & Coale RHIL Lo + Hatr + o + G, qui sont
 tous les nombres compris entre le rang £o CB 4 & le rang £ S s
 exclusivement. Cela paraît de même par l'interprétation. Car

NS} ARITHMÉTIQUE. Car $x + R + 0$. outre $L 6 + d + B$
 $G + 3 + -A G$ Donc x égale $R ET + GES EG + p + G$. AVERTISSEMENT. J'ai
 dit dans, l'énonciation, chaque cellule diminuée de l'unité, parce que l'unité
 est le générateur; mais si c'étoit un autre nombre, il faudroit dire, chaque
 cellule diminuée du nombre générateur. ConNSeQuUuENcE V. En tout
 Triangle Arithmétique, chaque cellule est égale à [a réciproque. Car dans la
 seconde base 9 +, il est évident que les deux cellules réciproques o, s font
 égales entre elles & à G. Dans la troisième À, d, 7, il est visible de même
 que les réciproques #, 4 font égales entre elles & à G. Dans la quatrième, il
 est visible que les extrêmes D, à font encore égales entre elles & à G, Et
 celles d'entre-deux, B, 8, font visiblement égales, puisque B égale 44, & 8
 égale 4 + 7; À 4 OF

& TrArvris pue FriANGLE Or 7 + font égales à À + par ce qui est
 montré; donc, &c. Ainf l'on montrera dans toutes les autres bafes que les
 réciproques font égales, parce que les extrêmes font toujours pareilles à G,
 & que les autres s'interpréteront toujours par d'autres égales dans la bafe
 précédente qui font réciproques entre elles. Conséquence VI. En tout
 Triangle Arithmétique, un rang parallele & un perpendiculaire qui ont un
 même expofant ; font compofés de cellules toutes pareilles les unes aux
 autres. Car ils font compofés de cellules réciproques. Ainf le fecond rang
 perpendiculaire 4 BE MQ est entièrement pareil au fecond rang parallele
 eLERS N. Conséquence VII. En tout Triangle Arithmétique , la [omme des
 cellules de chaque bafe ca double de celles de la bafe précédente. Soit une
 bafe quelconque D B 6: : je dis que la fomme de fes cellules est double de la
 fomme des cellules de la pssene A 7. Car les extrêmes . . . D, à ésalent
 les extrêmes . . . 4, 7:

ARITHMÉTIQUE. 9 & chacune des autres . . : B, 6, LA en égalent deux de AUTRE PAIE ERA ES Pr Ad Re Donc D ++ B +0 égalent $24A + 24d + 27$. La même chose se démontre de même de toutes les autres.

Conséquence VIII. En tout Triangle Arithmétique, la somme des cellules de chaque base est un nombre de la progression double, qui commence par l'unité, dont l'exposant est le même que celui de la base. Car la première base est l'unité. La seconde est double de la première, donc elle est 2. La troisième est double de la seconde, donc elle est 4. Et ainsi à l'infini.

AVERTISSEMENT. Si le générateur n'étoit pas l'unité, mais un autre nombre, comme 3, la même chose feroit vraie; mais il ne faudroit pas prendre les nombres de la progression double à commencer par l'unité, savoir, 1,2,4,8,16,&c., mais ceux d'une autre progression double à commencer par le générateur 3, HVOIES GE T2) 241 48 ec.

Conséquence IX. En tout Triangle Arithmétique, chaque base diminuée

to TRAITÉ pu TRIANGLE nuce de l'unité est égale à la somme
 de toutes les précédentes. Car c'est une propriété de la progression double.
 AVERTISSEMENT. Si le générateur étoit autre que l'unité, il faudroit dire,
 chaque base diminuée du générateur. CONSÉQUENCE ÀX. En tout Triangle
 Arithmétique, la somme de tant de cellules continues qu'on voudra de la
 base, à commencer par une extrémité, est égale à autant de cellules de la
 base précédente, plus encore à autant, hormis une. Soit prise la somme de
 tant de cellules qu'on voudra de la base D à, par exemple, les trois
 premières, $D + B + 8$: je dis qu'elle est égale à la somme des trois
 premières de la base précédente $A + 7$, plus aux deux premières de la
 même base $A +$. Car $D + B + 8$ est égal à $A + 4$, LH Donc $D + B + 8$ est égal à $2A + 7$.
 DÉFINITION. J'appelle cellules de la dividende, celles que la ligne
 qui divise l'angle droit par la moitié, traverse diagonalement comme les
 cellules G, 4, C, p, &c. CONSÉQUENCE

ARITHMÉTIQUEEÉ, LE CoONSEÉQUENGE XII. Chaque cellule de la dividente est double de celle qui la précède dans son rang parallèle ou perpendiculaire. Soit une cellule de la dividente C: je dis qu'elle est double de &, & auili de B. Car C égale $84+B$, & 8 égale B, par la cinquième conséquence. AVERTISSEMENT. Toutes ces conséquences sont sur le sujet des égalités qui se rencontrent dans le Triangle Arithmétique. On va'en voir maintenant les proportions, dont la proposition suivante est le fondement. Conséquence, XII. En tout Triangle Arithmétique, deux cellules contigues étant dans une même base, la supérieure est à l'inférieure, comme. la multitude des cellules depuis la supérieure jusqu'au haut de la base, à la multitude de celles depuis l'inférieure jusqu'en bas inclusivement. Soient deux cellules contiguës quelconques d'une même base, E, C: je dis que E est à C comme 2 à 3 inférieure, | supérieure; | parce qu'il y a deux | parce qu'il y a trois cellules depuis A cellules. depuis. € jusqu'en bas, fa- jusqu'en haut, savoir, £; H, voir, C, R,u. Quoique cette proposition ait une infinité de cas, j'en

+ w. ki cé »Æ Le à à ti à Là “ Es u dé 4 ke E = Y2 TRAITÉE pu
TriAnNere jen donnerai une démonstration bien courte, en fuppofant deux
Lemmes. Le premier, qui eft évident de foi-même, que cette proportion fe
rencontre dans la feconde bafe; car il eft bien vifible que + eft à « comme 1
à 1. Le deuxieme, que fi cette proportion fe trouve dans une bafe
quelconque, elle fe trouvera néceffairement dans la bafe fuivante. D'où il fe
voit qu'elle eft néceffairement dans toutes les bafes : car elle eft dans la
feconde bafe per le premier Lemme; donc par le fecond elle eft dans [a
troifieme bafe, donc dans la quatrieme, & à l'infini. Il faut donc feulement
démontrer le fecond Lemme en cette forte. Si cette proportion {e rencontre
en une bafe quelconque, comme en la quatrieme D: , c'eft-à-dire, fi D eft à
B comme 1 à 3; & B à 9 comme 2 à 1; & 8 à à comme 3 à 1, &c. Je dis que
la même proportion fe trouvera dans la bafe fuivante, Hu, & que, par
exemple, E eft à C comme 2 à 3. Car D eft à B comme 1 à 3, par
l'hypothefe. Donc D + B eft à B comme 1 + 3 à 3. E a B'commel 4 : à3. De
même B eft à 8 comme 2 à 2, par l'hypothefe. Donc B + 8 à B, comme 2 +
2 à 2. D C à iBcomme 4 Mais B à Ecomme 3 2 4, comme il cf D

ARITHMÉTIQUE. 13 est montré. Donc par la proportion
troublée, C est à A comme 3 à 2. Ce qu'il falloit démontrer. On le montrera
de même dans tout le reste, puisque cette preuve n'est fondée que sur ce que
cette proportion se trouve dans la base précédente, & que chaque cellule est
égale à la précédente, plus à la supérieure, ce qui est vrai par-tout.

Conséquence XIII. En tout Triangle Arithmétique, deux cellules contigues
étant dans un même rang perpendiculaire ; l'inférieure est à la supérieure ,
comme l'exposant de la base de cette supérieure à l'exposant de son rang
parallèle. Soient deux cellules quelconques dans un même rang
ROCHOCATES F, C: je dis que F'est à C' comme l'exposant de la base de C, à l'exposant de C.
Car E est à C comme 2 à 3. Donc A+-C est à E comme 2 + 3 à 3. Fret
"a5C"comme: 23. Conséquence XIV. AEn tout Triangle Arithmétique ,
deux cellules conrignes étant dans un même rang parallèle, la plus grande
est à la précédente, comme l'exposant de la

14 TRAITÉE du TRIANGLE la base de cette précédente à, l'exposant. de son rang perpendiculaire. Soient deux cellules dans un même rang parallèle F, E: je dis que F est à E comme 2 à 1 exposant de l'exposant du rang la base de E, Car E est à C comme 2 à 3. Donc E + C est à E comme 2 + 3 à 2. a ————— la plus grande, | précédente, perpendiculaire de f. F est à FAE comme 2 à 2. CON STE QUE NeC ER XV, En tout Triangle Arithmétique, la somme des cellules d'un quelconque rang parallèle est à la dernière de ce rang, comme l'exposant du triangle est à l'exposant du rang. Soit un triangle quelconque, par exemple, le quatrième GDà : je dis que quelque rang qu'on y prenne, comme le second parallèle, la somme de ses cellules, savoir, 0 + 1, est à 8 comme 4 à 2. Car 9 + 18 égale C, & C est à 8 comme 42, par la treizième conséquence. Conséquence XVI. En tout Triangle Arithmétique, un quelconque rang parallèle est au rang inférieur, comme l'exposant du rang inférieur à la multitude de ces cellules. ÷ | “ Soit un triangle quelconque, par exemple, le cinquième,

ARITHMÉTIQUE. 16 é e é . cinquieme , u G H : je dis que quelque rang qu'on y prenne, par exemple, le troisieme, la somme de {es cellules est à la somme de celles du quatrieme, c'est-a-dire, 44 Bu CestaàD-LtEÆE, comme 4 exposant du rang quatrieme , à 2, qui est l'exposant de la multitude de ces cellules, car 11 en contient 2. Car $A + BC$ égale F, & $D + E$ égale M. Or F est à M comme 4 à 2, par la douzieme conséquence.

AVERTISSEMENT, On pourroit l'énoncer au lieu de cette sorte : chaque rang parallele est au rang inférieur, comme l'exposant du rang inférieur à l'exposant du triangle , moins l'exposant du rang supérieur. Car l'exposant d'un triangle moins l'exposant d'un de ces rangs, est toujours égal à la multitude des cellules du rang inférieur. Conséquence XVII En tout Triangle Arithmétique , quelque cellule que ce soit jointe à toutes celles de son rang perpendiculaire, est à la même cellule jointe à toutes celles de son rang parallele, comme les multitudes : des cellules prises dans chaque rang. Soit une cellule quelconque B : je dis que $B + d$ est à BL 4, comme 3 à 2. | Je dis 3, parce qu'il y a trois cellules ajoutées dans l'antécédent; & 2, parce qu'il y en a deux dans le conséquent. Car

16 TRAÏTÉ pu TRIANGLE Car $B + 40$ égale C , par la troisieme
 consequence ; & $B + 4$ égale E , par la feconde consequence. Or C est à E
 comme 3 à 2, par la douzieme consequence. | Conséquence XVIII. En tout
 Triangle Arithmétique , deux rangs paralleles également distants des
 extrémités , font entre eux comme la multitude de leurs cellules. Soit un
 triangle quelconque GHI , & deux de ses rangs également distants des
 extrémités, comme le fixieme PQ , & le fecond RS : je dis
 que la somme des cellules de l'un est à la somme des cellules de l'autre,
 comme la multitude des cellules de l'un est à la multitude des cellules de
 l'autre. Car par la fixieme consequence, le fecond rang parallele RS
 est le même que le fecond rang perpendiculaire BE MQ , duquel nous
 venons de démontrer cette proportion. AVERTISSEMENT. On peut
 l'énoncer ainsi : En tout Triangle Arithmétique, deux rangs paralleles, dont
 les exposants joints ensemble excèdent de l'unité l'exposant du Triangle,
 font entre eux comme leurs exposants réciproquement. Car ce n'est qu'une
 même chose que ce qui vient d'être énoncé. CONSÉQUENCE D. D TRES
 END em, mere

ARITHMÉTIQUE. 17 CoNsÉQUENCE DERNIERE. En tout Triangle Arithmétique, deux cellules contigues étant dans la dividende , l'inférieure est à la supérieure prise quatre fois , comme l'exposant de la base de cette supérieure, à un nombre plus grand de l'unité. Soient deux cellules de la dividende s, C: je dis que P est à 4 C comme \$, exposant de la base de C, est à 6: Car ? est double de », & C de 4; donc 4 8 éga-. lent 2 C. Donc 4 8 font à C comme 2 à 1. Or ? est à 4 C comme w à 4 8, ou en raison \ compolée: de la tie. 10 IC Ga par les conséquences précédentes, \$ à 3. #1 à 2 où 3 à 6: à Ge Donc ? est à 4 C comme s à 6. Ce qu'il falloit démontrer.

AVERTISSEMENT. On peut tirer de-là beaucoup d'autres proportions que je supprime, parce que chacun peut facilement les conclure, & que ceux qui voudront S'y attacher, en trouveront peut-être de' plus belles que celles que je pourrois donner. Je finis donc par le Problème suivant, qui fait l'accomplissement de ce Traité. TOME F. B PROBLÈME.

15 TrarrTé: Du: TrRIANGLE PROBLÈME. Étant donnés les expofants des rangs perpendiculaire & parallele d'une cellule, trouver le nombre de la cellule, fans fe fervir du Triangle Arithmétique © ' Soit, par exemple, propofé de trouver le nombre de la cellule Z du cinquieme rang perpendiculaire, & du troifieme rang parallele. Ayant pris tous les nombres qui précèdent l'expofant du perpendiculaire \$, favoir, 1,2, 3, 4; {oient pris autant de nombres naturels, à commencer par l'expofant du parallele 3, favoir, 3,4, 5, 6. Soient multipliés les premiers lun par l'autre, & foit le produit 24. Soient multipliés les autres lun par l'autre, & foit le produit 360, qui divisé par l'autre produit 24, donne pour quotient 15: ce quotient eft le nombre cherché. ... Car.£ eft à la premiere de' fa bafe 77, en raifon compofée de toutes les raifons des cellules d'entredeux, c'eft-à-dire, £ eft à #7, en raifon compofte GO Aie + fàp+pèàK+KaQ+Qi7 où par la 12 conféq..3 4 43. çSd2. Gaàx, Donc £ eft à 7" comme 3 en 4 en ç en 6, à 4 tn 3 en 2 en lt. Mais F eft l'unité; donc £ eft le quotient de la divifion du produit de 3 en 4 en s en 6, par le produit de 4 en 3 en 2 en 1: | AVERTISSEMENT,

ARITHMETIQUE. 19 AVERTISSEMENT. Si le générateur n'étoit pas l'unité, il eût fallu multiplier le quotient par le générateur. & RE 727 | 2 0 me DIVERS USAGES DU TRIANGLE ARITHMÉTIQUE, Dont le générateur est l'unité. PRÈS avoir donné les proportions qui se rencontrent entre les cellules & les rangs des Triangles Arithmétiques, je parle à divers usages de ceux dont le générateur est l'unité; c'est ce qu'on verra dans les Traités suivants. Mais j'en laisse bien plus que je n'en donne; c'est une chose étrange combien il est fertile en propriétés ! Chacun peut s'y exercer; j'avertis seulement ici, que dans toute la suite, je n'entends parler que des Triangles Arithmétiques, dont le générateur est l'unité. B 2 US AGE

20 UsAce pu TRIANGLE ÂARITHMÉTIQUE USAGE DU
 TRIANGLE ARITHMÉTIQUE + POUR LES ORDRES NUMÉRIQUES.
 QD" a considéré dans l'Arithmétique les nombres des différentes
 prosreflions; où à aufh considère ceux des différentes puiffances & des difa
 férents degrés; mais on n'a pas, ce me femble, | aflez examiné ceux dont je
 parle, quoiqu'ils foient d'un très-grand ufage : & même ils n'ont pas de
 nom; ainfi j'ai été obligé de leur en donner: & parce que ceux de
 progreffion, de degré & de puiffance font déjà employés, je me fers de celui
 d'ordres. J'appelle donc Nombres du premier ordre, les fimples unités, LEE
 RTE OU J'appelle Nombres du fecond ordre, les naturels qui fe forment par
 l'addition des unités, 1, 2, 3, 4, 5 &c J'appelle Nombres du troifieme
 ordre, ceux qui fe forment par l'addition des naturels, qu'on appelle
 trianpgulaires , IR ASC TON CCC: C'est-à-dire, que le fecond des
 triangulaires, favoir, 3, égale la fomme des deux premiers naturels, qui font
 1, 2; ainfi le troifieme triangulaire

POUR LES ORDRES NUMÉRIQUES. 21 laire 6 égale la fomme
des trois premiers naturels, IS ST: J'appelle Nombres du quatrieme ordre ,
ceux: qui fe forment par l'addition des triangulaires, qu'on appelle
pyramidaux, 1,74 ,210%, 20H00: J'appelle Nombres du cinquieme ordre ,
ceux qui fe forment par l'addition des précédents, auxquels on na pas donné
de nom exprès, & qu'on poutroit appeller criangulo-triangulaires : 157105
ENST 20 CA J'appelle Nombres du fixieme ordre, ceux qui fe forment par
l'addition des précédents : 15 16 LIN 0 UL26 22 ARC: Et ainf à l'infini, 1,
7, 28, 84, &c. L18,2365 1203 6e. Or fi on fait une table de tous les ordres
des nombres, où l'on marque à côte les expofants des ordres, & au-deflus les
racines, en cette forte : Racines. Le RC HER TRE AIME ES OT Ci Hnités
re Ordre tr | SET IT AMIE NTNEEC. Naturels Ordre ter 12 AE Ne TOC
Franvul Ordre 33 Na EL 10) AS RE. Pyramid, Ordre 4| 1 1 4 10 20 365:
&c. On trouvera cette Table pareille au Triangle Arithmérique ; & le
premier ordre des nomB 3 bres

22 UsAcE pu TRIANGLE ARITHMÉTIQUE bres fera le même que le premier rang parallele du Triangle; le fecond ordre des nombres fera le même que le fecond rang parallele: & ainfi à l'infini. Car dans le Triangle Arithmétique le premier rang eft tout d'unités, & le premier ordre des nombres eft de même tout d'unités. Ainfi dans le Triangle Arithmétique, chaque cellule, comme la cellule F, égale $C+B+A$, c'eft-à-dire, qu'elle égale fa fupérieure, plus toutes celles qui précèdent cette fupérieure dans fon rang parallele, comme il à été prouvé dans la deuxieme conféquence du Traité de ce Triangle : & la même chofe fe trouve dans chacun des ordres des nombres; car, par exemple, le troifieme des pyramidaux 10 égale les trois premiers des triangulaires $1+3+6$, puifqu'il eft formé par leur addition. D'où il fe voit manifeftement, que les rangs paraileles du triangle ne font autre chofe que les ordres des nombres, & que les expofants des rangs paralleles font les mêmes que les expofants des ordres, & que les expofants des rangs perpendiculaires font les mêmes que les racines : & ainfi le nombre, par exemple, 21, qui dans le Triangle Arithmérique fe trouve dans le troifieme rang parallele , & dans le fixieme rang perpendiculaire, étant confidéré entre les ordres numériques, il fera du troifieme ordre, & le fixieme de fon ordre, ou de la fixieme racine. Ce

POUR LES ORDRES NUMÉRIQUES. | 23 Ce qui fait connoître
 que tout ce qui a été dit des rangs & des cellules du Triangle Arithmétique,
 convient exactement aux ordres des nombres, & que les mêmes évalués &
 les mêmes proportions qui ont été remarquées aux uns, se trouveront aux
 autres; Il ne faudra seulement que changer les énonciations, en
 substituant les termes qui conviennent aux ordres numériques, comme ceux
 de racine & d'ordre, à ceux qui convenoient au Triangle Arithmétique,
 comme de rang parallèle & perpendiculaire. J'en donnerai un petit Traité à
 part, où quelques exemples qui y sont rapportés, feront aisément
 appercevoir tous les autres. L'INT MPE, = Ed RU "5 lue PE Le USAGE
 DU TRIANGLE ARITHMÉTIQUE POUR LES COMBINAISONS. Le mot
 de combinaison a été pris en plusieurs sens différents; de sorte que pour ôter
 l'équivoque, je suis obligé de dire comment je l'entends, Lorsque de
 plusieurs choses on donne le choix d'un certain nombre, toutes les
 manières d'en prendre autant qu'il est permis entre toutes celles qui sont
 présentées, s'appellent ici les différentes combinaisons, : B 4 Par

24 UsAce pu TRrIANGLE ARITHMÉTIQUE Par exemple, f. de quatre chofes exprimées par ces quatre lettres, 4, B, C, D, on permet d'en prendre, par exemple, deux quelconques; toutes les manieres d'en prendre deux différentes dans les quatre qui font propofées, s'appellent combinaifons. Ainfi on trouvera par expérience, qu'il y a fix manieres différentes d'en choifir deux dans quatre; car on peut prendre 4 & B, ou 4&C, ou 4&D, ou B&C, ou B & D, ou C & D. Je ne compte pas 4 & À pour une des manieres d'en prendre deux; car ce ne font pas des chofes différentes, ce n'en eft qu'une répétée. Ainfi je ne compte pas 4 & B, & puis B & 4 pour deux manieres difflérentes; car on ne prend en l'une & en l'autre maniere que les deux mêmes chofes, mais d'un ordre différent feulement, & je ne prends point garde à l'ordre; de forte que je pouvois m'expliquer en un mot à ceux qui ont accoutumé de confidérer les combinaifons, en difant fimplement que je parle féulement des combinaifons qui fe font fans changer l'ordre. On trouvera de même par expérience, qu'il y a quatre manieres de prendre trois chofes dans quatre; car on peut prendre 4BC, ou 4 BD, ou ACD, ou BCD. Enfin on trouvera qu'on ne peut en prendre quatre dans quatre quen;une maniere, favoir, BCD. Je SE ST

POUR LES COMBINAISONS. 2 Je parlerai donc en ces termes :
 1 dans 4 se combine 4 fois. \ 2 dans 4 se combine 6 fois. 3 dans 4 se
 combine 4 fois. 4 dans 4 se combine 1x fois. Ou ainsi : La multitude des
 combinaisons de 1 dans 4 est 4° La multitude des combinaisons de 2 dans 4
 est 6. La multitude des combinaisons de 3 dans 4 est 4. La multitude des
 combinaisons de 4 dans 4 est 1. Mais la somme de toutes les combinaisons,
 en général, qu'on peut faire dans 4, est 15, parce que la multitude des
 combinaisons de 1 dans 4, de 2 dans 4, de 3 dans 4, & de 4 dans 4 étant
 jointes ensemble, font 15. Ensuite de cette explication, je donnerai ces
 conséquences en forme de Lemmes. LEMME PREMIER. Un nombre ne se
 combine point dans un plus petit, par exemple, 4 ne se combine point dans
 2. LEMME II. r dans 1 se combine 1 fois. 2 dans 2 se combine 1: fois. 3
 dans 3 se combine 1 fois. Et généralement un nombre quelconque se
 combine une fois seulement dans son égal. LEMME

26 UsaAcr pu TRIANGLE AÂRITHMÉTIQUE L'E MM \E TIT.

1 dans 1 fe combine 1 fois. 1 dans 2 fe combine 2 fois. 1 dans 3 fe combine 3 fois. Et généralement l'unité fe combine dans quelque nombre que ce foit autant de fois qu'il contient d'unités. LEMME IP. S'il y a quatre nombres quelconques, le premier tel qu'on voudra, le fecond plus grand de l'unité, le troifieme tel qu'on voudra', pourvu qu'il ne foit pas moindre que le fecond , le quatrieme plus grand de l'unité que le troifieme: la multitude des combinaifons du premier dans le troifieme, jointe à la multitude des combinaifons du fecond dans le troifieme , écale la multitude des combinaifons du fecond dans le quatrieme. Soient quatre nombres tels que j'ai dit: Le premier tel qu'on voudra, par exemple, ; r. Le fecond plus grand de l'unité, favoir, 2 Le troifieme tel qu'on voudra, pourvu qu'il ne foit pas moindre que le fecond, par exemple, 3. Le quaitrieme plus grand de l'unité, favoir, 4e Je dis que la multitude des combinaifons de 1 dans 3, plus la multitude des combinaifons de 2 dans 3, égale la multitude des combinaifons de 2 . dans 4. Soient

POUR LES COMBINAISONS. 27 Soient trois lettres quelconques, B, C, D. Soient les mêmes trois lettres, & une de plus, A Erbs CD. Prenons, suivant la proposition, toutes les combinaisons d'une lettre dans les trois, B; C, D: il y en aura trois, savoir, B, C, D. Prenons dans les mêmes trois lettres toutes les combinaisons de deux, il y en aura trois, savoir, BC, BD, CD. Prenons enfin dans les quatre lettres A, B, C, D toutes les combinaisons de deux, il y en aura six, savoir, AB, AC, AD, BC, BD, CD. Il faut démontrer que la multitude des combinaisons de 1 dans 3 & celles de 2 dans 3, égalent celles de 2 dans 4. Cela est aisé; car les combinaisons de 2 dans 4 sont formées par les combinaisons de 1 dans 3, & par celles de 2 dans 3. Pour le faire voir, il faut remarquer qu'entre les combinaisons de 2 dans 4, savoir, AB, AC, AD, BC, BD, CD, il y en a où la lettre A est employée, & d'autres où elle ne l'est pas. Celles où elle n'est pas employée sont, BC, BD, CD, qui par conséquent sont formées de deux de ces trois lettres, B, C, D; donc ce sont des combinaisons de 2 dans ces trois, B, C, D. Donc les combinaisons de 2 dans ces trois lettres, 3, B, C, D, sont portion des combinaisons de 2 dans ces quatre lettres,

28 UsAce Du TRIANGLE ARITHMÉTIQUE lettres, 4, B, C, D, puisqu'elles forment celles où À n'est pas employée. Maintenant si des combinaisons de 2 dans 4 où 4 est employé, savoir, 4B, AC, AD, on ôte |' 4, il restera une lettre seulement de ces trois, B, C, D, savoir, B, C, D, qui sont précisément les combinaisons d'une lettre dans les trois, B, C, D. Donc si aux combinaisons d'une lettre dans les trois, B, C, D, on ajoute à chacune la lettre À, & qu'ainsi on ait 4 B, AC, AD, on formera les combinaisons de 2 dans 4, où 4 est employé; donc les combinaisons de 1 dans 3 sont portion des combinaisons de 2 dans 4. D'où il se voit que les combinaisons de 2 dans 4 sont formées par les combinaisons de 2 dans 3, & de 1 dans 3 & partant que la multitude des combinaisons de 2 dans 4 égale celle de 2 dans 3, & de 1 dans 3. On montrera la même chose de tous les autres exemples, comme : La multitude des combinaisons de 29 dans 40, & la multitude des combinaisons de 30 dans 40, évalent. [a multitude des combinaisons de 30 dans 41. Ainsi la multitude des combinaisons de 14 dans 55, & la multitude des combinaisons de 16 dans 55, égalent la multitude des combinaisons de 16 dans 56. Et ainsi à l'infini. Ce qu'il falloit démontrer. PROPOSITION

POUR LES COMBINAISONS. 19 PROPOSITION PREMIERE.

En tout Triangle Arithmétique, la somme des cellules d'un rang parallèle quelconque égale la multitude des combinaisons de l'exposant du rang dans l'exposant du Triangle. Soit un triangle quelconque, par exemple, le quatrième GD à : je dis que la somme des cellules d'un rang parallèle quelconque, par exemple, du second, o +4 1-8, égale la somme des combinaisons de ce nombre 2, qui est l'exposant de ce second rang, dans ce nombre 4, qui est l'exposant de ce triangle. Ainsi la somme des cellules du cinquième rang du huitième triangle égale la somme des combinaisons de 5 dans 8, &c. La démonstration en fera courte, quoiqu'il y ait une infinité de cas, par le moyen de ces deux Lemmes. | Le premier, qui est évident de lui-même, que dans le premier triangle cette égalité se trouve, puisque la somme des cellules de son unique rang, soit, ou l'unité, égale la somme des combinaisons de 1, Exposant du rang, dans 1, exposant du Triangle. Le deuxième, que s'il se trouve un Triangle Arithmétique dans lequel cette proportion se rencontre, C'est-à-dire, dans lequel quelque rang que l'on prenne, il arrive que la somme des cellules soit égale à la multitude des combinaisons de l'exposant

30 Usacr pu TRIANGLE ARITHMÉTIQUE pofant du rang dans l'expofant du Triangle : je dis que le Triangle fuivanc aura la même propriété. D'où il s'enfuit que tous les Triangles Arithmétiques ont cette égalité; car elle fe trouve dans le premier Triangle par le premier Lemme, & même elle eft encore évidente dans le fecond; donc par le fecond Lemme, le fuivant laura de même, & partant le fuivant encore ; & ainfi à l'infini. I] faut donc feulement démontrer le fecond Lemme. Soit un triangle quelconque, par exemple, le troifieme, dans lequel on fuppofe que cette égalité fe trouve, c'eft-à-dire, que la fomme des cellules du premier rang $G + 6 + 7$ égale la multitude des combinaifons de 1 dans 3; & que la fomme des cellules du deuxieme rang $9 + 4$ égale les combinaifons de 2 dans 3; & que la fomme des cellules du troifieme rang 4 égale les combinaifons de 3 dans 3 : je dis que le quatrième Triangle aura la même-égalité, & que, par exemple, la fomme des cellules du fecond rang $e + 4 + 0$ égale la multitude des combinaifons de 2 dans 4. Car 90 égale $9 + \hat{O} + GHetr$ ou la multitude $+$ } ou la multitude Par l'hypothefe des combinaif, des combinaif. de 2 dans 3, de 1 dans 3. Qu la multitude des combinaifons Par le quatrieme Lemme de 2 dans 4, On

POUR LES COMBINAISONS. 31 On le montrera de même de tous les autres. Ce qu'il falloit démontrer. Proposition II. . ' Le nombre. de quelque cellule que ce soit, égale la multitude des combinaisons d'un nombre moindre de l'unité que l'exposant de son rang parallèle, dans un nombre moindre de l'unité que l'exposant de la base. Soit une cellule quelconque, F, dans le quatrième rang parallèle & dans la sixième base : je dis qu'elle égale la multitude des combinaisons de 3 dans 6, moindres de l'unité que 4 & 6 : car elle égale les cellules 4+ B+C. Donc par la précédente, &c. PROBLÈME II Proposition III Etant proposés deux nombres, trouver combien de . fois l'un se combine dans l'autre , par le Triangle Arithmétique ? Soient les nombres proposés 4, 6, il faut trouver combien 4 se combine dans 6. PREMIER MOYEN. Soit prise la somme des cellules du quatrième rang du sixième triangle : elle satisfera à la question. SECOND MOYEN. Soit prise la cinquième cellule de la septième base, parce

32 UsAce pu TRIANGLE ARITHMÉTIQUE parce que ces nombres \$, 7 excèdent de l'unité les donnés 4, 6 : fon nombre eft celui qu'on demande. CONCLUSION. Par le rapport qu'il y a des cellules & des rahgs du Triangle Arithmétique aux combinaifons, Il eft aifé de voir que tout ce qui a été prouvé des uns convient aux autres fuivant leur maniere; c'eft ce que je montrerai en peu de difcours. dans un petit Traité que j'ai fait des Combinaifons. USAGE DU TRIANGLE ARITHMÉTIQUE, Pour déterminer les partis qu'on doit faire entre deux Joueurs qui jouent en pluſieurs parties. Our entendre les regles des partis, la premiere choſe qu'il faut confidérer, eft que l'argent que les Joueurs ont mis au jeu ne leur appartient plus, car ils en ont quitté la propreté; mais ils ont reçu en revanche le droit d'attendre ce que k hafard peut leur en donner, fuivant les conditions dont ils font convenus d'abord. : Il : (y : % : La 98 1! > 14 a ! (| À . À E !l r À: L, VEN | 14 us | | ù ! | } A n 1 VE A l ù PIE 'à VEN El ME ' a 1 | na! a ul all M | à | | À | : il ' 4 | 1 Et UN 0 | Ï in # Li ' 1h HPINL : | | | 4 | l'en, li AE À , | 4 # nn | iv (NU AE [] pr OR ET AN iæ E s! \ | Fe (| FR EE \ 45 | fl: “ vis | à nl 7 A! À 0e LI! & ei | 4% Lun + AH | r, fl é : | CRT ; IN | eu if | Ce | » L: s | Ve 2e É RIM UN pe 4 AT OITIRE RL À « Di si 4 “À L w4 eg (l Ar 1fl IR A4 | Al | Al | #4 } NET — eme, Mais comme c'eft une loi volontaire, ils peuvent la rompre de gré à gré, & ainſi en quelque tele FES ET « : mr SE z

POUR LES PARTIS DU JEU. 33 terme que le jeu se trouve, ils peuvent le quitter, & au contraire de ce qu'ils ont fait en y entrant, renoncer à l'attente du hasard, & rentrer chacun en la propriété de quelque chose; & en ce cas, le règlement de ce qui doit leur appartenir doit être tellement proportionné à ce qu'ils avoient droit d'espérer de la fortune, que chacun d'eux trouve entièrement égal de prendre ce qu'on lui assigne, ou de continuer l'aventure du jeu : & cette juste distribution s'appelle *Le parti*. Le premier principe qui fait connoître de quelle sorte on doit faire les partis, est celui-ci. Si un des Joueurs se trouve en telle condition, que, quoi qu'il arrive, une certaine somme doit lui appartenir en cas de perte & de gain, sans que le hasard puisse la lui ôter; il ne doit en faire aucun parti, mais la prendre entière comme assignée, parce que le parti devant être proportionné au hasard, puisqu'il n'y a nul hasard de perdre, il doit tout retirer sans parti. Le second est celui-ci. Si deux Joueurs se trouvent en telle condition, que si l'un gagne, il lui appartiendra une certaine somme, & s'il perd, elle appartiendra à l'autre; si le jeu est de pur hasard, & qu'il y ait autant de hasards pour l'un que pour l'autre, & par conséquent non plus de raison de gagner pour l'un que pour l'autre, s'ils veulent se - {parer sans jouer, & prendre ce qui leur appartient

2 ToME F. C tient

34 UsaAce pu TriIANGrE ARITHMÉTIQUE tient légitimement, le parti est qu'ils fèparent la fomme qui est au hafard par la moitié, & que chacun prenne la fienne. COROLLAIRE PREMIER. Si deux Joueurs jouent à un jeu de pur hafard, à condition que si le premier gagne, il lui reviendra une certaine fomme, & s'il perd, il lui en reviendra une moindre ; s'ils veulent se [éparer fans jouer, & prendre chacun ce qui leur appartient : le parti est, que le premier prenne ce qui lui revient en cas de perte, & de plus la moitié de l'excès, dont ce qui lui reviendrait en cas de gain, surpasse ce qui lui revient en cas de perte. Par exemple, si deux Joueurs jouent à condition que si le premier gagne, il emportera 8 pistoles, & s'il perd, il en emportera 2 : je dis que le parti est qu'il prenne ces 2, plus la moitié de l'excès de 8 sur 2, c'est-à-dire, plus 3, car 8 surpasse 2 de 6, dont la moitié est 3. Car par l'hypothese, s'il gagne, il emporte 8, c'est-à-dire, $6 + 2$, & s'il perd, il emporte 2 ; donc ces 2 lui appartiennent en cas de perte & de gain : & par conséquent par le premier principe, il ne doit en faire aucun parti, mais les prendre entieres. Mais pour les G autres, elles dépendent du hafard ; de sorte que s'il lui est favorable, il les gagnera, sinon elles reviendront à l'autre, & par l'hypothese,

POUR LES PARTIS DU Jeu. 3 Phypothefe , il n'y à pas plus de raifon qu'elles reviennent à l'un qu'à l'autre : donc le parti eft qu'ils les féparent par la moitié, & que chacun prenne la fienne, qui eft ce que j'avois propofe. Donc pour dire la même chofe en d'autres termes, Il lui appartient le cas de la perte, plus la moitié de la différence des cas de perte & de gain. Et partant fi en cas de perte, il lui appartient 4, & en cas de gain $4 + B$, le parti eft qu'il prenne $A + \frac{1}{2}B$. CoROLLAIRE 1j Si deux Joueurs font en la même condition que nous venons de dire : je dis que le parti peut fe faire de cette façon, qui revient au même, que l'on affemble les deux fommes de gain & de perte, & que le premier prenne la moitié de cette fomme ; c'eft-à-dire, qu'on joigne 2 avec 8,6 ce fera 10, dont la moitié \$ appartiendra au premier. Car la moitié de la fomme de deux nombres eft toujours la même que le moindre plus la moitié de leur différence. Et cela fe démontre ainfi. Soit A ce qui revient en cas de perte, & $4+B$ ce qui revient en cas de gain: je dis que le parti fe fait en affemblant ces deux nombres, qui font $A + 4+B$, & en donnant la moitié au premier, qui eft $\frac{1}{2}(A + 4+B)$. Car cette fomme égale $\frac{1}{2}A + 2 + \frac{1}{2}B$, qui a été prouvée faire le parti juft. Ç 2 Ces

36 UÜsace pu TriANGtr ARITHMÉTIQUE Ces fondements étant pofés, nous pañlerons atfément à déterminer le parti entre deux Joueurs qui jouent en tant de parties qu'on voudra en quelque état qu'ils fe trouvent, c'eft-à-dire, quel parti Il faut faire quand ils jouent en deux parties, & que le premier en a une à point, ou qu'ils jouent en trois, & que le premier en a une à point, où quand il en a deux à point, ou quand il en a deux à une. Et généralement en quelque nombre de parties qu'ils jouent, & en quelque gain de parties qu'ils foient, & l'un, & l'autre. Sur quoi la premiere chofe qu'il faut remarquer, eft que deux Joueurs qui jouent en deux parties, dont le premier en a une à point, font en même condition que deux autres qui jouent en trois parties, dont le premier en a deux, & l'autre une: car Il y a cela de commun, que pour achever; il ne mañque qu'une partie au premier, & deux à l'autre, & c'elt en cela que confifte la différence des avantages, & qui doit régler les partis; de forte qu'il ne faut proprement avoir éoard qu'au nombre des parties qui reftent à gagner à l'un & à l'autre, & non pas au nombre de celles qu'ils ont gagnées, puifque, comme nous avons déjà dit, deux Joueurs fe trouvent en même étar, quand jouant en deux parties, l'un en a une à point, que deux qüi-jotant en douze parties, l'un en a onze à dix. | sc | Il

::; POUR LES PARTIS DU JEU. 37 Il faut donc proposer la
 question en cette sorte. Étant proposés deux Joueurs, & chacun d'eux 'l
 manque un certain nombre de parties pour achever, faire le parti? J'en
 donnerai ici la méthode, que je pourfuivrai seulement en deux ou trois
 exemples, qui feront si aisés à continuer, qu'il ne fera pas nécessaire d'en
 donner davantage. Pour faire la chose générale sans rien omettre, je la
 prendrai par le premier exemple, qu'il est peut-être mal à propos de toucher;
 parce qu'il est trop clair; je le fais pourtant pour commencer par le
 commencement : c'est celui-ci. PREMIER CAS. Si à un des Joueurs il ne
 manque aucune partie, & à l'autre quelques-unes, la somme entière
 appartient au premier; car il l'a gagnée, puisqu'il lui manque aucune des
 parties dans lesquelles il devoit la gagner. SECOND. Si à un des
 Joueurs il manque une partie, & à l'autre une, le parti est qu'ils fassent
 l'argent par la moitié, & que chacun prenne la sienne : cela est évident par
 le second principe. Il en est de même s'il manque deux parties à l'un, &
 deux à l'autre; & de même quelque nombre de parties qui manque à l'un,
 si en manque autant à l'autre. C 3 TROISIEME

38 UsAcE pu TRIANGLE ARITHMÉTIQUE TROISIEME CAS.

Si à un des Joueurs il manque une partie, & à l'autre deux, Voici l'art de trouver le parti. Confidérons ce qui appartiendrait au premier Joueur (à qui il ne manque qu'une partie) en cas de gain de la partie qu'ils vont jouer, & puis ce qui lui appartiendrait en cas de perte. Il est visible que si celui à qui il ne manque qu'une partie, gagne cette partie qui va se jouer, il ne lui en manquera plus; donc tout lui appartiendra par le premier cas. Mais, au contraire, si celui à qui il manque deux parties, gagne celle qu'ils vont jouer, il ne lui en manquera plus qu'une; donc ils feront en telle condition, qu'il en manquera une à l'un, & une à l'autre. Donc ils doivent partager l'argent par la moitié, par le,deuxieme cas. Donc si le premier gagne cette partie qui va se jouer, il lui appartient tout, & s'il la perd, il lui appartient la moitié; donc en cas qu'ils veuillent se féparer sans jouer cette partie, il lui appartient + par le fecond Corollaire. Et si on veut proposer un exemple de la somme qu'ils jouent, la chose fera bien plus claire. Posons que ce soit 8 pistoles; donc le premier en cas de gain, doit avoir le tout, qui est 8 pistoles, & en cas de perte, il doit avoir la moitié, qui est 4 donc il lui appartient en cas de parti la

POUR LES PARTIS Du Jeu. 39 la moitié de $8 + 4$, c'est-à-dire, 6 piftoles de 8; car $8 - 4$ font 12, dont la moitié est 6. QUATRIEME CAS. Si à un des Joueurs il manque une partie, & à l'autre trois, le parti se trouvera de même, en examinant ce qui appartient au premier en cas de gain & de perte. Si le premier gagne, il aura toutes les parties, & partant tout l'argent, qui est, par exemple, 8. Si le premier perd, il ne faudra plus que deux parties à l'autre à qui il en falloit trois. Donc ils feront en tel état, qu'il faudra une partie au premier, & deux à l'autre; & partant par le cas précédent, il appartiendra 6 piftoles au premier. Donc en cas de gain, il lui en faut 8, & en cas de perte 6; donc en cas de parti, il lui appartient la moitié de ces deux sommes, savoir, 7; car $6 + 8$ font 14, dont la moitié est 7. CINQUIEME CAS. Si à un des Joueurs il manque une partie, & à l'autre quatre, la chose est de même. Le premier en cas de gain, gagne tout, qui est, par exemple, 8; & en cas de perte, il manque une partie au premier, & trois à l'autre; donc il lui appartient 7 piftoles de 8; donc en cas de parti, il lui appartient la moitié de 8, plus la moitié de 7, c'est-à-dire, $7 + \frac{1}{2}$. : C 4

SIXIEME

40 UsAce pu TRIANGLE ARITHMÉTIQUE SIXIEME CAS.

Aĩnfi, s'il manque une partie à l'un, & cinq à l'autre; & à l'infini.

SEPTIEME CAS. De même s'il manque deux parties au premier, & trois à l'autre; car il faut toujours examiner les. cas de gain & de perte. Si le premier gagne, il lui manquera une partie, & à l'autre trois; donc par le quatrieme cas 11 lui appartient 7 de 8. Si le premier perd, il [ui manquera deux parties, & à l'autre deux; donc par le deuxieme cas il appartient à chacun la moitié, qui est 4; donc en cas de gain, le premier en aura 7, & en cas de perte, 11. en aura 4; donc en cas de parti, 11 aura la moitié de ces deux enfemble, favoir, 5. Par cette méthode on fera les partis sur toutes fortes de conditions, en prenant toujours ce qui appartient en cas de gain & ce qui appartient en cas de perte, & assignant pour le cas de parti la moitié de ces deux sommes. Voilà une des manieres de faire les payris. Il y en a deux autres, l'une par le Triangle Arithmétique, & l'autre par les Combinaifons.

Méthode

'POUR LES PARTIS DU Jeu. 41 Méthode pour faire les partis
 entre deux Joueurs qui jouent en plusieurs parties, par le moyen du Triangle
 Arithmétique. Avant que de donner cette méthode, il faut faire ce Lemme.
 L'ÉRUMSMEE Si deux Joueurs jouent à un jeu de pur hafard, à condition
 que ft le premier pague, il lui appartiendra une portion quelconque fur la
 fomme qu'ils jouent, exprimée par une fralion , & que s'il perd, il lui
 appartiendra une moindre portion fur la même fomme, exprimée par une
 autre fraëtion : s'ils veulent se féparer fans jouer, la condition du parti se
 trouvera en cette, forte. Soient réduites les deux fraëlions à même
 dénomination, ff elles ny fonce pas ; Joit prie une fraëlion dont le
 numérateur [oi la fomme des deux numérateurs, & le dénominateur double
 des précédents : cette frailion exprime la portion qui appartient au premier
 [ur la fomme qui eft au jeu. Par exemple, qu'en cas de gain, il appartienne
 les + de la fomme qui eft au jeu, & qu'en cas de perte, il lui en appartienne
 +: je dis que ce qui lui appartient en cas de parti, se trouvera en prenant la
 fomme des numérateurs, qui eft 4, & le double du dénominateur, qui eft 10,
 dont on fait La fraction $\frac{4}{10}$ Car

42 UsAcEe pu TRIANGLE ARITHMÉTIQUE Car par ce qui a été démontré au deuxieme Corollaire, il faHoit affempler les cas de gain & de perte, & en prendre la moitié; or la fomme des deux fractions $\frac{A}{B} + \frac{C}{D}$ est $\frac{AD + CB}{BD}$, qui fe fait par Faddition des numérateurs, & fa moitié fe trouve en doublant le déniominateur, & ainf l'on a

POUR LES PARTIS DU JEU. 43 PROBLÈME 1. PrRorosITioN

II. Étant propoés deux Joueurs, à chacun defquels il manque un certain nombre de parties pour acheVer, trouver par le Triangle Arithmétique le parti qu'il faut faire (s'ils veulent fe féparer fans jouer) eu égard aux parties qui manquent à chacun ® Soit prife dans le Triangle la bafe dans laquelle il y à autant de cellules qu'il manque de parties aux deux enfemble : enfuite foient prises dans cette bafe autant de cellules continues à commencer par la premiere, qu'il manque de parties au premier Joueur; & qu'on prenne la fomme de leurs nombres. Donc il refte autant de cellules, qu'il manque de parties à l'autre. Qu'on prenne encore la fomme de leurs nombres : ces fommes font l'une à l'autre comme les avantages des Joueurs réciproquement : de forte que fi la fomme qu'ils jouent eft égale à la fomme des nombres de toutes les cellules de la bafe, il en appartiendra à chacun ce qui eft contenu en autant de cellules qu'il manque de parties à l'autre; & s'ils jouent une autre fomme, il leur en appartiendra à proportion. Par exemple, qu'il y ait deux Joueurs, au premier defquels il manque deux parties, & à l'autre quatre : il faut trouver le parti. Soient ajoutés ces deux nombres 2 & 4, & foit leur fomme 6; foit prife La fixieme bafe du Triangle Arithmétique

44 Usacr pu TrrAncre ARITHMÉTIQUE Arithmétique P { , dans laquelle il y a par conséquent fix cellules F5 Î, F, Ds S, Le Soient prifes autant de cellules À commencer par la premiere P, qu'il manque de parties au ee Joueur, c'est-à-dire, is deux premieres P, M; donc Il en refte autant que de parties à l'autre, c'est-a-dire, quame, F, », 8, 4: je dis que l'avantage du premier est à l'avantage du fecond , comme $F+0 + S +4$ aP+M,c ef. dire , que fi la fomme qu fe joue est égaleaP. + M4+F+04S +4, il en appartient à celui à qui il Res deux parties la fomme .des quatre Ar D 4 St otF;e& celui qu Il manque quatre parties, la fomme des deux cellules PL M : & s'ils jouent une autre fomme, il Jeur en appartient à proportion. ... Et pour le dire généralement, quelque fomme qu'ils jouent, Il en appartient au premier uue portion exprimée par cette fraction . . + +. + FLo+S + PME PAR la fomme des quatre cellules de l'autre, & le a nominateut la fomme de toutes les cellules, & à dont le numérateur est Fautre üne portion exprimée par cette fraétion, : Dé La à 5 = — dont le numérateur est POMPES SSEES Ja fomme des deux cellules de l'autre, & le dénominateur la même fomine de toutes les cellules. Et ge

POUR Les PARTIS du JEU 4 Et s'il manque une partie à l'un, & cinq à l'autre, il appartient au premier la somme des cinq premières cellules $P+M4+F404S$, & à l'autre la somme de la cellule #. | Et s'il, manque fix parties à l'un, & deux à l'autre, le parti s'en trouvera dans la huitième bafe, dans laquelle les fix premières cellules contiennent ce qui appartient à celui à qui il en manque deux parties, & les deux autres ce qui appartient à celui à qui il en manque fix. Et ainsi à l'infini. Quoique cette proposition ait une infinité de cas, je la démontrerai néanmoins en peu de mots par le moyen de deux Lemmes. Le premier, que la seconde bafe contient les partis des Joueurs, auxquels il manque deux parties en tout. Le deuxième, que si une bafe quelconque contient les partis de ceux auxquels il manque autant de parties qu'elle a de cellules, la bafe suivante fera de même, c'est-à-dire, qu'elle contiendra aussi les partis des Joueurs, auxquels il manque autant de parties qu'elle a de cellules. D'où je conclus en un mot que toutes les bafes du Triangle Arithmétique ont cette propriété : car la seconde l'a par le premier Lemme; donc par le second Lemme, la troisième l'a aussi, & par conséquent la quatrième; & ainsi à l'infini. Ce qu'il falloit démontrer. Il faut donc seulement démontrer ces 2 Lemmes. Le

46 UsAce pv TRIANGLE ARITHMÉTIQUE Le premier est évident de lui-même; car si l'un & l'autre, il est évident que leurs conditions sont comme 5 à 1, c'est-à-dire, comme 1 à 1, & qu'il appartient à chacun cette fraction, qui est $\frac{1}{5}$. Le deuxième se démontrera de cette sorte. Si une base quelconque comme la quatrième D x contient les parties de ceux à qui il manque quatre parties, c'est-à-dire, que s'il manque une partie au premier, & trois au second, la portion qui appartient au premier sur la somme qui se joue, soit celle qui est exprimée par cette fraction $\frac{1}{4}$. DB qui a pour dénominateur la somme D+B+I+Aa me des cellules de cette base, & pour numérateur ses trois premières; & que s'il manque deux parties à l'un, & deux à l'autre, la fraction qui appartient DB tient au premier soit $\frac{2}{4}$; & que si D+B+I+; manque trois parties au premier, & une à l'autre, la fraction du premier soit $\frac{3}{4}$. ÉC. TD BONST SP ENT EC QE Je dis que la cinquième base contient aussi les parties de ceux auxquels il manque cinq parties; & que s'il manque, par exemple, deux parties au premier,

POUR LES PARTIS DU JEU. 47 mior, & trois à l'autre, la
 portion qui appartient au premier fur la somme qui se joue, est exprimée
 HAE C par cette fraction, é HER C+ERES Car pour favoir ce qui appartient
 à deux Joueurs à chacun defquels il manque quelques parties, Il faut
 prendre la fraction qui appartiendroit au premier en cas de gain, & celle qui
 lui appartiendrait en cas de perte, les mettre à même dénomination, si elles
 n'y font pas, & en former une fraction, dont le numérateur soit la somme
 des deux autres, & le dénominateur double de l'autre, par le Lemme
 précédent. Examinons donc les fractions qui appartiendroient à notre
 premier Joueur en cas de gain & de perte. Si le premier à qui il manque
 deux parties gagne celle qu'ils vont jouer, il ne lui manquera plus qu'une
 partie, & à l'autre toujours trois; donc il leur manque quatre parties en tout;
 donc, par l'hypothese, leur parti se trouve en la base quatrième, & 1]
 appartiendra au premier cette fraction . . . DER DEEE EX. Si au contraire le
 premier perd, il lui manquera toujours deux parties, & deux seulement à
 l'autre; donc par l'hypothese la fraction du premier fera

48 UsAcr pu TRIANGLE ARITHMÉTIQUE DER fera . Donc en cas de parti il DB: appartiendra au premier cette fraion . . . $D+B+3I+DB$; c'est à dire, $H1LE+LC\ 2D+2B+29+Lra$; scet à dire, $HLE+C+R$ ii Ce qu'il falloit démontrer. Ainfi cela se démontre en toutes les autres bafes fans aucune différence, parce que le fondement de certe preuve est qu'une bafe est toujours double de la précédente par la septieme conséquence, & que, par la dixieme conséquence, tant de cellules qu'on voudra d'une même bafe font égales à autant de la bafe précédente (qui est toujours le dénominateur de la fraction en cas de gain) plus encore aux mêmes cellules, excepté une (qui est le numérateur de la fraction en cas de perte); ce qui étant vrai généralement par-tout, la démonstration fera toujours sans obstacle & universelle. PROBLÈME IL Proposition II. Étant proposés deux Joueurs qui jouent chacun une même somme en un certain nombre de parties proposées, trouver dans le Triangle Arithmétique la valeur de la dernière partie sur l'argent du perdant? Par exemple, que deux Joueurs jouent chacun 3 pistoles en quatre parties : on demande la valeur de la dernière partie sur les 3 pistoles du perdant. Soit

"POUR LES PARTIS DU JEU. 49 Soit prise la fraction qui a l'unité pour numérateur, & pour dénominateur la somme des cellules de la base quatrième, puisqu'on joue en quatre parties : je dis que cette fraction est la valeur de la dernière partie sur la mise du perdant. Car si deux Joueurs jouant en quatre parties, l'un en à trois à point, & qu'ainsi il en manque une au premier, & quatre à l'autre, il a été démontré que ce qui appartient au premier pour le gain qu'il a fait de ses trois premières parties, est la somme des quatre premières cellules; donc il ne reste sur la somme totale des deux mises que cette fraction. . . 22 , laquelle ferait acquise à celui qui a déjà les trois premières parties en cas qu'il, gagnât la dernière; donc la valeur de cette dernière sur la somme des deux mises est . . . u c'est-à-dire, l'unité, $\frac{HLELC+LR}{2D+L2B\#+3284-42x}$ +, c'est-à-dire, $\frac{HLELC+LR}{2D+L2B\#+3284-42x} + 202$. Or puisque la somme totale des mises est $2D+L2B\#+3284-42x$, la somme de chaque mise est $D+B-4584-132$; donc la valeur de la dernière partie est $\frac{HLELC+LR}{2D+L2B\#+3284-42x} + 202$. F. D

so Usace pu TRIANGLE ÂARITHMÉTIQUE partie fur la feue
mife du perdant eft cette fracI lon, ——— double de la précédente,
DE B +8, & laquelle à pour numérateur l'unité, & pour dcnominateur la
fomme des cellules de la quatrieme bafe. Ce quil falloit démontrer. SIPRos
LME NTI PROvos TION TILL Étant propofes deux Joueurs qui jouent
chacun une même fomme en un ceftain nombre de parties donné, trouver
dans le Triangle Arithmétique la valeur de la premiere partie [ur la mife du
perdant ? Par exemple, que deux Joueurs jouent chacun 3 piftoles en quatre
parties, on demande la valeur de la premiere fur la mife du perdant. Soit
ajouté au nombre 4 le nombre 3 , moindre de l'unité, & foit la fomme 7 ;
foit prife la fraction qui ait pour dénominateur toutes les cellules de la
feptieme bafe, & pour numérateur la cellule de cette bafe qui fe rencontre
dans la dividende, faP nn. PHQ+HEHRHEHN EE jé dis qu'elle fatisfait au
problème. voir, cette fraction, Car fi deux Joueuts jouant en quatre parties,
le premief en a une à point, Il en reftera trois à gagner au premier, & quatre
à l'autre; donc il appartient

POUR LES rARTIS DU Jeu. çl àppaitient au premier fur la
 fomime des deux mifes $P+Q+kK+?$ cette fraction, — $V+HQ+K$ HP HE NH
 pour dénominateur toutes les cellules de la feptieme bafe, & pour
 numérateur fes quatre premieres cellules. Donc il lui appartient $V+Q+K$

52 Usacre pu TRIANGLE ARITHMÉTIQUE Car en prenant
cetre valeur fuivant la regle qui vient d'en être donnée, il faut prendre la
fraétion qui a pour dénominateur les cellules de la troifieme bafe (parce que
le nombre des parties en quoi on joue eft 2, & le nombre moindre de l'unité
eft 1, qui avec 2 fait 3) & pour numérateur la cellule de cette bafe qui eft
dans la dividente; donc on 4h aura cette fraction, | A++ Tr Or le nombre de
la cellule «L eft 2, & les nombres des cellules 4+L+7, font, 124. 2 Donc on
à cette fraétion, c'efta-dire, +, 121 c'eft-à-dire, +. Donc le gain de la
premiere partie lui a acquis cette fraction; donc fa valeur eft telle. Ce qu'il
falloit démontrer. PROBLÈME IV. PrRorosrTilon IV. © Étant propofés
deux Joueurs qui jouent chacun une ... même fomme en un certain nombre
de parties donné, trouver par le Triangle Arithmétique la valeur de la
feconde partie fur la mife du perdant ? Soit le nombre donné des parties
dans lefquelles on, joue, 4; il faut trouver la valeur de la deuxieme partie fur
la mife du perdant. Soit

POUR LES PARTIS DU JEU. 3 Soit prise la valeur de la première partie par le Problème précédent : je dis qu'elle est la valeur de la seconde. Car deux Joueurs jouant en quatre parties, si l'un en a deux à point, la fraction qui lui appartient est celle-ci, qui a pour dénominateur la somme des cellules de la quatrième case, & pour numérateur la somme des quatre premières ; mais il en avait mis au jeu cette P+LM+F pour la fraction, PELM+

§4 Usage pu TRriANGtr ARITHMETIQUE est le double de ce
 que la premiere partie lui avoit acquis par la précédente; donc la feconde
 partie lui en à autant acquis que la prenuere. CONCLUSION. On peut
 aisément conclure, par le rapport qu'il y a du Triangle Arithmétique aux
 partis qui doivent se faire entre deux Joueurs, que les proportions des
 cellules qui ont été données dans le Traité du Triangle, ont des
 conséquences qui s'étendent à la valeur des partis, qui sont bien aisées à
 tirer, & dont j'ai fait un petit discours en traitant des partis, qui donne
 l'intelligence & le moyen de les étendre plus avant. USAGE
 PUXTRIANGLE ARITHMÉTIQUE, Pour trouver les puissances des
 Binomes G Apotomes. NE est proposé de trouver la puissance quelconque,
 comme le quatrème degré d'un binome, dont le premier nombre soit 4,
 l'autre l'Unité, c'est-à-dire, qu'il faille trouver le carré-carré de 4

POUR LES PuissANCES. \$ est plus grand de l'unité que 4, exposant de l'ordre proposé : les cellules de cette cinquième base sont, 1,4,6, 4,1, dont il faut prendre le premier nombre 1 pour coefficient de 4 au degré proposé, c'est-à-dire, de 4⁺; ensuite il faut prendre le second nombre de la base, qui est 4, pour coefficient de 4 au degré prochainement inférieur, c'est-à-dire, de 4³, & prendre le nombre suivant de la base, savoir, 6, pour coefficient de 4 au degré inférieur, savoir, 4², & le nombre suivant de la base, savoir, 4, pour coefficient de 4 au degré inférieur, savoir, 4¹, & prendre le dernier nombre de la base 1 pour nombre absolu : & ainsi On aura 1. 4T--4434 6444441, qui fera la puissance carré-carré du binôme 4 + 1. De sorte que si 4 (qui représente tout nombre) est l'unité, & qu'ainsi le binôme 4 + 1 soit le binaire, cette puissance 1 4f4 434 GA +4 Ai fera maintenant 1.1 #4, 1 34.6. 1 ° + 41 +1, C'est-à-dire, une fois le carré-carré de l'unité 4, QUI dire Lit ne SN HR ec à Quatre fois le cube de 1, c'est-à-dire, . . 4 Six fois le quarté de 1, c'est-à-dire, . . . 6 Quatre fois l'unité, c'est-à-dire, . . . 4 DIS PANIER Ne CE Len NE et HAE Es CP RARE 7 Et en effet le carré-carré de 2 est 16. Si 4 est un autre nombre, comme 4, & partant D 4 que

56 UsAce Du TRIANGLE ARITHMÉTIQUE que le binome +1
 foit s, alors fon quarréquarré fera toujours fuivant cette méthode, 1 4 +
 445+6A "+444 1, qui figuhe imaintenant 1. 4 4 45 HG 4 +4 4H I. C'est-à-
 dire, une fois le quarré-quarré de 4, — _ — = RTE fAVOIL A IN, ! HAT S
 PUS C Quatre fois le aibé de 4, es Br SG Six fois le quarré deg 2 nn Mo
 Quatrefois arracinecz 1104, opt. 2leu ui 16 PIRSE EU Me RE ÉTAPE UT |
 À | M (ll (ll il A} al | ————— dont la fomme . . . , HOYEN, G2\$ fait le
 quarré-quarré de s : & en effet le quarrcquarré de \$ eft 625. Et ainfi des
 autres exemples. Si on veut trouver le même déoré du binome A+ 2, il faut
 prendre de même 1 4ÿ-+ 4 43 + 6 A°+4A4+1, & enfuite écrire ces quatre
 nombres 2, 4, 8, 16, qui font les quatre premiers dégres de 2, fous les
 nombres 4, 6, 4, 1, c'efta-dire, fous chacun des nombres de la bafe, en.
 laiffant le premier : en! cette forte". 0, 1% 1At+aASLGA Ha A+ 3 2 AT: 8
 16 & multiplier les nombres qui fe His lun par latitre "RP ARTS APT 0e A
 æ J 2 4 8 16 en cette forte. . . . CA 1At+ 8 A41+24 4° Re AUS Et EE

POUR LES PuISSANCES. \$7 Et ainfi on aura le quarré-quarré
 du binome $4 + 2$; de forte que fi 4 eft l'unité, ce quarré-quarré fera tel. Une
 fois le quarré-quarré de l'unité 4 . . x Huit fois le cube de l'unité 8
 Vingt-quatre fois le quarré de 1 24 AFENTE den OISE LEE PR Eee
 VE RS, Plus le /quarré-quarré dep". Qu, uar 16 dont fomment FRENCH
 VD TS ar TST fera le quarré-quarré de 3 : & en effet 81 eft le quarré-quarré
 de 3. Et fi 4 eft 2, alors $4 + 2$ fera 4, & fon quarréquarré fera Une fois le
 quarré-quarré de Zou de2, favoir 16 CEE Se 7 A PC D 2 Ve GS OS AE 0
 V1 DATE RAT OT RÉ ER SAUT HE 6 ART Le ie ie Ve lMIR ete eh ere
 NP Te te FAO PIUS le"quarré-quarré dé 2 0m Te dont la" fomme.s ti ne BL
 Sin 256 fera le quarré-quarré de 4. De la même maniere on trouvera le
 quarréquarré de $A + 3$, en mettant de la même forte $A^* + aA^3 + GA^\circ + HAA$
 $7x$ & au-deffous les nombres 3 9 27 81 qui font les quatre premiers degrés
 de 3; & mulupliant les nombres correfpondants, on trouvera que le quarré-
 quarré de $A + 3$ et 1 Af+i2 ASH s4 A +108 A+ 81. Et ainfi à l'infini. S1

58 Usace pu TRrRIANGLE, &c. Si au lieu du quarré-quarré on veut le quarte cube, ou le cinquieme degré, il faut prendre la bafe fisieme, & en ufer comme j'ai dit de la cinquieme; & ainfi de tous les autres degrés. On trouvera de même les puiflances des Apotomes {— 1, 4— 21, &c. La méthode en eft toute femblable, & ne differe qu'aux fignes ; car les fignes de + & de — fe fuivent toujours alternativement, & le figne de + eft toujours le premier. Ainf le quarre-quarré de 4— 1 fe trouvera de cette forte. Le quarré-quatré de 4+ 1 eft par la regle précédente 1 4ÿ+ 445464" +44-+1, Donc en changeant les fignes comme j'ai dir, on aura 14*ÿ—4 ASLGAT— 4a A+. Ainfi le cube de 4—— 2 fe trouvera de même. Car le cube de 442 par la regle précédente eft ASLGA'Hi1 dA48. _ Donc le cube de À4— 2 fe trouvera en changeant les fignes, 43—6A°-+11 4 —8. Et ainfi à l'infini. Je ne donne point la démonftration de tout cela, parce que d'autres en ont déjà traité, comme Hérigogne (1), outre que la chofe eft évidente d'elle-même. |

(1) Hérigogne, Mathématicien du fiecle pañlé, publia, pour la premiere fois, en 1635, un Cours de Mathématiques, latin & françois, en \$ volumes £7-8°.; & pour la feconde fois, en 1644, le même Ouvrage en 7 volumes.

TRAITÉE

TRAITÉ DES ORDRES NUMÉRIQUES. 1^{re} Je présume qu'on a vu le Traité du Triangle Arithmétique, & son usage pour les Ordres numériques ; autrement j'y renvoie ceux qui veulent voir ce discours, qui en est proprement une suite. J'y ai donné la définition des ordres numériques, & je ne la répéterai pas. J'y ai montré aussi que le Triangle Arithmétique n'est autre chose que la table des ordres numériques; ensuite de quoi il est évident que toutes les propriétés qui ont été données dans le Triangle Arithmétique entre les cellules ou entre les rangs, conviennent aux ordres numériques : de sorte que si peu qu'on ait l'art d'appliquer les propriétés des uns aux autres, il n'y a point de proposition dans Le Traité du Triangle qui n'ait ses conséquences touchant les divers ordres: & cela est tout ensemble, & si facile, & si abonde 1 2 A ER A LE PT OUPS DR ED ES J'ai sous la main la seconde édition, Dans le Traité d'Algebre (Chap. V, pag. 31) l'Auteur détermine immédiatement par le calcul, ou par des multiplications répétées, le carré , le cube, &c. , d'un binôme tel que $a+b$ — b , On voit ici que Pascal trouve, au moyen de son Triangle Arithmétique, les coefficients des différents termes d'un Binôme élevé à une puissance quelconque entière & positive. dant,

#” #| UE fl il AE ! IE : (il RE il | 60 TRAITÉ pes OnRDRESS
 dant, que je fuis fort éloigné de vouloir tout donner expreflement; j'aimerois
 mieux laïfler tout à faire, puifque la chofe eft fi aifée; mais pour me tenir
 entre cés deux extrémités, j'en donnerai feulement quelques exemples, qui
 ouvriront le moyen de trouver tous les autres. Par exemple : de ce qui a été
 dit dans une des conféquences du Fraité du Triangle, que chaque cellule
 égale celle qui la précède dans fon rang parallele, plus celle qui la précède
 dans fon rang perpendiculaire , j'en forme cette propolition touchant les
 Ordres numériques. PROPOSITION PREMIERE. Un nombre , de quelque
 ordre que ce foit, égale celui . qui le précède dans fon ordre, plus fon
 corradical de Pordre précédent : & par conféquent, le quacrierme, par
 exemple, des pyramidaux égale le troifieme pyramidal, plus le quatrieme
 triangulotriangulaire : ainft le cinquieme triangulo-trianpulaire égale le
 quatrieme triangalo-triangulaire , plus le cinquieme pyramidal , &c. Autre
 exemple : de ce qui a été montré dans le Triangle, que chaque cellule,
 comme F, égale E+B+J+c, cest-a-dire, celle qui la précède dans fon rang
 parallele , plus toutes celles qui précèdent cette précédente dans [on rang
 perpendiculaire je forme cette propolition. PROPOSITION

NUMÉRIQUES. 61 ! PrRorPosiTion II . / Un nombre , de quelque ordre que ce [oit, égale tous ceux tant de fon ordre que de tous les précédents, dont la racine efl moindre de l'unité que la Jtenne ; © partant le quatrieme des pyramidaux , par exemple, égale le troifieme des pyramidaux, plus le croifieme des triangulaires, plus le troifreme des naturels , plus le croifième des unités, c'eft-a-dire , l'unité. D'où on peut maintenant tirer d'autres confeuënces , comme celle-ci, que je donne pour ouvrir ; :] le chemin à d'autres pareilles. PrRroPrositTronN JIIL Chaque nombre, de quelque cellule que ce foi, ejt compofé d'autant de nombres qu'il y a d'ordres depuis le fien jufqu'au premier inclufivement , chatun defquels nombres efl de chacun de ces ordres : ainfi un triangulo-triangulaire efl compofé d'un autre triangulo-trianoulaire, d'un pyramidal, d'un crianoulaire, d'un naturel & de Punité. Et fi on veut en faire un problème, il pourra s'énoncer ainfi. ProProsirTionN IV. PROBLÈME. Etant donné un nombre d'un ordre quelconque , trouVer un nombre dans chacun des ordres depuis le premier

62 TRAITÉ DES ORDRES premier jufqu'au ften inclufivement , dont la fomme égale le nombre donne. La folution en eft facile : il faut prendre dans tous ces ordres les nombres dont la racine eft moin- : dre de l'unité que celle du nombre donné. Autre exemple : de ce que /es cellules corrépondantes font évaies entre elles, il fe conclut : PROPOSITION V. Que deux nombres de différens ordres font égaux entre eux , ft la racine de l'un ef le même nombre que l'expofant de l'ordre de l'autre : & partant le troifieme pyramidal eft écal au quatrieme trianoulair : le cinquieme du huitieme ordre eff le même que le huitieme du cinquieme ordre, &c. On n'auroit jamais achevé : par exemple, PROPOSITION VI. (} | ! À | NE II \ I FA null Î ALI Lil '41 W' 1! | À | AA It) A 0 (l EN LA [' ((HAN L ï de H AT l fl } | } AIR CE UI À \ ni 1 k k 4Û AFAMIE 01! nt QE (M! ÿ 4 { 1 Î ? ? | UN MU \ | AA. | j HI! M \ l 14 | All ! } 1 Aux] Qi Un À | 10 i LIU | U qill | t NA = — Tous les quatriemes nombres de tous les ordres font les mêmes que tous les nombres du quatrieme EE. — ordre, &c. Parce que es rangs paralleles & perpendiculaires gui ont un même expofant, font compofés de cellules toutes pareilles. Par cette méthode, on trouvera un rapport admirable en tout le refte, comme celui-ci: ee RTC SRE DURE VU RENE PRoPosITION VII. — SE ZE Un nombre, de quelque ordre que ce foit, eff au prochainement

NUMÉRIQUES 63 prochainement plus grand dans le même ordre, comme la racine du moindre est à cette même racine jointe à l'exposant de l'ordre, moins l'unité. Ce qui s'enfuit de la quatorzième conséquence du Triangle, où il est montré que chaque cellule est à celle qui la précède dans son rang parallèle, comme l'exposant de la base de cette précédente à l'exposant de son rang perpendiculaire. Et afin de ne rien cacher de la manière dont se tirent ces correspondances, j'en montrerai le rapport à découvert : il est un peu plus difficile ici que tantôt, parce qu'on ne voit point de rapport de la base des triangles avec les ordres des nombres; mais voici le moyen de le trouver. Au lieu de l'exposant de la base dont j'ai parlé dans cette quatorzième conséquence, il faut substituer l'exposant du rang parallèle, plus l'exposant du rang perpendiculaire moins l'unité : ce qui produit le même nombre, & avec cet avantage, qu'on connoît le rapport qu'il y a de ces exposants avec les ordres numériques : car on fait qu'en ce nouveau langage, il faut dire, l'exposant de l'ordre, plus la racine, moins l'unité. Je dis tout ceci, afin de faire toucher la méthode pour faire & pour faciliter ces réductions. Ainsi On trouvera que Proposition VIII. Un nombre, de quelque ordre que ce soit, est à son corradical

‘ 41 ‘ k Y : : x l H i i : + ù l L A 2 ñ T's" À t h i { : C l T R : M e | T S ,
re C > 1 > 18 Ÿ , L A : à 1 ! " : + à . F

NUMÉRIQUES. 6^e multiplié par la racine précédente, égale l'exposant de son ordre, multiplié. par le nombre de l'ordre suivant procédant. de cette: racine. Et parce que, quand quatre nombres sont proportionnels, le rectangle des extrêmes ou des moyens étant divisé par un des deux autres, donne pour quotient le dernier, on peut dire auf:

PROPOSITION XI. Un nombre, de quelque ordre que ce soit, étant multiplié par la racine précédente, & divisé par l'exposant de son ordre, donne pour quotient le nombre de l'ordre suivant qui procède de cette racine. Les manières de tourner une même chose sont infinies: en voici un illustre exemple, & bien glorieux pour-moi: Cette même proposition: que je viens de rouler en-plumeaux fortes, est tombée dans la pensée de notre célèbre Conseiller de Toulouse M. de Fermat; & ce qui est admirable; sans qu'il m'en eût donné la moindre lumière, ni moi à lui; Il écrivoit dans sa Province ce que j'inventois à Paris, heure pour heure, comme nos Lettres écrites & reçues en même-temps le témoignent. Heureux d'avoir concouru en cette occasion, comme j'ai fait encore en d'autres d'une manière toute-fait étrange, avec un homme si grand & si admirable, & qui dans toutes les recherches de la plus sublime Géométrie, est dans le plus haut degré

66 TRAITÉ Des ORDRES / ? àuré d'excellence, comme fés
Ouvrages, que nos longues prieres ont enfin obtenus de lui, le feront bientôt
voir à tous les Géometres de l'Europe, qui les attendent! La maniere dont il
a pris cette même propolition eft telle. En la progreflion naturelle qui
commence par l'unité, un nombre quelconque étant mené dans le
prochainement plus grand , produit le double de [on triangle. Le même
nombre étant mené dans le triangle du prochainement plus grand, produit le
triple de [à pyramide. | Le même nombre mené dans la pyramide du
prochainement plus grand, produit le quadruple de Jon : triangulo-
triangulaire; & ainfi à l'infini, par une méthode générale & uniforme. Voilà
comment on peut varier les énonciations. Ce que je montre en cette
propolition s'entendant de routes les autres, je ne m'arrêterai plus à cette
maniere accommodante de traiter les chofes, laif fant à chacun d'exercer fon
génie en ces recherches, où doit confifter toute l'étude des Géometres : car
fi on ne fait pas tourner les propofitions à tous fens, & qu'on ne fe ferve que
du premier biais qu'on a envifagé, on n'ira jamais bien loin: ce font ces
diverfes routes qui ouvrent les conféquences nouvelles, & qui, par des
énonciations aflorties au fujet, ent des propofitions qui fembloient n'avoir
aucun rapport dans les termes où elles étoient conçues

NUMÉRIQUES. 67 çues d'abord. Je continuerai donc ce fujet en la maniere dont on a accoutumé de traiter la Géométrie, & ce que j'en dirai fera comme un nouveau Traite des Ordres numériques; & même je le donnerai en latin, parce qu'il se rencontre que je l'ai écrit ainfi en l'inventant. A Lee KA is PAR ns nn eee DE NUMERICIS ORDINIBUS TRACTATUS. FT Rrançcuzr Arithmertici traétatum, 1pfufque circa numericos ordines ufum, fupponit tractatus 1fte, ut & plerique à fequentibus : huc ergo mittitur leétor horum cupidus; ibi nofcet quid fint ordines numerici, nempe, unitates, numeri naturales, trianguli, pyramides, criangulo-trianguli, &c. Quæ cum perlecerit, facilè hæc affequerur. Hic propriè oftendirur connexio inter numerum cujufvis ordinis cum fuà radice & exponente fui ordinis, quæ talis eft, ut ex his tribus, datis duobus quibuflibet, tertius inveniatur. Verbi gratià, datà radice & exponente ordinis, numerus 1pfe datur; fic dato numero & fui ordinis exponente, radix elicitor; nec non ex, dato numero & radice, exponens ordinis invenitur : hæc conftituunt tria prora problemata, quartum de fummâ ordinum agit. Ee2 DE ji (HE dl |

A Ur De FER ns " PA , 4 di = EE ne es Dee mg Tee Er in 68

NumericorumM ORbINuM DE NUMERICORUM ORDINUM

COMPOSITIONE: PROBLEMA PRIMUM. Datis numeri cujuflibet radice & exponente ordinis, componere nurmerurn ? DASPMerYS numerorum qui præcedunt radicem, dividat produétum totidem numerorum quorum primus fit exponens ordinis: quotiens erit quæfitus numerus. || Propofitum fit invenire numerum ordinis, verbi gratià, tertil, radicis verd quintæ. Productus numerorum 1, 2, 3, 4, qui præcedunt radicem \$, nempe 24, dividat produétum totidem numeroruin continuorum 3, 4, \$, 6, quotumprimus fit exponens ordinis 3, nempe 360: quotiens 15, eft numerus quæfitus. Nec difficilis demonftratio : eàdem enim prorfus confructione, inventa eft, ad finem'Tra@arüs Trianguli Arichmetici, ceilula quintæ {ériei perpendicularis, tertiæ vero feriei parallelæ; cujus cellulæ numerus, idem eft ac numeru\$ quintus ordinis tertil, qui quæritur. Poreft autem & fic refolvi idem problema. Productus numerorum qui præcedunt exponentem ordinis, dividat productum totidem numero[UM

Ciosm?0., SLT Lo. G9 um continuotum quorum primus fit radix :
 quotiens est quæfitus. Sic in proposito exemplo, productus numeroTUM
 1,2, qui præcedunt exponentem ordinis 3, nempe 2, dividat productum
 totidem numerorum $\$ > 6$, quorum primus fit radix $\$$, nempe 30: quotiens 1
 $\$$, fit numerus quæfitus. Nec differt hæc constructio à præcedente, nisi in
 hoc solo, quod in altera idem fit de radice, quod fit in altera de exponente
 ordinis : perinde ac si idem effet invenire, quinrum numerum ordinis tertii,
 ac tertium numerum ordinis quinti; quod quidem verum esse jam
 ostendimus. Hinc autem obiter colligere possumus arcanum numericum;
 cum enim ambo illi quotientes 15, sint idem, constat, divisores esse inter se
 ut dividendos. Animadvertemus itaque : Si sint duo quilibet numeri,
 productus omnium numerorum primum ex ambobus propositis
 præcedentium, est ad productum totidem numerorum, quorum primus est
 secundus. ex his ambobus, ut productus .ex omnibus qui præcedunt
 secundum ex illis ambobus, ad productum totidem. numerorum
 continuorum quorum primus est -primus ex his ambobus propositis. Hæc qui
 prosequeretur & demonstraret, novi fortassis tractatus materiam reperiret :
 nunc autem quia extra rem nostram sunt, sic pergitur. E 3 DE

| 1. al ges + AS 7, 70 NumErtcoruMmM ORDINUM DE
 NUMERICORUM ORDINUM RES" O0" FT-O NE: PIORL'EM A EL
 Dato numero, ac exponents fui ordinis, invenire radicem © | Ps TEST
 autem ®% fic enuntiari. Dato quolibet numero, invenire radicem maximi
 numeri ordinis numerici cujuflibet propofiti, qui vè dato nuiñero contineatur
 © Sit datus numëtus quilibet, vérbi gratia, 58, ordo vérd nuinericus
 quicunque propofitus, verbi gratid, féxtus. Oportet igitur invénire radicem
 Jexti ordinis numert 58. Exhibearur x & continud Exponatur ex alunâ parte
 éxponens OA tr D, Muitiplicérur 1pfe 6 , per nuineérur 7, proximè
 majorem; fitque produétush isa 42 Multiplicetur 1fte produétus per
 proximèe fequentem rera parte numerus dattisie ETS Multiplicetur ipfe
 numérus per 2, fitque produétus, ace dre pe) it À à CS! Multiplicetur 1pfe
 produétus per proxinè fequentem multiplicartorgem

R Æ/S :0°L UD Tr. 71 mulciplicarorem 8. mulriplicatorem 3, ‘
 firque produéus, fitque produétus , UE La TP TS EE TR NE ETS PTS
 Multiplicetur if- & continud Multiplicetur lfte productus per te produétus
 per proximè fequentem proxime fequentem multiplicatorem 9 ,
 multiplicatorem 4, firque produétus, fiique productus, de #rfl0ané ok bia Ta
 02 Et fic in infinitum, donec ultimus produétus exponentis 6, nempe 3024,
 nnjor evadat quam ultimus produétus numeri dati nempe 1392; & tune
 abfoluta eft operatio : ultimus enim multiplicator dati numeri, nempe 4, eft
 radix quæ quærebatur. Ioitur dico numerum fexti ordinis cujus radix eft 4,
 nempe \$6, maximum efle ejus otdinis qui in numero dato contineatur, feu
 dico numerum fexti ordinis cujus radix eft 4, nempe 56, non éfle Majorem
 dato numero 58; numerum verd ejufdem ordinis proximè majorem feu cujus
 radix eft s , nempe 126, efle majorem numero dato 58. Etenim produdus ille
 ultimus numert dau, ‘nempe 1392, factus eft ex numero dato 58,
 multiplicato per produétum numeérorum 1, 2,3, 4, nempe 24; produétus
 verd præcedens hunc ultimum, nempe 348, faétus eft ex numero dato 58,
 multiplicato per produétum nutnerorum 1, 2,3, nempe 6. E 4 Ergo

72 NumErRIIcoRUuM ORDINUM Éïoo produétus numerorum 6, 7, 8, non eft major produéto numerorum 1, 2, 3, multiplicato per 58. Produétus verd numerorum 6, 7, 8, 9, eft major producto numerorum 1, 2, 3, 4, multiplicato per 68, ex confruptione. Jam numerus ordinis /éxri cujus radix eft 4, nempe ç6, multiplicatus per numeros 1, 2, 3, æquatur produéto numerorum 6, 7, 8, ex demonftratis in Tractatu de Ordinibus numericis. Sed produétus numerorum 6, 7, 8, non eft major ex offenfis ; producto numerorum 1, 2, 3, multiplicato per datum \$8; igitur produétus numerorum 1, 2, 3, multiplicatus per \$6, non eft major quam idem produétus numerorum 1, 2, 3, muluiplicatus per datum 58. Igitur \$6 non eft major quam \$8. Jam fit 126, numerus ordinis /exri cujus radix eft s. Igitur 1pfe 126, multiplicatus per productum numerorum 1, 2, 3, 4, æquatur produéto numerorum 6, 7, 8, 9, ex I ractatu de Ordinibus numericis. Sed produétus ille numerorum 6, 7, 8, 9, eft major quim numerus datus \$8 multiplicatus per produétum numerorum 1, 2, 3, 4, ex oflenfis. loitur, numerus 126, multiplicatus per productum numerorum 1, 2, 3, 4, @ft major quèm numerus datus \$8 multiplicatus per eundem produ&um numetorum 1, 2, 3, 4. Igitur numetus 126 eft major quàm numerus datus ç8. Ergo

RES O.L.U T I O: 73 Eroo numerus 56 fexti ordinis cujus radix est 4, non est major quàm numerus datus ; numerus verd 126, ejusdem ordinis cujus radix \$ est proximè major, major est quim datus numerus. Ergo ipse numerus \$6, maximus est ejus ordinis qui in dato contineatur, & ejus radix 4 inventa est. ONESE ED. DE NUMERICORUM ORDINUM RESOZLUTION E: PrRoBLEMA Ill. Dato quolibet numero, & ejus radice, invenire ordinis exponentem. Ox differt hoc problema à præcedente; radix enim, & exponens ordinis, reciproce convertUNTur, ita ut dato numero, verbi gratià, 58, & ejus radice 4, reperietur exponens fui ordinis 6, eâdem methodo, ac si dato numero ipso 58, & exponente ordinis 4, radix 6, esset invenienda: quartus enim numerus /exti ordinis idem est ac Jextus quarti, ut jam demonstratum est. QUO DE

74 NumeéricorumM ORpiInwu» TIRE ND TETE IP ONLINE
DINAN EP ÉTAT DE NUMERICORUM ORDINUM SU M M À: PRO
BTEMA I Ve Propofiti cujuflibet ordinis numerici, tot quot impe rabitur,
priorum nuimerorum fummam invenire À Por SITUM fit invenire fummam
quinque, verbi gratià, priorum numérorum Ordinis, verbi gratià, /exri.
Inveniatur ex precedente numerus quintus (quia | quinque priorum
numeratorum fumma requiritur) ordinis feprimi, nempe ejus qui propolirum /
éxtum proximè fequitur : ipfe fatisfacièt problemari. Numericorum enim
ordinum generatio talis eft, ut numetus cujufvis ordinis, #quetur fummae
eotrum omnium ordinis præcedentis quorum radices non funt fuà majores;
ita ut quintus feptimi ordinis, æquetur, ex naturâ & generatione ordinum,
quinque prioribus numeris fexti ordinis, quod difficultate caret. GONG
CUSSTO: Mernopus qua ordinum refolutionem expedio eft generaliffima :
verüum ipfam dit quæfivi; quæ primo fefe obtulit ea eft. Si dati numeri
quærebatur radix tertii ordinis, ita procedebam. Sumatur duplum numeri
propofitis iftus

S ' U M M A. 75 iflius dupli radix quadrata inveniatur : hec
quafita efl, aut faltem ea que unitate minor erit. Si dati numeri quæritur
radix quarti ordinis, imultiplicetur numerus datus per 6, nempe per
produtlum numerorum + , 2, 3, producfi inveniatur radix cubica, ipfa, aut ea
que unitate minor eft, fatisfaciet. Si dati numeri quæritur radix quinti
ordinis, multiplicetur datus numerus per 24, nempe per produëlum
numeratorum , 2, 3, 4, produtlique inveniatur radix quarti gradôs : ipfa unitate
minuta, fatisfaciet problemati. Et ita reliquorum ordinum radices quærebam,
conftructione non generali, fed cuique propriâ ordini; nèc tamén ideo mihi
omnind difplicebat: illa enim quâ refolvuntur poteftates non generalior eft,
aliter enim extrahitur radix quadrata, aliter cubica, &c., quamvis ab eodem
principio viæ illæ différentes procedant. Ut ergo nondum generalis
poteftatum refolutio data erat, fic & vix générale ordinum refolutionem
afflequi fperabam: conatus ramen expectationem fuperantes eam quam
tradidi præbuerunt generaliffimam, & quidem amicis meis, univerfalium
folutionum amatoribus doétiflimis, gratiflimam; à quibus exciratus &
generalem poteftatum purarum refolutionem tentare, ad inftar generalis
ordinum refoluutionis, obtemperans quæfivi, & fatis feliciter mihi contigit
reperifle, ut infrà videbitur. DE

7G DE Numerorum rer ESRI Q à Hd Le, nqnrntietmnens TS
 SR) a DE NUMERORUM CONTINUORUM PRODUCTIS, Sex de
 numeris qui producuntur ex multiplicatione numerorum ferie natural
 pProcedentiurn. UmeErr qui producuntur ex multiplicatione numerorum
 continuorum à nemine, quod: fciam, examinati sunt. Ideo nomen eis impono
 nempe, produci continuorum. Sunt autem qui ex duorum multiplicatione
 formantur, ut iste 20 qui ex 4 in 5 oritur, & possent dici fecunda speciei.
 Sunt qui ex trium multiplicatione formantur, ut iste 120 qui ex 4 in 5 in 6
 oritur & dici possent tertie speciei. Sic quarte speciei dici possent qui ex
 quatuor numerorum continuorum multiplicatione formantur, & sic in
 infinitum : ita ut, ex multitudine multiplicatorum, species nominationem
 exponentis forciretur; & sic nullus esset productus primæ speciei, nullus esset
 enim productus ex uno tantum numero. Primum huius tractatus theorema,
 Illud est quod ebitur in precedente tractatu annotavimus, quod querendo,
 ‘reliqua invenimus,’ imo & generalem potestatem

CONTINUORUM. PRODUCTIS. 77 potestatum resolutionem;
aded, fri@à connexionē fibi mutuo cohærent veritates! PROPOSITIO
PRIMA,; Si Jint duo numeri quilibet, prodittus omnium numerorum
primum precedentium , est ad produëlum cotidem numerorum continuorum
à fecundo incipientium : ut produilus omnium numerorun fecundim
precedentium , ad produttum:totidem numerorumm CcontinuorTum à primo
ëncipientium. Sint duo numeri quilibet s, 8 : dico produétin numerorum
1,2,3,4, qui præcedunt \$, nempe 24, efle ad produétum totidem
continuorum numerorum 8,9, 10,11, nempe 7920 : ut produc. TUM
numerorum 1,2,3,, 4: \$ > 6, 7; qui præcedunt 8, nempe 5640, ad produétum
totidem continuorum numerorum S > 6, 7,8; 9, 10, 11, némpē 1663200. | +
Étenim produétus numerorum. \$, 6, 7, duétus in productum. iftorum 1, 2, 3,
4, eflicit productum horum 1,2,3,4, 5, 6,73 & idem productus numerorum \$
,6, 7, ductus.in produétum numerorum 8,9,10,11, eflicit produétum horum
5:6,7,8,9,10,11; ergo. ut productus numeTOrUM 1, 2, 3, 4, ad productum
numerorum 1,2, 3,4, \$, 6, 7:ita producétus numerorum 8,9, 10,11, ad
productum numerorum \$, 6, 7, 29 AO! rr: Q:E::D. ProrosiTio

78 De Numsrorum PrRrorostrtrro Il. Ormnis produclus à quorlibet numeris continuis , efl multiplex produéti à totidem numeris continuis quorum primu® efE unitas ; & quotiens eft numerus figuratus. Sit productus quilibet, à tribus, verbi gratià, numeris continuis \$, 6, 7, nempe 210, & produétus totidem numerorum ab unitate incipientium 1,2, 3, nempe 6 : dico ipfum 210 efle multiplicem ipfus 6, & quotientem efle numerum figuratum. | Etenim ipfe 6, duétus in quintum numerum ordinis quarti, nempe 3\$, æquatur lpfí producto ex \$, 6, 7, ex demonftratis in Tractatu de Ordinibus numericis. ProProsiTio Ill. Omnis produlus à quotlibet numeris continuis ef mulciplex numeri cujufdam figurati, nempe ejus cujus radix efl minimus ex his numeris, expoF5 nens vero ordinis eff unitate major quam multitudo horum numerorum, Hoc patet ex præcedente. Et unica utrique convenit demonitratio. MONITU M. Ambo divifores in his duabus propolitionibus oftenfi, tales funt, ut alter alterius fit quoriens. Ita

CONTINUORUM PRODUCTIS 79 Ia ut quilibet productus à quotlibet numeris continuis, divisus per productum totidem numerorum ab unitate incipientium, ut fecunda propofitio docet fieri pofle, quotiens fit numerus figuratus in tertià propofitione enuntiatus. Prorofirio IV. Omnis produitus a quotlibet numeris continuis ab unitate incipientibus, eft multiplex producti a quotlibet numeris continuis etiam ab unitate incipientibus quorum multitudo minor eff, Sint quolibet numeri continui ab unitate 1, 2, 3, 4, 5, quorum produétus 120, quolibet autem ex 1pfi ab unitate incipientes 1, 2, 3, quorum productus 6 : dico 120 efle multiplicem 6. Etenim produétus numerorum 1, 2, 3, 4, 5, fit ex producto numerorum 1, 2, 3, multiplicato per produétum numerorum 4, 5. Prorofirio V. Omnis produélus à quotlibet numeris continuis eft multiplex produili a quotlibet numeris continuis ab unitate incipientibus quorum multitudo minor eff. Etenim produétus continuorum quorumlibet eft multiplex totidem continuorum ab unitate incipientium ex fécondä ; fed ex quartä productus continuorum ab unitate eft multiplex produéti continuorum ab unitate quorum multitudo minor eff. : Ervco, &c. | Prorofirio

j D SE Sn pe — = So De NumMErRoRuM PrRorosiTio VI.

Produēlus quotlibet continuorum, eft ad produētum cotidem proximē majorum., ut minimus multiplicatorum ad maximum. : Sint quotlibet numeri 4, \$, 6, 7, quorum productus 840 ; & rotidem proximē majores \$,6,7,8, quorum produētus 1680 : dico 840 efle ad 1680, ut 4 ad 8. Etenim produētus numerorum 4, \$, 6, 7, eft factus ex producto continuorum \$, 6,7, multiplicato per 4; productus verd continuorum \$, 6,7, 8 fatus eft ex eodem produēto continuorum \$, 6,7» multiphcato per 8. Ergo, &c.

P'RI0OPOSITIOL IVEINT Minimus produilus continuorum cujuflibet fpeciei, ile eft cujus mulriplificatores ab unitate incipiunt. Veībi gratiā, minimus produētus ex quatuor continuis fatus, ille eft qui producitur ex quatuor his continuis 1,2, 3,4, qui quidem multiphcatores 1,2,3,4, ab unitate incipiunt. Hoc_ex fe & ex præcedentibus patet. + Ft, DUT PRODUCTA

CONTINUORUM PRODUCTIONE. Sive PRODUCTIONE; CTA

CONTINUORUM RESOLVERE, Seu Refolutio numerorum qui ex numeris progressionis naturali procedentibus producuntur. PROBLEMA. Dato quocunque numero, invenire tot quot imperabitur, numeros continuos ex quorum multiplicatione factus numerus, fit maximus ejus speciei qui in dato numero contineatur ? Oportet autem datum numerum non esse minorem producto totidem numerorum ab unitate continuorum. Dicitur fit numerus, verbi gratia, 4320; Oportetque reperire, verbi gratia, quatuor numeros continuos ex quorum multiplicatione factus numerus fit maximus qui in dato 4320 contineatur, eorum omnium qui producuntur ex multiplicatione quatuor numerorum continuorum : Sumantur ab unitate tot numeri continui quot sunt numeri inveniendi, nempe quatuor in hoc exemplo, 1, 2, 3, 4, quorum per productum 24, dividatur numerus datus; fitque quotiens 180. Ipsius quotientis. inveniatur radix ordinis numerici non quidem quadri, sed sequentis, nempe quinti, fitque TOME F. E ea

82 De Numerorum ea 6; ipse 6 est primus numerus, secundus 7, tertius 8, quartus 9. Dico itaque productum quatuor numerorum 6, 7, 8, 9, esse maximum numerum qui in dato contineatur, id est : dico productum quatuor numerorum 6, 7, 8, 9, nempe 3024, non esse majorem quam numerum datum 4335 ; productum vero quatuor proximè majorum numerorum 7, 8, 9, 10, nempe 5040, esse majorem numero dato 4335. Etenim ex demonstratis in Tractatu de Ordinibus numericis, constat productum numerorum 1, 2, 3, 4, seu 24, ductum in numerum quinti ordinis cujus radix est 6, nempe 126, efficere numerum æqualem producto numerorum 6, 7, 8, 9, nempe 3024; similiter, & eundem productum numerorum 1, 2, 3, 4, nempe 24, ductum in numerum ejusdem ordinis quinti cujus radix est 7, efficere numerum æqualem producto numerorum 7, 8, 9, 10, nempe 6040. Jam vero numerus quinti ordinis cujus radix est 6, nempe 126, cum fit maximus ejus ordinis qui in 180 contineatur, ex constructione patet ipsum 126 non esse majorem quam 180, numerum vero quinti ordinis cujus radix est 7, nempe 210, esse majorem quam ipsum 180. Cum vero numerus 4335 divisus per 24, dederit 180, quotientem patet 180 ductum in 24, seu 4320, non esse majorem quam 4335, sed aut æqualem

CONTINUORUM PrRoDucTrIS 83 æqualem effe , aut differre numero minore quàm 24. _Itaque cùm fit 210 major quàm 180 ex conf. truétione, patet 210 in 24, feu \$040, majorem elle quàm 180 in 24 feu 4320, & exceffum effe ad minimum 24; numetus verù datus 433\$, aut non excedit 1pfum 4320, aut excedit numero minore quàm 24. Ergo numerus 5040, major eft quàm datus 45355 id eft produétus numerorum 7, 8, 9, 10, major eft dato numero. Jam numerus 126, non eft major quam 180, ex conftructione. Ioitur 126 in 24, non eft major quim 180 in 24; fed 180 in 24, non eft major dato numero ex oftenfis. Eroo 126 in 24, feu productus numerorum 6,7, 8,9, non cft major numetro dato; produétus autem numerorum 7, 8, 9, 10, ipfo major eft. Ergo, &c. Q. E. F. E. D. Sic ergo exprimù potelt & enuntiatio, & generalis conftructio. Invenire tot quot imperabitur numeros progrefione naturali continuos , ex quorum mulriPLICATIONE ortus numerus , fit maximus ejus fpeciei qui in dato numero contineatur © Dividatur numerus datus, per produétum toti- : dem numerorum ab unitate ferie natural: procedentium quot funt numeri inventendi; inventoque quotiente , affumatur ipfius radix ordinis numerici cujus exponens eft unitate major quam multitudo FE 2 numerorum (|||| % 1 4 \$ 7 È # ÿ | 3 Le à "1 Ai ” h LU 4 LE 1F : Q 1F 1. ATEN RS he. eo + Li Her TM vÉ.“e &

84 NUMERICARUM POTESTATUM numerorum

inveniendorum : Ipsa radix est primus numerus, reliqui per incrementum unitatis in promptu habentur. MONITUM. Hæc omnia ex natura rei demonstrari poterant, absque Trianguli Arithmetici aut ordinum numericorum auxilio ; non tamen fugienda illa connexio mihi viva est, præfertim cum ea fit quæ lumen primum dedit. Et quod amplius est, alia demonstratio laboriosior esset, & prolixior. NUMERICARUM POTESTATUM GENERALIS RESOLUTIO. { BÉNVE RALEM numericarum potestatum resolutionem inquirenti, hæc mihi venit in mentem observatio : nihil aliud esse querere radicem , : > : . \ verbi gratia in quadratam dati numeri , quæam querere duos numeros æquales quorum productus æquetur numero dato. Sic & querere radicem cubicam nihil aliud esse quæm querere tres numeros æquales quorum productus fit datus, & sic de cæteris. Itaque potestatis cujuslibet resolutio, est indagatio totidem numerorum æqualium, quot exponens potestatis continet unitates, quorum productus æquetur dato numero; potestates enim ipsæ nihil aliud sunt quæm æqualium numerorum producti. Sicut

GENERALIS RESOLUTIO. 8% -r Sicut enim in præcedenti tractatu, egimus de numeris qui producuntur ex multiplicatione numerorum natural progreflione procedentium, fic & in hoc de poteftatibus traétatu, agitur de numeris qui producuntur ex multiplicatione , numerorum æqualium. Vifum eft itaque quàm proximos efle ambos hos tractatus, & nihil efle vicinins, produéto ex æqualibus, quèm produétum ex continuis folius Unitatis incremento differentibus. Quapropter poteftatum refolutionem generalem, feu produélorum ex æqualibus refolutionem, non mediocriter proveétam efle cenfui, cm eam produélorum ex continuis generalis refolutio præcefferit. | _ Dato enim numero, cujus radix cujufvis gradüs quæritur, verbi gratia, quarti, quæruntur quatuor numeri æquales quorum productus æquetur data; fi ergo inveniantur ex præcedente traétatu , quatuor continui quorum productus æquetur dato , quis non videt, inventam efle radicem quæfitam, cüm ea fit unus ex his quatuor continuis? minimus enim ex his quatuor, quater fumptus & toties multiplicatus manifefte minor eft producto continuorum ; maximus verd ex his quatuor, quater fumptus ac toties multiplicatus, manifefte major eft produéto Continuorum; radix ergo quæfita unus ex illis eff. Verüm latet adhuc ipfa in multitudine ; reliquum F°3 eft PR € doté Lists ns. NS Dh. TUE L *

86 NuMERICARUM POTESTATUM est igitur ut eligatur, & discernatur quis ex con tinus farisfaciat quæstioni. Huic perquisitioni nondum forte fatis incubui à crudam tamen meditationem proferam, aliàs, si digna videatur, diligenter elaborandam. POSTULATUM. Hoc autem prænotum esse postulo; quæ fit radix quadrata numeri 2, nempe 1; etenim 1 est radix maxime quadrati in 2 contenti. Sic & quæ fit radix cubica numeri 6, scilicet qui ex multiplicatione trium numerorum 1,2, 3 » Oritur, NEMPE 1. SIC & QUE fit radix quarri gradus numeri 24, scilicet qui ex multiplicatione quatuor numerorum 1,2, 3,4,Oritur nempe 2, & sic de cæteris gradibus. In unoquoque enim peto nosci radicem, 1 ftius gradus , numeri qui producit ex multiplicatione tot numerorum continuorum ab unitate quot exponens gradus profecti continet unitates. Sic ergo in investigatione radices, verbi gratia, decimi gradus, postulo notam esse radicem istius decimi gradus, numeri 3628800, qui producit ex multiplicatione decem priorum NUMEROTUM 1,2,3,4, 5,6,7,8,9,10,nempe 10 Et hoc uno verbo dici potest. In unoquoque gradu, postulo notam esse radicem istius gradus minimi producti eorundem continuorum quot exponens gradus continet unitates; minimus enim productus continuorum quolibet, ille est cujus multiplicatores ab unitate sumunt exordium. Nec

GENERALIS REESOLUTIO. 8+ Nec fanè molesta hæc petirio
 est; in unoquoque enim gradu wzius tantum numeri radicem suppono, in
 vulgari autem methodo, multo gravius in unoquoque gradu, novem priorum
 characterum, potestates exiguntur. Notum fit ergo : Producti numerorum
 1,2, nempe 2 rad, quadr-efle x Producti numeror. 1,2, 3, nempe 6 rad. cub.
 efle 12 Producti num. 1,2,3,4, nempe 24 rad. 4 grad.efle 2 Prod. num.
 1,2,3,4,5; nempe 120 rad. 5 grad. efle 2 Pr. num. 1,2,3,4,5,6, nempe 720
 rad. 6 grad. efle 2 Prni,2,3,4,5,6,7, nem. 5040 rad.7 grad. efle 3 &c. P:R'0"8
 1; Er M'A. Dato quolibet numero, invenire radicem propofite potelatis
 maxime que in dato contineatur ? Sit datus numerus, verbi gratia, 4335, &
 invenienda fit radix gradus, verbi gratia, quarti maximi numeri quarti
 gradus feu quadrato-quadrari qui in dato numero contineatur. Inventantur ,
 ex præcedente tractatu, quatuor numeri continui (quia quartus gradus
 proponitur } quorum productus fit maximus ejus speciei qui in 4335
 contineatur, fintque ipsi 6, 7, 8, 9. Radix quæfita est unus ex his numeris. Ut
 verd discernatur, sic procedendum est. Sumatur ex postulato radix quarti
 gradus numeri qui producitur ex multiplicatione. quatuor priorum F 4
 numerorum

88 NuMmERICARUM POTESTATUM numerorum 1,2, 3, 4,
 nempe radix gadrato-quadrata numeri 24 quæ est 23 ipse 2 cum minimo
 éontinuorum inventorum 6 unitate iminuto nempe s efficer 7. Hic 7 est
 minimus qui radix quæfita esse possit, omnes enim inferiores sunt necessarii
 minores radice quæfita. Jam triangulus numeri 4, qui exponens est propofiti
 gradus quarti, nempe 10, dividatur per ipsum exponentem 4, fitque quotiens
 2 (/vperfluum divilionis non curo): ipse quotiens 2, cum minimo
 continuorum 6 junctus, efficit 8. Ipse 8 est maximus qui radix esse possit,
 omnes enim superiores sunt necessarii majores radice quæfita. Denique
 constituentur #7 quarto gradu ipsi extremi numeri 7, 8, nempe 2401;,:4096,
 necnon & omnes qui inter' ipsos interjecti sunt, quod ad generalem
 methodum dilucet, hic enim nulli inter 7 & 8 interjacent, fed in
 remotissimis potestatibus quidam, quamvis perpauci ,. contingent. Harum
 potestatum, illa quæ æqualis erit dato numero, si ita eveniat, aut faltem quæ
 proximè minor erit dato: numero, nempe 4096, satisfaciet problemati. Radix
 enim 8 'unde orta est, ea est quæ quæritur. Sic ergo institui potest &
 enuntiatio & generalis constructio, Invenire

GENERALIS RESOLUTIO. 89 Invenire numerum qui in gradu
 propofito conflitutus maximus fit ejus gradās qui in dato numero
 contineatur ? Inveniantur ex craélatu precedenti tot numeri continui, quot
 funt unitates in exponente gradūs propofiti, quorum produétus fit maximus
 ejus fpeciel qui in dato numero contineatur. Et aflumpto produéto toridem
 continuorum ab unitate, inveniatur ejus radix gradūs propofiti; ex poffūlato
 ipfa radix jungatur cum minimo continuorum inventorum unitate minuto :
 hic erit minimus extremus. Jam criangulus exponentis ordinis per ipfum
 exponentem divifus quemlibet præbeat quotientem, qui cum minimo
 continuorum inventorum Jungatur : Aic erit maximus extremus. Ambo hi
 extremi ac numeri inter eos interpofiti in gradu propofito conflituantur.
 Harum poteftatum, ea quæ dato numero erit aut æqualis aut proximè minor
 fatisfacit problemati; radix enim unde orta eft, radix quæfita eft. Horum
 demonftrationem; paratam quidem, fed prolixam etfi facilem, ac magis
 tædiofam quàm utilem fupprimimus, ad illa, quæ plus afferunt fructūs quàm
 Jlaboris, vergentes. RE COMBINATIONES, PSN < as shoes mn ER OS es
 À. D Tr “mm. abs ù d

90 CoMBINATIONES. Pomme mme (à Po
rommmmmmmmmnimms COMBINATIONES. DE FIN 'ILT I O NES.
OmMBIrNATIONIS nomen diversè à diverlis ufurpatur ; dicam itaque quo
fénfu intelligam Si exponatur multitudo quævis rerum quarumbbet, ex
quibus liceat aliquam multitudinem aflumere, verbi gratia, fi ex quatuor
rebus per litteras 4, B, C, D, expreflis, liceat duas quafvis ad Hbitum
affumere : finguli modi quibus poffunt eligi dus differentes ex his quatuor
oblatis, vocantur hic combinationes. Experimento igitur patebit, das pofle
affumi, inter quatuor, [ex modis; poteft enim aflurmi 4 &B, vel 4 &C,vel
4A&D,vl B&C,vl B&D, vel C & D. Non conftituo 4 & À, inter modos
eligendi duas, non enim effent differentes; nec conftituo À & B, & deinde B
& A, tanquam differentes modos, ordine enim folummodàd differunt, ad
ordinem autem non attendo : ita ut uno verbo dixifle poteram,
combinationes hic confiderari quæ nec mutato ordine procedunt. Similiter
experimento patebit, #ria inter qguatuor , quatuor modis aflumi pofle,
nempe 4BC; BD, 'ACD) BCD. Sic

CoMBINATIONES. ot Sic & quatuor in quatuor, unico modo
 affumi pole, nempe 4 BCD). His igitur verbis utar : 1 in 4 combinatur 4
 modis feu combinationibus. 2 in 4 combinatur 6 modis feu
 combinationibus. 3 in 4 combinatur 4 modis feu combinationibus. 4 in 4
 combinatur 1 modo feu combinatione. Summa autem omnium
 combinationum quæ fieri possunt in 4 est 155 summa enim combinationum
 in 4, & 2 in 4, & 3 in 4, & 4 in 4, est 16. LÉ EMMA PRIMUM Numerus
 quilibet non combinatur in minore. . * A e . Verbi gratiâ, 4 non combinatur
 in 2. LEREMEMSA "ART I OZ 1 combinatur 1 combinatione. 2 En 2
 combinatur 1 combinatione. 3 in 3 combinatur 1 combinatione. Et sic
 generaliter omnis numerus semel tantum in æquali combinatur. LC
 SEUMTMS AS "LE 1 Zn I combinatur 1 combinatione. 1 On 2 combinatur
 2 combinationibus. { On 3 combinatur 3 combinationibus. Et generaliter
 unius in quovis numero toties combinatur quoties ipse continet unitatem.
 LEMMA

e2 COMBINATIONES SES nNCMA "IVe Si fént quatuor numeri, primus ad libitum, fécun: dus unitate major quâin primus, tertius ad libitum modo non fit minor fecundo , quartus unitate major quam tertius ; multitudo combinationum prini in tertio, plus multitudine combinationum Jeeundi in tertio, equatur multitudini combinatiozum fecundi in quarto. Sint quatuor numeri ut diétum ef : Primus ad libitum, verbi gratia °x
 Secundus unitate major nempe 2. Fertius ad Hibitum modd non fit minor quâm fecundus verbiidraua 4. pi han Quartus unitate major quam tertius nempe 4. Dico multitudinem combinationum 1 in 3, plus mulritudine combinationum 2 in 3, æquari multitudine combinationum 2 in 4. Quod ut paradigate fiat evidentius : Affumantur #res characteres, nempe B, C, D, jam ver aflumantur iidem tres charaéteres & nus prætereà, 4, B, C, D; deinde affumantur combinationes wnus litteræ 1n eribus, B, C, D, nempe B,C, D; affumantur quoque omnes combinationes duarum littetarum in cribus B,C, D, nempe BC, BD, CD; denique affumantur omnes combinationes duarum litterarum in quatuor A, B,C, D, nempe 4B, AC, AD, BC, BD, CD. Dico

CoMBINATIDNES, 93 Dico traque, tot esse combinationes
duarum litterarum in quatuor A, B, C, D, quot sunt dvarum in sribus B, C,
D, & infuper quot vrius in tribus BCD: Hoc manifestum est ex weneratione
combinationum; combinationes enim duarum in quacxor formantur, partim
ex combinationibus duarum in tribus ; partim ex combinationibus vrius in
tribus y quod ita evidens fiet. .. Ex combinationibus duarum in quatuor,
nempe AB, AC, AD, BC, BD, CD, quaedam sunt in quibus 1pfa littera 4
ufurpatur, ut istae 4B, AC, 4 D; quedam quae ipsa A carent ut istae BC, BD,
CD. h. | Porro, combinationes 1ille BC, BD, CD, dusrum in quatuor A, B,
C, D, quae ipso A carent, constant ex residuis cribus B, C, D; sunt erco
combinationes duarum in tribus B, C, D: 1gitur combinationes duarum in
cribus B, C, D, sunt quoque combinationes duarum in quatuor A; B, C, D,
nempe illae quae carent ipso 4. Illae verd combinationes 4P, AC, AD, duarum
In quatuor 4, B,C, D, in quibus 4 ufurpatur, f ipso A spolientur, rélinquent
residuas litteras ESC D, quae sunt ex cribus litteris B,C, D, suntque
combinationes vnius litterae in cribus B,C, D; igitur combinationes zrius
lirreræ in sribus B, C, D, nempe B, C, D, ascito A, efficiunt AB, 4C, AD,
quae

04 COMBINATIONES. quæ constituunt combinationes duarum litterarum in quatuor A, B, C, D, in quibus A usurpatur. Joitur combinationes duarum litterarum in quatuor A, B, C, D, formantur partim ex combinationibus trius in tribus B, C, D, partim ex combinationibus duarum in tribus B, C, D; quare multitudo primarum æquatur multitudini reliquarum, | Q::E::D, Eodem prorsus modo in reliquis ostendetur exemplis; verbi gratia: Tot esse combinationes numeri ... 29 in 49 quot sunt combinationes numeri ... 29 in 39. & insuper quot sunt combin. numeri 28 in 39. Quatuor enim numeri 28, 29, 39, 40, conditionem requirunt habent. Sic tot sunt combinationes numeri ... 16 in 56: quot sunt combinationes numeri ... 16 in 55. ac insuper quot sunt combin. numeri 15 in 55: &c. LEemMmMA VV. In omni Triangulo Arithmetico summa cellularum ferie cujuflibet, æquatur multitudini combinationum exponentis ferie, in exponente trianguli. | Sit triangulus quilibet, verbi gratia, quartus G Da : dico summam cellularum ferie cujufvis, verbi gratia, /ecunde g +486, æquari multitudinem combinationum numeri 2, exponentis ferie, in numero 4, exponente quarti trianguli. Sic

CoMBINATIONES, 9\$ Sic dico fummam cellularum feriei, verbi gratia, guinte triançuli, verbi gratià, oéfavi, æquari mulutudini combinationum numeri \$ in numero 8, &xc. Quamvis infiniti fint hujus propofitionis cafus, funt enim infiniti trianguli, breviter ramen demonftrabo, pofitis duobus aflumptis. Primo, quod ex fe patet, ir primo triangulo eam proportionem contingere : famima enim cellularum unicæ fuæ feriei, nempe numerus primæ cellulæ G, id eft unitas, æquatur multitudini combinationum exponentis feriei, in exponente trianguli, hi enim exponentes funt unitates; unitas ver in unitate unico modo ex Lemmate 2 hujus combinatur. Secundo, / ea proportio in aliquo triangulo contingat ; id eft ft fumma cellularum uniufcujufcunque feriei trianguli cujufdam, equetur multitudini combinationum exponentis feriei in exponente trianpuli dico & eandem proportionem in triangulo proxirè féquenti contingere. His affumptis, facilè oftendetur in fingulis triangulis eam proportionem contingere; contingit enim in primo, ex primo affumpto ; immo & manifesta quoque 1pfa eft in fecundo triangulo; ergo ex fecundo affumpto & in fequenti triangulo continuoir, quare & in fequenti & in infinitum. Totum ergo negotium in fecundi affumpti demonftratione confiftit, quod ita expedietur. Si criangulus quilibet, verbi gratià, fertius in quo ne me M IT RE OR ns | AT EE = TREK TASER ET, ÿ 7

96 CoOMBINATIONES: quo supponitur hæc proportio, id est,
 summa cellularum seriei prime $G+o+4-7$ æquari multitudi-
 combinationum numeri 1, exponentis seriei in numero 3, exponente
 trianguli; summa vero cellularum /fecunde seriei $e+4$ æquari multitudi-
 combinationum numeri 2, exponentis seriei, in numero 3, exponente
 trianguli; summa verd cellu- | larum tertie seriei, nempe cellulam Z,
 æquan | combinationibus numeri 3, exponentis seriei, in 3 exponente
 trianguli: dico & eandem proportionem contingere & in frequenti triangulo
 quarto, id est, summa cellularum, verbi gratia, /ecunde [eriei $g+d+8$,
 æquari multitudi combinationum numeri 2, exponentis seriei, in numero
 4, expo= nente triangulr. | Etenim $9+!$ æquatur multitudi combinationum
 numeri 2 in 3 ex hypothesi; cellula verd $\hat{I}$ æquatut, ex generatione trianguli
 arithmetici, cellulis $G+o+7$; hæ verd cellule æquantur ex hypothesi
 multitudi combinationum numeri 1 in 3. Ergo cellulæ, $e++9$ æquantur
 multitudi combinationum numeri 2 in 3, plus multitudine combinationum
 numeri : in 3, hæ autem multitudes æquantur, ex quarto Lemmate hujus,
 multitudi combinationum numeri 2 in 4. Ergo summa cellularum 94440
 æquatur multitudi combinationum numeri 2 in 4. QUESD, Idem

COMBINATIONES. 97 Idem Lemuma V problematicè enuntiatum. Datis duobus numeris inequalibus , invenire in triangulo arithmetico quod modis minor in majore combinetur ? Propofiti funt duo numeri, verbi gratiâ, 4 & 6, oportet reperire in triangulo arithmetico quot modis 4 combinetur in 6. PRIMA METHODUS. Summa cellularum quarte ferie fextri trianguli, fatisfacit , ex precedente, nempe cellule $D+4+E+EF$. Hoc est numeri 1: 44-10, feu 15 : ergo 4 in 6 combinatur 15 modis. SECUNDA METHODUS. Cellula quinta, bafis feptime K, fatisfacit; $i4/i$ numeri 5,7, funt proxime majores his 4, 6. Etenim illa cellula, nempe K', feu 1, æquatur fumma cellularum quarte ferie /exti trianguli $D+E+F$, ex generatione. MONITUM. In bafi /éprimâ funt feptem cellulæ, nempe V,Q,K,r,6,1N,8, ex quibus quinta aflumenda est; poteft autem ipfa duplici modo affumi, funt enim duæ bafes extremitates 77, 6: fi ergo ab extremo # inchoaveris, erit #7 prima, Q fecunda, K tertia, p quarta, £ quinta quæfita. Si verd à Ç inTOME F, G ciplas, 2 D TES ST NS CSN Le Lis k.

08 CoMBINATIONES. cipias , erit € prima, À fecunda , £ tertia, F quarta, RU CRC à K quinta quæfita : funt igitur duæ quæ poflunt di ci, quinte ; fed quoniam ipfx funt æquè ab extremis remotæ, ideèque reciprocæ, funt ipfæ eadem; quare indifferenter afflumi alterutra poteft, & ab alterutrà bafis extremitate inchoari. MO N TT UM. Jam fatis patet, què bene convenient combinationes & triangulus arithmeticus, & 1ded, proportionès inter feries, aut inter cellulas triangul obfervatas, ad combinationum rationes protendi, ut in fequentibus videre ef.

PROPOSITIO PRIMA. Duo quilibet numeri, æquè combinantur in eo quod amborum agoregatum eff. Sint duo numeri quilibet 2, 4, quorum agsregatum 6 : dico numerum 2 toties combinari in 6, quoties ipfe 4 in eodem 6 combinatur, zempe fingulos, modis 15. Hoc nihil aliud eft quàm confeétatio 4 trianguli arithmetici, & poteft hoc uno verbo demonfcrari; cellule enim, reciproce funt eadem. Si verd ampliori demonftratione egere videatur , hæc fatisfaciert. Multitudo combinationum numeri 2 in 6 æquatur ex \$ Lemmare, ferie /écunde trianouli /exti, < nempe

ComMBINATIONES,. 99 nempe cellulis $\zeta + L404 + R4 + S$, feu
 cellule Z; fic multitudo quoque combinationum numeri 4 in 6 æquatur, ex
 eodem, ferie quartæ trianguli extri, nempe cellulis $D4 + E + 4F$, feu cellule K;
 1pfa verd K, est reciproca ipfius ξ , idedque 1pf æqualis; quare & multitudo
 combinationum numeri z in 6, æquatur multitudini combinationum numell
 4 in 6. Q: ED. COROLLARIU NM. Ergo omnis numerus. toties combinatur
 in proxime majori, quot funt unitates in ipfo majori. Verbi gratià, numerus 6
 in 7 combinatur /epries, & 41 in s guinguies, &c. Ambo enim numeri 1, 6, à
 HEAR: æque combinantur in aggregato eorum 7, ex propoJitione hac x;
 fed 1 in 7 combinatur fepties, ex Lemmate 3. Joitur 6 in 7 combinatur
 quoque fepties. PrRroPositio II. Si duo rumeri combinentur in numero quod
 amborum agoregaturm efé unitate rminuto; multitudines combinationum
 erunt inter fe, ut ip/t rumeri reciproce. Hoc nihil aliud est quim confeëtatio
 17 trianguli arithmetici. Sint duo quilibet numeri 3, ξ , quorum fumma 8,
 unitate minuta, est 7: dico multitudinem combinationum numeri 3 in 7, efle
 ad multitudinem combinationum numeli ξ in 7, ut ξ ad 3. G 2 Multitudo

[OO COMBINATIONES. Multitudo enim combinationum numeri 3 in 7; æquatur, ex s Lemmate, tertie ferie septimi trianguli arithmetici, nempe $A + B + C + D + E$, feu 3.5. Multitudo autem combinationum numeri 3 in 7, æquatur, ex eodem, quintæ ferie ejusdem septimi trianguli, nempe $A + B + C + D + E + F$, feu 21; in triangulo autem septimo, series quinta & tertia sunt inter se ut 3 ad 5, ex combinatione 17 trianguli arithmetici, aggregatum enim exponentium ferierum 3, 5, «nempe 8, æquatur exponenti trianguli 7 unitate aucto. Propositio III. Si numerus combinetur, primo in numero qui sit duplus 3, deinde in ipso numero duplo unitate minuto, prima combinationum multitudo, secunde dupla erit. Hoc nihil aliud est quam constructio 10 trianguli arithmetici. Sit numerus quilibet 3, cujus duplus 6, qui unitate minutus, est 5 : dico multitudinem combinationum numeri 3 in 6, duplam esse multitudinis combinationum numeri 3 in 5. Possem uno verbo dicere omnis enim cellula dividens dupla est precedentis corradicalis : sic autem demonstro. Multitudo enim combinationum numeri 3 in 6, æquatur, ex s Lemmate, cellule 4 bases 7, nempe, 1 Ju

COMBINATIONES: IOX feu 20; quæ quidem ?, medium bafis occupat loCum, quod inde procedit quidd 3 fit dimidium 6, unde fit ut 4 proxime major quàm 3, medium ocèupet locum in numero 7 proximè majori quam 6. ailtur 1pfa cellula quarta + eft in dividente; quare dupl eft cellulæ F, feu w, éx 10 confeétatione trianguli arithmetici, quæ quidem « eft quoque quarta: cellula bafis fexte; idedque ex Lemmate \$, ipfa o feu F, æquatur multitudint combinationum numeri 3in \$; ergo multitudo combinationum 3 in € dupla eft multitudinis combinationum 3 in s. Q. E. D. PrRropvosrrTrro IV. Si Jint duo numeri proximi, & alius quilibet in urroque combinetur, multitudo combinationum que Junt in majore, erit ad alteram multitudinem , ur major numerus , ad ipfummet majorem dempto eo qui combinatus efl. Sint duo numeri unitate differentes ç, 6; & alius quilibet 2 combinetur in \$, & deinde in 6: dico multitudinem combinationum ipfus 2 in 6, elle ad multitudinem combinationum ipfius 2 ins, ut 6 ad G— 2. | Hoc ex 13 confeétatione trianguli arithmetici eft manifestum & fic oftendetur. Multicudo enim combinationum ipfus 2 in 6, æquatur fummæ cellularum feriei 2 trianguli 6, G 3 nempe

#62 COMBINATIONES. nempe : +54 RS, ex Lemmate < , hoc est cellulae ?, feu 15. Sed, ex eodem , multitudo combinationum ejusdem 2 in 6, æquatur summæ cellularum ferie 2 trianguli s, nempe 944480, feu cellulae «, feu 10; est autem cellula £ ad o ut 6 ad 4, hoc est ut 6 ad 6—2, ex 13 confectatione trianguli arithmetici. PROPOSITIO V. Si duo numeri proximi, in alio quolibet combinantur, erit multitudo combinationum minoris, ad alteram, ut major numerus combinatus ; ad numerum in quo ambo combinati sunt dempto minore numero combinato. Sint duo quilibet numeri proximi 3, 4, & alius quilibet 6 : dico multitudinem combinationum minoris 3 in 6, esse ad multitudinem combinationum majoris 4 in 6, ut 4 ad 6—3. Hæc cum 11 confectatione trianguli arithmetici convenit & fit ostenditur. Multitudo enim combinationum numeri 3 in 6, æquatur, ex Lemmate \$, summæ cellularum ferie 3 trianguli 6, nempe 4+ B+C+H, feu cellulae p, feu 20. Multitudo vero combinationum numeri 4 in 6, æquatur, ex eodem, summæ cellularum ferie 4 trianguli 6, nempe D+—E+F, feu cellulae X, feu 153 est autem p ad X ut 4 ad 3, feu ut 4 ad 6—3, ex confectatione 11 trianguli arithmetici. PROPOSITIO

COMBINATIONES. 10% PrRoProsiTiro VI. Si Jênt duo numeri quilibet quorum minor in majore combinetur, fint autem & ali duo his proximé majores quorum minor in Imajore quoque combinetur: erunt multitudines combinationum inter fe, ut ht ambo ultimi numeri. Sint duo quilibet numeri 2, 4, alii verd his proximè majores 3, ç : dico multitudinem combinationum numeri 2 in 4, efle ad multitudinem Combinationum numeri 3 in \$, ut 3 ad \$. Confeétatio 12 trianguli arithmetici hanc continet & fic demonftratur. Multitudo enim combinationum ipfus 2 in 4, #quatur, ex Lemmate \$, fummae cellularum feriei 2 trianouli 4, nempe 9 +4 +8, feu cellulæ €, feu 6. Multitudo verd combinationum numeri 3 in \$, æquatur, ex eodem, fummae cellularum feriei 3 trianguli \$, nempe 4+B+-C, feu cellulæ F, feu 10; eft autem C ad F, ut 3 ad \$, ex 12 confeétatione trianguli arithmetici. LR MM A eV: Summa omnium cellularum bats trianguli cujufliber arithmerici unitate minuta, equatur [ummae omniur? combinationurm que fteri poijunt 11 JUIMEIO que proxime minor eft quam exponens bafts. Sit criangulus quilibet arithmeticus, verbi gratià, G 4 quintus

104 COMBINATIONES. quintus G Hu : dico fummam
cellularum fuz bals $H+E+C+R-\text{ÆHu}$, minus unitate, feu minus un& ex
extremis H vel », æquari fummæ omnium combinationum quæ fieri poffunt
in numero 4 qui proximè minor eft quàm exponens bafis \$. Id eft: dico
fummam cellularum $R+HC+HE-+H$ (/fupprimo enim extremam u) id eft
4416441, feu 1ç, æquari multitudini combinationum numeri x in 4, nempe
4; plus multitudine combinationum numeri 2 in 4, nempe 6; plus
multitudine combinationum numeri 3 in 4, nempe 4; plus multitudine
combinationum numeri 4 in 4, nempe 1. Que quidem funt omnes
combinationes que fieri poffunt in 4; fuperiores enim numeri \$,6,7,&c. non
combinantur in numero 4: MAJOT ENLM TUMETUS in minore non
combinatur. Multitudo enim combinationum numeri x in 4, æquatur, ex \$
Lermate, cellulæ 2 bafis \$, nempe R, feu 4. Multitudo verd combinationum
numeri 2 in 4, æquatur cellulæ 3 bafis s , nempe €, feu 6. Multitudo quoque
combinationum numeri 3 in 4, æquatur cellulæ. 4-bafis \$, nempe Æ, feu 4.
Multitudo denique combinationum numeri 4 in 4, æquatur cellulæ \$ bafis \$,
nempe A, feu 1. Ioitur fumma cellularum bafis quinte demptà extrema feu
unitate, æquatur fummæ omnium combinationum quæ poffunt fieri in 4.
Proposrrro

CoMBINATION-E'6; 106 ProrosiTro VII. Summa omnium combinationum que fieri possunt in numero quolibet, unitate aucta, est numerus progressionis duplæ que ab unitate sumit exordium, quippe ille cujus exponens est numerus proximè major quam datus. Sit numerus quilibet, verbi gratià, 4 : dico summam omnium combinationum quæ fieri possunt in 4, nempe 15, unitate auctam, nempe 16, esse numerum quantum (nempe proximè maiorem quam quartum) progressionis duplæ quæ ab unitate sumit exordium. Hoc nihil aliud est quam 7 confectio trianguli arithmetici, & sic uno verbo demonstrari potest, omnis enim basis est numerus progressionis duplæ : sic tamen demonstratio. Summa enim combinationum omnium quæ fieri possunt in 4, unitate aucta, æquatur, ex Lemmate 6, summæ cellularum basis quinque ; ipsa vero basis est quintus numerus progressionis duplæ quæ ab unitate sumit exordium, ex 7 confectatione trianguli arithmetici. PRO PO S1Tro VIE. Summa omnium combinationum que fieri possunt in numero quolibet unitate aucta, dupla est [ummae Omnium combinationum que fieri possunt in numero proximè minore unitate aucte. Hoc convenit cum 6 confectatione trianguli arithmetici

,

106 COMBINATIONES. metici, nempe omnis bafts dupla eff
precedens: fic autem ostendimus. Sint duo numeri proximi 4, 5 : dico
summam combinationum quæ fieri possunt in 5, nempe 31, unitate auctam,
nempe 32, esse duplam summæ combinationum quæ fieri possunt in 4,
nempe 15, . tate auctæ, nempe 16. Summa enim combinationum quæ fieri
possunt in 5, unitate aucta, æquatur, ex precedente, [exto numero
progreffionis duplæ. Summa verd combinationum quæ fieri possunt in 4,
unitate au, æquatur, ex eodem, quinto numero progreffionis duplæ. Sextus
autem numerus progreffionis duplæ, duplus est proximè præcedentis, nempe
quinque. Propositio IX. Summa omnium combinationum que fieri possunt in
quovis numero unitate minuta, dupla est summe + . - 55 y combinationum
que fieri possunt in numero proximè minori. Hæc cum præcedente omnino
convenit. Sint duo numeri proximi 4, 5 : dico summam omnium
combinationum quæ fieri possunt in 5, nempe 31, unitate minutam, nempe
30, esse duplam omnium combinationum quæ fieri possunt in 4, nempe 15.
Etenim ex precedente summa combinationum que sunt in 5, unitate aucta,
dupla est summæ combinationum

CoOMBINATIONES: 107 binationum quæ fiunt in 4, unitate autæ : fi ergo ex minor fummaâ auferatur unitas, & ex duplâ fumme auferantur duæ unitates, reliquum fummx duple, nempe furma combinationum que fiunt in \$ unitate minuta, remanebit dupla refidui alterius fummae, nempe /urmume combinationum qua fiunt in 4.

PROPOSITO A: Summa omnium combinationum que fieri possunt in quolibet numero , minuta ipfomet numero, & quatur fumme omnium combinationum quæ freri possunt in fingulis numeris proposito ‘minoribus. Hæc cum 8 confectatione trianguli arithmetici concurret quæ sic habet, ba/ts quolibet unitate minuta, æquatur fumme omnium præcedentium. Sic autem ostendo. Sit numerus quilibet \$: dico fummam omnium combinationum quæ possunt fieri in \$, nempe 31 ipfo \$ minutam, nempe 26, æquati fummae omnium combinationum quæ possunt fieri in 4, nempe is; plus fummaâ omnium quæ possunt fieri in 3, nempe 7; plus fumma omnium quæ possunt fieri InoDe nempe 3; plus eâ quæ potest fieri in 1, nempe 1, quarum agregatus est 26. Étenim proprium numerorum hujus prospectionis duplæ illud est, ut quilibet ex ipfis, verbi grata, fextus 32, exponente suo minutus, nempe 6, id est 26, æquetur fummae inferiorum numerorum | hujus

108 CoMBINATIONES. huius progreffionis, nempe $164+8+4+2+1$ unitate minutorum, nempe $15743+140$, nempe 26. Unde facilis est demonstratio hujus propositionis. PROBLEMA PRIMUM, Dato quovis numero, invenire [urnmam Orr2nLurN combinationum que in ipso fieri possunt. Absque triangulo arithmetico. Numerus progressionis duplæ quæ ab unitate sumit exordium cujus exponent proxime major est quem numerus datus, satisfaciet problemati, modo unitate minuatur. Sit numerus datus, verbi gratia, 5, quaeritur summa omnium combinationum quæ in 5 fieri possunt. Numerus sextus progressionis duplæ quæ ab unitate incipit, nempe 32, unitate minus, NEMPE 31 satisfacit, ex Lemmate 6; ergo possunt fieri 31 combinationes in numero 5. PROBLEMA II. Datis duobus numeris inæqualibus, invenire quot modis minor in maiore combinetur. Absque triangulo arithmetico. Hoc est propriè ultimum problema Tractatus Trianguli Arithmetici, quod sic resolvo. Productus numerorum qui præcedunt differentiam

CoOMBINATIONES, 109 tam datorum unitate auétam, dividat
 productum totidem numerorum continuorum quorum primus fit minor
 datorum unirate auctus : quotiens est quæfitus. Sint dati numeri 2, 6 :
 oportet invenire quot modis 2 combinetur in 6. Affumatur eorum
 differentia 4 quæ unitate auéta est \$. Jam affumantur omnes numeri qui
 præcedunt ipsum \$, nempe 1, 2, 3, 4, quorum productus fit 24. Affumantur
 totidem numeri continui quorum primus fit 3, nempe proximè major quam 2
 qui minor est ex ambobus datis, nempe 3, 4, 5, 6, quorum productus 360,
 dividatur per præcedentem productum 24: quotiens 1 \$ est numerus
 quæfitus. Zra ut numerus 2 combinetur in 6, modis 1 \$ differentibus. Nec
 difficilis demonstratio. Si enim quærat in triangulo arithmetico quot
 modis 2 combinetur in 6, adsumenda est cellula 3 basis +, ex Lemmate \$,
 nempe cellula £, & ipse numerus exponit multitudinem combinationum
 numeri 2 in 6. Ut autem inveniatur numerus cellulae £ cujus radix est 5, &
 exponens feriei 3, oportet, ex problemate trianguli arithmetici, ut produélus
 numerorum qui præcedunt \$, dividat productum totidem numerorum
 continuorum quorum primus fit 3, & quotiens erit numerus cellule £; fed
 idem divisor ac idem dividendus in constructione hujus propositus est, quare
 est

110 CoMBINATIONES. & eundem quotientem fortita est divisio;
ergo in hac constructione repertus est numerus cellulae 2^6 , quare & exponens
multitudinis combinationum numeri 2 in 6, quae quaerebatur. Q. E. F. E. D,
MONITU M. Hoc problemate tractatum hunc absolvere confitebor, non
tamen omnino sine molestia, cum multa alia parata habeam; sed ubi tanta
ubertas, vi moderanda est fames : his ergo pauca haec subiiciam.
Eruditissimus ac mihi chanissimus, D. D. de Gaunier, circa combinationes,
assiduo ac perutili labore, more suo, incumbens, ac indigens facil
constructione ad inveniendum quoties numerus datus in alio dato
combinetur, hanc ipse sibi praxim instituit. Datis numeris, verbi grati, 2, 6,
invenire quot modis 2 combinetur in 6. Affumatur, inquit, progressio
duorum terminorum quia minor numerus est 2, inchoando à majore 6; ac
retrogradiendo, seu detrahendo unitatem ex unoquoque termino, hoc modo
6, 5; deinde affumatur altera progressio inchoando ab ipso minore 2 ac
similiter retrogradiendo hoc modo 2, 1: Multiplicentur invicem numeri
primae progressionis 6, 5, fitque productus 30. Multiplicentur & numeri
secundae progressionis 2, 1, fitque productus

CoMBINATIONES. 111 tus 2. Dividatur major productus per minorem : quotiens est quæfirus. Excellentem hanc solutionem ipse mihi ostendit, ac etiam demonstrandam proposuit; ipsam vero fane miratus sum, sed difficultate tertius vix opus fuisse, & ipsi auctori relinquendum existimavi; attamen trianguli arithmetici auxilio, sic proclivis facta est via. | In § Lemmate hujus, ostendi numerum cellulae $\mathfrak{L}$, exponere multitudinem combinationum numeri 2 in 6; quare ipse reciproca cellula K eundem numerum continebit. /erem cellula ipsa K est quotiens divisionis in quæ productus numerorum 1, 2, qui præcedunt 3 radicem cellule K, dividit productum totidem numerorum continuorum quorum primus est § exponens seriei cellule K, nempe numerorum §, 6. Sed ille divisor ac dividendus sunt iidem ac illi qui in constructione avici sunt propositi; igitur eundem quotientem fortitur divisio, quare ipse exponit multitudinem combinationum numeri 2 in 6, ut quærebatur. Q. ED. Hac demonstratione affectus, jam reliqua quæ Anvitus suppresseram libenter omitto, aded dulce est amicorum memorari. + POTESTATUM

IIII Z POTESTATUM NUMERICARUM = } Sin (0 AA ———
 ——— — (RS POTESTATUM NUMERICARUM so U M M A. M
 OPNATITEUSM: ee ——— ÂTis, ab unitate, quotcunque numeris con-
 tinuis, verbi gratiâ, 1, 2, 3, 4, invenire summam quadratorum eorum, nempe
 $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$, tradiderunt veteres; imò etiam & summam cuborum
 eorundem; ad reliquas verd potestates non protraxerunt suas methodos, his
 solummodò gradibus proprias. Hic autem exhibetur, non solum summa
 quadratorum, & cuborum, sed & quadrato-quadratorum, & reliquarum in
 infinitum potestatum. Et non solum à radicibus ab unitate continuis, sed à
 quolibet numero initium summentibus, verbi gratiâ, numerorum 8, 9, 10,
 &c. Et non solum numerorum qui progressionem naturalem procedunt, sed &
 eorum omnium qui progressionem, verbi gratiâ, Cujus differentia est 2, aut 3;
 aut 4, aut alius quilibet numerus, formantur, ut istorum 1, 3, 5, 7, &c. vel
 horum 2, 4, 6, 8, 10; qui per incrementum binarii augentur, aut ho-
 rum 1, 4, 7, 10, &c. qui per incrementum ternarium, & sic de cæteris; sed, & quod amplius
 eff, à quolibet numero exordium summat illa progressio, five incipiat

S u M M A. 113 piat ab unitate, ut 1fti 1 » 45.75 103 13 + &C.
 qui funt ejus progreflionis quæ per incrementum ternarii procedit, & ab
 unitate fumit exordium; féyé ab aliquo hujus prosreflionis numero incipiat
 ut 1ftt 7, 10,13, 16, 193 five quod ulrimum efl, à numero qui non fit ejus
 progreflionis, ut 1ft1 \$, 8 11, 14, quorum progreflio per ternarii differentm
 procedit, & à numero 5 , ip progreflioni extraneo ; exordiuim fumit. Et guod
 fanè felicirer inventum efl, tam multos differentes cafus , unica ac
 generaliffima refolvit methodus ; aded fimplex, ut abfque litterarum auxilio,
 quibus difhciliores egent enuntiationes , paucis lineis contineatur : ut ad
 finem problematis fequentis patebit. DEFINITIO. Si binomium, cujus
 alterum nomen fit À, alrerum ver numerus quilibet ut 3, nempe 4+ 3, ad
 quamlibet conftituatur poteftarem ut ad quartum oradum, cujus hæc fit
 expoñitio : A+ 12 ASH 4 A Hro8. AHBr: Ipfi numeri 12, 54, 108, per
 quos ipfe 4 mulüplicatur in fingulis gradibus, quique partim ex numeris
 figuratis, pattim ex numero 3, qui binomii efl fecundum nomen, formantur,
 vocabuntur coefficientes iplius À. Erit ergo ir hoc exemplo 12 coefficiens À
 cubi, & \$4cocfficiens À quadrati, & 108 coefhiciens À radicis. Numerus
 verd 81 zumerus abfolutus dicetur. TOME F. H LEMMA.

114 POTESTATUM NUMERICARUM LEMMA. Sit radix
 quaelibet 14; altera verd fit binomiur 14 3 cujus primum nomen fit 14,
 alterum vero alius quilibet numerus 3, ita ut harum radicum 14, & 14+- 3,
 differentia fit 3. Conftituantur ipfæ in quolibet gradu ut in quarto : ergo
 quartus gradus radicis 14 eft 14⁴; quartus verd gradus binomii LA
 ERMONE TERRES e T A S T R C 14% 12.145 54 14H 108. 14H87. Cujus
 quidem binomii primum nomen 14, eodẽm coefficientes fortitur in fingulis
 gradibus , quos A fortitus eff in fimilibus gradibus in expofitione ejufdem
 gradus binomii A + 3, quod rationi confentaneu efl; harum verd poteftatum,
 nempe hujus 14% & hujus 14 12.145 54 14" 1108.14 81, differentia efr 2.
 143 54 14" 108. 1481: quæ quidem conftat primd, ex radice 14 conftituta in
 fingulis gradibus propofito. gradui quarto inferioribus, nempe in certio, in
 fecundo & in primo, & in unoquoque multiplicatâ per coefficientes quos A
 fortitur in fimilibus gradibus, in expolitione ejufdem gradus binomii 4 + ; ;
 deinde ex ipfo numero 3, qui eff differentia radicum , conf: tuto in
 propofito quarto gradu, numerus enim ab/0: dutus 8x eff quartus gradus
 radicis 3. Hinc igitur clcietur Canon ifle : Duarum

S U M M: A 215 Duarum Jimilium poteclarum differentia,
 æquatur, differentie radicum conflute in eodem gradu in quo sunt
 poteclares propofite ; plus minori radice conflutè in fingulis gradibus
 propofito gradui inferioribus ac in unoquoque multiplicat& per:
 coefftcientes quos À fortiretur in fimilibus oradibus; JE binomium cujus
 primum nomen effe À, alterum vero effe differentia radicum.,
 conflitueretur in eâdem poteclate propofitâ. Sic ergo differentia inter 14% &
 11*, erit... 12,115 S4 11 108.11 +81. Differentia enim radicum eft 3. Et fic
 de cæreris. Ad fummam poteclarum cujuflibet prooreflionis inveniendam
 unica ac generalis methodus. Datis quotcunque numeris ; in qualibet
 progreffione, à quovis numero inchoante, invenire Quarumnyis poteclatum
 eorum fummam ® Quilibet numerus \$, fit initium progreffionis Quæ per
 incrementum cujufvis numeri, verbi gratâ, cernarii procedat, & in ea
 progreffione dati fint quoclibet numeri, verbi gratiâ,ifti s,8,11,14, qui omnes
 in quâcunque poteclate conflituantur uc in tertio oradu feu cubo. Oportet
 invenire fummam horum cuborum, nempe \$ +83 11 545 Cubi illi funt 125
 51241331 +2744,quoH 2 UM me — — =. 70008 à lt. A || = PIRE = ”* ne
 rethn RTS COOPER 2 ed D SR S + La D he

116 POoTESTATUM: NUMERICARUM rum fumma eft 4712
 quæ quæritur & fic invenitur. Exponatur binonuum 4-3 cujus primum
 nomen fit 4, alrerum verd fit numerus 3 qui eft differentia progreflionis.
 Conftituatur binomium hoc 443 in gradu quarto qui proxime fuperior eft
 Pate tertio, fitque hæc ejus expoñitio «+ . . . LL NE A+ 12. ASH ç4 A°
 +108. AS Jam affumatur numerus 17 qui in progreflione propofità proximè
 fequitur ultimum progreflionis cerminum datum 1 4. Et conftituto ipfo 17 in
 eodem gradu quarto, nempe 83 521, auferantur ab eo, hæc: Primd , fumma
 numerorum propofitorum \$ +8 ii i4, nempe 38: multiplicata per numerum
 108, qui eft coefficiens 1phus À radicis. Secundd, fumma quadratorum
 eorundem numerorum \$, 8, 11, 14, multiplicata per numetum \$4, qui eft
 coefficiens À quadrati. Et fic deinceps procedendum effet fi fupereffent
 gradus ali inferiores 1pfi gradui tertio qui ptopofitus ef. Deinde auferatur
 primus terminus propofitus \$ in quarto gradu conflitutus. Denique auferatur
 numerus 3 qui eft differentia progreflionis in eodem gradu quarto
 conflutus, ac toties fumptus, quot funt numeri prop li, nempe quater èr hoc
 exemplo. Refiduum erit multiplex fummae quæfitæ, eamque

Su MMA . 117 que cories continebit, gzories numerus 12 qui est
 coefficientis ipsius A cubi, seu A in gradu tertio proposito, continet unitatem.
 Si ergo ad praxim methodus reducatur, numerus 17 constituendus est in 4
 gradu, nempe 83521, & ab eo hæc auferenda sunt: Primo, summa
 numerorum propositorum: $s + 8$ “+ii<14, nempe 38, multiplicata per 108,
 unde oritur productus 4104 Deinde summa quadratorum numerorum
 propositorum, id est, $s + 8^2 + 11^2 + 14$, nempe $1 + 64 + 121 + 196$, quorum
 summa est 406, que multiplicata per 4 efficit 21924. Deinceps auferendus
 est numerus $-s$ in quarto gradu, nempe 625. Denique auferendus est
 numerus 3 in tertio gradu, nempe 81, quater sumptus, nempe 324. Numeri
 ergo auferendi, illi sunt 4104, 21924, 625, 324; quorum summa est 26977,
 quæ ablata à numero 83521, superest 56544. Hoc ergo residuum continebit
 summam quæsitam, nempe 4712, multiplicatam per 12; & productum 4712 per
 12 multiplicata efficit 56544. Paradigma facile est construere; hoc autem
 sic demonstrabitur. Etenim numerus 17 in 4 gradu constitutus qui quidem
 sic exprimitur $L^7 \ddot{Y}$ æquatur $17 - 14f$, Hiat—rit. Hrrt—siH8t—çst+ st H;
 Solus

118 POTESTATUM NWNUMERICARUM Solus enim 17*
 fignum affirmationis folum fortitur, reliqui autem affirmantur ac negantur.
 Sed differentia radicum 17, 14, est 3, eademque est differentia radicum 14,
 11, eademque radicum 11, 8, ac etiam radicum 8, \$s. Igitur ex præmiflo
 Lemmate: $17 + \text{---} 14 \# \text{æquatur } 12$. $145 + 54$. $14^\circ 108$. 1481 , Sicr4*—
 $11 \# \text{æquatur } 12$. $113 \ 54$. $117 \ 108$. $11 + 81$. Sicrrt— $8 + \text{æquatur } 1z$. $83 \text{---} 54$
 87---

S u M M A. 119 Remanet 174 minus his, nempe —\$ —8 —
 11 — 14 multiplicatis per 108; — 5 — 8° — 11*—14* multiplicauis per
 54; —81—81—81 —81; RE | æqualis 55 851 115 + 145 multiplicatis per
 12, DRE D. Sic ergo poteft intitui enuntiatio & generalis conftruétio.
 SuMMA POTESTATUM. Datis quorcunque numeris , in quälibet
 progrefſione, à quouis numero initium [umente , invenire fummam
 quarumvis poteftatum eorum£ Exponatur binomium, cujus primum nomen
 fit 4, alterum verd fit numerus qui differenria progrefſionis eft, &
 conſtituatur hoc binomium in gradu qui proxime fuperior eft gradui
 propoñro, & in expofitione poteltatis ejus notentur coefficientes quos À
 fortitur in fingulis gradibus. Conſtituatur & in eodem gradu fuperiori
 nume"us qui in eâdem proſrefſione propofità proximè Jequitur ultimum
 progrefſionis terminum propofitum, Et ab eo auferantur hæc : Primd, primus
 terminus progrefſionis datus , [eu minimus numerus datorum in eodem
 fuperiori gradu conflitutus. Secundu , numerus qui differentia eft
 progrefſionis H 4 in | H ï A > = —- EE — . PR ' 23— z Fe (Ure À Se st
 Le — 4 LS EX 2 — — — nr à 5 4 Die Unie Le ra 4 LC 4° ne mt 2 = 3 ss

8. æ 4 120 POTESTATUM NUMERICARUM in eodem.

fuperiori gradu conflitutus, ac toties Jumptus quot funt termini dari. Tertid, auferantur finguli numeri dari, in fingulis gradibus propo/fito gradui inferioribus conflitutt, ac in unoguoque gradu multiplicatt per jam notatos coefhcientes gvos À fortitur in iifdem gradibus in expofitione hujus fuperioris gradäs binomi primo aflumpei. Reliquum eff multiplex fumme quefite , eamque toties continet quoties cocfliciens quem À in gradu propofñito forritur continet unitatem. MO N'ITU M: Praxes jam particulares fibi quifque pro genio fuppeditabit : verbi gratia, fi quæris fummam quotlibet numerorum progreflionis naturalis à quolibet inchoantis, hic, ex methodo generali, elicietur Canon : In progreflione naturali à quovis numero inchoante, differentia inter quadraturn minimi termini & quadratum numeri qui proximé major eft ultimo termino, minuta numero qui exponit multitudinem;s dupla eff aggregati ex omnibus. Sint quotlibet numeri naturali progreflione continui, quorum primus fit ad libitum, verbi gratia, quatuor Mt \$, 6,7, 8 : dico 9°—\$ — 4 æquari duplo \$s+6+7+8. Similes canones & reliquarum poteftatum fummis

SiusM'M A: 121 mis inveniendis & reliquis prosreflionibus facile
 aprabuntur, quos quifque fibi comparer. CONCEUSIO: . Quantüm hæc
 notitia ad fpatorum curvilineotum dimenfiones conferat, fatis norunt qui in
 Indivifibilium doétrinà tantifper verfati funt. Omnes enim omnium generum
 Parabolæ illico quadrantur, & alia innumera facillimè menfurantur. Si ergo
 illa, quæ hac methodo:in numeris reperimus, ad quantitatem continuam
 applicare libet, hi poffunt intitui canones. Canones ad naturalem
 progreffionem que ab unitate [umit exordium. _ Summa Jinearum eft ad
 quadratum maD UE de sn ae it Arai Summa quadratorum eft ad cubum
 maHIDEPUt ns ane nn. "ad .7. Summa cuborum eft ad 4 gradum maARR
 UE Pme (Tuadi:4. Canon generalis ad progreflionem naturalem quæ ab
 unitate fumit exordium, Summa Omnium in quolibet gradu , eff ad maxima
 in proxime fuperiori gradu , ut unitas, ad eXponentem fuperioris gradäs.
 Non de reliquis differam, quia hîc locus non eft: L hæc

122 POTESTATUM NUMERICARUM, &c. hæc obiter notavi, reliqua facili negotio penetran: tur, eo pofito principio , in continu& quantitate, quotlibet quantitates cujufvis generis quantitati fuperioris generis additas, nihil ei [uperaddere. Sic puncta lineis, lineæ fuperGciebus , fuperficies folidis, nihil adjiciunt : feu we numericis , in numerico traclatu , verbis utar , radices quadratis , quadrata cubis, cubi quadrato-quadratis, &c.”mihil apponunt. Quare, inferiores gradus nullius valoris exiftentes, non confiderandi funt. Hæc, quæ Indivifibilium ftudiofis familiaria funt, fubjungere placuit, ut nunquam fatis mirata connexio, quâ ea etiam quæ remoriflima videntur, in unum addicat unitatis amatrix natura, ex hoc exemplo prodeat, in quo; quantiratis continuæ dimenfionem , cum numericarum poteftaum fummé, conjunétam contemplari licer.

123 DE NUNERTS MULTIPLICIBUS Ex fol characterum
 numericorum addiione agnoscendis. MONITUM: N' 1L tritius est apud
 Arithmeticos, quam numeros numeri 9 multiplices, conitare caracteribus ,
 quorum aggregatum est quoque ipfius 9 multiplex. Si enim ipfus, verbi
 gratia, dupli 18, characteres numericos 1+ 8, jungas, aggregatum erit 9. Ita
 ut ex folà additione characterum numericorum numeri cujuflibet , liceat
 agnoscere, utrum sit ipfus 9 multiplex : verbi gratia, si numeri 1719
 characteres numericos jungas 1 +7

124 Dr Numerus cujusvis numeri, utrum ille fit alterius propositi
 numeri multiplex; & non solum in progressionem denariam, qua numeratio
 nostra procedit (denaria enim instituta hominum, non ex necessitate
 naturae ut vulgo arbitrat, & fane satis inepte, posita est); {ed in quacunque
 progressionem instituitur numeratio, non fallit haec tradita methodus, ut in
 paucis mox videbitur paginis. PROPOSITIO UNICA. Agnoscere ex forma
 additionis characterum dati cujuslibet numeri, an ipse fit alterius dati numeri
 multiplex ? Ut haec solutio fiat generalis, litteris utemur vice numerorum.
 Sit ergo divisor, numerus quilibet expressus per litteram A; dividendus
 autem, numerus expressus per litteras T'Y7IN M, quarum ultima M
 exprimit numerum quilibet in unitatum columnam collocatum; N vero,
 numerum quilibet in denariorum columnam; Y numerum quilibet in
 columnam centenariorum; 7 autem numerum quilibet in columnam
 millenariorum, & sic deinceps in infinitum : ita ut, si litteras in numeros
 convertere velis, assignare possis loco ipsius A { quemlibet ex novem primis
 characteribus, verbi gratia, 4, loco W quemlibet numerum, ut 3, loco 77
 quemlibet numerum, ut 5 ; & loco 7°, quemlibet numerum, ut 6; &
 collocando singulos illos characteres numericos in propria

MULTIPLICIBUS. 126 propriâ columnâ, prout collocatæ sunt
 literæ quæ illos exprimunt, proveniet hic numerus 6 \$ 3 4, divifor autem /
 erit numerus quihibet, ut 7. Mif. fis autem peculiaribus his exemplis
 generali 1f4 enunciatione omnia ampleétimur. Dato quocumque dividendo
 T 77 N M, & quocumque divifore 4, agnofcere ex folâ additione
 charaéterum numericorum TN M, utrüm 1pfe numerus Z #7 N M exactè Re
 per ipfum numerum 4? Ponantur feorfim numeri ferie natural contitemp: 6 7
 8F9s tro) tre cæteri à dextrâ ad finiftram fic . . RGO JMS TE CENT AUS Pr
 &c. KT HG FE DC B'x. Jam ipfi primo numero 1 , fubfcribatut unitas. Ex
 ipsâ unirate decies fumptâ, feu ex 10 auferatur 4 quoties fieri poterit, &
 fuperfit B qui fub 2 fubfcribatur. Ex B decies fumpto feu ex 10 B, auferatur
 4 quotes poterit, & fuperfit € qui ipfi 3 fubfcribatur. Ex 10 C, auferatur À
 quoties poterit, & fuperfrD qui ipf 4 fubfcribatur. Ex 10 D, auferatur 4, &c.
 in continuum. Nunc fumatur ultimus character dividendi M, m qui quidem
 & primus eft à dextrâ ad finiftram, N in B fribaturque feorfim femel; primo
 enim numero 1, V in € Jubjacet unitas. || Tin D 2 Li e Æ 14 18! Lil A À
 RENE TE MORTE Dr = Led à Jam

126 De NumEerris Jam fumatur fecundus character N, & tories repetatur quot funt unitates in B, qui fecundo numero fubjacet , hoc eft multiplicetur N per B, & fub M ponatur produétus. Jam fumatur tertius character Y, & toties repetatur quot funt unitates in C, /ub tertio numero Jubjeéto ; feu multiplicetur # per C, & Prises fub primis ponatur. Sic denique multiplicetur quartus T per D, & fub aliis fcribatur. Et fic in infinitum. Dico prout fumma horum numerorum $M + N$ in $B + Y$ in $C + 4T$ in D, eft ipfus 4 multiplex qut non, & quoque ipfum numerum $T W N M$ effe ejufdem multiplicem, vel non. Etenim fi propolitus dividendus wnicum haberet charatterem M, fanè prout 1pfe eflet multiplex ipfus À, numerus quoque M effe ejufdem 4 mulciple, cüm fit ipfe numerus totus. Si verd confitet duobus characteribus ÜV M : dico quoque, prout $M + N$ in B, eft mulriplex À, & ipfum numerum V Mejufdem multiplicem efle. Etenim character N in columnä denarii, zqua tur 10 A. Verùm ex conftruétione, eff. . . . Quare ducendo $10 \text{---} 8$ in Neft $10 N \text{---} 8$ in N multiplex À. Si ergo contingit & effe . . . $M + Ein N$ mulriplem À, Ergo ambo ultimi multiplices jun&i $10 N + M$ erunt mult, 4: Id ef N in columni denarii & A in columnâ unitatis, feu numerus + . . NMeft mulriplex 4. Q. E. D. Qi Si

MULTIPLICIBUS. 127 Si numerus dividendus confitet rribus
 caractecibus NM : dico auoque ipfum effe aut non elle muluiplicem 4,
 prout M4 N in B+FinC, ent iplus Æ multiplex, vel non. Etenim character
 77, in columnä centenani, æquatur 100 }. At ex conftruétione eff 10
 ——@#, muitplex 4. Quare multiplicando 108 per 10 . . . 100—10 B, mult,
 Et ducendo iplos in # , . . 100 #——10 Bin F, mult. Sed eft etiam ex
 confiruétione 108 Quare ducendo in #7 . . . 10BinF Sex ofienfs ; ” à: : .
 . . 100 10 Bin F°, muit. Ergo junéti duo ulrimi 100 Ÿ——Cin F, mulr.
 Jam verd oftendemus ut in fecundo cafu 10 N——B in N, mult. À. Ergo
 junéti duo ultimi, roc 7-10 N——Cin#——Bin N,muit. À, Ergo fi contingat
 hos numeros Cin Ÿ=1-B in N-M, effe muit. À, ambo ultimi jnn@i, nempe
 100 #10 NH M, eff mulr. 4 Seu 7, in columnâ centenarii, Vdenarii &
 Munitaus, hoc eft numerus NM, eftmulriplex 4. Q. E. D. Non fecus
 demonftrabitur de numeris ex p/uribus charaéteribus compoñiris. Quare
 prout, &c. Q. E. D. Cin 7, muit. À. A, C, mult. 4. A. À. À. E xemplis
 gaudeamus. Quæro, qui fint numeri multiplices numeri 7? Scriptis continuis
 1, 2, 3:44, 5, &c. fubfcribo MOD rt FO. 9 07 ORAN AS PEL I Gr DE SAR
 ON SP OL e del Ex unitate decies fumptà, feu ex 10 aufero 7 quoties poteft,
 fupereft 3 quem pono fub 2. Ex 3 decies fumpto, feu ex 30 aufero 7 quoties
 poteit, fipereft 2 quem pono fub 3. Ex

128 DE NumEeris Ex 20 aufero 7 quoties poteft, fupereft 6 & pono fub 4. Ex 60 aufero 7 quoties poteft, fupereft 4 & pono fub \$. Ex 40 aufero 7 quoties poteit, fupereft \$ & pono fub €. Ex \$o aufero 7 quoties poteft, fupereft 1 & pono fub 7. Ex 10 aufero 7 quoties poteit, & redit 3 & pono fub 8. Ex 30 aufero 7 quoties poteft, & redit 2 & pono fub 3. . Et fic redit feries numerorum 1,3,2,6,4,5, in infinitum. Jam proponatur numerus quilibet 287 542178, de quo quæritur utrüm exactè dividatur per 7; hoc fic agnofcetur. Sumatur fémel ejus charaéter qui primus eft à dextrâ ad finiftram, nempe 8, primo enim numero Jeriei continue fubjacet unitas, quare ponatur ille 8, primus character femel 8. Secundus, qui eft 7, rer fumatur, feu per 3 multiplicetur, fécundo enim numero feriei fubJaderss1s fitque 1productus at ee NT Tertius his fumatur, /ubjacet enim 2 ipft 3, quare tertius character qui eft 1, per 2 multiphcatus (fitple eee Ua ER Quartus eÂdem ratione per 6 multiplicatus 12 Quintus per 4 multiplicatus 16, Sextus per s :multiplicatus .,: +. , PA Septimus fémel, feptimo: enim fubjacer 1, 7: OGavnsiter IUMPEUS 5e. ne Ar Nonus:bis-fumptus Eu Mise us Et fic deinceps fi fupereflent. Jungantur hi numeri ® L 1 o LL La Ê] 2 o an = . . I 19: Sï

MULETIPEICIBUS. 129 Si ipfe aggregatus 119 eft multiplex
 plus 7, numerus quoque propofitus 287\$542178, ejufdem 7 multiplex erit.
 Poteft autem dignofci eâdem mechodo, utrbm ipfe 119, fit multiplex 7,
 fcilicer fumendo, femel Dhimuméecharatteremins, 26. dit ts nt fecundum
 charadterem ter : 3 & præcedentem bis LRO PORN AA 172 VA ue
 14 Sienim fumima 14 eft multiplex +, erit & 119 ejufdem multiplex. | Sed
 & fi curiofitate potids quan néceflitare mot1, velimus agnofcére utrüm 14
 fit multiplex 7; fumatur character -ultimus femel . . . 4 Bipiécedens tent
 rires a 7 Si fumma eft multiplex ipfus 7, erit & 14 multiplex 7, quare & 14,
 & 119, & 287542178. Vis agnofcere quinam numeri dividantur per 6 ?
 Scriptis, ut fæpius dictum eft, numeris naturalibus 1,2,3,4; 5, &c., & 1 fubr
 DOIO eee OC An 2 2 RL &C. 4441 Ex 10 aufer 6, reliquum 4 fub 2 ponito.
 Ex 40 aufer 6, relhiquum 4 fub 3 ponito. Ex 40 aufer 6, reliquum 4 fub 4
 ponito. TOME F. I Et

130 De Nüumernrrtrs Et fic femper redibit 4, quod agnofci potuit
ubi lémel rediir. Ervo, fi proponatur numerusquibet, de quo quærébatur
utrüm fit dividendus per 6, nempe 248742 ? fume ultimam ejus figuram
femel. . 2 præcedentem quater $\therefore$ -. . + +. 116 præcedentem quater , &c. «+ .
. . . . 28 & uno verbo, primam femel , reliquarum verd 32 16 8 ——— 102 Si
fumma 102 dividatur per 6, dividetur & iple numerus propofitus 248742 per
eumdem 6. fummam QUAtEL A Meier es eurent Vis agnofcere utrüm
numerus dividatur per 3? Scriptis ut priès numeris naturahibus, & 1 fub 1
DO PE et el ele elle te lee 7e LS SAS Be PS ES CS LOT Ex 10 aufer 3
quoties potef, reliquum 1 fub 2 ponito. Ex 10 aufer 3 quantum poteft ,
reliquum 1 fub 3 ponito, & fic in infinitum. Ergo fi proponatur numerus
quibet 2451, ut fcias utrüm dividatur per 3, fume femel ultimam figuram,
+ . . . : précédentem/Hernel St TON ET AUS &c: femelinetlaS here PR,
SEE ee 2

MULTIPLICIBUS. 131 Si fumma dividatur per 3 ; dividetur & numerus propofitus per 3. Vis agnoicere utrū numerus dividatur per 9? Scriptis numeris 1, 2, 3, &c., & 1 fub 1 pofito. Ex 10 aufer 9, & quoniam fupereft 1, parer unitatem contingere fingulis numeris. Ergo, fi numeri propoliti finguli characteres fimul fumpui dividantur per 9, dividetur & iple. Vis agnofcere utrū numerus dividatur per 4? Scriptis numeris naturahbus, ut mos eft, & poliCOM LUD : He eee ANRCRO RARE ERA PRE 0082 Ex 10 aufer 4 quantū poteft, reliquum 2 pone fub 2. Ex 20 aufer 4 quantū poteft, reliquum 0 pone fub 3. Ex 00 aufer 4, fupereft femper 0. Quare fi proponatur numerus dividendus 2486, pono ultimum charaéterem femel 6 præcedentem bis, xbjacer enim 2 fub 2 . . 16 ——— 22 Præcedens per 0 multiplicatus facit zero & fic de reliquis; quare ad ipfos non arrendito; & fi fumma priorum, nempe 22, per 4 dividatur, dividetur & ipfe, fecūs autem, non. Sic numeri quorum ultimus charaéter femel, procedens bis, præcedens quater, (re/i quis negleitis, Lez zero \ (1m || ([l LS tU | DL (41 ill fl ti | pl AAEU (RAA :

132 De: Numenrrrs vero enim fortiuntur) fimul junéti numerum efficiunt multiplicem 8, funt ipf & ejufdem 8 multiplices , fecüs autem, non. In exemplum autem dabimus & illud. Agnofcere qui numeti dividantur per 16 ? Scriptis, ut dictum eft, numeris naturalibus 1, 2,3,4, VOTRE CS OCT UD I HONEO "+ #51 ei 7 6 5 4 3 2 1 01020 9 4ÉTOI Ex 10 aufer 16 quantum poteft, fupereft ipfe 104 Ex minore enim numero major numerus fubtrahi non poteft ; quare ipfemet numerus 10 ponatur fub 2. Ex 1pfo 10 decies fumpto , ut mos eft, feu ex 100, aufero 16 quantum poteft; fupereft 4 quem pono fub 3. Ex 40 aufero 16 quantum potelt, reliquum 8 pono fub 4. Ex 80 aufero 16 quantum poteft , fupereft o. Ided omnis numerus cujus ultimus character femel fumptus , penultimus.decies , præcedens quater, & præcedens oéties, efficiunt numerum multiplicem 16, erit & ipfe ipfus 16 multiplex. Sic reperies omnes numeros, quorum penultimus character décies, reliqui autem omnes, fcilicet ultimus , ânte penultimus, præante penultinus , &.reliqui femel fumpti, efhiciunt numerum divifibilem per 45 , vel 18, vel 15, vel 30, vel 99

MULTIPLICIBUS. 33 10, & uno verbo omnes divifores numeri 90, duobus confantes charaéteribus , dividi quoque &c ipfos per hos divifores. | Non difficilis indè ad alia progreflus; fed intentatam huc ufque materiam aperuifle, & fais obfcuram lucidifima demonftratione illuftravifle ; fufficit. Ars etenim illa, quâ ex additione charactérum numeri, nofcitur per quos fit divifibilis, ex im numerorum natura, & ex eorum denariâ progreflione vim fuam fortitur : fi enim aa progreflione procederent , verbi gratiâ , duodenariâ (quod fanè gratum foret) & fic ultra*primas novem figuras, ahæ duæ inffitutæ eflent, quarum altera denarium, altera undenarium exhiberet; tunc non ampliùs contingeret, nuineros quorum omnes characteres fimul fumpti efficiunt numerum mulüpticem 9, efle & ipfos ejufdem 9 multiplices. Sed methodus noftra, necnon & demonftratio, & huic progreflioni, & omnibus poffibilibus convenit, S1 enim in hac duodenariâ progreflione , proponitur agnofcere an numerus dividatur per o. Inftituemus, ut antea, numeros naturali ferie: continuos 1,2,3, 4, \$, &c., & 1 fub 1 pofito 47 7 20 0° O7? 3:31 Ex unitate jam duodecies fumpta feu ex 10, I 3 (qu — = x ES LE nec ——— 2 CR PR TN SET er er allie RS Le TE rm ae — ne ARRET Re —

34 DE NUMERIS: MULTIPLEXIBUS. (qui jam potest duodecim
, non autem decern) auferendo 9 quantum potest, superest 3, quem pono sub
2. Ex 30 (qui jam potest triginta sex, ferlicet sex duodecim) aufer 9 quantum
potest, & superest nihil, continetur enim 9 quater exacte in viginti [ex ;
pono igitur 0 sub 3. Et idem, zero sub reliquis characteribus continget. Unde
colligo, omnes numeros, quorum ultimus character semel sumptus,
penultimus vero ter (de ceteris non curo quales sint ; zero enim fortuitur)
efficiunt numerum divisibilem per 9, dividi quoque per 9, in duodenaria
proseffione. Sic in hac progreffione duodenaria omnes numeri quorum
singuli characteres simul sumpti efficiunt numerum divisibilem per 11, sunt
& divisibiles per eundem. In nostra vero progreffione denaria, contingit
omnes numeros divisibiles per 11, ita se habere, ut ultimus semel sumptus ,
penultimus decies, praecedens semel , praecedens decies , praecedens semel,
praecedens decies ; & sic in infinitum, conflare numerum multiplicem 11.
Haec & alia facili studio, ex ista methodo quisque colliget; retigimus
quidem quoniam intentata placent, relinquimus vero ne nimia perfructio
tedium patiat. PROBLEMATA

PROBLEMATATA DE THEYGEOTDIE, Propofita menfe Junit
 1658. (CU ab aliquoe menfbus, quedam cire Cycloïdem (1), ejufque centra
 gravitatis, meditaremur, in propoficiones fatis arduas ac difhciles, ut nobis
 vifum eft, incidimus, quarum folutionem à præftantiffimis toro orbe
 Geometris fuppllices poftulamus, propofito lpfis præmio, non mercedis
 gratià (quod abft!) fed in ‘obfequii noftri, aut potius meriti eorum qui hæc
 invenerint, publicum argumentum. Quæ verd proponimus funt ejus modi.
 Dato punéto quolibet Z (Fig. r.) in quacunq̃ue Cycloid ABCD , ex quo
 du@ta fit Z Y bafñ 4 D parallla que axem CF fecet in punto F; quæruntur:
 Dimenfo fpatit CZ Y, ejufdemque centrum gravitatis ; folida genita ex
 circumvolutione di&i fpatit CZ F,, tam circa Z Ỳ quâm circa C Y; & hotum
 folidorum centra gravitatis. Quod fi eadem folida, plano per axem duéto
 fecentur , & fic fiant utrinque duo folida , duo fciRE tnt Pt Pr di die 2e Rue
 ce oi Cycloidis definitio ad finem hujus fcripti habetur. l 4 licet Fig. 1

Flō, 2e le) 136 PROBLEMATA licet ex folido circa bañm ZY, & duo ex folido circa axem € Ÿ genito, cujusque horum folidorum quærimus etiam icentra gravitatis. Quia verd quæditorum demonstratio forfan aded proluxa evadet, ut vix intra præfirtutum tempus exequi fati comimodè pollit, genio & otia doctiffimorum Geometrarum confluentes, ab-his tantum poftulamus, ut demonftrent, vel more antiquorum, vel certè per doctrinam Indivifibilium (hanc enim demonftandi viam amplectimur) omnia quæ quæfita funt, data efle: ita ut facilè ex demonftraus, quælibet puncta quæfita ex datis in hypothefibus, poftint inveniri. Et ut apertius mentem meam explicem, nec fubfit aliquid ambiguum, exemplo rem illufiro. Proponatur, verbi gratià, parabola ABC (Fig. 2.) cujus axis AB, bafis AC, tangens BD, parallel axi CD. Inveniendum fit centrum gravitatis tri linei DCB. Satis factum efle problemati cenferem, fi demonftretur, datum efle centrum gravitatis parabolæ ABC, nec non & centrum gravitatis rectanguli CDB, & proportionem hujus rectanguli cum parabolà ABC, idedque datum efle centrum gravitatis quæfitum triline DCB. Nam etfi præcisè punctum in quo reperitur centrum gravitatis non exhibeatur, demonftratum tamen efle datum efle, cum ea ex quibus invenitur data fint; refque ed deducta erit ut nihil aliud fuperfit præter calculum,

DE CYCLOIDE. 137 calculum , in quo nec vis ingenii nec peritia artificis requiruntur : ideoque non is à nobis calculus exigitur , cur enim in iis immoraremur ? Sed tantummodò petimus demonstrari res quæ proponuntur datas esse. Verùm doctissimi Geometræ prorsus necessarium iudicabunt , & ab his postulamus, duarum propositionum , vel duorum casuum integram constructionem, seu integrum calculum. Primus casus est cum punctum Z constructum in A | Secundus, cum idem punctum Z datur in B, in quo transit parallela GB ducta à puncto G centro circuli genitoris Cycloidis. Quod si aliquis error calculi in his duobus casibus subreperit , eum libenter condonamus, & veniam quam ipsi peteremus facile promerebuntur. Quisquis superius proposita, intra primam diem mensis Octobris anni 1658, solverit & demonstraverit, magnus erit nobis Apollo. Et primus quidem consequetur valorem quadraginta duplorum aureorum Hispanicorum quos ipsi Hispani doblones , & Galli pifoles vocant; vel certè, si mavult, ipsos duplos aureos. Secundus vero viginti ejusmodi duplos aureos. Si unus tantum solverit , sexaginta folus habebit. Et quia ferè rem agimus, dictos sexaginta duplos aureos Illustrissimo Domino de Carcavi, Re A

138 PROBLEM ATA go Confiliario Parifiis comimoranti , apud
 Celff fimur Dominam Ducem de Liancourt deponi curavimus, qui eos
 exfolver ftatim ac demonftrationes quæ ad ipfam mittentur, veræ ac
 Geometricæ, à viris ab ipfo ad id deputatis, judicabuncur, Er cum
 Hluftnflimum Confiliarium , jam à mulus annis virum probum, &
 Mathefeos aiman: uiflimum agnoverimus , audaéter pollicemur rem fñcerè
 & abfque fallacià exequendam. Quod fi his circiter tribus elapfis menfbus
 nullus inveniatur qui quæfita noftra folverit, non denegabimus quæ ipf
 invenimus , nec aliis invidemus undè majora jam inventis nancifcantur ,
 & Ex quibus forfan apud pofteros grattam inibimus. Hoc unum reftac ut
 lineæ Cycloidis defcriptionem exhbeanus , à qua brévitatis causa
 abftinendum arbitrabamur , cùm hæc linea jam pridem Ga: hleo, Foricellio,
 & aliis innotuerit; fed quia eosum Libri omnibus non funt obnoxii, ideù
 hanc ex Toricello damus. DESCRIPTIO CYCLOIDIs. Concipiatur fuper
 manente reé&äi linea D À, circulus DL, contingens reétam D 4, in puncto
 D, noteturque punétum D , tanquam fixum in peripheria citcuh D L : tm
 intelligatur fuper manente rectà D À converti circuûlum D ZL motu
 circulani fimul & progreflivo verfus partes 4, ira dt fubindè

D'ÉRLOM GC LOB DIE: 139 fdbindè aliquo fui punéto rectam lineam D 4 | lemper contingat, quoufque fixum punétum D iterm ad contactum revertatur, purà in 4. Certum fit quod punétum D fixuim in peripherià circuli totantis D L, aliquam lineam defcribet, furgentem primo à fubjeetà linea D 4, deindè culminantem verfus €, poftremò pronam defcendentemque verfus punétum Æ: & talis linea vocata eft Cyclois (1).
DE EODEM ARGUMENTO ADDITAMENTUM. QU M circà ea quæ de Cycloide propofuimus, duo orta efle dubia, nobis Hluftrifimus DD. de Carcavi fignificaverit, his ftarim occurrendum duximus, & ira occurrimus. . Prius indè oritur, quidd in proponendis noftris de Cycloide problematis hâc voce ufi fuerimus, in quacunque Cycloide : cùm tamen uñius tantùm fpeciei Cycloidis definitionem attulerimus. Verùm LES CV M Rp ce ce dde à pa (1) Dans l'Exémpaire qui appartient à la Bibliothèque du Roi, on trouve, à la fin de ce Programme, les mots Kivants écrits de la main de Pafcal : Centrum curve AZ C diflac à bafi duabus tertiis partibus axis, & diflat abaxe, "A aguali uni rcertis parti axis, plus differenti& inter bof 6 axemn. nihil

140 DE EODEM ARGUMENTO nil aliud intelleximus præter folam illam fm plicem, naturalem ac primariam Cycloidem cujus éx Toricellio defcriptionem dedimus; cūm eni quæ de ill refolvuntur facile fr, ad omnes alt fpecies protrahere, qui noſtra problemata de hi fol folverit, nobis omnind fatifecerit. Bofterius in eo confittit, quèd à nobis nonli præciſè poſtum an fupponamus datam elle ratio nem baſis Cycloidis 4 D (Fig. 1.) cum fua dl titudine, {eu cum diametro circuli genitoris FC; fed ipſam datam effe rarionem pro conceſſo ulu pandum atbitrabamur, & ut omnind æquum él, datam efle fupponimus. Nihil ergd jam fupereſt obſcuritatis. Unum t men reſtare videtur, ut doctiſſimos Geometras a | propoſitiones noſtras commodiùs & libentiùs it veſtisandas invitemus ; fcilicet ea omnia removett quæ à perſpicacitate ingenit , quam folam magni fi | cimus, & explorare ac coronare inſtituimus, fu atena , qualia funt ram caleulus integer mulrorut } caſuum quem poſtulabamus , quèd abſoluta fol tionum conſcriptios dm ea non à viribus ingenil, fed ab ahis circumſtantiis pendeant. Hoc itaqit ntummodd jam inſtituimus, ut fola problentum difficultas remaneat fuperanda. Nempè: Qui publico inſtrumento , intra præſtirurum ren pus , Illuſtriſſimo Domino de Carcavi ſignificave: rit eortim quæ quæſita funt demonſtrationem pénés fe

À DDITAMENTUM. 141 fe habere; & aut ipfam
 demonftrationem quantumvis compendiofam ad ipfum miferit : aut arte
 mandare nondum per otium licuerit, faltem ad confirmandam fux allertionis
 veritatem, casûs quem mox defignabimus calculum dederit, fequé paratum
 efle profeflus fuerit omnia omnind demonftrare ad 1plus D. de Carcavi
 nutum, Rhume nobis fatifeciffe declaramus; & confentimus, primum qui
 hæc fecerit primo, fecundum fecundo, præmio donandum, fi fua folutio ab
 ipfo D. de Carcavi virifque ad id fecum adhibitis, cûm ipñ illum fuerit,
 exhibita, Geometrica ac vera judicetur, falvo femper erroris calculo. | Cafus
 aurem, cujus folius fuficiet calculus, ille Eft, Si Semicyclois 4CF circa
 bafim 4 F converatur , & folidum indè genitum fecetur plano per ipam 4F
 (quæ jam hujus folidi axis eft) du&o, quod quidem, folidum dividet in duo
 femifolida patia : alterutrius horum femifolidorum centrum gravitatis
 aflignari poftulamus. RÉFLEXIONS

RÉFLEXIONS _____ =

— RÉFLEXIONS | nl Sur les conditions des Prix attachés à la solution
des Problèmes concernant La} It | A | .. | | Cycloïde. | nant) I E premier
Octobre étant arrivé , auquel exp roit le temps destiné pour recevoir les
solutions de ceux qui prétendroient aux Prix des Problèmes de la
Roulette, appelée en latin Cyclois, ou Trochois, nous en ouvririons dès à
présent l'examen , si l'absence de M, de Carcavi, qui a eu la bonté
d'envoyer nos Écrits & d'en recevoir les réponses, ne nous obligeoit à
retarder jusques à son retour; qui doit être dans peu de temps. Mais nous
avons jugé à propos de répondre cependant à deux sortes de personnes, qui
s'efforcent de traverser cet examen par des interprétations ridicules qu'ils
font de mes paroles, qu'ils tournent entièrement contre leur sens naturel &
contre celui que j'ai eu: effrayant , par ces chicaneries , de frustrer ceux qui
auroient envoyé les véritables solutions, des Prix | qu'ils auroient mérités.
Les premiers sont des gens qui écrivant de AE pays fort éloignés, mandent,
par leurs Lettres du 1^{er} mois d'Août , qu'ayant reçu les Ecrits que nous leur
enverrions : 5 us Est 2 — St EL bite: Ces Ets =

S'uRmES PDP 'rRLUA REC. 143 leur envoyames au mois de Juin, ils vont tra) aller à cette recherche; mais que pour ouvrir l'examen à Paris, on doit attendre non-feulemeur le premier Octobre 1658, mais encore trois ou quatre mois après, & même huit, ou peut-être un a : n'étant pas ampoftble , difent-ils, que leurs Lettres, quoiqu'écrites avant le premier Oétobre, foient très-long-temps en chemin, foit par les incommodités de la faifon, foit par celles de la guerre, foit enfin par les tempères de mer qui peuvent arrêter, ou même faire périr les vaiffeaux qui les portent, auquel cas ils feroient recevables d'enVoyer de fecondes Lettres , pourvu qu'ils euffent d bonnes atteftations de leurs Officiers publics, quelles fuffent conformes aux premieres, écrires aant le premier Otobre. | Certainement fi mon intention avoit été telle, & fi les paroles de mon Écrit le marquolent, je ferois bien fufpect d'avoir propofé une chimere, en propofant les Prix, puifque j'aurois pu ne jaMais les donner ; & que quiconque fe fût préfermé a premier Octobre avec fes folutions, j'aurois toujours pu le remettre , dans l'attente de quelque Vadeau, qui, ayant eu le vent favorable en portnt mes Écrits, pouvoit l'avoir contraire , ou même être péri, en rapportant les réponfes. Er même ceux qui auroient gagné des Prix en fe trouVant les premiers entre ceux dont on auroit reçu les EE — Is TEE D >: 2 1 = "MR MOVE TT Er 5 LE 5e rl sn Le “fo ESP RTT -2 = — _ — — : = D = = 2=Z Es PT 1 (n j L ;

144 LR ÆÉTRIL'E x 1 à N:\$ les folutions au premier Oétobre, ne feroient fi: mais en aflurance d'en pouvoir jouir, puifquil pourroient toujours leur être conteftés par d'autres folutions, qui pourroient arriver tous les jours, premieres en date, & qui les excluroient fur la foi des fignatures des Bourgmeftrés & Officiers de quelque Ville à peine connue ; du fond de la Mofcovie, de la Tartarie, de la Cochinchine ou di Japon. D'ailleurs on auroit eu trop de tromperie à craindre fur cet article ; & il n'y eut eu aucuné fûreté à produire fes réfolutions à l'examen, puil que des plagiaires auroient pu les déouifer & les dater d'auparavant , en les faifant ainfi venir dt quelque Ifle bien éloignée. J'ai voulu agir avec bien plus de clarté, de fûreté & de promptitude; & c'eft pourquoi j'ai établi un jour &-un lieu fixe : le lieu eft Paris; le jour eft le premier Octobre, auquel le temps étoit | expiré, l'ouverture de l'examen des folutions re: cues jufqu'alors, doit commencer fans attendredt vantage , & le Prix accordé au premier qui fe croi vera alors en date, fans qu'il puifle être tro blé en fa poffeffion par ceux qui viendront apitss lefquels feroient toujours, ou fufpects , ou au moi trop tard arrivés, & ne font plus recevables poli le Prix. Je fais bien qu'en cela il y a quelque avantagt pour les François, & fur-tout pour ceux de Paris mais

SU RTE SP REPAS IC 14\$ mais en faifanc faveur aux uns, je n'ai pas fait d'injuftice aux autres. Je laifle à rous ceux qui viendront, honneur de leur invention; je ne difpofe pas de la gloire ; le mérite la donne; je n'y touche pas : je ne régle autre chofe que la difpenfation des Prix, lefquels venant de ma pure libéralité, j'ai pu difpofe des conditions avec une entiere liberté. Or je les ai établies de cette forte; perfonne n'a fujet de s'en plaindre; je ne devois rien aux Allemands, ni aux Mofcovites; je pouvois ne les avoir offerts qu'aux feuls François ; je puis en propofer d'autres pour les feuls Flamands, ou pour qui je Voudrois. J'y ai néanmoins agi le plus également que j'ai pu; & fi les conditions font plus favorables aux François qu'aux. autres, ce n'a été que pour éviter de plus grandes difficultés, & des injuftices toutes évidentes comme celle que je viens de repréfenter. Et ainfi ayant été néceffaire pour les éviter, de déterminer un remps & un lieu, j'ai cru que trois mois & demi fufhfoient, & que Paris étoit le lieu le plus propre pour avoir réponfe de toutes parts. C'eft pourquoi en faifant mes Écrits au mois de Juin, j'ai donné jufqu'au premier Octobre , intra primam diem Oëtobris ; & j'ai déclaré que fi dans ce temps, d'environ trois mois & demi, il ne fe trouvoit perfonne qui eût réfolu mes queftions, je les réfoudrois alors moi-même, fans attndre davantage : quod fit his circiter tribus elapfis

ÎOME V, K menfibus, me RE Dh Ed + ame vf EN ns + is £ e- T — — ee Se nn ; y = — ETS =: us à du es 'ru A LS Dr CE DORÉ EEE AS Eee Ge mme 0 = = © Lt ps 7 + ETE ce SAONE RTE ES || \ | (| | OU ! [1 A EE 4. ÉRRS E RS e=E—, SRE es x pe — grrr ee TT ie ha ET A nt RS me ee men

146 RÉFLEXIONS menfibus , nullus inveniatur qui quefiti noftra folves rit, non denegabimus que ipfi invenimus. Par où il eft fi vifible que je ne voulois laifler pafler que le temps de ces trois mois pour attendre les folutions, qu'il eft ridicule de m'imputer cet autre fens, qui, comme j'ai dit, eût rendu les promeffes des Prix vaines & chimériques : & mon fecond Écrit le marque encore trop clairement; car voici les regles que j'y ai établies : que ceux-là feuls feront admis, qui dans le temps prefcrit auront fait fignifier à M. de Carcavi, par un ace public, qu'ils ont les folutions., en lui en envoyant, ou une démonftration abrégée , ou au moins le calcul dun certain cas par où 1] parût qu'ils ont tout réfolu, Qui publico inffrumento intra praflitutum tempus li luftriffimo Domino de Carcavi fignificaverit Je eorum que quafita fun folutionem penes fe habere, 6 aut demonftrationem quantumvis compendiofam ad ipfum miferit : aut faltem ad confirmandam [ua affertioais veritatem casis quem mox defienabimus calculum dederit, hunc nobis fatisfeciffe declaramus. Voilà mes termes, qui affurément ne fouffrent aucune équivoque, & par lefquels j'ai établi les conditions les plus équitables que j'ai pu imagtnef : Car ayant établi qu'on prendroit date du jout qu'on auroit fignifié & délivré à M. de Carcavi même, la démonftration ou le calcul propofé , j'ai retranché toutes les difputes fur la primauté, qui fercient

SD ANx Lo Er: PRES: 47 fêtoient nées , fi on avoit pris date du jour de l'envoi; ce qui les auroit fait demeurer indéfinies durant plusieurs mois ou plusieurs années, comme il a été déjà dit. En exigeant qu'on fit cette signification par un acte public, j'ai arrêté de même les soupçons & les disputes qui auroient pu naître entre les prétendants, sur des Écrits de mains privées : chacun ayant intérêt d'être non-seulement premier, mais encore seul; & ayant sujet de demander des preuves plus authentiques que des Écrits de mains privées, pour croire qu'il en est venu d'autres dans le temps, soit avant, soit après moi. Aussi M. de Carcavi, ni moi, ne voulant pas qu'on nous en crût sur notre parole, nous avons averti de prendre des actes publics. Et enfin en me contentant, ou d'une démonstration abrégée, ou au moins du calcul d'un seul cas pour donner date, en attendant qu'on envoyât la démonstration entière avec plus de loisir, j'ai foulagé les Géomètres autant qu'il étoit possible de le faire, Puisqu'on ne pouvoit pas moins leur demander, & que néanmoins ce que j'ai demandé est à peu près suffisant : ce calcul étant si difficile & dépendant tellement du fond de la question, qu'on peut juger que qui l'aura trouvé a tout résolu en soi-même, & ne manque plus que de loisir pour l'écrire & l'achever. En quoi je crois avoir garde un assez juste tempérament; car, d'une part, il n'étoit KONEZ pas

| RÉEL EX ONE pas juſte d'exiger une démonſtration entière & écrite 148 au long, & de faire dépendre la primauté du loifr qu'il faut pour cela; & de l'autre côté, il eût été bien plus injuſte de ne pas exiger des preuves certaines qui marquaſſent qu'on a réſolu les queſtions , & d'accorder le premiér rang à ceux qui n'auroient donné aucune marque de les avoir réſolues : de forte que j'ai fatiſſait à tout, en demandant le véritable calcul de ce cas. Et c'eſt pourquoi je ne puis affez admirer la vaine imagination de quelques autres , - qui ont ctu qu'il leur ſuffiroit d'envoyer un calcul faux & fabriqué au hafard, pour prendre date du jour qu'ils l'auroient donné, fans avoir produit d'autre marque qui faſſe connoître qu'ils ont réſolu les problèmes : ce qui eſt une imagination fi ridicule, que j'ai honte de m'amuſer à la réfuter. Cependant, encore qu'ils ſachent fort bien que leur calcul eſt faux (car cela eſt viſible à l'œil même); qu'ils l'aient mande eux-mêmes par leurs Lettres, & qu'ils n'en aient envoyé aticun autre , ils ne laiſſent pas, par la plus plaifante imagination du monde, de ſe croire en état d'être mis en ordre depuis le jour qu'ils ont produit ce faux calcul : prétendant que ce que j'ai dit en d'autres occaſions, toutes différentes, du peu d'égard qu'on doit avoir aux erreurs de calcul { favoir quand la démonſtration entière & géomcrrique eſt envoyée en même-temps ; car alors la chofe

S'U:RY En S P'iRurEx ST. 149 chose est sans doute) doit aussi avoir lieu lorsqu'on n'envoie autre chose qu'un faux calcul, en laquelle occasion je n'ai jamais dit un seul mot de pardonner ces erreurs. En effet il faudroit avoir perdu le sens pour le dire ; car il n'est pas difficile d'entendre quelle différence il y a entre deux personnes qui veulent montrer qu'ils ont résolu une question, dont l'une apporte, pour preuve de son discours, une démonstration parfaite & géométrique sans aucun défaut, à quoi il ajoute encore quelques calculs ; tandis que l'autre ne produit autre chose qu'un seul calcul sans aucune forte de preuve. Qui ne voit la différence qui se trouve entre les conditions de ces deux hommes, en ce qui regarde les erreurs de calcul ? Il est toujours juste de pardonner ces erreurs à celui qui donne en même-temps les démonstrations entières & parfaites, qui rendent le calcul superflu, qui enseignent l'art de le bien faire, qui apprennent à en reconnoître & corriger les défauts, & qui enfin toutes seules conquièrent invinciblement qu'on a résolu les questions ; mais la condition de l'autre est toute différente, puisque n'ayant donné pour toute marque de ses solutions qu'un seul calcul pour laisser à juger, selon qu'il fera vrai ou faux, qu'il a résolu les questions ou non, s'il se trouve faux en toutes ses parties, que restera-t-il par où on puisse connoître qu'il a trouvé la vérité ? Y a-t-il rien de

K 3 fi (IE l rm Tail Tes anses mn Ans . "1 ce

150 RÉFLEXxrOoNSs fi foible, que de vouloir qu'on lui pardonne toutes les erreurs qui s'y trouveront, & qu'encore qu'il foit faux en tout, & qu'il ne contienne rien de vrai, au lieu d'en conclure que l'Auteur n'a pas trouvé pe 0 de Loin ns NS es 2 . - Ex " = la vérité, on en conclue au contraire qu'il poffédoit la vérité depuis le jour qu'il a produit la fauffeté ? C'est aflurément ce qu'on ne peut non plus conclure d'un faux calcul, que d'une faufle démonfSR tration; car ce que les paralogifmes font en démonftration , les erreurs de calcul le font quand le calcul eft feul : il n'y a que deux manieres de montrer qu'on a réfolu des queftions ; favoir, de donner, ou la folution fans paralogifme , ou le calcul fans erreur; & c'est aufli une de ces deux chofes que j'ai exigées , pour pouvoir prendre date. Mais n'est-ce pas une plaifante prétention, de vouloir pafler pour avoir découvert la vérité, par cette feule " di 1 JURI ET hl H 'LE DIE ANLN |: | 1 A1 | TA | 211 h QU AA t AU: li } 1114 { Eur MIE ER (14: UHR HE À «111 8 LE RER ll NABRIS j] INIVEURE 11 L H fl He | 1M w Me Ÿ 1 A AIR (Ĩ Mu 1 15 {ER (FAURE {l d NA ll mil | ANR qi Ub | 1] ER IS \] LELIEUE 14 " CM AT AA 1 Jp NE ta | pl! RIRE » L (Un PT | A | | 1 M (l Lan | 140! 1 | Hit \ £ : raifon qu'on a produit une faufleté, & de fe faire préférer aux autres qui auroient produit les véritables calculs, parce qu'on auroit donné une fauffeté avant eux, & que la regle que j'aurois établie pour reconnoitre qui feroit le premier qui auroit réfolu les queftions, fût de voir qui feroit le premier qui eût fabriqué une faufleté ? Si cela étoit ainfi, il eût été bien facile à toutes fortes de perfonnes d'en fabriquer au hafard &c à fa fantafie, & en les envoyant à M. de Carcavi, prendre date dès lors; en quoi fans courir aucun rifque, puifqu'ils pouvoient

SDL ES PR Or TOC. ISI pouvoient se rétracter à leur volonté, ils se fussent acquis cet avantage, que s'ils avoient pu ensuite découvrir la vérité & même après le temps expiré, ou bien avoir quelques lumières des solutions déjà données quand on les examineroit, ils auroient été préférés d'être les premiers en date, en vertu de la fausseté qu'ils auroient-les premiers produite : & de cette manière il feroit arrivé que l'honneur de la première invention, qui est la principale chose qu'on considère en ces matières, n'auroit pas dépendu de la première production de la vérité, mais de la première production qu'on auroit faite à la fantaisie d'une fausseté; ce qui est la chose du monde la plus extravagante. Je ferois bien fâché qu'on me crût capable d'avoir donné pour loi une condition si injuste & si impertinente. Mais elle est aussi éloignée de mon sens que de mes paroles. Quand j'ai dit qu'il fustoit, pour passer pour premier, d'envoyer une démonstration abrégée, où au moins le calcul d'un seul cas, je n'ai pas dit une seule parole de pardonner les erreurs de calcul, comme mes paroles, que j'ai déjà rapportées, le témoignent : au falthem ad confirmandam [ue affirmationis veritatem cal. Cūlum unius casus miserñé. Et c'est être ridicule de fappotter à ce lieu, où je n'en parle en aucune sorte, ce que je dis fut un autre sujet, favoir quand le reste des démonstrations & les solutions entières

K 4 font

521 R É;R LE x 1 O-NS font à loïlir apportées à l'examen, auquel cas si les Juges les trouvent toutes véritables & géométriques, on y pardonnera sans doute les erreurs de calcul (quoique ce soit toujours une grâce) : ff solutio exhibita Domino de Carcavi virique fecum ad hoc adhibitis geometrica ac vera judicetur, salvo semper errore calculi: lesquelles, comme j'ai déjà dit, il est toujours aussi juste de pardonner en n'agissant pas à la rigueur, quand la démonstration est présente, qu'il est hors de raison d'y penser quand on ne produit qu'un seul calcul, faux en toutes ses parties. Il n'est donc que trop visible que ceux qui ont produit ces calculs faux, ne l'ont fait que pour gagner par-là le temps de chercher à loïlir ce qu'ils n'avoient pas encore trouvé, & ce qu'ils veulent être réputés avoir trouvé depuis le jour qu'ils avoient envoyé leur fauffeté,, s'ils peuvent y arriver ensuite par quelque voie, en quelque temps que ce soit. Mais c'est en vain qu'ils ont tenté cette finesse ; car la règle est écrite : il falloit envoyer le calcul dans le temps, s'ils l'eussent eu; & un calcul faux, en toutes ses parties, n'est en aucune sorte un calcul; & ainsi quand ils l'auroient envoyé, même signé par un Notaire, ce ne feroit que des erreurs signées par Notaire, & ils feront sus comme n'ayant rien envoyé. Leurs calculs sont donc justement réputés nuls, puis qu'il

SU RÉEL E PR ATAX IT CCE 153 puifqu'il n'y avoit que deux mefures à défigner, & qu'ils les ont données toutes deux faufles, & chacune d'environ de la moitié. Cependant quelques-uns de ceux-là qui déclarent franchement qu'ils vent bien qu'elles font fauffes, mais en ne laiffant pas de prétendre d'en avoir acquis leur rang, difent auf qu'ils en ont maintenant un autre calcul qu'ils allurent être le véritable, mais ils ne l'envoient pas; c qui ne fair que trop paroître leur fineffe : car s'ils lavoient en effet, que ne l'envoyoient-ils en même-temps ? vu même qu'il ne falloir pas quatre lignes pour l'écrire, & qu'au lieu de cela, ils emploient des pages entieres à dire qu'ils l'enverront fon le leur demande ; mais ce n'étoit pas cela qu'il falloit faire, il falloit l'envoyer s'ils l'avoient : la règle n'étant pas de le promettre dans le temps, mais de l'envoyer réellement. C'est cela qui fair foi; mais pour les fimples promeffes qu'ils font, on neft pas plus obligé de les croire, qu'en ce qu'ils promettent avec une pareille certitude dans les mêmes Lettres ; qu'ils enverront aufli dans peu de temps a Quadrature du cercle, & même en deux mamieres différentes : de toutes lefquelles chofes il leri cependant fort permis de douter, jufqu'à ce quil en paroïffe d'autres preuves que des paroles. Et ainfi puifqu'ils ont laiffié pañler le temps fans envoyer, n1le vrai calcul demandé, ni aucune foLtion, ni aucune autre chofe, & qu'ils nous ont ainfi 4 dl j || il x fi L" Li f. 4 ter mme cndmener armmranee-am pr RTE STE TES ZT = Ce DURS EU Er >, Te HS PERA T NE Pa - PPS, = ne _ e 7 RM ET PONS Ter RL EURE eréies PAIN 4 M à 0: En. ss —

154 RÉF Rx TOoN'S ainfi lauiffés entièrement dans le doute , s'ils ont en effet réfolu nos queftions, ou en quel temps ils les ont refolues , leurs faux calculs ne nous en donnant aucune marque, nous leur déclarons fans les nommer , m1 les marquer en aucune maniere, qu'ils ne font plus recevables quant aux Prix; que le temps en eft pafle à leur égard; que nous allons examiner les calculs & les folutions des autres qui ont été reçues dans le temps; & que pour eux qui ne peuvent plus prétendre, ni aux Prix, n1 à Fhonneur de la premiere invention , il leur refte au moins celui de corriger leurs erreurs après laver: tiffement qu'on leur en donne; ce qui leur fer d'autant plus facile, que le véritable calcul com mence maintenant d'être divulgué. Car comme je im étois engagé par mon premier Écrit, de le publier aufli-tôt que le temps feroit expiré , j'ai commence à le faire dans le commencement d'Otto: bre; & parce que je ne fais pas encore fi entré tous ceux qui ont déjà envoyé les leurs a M. de Carcavi, il:y en a qui Faiént rencontré, & que s'il s'en trouve, il eft jufté que je Le laiffe publier fous leur nom, je n'ai pas encore voulu limpiimer fous le mien; mais parce qu'il n'eft pas jule aufli que d'autres s'en attribuent déformais l'in vention , le temps où je me fuis obligé de le laifler chercher étant fini, je l'ai donné écrit à la main à plufieurs perfonnes dignes de foi, & en cr'autiés à

SAUXRÉELE. SP RÉTEX CCC. 156\$ à M. de Carcavi, à M. de Roberval, Professeur Royal des Mathématiques, à M. Gallois, Notaire Royal à Paris, & à plusieurs personnes de France & d'ailleurs, très-confidérables par leurs qualités & par leur science, afin que, comme j'ai déjà dit, si ceux dont on a reçu les solutions, l'ont trouvé, je leur en quitte la gloire, sinon, qu'on sache qui en est le premier inventeur. Voilà ce que nous avons à dire généralement pour tous ceux dont les calculs & les solutions qu'on a reçues dans le temps, se trouveront évidemment fautes dans l'examen, & pour tous ceux qui prétendroient qu'on devoit désormais en recevoir de nouvelles. Ce 7 Octobre 1658. J'espère donner dans peu de jours la manière dont on est venu à la connoissance de cette ligne, qui est le premier qui en a examiné la nature; C'est ce que j'appellerai l'Histoire de la Roulette. ANNOTAT A moins de © TE = RSS: Ye D a — rm mme RS ET) a — ne te j. |||| E jh) If 1 = LES + EE sis

1\$6 ÂNNOTATA IN SOLUTIONES ANNOTATA In quafdam
foluriones Problematum dt Cycloide. rs tempore Præmiis comparandis
definato , & ad Kalendas Oétobris terminato, ve rum calculunr casûs à me
propoliti hucufquè ltentem noviflimè evuloare cœpi, ut fi in examinandis
folutionibus quæ à diverfis Geomerris Intti preftitutum tempus miffæ funt,
quedam reperttur quæ eddem inciderit, ejus Author Præmio à glorià
inventionis potiatur : fin verd, ego meo nomine publici tunc juris faciam
illum quem interim manuſcriptum ad plurimos jam undequaque mifi, &
inter cæteros ad Jlluſtriflimum D. de Car cavi, ad clariflimum ac
infisniflimum Geometram D. de Roberval, Regium Mathematicorum Pro:
fefforem, ‘ad integerrimum Virum D. Gallois, Notarium Reocium, ac ad
diverfos aliostum dignitate, tum ſcientià præcellentiflimos viros, qui 10gati
funt diem quo eum receperunt annotare & ſubſignare. | Deindè folutiones
apud D. de Carcavi miſſas ab eo tempore quo Lutetiam deferuit, examinare
agoreflus ſum (quæ enim ante abſceſſum fuum receperai

PROBLEMATUM DE CYCLOIDE. 157 ceperat in arcibus clausas reliquit, nec ante suum reditum poterunt perpendi). Ab ea ergo, ex illis quas apud eum reperi, incipere visum est, quæ gravissima est, quippe quæ absque ulla demonstratione in solo calculo consistit casus quem designaveram; quem quidem calculum postulaveram, ut ex eo, prout verus aut falsus esset, dignosci posset, an ejus Author absolvisset nec-ne, quæ se absolvisset proferretur problemata. Sic enim locutus eram : Qui questiones resolvere, significabit intra prestitutum tempus D. de Carcavi, & quidem instrumentum publico, se solutiones habere. Et quia simplex illa assertio omni probatione destituta, vana prorsus fore & jus nullum Authori suo dedisset cur aliis preferretur, subiunxi : Et ad confirmandam [ue assertio]nis veritatem, aut demonstrationem compendio Jam mihi, aut faltem calculum istius casus ex cujus nempe veritate, de veritate assertionis judicaretur. Hic igitur Author calculum suum hujus casus misit in indicium veritatis à se repertum. At verò calculus iste suus nimis falsus est, & nihil prorsus veri continet. Duas enim solum mensuras profert, & ambas falsas, &, ut dictum est, nimis falsas : ita ut calculus ille quem Author ad confirmandam suæ assertionis veritatem juxta præscriptam legem misit, nihil aliud confirmet, nisi ipsum Yané asseruisse se demonstrationem penes se habere. Ille enim calculus, in indicium solutionis adductus, Cuve ue oo — , ÉD. ... : » [We | Ë : \f 4: (UE | à 4 21 M Fee, DE eme Fe pur Med ste gg res RE BP 4 c EE CRE RP — ET — + “ e _ - = CN | FRS — SI SERRE

153 ANNOTATA IN SOLUTIONES duétus, falſiratem potiùs quàm veritatem ſolutio: nis indicat. Adedque miror hunc Authorem, € quæ de calculi erroribus condonandis in alià om: nind occaſioné diximus , ad iſtam trahere voluiſſe; non intelligens quanta fit differentia inter eum qui aſſerens ſe cujuſvis quæſtionis ſolutionem habere, nullam demonſtrationem affert, ſed ſolummodò calculum, ex quo ſolo fuadere nititur ſe verè rem abſolvifſe ; & eum qui totius quæſtionis ſolutionem omni ex parte geometricè demonſtra: tam profert, & fimul cum hac ſolidà demonſtratione, etiam ſuperaddit calculum. Magnum fu eſt inter utrumque diſcrimen, quantùm ad errores calculi attinet. Qui enim ſolutionem geometricè demonſtratam exhibet, nullum de fui ſolutione dubium relinquit, eique æquum eſt ſemper condonare errores calculi qui præſenti demonſtrationis Juce evaneſcunt & cortiguntur. Alter verd qui nihil aliud quèm calculum ſine ullà demonſtratione porrigit, ſi erroneus fit, & nullam veram menſuram habeat, quid ei ſupererit undè patefaciat ſe rem reſolvifſe? An ſola falſitas, repertæ veritatis indicium eſt? Ut ergo €t demonſtratione falſà non oftenderetur detectan eſſe veritatem, fic & nec ex falſo calculo oftenditur. Quod enim paralogiſmus eſt in demonſtratione , hoc error calculi eſt in calculo ſolo, & démonſtratione deſtituto ; nec aliter quis judicare potell

PROBLEMATUM DE CYCLOIDE. 149 poteft fe quættionem
 refolvifle, nifi aut demonftrationem paralogifiis puroatam, aut falrem
 calculum erroris expertem proferendo. Et ided cūm apud me ftatuiflem
 experiri ac Certd dignofcere quis futurus effet primus, qui queftiones
 noftras abfolveret, hæc indicia flagiraVi, ut intra præftitutum tempus, aut
 Ro trae ph, quantumvis compendiofa, aut faltem calculus ilius quem
 defignaveram casūs, prodiret : quibus verbis quis aliud intelliger quim
 verum calculum; non autem falſum? falſus enim calculus non eſt Glculus.
 Et quid ftultius fuiſſec, quim ex calculo Falſo , & nihil veri habente,
 concludere Autiorem fuum veram poſſidere demonftrationem , iplque
 primas dare, & jus concedere ut omnibus aus poſthabitis, prior habeatur
 ſolutionis inventot? Non planè ea muht intentio fuiſſe, & fi ita éſſet, liberum
 cuilibet fuiſſe ſtatim atque ſcripta noltra vuleata funt, calculum fétitium
 quantumvis étroneum ad libitum componere, & ex eo tamen oïdinem ſibi
 afcribere, ac nullum damnum meüendo, indè ſecuritarem adipiſci, ut fi quâ
 deindè à problemata etiam ultimo loco ſolvifſet, ad priM tamen Præemia
 veniret, quia falſum calculum primus protuliſſet. Ec ita Fu , ut primæ
 inventlonts honor, qui his in rebus RÉSIRDS eſt, non à Prima veritatis
 detectione, fed à primà Abe ite pro Aibitratu fabricatA , penderet. Abſit ut
 tam iniquam &

160 ÂNNOTATA IN SOLUTIONES & ineptam conditionem pro
 leve dederim! Hoc certè longè abest ficut à mente mea, fic & à ver bis meis,
 quæ ita se habent. Qui publico instrumeto , intra prefinitum tempus
 Iuriffimo D. de Carcavi significaverit, se eorum que quæfita sunt
 demonstrationem penes se habere; 6 aut ipfammet demonstrationem ad
 ipsum miferit: aut falcem, ad confirmandam [ue affertionis veritatem cashs
 quem mox defronabimus calculum dederi (ibi nulla prorfus facta est ut nec
 fieri potuit, de condonandis erroribus mentio) /éque paratum elle professus
 fuerit omnia omnind demonstrare ad iplus D. de Carcavi nutum , hunc nobis
 [atisfecifle dech: ramus ; & confentimus primum qui hec fecerit primo, .
 fecundum fecundo Præmio donandum. Hæc ervo pi ma est conditio, ut aut
 lpfæ abbreviata {olutio mittatur, aut faltem calculus, nulli de condonandis
 erroribus fai mentione. Quia vero ht calculus etiam verus non omnind
 fuficiebat 2 Præmia obtinenda, hanc fecundam conditgonem ut æquum erat
 fubjunxi : {£ fua folurio ab ipfo D. de Carcavi virilque ad id fecum
 adhibitis, cum - àpfe vifum fuerit, exhibira, Geometrica ac vera judittur,
 falvo femper errore calculi. Xbi. fanè, ubi de examinandis
 demonstrationibus agitur, jure condonantur errores calculi; cùm enim adest
 demon ratio, ita eos nepligere femper iustum est, ac ridi culum foret cùm
 calculus folus exhibitur, je. nil

PROBLEMATUM DE CYCLOIDE, 161 nihil veri habeat calculus non est, ut jam satis diximus. - Falsus est autem calculus Auctoris illius de quo hic agitur, nec quicquam veri continet; ipsiusque falsitatem Auctor ipsemet agnovit, illumque posterioribus litteris revocavit, nec ullum alium misit, & sic revera nihil minus censendus est. Se tamen alium calculum penes se habere scribit, quem verum esse asserit; cuius novae assertionis cum nullum hucusque indicium protulerit, sed mera tantum verba, non plus in hac re fidei meretur quam cum in eisdem epistolis, pari fiducia pronuntiat se Drevis missurum quadraturam circuli & hyperboles duabus diversis methodis expediri; de quibus omnibus periti quique interim non temere dubiae sunt. Si enim calculum quaesitum revera haberet, cur non intra tempus constitutum misisset non Video : hoc enim promptius fuisset quam fuis quibus utitur verbis polliceri. Calculum autem verum Promittendo, & non mittendo, spatium quaerendi sibi praeparare videtur, & si forte etiam extra tempus reperiat, aut aliquo modo illius quem jam ad multos missimus notitiam habere possit, illum ipse sibi fortassis, & quasi a se jamdiu repertum, & intra debitum tempus ascribat. Melius tamen de ipso sentimus, haec enim frustra & vananiter tentaret. Oportebat quippe si habuisset, intra tempus destinatum misisse, scripta namque lex instat, TOME Y. LE qui "die M 541: 2: y A L [U l Re l H [L# E mars pee EN 5

162 AÂNNOTATA IN SOLUTIONES, &t. qui intra præflitutum
tempus publico inflrumento calculum faltem miferit. Yle autem nihil ex ns
implevit; non enim inflrumentum publicum, fed privaras cartulas adduxit,
quas fanè reliqui Authores qui publicas, ut poftularum eft, attulerunt,
refpueunt, five pofteriores fint ut ei præponantur, five priores fuerint ut foli
& fine focio habeantur; quibus cùm ego debitor fim, refftere non poflem,
non enim privatis {cripturis fides adhibetur, nec ut 1pfi veibis meis credant,
auderem aut vellem perere; & ided publicum inflrumentum flagraveram
fide ex fe ipfo dignum. Author autem ille nec tale inflrumentum validum
attulit, fed & nec verum calculum dedit, folam verd falfitatem, & biuim
reliquerit an quæffice cèm nobis omnind du tiones refolverit, aut à quo
tempore refolverit, quidquid de hâc quæffitione fcripfit tanquam aut inane aut
falſum, & quaf non fuiſſet, habendum eft; & cum jam elapſum fit tempus,
ipſe Author jure ab 1ftâ Palæſtra, quantum ad Præmia attinet, excluſus eft.
Ipſe verd cùm jam ad primæ inventionis hono-: rem, divulgato à nobis vero
calculo, pervenire non poſſit, fuos faltem errores corrigendi gloriam
monitus conetur adip1fc1. Datum 9 OGobris 1658. \ HISTOIRE

63 era verre mme RE SE ————— © = — Qi ——— A +

HISTOIRE DE LA ROULETTE, APPELLÉE AUTREMENT ee ms
TROCHOÏDE OU CYCLOÏDE: \ , 7 , / Où l'on rapporte par quels degrés
0" ef Mon 2 DS arrivé à la connotffance de cette line. LI À Roulette eft
une ligne fi commune, qu'après la droite & la circulaire, il n'y en a point de
ffréquente; & elle fe décrit fi fouvent aux yeux de tout le monde, qu'il y à
lieu de s'éronner qu'elle nait point été confidérée par les anciens, dans
lefquels on n'en trouve rien : car ce n'est autre chofe que le chemin que fait
en l'air le clou d'une roue, quand elle roule de fon mouvement ordinaire,
depuis que ce clou commence à s'élever de terre, jufqu'à ce que le
roulement continu de la roue l'ait rapporté à terre, après un tour entier
achevé : fupPofant que la roue foit un cercle parfait, le clou Un point dans
fa circonférence, & la terre parfaitement plane. Le feu P. Merfenne,
Minime, fut le premier qui la remarqua environ l'an 1615, en confidérant le
roulement des roues; ce fut pourquoi il lappella Za Roulerre. I voulut
enfuire en reconnoître ES Ja

164 HisTrToiïrr la nature & les propriétés; mais il ne put y pénétrer. Il avoit un talent tout particulier pour forme de belles questions ; en quoi il n'avoit peut-être pas de femblable : mais encore qu'il n'eût pas un pareil bonheur à les résoudre , & que ce fût pro- prement en ceci que confifte tout l'honneur, il est vrai néanmoins qu'on lui a obligation, & qu'il a donné l'occasion de plusieurs belles découvertes, qui peut-être n'auroient jamais été faites, s'il n'y eut excité les Savants. Il proposa donc la recherche de la nature de cette ligne, à tous ceux de l'Europe qu'il en crut capables, & entre autres à Galilée; mais aucun ne put y réfléchir, & tous en désespérèrent. Plusieurs années se passèrent de cette sorte jusques en 1634, que le Pere voyant résoudre à M. de Roberval , Professeur Royal de Mathématiques, plusieurs grands problèmes, il espéra de tirer de lui la solution de la Roulette. En effet M. de Roberval y réussit; Il démontra que l'espace de la Rouleste est triple de la roue qui la forme. Ce fut alors qu'il commença de l'appeler par ce nom tiré du grec , Trochoïdes , correspondant au mot françois, Roulette. Il dit au Pere que sa question étoit résolue, & lui déclara même cette raison triple , en exigeant néanmoins qu'il la tiendrait secrète durant un an , pendant lequel Il proposeroit de nouveau cette question à tous les Géometres. Le

DE LA ROULETTE. 164 Le Pere, ravi de ce succès, leur écrivit à tous, & les pressa d'y repenser, en leur ajoutant que M. de Roberval l'avoit résolu, sans leur dire comment. | L'année & plus étant passée, sans qu'aucun en eût trouvé la solution, le Pere leur écrivit pour la troisième fois, & leur déclara alors la raison de la Roulette à la roue, comme 3 à 1. En 1635, sur ce nouveau secours, il s'en trouva deux qui en donnerent la démonstration : on recut leurs solutions presque en même-temps ; l'une de M. de Fermat, Conseiller au Parlement de Toulouse, l'autre de feu M. Descartes, & toutes deux différentes l'une de l'autre, & encore de celle de M. de Roberval : de telle sorte néanmoins qu'en les voyant toutes, il n'est pas difficile de reconnaître quelle est celle de l'Auteur; car il est vrai qu'elle a un caractère particulier | & qu'elle est Pile par une voie si belle & si simple, qu'on connoît bien que c'est la naturelle. Et c'est en effet par cette voie qu'il est arrivé à des dimensions bien plus difficiles sur ce sujet, à quoi les autres méthodes n'ont pu servir. Ainsi la chose devint publique, & il n'y eut personne en France, de ceux qui se plaissent à la Géométrie, qui ne fût que M. de Roberval étoit l'Auteur de cette solution, à laquelle il en ajouta encore même temps deux autres : l'une fut la suivante | EDS mention D = 22 + er = ———
— LT a — dues. 3 nes z a Phare er 1

ha F4 LAB + : (107 t op AN TU : HU S) pl | : {l jh Vi || : | 1) | :
 Le à : 1 1 © | ILE "a | | | | Il } | il le | } 4 le " | | | \ à | : Î : | | | 4 ni | A (il ni ! Il 1
 , IN EN 12 " Æ : | Il (| 4, ? LA \lb y n 5 D UE UUR PMU Du | (A | fi | t É t
 il L CS LE DER RE) : | (ni | | % NN AU * AUNTUUT FR | | À : \$ 2-81 , \$ | |
 sw 1F 1 * L | | 166 Her SO tATrE menfion, du folide à l'entour de la bafe,
 l'autre, l'invention des touchantes de cette ligne, parue méthode qu'il trouva
 alors, &'qu'il divulgua incontinent, laquelle eft fi générale, qu'elle s'érend
 aux touchantes de toutes les courbes : elle confifte en la compofition des
 mouvements. En 1638, feu M. de Beaugrand ayant ramale les folutions du
 plan de la Roulette , dont il y avoit plufieurs copiés, avec une excellente
 méthode, de maximis G minimis, de M: de Fermat , il envoya l'une &
 l'autre à Galilée, fans en nommer les Auteurs : il eft vrai qu'il ne dit pas
 précifément que cela fût de lui; mais il écrivit de forte qu'en ny prenant pas
 garde de près, il fembloit que ce n'etoit que par modeftie qu'il n'y avoit pas
 mis fon nom; & pour défuifer.un peu les chofes, il changea les premiers
 noms de Roulerte & Trochoïde en celui de Cycloïde. Galilée mourut bientôt
 après, & M. de:Beaugrand aufli. Toricelli fuccéda à Galilée, & tous fes
 papiers lui étant venus entre les mains ; il trouva entre autres ces folutions
 de la Roulette fous le nom de Cycloïde, écrites de la main de M. de
 Beängrand, qui paroifloit en être l'Autetr, lequel étant mort, ikcrut qu'il y
 avoit aflez de temps paflé pour faire que la mémoire en fûr per due, & ainfi
 il penfa à en profiter. . I ft donc imprimer fon Livre en 1644, dans lequel

DE LA ROULETTE. 167 lequel il attribue à Galilée ce qui est dû au P. Merfenne, d'avoir formé la question de la Roulette; & à foi-même ce qui est dû à M. de Roberval, d'en avoir le premier donné la résolution: en quoi il fut non-seulement inexcusable, mais encore malheureux; car ce fut un sujet de rire en France, de voir que Toricelli s'attribuoit en 1644, une invention qui étoit publiquement & sans contestation reconnue depuis huit ans pour être de M. de Roberval, & dont il y avoit, outre une infinité de témoins vivants, des témoignages imprimés, & entre autres un Écrit de M. Defaroues, imprimé à Paris au mois d'Août 1640, avec Privilege, où il est dit, & que la Roulette est de M. de Roberval | & que la Méthode de maximis & minimis est de M. de Fermat. M. de Roberval s'en plaignit donc à Toricelli, par une Lettre qu'il lui en écrivit la même année; & le P. Merfenne en même-temps, mais encore plus févèrement: il lui donna tant de preuves, & imprimées; & de toutes fortes, qu'il l'obligea d'y donner le mains, & de céder cette invention à M. de Roberval, comme il fit par ses Lettres que l'on garde, écrites de sa main, du même temps. Cependant comme son Livre est public, & que son dévouement ne l'est pas, M. de Roberval ayant si peu de soin de se faire paroître, qu'il n'en a jamais rien fait imprimer; beaucoup de monde y à EL #4 été = #4 à K A . pa | 1 p L :

1638 Hi1STorRreEr été furpris, & je l'avois été moi-même; ce quia été caufe que par mes premiers Écrits, je parle de cette ligne comme étant de Toricelli, & c'est pourquoi je me fuis fenti obligé de rendre par celuci à M. de Roberval, ce qui lui appartient véritablement. Toricelli ayant reçu cette petite diforace, & ne pouvant plus pafler auprès de ceux qui favoient le vérité, pour Auteur de la dimenfion de l'espace de la Roulette, ni même de celle du folide autour de la bafe, M. de Roberval la lui ayant déjà envoyée, il effaya de réfoudre celui à l'entour de l'axe. Mais ce fut à qu'il trouva bien de la difficulté; car c'est un problème d'une. haute, longue & pénible recherche. Ne pouvant donc y réuflir, il en envoya une folution aflez approchante, au lieu de la véritable; & manda que ce folide étoit à fon cylindre comme 11 à 18: ne penfant pas qu'on pût le convaincre. Mais il ne fut pas plus heureux en cette rencontre qu'en l'autre; car M. de Roberval, qui en avoit la véritable & géométrique dimenfion; lui manda non-feulement fon erreur, mais encore la vérité. Toricelli mourut -peu de temps après. | M. de Roberval ne. s'arrêta pas à la feule dimenfion de la premiere & fimple Roulette & de fes folides; mais il étendit fes découvertes à toutes fortes de Roulettes, alongées ou accourcies, pour ||| toutes

DE TA :MOULEMTE. 169 toutes lesquelles les méthodes font générales, & donnent , avec une même facilité, les rouchantes, la dimension des plans & de leurs parties, leurs centres de gravité, & les folides, tant autour de la bafe, qu'autour de l'axe. Car encore qu'il ne l'ait donné au long que des Roulettes entieres, la méthode s'étend fans rien y changer, & avec autant de facilité aux parties, & ce feroit chicaner que de Jui en difputer la premiere réfolution. ... La connoiffance de la Roulette ayant été portée jufques-là par M. de Roberval, la chofe étoit demeurce en cet état depuis quatorze ans; lorfqu'une occafion imprévue m'ayant fait penfer à la Géométrie que j'avois quittée 1] y avoit long-temps, je me formai des méthodes pour la dimension & les centres de gravité des folides, des fufaces planes & courbes, & des lignes courbes, auxquelles il me fembla que peu de chofes pourroient échapper: & pour en faire l'eflai fur un fujet des plus difficiles | je me propofai ce qui reftoit à connoître de la nature de cette ligne ; favoir , les centres de gravité de ces folides, & des folides de ces Parties; la dimension & les centres de gravité des fufaces de tous ces folides; la dimension & les centres de gravité de la ligne courbe même de la Roulette & de ces parties. Je commençai par les centres de gravité des folides & des demi-folides , que je trouvai par ma méthode,

179 H I SSTÉO T'R E méthode, & qui me parurent si difficiles par toute autre voie, que, pour favoir s'ils l'étoient en effet autant que je me l'étois imaginé, je me résolus d'en proposer la recherche à tous les Géomètres, & même avec des Prix, Ce fut alors que je fis mes Écrits latins, lesquels ont été envoyés partout : & pendant qu'on cherchoit ces problèmes, voyant les folides, j'ai résolu tous les autres, comme on verra à la fin de ce discours, quand j'aurai parlé des réponses qu'on a reçues des Géomètres sur le sujet de mes Écrits. Elles font de deux sortes. Les uns prétendent d'avoir résolu les problèmes proposés, & ainsi avoient droit aux Prix; & les Écrits de ceux-là feront vus dans l'examen régulier qui doit s'en faire. Les autres n'ont point voulu prétendre à ces folutions, & se font contentés de donner leurs premières pensées sur cette ligne. | ' J'ai trouvé de belles choses dans leurs Lettres, & des manières fort subtiles de mesurer le plan de la Roulette, & entre autres dans celles de M. Sluze, Chanoine de la Cathédrale de Liege; de M. Richi, Romain; de M. Huguens, Hollandois, qui a le premier produit que la portion de la Roulette, rattachée par l'ordonnée de l'axe; menée du premier quart de l'axe du côté du sommet, est égal à un espace rectiligne donné : & j'ai trouvé la même chose dans une Lettre de M. Wren;

DE LA ROULETTE. f71 M.Wren, Anglois, écrite prefque en même-temps. On à vu auflî la dimenfion de la Roulette & de fes parties, & de leurs folides à l'entour de la bafe feulement, du R. P. Lallouere ; Jéfuite de Touloufe. Comme il lernvoya route imprimée, jy fis plus de réflexion; & je fus furpris de voir que tous les problèmes qu'il y réfout, n'étant autre chofe que les premiers de ceux que M. de Roberval avoit réfolus depuis fi long-temps,, Il les donnoit néanmoins fous fon nom, fans dire un feul mor de l'Auteur. Car encore qué fa méthode {oit différente, on fait aflez combien c'eft une chofe aifée, non-feulement de déguifer des propofitions déjà trouvées, mais encore de les réfoudre d'une maniere nouvelle, par la connoïffance qu'on a: déjà eue une fois de la premiere folution. Je priaî donc inflamment M. de Cärcavi, nonfeulement de faire avertir le Révérend Pere que tout cela étoit de M. de Roberval / ou au moins manifeftement enfermé dans fes moyens, mais encore: de lui découvrir la voie par laquelle il y eft arrivé (car on ne doit pas craindre de s'ouvrir entre les perfonnes d'honneur). Je lui fs donc mander que cette voie de la premiere découverte étoit l'quadrature que l'Auteur avoit trouvée depuis long-ternps , d'une ficure qui fe décrit d'un trait de compas fur la furface d'un cylindre droit, laquelle furface étant étendue en plan, forme la moi'' tic

172 Hirs-7 O1: RE tié d'une ligne, qu'il a appelée /a compagne de la Roulerte , dont les ordonnées à l'axe font égales aux ordonnées de la Roulette , diminuées de celles de [a roue. En quoi je crus faire un plaisir particulier au Révérend Pere, parce que dans fes Lettres que nous avons, il parle de la quadrature de cette figure, qu'il appelle Cycloi-cylindrique, comme d'une chofe très-éloignée de fa connoiffaince, & qu'il eût fort defiré connoître. M. de Carcavi n'ayant pas eu affez de loifir, a fait mander tout cela & fort au long, par un de fes amis, au Révérend Pere, qui a fait réponfe. Mais entre tous les Écrits qu'on à reçus de cette forte, il n'y a rien de plus beau que ce quiaété envoyé pat M. Wren. Car outre la belle mamiere qu'il donne de mefurer le plan de la Roulette, il a donné la comparaifon de la ligne courbe même & de fes parties, avec la ligne droite : fa propolition eft, que la Hgne de la Roulette eft quadruple de fon axe, dont il a envoyé l'énonciation fans démonitration. Et comme il eft le premier qui l'a produite, c'eft fans doute à lui que l'honneur de la premiere invention en appartient. Je ne croirai pas pourtant lui rien ôter, pour dire, ce qui eft auffi véritable , que quelques Geometres de France, auxquels cette énonciation a été communiquée, en ont trouvé la démonftration fur le champ, & entre autres M. de Fermat. Et je dirai

DÉ LA ROULETTE. 173 rai de plus que M. de Roberval a témoigné que cette connoissance ne lui étoit pas nouvelle : car auſi-tôt qu'on lui en parla, il en donna la démonſtration entière, avec une très-belle méthode pour la dimenſion de toutes les courbes , laquelle il n'avoit point encore voulu publier : eſpérant d'en tirer quelques connoiffances -encore plus confidérables, comme en effet c'éroit par-là qu'il avoit comparé depuis long-temps les lignes ſpirales aux panboliques; on en voit quelque choſe dans Les Quvres du R. P. Merſenne. Cette méthode eſt encore tirée de la compoſition des mouvements , de même que celle des rouchantes : car comme la direction du mouvement compoſé donne la touchante, ainſi ſa viteſſe donne la longueur de la courbe, dont voici la première publication. Voilà ce que j'ai trouvé de plus remarquable dans les Écrits de ceux qui ne prétendent ſeulement aux Prix. Quant aux autres, je n'en parlerai qu'après l'examen qui devoit ſ'en ouvrir le premier Octobre , mais que nous ſommes obligés de remettre au retour de M. de Carcavi, qu'on attend de Jour en jour. C'eſt alors qu'on jugera de ceux qui auront faiſait aux quatre conditions portées par mes Écrits, publiés au mois de Juin; favoir: 1°. Que la ſolution ait été reçue & ſignifiée chez M. Sæz 23 4 ni - ZT == Sin TES — — = ne — = z nt! Miel qu'È k | lle |! EM Î L2 CUS À ent |! Le l f EAU UE Hi LU Ÿ (| \ || {oi r a == 7 == SE == er Et — CESSÉ : == _ - — == œ 2 == > k . a em = RTE a Connu il - 2 ete F = . _ — 4 = nr mu Or ES LE pr Et ones . TE - rite re == es = ; ce x > AE EEE = £———— a = — "7 4 LÉ cs Ru

174 H:1 5-7 Ô LRE Vi. de Carcavi dans le premier Octobre , qui
 ef le temps prefcrit : Qui intra praftitutum tempus Il lufiriflimo D. de
 Carcavi fignificaverit, &c. 2°. Qu'elle foit accompagnée d'un aéte public;
 inférumento publico , pour Oter tout foupçon. 3°. Qu'elle contienne, ou une
 démonftrationabre: gée, où au moins le calcul d'un cas que je demande pout
 reconnoître, par la qualité de ce calcul, fi celui qui l'envoie avoit en effet
 aès-lors la réfolution nette & parfaite des problèmes : aur fal: tem ad
 confirmandam fus affertionis veritatem casis quem mox defionabimus
 calculum dederit ; ce qui paroîtroit être vrai ou faux, felon que le calcul
 feroit vrai ou faux. 4°. Que l'on enverroit enfuite & à loifir l'entiere
 démonftration de tous les autres cas propo{és , omnia omnind demonftrare ;
 & qu'elle foit jugée vraie & géométrique en toutes fes. parties, par ceux que
 M. de Carcavi voudra nommer. Et j'ai même pardonné les erreurs de calcul
 qui fe trouveront dans ces dernieres & entieres démonftrations de tous les
 cas généralement : parce que quand les démonftrations font préfentes, les
 calculs ne font jamais néceffaires, & les erreurs y ss VOJoUEs
 pardonnables. S'il s'en trouve qui foient dans ces conditions, le premier aura
 le premier Prix, & le {econd , le fecond : s'il n'y en a qu'un, il les aura tous
 deux. Mais

DE LA ROULETTE. 176 Mais ceux qui ne les auront pas toutes accomplies, feront exclus des Prix, quoiqu'ils ne le fissent pas de l'honneur, qui leur appartiendra toujours par le mérite des Écrits qu'ils pourront proqure. Car je n'ai pas mis des conditions à la difpenfation de l'honneur, dont je ne difpofe pas, mais feulement à celle des Prix dont j'ai pu difpofe à mon gré. Que s'il ne fe trouve perfonne dans l'examen qui ait réfolu les problèmes, je les donnerai alors moi-même , comme je me fuis obligé par mes Écrits de le faire, quand le temps feroit expiré; Cest-i-dire, au premier Octobre. Et j'ai en effet déjà commencé à divulguer mon calcul, que j'ai donné écrit à la main à plufieurs perfonnes dignes de foi, & entre autres, à M. de Carcavi, à M. de Roberval, à M. Galois, Notaire Royal à Paris, & à plufieurs autres perfonnes de France, & d'ailleurs très-confidérables par leur qualité & par leur fcience, qui ont marqué le jour qu'ils l'ont reçu. J'ai cru à propos d'en ufer ainfi, & de ne pas le faire encore imprimer , afin que fi dans l'examen il s'en trouve qui l'aient déjà rencontré , je pulie qu'ils l'ont réfolu avant que j'euffe divulgué ma folution; finon je donnerai publiquement ce que perfonne n'aura trouvé, & j'y ajouterai encote les problèmes fuivants, qui reftent fur la nature de la Roulette, dont quelques-uns ne me fmbtent pas moins difficiles. ÉD LE NO à À | 1 . || &. ZE ... << = = =: LT nt — ' + - 2 : = TS = - - - = = — - + = het £ > me = LA HE -Æ- ER à == - - dr Er" à me —

176 HS TOR ER 1°. Le point Z, étant donné où l'on voudra, dans la Roulette fimple, trouver non-feulement k dimenfion de la ligne courbe Z 4, comprife entre le point Z & le fommet (ce que M. Wrena réfolu }, mais encore le centre de gravité de cette portion de la ligne courbe. | 2°, Trouver la dimenfion de la furface décrite par cetté portion de la ligne courbe, tournée, tant autour de la bafe (ce qui eft facile), qu'autour dé axe, d'un tour entier, ou d'un demi, ou dun quart, ou de telle partie de tour qu'on voudra. 3°. Trouver le centre de gravité de cette furface , ou demi-furface, ou quart de furface, &c., ce qui eft le plus difficile & proprement le feul que je propofe. Dans tous lefquels problèmes je fuppoſe la quadrature du cercle, où il eft néceffaire de la fuppoſer. Voilà ce qui reſtoit à découvrir fur la nature de cette ligne, & dont je tiendrai la ſolution ſecrete juſqu'au dernier Décembre de cette année 1658, afin que ſi quelqu'un en trouve la ſolution dans ce temps, il ait l'honneur de FP invention. Mais ce temps expiré, ſi perſonne ne la donne, je Ka donnerai alors; & même la dimenfion générale des lignes courbes de toutes les Cycloïdes alongées ou accourcies; leſquelles ne font pas égales à des lignes droites, mais à des ellipſes, C'eſt

DE LA ROULETTE. 177 C'est à que j'ai fini de considérer la nature de cette ligne. Et pour reprendre, en peu de mots, toute cette Histoire, il paroît: * Que le premier qui a remarqué cette ligne en la nature, mais sans en pénétrer les propriétés, a été le P. Merfenne. Que le premier qui en a connu la nature, trouve les touchantes, mesuré les plans & les folides, & donné le centre de gravité du plan & de ses parties, a été M. de Roberval. Que le premier qui en a mesuré la ligne courbe, a été M. Wren. Et qu'enfin j'ai trouvé le centre de gravité des folides & demi-folides de la ligne & de ses parties, tant autour de la base, qu'autour de l'axe; le centre de gravité des surfaces, demi-surfaces, quart de surfaces, &c. décrites par la ligne & par ses parties, tournées autour de la base & autour de l'axe; & la dimension de toutes les lignes courbes des Roulettés alongées ou accourcies. Ce 10 Octobre 1658. TOME M HISTORIA ou Rs PS as SR Er à : Ca EE a {1 '|| h | LA l 44 ui ht 14 41 ll t Lt 1 HE LI [4 2: + 1 [PE YEUE Ur L 1 F 1 1 ue ET: _ Ter . _ LA L ... — ne ————— ———

HISTORIA TROCHOIDI, SAJE::CYCLOIDIS;: GALLICE, LA

ROULETTE: a qua narratur quibus gradibus ad intimam illius line naturam cognoscendam perventum fit. Rs infinitas linearum curvarum species, si unam circularem excipias, nulla est quæ nobis frequentius occurrat quàm Trochoides (gallice la Roulerre):ut mirum fit quod illa: principum feculorum Geometras latuerit, apud quos de tal lineâ nihil prorsus reperiri certum est. Describitur à clavo rotæ in sublimi delato, dum rota ipsa, motu rotis peculiari, secundum orbitam suam rectè fertur simul & circumvolvitur, initio motus sumpto, dum clavus orbitam tangit, usque dum absolutè unâ conversione, clavus idem iterum eandem tangat orbitam. Supponimus autem hic ad Geometriæ speculationem, rotam esse perfectè circularem; clavum, punctum in circumferentiâ illius assumptum; iter rotæ, perfectè planum; orbitam denique perfectè rectam, quam circumferentia rotæ continuè tangat; ambabus, orbita inquam

Mrve Cycloips. 179 inquam 8 CfcumferentiA\$nin uno eodemque plano inter movendum ubique existentibus. Hanc lineam primus omnium advertit Merfennus, ex Minimorum Ordine, circa annum 1615, dum rotarum motus attentiis confideraret; arque indè rotulæ ei nomen indidit; poft ille naturam ejus & proprietates infpicere voluit, fed irritò conatu. Erat huic viro ad excogitandas arduas ejufmodi quæftiones fingulare quoddam acumen, & quo omnes in eo genere facilè fuperaret : quanquam autem in lifdem diffolvendis, quæ præcipua hujufce negotii laus eft, non eîdem felicitare utebatur, Tamen hoc nomine de literis optimè meritus eft, quod permultis ifque pulcherrimis inventis occafionem præbuerit, dum ad eorum inquifitionem etuditos de iis nèque cogitantes excitaret. Ergo naturam ‘Trochoidis omnibus quos huic operi credidit pares , indagandam propofuit ; in primis Galileo : at nemini res ex fententia cefuic, omnesque de nodi illius diffolutione desperarunt. Sic viginti proxime abierunt anni ad ufque 1634, quo Merfennus, quùm multas ac præclaras propofitiones à Robervallio, Regio Mathefcos Profeflore, folvi quotidie videret, ab eodem fux quoque Trochoidis folurionem fperavit. Nec verd euim fua fpes fruftrata eft. Felici enim inquifitionis fuæ fucceflu ufus Robervallius, TroM 2 choidis

180 Historia Trochoïdis, choidis spatium, spatii Fœtæ à quâ defcribitur, triplum esse demonstravit : ac tunc primum huic figuræ Trochoidis nomen è græco deductum imponit, quod gallico /a Roulette, aptissime respondet. Mox ille Merfennus solutum à se problema, ac scripam illam rationem ostendit, accept ab eo fide, id per totum adhuc annum ir comprehensum, dum eandem rursus quæstionem omnibus Geometris proponeret. Lætus hoc eventu Merfennus mittit rursus ad omnes Geometras : rogat ut de integro in eam Inquisitionem incumbant; addit etiam solutum à Robervallio problema : sed de modo nihil adhuc indicat. Anno & amplius elapso, cum nullus propositæ quæstioni satisfaceret, tertium ad Geometras! pergit Merfennus, ac tunc anno, scilicet 1638, rationem. Trochoidis ad rotam ut 3 ad 1 esse patefecit. Hoc novo adjuti subsidio, problematis demonstrationem invenerunt duo, inventamque eodem ferme tempore ad Merfennum transterunt, alteram Fermatius, Supremæ Tolosanæ Curiæ Senator, alteram Cartesius nunc vita functus; utramque, & alteram ab alterâ, & à Robervallii demonstratione diversam : Ita tamen ut qui eas omnes videat, illic * illius demonstrationem interponat qui primus problema diffolvit. Ea enim singulari quodam caractere insignitur; ac tam pulchrâ & simplici viâ ad veritatem ducit, ut hanc unam naturalem ac rectam esse

sive CyYcLrLorpis. 181 efle facile. fcias. Et certè eâdem illâ via Robervallius ad operiofiores mulrd circa idem argumentum dimenfiones pervenit; ad quas per alias methodos nemo forfan perveniat. Ita res brevi percrebuit, neminique in torâ Galli Geometriæ ftudiofori ignotum fuit demonftrationem Trochoidis acceptam Robervallio referendam. Huic autem ille duas fub idem fermè tempus adjunxit; una eft folidorum circa bafim ejus ®menfio : altera rangentium inventio, cujus ipfe methodum & invenit & ftatim evuloavit, tam generalem illam ac larè patentem, ut ad omnium curVarum tangentes pertineat. Motuum compofitione . methoduis illa innitur. | Anno autem 1638, Il. de Beaugrand cûm illas de plano Trochoidis demonftrationes collégiffet, quarum ad ipfum multa exemplaria pervenerant, itemque egreciam methodum Fermatii de maximis & Mminimis : utrumque ad Galileum muifit, tacitis Authorum nominibus. Ac fibi quidem illa nominatim non adfcripfit : iis tamen ufus eft verbis, ut minds attentè legentibus, quominüs fe iftorum profiteretur Authorem, folà demüm impeditus modeftiâ videretur. Iaque ad rem paululèm interpolandam, Mütatis nomimibus, Trochoidem in Cycloidem COMmutavit. Non mulrd poft Galileus, & ipfe de Beaugrand via cefferunt. Succeflit Galileo Toricellius, nacM 3 cufque [ll 44 [1 fi 1 à Ne | GR SE Dé D sim -epre TE ou tetes. + RE

= + = en É Le tdi me EDR SE 'or ND c. " _ D. = = — — — EE
 = = = = er = = = " LE En a . = - — — = x TS r — . a Em — = - > - _ — .
 à a" de = ne = — ETES — — _ = = — - z 2 z TE =: D TE — — = L RE
 TETE ce +: = = — — — > £ nr = = ; rer : 2 = es ES = mm — æs | 2 CE :
 ons a = : à = tre VER | ES PE Re in m — RS ei om "BE ES - Se ns er =. ES
 3 _ " xs — " e - — _ — = . _ ne. - Canin 1 Fair . — — — À 22 : = PRE RE
 92 g me ji T7 = : er: Emme > : ss à " ne RE rc — — < = ZE = = ee: = = — - =
 = * = _ her = — 2 en" 3 me " = — = - - F x = = = as F 3 pm - RL: us sé &
 x" - : r ns d à < ve — "mm? eme DE S3 2 = : À = ee . mi pe ce - < > oairer ?
 = = = = , : + > — = 7 — _ — = g rx # 22 ns A è SE — — "2 —. Le sg. 7 £ =.
 zx 5 Be Le - : On tr — — — tra Ta de = T7 = 2 Se me — a — — — 2 =
 ze > — 183 HistorrA Trocaotrodts, tufque eft inter illius manuſcripta, quæ
 omnia ad ipſum delata erant, ifta de Trochoide fub Cycloidis nomine
 problemata ipſus de Béaugrand manu fic exarata quaſi eorum Author ellet.
 Cognira erſo illius morte Toricellius, abolitam jam temporis ſpatio rei
 memoriam ratus, ea omnia fecurè jam ad fe transferri poſſe arbitratus eſt.
 Itaque anno 1644 Librum edidit, in quo excitatam de Trochoide quæſtionem
 Galileo tribut, quæ Meiſenno debebatur : ſibi primam ejus diſſolutionem
 arrogat, quan Robervallii eſſe certum erat : in quo fanè, ut candoris aliquid
 Toricellio defuit, fic & aliquid felicitatis. Neque enim fine quorumdam rifu
 exceptus eſt in Gallià, qui anno 1644 hoc ſibi aſcivifiſet inventum, cujus
 parens in vivis conſtanter jam per octo annos Robervallius agnoſcebatur, qui
 quod fuum erat non modò compluribus teſtibus adhuc viventibus poſſet
 revincere, fed etiam excuſis typo teſlimoniis, in quibus eſt quoddam ſcriptum
 G. Defairgues anno 1640 Auguſti menſe, Pariſiis editum : in quo nomitia
 tim habetur Trochoidis problémata Robervallit cle; methodum de maximis
 & minimis, Fermatil. Ergo hanc injuriam cum ipſo Toricellio litteris
 expoſtulavit Robervallius ; ac feverius etiam Merſennus, qui tot ipſum
 argumentis omnigeniſquè teſtimonus, etiam excuſis, coarouit, ut veris vic
 tus Toricellius, hoc invento cedere, illudquè ad Robervalhum

SIVE CYCLOÏPTRS. 187 Robervallium tranſcribere coaëtus fit :
quod litteris propriâ manu ſcriptis præſtitit, quæ etiamnum affervantur.
Verùm quia paſſim in manibus eſt Toricellii Liber, contrà ejus, ut ira loquar,
recantatio paucis innotuit; Robervallio tam parùm de famâ fuï extendenda
follicito, ut nihil de eâ recantatione emiferit in vulgus : multi inde in
errorem, & ipſemet eriam inductus (um. Hinc fatum eſt ut in prioribus
ſcriptis ita ſim de Trochoïde locutus, quaſi eam princeps Toricellius
invenerit. Quo errore cognito, faciendum duxi, ut quod jure Robervallio
debetur, hoc ipſi ſcripto reſtituerem. Ufus hoc infortunio Toricellius, cùm
jam nec dimenſionem ſpatii Cycloidis, nec folidi circa baſin primus
invenifle exiſtimari poſſet ab iſis quibus perſpecta rei veritas eſſet, folidi
circa axem Cycloïdis, menſionem agoreſſus eſt. Ibi verò non mediocrem
difficultatem oſendit: eſt enim illud atifi mæ cujuſdam & operofiſſimæ
inquiſitionis problema; in quo cùm veram aſſequi non poſſet; Veræ
proximam ſolutionem miſit; ac folidum illud ad ſaim cylindrum eſſe dixit,
ſicut 11 ad 18, ratus errorem illud à nemine refelli poſſe. Verùm nihilo fuit
hoc etiam in loco felicior; nam Robervallius qui veram ac Geometricam
dimenſionem invenerat, non modò ſuum illi errorem, {ed etiam veram
problematis reſolutionem indicavit. M 4 Toricellius ... és ST à ESS | }| FLN
Î H | : | Q 1 [ul pos E LA : Lan? PTE UT b4 De PLUITR è | À Cl JA He Een
| Lan 1 | ni LC PA [ei LH (part LP £ 12) kr? nl H DE Hi b 1 4 FF L 4 hr te t
"EH AE A D AU La # Nil | PA ll "1 | : VE A 44) 01: : Lait L d: 4 | on N
DEN : 54 k 41 (n | HU nu « 1 + 1 * | Fe à PAIE À (ÿ 1 US pe Ê ut Ê 1 A M
(D Hi on Ni ; t | 4 il ; ner! N Wu + [MA] 1 dE f } fl UE: : } ll L 'h + NAME
14 on SRI EN É l'as 116 1 | : 4. \ 4 j H 1 MAI 1 ON à BR 4 UE: : Den
RARE 'MO fl HR un dix 101 F : ce =

184 HirstornrA Trocnorprs, Toricellius non multd poft fato
 conceflir. At Robervallius fol fimplicis Trochoidis ejufque {olidorum
 dimenfione non contentus, omnes omnino Trochoides, five protraétas, five
 contraétas, inquifitione complexus eft, eafque excogitavit methodos , quæ ad
 omnem Trochoïdis fpeciem pertinerent; eîdemque facilitate tangentes
 darent; plana, & plenarum partes dimetirentur ; centra gravitatis planorum;
 ac poftremb folida circa bafim & circa axem, patefacerent, Quamvis enim
 integras tantùm Trochoides dimenfus fit, tamen ad Trochoïdumi partes nihil
 mutata ejus methodus non minüs expeditè adhiberi poteft ; ut qui illud
 Robervallio inventum abjudicet, meritd cavillator habendus fit. Nec verd ea
 omnia apud fe celavit Robervallus, fed fcriptis mandata publicè,
 privatimque, atque etiam in celebri feleétorum virorum Mathefeos
 peritiflimorum cœtu, per complures dies legit & cupientibus defcribenda
 permifit. Ed perductà Robervallii induftrià Trochoïdis cognitione, 1b1 per
 14 annos fubftiterat; cm me ad abdicata pridem Geometriæ ftudia repetenda
 improvifa occafio compulit. Tùm verd eas miht. paravi methodos ad
 dimenfionem, & centra gravitatis folidorum, planarum & curvarum
 fuperfcierum, curvarum item linearum, ut 1Îlas vix quicquam effugere poffe
 videretur : atque aded ut 1d materià vel difcillima periclitarer, ad ea quæ de
 3170 Trochoïde

. SIVE CyYcrorpiſ. 185\$ Trochoïde veſtiſanda ſupererant
agorefluſ ſum; nempè centra gravitatis folidorum Trochoidis & folidorum
ex ejus partibus exurgentium; dimenſionem, & centra gravitatis
ſuperficiarum omnium forum folidorum; ac poſtremò dimenſionem, &
centra gravitatis Ipſuſmet lineæ curvæ Cycloidis rie RAGE Ac primùm
centra gravitatis blidorum & femifolidorum indagavi, & ope meæ methodi
affecuruſ ſum; quod mihi ſic arduum eſt viſum quafvis alias inſiſtentibus
vias, ut periculum faéturuſ , an ita reſ eſſet quemadmodèm mihi
perſuaferam, hanc ommbus Geometris, etiam conſtituro Præmio,
inquiſitionem proponere decreverim. Tunc ſcailicet Rtina illa ſcripta
quaquaverſum nuſſa vuloavi; ac dum illa de folidis problemara
inveſtigantur, reliqua ego omnia diſſolvi, quemadmodùm ſub hujus
{criptionis finem exponam, ubi de Geomeiatum reſponſis priùs dixero. Illa
vero reſponſa duplicis ſunt generis, quippe diverſi ſunt ſcribentium genii.
Quidam ſoluta à ſe Problemata, atque iſta juſ ſibi in Præmium eſſe
contendunt : horum ſcripta leſitimo examine propèdiem excutientur. Alii ad
problematum quidem ſolutionem non aſpirant, ſed ſuas tantùm in
Cycloidem commentationes exponunt. Horum in litteris multa præclara, &
eximiæ dimetiendi Cycloïdis plani rationes habentur, impri7 mique ||||
manne me Ce une. — ” 14 =

186 HirsrorrA TrocHoïbts, mifque in Epiftolis Sluzii, Leodienfis Ecclefiae Cx nonici; Richii, Romani; Hugonii, Batavi, qui pri mus omnium detexit eam plani Trochoidis portionem crilineam, quæ his eribus lineis comprehenditur, fcilicet quartà parte axis ad verticem terminata, recta ad axem ab into llius quartæ partis perpendiculariter ordinatà ufque ad Trochoidem, & portione curvæ Trochoidis inter duas prædiétas rectas terminata, {patio rectilineo dato æqualem efle, atque aded l h æquale quadratum abfolutè exhiberi : quod idem in Epiftoli Wren, Angli, eodem ferè tempore fcriptà reperi. Cycloidis etiam, ejufque partium, itemque fol dorum circa bafim tantùm dimenfionem accepimus ab Aflouero, è Societate Jefu Tolofano; quam, quia tile typis editam mifit, attentius infpiciens, non fine admiratione cognovi cuncta llla quæ lbi habentur problemata, etfi non alta fint quam que jampridem à Robervallio foluta funt, tamen ab illo nullà prorsùs Robervallit fa&à mentione, qua à fe primùm foluta, proferri. Quanquam enim divetfam fecutus eft methodum, neminem tamen fugit quim promptum ac proclive fit jam inventas propofitiones novã fpecie habitūque producere ; tūm ex cognità illarum folutione, novas folvendi vias comminifci. Esi igitur fedulo cum Carcavio, tum ut Allouerum moneret, quod pro fuo venditabat, Robervallis

SEVE CYCLOTDIS. 187 vallii effe, vel nullo negotio ex ejus inventis elict; tm etiam ut viam ipli explanarer qua ed Robervallius pervenerat; nam hæc inter honestos viros citia periculum communicantur. Me igitur annitente fcriprum est ad Allouerum, NE quæ Robervalllum ed perduxerat methodum, cujusdam four quadraturâ niti, ab eodem pridem inventâ, quam figuram aëlae circini duétus in reéti cylindri faperfcie quæ superficies in planum porrecla, mediam cujusdam lineæ efficit partem, quam Robervalli ius Trochoidis fociam five gemellam dixit; ex qua quæ ad axem reétæ ad rene rectos ducuntur , æquales sunt duétis ex Trochoïde , demptis illis quæ ex Rotâ ducuntur. In hoc verd non mediocrem me ab Allouero gratiam inlfle credidi ; quandoquidem ipse in fuis litteris quæ adhuc habentur, de iftius fguræ quam Cycloi-cylindricam appellat, quadraturâ ita loquitur, quañ quæ à fuà notitiâ Jongè abfit & quam nofle vehementer EXpetar. Hæc pro Carcavio, cui tam multa fcribere non Vacabat > quidam ipfius amicus ad Allouerum fcripfit, cui viciflim Sous Allouerus. Sed inter miffa à Geometris fcripta, nullum ipfius Wren fcripto præftantius. Nam præter egre= giam dinétiendi Cycloidis plani rationem, etiam Cutvæ & ejus partium cum recti comparationem agcreflus est. Propofitio ejus est, Trochoidem ad fuum EL TT. PE True = © pe RE L CRE —_ c RP ee es ; nee nn Eh De 2: 3 RL LE RE — RD AR Em TR ne 2, D — Se PAC EEE 3 ere yR rss ee ÉEECNE | RENE — M ; 1 (fl ÉD À | à |!

Er D pa+ ST ms tés ET NE £ ln à TOME Du. É + bi, | 4 JET
SHHEN EE AL TeE ai 188 HirsrorirA Trocnoivrts, fuum axem effe
quadruplami hujus ille enuntistionem fine demonftratione mific;.& quia
primus protulir, inventoris laudem promeritus ef. Nihil camen de illius
honore detratum iri puto, fi quod verilimum eft dixero, quofdam ë Gallä
Geometras ad quos lÎla enuntiatio perlara eft, & in is Fermatium, ejus, non
difficulter demonftacionem invenifle. Dicam infuper Robervallium nihil fibi
novum afferri planè oftendifle ; ftatim ac enim de eâ propofirions audiit,
inteoram ejus demonftrationem continud fubjecit, cum pulcherrima
methodo ad omnium linearum curvarum di menfionem : quam methodum
ipfe dum alia inde graviora confectaria fperat eruere, diù oculram
habuerat. Et certè eââdein lille methodo ufus erit ad comparandas fpirales
lineas cum parabolicis, qui de re in operibus Merfenni nonnulla reperias.
Hæc merhodus compofitiene item motuum is nititur, ut & illa tangentium.
Nam ficuti motüs compofiti direétio tangentem dat, fic ejus celeritas curvæ
longitudinem efficit, quod fanè nunc primüm referatur. Hæc funt quæ in
eorum qui Premium non re(pictunt fcriptis animadverfione digniflima
reperl; de cæteris, peraéta demüm difcuflione, dicemus; quam quidem
prima Oétobris die aperiri conftitutum erat, fed ad reditum ufque Carcavii,
qui jamjam affuturus nuntiatur, rejicere necefle fuit, Tum

SIVE CYcLorDis. 189 Tūm verd judicabitur an aliqui quatuor
illis legibus farisfecerint, quas nos editis menſe Junio ſcripſimus.
I. Ut ſolutio Carcavio denunciata & apud eundem reſcripta
fit incra præſtitutum tempus, nimirum primum Octobris diem; qui intra (hæc
noſtra verba) præſtiturum tempus D. de Carcavi ſignificaverit. I, Ur illa
denuntiatio inſtrumento publico facta, ad tollendam fraudis ſuſpicionem. ME.
Ur demonſtratio compendiaria, vel faltem certi cujuſdam caſus calculus
offeratur, ex quo intelligi poſſit an qui eum mittit jam tūm veram problematis
ſolutionem tenere credendus fit : Aur tertē ad confirmandam affirmatiōis
veritatem caſus quem mox deſignabimus calculum miſerit. At niſi talculo
ſoluto, tunc de vero aut falſo omnino ſtatuendum veniet, prout calculus verus
vel falſus judicatus fuerit. IV. Ut deinde per otium, omnium propoſitorum
caſuum demonſtratio mittatur, eaque vera & omnibus partibus Geometrica
ab iis judicetur, quos Carcavius arbitros aſſecutus. Si quis tamen error
Calculi in integras illas omnium caſuum demonſtrationes irrepperit, eum
putavimus condonandum : quia calculi neceſſitas ceſſat, ubi adeſt
demonſtratio, adeoque tunc ſemper ignoſcendus eſt error in Glculo
intervenienti. Si duo his conditionibus fatiſfecerint, primus fit

SIVE CyYcLorpiſ. 191 dñcilla, quã quæ huc ufque propoñita funr. I. Punéto Z dato quocumque in Trochoide fimplici, invenire centrum gravitatis curvæ Z 4 inter allignatum punétum Z & verticem À interceptæ, II. Invenire dimenfionem fuperficieï curvæ ab edem curvâ Z 4, defcriptæ, dum ipfa Z 4 circumvolvitur, vel circa bafim, qui cafus facilis eft, vel circa axem : & five converfo proponatur integra, five dimidiata, vel ejus quæcumque pars. IT. Omnium prædiétarum fuperficierum à curvâ Z 4 defcriprarum, tam partium , quã integrarum, centra gravitacis aflignare. Et hoc quidem tertium omnium inventu dñhcillimum mihi extitir. Efto ergo idem folum ac unicum præ cæteris ad dñfcutiendum propofitum. În omnibus autem illis problematibus fupponiturcirculi quadratura, ubicumque fupponenda fuit, Hxc funt quæ de naturâ Trochoidis relegendâ téftabant; quorum folutionem ad ulrimum ufque Decembris diem hujus anni 1658 comprimemus: ut fi quis ea intra id tempus invenerit, inventionis gloriâ potiatur. At hoc elapfo, fi nemo attulerit, ipfimet afferemus : atque ipfam etiam generalem dimenfionem omnium linearum curvarum cujufvis Trochoïdis vel protraétæ vel contraz, quæ non rectis lineis, fed elhipfbus æquales oftendentur. Hic noſtræ in hujus lineæ naturâ rimandi perveſtigationis

192 HistortaA TrocnHorprs, &rc. vestigationis limes fuit; quare ut totam hanc natrationem in fummam contraham : Primus Merfennus, hanc lineam in naturà rerum advertit, nec tamen ejus naturam pervidere valuit. Primus Robervallius, & naturam retexit, & tangentes aflignavit, ac plana & folida dimenfus eft; & centra gravitatis, tum plani, tum plan partium, invenit. Primus Wren, lineam curvam dimenfus ef. Evo denique primus, folidorum, ac femifolidorum Trochoidis & ejus partium, tum circa bafim, tum circa axem, centra oravitatis inveni Primus, ipfufmet lineæ centrum gravitatis. Primus, dimenfionem fuperfcierum curvarum prædiéta folida, femifolida, eorumque partes comprehendentium. Primus, centra gravitatis talium fuperfcierum integrarum & diminutarum. Ac primus, dimenfionem omnium linearum curvarum cujufvis Trochoidis, tam protraétæ, quàm contraétæ, 10 Oéfobris 1658. ST RS Ces) RÉCIT

195. LR Re CT T | De l'examen & du jugement des Écrits
envoyés pour les Prix propofés publirquement fur le fujet de la Roulerre, où
l'on vort que ces Prix n'ont pont été gagnés, parce que perfonne n'a donné
la véritable folution des Problèmes. Dors ENCE de M. de Carcavi ayant
retardé l'examen des Écrits qu'il a recus fur les problèmes propolés touchant
la Roulette; aufli-cot qu'il fut de retour, il afflembra, le 24 Novembre, des
perfonnes très-favantes en Géométrie , lefquelles il pria de vouloir examiner
ces Écrits : & leur dic Quencore qu'on lui en eût envoyé plufieurs, il y €n
avoit peu néanmoins à examiner, parce que la plupart avoient été retirés par
les Auteurs qui aVolent prié qu'on ne les founît pas à l'examen, & qu'ainfi il
ne lui en reftoit que de deux perfonnes, qu'il ne voulut point nommer. Que
Fun de ces Écrits confiftoir en un fimple calcul d'un cas propofé, lequel lui
fut envoyé figné par lAuteur (1) en date du 1 \$ Septembre 1658, & porté
chez 22 EME mn 2 RE A 1 un. em (1) Le P. Lallouere, Jéfuite. Voyez le
Difcours imprimé à la tête du premier Volume de cette Collection. TOME F.
N lui, Mr ! * lé qu Ê | CRE TAN H |! HA Î f NH 1 il: } 1 a Ĩ QUE Li RU |
PE ' 11 | Lt il (Ue M h hs à L { À

sl f F EP | \|4 À i 111 HORAIRE: [l 1 { Ip l'AU NE if Q hi l [Hi l
1 HE (14 Eh 1 : 1111519! Î A1 Î CRE LEE IL QUI TURN e. \ 11101 1 | UE
M Hi 2NATRD f\ 11e NY. ALAN EE 11 Ê LE 14 14 Le [1 | L HI 1 D 4 : L
4 th DER RENTE LAN À THEN PEUR \ \ Hi DE PLAN NN He) LHEUN
HAUTE y Î CRI ' ELA Ne (RP EE LE LE 70 . j : ; (si | + f à} W JL AA EN
4 la I] 0 4. k ' Lt 48 DA } "a [| } PL " FA 4 Î f L' 1: + th : |, n \h w mu
l'LAB" nm A 1 [4 1 } 4 Cut t : ñ À MINI AI TE l REA (! : al ù + | : HA (l là
A ? ve \ L ù 1 (VERT EN ul Fr | \ UT : A H th | * 'À , SX] : na NII ii | un 4 ;
N re Et 1 T4! {M . 0 149 Lt #2 0H \h URHTeU 14 NRA TE : Nha; 1'
THUR 12 HI EN & 141 4 VE! in l '1 UI EN ï LYrU \ : C4 M A IN ù 1 t | ! 4
n k \ l 1 al Pel LL { { : l: "1! MAP: | (h 4! d : Eyn TU 'l h us | r 14 N | } LA
LT EI | (5 | AIM VRP | LI A M , Hit 4 y ALU MA ; { 4 À , 4 : 14 il {1# El .
ANNE | L 4 | ! : | MN { } | 1 PE OU ROMLE AT All AC 4 j AAC ne IR
21514 M "j r HI EE { =. 4 ET ...° »2 = 2° 2 ——— 2 ET = A 194 RéÉciT
DE L'ExAMEx lui, le23,parune perfonne qui demanda qu'on matquat fur le
paquet le jour de la réception, en difant qu'il étoit queftion d'un Prix; ce qui
fut fair. Mais qu'il reçut incontinent après des Lettres du même Auteur du
21 Septembre, par lefquelles il mandoit que fon calcul étoit faux : en quoi il
perfiſta par d'autres des mois de Septembre, d'Octobre & de Novembre ,
fans néanmoins envoyer d'autres calculs, mais déclarant auſſi qu'il ne
pretendoit point aux Prix deſtinés à ceux qui auroient réſolu les problèmes
dans le temps déterminé. De toutes leſquelles chofes M. de Carcavi conclit
qu'encoré que cet Auteur ne lui eût pas mande qu'on ne foumit point fon
calcul à l'examen; il jugeoit néanmoins que cela n'étoit pas néceſſaire, un
Auteur étant le meilleur juge des défauts de fon propre Ouvrage : de forte
qu'on ne fut pas obligé d'y apporter beaucoup d'attention ; & mtme on vit
d'abord qu'il en falloir peu pour en juger, parce que les meſures qui y font
données, font différentes des véritables, chacune prefque de la moitié; &
que dans un folide aigu par une extrémité , & qui va toujours en
ſ'élargiſſant vers l'autre, il aſſigne le centre de gravité vers l'extrémité
aiguë, ce qui eſt viſiblement contre la vérité. On jugea auſſi que ce calcul
ayant été envoyé feul , pour faire juger felon qu'il feroit vrai ou faux, que
l'Auteur avoit ou n'avoir pas les méthodes

POUR LES Prix, &c. 109\$ thodes pour la résolution des problèmes, at temps quil l'avoit envoyé; les erreurs qui s'y trouvoient, lui donnoient l'exclusion, & ne devoient pas être mifes au rang de ces autres fimples erreurs de cal cuk;:que l'Anorÿme avoit bien voulu excufer à ceux qui enverroient en même-termnps lés dérmonftrations ou les méthodes enrieres & véritables, auxquelles fi les calculs ne fe trouvoient pas con: formes, il paroïtroit aflez que cés erreurs ne {eroient que de calcul & ron pas de mérhode; fur quoi l'Anonyme avoit dit, //v6 fémper errore caleuli : au heu que quand le calcul eft feul, on né fauroit juger fi l'erreur qui s'y trouve, eft de méthode où de calcul, dont auflî l'Anonyme n'a dit en aucune maniere, /ulvo érrore calculi; & qu'il ÿ a apparence que c'eft une erreur de méthode, lorfz qu'ayant reconnu que le calcul eft faux, on n'en envoie enfuite aucun autre. Mais on juge en même-temps qu'il falloir laifler à l'Auteur de ce' calcul lavantage d'avoir reconnu le premier fà faute , puifqu'il l'avoir en effét écrit incontinent. après l'avoir envoyé. M. de Carcavi dit enfuite qu'il ne reftoit donc à €Xaminer que l'Écrit d'un autre Auteur (1), daté du 19 Août, ftyle ancien , & figné par un Notaire le même jour, où l'Auteur prétend donner une mé (1) Wallis. Voyez le Difcours déjà cité. | N 2 chode

US PL 196 REciT p£ L'Ex AMEN thode entiere pour la réfolution de tous les problèmes, avec les folutions & démonftrations, en cinquante-quatre articles. Que le paquet en fur délivré à Paris au commencement de Septembre, & qu'il avoit reçu depuis trois autres Lettres du même Auteur; l'une du 3 Septembre, par laquelle il corrige quelques erreurs qu'il avoit remarquées dans fon Écrit , & il ajoute même qu'i/ n'ef? pas encore pleinement affuré du refle, ne l'ayant pas, jufques à ce temps-là, affez exaëlement examiné; l'autre du 16 Septembre , par laquelle il ne fait qu'avertir de l'envoi des premieres ; & la derniere du 30 Septembre, où il dit en général, & fans rien marquer en particulier, qu'outre les corrections qu'il a envoyées , il peut y en avoir d'autres à faire : par où il femble être en défiance de fes folutions; & ce qui le marque encore davanrage, eft qu'il demande, par la même Lettre, f on ne fe contenteroit pas d'une folution approchante de la véritable. Or il n'y a gueres d'apparence qu'une perfonne qui croiroit avoir donné les {olutions exactes & géométriques , demandât fi on ne fe contenteroit pas des approchantes; mais néanmoins comme il ne révoque pas les fiennes en pro: pres termes, quoiqu'il y ait eu beaucoup de temps pour le faire, s'il l'eût voulu, on jugea qu'on ne pouvoit pas fur cela refufer d'examiner des Ecrits envoyés avec acte public, & qui n'avoient pas été 4 expreffément

POUR LES Prix, &c. 197 éxpreflément révoqués : vu même qu'il dit par une de fes Lettres, que Les défauts qui pouvoient être dans fes folutions, & qu'il appelle des erreurs de calcul, n'empéchoient pas, felon [on avis, que la difficulté des problèmes ne fût fuffamment [urmontée. * On s'y appliqua donc, & on jugea que, ni dans fon premier Écrit, ni dans fes corrections, il n'avoit trouvé, ni la véritable dimenfion des folides autour de l'axe, ni le centre de gravité de la demi-Roulette, ni de fes parties (ce qui avoir éré réfolu depuis long-temps par M. de Roberval}, ni aucun des centres de gravité des folides, ni de leurs parties, tant autour de la bafe qu'aurour de l'axe ; qui étoient proprement les feuls problèmes propofés par l'Anonyme avec la condition des Prix, comme n'ayant encore été réfolus par perfonne ; & l'on trouva qu'outre les erreurs qu'il avoit cor: rigées par fa Lettre, il en avoit laifé d'autres, & qu'il y en avoit de nouvelles dans fa correction même, lefquelles fe rencontrent dans prefque tous les articles, depuis le trente jufqu'au dernier. On jugea aufi que ces erreurs n'étoient point de calcul, mais de méthode, & proprement des paralogifmes : parce que les calculs qu'il y donne, font très-conformes à fes methodes, mais que ces méthodes mêmes font faufles. Et on remarqua qu'une de fes erreurs les plus confidérables, confifte en ce, N 3 qu'il

198 RécrT. pt L'EXAMEN qu'il taifonne de certaines surfacés indéfinies en nombre, & qui ne font pas également distantes entre elles, de même que si elles l'étoient; ce qui fait qu'ayant à mesurer la somme de ces surfaces, ou la somme des forces de leurs poids (à quoi se réduit toute la difficulté & tout le secret), il n'en trouve que de fausses mesures, les méthodes n'allant point aux véritables. C'est ce qui le mène à comparer, comme nombre à nombre, des quantités qui font entre elles, comme, des arcs de cercle au diamètre, où comme leurs puissances; & c'est ainsi que voulant 'donner la raison du folide de la Roulette à l'entour de l'axe à la sphère de la roue (ou de son cercle générateur), après l'avoir donné, comme 23 à 2 dans son premier Écrit, il la donne, comme 37 à 4 dans {à correction, par un calcul très-conforme à ses méthodes; au lieu que la véritable raison, que M. de Roberval a donnée de ce même folide à son cylindre de même hauteur & de même, bat ! et comme des trois quarts -du carré de la demi-base de la Roulette, moins de tiers du carré du diamètre de la Roue; au carré de cette demi-base. | .-Il n'est pas moins éloigné du véritable centre de gravité des folides à l'entour de la base, & encore plus de ceux à l'entour de l'axe, à cause d'un nouveau paralogisme qu'il y ajoute, en prenant mal les centres de gravité de certains folides' élevés perpendiculairement

POUR LES Prix, &c. 199 d'iculairement fur des trapèzes, dont 11
fe fert prefque par-tout, & coupés par des plans qui palfent par l'axe. Et on
jugea que les erreurs de ces Écrits donnoient encore fans difficulté
l'exclufon. : Le jugement de ces Écrits ayant été ainfi arrêté, il fut conclu
que puifqu'on n'avoit reçu aucune véritable folution des problèmes que
l'Anonyme avoit propofés, dans le temps qu'il avoit prefcrit; il ne devoit à
perfonne les Prix qu'il s'éroit obligé de donner à ceux dont on auroit reçu
les folutions dans ce temps; & qu'ainfi il étoit jufte que M. de Caïcavi lut
remit les Prix qu'il avoit mis en dépôt entre fes mains, puifqu'ils n'avoient
été gagnés par perfonne ; ce qui a été exécuté. Paris, le 15 Novembre 1658.
NAS SUIRE

200 SurTE pr L'HirsTotrEe SEFTE "DE: "L'HIST OTRE HE
ROULE RICE: Où lon voir Le procédé d'une perfonne (1) qu: avoit voulu
s'attribuer linvenuon des Problèmes propofes [ur ce fuyer. Es matieres de
Géométrie font fi férieufes d'elles-mêmes, qu'il eft avantageux qu'il s'offre
quelque occafon pour les 'rendre un peu dé vertiflantes. L'Hiftoire de la
Roulette avoit befoin de quelque chofe de pareil, & für devenue lanouffante
, fi on n'y eût vu autre chofe, finon que j'avois propofé des problèmes avec
des Prix, que perfonne ne les avoit gagnés , & que j'en eulle enfuite donné
moi-même des folutions, fans aucun incident qui égayât ce récit, comme eft
celui que l'on va voir dans ce difcours. Une perfonne, que je ne nomme
point, ayant appris qu'entre les problèmes que M: de Roberval avoit réfolus
autrefois, la dimenfion du folide dé la Roulette à l'entour de l'axe, étoit
fans comparaifon le plus difficile; il fit deffein, après avoit reçu
l'énonciation de ce problème & les moyens (1) Le P. Lalloucre. | paï

DE LA ROULETTE. 201 pa lefquels M. de Roberval y étoir arrivé, de fe faire pafler pour y être auffi venu de lui-même, & par fes méchodes particulieres : efpérant que certe eftime lui feroit aflez glorieufe , quoique ce ne fût que vingt-deux ans après. Mais la maniere dont il s'y prit, détruiſit fa prétention, & fit voir trop chirement qu'il n'avoit point de part de lui-même à cette invention. Car l'énonciation qu'il envoya, & quil vouloit faire pafler pour fienne, croit accompagnée de celle de M. de Roberval, dont elie ne différoit que de termes : comme qui diroit, Le reclanole de la bafe & de la hauteur, au lieu de dire, /e double de l'efpace du triangle. Et il reconnoïſſoit dans la même Lettre, qu'une autre énonciation qu'il avoit donnée auparavant, étoit faufle; mas qu'il s'afluroit que cette derniere étoit véritble, par cete raifon qu'elle étoit conforme à celle de M. de Roberval. Ce difcours fit juger le contraire de ce qu'il vouloit : puifque, s'il eût eu en main des méthodes & des démonſtrations géométriques de la vérité, n'eut pas été par cette conformité qu'il fe fût afluré de fa folution, mais qu'il en eût jugé plutot, & de celle de M. de Roberval même, par fes propres preuves. On connut donc qu'il n'avoit, en cela, de lumiere qu'empruntée; & ainſi on s'étonna de la priere qu'il faifoit en même-temps, qu'on Saurât & qu'on crût fur fa parole qu'il étoit arTivÉ me SRE ES Er ee 1! ! t t | NL | èr : M1 \d : in} 14 PA ME | l fi 1 {1 EUR | 4! rl : al : || {t | Pin : ! ' | ' ! al À | 4 114 Î C PCI || ? À | N (LATE || | : f | nil || : | À || f { £ 1 1h fl [a : " L (- L | || } Lh - (Î || || : ! : : : 4 v | NM | 1 rs n "a 4 {l î ÿ\$ (L } } | Lu (A1 1 VF - | . } F | (1 } 1 A [s | * M ! | À 1 | : || t 71 ke 1 4 AUX 4 | * 4 è | CR HN 74 ' k L | pe Or : 4 ! (l : | k N° : 1H NyL | LA La L le PA | | À He \ Le ! LA Riu t [Œ EI À LE ñ L WU] + nil 1 1] (4 À AU " | (JB NL | il NF { | L _ : | — : a d Tr Re TT Sn _ # os + à + Arr es '

ae s « TRE = Pare ere 2 fé ES 7 RE me a Æ ———— ———— ———— = -
nn = a == 7 me == | EE = re - “ e— F- — += = 2 Z == = e— Z "à = E — -
—— : LE " => s SE: : = E == x bi A æ = ee == ge. À a —— ne — - ——
- << -- = ES L.= — - Me Dors . —— zx , = ———— _ ————— ess Eee —
x == 5 Le Sos s es — - SES >= rx st ERA ———— — - _ BRAS = 5 < 3 =.
. = me ” = se == _ _ _ _ _ a : æ == = - == " = —Æ 3 : - se RE = SE
PETIRE Pme a == ——— F5 E asie - _ r 2 MTL RTE de + ——— DFE
=> —— ee » Fe: de re rs 4 z = 2 ITEMS MERRE Ed" DO TR Eee van = 5»
=. _ ter pus “ ai — . __ ST PRET Eee = 382 nr _ 3 SE à = 3 — - ee ——
— a SRpTE= ” Re . = dr = ses me Le > a, F4 s pe tt ds d é + . _ : md _ — rs
E 2 ’ si Ex eme, L = i 2 + < "Te 4: et var ” ee JE Tr À PARLE + — * Guess
La mo = 2 br rt 2. — = D F + 2° ee ———— — - = —— = eee 1 D ce EE ES
Ds Peas mn sd AE: sata EE: - Am MS “Me -vcNNE EEE RS PS PT Se ee
RE Es = Se = TRS 2: - == res l : SE Li, | I 262 SurTE De L'Histoire rivé à
cette connoissance, de foi-même , & par (4 feule balance d'Archimede. À
quoi on répondit que fon énonciation étoit véritable & très-conforme à celle
de M. de Roberval; mais qu'il croit bon qu'il envoyât fes méthodes pour voir
fi elles étotent différentes. I ne fatisfit point fur cette demande, mais
continua à prier qu'on s'aflurât fur fa parole, qu'il avoit tiouvé ce problème
par la balance d'Archimede, fans mander en aucune forte fes moyens. Ce
qui ne fit que trop connoître fon deflein, & on le lui témoigna aflez
clairement par plufieurs Lettres: mais il y demeura fi ferme, que, quand il
vit PAiftoire de la Roulette imprimée, fans qu'il' y fûten parallele avec M.
de Roberval, Il fe plaignit hautement de moi, comme fi je lui euſſe fait une
ex trême injuftice. Sa plainte me furprit, & je lui fis mander que, bien loin
d'avoir été injuſte en cela, j'aurois cu l'être extrêmement d'ôter à M. de
Roberval l'honneur d'avoir feul réfolu ce problème : n'ayant aucune marque
que perfonne y eût réuſſi. Que je navois point d'intérêt en cette affaire; mais
qué je devois y agir équitablement, & donner à tous ceux qui avoient
produit leurs inventions fur ce fujet, ce qui leur étoit dû. Que ſ'il avoit
montré qu'il fût en effet arrivé à cette connoiffance fans fecours, je l'aurois
témoigné avec joie : mais que | n'ayant

+ D:E- -L À * RO ULE T:T:E. 103 n'ayant rien. fait d'approchant,
& ny.ayant perfonne qui ne pô, aufli-bien que lui, donner une énonciation
déguifée, & fe vanter de l'avoir trouvée foi-même par la balance
d'Archimede , j'aurois failli de donner à M. de Roberval un compagnon
dans fes inventions. ... Ces raifons ne le fatisfirent point : il perfifta à écrire
qu'on ne lui rendoit pas juftice; de forte qu'on fut obligé de lui mander plus
févérement les {entiments qu'on en avoit. On lui fit donc entendre que dès
qu'on a vu une invention publiée, on ne peut perfuader les autres qu'on
l'auroit trouvée fans ce fecours, ni s'en affurer foi-même, parce que cette
connoiffance change les lumieres & la difpofition de l'efprit ; qui ne font
plus les mêmes Quaparavantz & quand on auroit pris de nouvelles voies, ce
n'en feroit pas une marque, parce qu'on fait qu'il eft auf facile de réduire à
d'autres Méthodes ce qui a été une fois découvert, qu'il El difficile de le
découvrir la premiere fois. Qu'ainf Qut honneur confifte en la premiere
production; que toutes les autres font fufpectes; & que c'eft pour éviter ce
foupçon, que les perfonnes qui pren: nent, les chofes comme il faut,
fuppriment, leurs Propres inventions , quand ils font avertis qu'un autre les
avoit au paravant produites, quelques preuves qu'il y ait qu'ils.n'en avoient
point eu de connoiffance : aimant bien mieux {cipriver de ce petit:
avantage,

164 Suite DE L'Hrsrorre avantage, que de s'exposer à un reproche si fcheux, parce qu'ils favent qu'il n'y a point affurément de deshonneur à n'avoir point réfolu un problème ; qu'il y a peu de gloire à y réufür; & qu'il y a beaucoup de honté à s'attribuer des inventions étrangères. La moindre de ces raifons & de toutes les autres qu'on lui écrivit, eut été capable, ce me femble, de faire renoncer à tous les problèmes de la Géométrie, ceux qui font au-deffus de ces matières : mais pour lui il n'en rabattit rien de fa prétention, & il perfifte encore maintenant. Voilà quel a été fon procédé fur les problèmes de M. de Roberval, où j'admirai à quoi cette fantaifie de Fhonneur des Sciences porte ceux qui veulent en avoir, & qui mont pas de quoi en acquérir d'eux-mêmes, Mais il n'en demeura pas là; & pendant qu'on Pexhortoit à quitter cette entreprife, il s'engagei à une autre, qui fut de fe vanter d'avoir réfolu tous les problèmes que j'avois propofés publique: ment : en quoi il fe trouva dans un étrange embarras , & bien plus grand qu'auparavant; car, dans fa premiere prétention, il avoit en main les énonciations de M. de Roberval; & pouvoit ainfi en produire de feinblables & véritables, en affurant qu'il y étoit arrivé par des moyens qu'il vouloit renir fécetés + au lieu que dans fa feconde prétention, il nepouvoit au plus avoir que l'énonciation d'un

DE LA ROULETTE. 20\$ d'un feul cas, que j'ai communiquée à quelques perfonnes, & qui n'est peut-être pas venue jufques à lui: de forte qu'étant dans l'impuiffance entiere de produire toutes les énonciations dont il fe vançoit, ne pouvant y arriver, ni par fa propre invention, ni par communication, Il fe mit dans la néceffité de fuccomber à tous les défis qu'on lui a faits d'en faire paroître aucune, & par ce moyen en état de nous donner tout le divertiffement qu'on peut cirer de ceux qui s'engagent en de pareilles entreprises | comme cela eft arrivé en cette forte. Ce fut dans le mois de Septembre qu'il commença à écrire qu'il avoit réfolu tous ces problèmes: on me le fit favoir, & je fus furpris de {a petite ambition; car je connoiffois fa force & la difficulté de mes problèmes, & je jugeois aflez, par tout ce qu'il avoit produit jufqu'ici, qu'il n'étoit pas capable d'y arriver. Je m'aflurai donc, ou qu'il s'étoit trompé lui-même, & qu'en ce cas il Alloit le traiter avec toute la civilité poffible , s'il le reconnoiffoit de bonne foi , ou qu'il vouloit fous tromper, & attendre que j'eufle publié mes problèmes pour fe les attribuer enfuite, & qu'alors il falloir en tirer le plaifir de le convaincre, qu'étoit en mon pouvoir, puifque la publication de mes problèmes dépendoit de 'moi. Je témoignai donc mon foupçon, & je priai qu'on obfervât {es démarches. La premiere qu'il fi, fut d'envoyer, LE .
AYANT

206 SUITE DE L'HISTOIRE avant que le terme des Prix für
 expiré, un caleul d'un cas propofé, fi étrangement faux en toutes fes PE LE
 mefures, que lui-même le révoqua par le premiet Courier d'après : mais
 bien loin de le faire avec modeftie , il y agir avec la fierté du monde la pli
 plaifante & la moins fine; car il mianda qu'à li vérité fon calcul étoit faux ,
 mais qu'il en avoitun autre bien véritable, & même de tous les cas vé:
 néraletment , avec routes les démonftrations écrites LIRE Lies | ! ht THE L
 "| EN | | A dr" 4 L'AU M1! é À [4 AU rl AL ANAL la (l , à Al L PAR Hat Ci
 4 1 1 (alto tra EMMA r ; 1H A be 1 PUMA = tutte Lx ne M ' hu vi Hi 1" ; L
 ALES PEL L LJ d "In LE L' À | L (] ' i 'ORIE LE 11 '2 Si 11 "4 ft | Ant A4
 HE 4 + | l au long en l'état qu'il vouloit les faire paroître, & routes prêtes à
 donner à l'Impritneur; mais que néanmoins il ne vouloit pas les produire
 avant que j'eufle imprimé les miennes, comme je devoislé faire en ce temps-
 là s qui étoit le commencemiit d'O&tobre. | Je l'entendis affez, & il ne fur
 pas difficilea out le monde de voir que c'étoit juftement ce que j'avois
 prédit. On réfolut donc de le pouñeri l'extrémité, & pour montret
 parfaitement qu'il se pouvoit tien donner qu'après moi, je promis pi
 bliquement dans l'Hiftoire de la Roulette, de différer de trois mois, favoir ,
 jufqu'au premier Jan: vier, la publication de mes problèmes ; au lieu quil
 s'éroit attendu que je les donneroïs au premier Otobre , comme je l'eufle
 fait en effet fans cela Cette remife, qui lui eût été fi favorable, sil eût eu
 véritablement fes folutions, trahir fon myf tere, & lui devint infupportable,
 parce qéil ji es

DE LA ROULETTE. 207 kes avoit pas, & qu'il voyoit bien qu'on alloit jucer de lui par l'usage qu'il feroit de ce delai. Cela le mit donc en colere ; & il fut fi naïf dans fa mauvaife humeur , qu'il le témoigna franchement par fes Lettres, où il mandoit que c'étoit une chofe étrange, que je voulufle ainfi fans raifon, différer de trois mois entiers la publication de mes folutions. À quoi on lui répondit, qu'il avoit le plus grand tort du monde de s'en plaindre; que rien ne lui étoit plus avantageux; qu'il devoit bien en profiter, & s'affurer par-ia l'honneur de la premiere production , pendant que je m'étois lié les mains moi-même, & que fi fon Ouvrage étoit prêt, il pouvoit le faire paroître deux ou trois mois avant aucun autre. Qu'ainfi étant le premier de loin, il nyauroit que lui dont il fût certain qu'il ne tint es inventions de perfonne : & enfin on lui dir alots , en fa faveur, tout ce qu'on avoit dit contre lui en l'autre occafion. Ces raifons étoient les meilleures du monde: mais il en avoit une invincible, qui le forçoit à ne point y confentir, & à mander encore qu'il étoit téfolu de ne rien produire qu'après moi. Cette réponfe fut reçue de la maniere qu'on peur penfer, & on délibéra là-deflus de ne plus le flarter : de rte qu'on lui écrivit nettement, que fon procédé nétoit pas fourenable; qu'on lui donnoit avis de h défiance où l'on étoit de lui; qu'après avoir donné

108 SUITE DE L'HISTOIRE né un faux calcul , Il étoit engagé d'honneur de se hâter de donner le véritable, s'il avoit; mais que de demeurer si long-temps sans le faire , après tant de défis, & de ne point vouloir en produire avant que d'avoir vu les solutions d'un autre, c'étoit montrer aux moins clair-voyants qu'il n'en avoit point; & qu'ainsi on lui déclaroit pour la dernière fois, qu'il devoit envoyer avant le premier Janvier, ou ses méthodes, ou ses calculs : & s'il ne vouloit pas les donner à découvert, qu'au moins il les donnât en chiffre ; que cet expédient ne pouvoit être refusé, sous quelque prétexte que ce fût; que c'étoit la manière la plus sûre & la plus ordinaire dont on se servoit en ces rencontres, pour s'afflurer l'honneur d'une invention, sans que per sonne pût en profiter; que s'il acceptoit cette condition , il n'avoit qu'à envoyer son chiffre à un de ses amis dans le mois de Décembre; que le sien étoit déjà fait, & qu'on les produiroit ensemble qu'en suite son explication & la sienne paroïtroient aussi ensemble ; & que celui dont le chiffre expliqué se trouveroit contenir la vérité, feroit reconnu pour avoir résolu les problèmes de lui-même & sans secours; mais que celui dont le chiffre expliqué se trouveroit faux, feroit exclus de l'honneur de l'invention , sans pouvoir ensuite y prétendre, après avoir vu les solutions de l'autre à découvert. | Voilà

DE L'A'ROULETTE. 209 Voili l'expédient décifif qu'on lui propofa; & on lui ajouta , Le plus févérement que la civilité peut le permettre, que s'il le refufoit, il paroïtroit à toute la terre qu'il n'avoit point ces folutions ; qu'autrement il ne céderoit pas à un autre l'avantage de la premiere invention; & que fi en fuite de ce refus , & après que j'aurois produit les miennes, il entreprenoit d'en produire aufli, il ne pañeroit que pour les avoir prifes de moi, & acquerroit toute la méchante opinion que méritoit un procédé de cette nature. On attendit la réponfe à tout cela, comme devant fervir de derniere preuve de l'efprit avec lequel il agiffoit ; & on la reçut peu de temps après, qui portoit ce que j'avois tant prédit, qu'il ne vouloit donner , ni difcours, ni chiffre, ni autre chofe , ni accepter aucune condition; qu'il vouloit voir mes inventions publiées & à découvert, avant que de rien produire ; qu'il ne me difputoit, ni les Prix, ni l'honneur de la premiere invention; qu'il ne prétendoit autre chofe, finon de voir mes problèmes , & en publier en fuite de femblables ; que c'étoit {1 derniere réfolution, & qu'il ne vouloit plus parler fur ce fujer. Cette réponfe , la plus claire du monde, fit voir fon impuiffance aufli parfaitement qu'il étoit poffible, à moins que de la confeffer en propres termes, ce qu'il ne falloit pas efpérer de lui, Et ainfi on jugea que ce refus abfolu de donner, ni difTOME F. (®@ COUrS , PTE CEFER PENSE SC > CarT | RS IL de | + ”
:\$ K | 1

2:10 SUITE DE 2 HISTOIRE -cours, ni chiffre, le convainquoit pleinement; & qu'il me feroit 'inutile de remettre encore à un nouveau terme, la publication de més problèmes, puisqu'ayant déclaré qu'il ne produiroit rien qu'après moi, fes remifes fuivroient toujours les miennes , & que la chofe iroit à l'infini. Je crus donc qu'il ne falloir point différer après le terme du premier Janvier , & qu'alors je devois, à ma premiere commodité , terminer cette affaire , qui a aflez duré, & donner à tant de perfonnes favantes qui fe font plues à ces queftions, la fatisfaction qu'ils attendent, Mais il me fembla qu'il étoit bon de faire voir ce récit par avance , afin qu'après que j'aurois donné mes folutions, s'il arrivoit qu'il fût fi mal confeillé que de les déguifer, tout le monde connût la vérité. C'est la feule chofe que j'ai voulu faire par ce difcours, & non pas décrier fa perfonne : car je voudrois le fervir, & je refpecte fa qualité de tout mon cœur. Auffi j'ai caché fon nom; mais s'il le découvre après cela lui-même , pour s'attribuer ces inventions, il ne devra fe prendre qu'à lui de la mauvaife eftime qu'il s'attirera. Car il doit bien s'aflurer que fes artifices feront parfaitement connus & relevés. — ES || : Car: : [l "ous | 1! || " || | + || | | LIN 4 tu i Qu k || ne 147 : ny! 2 | 2 Î | : H . . : P L {A 14 : 141 t \ : || | L À L 1 \ ÿ HEIN DEN HUE IMRPUULUHIDE IN BU : k | l : h'! ht 4 1 be il EE 2 ||} URI : : Le (1 4 | 1 1 ! || 4 ! || Dr, LEP 7: Fit Et qu'il n'efpere pas s'en fauver, par l'atteftation d'un ami, qu'il pourroit mendier, qui certi* feroit avoir vu fon Livre en manufcrit avant le premier. Janvier : ce n'eft pas ainfi qu'on agit en ces

DE LA ROGLETTE. 2: fés matieres, où la feule publication fait foi. S'il nétoit queſtion que d'un ſimple calcul de trois lignes, dont on eût donné les copies à plufieurs perſonnes, qui ſe trouvaſſent toutes conformes, ce feroit quelque choſe. Mais quand il s'agit d'un Livre entier, & de cent propoſitions de Géométrie avec leurs calculs, où il n'y a rien de ſi facile que de mettre un nombre ou un caractere pour un autre: c'eſt une plaifante choſe de prétendre que ce feroit aſſez de produire le certificat d'un ami, qui attelteroit d'avoir vu ce manuſcrit un tel jour; & principalement, ſi on avoit de quoi montrer que cet ami ne l'auroit, ni Lu, ni examiné en donnant ce certificat. Il n'y a perſonne qui dût prétendre que ſon autorité pût arrêter ainſi tous les doutes : on ne croit en Géométrie que les choſes évidentes. Je lui ai donné fix on ſept mois pour en produire: il ne l'a point fait; & il lui a été auſſi impoſſible de le faire, qu'il feroit aifé de déguifer les vraies ſolutions quand elles feront une fois publiées. Mais on ne doit pas être ſurpris de ſon procédé en cette rencontre, ni de ce qu'il avoit entrepris ſur Les problèmes de M. de Roberval : car il agit de même en toutes occaſions. Et il y a plufieurs années qu'il ſe vante, & qu'il répète ſouvent qu'il a trouvé la Quadrature du cercle, & qu'il a donnera à ſon premier loifir, réſolue en deux manieres différentes, & auſſi celle de l'hyperbole : d'où l'on peut juger ſ'il O 2 "ya

212 SurTE DE L'Hirsrorre y a fujet de croire fur fa parole, qu'il ait les chofes deat il fe vante. Paris, ce 12 Décembre 1658. Paris, le 20 Janvier 169. 1} Erurs que cette piece a été faite, j'ai publié mon Traité de la Roulette; & le premier jour de Janvier j'en envoyai le commencement à cette même perfonne dont j'ai parlé dans cet Écrit, afin qu'il y vit le calcul du cas que j'avois propofe, & où il s'étoit trompé : fur quoi il n'a pas manqué de dire que c'étoit juftement ainfi qu'il avoit réformé le fien; & il s'eft hafardé de plus de faire davantage, & d'envoyer les calculs de quelques autres cas dans une feuille imprimée du 9 Janvier, où il aflure qu'elle eft toute confogme au manufcrit qu'il en avoit donné depuis longtemps à des gens de croyance, pour fervir de preuve qu'il avoit tout trouvé fans moi. Mis outre que quand fes calculs feroient juftes, cela lui feroit maintenant int tile, après la lumiere que ce que je lui ai envoyé a pu lui donner : il fe trouve de plus que ceux de fes calculs que je viens d'examiner en les recevant, font tellement faux, que cela eft vifble à l'œil; & entre autres, le centre de gravité du folide autour de l'axe, qu'il place tour contre le quart de l'axe. Il ne donne pas moins mal à propos la diftance entre

DE LA ROULETTE. 215 entre l'axe & le centre de gravité du
demi-folide de la partie fupérieure de la Roulette autour de l'axe. De forte
que cette piece qu'il dit être fi conforme à fon manufcrit, & laquelle il vient
de produire pour foutenir fa prétention, eft ce qui lui ferme abfolument la
bouche , & qui montre le mieux le befoin qu'il avoit de voir mes folutions &
mes méthodes , que je lui ai toutes envoyées maintenant, fur lefquelles il
lui fera aufli facile de corriger encore fes nouvelles fautes après l'avis que
je lui en donne, & de trouver les véritables calculs, quil lui feroit 'inutile de
fe les attribuer deformais. O 3 HISTORLÆ

14 HirsToris Trocuorbrs em EN shine is LE mm Re SD an et nt ee
nn HISTORIÆ TROCHOIDIS SIVE CYCLOIDIS CONTINUATIO: In quē
videre est cujusdam viri machinamenta qui Je Autorem Problematum super
hac re propofitorum erat profe feffus. ANTUM in rebus geometricis
feveritatis ineft, ut peropportunum fe aliquid intervenire, quo poñfit earum
asperitas aliquantulum mitigari, Nef cio quid hujusmodi Trochoïdis Hiftoria
defiderabat ne fenfim elanouiflet, fi nihil aliud lectores ex ea didiciflent, nifi
quædam à me problemata ad explicandum propofita, certaue explicaturis
Præmia conftituta: que cūm nemo eflét adeptus, tandem eorum folutionem à
meipfo proditam. Hac narratione quid triftius, fi nullus eam jocularis
eventus hilaraffet? Percommodè igitur accidit is quem hic expolturt fumus. \

. Audierat quidam, cujus nomen à me tacebituf, omnium quæ olim
Robervailio diffloluta erant problematum longè illud difficillimum efle, quo
folidum icirca Pb axem dimenfus est. Ergo cm & hujus problematis
folutionem, & vias quibus ad eam pervenerat Robervallius accepifier, fibi
quoque

SiVE Cycronrs CONTINUATIO. 21 quoque folutionis iftius gloriam afferere meditarus ft, quañi fu ipfus induftrià repertæ : magnum aliquid ratus fi ad hanc laudem ante annos viginti duos ab altero præceptam focius accederet. Sed confilium fuum ipfe' pervertit, tam rudibus artificus rem agoreflus, ut omnibus palam foret, nullam hujus inventionis partem ipf deberi. Quam enim protulit enuntiationem, quamque adoptabat in fuam, Robervallianæ fimul conjunétam emifit à qu folis duntaxat vocibus diftinguebatur, ut fi dixeris, rectangulum ex bafi & altitudine, pro eo quod eft, duplicatum trianguli fpatium. In hac porr Epiftolà fatebatur fe falſam quidem enuntiationem ante id temporis evulgafſe, de hujus autem pofterioris véritate confidere fe, quia Robervallan congruebat. Hæc in hominum mentes planè contrariam de illo opinionem injicere. Nam fi certæ quædam methodi, ac Geometricæ demonſtrationes ipf fuiſſent in manibus , an ille de folutione fu ex hac tantüm fimilitudine certior fa@tus foret? ac non potids de folutione tum fuà, tum etiam Robervallii ex propris rationibus judicaret ? Patuit erco virum alieno lumine ufam, non fuo : nec faris juſtè viſus eft poſtulare, ut ipſi demüm affirmanti crederemus fua fé operà uniufque Archimedis bilancis auxilio ad eam cognitionem efſe perduétum. Undè & refponſum eft de prolata ab ipſo enuntiationis veritate, O 4 deque

216 HirsTorizÆ ÎrRocHorpDt1s deque illius cum Robervallianâ congruentiâ dabr rare quidem neminem, non alienum tamen foresm fl fuas quoque methodos profferer qud facilius cernerétur, an propriæ ipfi ac peculiare eflent. Nil ille ad ifta poftulata reponere , de methodis fuis nullam mentionem facere, nec mins ramen enixè inftare, ut ipfum folâ Archimedis balance ufum omnes fibi perfuaderent. Quorsèm hæc tenderent fatis fuperque innotuit, nec id obfcure ipli Litteris fignificatum. Haud tamen fegniûs perrexit quo occœperat, atque etiam ubi Hiftoriam Trochoïdis typis evulgatam infpexit, feque Illic Robervallio æquiparatum minimè reperit, gravem fibi faétam injuriam apertè conqueltus eft. Evo verd hujus expoftulationis novitate perculfus, homini fcribendum curavi, me quidem non mod iniquum in eo nullo modo fuiſſe, fed contra potiùs fummx iniquitatis reum futurum, fi folutionis iftius gloriam, quam præter Robervallium nemo meritis videretur, cum alio quovis communicaflem. Rem fanè totam me nihil interelle, mihi tamen æquo cum ommibus jure agendum, & unumquemque pro fuarûm inventionum merito ornandum fuiſſe. Ad hanc cognitionem fi fui fe operâ petvenifſe demonſtraffet, id me prompto animo prædicaturum. Sed cûm ab eo nil quidquam fimile eſſet effctum , ac cuivis enuntiationem ementiri, eamque folâ Archimedis balance inventam jactale

sivE Cycropris CONTINUATIO. 217 : + A tare promptum effecit,
non potuisse me sine summa "injuria ullum Robervallio comitem adungere.
f Hæc animum ejus non satis placaverunt, nec étiam tūm desistit acriter
postulare jus suum; Ita ut pauld feverius admonendus fuerit officii sui
Denuntiatur igitur eam esse inventionis femel évulgatæ conditionem, ut
illam se nemo proprio "acumine comprehensurum fuisset fidem vel sibi vel
aliis facere posset. Hac quippe cognitione menti novum lumen novæque
cogitationes inferi; nequicquam autem Dcehiarum quasdam vias ostentari,
cum liqueat tam facile problemata jam resoluta novis rationibus explicari
quæ ægrè primū solvi & expediri : adeoque totam primis solutionibus
gloriam deberi; suspitione cæteras non carere, quam ut amoliantur honesti
homines, qui res istas Ut par est æstimant, sua statim inventa spontè
premunt, si forrè ab altero jam prolata reciderint, quibuscumque argumentis
constet hæc ipsis penitus ignota fuisse. Multo enim malunt istius gloriæ
jacturam facere, quàm in tam molestæ opinionis periculum venire. Norunt
scilicet in problemate non solvendo nullum dedecus, lenissimum in solvendo
honorem, in alienis vero factibus sibi arrogandis gravissimum esse flagitium.
Quemvis alium pauld ingenio eretiores, & geometricis rebus aliquantd
superiorem, vel una ex istis cæterisque quæ ipsi allatæ sunt rationibus ab

"A LE L " a — — TP L « RE ——— EEE > TS 218 Hirsorniz

Trocnopr̄s ab omnibus hujusmodi problematis alienaffet. Af ille de fuà fpe nihil remifit, cui etiamnum inhæret pertinaciffimè, En quà ille ratione fuper illis folutionibus Robervallianis fe gefferit : ubi mihi des muirari fubiit, quo vana illa Jaudis ex fcientià pe: titæ cupiditas impelleret jejunos animos, glotir avidos., fed minores! Utinam verd hic ftetifler! At longè ultra pro» vectus eft. Quippe dum illum ab hoc confilio detet: rent omnes, aliud & id longè operiofins agorefus eft. Palam fiquidem prædicavit quæcunque propo fueram problemata difflolvifle fe: quod quidem lpfum in incredibiles quafdam multèque proribus difficilioreſ conjecit anguftias; fiquidem ant enunciationes Robervallianæ in promptu erant, n66 arduum erat fimiles aliquas éafque veras emirtete, ac certis & arcanis comprehenfas methodis jactitate; nunc verd nihil prorsüs, præter unius duntaxat ca pitis enunciationem, penes illum poterat efle, qua paucis infuper à me credita ad ipfum fortè non pervenit. Cüm ergo hinc quafcunque enunciationes & pollicitus præftare minimè poſſet, nec eas fuà vel alienâ ope comparare , illinc fæpius compelleter tur ab omnibus, ut vel unam faltem ex iis oftendes ret, fieri aliter non potuit, quin nobis identidem provocantibus turpiter deeflet, ac multum de Ê rifum excitaret, ut folent qui majora viribus temeré audent. Hoc quà ratiome contigerit jam exponam: Menſe

Si IVE Cycriorpirs CONTINUATIO. 219 Menfe Septembri
occæperat fcribere omnia bæc fe problemata diffolvifle. Res ad me ftatim
delara et:nec mediocriter animum percuflit minuta hominis ambitio.
Noveram enim vires ipfus, & problematum meorum difficulrarem : & ex
cæreris quæ ad hunc diem ille protulerar, fatis ipfum huic oneri imparem
efle conjiciebam. Ratus fum igitur illum aut decipi atque aded fi fuum
fpontè fateretur errorem, fumma cum humanitate traétandum : aut id agere
ut nos deciperet, ac problematum meotum evulgationem manere, ut ea
deinceps fibi atrogaret, ipfumque animi causâ reum fraudis lftius elfe
peragendum; quod quidem. mihi pronum erat ac proclive penes quem totum
hujus evulgationis abat arbitrium. Itaque nonnullis fufpicionem meas palam
teftarus, curavi ut omnes motus ejus'inceffique fervarentur. Ac primdm
nondum exa@ Premiorum die venit ab eo cujufdam propofitionis calculus
tot & tanris undequaquè confertus erroribus, ut ab ipfo per Proximum ftatim
curforem fuerit abdicandus, non ea fanè qua debuerat moderatione, fed qua
poterat lepidiflimâ pinguiflimâque ferociâ. Fatebatur enim priorem quidem
calculus falſum efle, fbi vero tuum alterum omni ex parte verum,
univerffque fimul propofitiones complexum, tum demonſtrationes omnes
ferie defcriptas, & ad edendum paratas efle in manibus, quas tamen in
puiblicum EEE RS SE EU RTE RP EEE Re NS LA # ZT Es à 3 £ = amet =
« a — > à. ee. 1: LI fée = ss Ta == + à — = = _ . NT tr ie re SE Ex — = a
— Rs = zaS = = Er Se ses pr = = Re ne y ee PÉS te : n: = L= Er — = er mue
sr Le ne ren ea tnt me Se Pas - La LR n— É-a>- Eee 7 === = = = 4 2 An
CE e 2z me ... ee — _ - - Tu = = ten == ER - ee = 222 = ——. { | il | td
ani! N » HE 11e ÿ t 4 F Lt 1 } WhE MU ! HE (21h L fl WW } 4 NI LFEMI
LL ! Hi 1 + [D EU TH ARE Ja UE LI 14 1414 n RU 4 ! f(M | * + *
CREER AL NE

PRET = 7 3e se 22 1e ap: — r Re ee AT ee me ET nn es ve lord
 44 — 7 — +, Ex a re — eee ST ee _ — 210. Hirsroriz TrRocHorprs blicum
 exire non effret pafurus, nifi meis antea vulgaris, quod per illud temporis,
 ineunte fcilicet Octobre, præftitutum me profeflus eram. Quid hæc fibi
 vellent fais intellexi, nec cuiquam amplius dubitatum eft quin ipfiflimum
 illud effret quod futurum effe denuntiaram. Placuit igitur ad extremas hunc
 anguftias deducere. Et quid manifefius liqueret nihil ipfum nifi me præeunte
 ptomere poffe, tres in menfes ad Kalendas nempè Ja nuarias vulgationem
 problematum meorum in Hif toria Trochoidis rejeci, eas alioquin Kalendis
 Occobris, quod & ipfe fibi pollicebatur, daturus in Jucem. Hac quidem
 prolotione nihil ipfi fuerat commodius, fi modò foluriones iftæ præfto
 fuiffent. Ille verò procul aberant; idedque & hanc velut inferfam &
 myfteriorum fuorum enunciaticem tulit ægerrimè, Noverat enim ita de fe
 fententiam laturos omnes, ut hac mora uteretur. Ilud, inquam, homini
 ftomachum fecit, quem ille tam candidè ac non diffimulanter aperuit, ut
 fcribere non veritus fit, novum plane fibi videri me meorum problematum
 editionem tres totos in menfes fine causa diffuliffe. Refponfum eft fumma
 illum injurià mihi fuccenfere; nil ipfi commodius & opportunius; quin
 potiùs occafionem oblatam arriperet ac primæ inventionis honorem fibi
 affereret, dum ego quafi confilétis mihimet manibus otiofus federem; poffe

SiVE Cvyerorprs CONTINUATIO. 221 posse illum si modd
quod antea prædicaverat in promptu effet opus fuum, illud geminis vel
etiam tribus ante alterum quemlibet menfibus producere, atque ita unum
fore, quem confaret inventa fua à emine mutuatum; denique quæcunque
alio loco ad ipfum deterrendum dicta erant, nunc ad ipfum excitandum
ftimulandumque repetita funt. His rationibus nihil validius quicquam.
Nihilominus homini confcio infirmitatis fuæ altera quædam fuberrat
ineluctabilis qua ad diffentiendum cogebatur. Iterum ergo refcniplit fixum
efle fibi nilul omnn nifi poft editas propolitiones imeas edere. Hxc. lponfio
fic accepta eft ut dignum erat: vifum Et null circuitione jam utendum. Planè
ergo & apertè fignificatum eft ejus rarionem iniquiffimam efle, nec
commodas de iplo ffpiciones omnium animis infedifle; miflum ante
fallacem ab illo calculum, vert, fi modd ipfi præftd éflet, mirtendi
neceflitatem afferre, fiquidem honor fuo confultum vellet; at rem femper in
diem there, & tam multis compellationibus exftimuktm filere; denique
nullas mittere folutiones nifi alenis priùs inspectis, Id verd vel rardioribus
ingnis fidem facere nullas reverâ folutiones ipf fuppetere. Poftremd itaque
denuntiaturum eft, ut intra finem vertentis anni vel methodos fuas, vel
Galculos mitteret, fi non expreflis verbis conceptos, Bltem aliquibus noris
involuros; nullum jam ter. e le o my { 21vVCiianot 7” "1 à Û be À x # 4 4 |

CA ce + Fe L ve 1H || : 4 | : | ! | | | | | f a - | | OM è | , | | LE! | | | | |

122 Hisrori:æÆ TrRocHoiptrs giverfandi locum reliétum efle; eam enim
demi & fecuriflimam & frequentiflimam efle viam, qui quis fibi poflet
alicujus inventionis gloriam vindicare, nec aliis rapiendam exponere. Quæ
fi conditiones ipfi arriderent, reliquum efle , ut alicui fuo: rum menfe
Decembris notas fuas mitteret; mea dudum paratas; utrafque fimul
produétum iri, ut _Cujus notæ expofitæ veritati congruere deprehenderentur
, hic genuinus lftorum problematum inter: pres haberetur : contra cujus
expofitæ notæ error cenferentur implicitæ, ls inventionis palmâ ex: derer,
nec ad: éam aliemis deinceps folutionibus cognitis afpirare poflet. His
conditionibus nihil æquius præcifiufque ve fum, quas fi refugeret lllle
fedulo commonitus ef, & feverirare quantam humanitatis leges ferre po:
terant maximA, certo iftud indicio fururum omnE bus éas illum foluriones
nunquam habuifle, nunquam alioquin primæ inventionis laudem cuiquam
conceffurum fuifle. Quèd fi repudiaris quæ ipl oblata fuerant conditionibus,
meifque exinde folutionious vulgatis, aliquas etiam vulgandi confilium
refumeret, manifeflum apud omnes plagia rium habitum iri, debitamque his
factis opinio: nem fibi accerfiturum. Sufpenfis ofnnium animis expectabatur
ejus refponfio, tanquam ulcimum in genii ejus fpecimen datura. Nec mulro
poft tempore adveñir _illa quidem auguriorum meorum confrmatilf

SIVE Cycroꝛpis CoNTINUATIO. 223 confirmatrix certiflima.
Enim verd refcribebat ille, nequicquam à fe vel fcripra vel notas vel aliud
güidpiam exig1; conditiones nullas fe recipere ; nec quidlibet editurum,
priufquam mea inventa edita nfpexiflet : de Præmiis laudibufve nihil
mecum certare ; Id unum fibi effe in animo, ut problemara mea videret,
nonnullaque fimilià promeret : fixum illud fibi ac immotum; nec quidquam
amplius de his omnibus auditurum libenter. Plana hæc erant & aperta, nec
quidliber efflagitari potuit, quo plenius convinceretur, nifi reum le ingenuè
confiteretur, quod ab ipfo fperari non poterat. Hac igitur omnium
conditionum declinatone fatis fuperque convictus judicatus eft : ego VId
nequicquam meorum problematum editionm prorogaturus, quandoquidem
ille nullos nifi me pꝛeunte oreffus faéturum fe profeflus, me oque cunétante
cunctaturus foret, ac res fic in immenfum proceflura. Ratus fum itaque rem
ultra ptfbitutum Kalendarum Januarii tempus protrahéndam non elle, fed
ubi quid primüm otii naétus éflém, totum id poft tantas prolationes
abfolvendim, ac fic votis tot eruditorum hominum quibus he quæftiones non
injucundæ fuerunt faciendum fatis. Interim haud abs re vifum eft mihi, ut
hæc Mrfatio velut præcurreret, fi fortè folutiones meas ile in fe cransferre
moliretur, omnium oculis expofitura PT CERN US, CE CA II “ N Ÿ : # . ; I
1 © 4 L

= TE RE BL RE - sé = RE Ze — — _ = a RE EE ” ns tres =
qu ie : 18 il | |# #E ' LT à me à px : > Ce Por 2 mère ET qe EN RS D Ton 4
S PRET us J mm |, r LISTER IIEL ca ” AT PR cs

SIVE Cycloirpis CONTINUATIO. 225 fia ederet, nihil edidit.
Atque hoc ipfi non minùs arduum fuit quèrn pronum eflet veras folutiones
jam prolatas interpolare. | Sed hæc cave ne nova illi ac inufitata exiftimes,
nec quos etiam In Robeérvalliana problemata fecit incurfus. Ita enim
ubique homo eft : aded ut jam plures annos ambitiosè effutiat Quadraturam
circuli à fe inventam, eamque ubi tempus tulerit à fe proditum Iri, fimul
cum hyperboles Quadraturä :1 nunc, & homuni, quantum de fe ptædicat,
credulus largito. ToME F., P DIVERSES

226 LETTRE DE M. De CARcAYI s Honde ni ptites HR éme eg
FER AN RE Lars L'RRES RENE AN #2. 36 PÉREURE AXE NRA RAA
REA TN ER PT PS TR FA DIVERSES INVENTIONS DEA: -
DETIONFILLESGN EN GÉOMÉTRIE. DÉS DERSE DE M. DE
CARCAVI Av M. °D'ETFON VILLE. NÉ Secr PERSONNE n'ayant donné
les folutions des Problèmes que vous avez propofés depuis fi long-temps,
vous ne pouvez plus refufer de paroître pour les dunner vous-même, comme
la promefle que vous en avez faite vous y engage. Je fais que ce vous fera
de la peine d'écrire tant de folutions & de méthodes; mais aufli c'eft toute
celle que vous y aurez : car pour l'impreflion je ne fonge pas à vous la
propofer , j'ai des perfonnes qui en auront foin. Et il s'offre encore un
foulagement à votre travail, en ce qu'il ne fera pas néceffaire de vous
étendre fur les Problèmes TO PR re CP — (1) C'eft le nom fous lequel
Pafcal fe cacha, comme il a été dit dans l'Hiftoire de fa vie, que

A. M. DErrTonviize. 22 que vous avez propofés comme faciles, tels que font Ze cœntre de gravité.de la ligne courbe de la Roulette & de fes parties , & /a démenfion des furfaces des folides ; de forte que vous n'aurez prefque qu'à donner ceux que vous avez propofés comme difhciles, c'eft-à-dire, /e centre de gravité des folides , & des demi-folides de la Roulette & de fes parties, tant autour de la bafe, qu'autour de l'axe, auxquels vous aviez attaché les Prix dans votre premier Écrit ; & le centre de gravité des furfaces de ces folides & demifolies , defquels vous avez dit, en les propofant dans PHif toire de la Roulette, que c'éroient ceux que vous eflimiez dificéles, & proprement les feuls que vous propofiez. Ce font donc aufli proprement les feuls que nous vous prions de donner , & dont notis avons confidéré le fuccès avec attention. Car comme ils paroiffent fi difficiles par l4 feule énonciation , & que vous qui les connoiïfliez à fonds, vous maviez dit plufeurs fois que vous en jugiez la difficulté f grande, je crus qu'elle étoit extrême; & quand je les eus un peu confidérés en effet , il me fembla, felon le peu de lumiere que j'en ai, que le moins qu'on pouvoit en dire, étoit qu'il n'avoit rien été réfolu de plus caché dans toute la Géométrie, foit par les anciens, foit par les modernes; & je ne fus pas feul dans ce fentiment. Ainfi lorfque le terme du premier O&tobre fut arrivé, nous fumes bien ailes de voir que vous le prolongeates jufqu'au premier Janvier ; parce que nous efpérames de mieux reconnoître , par un plus long efpace de temps, fi le jugement que nous en faifions étoic véritable ; &c le fuccès confirme bien notre penfée. Car une attente de fept ou huit mois fans folution , en eft uné marque confidérable, en un temps où fe trouvent d'auffi grands Géometres , & en plus grand nombre à la fois qu'on n'en ait jamais vu, & où l'on a réfolu les P 2 Problèmes

228 Lerrre De M. De CarcAvi, &c. - Problèmes les plus difficiles.

Car encore que pour la gran: déur du génie aucun des anciens n'ait peut-être furpailé Archimede ; il eft certain néanmoins que pour la difficulté des Problèmes , ceux d'aujourd'hui furpaflent de beaucoup les fiens, comme il fe voit par la comparaifon des figures toutes uniformes qu'il a confidérées, à celles que l'on confidere maintenant, & fur-tout à la Roulette & à fes folides , à l'efcalier , aux Triangles cylindriques, & aux autres furfaces & folides dont vous avez découvert les propriétés. Il n'y a donc jamais eu de temps fi propre que celui-ci, à éprouver la difficulté des propoftions de Géométrie. Or nous n'avons vu la folution d'aucune de celles que vous avez propofées comme difficiles. On a bien envoyé celle des Problèmes que vous aviez déclaré être plus faciles; favoir , 4 centre de gravité de la ligne courbe & la dimenfion des furfaces des folides, laquelle M. Wren nous envoya dans fes Lettres du 12 O@obre; & M. de Fermat auflî dans les fiennes , où il donne une méthode fort belle & générale pour la dimenfion des furfaces rondes; mais pour ces centres de gravité des folides & demi-folides & de leurs furfaces , nous n'en avons point vu de réfolution. Je dirai à tout autre qu'à vous, Monfieur, ce que cela a fait juger de la difficulté de vos Problèmes, & de cé qu'il falloit être pour les réfoudre ; & je ne vous parlerai ici que du defir que nous en avons, & de la néceffité où nous fommes d'avoir recours à vous pour des chofes que nous ne pouvons avoir que de vous. N'efpérez donc pas fuir nos importunités. Je fuis réfolu de ne jafnais ceffer de vous en faire , non plus que de rechercher les occafions de vous témoigner combien je fuis, &c. De Paris, ce 10 Décembre 1658. LETTRE

229 mm A A) Er, = LETTRE DE R>M." D'E TT'ON EEE E AM
D'E CARE AVE Ci-devant Conseiller du Roi en son Grand-Conseil.
Monsieur. Puisque je suis enfin obligé de donner moi-même [a résolution
des Problèmes que j'avois proposés, & que la promesse que j'en ai faite
m'engage nécessairement à paroître, je veux, en découvrant mon nom, faire
connoître en même-temps . à tout le monde combien celui qui le porte a de
respect & d'estime pour votre personne, & de reconnaissance pour toute la
peine que vous avez voulu prendre en cette occasion. Je souhaiterois qu'elle
pût être, en quelque façon, récompensée par ce discours que je vous donne,
où vous verrez non-seulement la résolution de ces Problèmes, mais encore
les méthodes dont je me suis servi, & la manière par où j'y suis arrivé. C'est
ce que vous m'avez témoigné souhaiter principalement, & sur quoi je vous
ai souvent oui plaindre de ce que les Anciens n'en ont pas usé de même: ne
nous ayant pas laissé RE " = En D « EE né mi ht SRE Re écier == : LANG"
RE a Fæs hi Ré :E

. f l' La tn. à he) FRS D " : 2 ce » PAT ET] ! { 4 s à ù 4 = 027 PE
NME + EL d « < ; ? A VET ta + + L M" d £ l , ù +7 y À % À H ? L 4 Ve 2
'p . Paire = Fr: " ù "x sa ET , has Re # , NP: 230 LETTRE DE M.
DEerronvitie liffé que leurs feules folutions fans nous inftruire des voies par
lefquelles ils y étoient arrivés, comme s'ils nous euflent envié cette
connoiffance, Je ne mèn timerat donc pas de vous donner lès calculs ;
defquels voici celui du cas que j'avois propofc : /e centre. de gravité du
derni- folide de la demi-Roulette , tournée à lentour de la bafe, fl diflant de
la bafe d'une droite qui eft au diametre 'du cercle générateur , comme fept
fois le diametre a fx fois la circonférence , & eft diflant de l'axe d'une à
droite égale au quart de la circonference du cercle ge: -nérateur, moins feize
quinziemes parties de la difsance qui eff entre le centre du cercle
générateur, & le centre de gravité de fon demi-cercle. Mais je vous
découvrirai de plus ma méthode générale pour les centres de gravité , qui
vous plaira d'autant plus, qu'elle eft plus univerfelle : car elle fert également
à trouver les centres de gravité des plans, des folides, des furfaces courbes
& des lignes courbes. J'ai befoin, pour vous l'expliquer , de cette définition,
S'il ya tant de quantités qu'on voudra À, B,C,D, lefquelles on prenne en
cette forte : premièrement, la fomme de toutes 4,B, C, D ; puis la fommé
des mêmes, excepté la premiere, favoir, B, C, D, puis la fomme des mêmes,
excepté les deux premieres, favoir, C, D ; & ainfi toujours, comme on les
voit ici marquées: J'appelle

AIME DE CARCANT. 31 J'appelle la somme de ces quanti-
 ASBICID tes, prises de cette sorte, {a som- BCD me triangulaire de ces
 mêmes quan- CD tités , à commencer par A; car on D pourroit prendre la
 somme de ces mêmes quantités, à commencer par D, & qui ne feroit pas la
 x même. Cela pose , je vous dirai les pensées qui m'ont mené à cette
 connoissance. J'ai considéré une balance B, 4, C, suspendue au point 4, & ...
 B A GC ie es es mme tn M D les bras de telle longueur qu'on voudra 4 B,
 AC, divisés en parties égales de part & d'autre, avec des poids pendus à
 chaque point de division ; favoir, au bras 4 B, les poids 3, 4, & au bras 4C
 les poids 9, 8; & supposant la balance être en équilibre en cet état, j'ai tâché
 de comprendre quel rapport il y avoit entre les poids d'un bras & ceux de
 l'autre, pour faire cet équilibre : car il est visible que ce n'est pas que la
 somme des uns soit égale à celle des autres; mais voici le rapport nécessaire
 pour cet effet. Pour faire que les poids d'un bras soient en équilibre avec
 ceux de l'autre, il faut que la somme triangulaire, des uns soit égale à la
 somme triangulaire des autres , à commencer toujours du côté du point 4. Et
 la démonstration en fera facile par P 4 le

232 LETTRE de M. DETTONVILLE le moyen de ce petit Lemme, dont vous verrez un affez grand ufage dans la fuite. Si les quatre quantités A, B, C, D , font prises en cette forte : la prenuere une fois, la feconde deux fois, la troifieme trois fois , &c.; je dis que la fomme de ces quantités prises de cette forte, el égale à deux fomme triangulaire, en commençant du côté A . $A-B, C, D$ L'RUDE BCD CD D Car en prenant leur fomme triangulaire ; on ne fait autre chofe que les combiner en telle forte, qu'on prenne A une fois, B deux fois, C trois fois, &c. Venons maintenant à ce que je propofe de la balance. On fait affez en Géométrie, que les forces des poids font en raïfon compofee des poids & des bras, & qu'ainfi le poids A en la troifieme diftance, a une force triple; que le poids B en la feconde diftance , a une force double, &c. Donc la force des poids des bras doit fe confidérer en prenant celui qui eft à la premiere diftance uñe fois, celui qui eft à la feconde deux fois, &c. Ainf pour faire qu'ils foient en équilibre de part & d'autre, il faut que la fomme des poids d'un bras étant pris de cette forte : favoir , le premier une

A M. DE CARCAY. 233 une fois, le second deux fois, &c.,
 soit égale à la somme des poids de l'autre pris de la même sorte; c'est-à-dire
 (par le Lemme précédent), que la somme triangulaire des uns soit égale à la
 somme triangulaire des autres. Ce qu'il falloit démontrer. Vous voyez,
 Monsieur, que je suis entré dans le style géométrique; & pour le continuer,
 je ne vous parlerai plus que par Propositions, Corollaires, Avertissements,
 &c. Permettez-moi donc de m'expliquer en cette sorte sur ce que je viens de
 vous dire, afin qu'il ne reste aucune ambiguïté. AVERTISSEMENT,
 J'entends toujours que les deux extrémités de la balance passent pour des
 points de division; & ainsi quand je dis que des poids soient pendus à tous
 les points de division, j'entends qu'il y en ait aussi aux deux extrémités de la
 balance. J'entends aussi que le bras AB puisse être égal ou inégal à l'autre
 bras AC, & que chacune des Parties égales du bras AB soit égale à chacune
 des parties égales du bras AC, & que les parties d'un bras ne diffèrent au
 plus des parties de l'autre bras que par leur multitude. Or de cette égalité de
 chacune des parties, il s'enfuit que le poids 3 étant pris, par exemple, de
 trois livres A & pesant simplement comme trois livres sur la première
 distance; le poids B étant de cinq livres sur la

234 Lerrre Dé M. Derronviite la feconde diftance, aura la force de dix livrés, c'est-à-dire, double de celle qu'il auroit fur la premiere diftance ; & le poids 4 fur la troilieme diftance , aura la force de douze livres, c'est-à-dire, triple de celle qu'il auroit fur la premiere diftance. De même fur l'autre bras le poids 9 fur la premiere diftance, aura fimplement la force de neuf livres , & le poids 8. la force de feize livres; & ainfi à l'infini, les poids feront multipliés autant de fois qu'il y aura de parties égales dans leurs bras, à compter du centre de gravité commun A, auquel la balance eft fufpendue. Il faut auffi remarquer que cette propriété de la balance que j'ai donnée, favoir, l'égalité des fommes triangulaires des poids de chaque bras eft générale, encore qu'il y ait des points de divifion fans poids, au lieu defquels en mettant un zér, il ne laiffera pas d'être employé en prenant les fommes triangulaires, comme on voit en cet exemple: Soit une balance B 4 C fufpendue au point 4, & divifce en parties égales, comme il a été dit; & foit fur la premiere diftance du bras AC le poids 9, & fur la feconde le poids 8: & fur la premiere diftance du bras 4 B, le poids 4; fur la feconde diftance, nul poids ou zéro; fur la troifieme le poids 7: PB PRIOR A NT JTE = #4

ANS DE CAN CA VIT. 23\$ Je dis que si la somme triangulaire des poids 4, 0, 7, est égale à la somme triangulaire des poids 9, 8 (à commencer toujours du côté 4), la balance fera en équilibre sur le centre A. La démonstration en est la même que la précédente. 7 0 4 9 8 (e) 8 . aS 2\$ De cette propriété je démontre les trois propositions suivantes.

PROPOSITION PREMIERE. Soit C A B une balance divisée en tant de parties égales qu'on voudra aux points C; D, A, E, F, B, auxquelles soient pendus les poids 8, 9, 4, 0, 7; B E E A D @ CERN (ORDRES POSER | MU mess 7 o 4 \$ 9 y de tous lesquels ensemble le centre de gravité commun soit au point A (l'un de ces points) : Je dis que la somme triangulaire de tous ces poids, à commencer du côté qu'on voudra, par exemple, du côté G: c'est-à-dire, la somme triangulaire des poids 4, 0, 7, est égale à la simple somme de ces poids 8, 9, 4, 0, 7, (c'est-à-dire, à la somme de ces poids pris chacune une fois) multipliée autant de fois qu'il y a de points dans le bras CA,

236 LETTRE De M. Dertonvitite € A, (puifqu'on a commencé par le côté C), éefta-dire, trois fois en cette figure + . . + . . TS ON ASE OS 7,0 14 100 7H HO ASS 19 7240544755 9ÈNR FAO 704. Sr 704 F0 : 99 99

Car la fomme triangulaire des poids 4, 0, 7, pendus au bras 4B, (qui eft diftinguée du refte par une barre dans la premiere partie de la figure) eft égale à la petite fomme triangulaire des poids 9, 8, pendus à l'autre bras 4C, (qui eft auf diftingue du refte dans l'autre partie de la figure). Et les refte font les mêmes de part & d'autre. AVERTISSEMENT. Je fais bien que cette maniere de démontrer n'eft pas commune; mais comme elle eft courte, nette & fufhifante à ceux qui ont l'art de la démonftration, je la préfere à d'autres plus longues que j'ai en main. PrRorosiITIonN Il. Les mêmes chofes étant pofées : je dis que la fimple fomme des poids, multipliée autant de fois qu'il y a de points en toute la balance, eft à la fomme

A M. De CarcaAvr. 237 fomme triangulaire de tous les poids , à commencer par le côté qu'on voudra, par exemple, par le côtéC, comme le nombre des points qui font dans la balance entiere, au nombre des points qui font dans le bras par où on a commencé a compter ; c'est-a-dire, en cet exemple, dans le bras CA M0 4, 5 9. 70 4 PS 9e HO 4 S 9 760 4 NS. 9 08 M0 4: 5" 7: CONS NV 906 7 9 4 7 Ne PAL 7 0 7 c SÉRIE 7 7 POBMAL SE 118 99 198 Je dis que la fomme triangulaire 99 eff à la fomme, 198, des poids multipliée par leur multitude, comme la multitude des points du bras CA, favoir, 3, à la multitude de tous les points, favoir, 6. Car dans la Figure la fomme triangulaire de tous les poids est égale, par la précédente, à la fimple fomme des poids multipliée par la multitude des points qui font dans le bras 4C, & qui font ici au-deflus de la barre. Or la fomme des poids multipliée par cette multitude des points du bras 4C, est vifiblement à la même fomme des poids multipliée par la multitude des points de la balance entiere , comme une de ces mulritudes est à l'autre. PROPOSITION

238 Lerrre. DE M. DsrroNvirre ProPosrTrionN III. Les mêmes
chofes étant pofées : Je dis que la [omme triangulaire des poids, à
commencer par un des côtés , comme par le côté C, eft à la fomme
triangulaire des mêmes poids, à commencer par l'autre côté B, comme le
nombre des points qui font dans le bras AC, par où l'on a commencé la
premiere fois, au nombre des points qui font dans le bras BA, par où l'on a
commencé la feconde fois... H'SSA4 pra. 7:0 4 \$ 98 #0 AT Sr 0! 4/25: 9008
PE æ NS 4; 5559108 7 © 4 ARC TÉR 9 à . 8 ES 99 132 Je dis que la
fomme triangulaire 99, en commençant par 8, eft à l'autre fomme
triangulaire 132, en commençant par 7 , comme la multitude des points du
bras 8, favoir, 3, à la multitude des points de l'autre bras 7, favoir, 4. Car
chacune de ces fomme triangulaires et, par la précédente, à la fomme
de tous les poids multipliés par leur multitude , comme la multitude
des points de chaque bras, à la multitude de tous les points de la balance
entiere. Donc, &cCe qu'il falloit démontrer. | AVERTISSEMENT:

A M. pe CarcaAvi. 139 AVERTISSEMENT. Comme toutes les choses que je viens de démontrer sur le sujet des poids d'une balance, doivent s'appliquer à toutes sortes de grandeurs, c'est-à-dire, aux lignes courbes, aux surfaces planes & courbes, & aux solides, il me semble à propos, pour faciliter cette application, de donner quelques exemples de la manière dont on doit prendre les sommes triangulaires dans ces grandeurs. Soit donc (Fig. 3.) une ligne courbe quelconque CB divisée comme on voudra en parties égales ou inégales aux points Z, G, F: pour prendre la somme triangulaire des portions CZ, ZG, GF, FB, à commencer du côté de C, il faudra prendre la route CFB, plus la portion ZFB, plus la portion GFB, plus la portion FB. Car par la définition, la somme triangulaire de toutes les portions CZ, ZG, GF, FB se trouve en les prenant en cette sorte : premièrement, toutes ensemble, & ensuite routes ensemble excepté la première, & puis toutes ensemble excepté les deux premières, &c., en cette sorte . . .) 2. CZ+ZG+GF+FB ou la ligne CF8. Plus . . . ZG+GF+FB ou la ligne ZF8. Plus . . . GF+FB ou la ligne GF8. Plus . . . FB ou la ligne FB8. De même la somme triangulaire de ces mêmes Fig. 3.

‘ ES à É42x Ne es F5 © PÈRE dr . & > Fe ee au 240 LETTRE
DE M. DEeTronvizre Ines portions BF, FG, GI, IC, à commencer patB, fe
trouvera en prenant la ligne entiere 810, plus la portion F1C, plus la portion
G1C, plus la portion IC; ce qui paroi de même en cette forte: BF

A MODES CARCAVE 241 MÉTHODE générale pour les centres de gravité de toutes fortes de lignes, de surfaces & de solides. e ÊT ANT propofée une ligne courbe , ou un«plan, Ou une surface courbe, ou un solide, en trouver le centre de gravité® ? Soit entendue une multitude indéfinie de plans parallèles entre eux & également distants (c'est-à-dire, que la distance du premier au second soit totale à la distance du second au troisieme, & à celle du troisieme au quatrieme, &c.) : lesquels plans coupent toute la grandeur propofée en une multitude indéfinie de parties comprises chacune entre deux quelconques de ces plans voisins.. Maintenant fi de tous ces plans on en confidere principalement trois, favoir, les deux extrêmes, qui comprennent la grandeur propofée, & celui qui pale par le centre de gravité de la grandeur propofée, & qu'on entende qu'une droite quelconque mence perpendiculairement d'un des plans extrêmes à l'autre, rencontre le plan du centre de gravité, lequel la divise en deux portions : cette droite entiere qui mesure la distance d'entre les plans extrêmes, fera appelée Z2 balance de la grandeur propofée, & fes deux portions qui. mesurent TOME Y. Q la LE Gé Le DS mu Er DS h h 41 #1] Lau l i 4 i | AU à À E (1 1 | (4 } ' 4 Je | G 1 H À. ME 6e ni Le y t k h 4 b APR 111 'le : M j An 4 | { fai AA: ! WC | : un | TENAI v14 l 44 EU } L LE: { (REY |) | 18 h h: ! FR (l DEEP NT re loose. OR E AT LS RE DEEE

Fig. 3. 242 LertTre 0e M. Derronviczs la diftance entre le centre de gravité de la gran deur propofée & les plans extrêmes, s'appelleront les bras de la balance : & la raifon d'un de ces bras à l'autre fe trouvera en cette forte: Je dis qu'un des bras eft à l'autre (c'est-à-dire, que la diftance entre le centre de gravité de la figure & l'un des plans extrêmes, eft à [a diftance entre le même centre de gravité & l'autre plan extrême), comme la fomme triangulaire de toutes les portions de la figure, à commencer par le premier plan extrême, à la fomme triangulaire de ces mêmes portions, à commencer par l'autre plan extrême. | AVERTISSEMENT. Afin qu'il ne refte ici aucune ambiguité, jé m'expliquerai plus au long. Soit donc propofée, premièrement, une ligné courbe C B (Fig. 3.) laquelle foit coupée en un nombre indéfini de parties aux points C, Z, G, F, B; par une multitude indefinie de plans paralleles & également diftants, ou, fi l'on veut, par une multitude indefinie de droites paralleles & également diftantes CA, IK, GH, FE, BO (car les droites fuffifent ici, & les plans n'ont été mis dans l'énonciation générale, que parce que les droïtes ne {uf: firoient pas en tous les cas). Soit maintenant menée 4 B où l'on voudra perpendiculaire à toutes les paralleles, laquelle coupe les extrêmes aux points PB, A,

A M. DE Carcavr 243 8, À, & celle qui pafle par le centre de gravité de la ligne propofée , au point T': cetre droite B 4 fera appellée /4 balance, & les portions T 4, TB feront appellées /es bras de la balance. Je dis que le bras TB fera au bras T 4, comme l fomme triangulaire des portions de la ligne, fivoir, des portions BF, FG, GI, IC, à commencer du côté de B, à la fomme trianguhire des mêmes portions, à commencer du côté de À. Soit maintenant la grandeur propofée un plan, comme le triline € B À, coupé par les mêmes palleles C4, 1K, GH, FE, BO, & que la mème perpendiculaire B 4 le coupe comme il à été dir, & rencontre celle qui pafle par le centre de gravité du plan propofé € B 4 au point T : je dis que le bras Z'B fera au bras T 4, comme la fomme trianoulaire des portions dutriligne, BFE,EFGH, GIKH,CIK À, à commencer du coté de BO, à la fomme triangulaire des mêmes portions, à commencer du côté de 4C,. Soit maintenant la grandeur propofée une furface courbe CYZ BEC, coupée par les mêmes plans paralleles 4ACY, KIM, HGN, EF2Z, OBX, qui coupent la furface donnée & y produifent, par leurs communes feétions, les lignes CY, IM,GN, FZ, &c.; & que la balance B 4 melure toujours la diftance entre les plans extrêmes, & coupe celui qui pafle par le centre de graQ 2 vité

244 LETTRE DE M. Derronvire vité de cette surface courbe au point T': je dis que le bras Z'B fera au bras 7 À, comme la somme triangulaire des portions de la surface, savoir, ZFB, FZNG, NGIM, MICY, à commencer du côté de B, c'est-à-dire, la somme des surfaces BCY, ZFCY, NGCY, MICY, à la somme triangulaire des mêmes portions, à commencer du côté de AC, c'est-à-dire, des: surfaces CYB, IMB, GNB, FZB. Enfin si la grandeur proposée est un solide YCFB AC, coupé par les mêmes plans parallèles, & que la balance B 4 mesure de même la distance entre les plans extrêmes, & coupe celui qui passe par le centre de gravité du solide au point T: le bras TB fera toujours au bras T4, comme la somme triangulaire des portions du solide, à com. eRRQ. pe gran dl me + + ti Z : à mg « = CRE. HE =. mencent par B, à la somme triangulaire des mêmes portions, à commencer par C. DÉMONSTRATION DE CETTE MÉTHODE. Ar La démonstration en est facile, puisque ce n'est que la même chose que ce que j'ai donné de la vpn d'E See > En balance. . GA 4 . Car soit considérée la droite B Æ comme une balance divisée en un nombre indéfini de parties égales aux points 4, K, H, E, B, auxquels pendent pour poids les portions de la grandeur proposée, & à l'un desquels se rencontre le point T, qui

A M. pe CaArcAvr. 245 qui fera le centre de gravité de la balance , comme la est visible par la doctrine-des Indivisibles, laquelle ne peut être rejetée par ceux qui prétendent avoir rang entre les Géomètres. Donc, par la troisième proposition de la balance, la somme triangulaire des poids (ou des portions de la figure} à commencer du côté B, est à la somme triangulaire des mêmes poids, à commencer du côté AC, comme le nombre des points (ou des parties) du bras BT, au nombre des points (ou des parties.) du bras AT, c'est-à-dire, comme PT 174. Ce qu'il falloit démontrer.

AVERTISSEMENT. Je fais bien que ces portions de la grandeur proposée ne pendent pas précisément aux points de division de la balance B A; mais je n'ai pas laissé de le dire, parce que c'est la même chose. Car en divisant chacune de ces parties égales de la balance BA par la moitié, ces nouvelles divisions donnent une nouvelle balance qui ne différera de la Première que d'une grandeur moindre qu'aucune donnée (puisque la multitude des parties est indéfinie), & le centre de gravité de la balance se trouvera encore à une de ces nouvelles divisions, où n'en sera éloigné que d'une distance moindre qu'aucune donnée, ce qui ne changera point les raisons : & les portions de la grandeur proposée Q 3 pendent $EE = 4a \div Dee$ Qué a Le 0 em" er . 4 e # £ à | FA 4 fr st ; té € "21 + etc

Fig. 4: 246 LerrRé de M. DEeTTONVILLE pendront précifément aux points de ces nouvelles divifions, en confidérant au lieu des portions de ka grandeur propofée, qui feront peut-être irrégulieres, les portions réculieres qu'on leur fubftitue en Géométrie, & qui ne changent point les raifons; c'eft-à-dire, en fubftituant aux portions de la ligne courbe leurs cordes, aux portions du triline les rectangles comprisde chaque ordonnée & d'une des petites portions égales de l'axe ; & de même aux folides : ce qui ne change rien, puifque [a fomme des portions fubftituces ne differe de la fomme des véritables, que d'une quantité moindre qu'aucune donnée. Donc on conclura néceffairement dans cette nouvelle balance la proportion dont il s'agit, & par conféquent elle fe conclura auf dans l'autre. J'ai voulu faire cet avertiflement, pour montrer que tout ce qui eft démontré par les véritables reoles des Indivifibles, fe démontrera aufli à la rigueur & à la mamiere des Anciens; & qu'ainf lune de ces méthodes ne differe de l'autre quen la rhatiere de parler : ce qui ne peut bleffer les per fonnées raïfennables, quand on Îles à une fois averties de ce qu'on entend par-là, Et c'elt pourquoi je ne ferai aucune difficulté dans la fuite d'ufer de ce langage des Indivilibles , Za forme des lignes, où la fomme des plans ; & ainfi quand je confidererai, par exemple (Fig. 4), le diametre dun derni-cercle

A M. de CaArcAvr. 147 demi-cercle divifé en un nombre indéfini de parties égales aux points Z, d'où foient menées les ordonnées Z AZ, je ne ferai aucune difficulté d'ufer de cette expreffion, {2 fomme des ordonnées, qui femble ne pas être géométrique à ceux qui n'entendent pas la doéтрine des Indivifibles, & qui fimaginent que c'eft pécher contre la Géoméтрie, qué d'exprimersun plan par un nombre indéfini de lignes; ce qui ne vient que de leur manque dintellisence, puifqu'on n'entend autre chofe par-là finon la fomme d'un nombre indéfini de reétangles faits de chaque ordonnée avec chacune des petites portions égales du diametre, dont la fomme ft certainement un plan, qui ne differe de l'efpace du demi-cercle que d'une quantité moindre qu'aucune donnée. | Ce n'eft pas que ces mêmes lignes Z M ne puifent être multipliées par d'autres portions égales d'une autre ligne quelconque qui foit, par exemple, double de ce diametre, comme en la Figure s; & alors la fomme de ces lignes Z A1 formera un efpace double du demi-cercle, favoir, une demi-ellipfe : & ainfi la fomme des mêmes lignes Z M formera un efpace qui fera plus où moins grand, felon la grandeur de la ligne droite, par les portions égales de laquelle on entend qu'elles foient multiples , cefт-à-dire, felon la diftance qu'elles garderont entre elles. De forte que quand on parle de la fomme Q 4 d'une

D Cned EE. «7^{er} — = MEL FIRE NEA 248 Lettre De M.

Derronvitte d'une multitude indéfinie de lignes, on a toujours égard à une certaine droite, par les portions égales & indéfinies de laquelle elles soient multipliées. Mais quand on n'exprime point cette droite (par les portions égales de laquelle on entend qu'elles soient multipliées } Il faut s'entendre que c'est celle des divisions de laquelle elles sont nées, comme en l'exemple de la Fig. 4, où les ordonnées Z M du demi-cercle étant nées des divisions égales du diamètre, . lorsqu'on dit simplement la somme des lignes Z M, sans exprimer quelle est la droite par les portions de laquelle on veut les multiplier, on doit entendre que c'est le diamètre même, parce que c'est le naturel : & si on vouloit les multiplier par les portions d'une autre ligne, il faudroit alors l'exprimer. Il faut entendre la même chose quand toutes les lignes feroient courbes, tant celles dont on considère la somme, que celle par les portions de laquelle on les multiplie : ou quand les unes sont droites & les autres courbes, comme, par exemple; en la Fig. 4, si l'on dit simplement ainsi, la somme de tous les arcs CM, compris entre le point C & chacune des ordonnées, on doit entendre la somme des rectangles compris de chacun de ces arcs C M étendus en ligne droite, & de chacune des petites portions égales du diamètre ZZ, ZZ, 6. Ainsi en la Fig. 6, où l'arc de 90 degrés BC est

A M. pe Carcavr. 249 éft divifé en un nombre indéfini d'arcs
 égaux aux points D, d'où font menés les finus droits DE, fi on dit
 fimplement ainfi, 4 fomme des finus DE, on entendra par-là la fomme des
 rectangles compris de chaque finus DE & de chacun des petits arcs égaux D
 D confidérés comme étendus en ligne droite; parce que ces/finus font nés
 des divifions égales de l'arc: & fi on vouloit les multiplier par les portions
 égales d'une autre ligne, il faudroit l'exprimer, & dire, /a fomme des finus
 multipliés par les portions égales d'une telle ligne. Il faut entendre la même
 chofe de la fomme des quarrés de ces lignes & de leurs cubes, &c. Ainfi fi
 on dit dans la même Fi. 6, la fomme des . quarrés des Jinus D E, il faut
 entendre la fomme des folides faits du quarré de chaque finus multiplié par
 lun des petits arcs égaux D D: & fi dans RFio, 4 on dit, la fomme des
 quarrés des arcs CM, il faut entendre la fomme des folides faits du quarré .
 de chaque arc C M (étendu en ligne droite) multiplié par chacune des petites
 portions égales ZZ; & ainfi en toutes fortes d'exemples. En voilà
 certainement plus qu'il n'étoit néceffaire pour faire entendre: que le fens de
 ces fortes d'expreflions, {a fomme des lignes, la fomme des : plans, &c., n'a
 rien que de très-conforme à la pure Géométrie. / La

250 Lettre 0e M. Dsrroenvirre La même Méthode générale pour les centres de gravité, énoncée autrement. 7 NE grandeur quelconque étant proposée, comme il a été dit, & le même ordre de plans qui la coupent: Je dis que la somme de toutes les portions de cette grandeur, comprises entre un des plans extrêmes & un chacun de tous les plans, est à la grandeur entière prise autant de fois, c'est-à-dire, multipliée par sa balance, comme le bras sur l'autre plan extrême; C'est-à-dire, comme la distance entre [on centre de gravité & cet autre plan extrême, est à la balance entière. Autrement encore: Je dis que la somme de toutes les portions de la grandeur, comprises entre un des plans extrêmes & un chacun de tous les plans, est égale à la grandeur entière multipliée par son bras sur l'autre plan extrême. Soit proposée, par exemple, la ligne CFB (Fig. 3.) : je dis que la somme des portions CFB, IFB, GFB, FB, est égale à la ligne entière CFB multipliée par le bras T A. Car la somme de ces lignes n'est autre chose que la somme triangulaire des portions C7, IG; GF, FB, à commencer par C : donc la droite B A est une balance divisée en un nombre indéfini de parties

A M. De CARCAVvI. 241 parties égales aux points F, H, &c.,
auxquels points de divifion (comme il a déjà été dit) pendent pour poids les
petites portions C7,1G,GF,FB,&à lun defquels points de divifion fe
rencontre le centre de gravité 7. Donc, par la feconde propofition de la
balance, la fomme triangulaire de ces portions à commencer par C, c'eft-à-
dire, la fimple fomme des portions CFB, IFB,GFB,FB, eft cgale à [a fimple
fomine des petites portions CI, IG, GF, FB, c'eft-à-dire, la ligne CFB, prife
autant de fois qu'il y à de points (ou de parties) dans le bras T' À, c'eft-à-
dire, multipliée par le bras T4. Ce qu'il falloir démontrer. On démontrera de
même, fi la grandeur propofée eft le triligne ABC, que Ja fomme des
efpaces BCA, EFCA, HGCA, KICA, eft égale à l'efpace BC 4, multiplié par
le bras TB. Et de même pour les folides, &c. AVERTISSEMENT. Quand
j'ai parle de la fomme des hgnes CFB, IFB, GFB,FB, on n'a dû entendre
autre chofe finon la fomme des rectangles compris de chacune de ces
lignes, & de chacune des petites portions Coales BE, EH, &c., (c'eft-à-dire,
avec chacune des diftances égales d'entre les plans voifins); & qu'ainfi cette
multitude indéfinie de petits reétangles de mème hauteur forment un plan.
C'eft ce que FI QE! nl! pt 4 = 7 2 — = - — a RTE mt — - - _ = z = = Z - “ e
— -- _ > = eZ DE ES CSS mme : _ RS — - — a — | — EE ————— 7 3 s
LT ER . LR

262 LETTRE de M. Desrrouviere que j'ai déjà aflez dit dans les avertissements précédents. | . De même, quand j'ai parlé de la somme des espaces BCA, EFCA, HGC A, KICA, on a dit entendre que chacun de ces espaces fût multiplié par chacune de ces petites distances égales d'entre les plans voisins BE, EH, &c., & formaient ainsi une multitude' indéfinie de petits solides prismatiques, tous de même hauteur, la somme desquels formera un solide, qui est celui que l'on considère quand on a parlé de la somme de ces plans. On doit entendre la même chose par la somme des solides; car il faut entendre de même qu'ils soient tous multipliés par ces mêmes portions égales ; ou au moins (si l'on ne veut pas admettre une quatrième dimension) qu'on prenne autant de lignes droites qui soient entre elles en même raison que ces solides, lesquelles étant multipliées chacune par chacune de ces parties égales BE, EH, &c., elles formeront un plan qui servira de même à trouver la raison cherchée. Ce qu'il ne fera plus nécessaire de redire. COROLLAIRE PREMIER. De cette méthode s'enfuit ce Corollaire : Si /z grandeur est donnée & la somme de toutes les portions comprises entre un des plans extrêmes , & chacun

A M. DE CARCASSONNE. 253 cun des autres plans, & que la balance
 soit aussi donnée : je dis que les deux bras feront aussi donnes. Soit proposée,
 par exemple (Fig. 7.) la ligne courbe de la demi-Roulette $\hat{A}YC$, laquelle
 soit supposée être donnée de grandeur , & qu'on fasse qu'elle est double de
 l'axe CF qui soit aussi donné. Soit aussi supposé qu'ayant mené les ordonnées
 ZF , coupant l'axe en Z , en un nombre indéfini de parties égales, & la
 Roulette aux points F , la somme de toutes les portions CY de la courbe soit
 aussi donnée : je dis que la distance entre le centre. de gravité de cette courbe
 AYC , & la droite AF sera donnée. Car la somme de toutes les courbes CF
 est donnée par l'hypothèse; & on fait en effet d'ailleurs que cette somme est
 double de la somme des droites CM , menées de C aux points où les
 ordonnées coupent la circonférence , ou de la somme des droites ZO , (qui
 soient les ordonnées de la parabole COG , dont CF soit l'axe, & dont le côté
 droit soit égal à la même CF ; car alors chaque CM quarté, ou FC en CZ ,
 c'est-à-dire, le rectangle FCZ , sera égal à $Z'O$ carré): & ainsi la somme des
 lignes courbes CY est double de l'espace de la parabole CFG , lequel étant
 les deux tiers de CF carré, la somme des courbes CY sera égale aux quatre
 tiers du carré de CF . Mais, par la précédente, la même somme est égale
 à la distance AF . Soit donc donnée la distance AF , on trouvera la courbe CY
 par la méthode précédente. Et ainsi la somme des courbes CY est donnée par la
 distance AF . Et ainsi la somme des courbes CY est donnée par la distance AF .
 { }! Fig. 7.

254 Lettre DE M. Derronvirre le au rectangle compris de la courbe C À (ou de deux fois la droite CF), & du bras de la courbe fur 4 F. Donc quatre tiers du quarré de CF, font égaux à deux fois CF, multipliée par le bras cherché fur 4 F; donc ce bras est donné, & égal aux deux tiers de CF, puisque les deux tiers de CF, multipliés par deux fois CF, font égaux à quatre tiers du quarré de CF. COROET AIRES DE La converfe de ce Corollaire fera aufli véritable, favoir : Si une grandeur est donnée & les bras de la balance aufli : la somme de [es portions comprises entre un des plans extrêmes , & chacun des autres, fera donnée. Soit donné, par exemple (F9. 8. } l'arc de cercle de quatre-vingt-dix degrés B M C, duquel je fuppofe que le centre de gravité étant F, son bras Y X soit aufli donné: je dis que la somme des arcs BM, compris entre le point B & chacune des ordonnées menées des divisions égales & indéfinies du rayon BA, est auf donnée. Car la somme de ces arcs fera égale au rectangle, compris de l'arc entier BC & de FX, lequel rectangle étant égal, comme on le connoît d'ailleurs , au quarré du rayon 4 B; il s'enfuit aufli que la somme des arcs B M, est égale au même quarré du rayon 48. | AVERTISSEMENT:

A M. pe Carcavr 265\$ AVERTISSEMENT. J'ai voulu donner ces exemples de l'usage de cette méthode , tant pour connoître les bras de la balance par la connoissance de la somme de ces portions, que pour connoître la somme de ces portions par la connoissance des bras. J'en donnerois bien ici d'autres exemples plus considérables; mais on les verra dans la suite, & je ne veux donner ici que les propositions qui fervent comme de Lemmes au reste du discours. DÉFINITION. S'il y a tant de quantités qu'on voudra A, B, C , lesquelles on prenne en cette sorte : premièrement, la somme triangulaire de toutes, savoir, $A + B + C$; ensuite la somme triangulaire de toutes, excepté la première, savoir, $B + C$; puis la somme triangulaire de toutes, excepté les deux premières, savoir, C , &c.: J'appelle la somme de ces quantités prises de cette sorte, la somme pyramidale de ces mêmes quantités. AD: C En voici la figure, où BIC lon voir que $\frac{1}{4}$ somme CE pyramidale n'est autre chose que la somme des sommes triangulaires qui sont ici séparées par des barres, Ps QUES Rips à : > pe y X Lu te 4,

24,6 LeTTRe pe M. Derronviire Or il eft à remarquer que la nature de cette forte de combinaifon eft telle, que fi on prend deux fois cette même fomme pyramidale, comme on voit ici, & qu'on en Ôte A: BC la premiere fomme trian- B'A4C oulaire qui eft féparée du GC refte par une double barre, B C il arrivera dans ce refte que c la premiere quantité 4 s'y trouvera une fois; la fe- C conde B , quatre fois; la 1 D AC troifieme C, neuf fois; & FÉÉPIAC ainfi toujours felon la fuite C des nombres quarrés. Et cela eft aifé à démon- B...6 trer par la nature des com- ê binaifons qui forment ces CG fommés triangulaires & py- AP ET ramidales, qui eft telle : Dans les fommés triangulaires, la premiere grandeur fe prend une fois, la feconde deux fois, la troifieme trois fois, &c., felon l'ordre des nombres naturels. Et dans les fommés pyramidales la premiere grandeur fe prend une fois, la feconde trois fois, la troifieme fix fois, &c., felon l'ordre des nombres triangulaires, Or tout nombre triangulaire, pris deux fois & diminué de fon expofant, eft Le même que le quarré de fon expofant; comme ;

D A M. DE CarcaAvir. 257 tomme, par exemple, le troisieme
 nombre triangulaire 6 étant doublé, est 12, qui diminué de l'exposant 3 , il
 reste 9, qui est le carré de 3. Cela est aidé par Maurolic (1); & de-là paroît la
 vérité de ma proposition. D'où il s'enfuit que s'il y a tant de quantités qu'on
 voudra 4, B, C, dont la premiere soit multipliée par le carré de 1, la
 seconde par le carré de 2, la troisieme par le carré de 3, &c.: leur somme
 prise de cette sorte, fera égale à deux fois leur somme pyramidale , moins
 leur somme triangulaire. ART ESS ose à s EPS AVERTISSEMENT. On
 verra dans la suite l'usage de cette propriété ; dans l'application qui s'en fera
 aux lignes droites ou courbes; & pour faciliter l'intelligence de cette
 application , j'en donnerai ici quelques exemples. Soit donc dans la
 troisieme Figure, par exem- Hg. 3. 1 Et le | pd LA 108 AE D : 5 mia | (à l v
 24 à Da 1 k |A LR! {14 | ia | 188 | L: EE ... ag Th nd trente SRI. = ace a. Dit
 2 PRE re = » LARGE LT y pe + À L L ESRS ré Sn LOT ET dns 7 Hs 0e :
 ms — 7 Len . a À : RTE ES re Rs 2 = es EC LIT S à PO D SPAM PAR
 PRET DAT His SE 7. à a = Re di ne mr (1) Maurolic, Abbé de Mefline,
 fleurissoit vers le milieu du seizieme siecle. C'étoit un Géometre profond
 pour son temps. Nous avons de lui divers Traités, concernant. la Sphere, le
 Comput Ecclésiastique, les instrumens d'Astronomie, l'Arithmétique, la
 Perspective, la Musique, &c. DE LS Dans son Traité d'Arithmétique , il
 démontre plusieurs propriétés de différentes suites de nombres, comme la
 suite des nombres simples, la suite des nombres carrés, la suite des
 nombres triangulaires, &c. C'est à cet Ouvrage que Pascal fait ici allusion.
 TOME F, R ple, a di HER TE SET UN ONE RES se SF = DE ps Fm | + =
 2" = = AT SET IE

258 Le TtTre ne M. Derronviire ple, l'axe B 4 du triligne B 4 C, divisé en un nombre indéfini de parties égales, aux points K, H, E, d'où soient menées les ordonnées : on est averti par les choses précédentes, que la somme de ces ordonnées est égale à l'espace du triligne. Je dis maintenant que la somme triangulaire de ces ordonnées ZK, GH, FE, &c., à commencer du côté de la base C4, est la même chose que la somme des rectangles compris de chaque ordonnée, & de la distance de la base; c'est-à-dire, la somme des rectangles IX en KA, GH en HA, FE en EA. Ce qui est bien aisé à démontrer en ce forte, Puisque les distances AK, KH, HE, sont égales, & qu'ainsi en prenant 4 K pour 1, 4H fera 2, 4E, 3, &c.: il s'enfuit que la somme des rectangles 2K en KA, GH en HA, FE en EA, &c., n'est autre chose que ZK multiplié par 1, GH par 2, FE par 3, &c.; ce qui n'est que la même chose que la somme triangulaire de ces droites IK, GH, FE, comme je l'ai montré dans le commencement. : FA) TR DA :| A0 ||!
14 | æ || tr ' FR à pa Je dis de même que deux fois la somme pyramidale de ces mêmes ordonnées, à commencer du côté de la base C4, est égale à la somme des solides faits de ces mêmes ordonnées multipliées chacune par le carré de la distance de la base;

A M. DE CaArcaAvr. 259 bale; c'est-à-dire, TK en K À carré + GH en HA carré, &c. Car ces carrés étant 1, 4, 9, &c., il s'enfuit que la somme des ordonnées multipliées chacune par chacun de ces carrés, est la même chose que P q) q leur somme pyramidale prise deux fois, moins leur somme triangulaire prise une fois. Or cette somme triangulaire n'est qu'un indivisible à l'égard des sommes pyramidales, puisqu'il y a une dimension de moins, & que c'est la même chose qu'un point à l'égard d'une ligne, ou qu'une ligne à l'égard d'un plan, ou qu'un plan à l'égard d'un solide, ou enfin qu'un fini à l'égard de l'infini; ce qui ne change point l'égalité, Car il faut remarquer que comme la simple somme de ces lignes fait un plan, ainsi leur somme triangulaire fait un solide, qui est composé d'autant de plans qu'il y a de divisions dans l'axe; les quels plans sont formés chacun par les simples sommes particulières des ordonnées, dont la somme totale fait la somme triangulaire. En effet la somme triangulaire de ces ordonnées se prend ainsi: premièrement, en les prenant toutes ensemble C4, 1K, GH, FE, ce qui fait un plan égal au triligne: ensuite en les prenant toutes, excepté la première, c'est-à-dire, 1K, GH, FE, ce qui fait un autre plan égal au triligne BIK: & ensuite GH, FE, ce qui fait un autre plan égal au triligne 2 ligne = RE — = EE DRE EE es. PR D ET. un LL FL =? 56 A mt HE IPRRT -#—= TE — = UN Lui | put l mi all fl nl: ll 1 Fu | (11 | (nl 11 | | A | 1H | 1] î | NAU | Î | 4 M L'an! A LU NE IH MU EU -A0M 1] LR AE GER: | 11 11 | EN TENI MALTA ITA FI || ep y ET 4 EE Ep hi | Han MU : il | l'94) HIUUMEE NUL: LE Hu A1 HUE fl | 1411 (! | Hu | 4: EE | (1 Mu + | b nl 4 M ECTADN DE | E \ 1] Nul } 1 À WI \ f (Hi nl! }) [I : { 1 1!! | { | (AUTRE AU | il À A! HOLD : À 1184 DOUAI EN Î | ni} 14 h 4 11 + WU w | il (x HR ENTIE RUES % nt L h 1 \ | ET (1 LAINE D | 4. RAS Ji 140 + 4 En 6, }! Ag 1 Fr) | | 4 ' An IN y HN | M | 1 | 1 | | 1 | | 11 { À svt N 11 JIM 1 1 4 | L) | | in | 14 4 { : I ; | 4 AA PRE IP 4 ATEN: : ut : M RE Al DURE 16) HO PA HN (NA pi | : 18 30 4 | 1,4 Î R : { | [4 Eee 77 A XL Le ct sam

#7 e à . Il : e > ” x] [EN : 1! || il || L' = [20 Me CL HA Li ‘4 rÈ
 LEUR RS “ * 4 : l tll : {ni t UE l k 7 ei! TER dl Whl Res -menle ere rer _
 — RETZ a ee + es | - ——— Pt EE re _ ae se x 2 = _ = ———. = --£ = : «
 = 2m mn. + ct SP a — — — - à — ET Las => 2 à es ee as Fu À ” és -
 Dhgée=S parer À ire D — te : nn 7 _ - se Sen PE = - z a - — - — . = der =
 es ++ ZE} TS ne ET = DL z x =- ET ET AT LITE = = ——— Ze — ———
 — L = = he = == . ia À ARE ET ne Fa 45 == == A han tr - : SE y 260
 Lerrre DE M. DEeTTronNviLze ligne BGH, &c. De forte qu'il y a autant de
 plans que de divisions, chacun defquels plans étant multiplié par les petites
 portions de l'axe, forment autant de petits folides prifmatiques d'égale
 hauteur, tous lefquels enfemble font un folide, comme je l'ai dit ailleurs. De
 la même forte, la fomme pyramidale des mêmes ordonnées fait un plan-
 plan, compofe d'autant de folides qu'il y a de portions dans l'axe, lefquels
 folides font formés chacun par les fommés triangulaires particulieres, dont
 la fomme totale fait la fomme pyramidale. Car leur fomme pyramidale fe
 prend ainfi : premièrement , en prenant la fomme triangulaire de toutes, qui
 fait un folide , comime nous venons de dire ; & enfuite la fomme
 triangulaire de toutes, excepté la premiere, qui fait un autre folide, &c. Et
 ainfi autant qu'il y aura de divisions , il y aura auñli de folides , lef quels
 étant multipliés chacun par une des petites divisions de l'axe, formeront
 autant de petits planplans de même hauteur, qui tous enfemble font le plan-
 plan dont il s'agit. Et l'on ne doit pas être bleffé de cette quatrieme
 dimenfion, puifque, comme je lai dit ailleurs, en prenant des plans au lieu
 des folides , ou même de fimples droites, qui foient entre elles comme les
 fommés triangulaires particulieres, qui font toutes enfemble la fomme
 pyramidale : la fom| me

A M. De CaArcAVvI. 261 me de ces droites fera un plan qui tiendra lieu de ce plan-plan. Il faut entendre la même chose des lignes courbes BF, BFG, BFI, BFC, & de leurs formes triangulaires & pyramidales. Car tout cela est général pour toutes sortes de grandeurs, chacune selon sa nature. Je viens maintenant aux problèmes proposés publiquement touchant la Roulette, desquels voici ceux que je proposai dans le premier Écrit au mois de Juin. Étant donnée (Fig. 7.) une portion quelconque $\in ZY$, de la demi-Roulette, retranchée par une quelconque ordonnée à l'axe; trouver: 1°. La dimension & le centre de gravité de l'espace CZY. 2°, La dimension & le centre de gravité de son demi-folide autour de la base ZF, c'est-à-dire, du folide, fait par le triline CZY, tourné autour de la base ZY d'un demi-tour seulement. 3°. La dimension & le centre de gravité de son demi-folide autour de l'axe CZ. Et ceux que je proposai au commencement d'Octobre dans l'Histoire de la Roulette, sont ceux-ci : 1°. Trouver le centre de gravité de la ligne courbe CF. 2°, Trouver la dimension & le centre de gravité de la surface de son demi-folide autour de la base. | R 3 3°. Trouver RAR SEE — a = = _ fl {ll 1

ELA a ————— — 1L4 4 et | Fig. 12. 3262 Lettre 0e M.

Derronviere °, Trouver la dimension & le centre de gravité de la surface de fon demi-folide autour de l'axe. Pour résoudre ces problèmes, la première chose que je fais, est de substituer à ces demi-folides, des onglets qui y ont un grand rapport, & dont voici la définition. DÉFINITION. Soit un triligne rectangle ABC, (Fig: 12.) composé de deux droites AB, AC, dont celle qu'on voudra comme AB, fera l'axe, & l'autre la base, faisant angle droit, & de la courbe quelconque BC. Soient divisées en un nombre indéfini de parties égales, tant AB aux points D, que AC aux points E, & encore la courbe même BC aux points L; & que chacune des parties de AB, soit égale à chacune des parties de AC, & encore à chacune des parties de la courbe BC (Car il ne faut pas craindre l'incommensurabilité, puisqu'en ôtant d'une de deux grandeurs incommensurables une quantité moindre qu'aucune donnée, on les rend commensurables). Soient maintenant des points D, menées des perpendiculaires à l'axe jusqu'à la courbe, elles s'appelleront les ordonnées à l'axe, Soient menées des points E, des perpendiculaires à la base le la courbe, elles s'appelleront les ordonnées à la base. Soient encore menées des points L, des perpendiculaires à la base, elles s'appelleront

A M. pr Careavit. 263 pelleront /es fñus fur la bafe. Soient enfin menées des mêmes points L, des perpendiculaires à l'axe ; elles s'appelleront es /ñus fur l'axe. AVERTISSEMENT. On fuppofe toujours ici que le triline eft une figure plane, & que la courbe eft de telle forte, que tant les finus, que les ordonnées ne la rencontrent qu'en un point. Et les portions de l'axe de k bafe & de la courbe, font toutes égales, tant entre elles, que les unes aux autres. Il faut aufli remarquer que les finus different des ordonnées, en ce que les finus naiffent des divifions égales de la courbe, & les ordonnées des divifions égales de l'axe ou de la bafe. Soient maintenant entendues des perpendiculaires, élevées fur le plan de tous les points du triline , qui forment un folide prifmatique infini, qui aura le triline pour bafe, lequel foit coupé par un plan incliné paffant par l'axe, ou par la bafe du triline : la portion de ce folide, retranchée par le plan, s'appellera ongler. Que fi l'on fait au-deffous du triline ce que Je viens de figurer au-deflus; c'eft-à-dire, que les perpendiculaires de tous les points du triline foient prolongées de l'autre part , & coupées par un autre plan également incliné de l'autre part, Il fe formera au-deflous du plan du triline un autre onR 4 olet, #1 di J # 71 Ha nf td Le. | PJ f. tl4 ler

% Me Le L} Œ" Le Da, 4 LR Le" À +8 'x née à ue 264 Lettre pe
M. DErronviize olet, égal & femblable à celui du deflus: & tous deux
enfemble s'appelleront /e double onglet. Or il est visible que tant longler
que le double onglet, fera compris de trois plans & d'une portion de la
surface cylindracée, laquelle portion s'appellera a surface courbe de
l'onglet ou du double onglet. Et l'onglet ou le double onglet, qui feront
retranchés par des plans inclinés, passant par la bafe du triligne,
s'appelleront l'onglet, ou le double onglet de la bafe. Et l'onglet ou le
double onglet, qui feront retranchés par des plans passant par l'axe,
s'appelleront l'onglet, ou le double onglet de l'axe. J'avertis que je fuppofe
toujours ici que le plan qui retranche les onglets est incliné à celui du
triligne de 45 degrés. Fig. 10. Je donnerai maintenant ici les rapports qu'il y
a entre le double onglet de l'axe, par exemple, & le demi-folide du triligne
tourné à l'entour de l'axe. Je dis donc, premièrement, que le double onglet
est au demi-folide, comme le rayon au quart de la circonférence. Car soit
entendu (Fig. 10.) le triligne CF 4, tourné à l'entour de l'axe CF; & que le
folide qui en sera formé, soit coupé par un plan passant par l'axe CF,
perpendiculaire au plan du triligne qui coupe

A M. DE CaARcAv1. 26\$ coupe le folide en deux demi-folides égaux, dont, je confidérerai celui qui est du côté du triligne. Maintenant soit divisé l'axe en un nombre "des fois de parties égales aux points Z, d'où soient menées les ordonnées Z F. Soit aussi (Fig. 11.) un demi-cercle quelconque RYS, & le rayon ZF, perpendiculaire au diamètre R S. Soit aussi la tangente menée du point Y, dans laquelle soient pris YM, YN, égales chacune au rayon. Donc chacune des droites ZM, Z N, fera avec Y Z un angle de 45 degrés (qui est l'angle d'inclinaison des plans qui engendrent le double onglet sur le plan du triligne) & l'angle entier M Z N fera droit. Maintenant (Fig. 10.) soient entendus des plans levés sur des ordonnées Z Y, perpendiculairement au plan du triligne , qui coupent, tant le double onglet, que le demi-folide. Il est visible que la figure entière MYNZRS, représentera la section que chacun de ces plans perpendiculaires passant par les ordonnées Z Y, formeront, tant dans le double onglet ; que dans le demi-folide autour de l'axe; c'est-à-dire , que les sections que chacun de ces plans formera dans le double onglet, feront des triangles rectangles & isocèles, dont les angles droits seront aux points Z (& qui seront semblables au triangle rectangle MZ N), & la base de chacun de ces triangles sera double de chaque ordonnée Z Y, de même que MN est double de Z T. Fig. 11e

266: Lettre pe M Derronvirre Z Y. Et le contenu de chaque triangle fera égal au quarré de fon ordonnée; c'est-à-dire, de l'ordonnée sur laquelle il est formé, de même que le triangle MZ N est égal au quarré de Z F. Il est aussi visible que les sections que ces mêmes plans formeront dans le demi-folide, feront des demi-cetles, qui auront pour rayons les mêmes ordonnées Z Y, & qui feront semblables au demi-cercle RFS ;& lesquels auront par-tout aux triangles du double onglet, chacun au sien, le même raison que le demi-cercle R Y S au triangle MZ N. D'où il paroît que les sections formées par les plans sur les droites Z F, étant toutes semblables, tant entre elles, qu'à la figure MNZRS ;il arrivera que tous les triangles ensemble , formés dans le double onglet, feront à tous les demi-cercles ensemble formés dans le demi-folide, comme le triangle MZ N , au demi-cercle RYS, ou comme le rayon, au quart de la circonférence; & qu'ainsi le double onglet fera au demi-folide, en la même raison du rayon au quart de la circonférence. Ce qu'il falloit démontrer. Je dis, 2°. que les centres de gravité, tant du double onglet (lequel soit au point H), que du demi-folide (lequel soit au point V) feront sur le plan du triligne. Cela

A M. pe CaArcAvit. 267 Cela est visible, puisque le plan du
 triligne separe en deux parties égales & toutes pareilles, tant le double
 onglet, que le demi-folide. Je dis, 3°. que ces deux centres de gravité du
 double onglet & du demi-folide ; & même celui du - folide entier à l'entour
 de l'axe, sont tous également distants de la base. Car tous les triangles qui
 forment l'onglet, sont entre eux en même raison que les demi-cercles qui
 forment le demi-folide; & partant en considérant CF, comme une balance, à
 laquelle soient pendus les triangles de l'onglet, les deux bras feront en
 même raison, que les deux bras de là même base : 41 M? d 7 + (s 4 4 2 fi #À
 pe AR à hnce, en considérant qu'au lieu des triangles de onglet, on y pende
 les demi-cercles du demi-folide, ou même les cercles entiers qui formeroient
 le folide entier à l'entour de l'axe; & par conséquent les centres de gravité du
 folide entier, & du demi-folide, & du double onglet, sont tous également
 distants de la base 4F. Je dis, 4°. que le bras HT (ou la distance entre le
 centre de gravité du double onglet & l'axe CF) JE au bras VT (ou à la
 distance entre le centre de gravité du demi-folide & le même axe CF), 'mme
 le quart de la circonference d'un cercle à son Fayor, Car

L.] | Le D \ 1 14 DL ne || « Il cle ||| dl || Ve vin | nr ré 'ère = CA,
 J" : on. vx | ge || Ex [ne 4h A1 jee || ii 268 Lerrre DE M. Derronviite Car
 en entendant , comme tantôt, des plans élevés perpendiculairement fur
 chaque ordonnée, ils formeront des fections dans l'ongler & dans le demi-
 folide, femblables au triangle M Z N, & au demi-cercle R FS ; & il arrivera
 que le centre de gravité de chaque triangle du double onglet, dis vifera
 toujours l'ordonnée en même raifon; favoir, aux deux tiers depuis Z : &
 qu'auflî le centre de gravité de chaque demi-cercle divifera toujours
 l'ordonnée en même raifon; favoir, en la raifon de Z P à ZY (Fig. 11.), où le
 point P eft le centre de gravité du demi-cercle RYS. Donc puifque toutes les
 ordonnées Z Y font divifées aux deux tiers, par les centres de gravité des
 triangles qui font les portions du double onglet, de même que Z Y eft
 divifée aux deux tiers au point O; & que les mêmes ordonnées ZX font auflî
 toutes divifées par les centres de gravité des demi-cercles, qui font les
 portions du demi-folide, en même raifon que Z Y eft divifée au point P: il
 s'enfuit que le bras de chaque triangle eft au bras de chaque demi-cercle ,
 toujours en la même raifon que OZ, qui eft le bras du triangle MZ N fur RS,
 à PZ, qui eft auflî le bras du demi-cercle RFS, à l'égard de RS. Et par
 conféquent le bras HT de tous les triangles enfemble , c'eft-à-dire , du
 double onglet, eft au bras 7° T de tous les demtcercles enfemble, c'eft-à-
 dire, du demi-folide , en la

A M De Carcavwr. 269 h même raifon que OZ à Z P ; laquelle on fait être la même que le quart de la circonférence au rayon. Je dis, 5°. que la surface courbe du double onglet est à la surface du demi-folide , comme Le rayon au quart de la demi-circonférence. Car, soit maintenant la courbe 4 YC, divisée en un nombre indéfini de parties égales aux points 1; d'où soient menées les perpendiculaires on aura Z ; & soient entendus de même des plans élevés perpendiculairement au triligne, passant par chacun des points Z Y, lesquels plans coupent, tant la surface courbe du double onglet, que celle du demi-folide. Il est visible que les sections que ces plans formeront. dans la surface courbe du double onglet, seront des lignes droites, doubles des arcs Z Y, comme MN est double de YZ ; & que les sections que ces mêmes plans formeront dans la surface du demi-folide , seront des demi-circonférences , lesquelles seront par-tout aux droites formées dans la surface du double onglet , chacune à la finie, comme la demi-circonférence R FS, à la droite MN : & par conséquent que toutes les droites ensemble de la surface courbe du double onglet, seront à toutes les demi-circonférences ensemble , en la même raison que la droite MN, à la demi-circonférence RYS, où comme le rayon

270 LETTRE De M. DeTronviLize rayon au quart de la
 circonférence ; mais la somme de toutes les droites de la surface de l'onglet
 (c'est-à-dire, la somme des rectangles compris de chacune de ces droites, &
 des portions égales de la courbe 4 Y C, des divisions de laquelle elles sont
 menées) compose la surface même; & la somme de ces demi-circonférences
 de la surface du demi-folide , composent cette surface même, comme
 d'autres l'ont démontré , & entre autres le P. Tacquet (1). Donc la surface
 courbe du double onglet est à la surface du demi-folide , comme le rayon au
 quart de la circonférence. Je dis, 6°. que le centre de gravité de la surface
 courbe du double onglet, & le centre de gravité de la surface du demi-folide,
 & même celui de la surface du folide entier autour de l'axe, sont tous sur le
 plan du triligne, & tous également distants de la base AF. Ce qui se
 démontrera de même qu'on a vu pour les centres de gravité de leurs folides.
 ba 2 ss LE 3 x ñ LA E te We || 5 | à e 11 || >} £ et. Je dis, 7°. que le point H
 étant maintenant le centre de gravité de la surface courbe du double onglet,
 (1) Pascal à ici en vue le Traité du P. Tacquet, de Annullaribus &
 Cylindricis. é

A M. pre CarcAvr. 271 & le point V étant le centre de gravité de la surface du demi-folide : le bras HT fera au bras VT, comme le quart de la circonférence au rayon. Car en prenant (Fig. 11.) le point Z, qui soit le centre de gravité de la demi-circonférence, on démontrera de même (Fig. 10.) que les sinus Y Z seront tous divisés par les centres de gravité de chaque demi-circonférence, en même raison que Z Y de la Fig. 11 left au point Z. Et il est visible que dans la Fig. 10 les points Y sont les centres de gravité de chacune des droites du double onglet, & qu'ainsi les sinus Y Z feront leurs bras. Donc les bras des droites du double onglet sont aux bras des demi-circonférences du demi-folide, chacune à la même, toujours en la même raison de YZ à ZI (Fig, 11.) Donc le bras de toutes les droites ensemble (ou de la surface courbe du double onglet) sera au bras de toutes les demi-circonférences ensemble (ou de la surface du demi-folide), en la même raison que YZ à ZT, laquelle on fait d'ailleurs être la même, que du quart de la circonférence au rayon. AVERTISSEMENT. Puisque celle qu'on veut des deux droites d'un triline est prise pour l'axe & l'autre pour la base, tout ce qui a été dit de l'onglet de l'axe à l'égard du folide autour de l'axe, sera de même vérifiable de

gr * re Seb SUDEE J d: f“ Da JA à EC" LI Dr _: | ñ ||| 5 :: UE !
: BAT 14 [H à l | 4 | Lo V1 +! L \ il RES of | LT . ; ” ét 272 LETTRE DE M.
DeErronvirit de l’onglet de la bafe à l’égard du folide à lentour de la bafe, &
fe démontrera de même, puifqu’il ne faudra qu'appeller axe la droite qui
étoit appelée Zafe , & appeller hafe celle qui étoit appelée axe. Voilà les
rapports qui font entre les demi-folides & les onglets. Par où il paroît que fi
on connoît la dimenfion & les centres de gravité des onglets & de leurs
furfaces courbes, on connoitra Ja même chofe dans les demi-folides, par la
comparaifon du rayon au quart de la circonférence, dont on fuppofe ici que
la raifon eft donnée. Ainfi pour réfoudre tous les problèmes propofés, il
fufhira de trouver ces trois chofes : 1°. la dimenfion & le centre de gravité
d’une portion quelconque de la Roulette CZ Y (Fig. 7.) : 2°. le centre de
gravité de fa ligne courbe CY : 3°. la dimenfion & le centre de gravité des
doubles onglets, tant de la bafe que de l'axe, & la dimenfion & le centre de
gravité de leurs furfaces courbes Ce font donc là les problèmes que vous
verrez Ici. Or pour arriver à ces connoiffances fur le fujec des portions de la
Roulette en particulier, je donnerai des propofitions univerfelles pour
connoître toutes ces chofes en toutes fortes de crilignes gcnéralement. C’eft,
Monfieur, ce que j'ai cru devoir vous dire

a M. Ds Carcavr. 173 dire avant que d'entrer en matiere, & que j'aurois pu peut-être mettre en moins de place, fi j'y avois travaillé davantage; mais j'ai eu une raifon particuliere de démêler de petites difficultés qui embarraflent ceux qui n'entendent pas la fcience des Indivifibles : auxquels ayant voulu proportion: ner ce difcours, j'ai mis dans les Avertiflements ce qui pouvoit leur être néceflaire, mais en articles détachés, afin de ne point ennuyer les autres qui nauront qu'à les pafler fans les lire. Je n'ai donc plus qu'à vous prier d'excuser les défauts que vous verrez ici, ce que j'efpere de votre bonté, & de kh connoïffance que vous avez du peu de loifir que j'ai de m'appliquer à ces fortes d'études; ce qui fait que je vous envoie ce Difcours à mefure que je écris: de forte qu'il pourra bien m'arriver de répéter plus d'une fois les mêmes chofes, & peut-être que je l'ai déjà fait, ne me fouvenant pas aflez de ce que j'ai une fois envoyé. Il me refte encore à vous dire que dans la fuite de ce difcours, je me fervirai fouvent de cette exprefion : re multitude indefinie, où un nombre indéfini de grandeurs ôu de parties, &c., par où je n'entends autre chofe, finon une multitude ou un nombre plus grand qu'aucun nombre donné. Je vous avertirai encore que j'ufe indifféremment de ces deux termes, donné ou connu, pour fignifier une même chofe : ce n'eft pas que je ne

TOME Y, SE
fiche # RTE,

274 Lettre De M: Derronviti^r fache qu'il y a de la différence, en ce que, felof Euclide & les Anciens, une grandeur eft donnée, quand on peut y en donner une égale, & qu'ainfi l'efpace du cercle eft. donné, quand fon rayon ef donné; aw lieu qu'on ne peut pas dire abfolument qu'il foit connu, parce que le mot de connu enferme quelque autre chofe. Mais dans ce difcours j'appelle un e/pace donné ou connu , celui qui a une raifon donnée à un quarré connu; & de même j'appelle ur folide donné où connu, celui qui a une raifon donnée à un parallélépède connu : & j'appelle raifon donnée ou connue, la raifon de nombre connu à nombre connu, ou de droite connu à droite connue , ou de la circonférence d'un cercle à une portion connue de fon diametre, & je nen reçois aucune autre pour donnée où connue. Il m'arrivera fouvent de marquer un même point parplufieurs lettres , comme , par exemple (Fig. 31.) où le diametre F AZ étant divifé en un nombre Indéfini de parties égales aux points ©, d'où font mences toutes les ordonnées, entre lefquelles je confidere particulièrement celle qui part d'un point donné P : je marque de la lettre 4 tous les points où les ordonnées coupent la demi-circonférence; & je marque encore de la lettre R les points où les ordonnées O À qui font entre P & A4, coupent la circonférence ; & je marque de la lettre Z les points où les ordonnées © 4 qui font entre ? & F, coupent

A M, pt Carcavyu 254 bent la circonférence : & ainfi quand je dis les vrdonnées O 4, je les comprends toutes générale: ment, quand je dis les ordonnées OR, je n'en tends que celles qui font entre P & M; & de même quand je dis OC, j'entends celles qui font entre G & P, parce que le point C eft marque particulièrement pour celles-la, comme on le voit dans la Figure. Je crois aufi avoit oublié de vous dire, en définffant les trilignes rectangles, qu'encore que Ja ligne BC, qui joint les extrémités des deux droites perpendiculaires 4 B, 4 C (& qui eft comme l'hypothénufe du triligne) ne foit pas une ligne courbe, mais une ligne droite, ou ligne mixte, ce feroir toujours un triligne rectiligne ou mixtiliene : pourvu que cette condition s'y rencontre, que les ordonnées, tant à l'axe qu'à la bafe, ne coupent jamais l'hypothénufe du triligne en deux points. Ainf un triangle rectangle fera un triligne rectiligne; & ainfi (Fig. 13 € 14.) le triangle RP ACF B eft un triligne , dont les deux droites font B 4, 4C, & l'hypothénufe eft la courbe 8 FC (Fis. 13:), où lg ligne mixte BFC (Fig. i4) compofée de la courbe C F & de la droite F P parallele à la bafe 4 C : toutes lefquelles fortes de trilignes font confidérées ici généralement! le Difcours devang s'entendre de tous fans exception. S2 TRAITÉE

> 4 #. en & À re 4 cs RL | . ke + | 1 k : X EPP PORTE Re: pré,
 Mb, < s D Fig. 11. 276 TRAITÉ Des TRILIGNES — "0 ——— rt TER
 AT EL DES TRILIGNES RECTANGLES, ETas DE LEURS ;::0'
 NGLETSS LEMME GÉNÉRAL. QU T un triligne rectangle quelconque
 (Fig. 11.) tel qu'il a été défini dans la Lettre précédente ABC, dont les
 ordonnées à l'axe soient DE, 6 des ordonnées à la bafe soient E G , coupant
 la courbe en G; d'où soient remenées des perpendiculaires GR a l'axe,
 prolongées indéfiniment, & lesquelles j'appelle les contre-ordonnées : soient
 aussi prolongées indéfiniment les ordonnées à l'axe. Et soit sur l'axe AB, &
 de l'autre côté du triligne , une figure quelconque BK © À, dans le même
 plan, comprise entre les parallèles extrêmes CA, BK , (cette figure
 S'appellera ladjoïnte du triligne). Que cette figure adjointe soit coupée par
 les ordonnées FD , aux points O, & par les contre-ordonnées GR , aux
 points 1. Je dis que la somme des rectangles FD en DO, compris de chaque
 ordonnée du triligne & de chaque ordonnée de la figure adjointe , est égale
 à la somme des espaces ART, qui sont les portions de l'adjointe, comprises
 depuis chacune des contreordonnées s

ET DE LEURS ONGLETS. 277 ordonnées ; jufqu'à l'extrémité de l'adjointe du côté de À. Car foit entendu le triligne B 4 C être multiplié par la figure B A O K , & former par ce moyen un certain folide : c'est-à-dire, foient de tous les points du triligne 4 B C, élevées des perpendiculaires au plan, qui forment un folide prifmatique infini , ayant le triligne 4 B C pour bafe. Soit aufli entendue la figure B A O K , tournant fur l'axe B À, relevée perpendiculairement au plan du triligne 4 B C; & foit enfin entendue la bafe 4 C s'élever toujours parallèlement à foi-même, le point À parcourant toujours le bord de la figure relevée A O T K B, jufqu'à ce qu'elle retombe au point B: la portion du folide prifmatique infini, retranchée par la furface décrite par la ligne C 4 dans fon mouvement , fera le folide que l'on confidere ici, laquelle fera compofée de quatre furfaces, entre lesquelles le triligne tiendra lieu de bafe. Soient maintenant entendus deux ordres de plans perpendiculaires à celui du triligne , les uns paffant par les ordonnées D F à l'axe (lesquels coupant le folide, donneront pour fections les rectangles F D en D O, compris de chaque ordonnée D F, & de chaque ordonnée D O de la figure adjointe): & les autres plans paffant par les ordonnées G E, lesquels feront paraleles à l'adjointe B A O K, relevée comme il a été dit, & coupant le même folide,

158 TRAITÉE Des TRILIGNES hide, formeront pour fetions des figures égales & toutes femblables aux portions RI A4, comprises depuis chaque contre-ordonnée R TZ, jufqu'à l'extrémité de la figure du côté de 4 (ce qui paroît par les parallélifmies , tant de chacun de ces plans avec l'adjoiné relevée, que de la ligné 4 C avec foi-même dans tout fôn mouvement). Or il eft Vifible que les fommes des féétions, faites par chaÉtui de ces ordres de plans, font égales chacune at folide, & par conféquent entre elles (puifque les portions indéfinies 4 E,Æ Æ, &c. de la bafe, font égales , tant entre elles, qu'aux portions égales & indéfinies 4 D, DD, &c. de l'axe); c'eft-à-dire; que la fôminé de tous les rectangles FD en DO; éft égale à la fomme de toutes les portions RI A: éé qu'il falloit démontrer. L E M M:'E. Hig.15. Soit ABK (Fig. iç.)un triangle reéangle & ifofcélé ; dont B foit l'angle droit ; foit auffi AIK une parabole dont A foir le [ommer, AB La rouchanté au fommet , & AB ou BK /e côté droir ; & foit une droite quelconque R\V,, parallele 2BK ,, coupant À B en R, la parabole en I, & la droite AK en V. Jé dis, 1°. que le triangle ifofcele ARV éft égal à la moitié de AR quarré. Cela eft vifble. Je dis , 2°. que le triline parabolique AR I, mul tplié par AB, éft égal au tiers de AR cube. Car = 21 + e D ns Fz ê a. {im ee a | xà | 4 (4 S« + | 4 un | Fe

ÊT DE LEURS ONGEETSs. 279 Car le triligne AR, par la nature de la parabole , est le tiers du rectangle ZR en RI. Donc en multipliant le tout par 42, le criligne AR] multiplié par 4 B, fera le tiers du folide de 4R en RI en AB; c'est-à-dire, de 2 R cube, puisque R7Z en AB, est égal à ZR quarré. Je dis, 3°. que si AXK est une parabole cubique (c'est-à-dire , que les cubes des ordonnées soient entre eux comme les portions de l'axe , ou, ce qui est la même chose, que AB quarré en RI, soit toujours égal à AR nue le triligne ART, multiplié par AB quarré ; fera égal au quart de AR quarré-quarré. Car, par la nature de cette parabole, le triligne AR I est le quart du rectangle ZR en RT; donc en multipliant le tout par Z B quarré, on démontrera le reste comme en l'article précédent. Et de même pour les autres paraboles quarréQuarrées, quatré-cubiques, &c. RAPPORTS entre les ordonnées À l'axe & les ordonnées à la base d'un tiligne rectangle quelconque. PROPOSITION PREMIERE L4 Somme des ordonnées à la base est la même que la somme des ordonnées à l'axe. Car l'une & l'autre est égale à l'espace du triligne. S 4- ProrostTrion

£ ant tal AH | RER SES = ER nu de LE = = =: Et TR © Je _ = ps
 Re * L # 7 tt Fig: 13. 280 TRAITÉ DES TRILIGNES ProProsiTronN Il. La
 fomme des quarrés des ordonnées à la bafe eff double des retlangles
 compris de chaque ordonnée à l'axe, © de [a diftance de. la bafe; c'est-à-
 dire, (Fig. 13.) que la fomme de tous les EG quarré eft double de la fomme
 de tous les reétangles F D en D A. Car fi le triligne 4 BC'a pour adjointe un
 triangle reétangle & ifofcele ABK, dont les cotés AB, BK foient égaux entre
 eux, & la bafe AK une ligne droite qui foit coupée par les ordonnées FD,
 aux points O, & par les contre-ordonnées GR, aux points Z ; il arrivera,
 comme il a été démontré , -que la fomme de tous les rectangles FD en DO,
 ou FD en D A (puifque par-rout DO fera égale à D 4), fera égale à la fomme
 de tous les triangles 4 RIT; c'est-à-dire, par le Lemme précédent , à la
 moitié de la fomme de tous les AR quarré, ou de tous les EG quarré.
 COROLLAIRE, Donc la fomme des quarrés des ordonnées à la bafe eff
 double de la fomme triangulaire des ordonnées à l'axe, à commencer par la
 Eafe. Car la fomme des rectangles FD en D À ,eft l2 même chofe que la
 fomme triangulaire des ordonnées FD , à commencer du côté de À, comme
 il a été démontré dans la Lettre à M. de Carcavi PROPOSITION

ET DE LEURS ONGLERs. 281 PrRorostrTiIonN Ill. La somme des cubes des ordonnées à la base est triple des solides, compris de chaque ordonnée à l'axe, & du carré de [a distance de la base : La somme de tous les EG cube est triple de la somme de tous les FD en D À carré. Car si la figure adjointe 4BK est composée des deux droites perpendiculaires 4B, BK, & de la parabole 4OK, telle qu'elle a été supposée dans le Lemme précédent ; il arrivera toujours, par le Lemme général , que la somme des rectangles F D hDO, fera égale à la somme des portions ZRT qui feront ici des trilignes paraboliques. Donc en multipliant le tout par B À, la somme des solides FD en DO en AB, ou FD en D À carré, fera (c'est-à-dire) la somme des trilignes ART, multipliés par AB; c'est-à-dire, par le Lemme précédent, au tiers de la somme des ZR cube, ou des EG cube, CoROLLAIRE. Donc la somme des cubes des ordonnées à la base À égale à six fois la somme pyramidale des ordonnées à l'axe, à commencer par la base. Car la somme des EG cube est triple de la somme des FD en D À carré; & la somme des FD en DA carré est double de la somme pyramidale des ordonnées FD , à commencer du côté de

282 TRAITÉ des Trirrenrs de À, comme il a été démontré dans la même Lettre. PrororsTrTron IV. , 3 " / On démontrera de même que la somme des carrés des ordonnées à la base, est quadruple de la somme des ordonnées à l'axe, multipliées chacune par le cube de la distance de la base ; & ainsi toujours. AVERTISSEMENT. Puisque celle qu'on veut des deux droites d'un triangle est prise pour l'axe & l'autre pour la base, tout ce qui a été dit des ordonnées à la base, à l'égard des ordonnées à l'axe, pourra se dire de même des ordonnées à l'axe, à l'égard des ordonnées à la base. PROPOSITION VV. La somme des solides compris du carré de chaque ordonnée à la base, & de sa distance de l'axe, est égale à la somme des solides , compris du carré de chaque ordonnée à l'axe & de sa distance de la base: je dis que la somme des solides de tous les EG carré en E À , est égale à la somme des solides de tous les D'F carré en D A. - Ou ce qui est la même chose: La somme triangulaire des carrés des ordonnées à la base, est égale à la somme triangulaire des carrés des ordonnées à l'axe; en commençant tous jours

ET DE LEURS ONGLETS. 283 jours du côté du centre du
 triligne ; c'est-à-dire, du point où l'axe © la bafe se coupent : Je dis que la
 somme triangulaire de tous les EG carré, est égale à la somme triangulaire
 de tous les DE carré, en commençant toujours du côté de A. Car si on
 entend que le double onglet de la Bafe soit formé sur le criligne C 4B, où le
 centre de gravité soit au point Y, d'où soient menées les perpendiculaires
 FX, Y Z, qui fassent les bras sur l'axe & sur la bafe, & qu'on entende que ce
 double onglet soit coupé par des plans perpendiculaires à triligne, passant
 par les ordonnées EG ; il est visible que les sections que ces plans donneront
 dans le double onglet, feront des triangles rectanglés & isocèles , égaux
 chacun au carré de son ordonnée AE G; comme on l'a vu dans la Lettre (Fig,
 10 & r1.) où il a été montré que le triangle rectangle & isocèle MZ AN, qui
 représente les triangles de ces sections, est égal au carré de ZT, qui
 représente les ordonnées. Maintenant soit entendu le même double onglet,
 coupé par un autre ordre de plans perpendiculaires à celui du triligne, &
 passant par les ordonnées D F, lesquels donneront pour sections dans }:
 double onglet, des rectangles qui auront la bafe chacun évalué à son
 ordonnée DF, & la hauteur égale à deux fois A D : tous lesquels rectanglés
 seront coupés en deux également par les ||| ordonnées ji pi :| |

TES PR PTE ON PP TROT Er, RES SE NEE : NN A. NE : «at À
 . on |! ! D: ps, ti | 184 , TRAÏTÉ Des Tririenes ordonnées D F; & partant les
 centres de gravité de ces rectangles feront aux points Q , où chaque
 ordonnée est coupée par la moitié, & les droites QD feront leurs bras sur B
 4; c'est-à-dire, la distance entre leur centre de gravité & B 4. Or il est visible
 que la somme de ces rectangles compose le solide du double onglet, & que
 la somme des triangles , formés par l'autre ordre de plans EG , compose
 aussi le même solide du double onglet; & qu'ainsi la somme des uns n'est
 que la même chose que la somme des autres; & que chacune des deux n'est
 que la même chose que le solide du double onglet : d'où il paroît qu'aussi la
 somme triangulaire des portions du solide, comprises entre tous les plans
 voisins du premier ordre EG, est la même chose que la somme triangulaire
 des triangles formés par les plans EG; & que ce n'est encore que la même
 chose que la somme triangulaire des portions des rectangles formés par les
 plans FD, comprises toujours entre tous les mêmes plans voisins du premier
 ordre E G. Mais, par la méthode générale des centres de gravité , la somme
 triangulaire des portions de chacun de ces rectangles, comprises entre les
 plans EG, est égale à chaque rectangle multiplié par son bras Q D sur l'axe
 4B ; donc la somme de ces rectangles multipliés chacun par Q D , est égale
 à la somme triangulaire des triangles formés par les

ET DE LEURS ONGLETS. 285 ks plans E G (à commencer toujours du côté de AB). Mais chacun de ces triangles , formés par les pans FG , est égal à chaque FE G quarré; & chatun des rectangles formés par les plans FD , est égal à deux fois chaque 4 D en DF; donc la somme triangulaire de tous les Δ E G quarré, est égale à la simple somme de deux fois tous les 4D en D F multipliés par D Q ; c'est-à-dire , à la simple somme de tous les 4 D en D F quarré; (ou ce qui n'est que la même chose , puisque le premier 4 D et, le second 4 D, 2, &c.), à la somme triangulaire de tous les D F quarré. Ce qu'il falloit démontrer. AVERTISSEMENT. On a été assez averti dans la Lettre, que la quatrième dimension n'est point contre la pure Géométrie ; puisqu'en substituant, tant aux E G quarré, qu'aux rectangles 4 D en D F, des droites qui fient entre elles en même raison que ces quarrés & ces rectangles, on démontrera la même chose par la même manière , sans aucun changement & sans quatrième dimension. VAR Rarrrrrs

FOUR LA: Fig. 16. 286 TrRAÏTÉ DES TRiItIGNES

RarProRTSs entre les finus fur la bafe d'un mligne quelconque, & les por: tions de fa ligne courbe comprifes entre le fommet & les ordonnées à l'axe.

DÉFINITION. F&\ 9 N appelle ici arcs non-feulement les portions des circonférences de cercle, mais encore les por: tions de toutes fortes de lignes courbes, HYPOTHESE GÉNÉRALE. Soit un triligne rectangle quelconque B 4H (Fig. 16.), & foit le même triligne B À P, renverfé de l'autre part de l'axe B 4, & qu'ainft les deux bafes égales H A, A P, ne faflent qu'une mêm me ligne droite ; foir divifé, tant l'axe, que la courbe BP, en un nombre indéfini de parties toutes Cgales entre elles ; c'eft-à-dire, que les parties de l'axe BD, DD, &c. foient égales, tant entre elles, qu'aux parties égales de la courbe BJ, IT, &« Soient menées les ordonnées D O à l'axe, & les finus Z L fur la bafe. Les rapports qui fe trouvent entre la fomme des finus ZZ , & la fomme des arcs ou des portions BO de la courbe (comprifes entre le point B & chacune des ordonnées à l'axe) feront les fuivants. PrRorosITION

KT DE LEURS ONGLETS. 187 Proposition VI. La somme des arcs de la courbe ; compris entre le sommet & chaque ordonnée à l'axe, est égale à la somme des sinus sur la base; c'est-à-dire, que la somme de tous les arcs BO, est égale à la somme des sinus IL. Proposition VII La somme des carrés de ces mêmes arcs BO; $\int_0^a x^2 dx = \frac{1}{3} a^3$ est égale à deux fois la somme triangulaire des mêmes sinus IL, à commencer par A. Proposition VIII. La somme des cubes de ces mêmes arcs BO, est égale à six fois la somme pyramidale des mêmes sinus LL, à commencer par A. Proposition IX. La somme triangulaire des mêmes arcs BO, à commencer par A, est égale à la moitié de la somme des carrés des mêmes sinus IL. PROPOSITION X. La somme pyramidale des mêmes arcs BO, à commencer par A, est égale à la sixième partie des cubes des mêmes sinus AL. Proposition XI. La somme triangulaire des carrés des mêmes arcs BO,

— # Y£ 07 RAT APE { | fa. | NE || } ! de.] es | si | : " 4 Cet te 238

TRAITÉ Des Trirrents BO , à commencer par À, eff égale à la fomme
trianoulaire des quarrés des mêmes finus X L, a commencer par À. Ra enr
el dE fr Je dis maintenant qu'en menant les finus fur l'axe, Javoir , les
perpendiculaires XR, la fomme des recangles compris de chacun des
mêmes arcs & de l'or donnée qui le termine ; [avoir , la fomme de tous les
rectangles BO en OD, eft égale à la fomme des portions du triline ,
comprifes entre chaque finus fur Paxe & La bafe, favoir, à la fomme de
routes les portions IR AP. PROPOSITION XIIL La fomme des quarrés de
chaque arc, multiplié par fon ordonnée , c'est-à-dire, de tous les BO quarré
en O D, eft double de la fomme triangulaire de ces mêmes portions \R AP
du triline ; entre la bafe & chaque finus [ur l'axe, à commencer du côté de
B. ProPosiTioN XIV. La fomme triangulaire des reëlangles de chaque
ordonnée avec fon arc, c'est-à-dire , la fomme triangulaire de tous les BO
enOD , à commencer pa À, ou, ce qui eff la même chofe , la fomme de tous
des folides AD en DO en OB, compris de chaque arc, de fon ordonnée, &
de la diftance entre l'ordonnée

ÉT DE LEURS ONGLETs. 289 l'ordonnée & la bafe, efl égale à la fomme de ces portions 1R A P du triline , multipliées chacune par for bras fur la bafe AP, c'est-a-dire , par la perpendiculaire ; menée [ur A P du centre de gravité de chaque portion XR A P. Proposition XV. La fomme des arcs multipliés chacun par le quarré de fon ordonnée, c'est-a-dire , de tous les BO en O D quarré, est double de la fomme de ces portions XR A P du triline , multipliées chacune par fon bras [ur l'axe AB, c'est-à-dire, par la perpendiculaire fur AB, menée du centre de gravité de chaque portion TR A P. PRÉPARATION À LA DÉMONSTRATION (F.16.) Soit prise dans la droite ZA prolongée, la portion 4C égale à la ligne courbe BZP ou BO H: & ayant divisé 4 € en autant de parties égales qu'il y en a dans la courbe B ZP, aux points £, & qu'ainfi chacune des portions 4ÆE, EE, &c. soit égale à Chacun des arcs BZ, II, &c.; soient des points E , menées des perpendiculaires EG, qui rencontrent les finus ZR fur l'axe, prolongés s'il le faut, aux points G; de sorte que chacune des dedilés EG, soit égale à chacun des finus ZZ fur la bafe, & que par tous les points B, G, G, €, soit entendue pafler une ligne courbe, dont les droites

TOME F. | 38 EG Fig. 16. { | II | | | |
 Il uni | | (Il N | li Henri fi (Il { | | fl | { En | HUE : : À Î 1 4 j : : 1! | (TU +} 1
 12 Î L a Q NU ÿ D'Un | : | IFRUH h | y 11100! 1008 ! NUE p HN DRM E
 ha! dl il Lait ! HAT (| BILHAHN | tnt |] 1 an! t | | : PAU! Lil : + INU) Ĩ +
 EN ñ (\ { RE . HAUM (Ü 1 \ h Lt j AL } (HD | hi! : A \t4 Ê + " hi in 1 4
 1RALREE qu | Il ÿ | M fl 1110 4 | } # 1 0 ; 1 " [qe = EE

290 TRAITÉE bts TRiLrienes | E G feront les ordonnées à la bafe, & les droites GR en feront les contre-ordonnées : la nature de cette ligne fera telle , que quelque point qu'on y prenne G, d'où on tire les droites GE , GRI, parallèles à l'axe & à la bafe, il arrivera toujours que la portion 4E, ou la droite RG, fera égale à l'arc BIT, & la portion restante EG, à l'arc restant ZP : & par ce moyen les ordonnées DO à l'axe étant prolongées, & la coupant en F, chaque cune des droites D F fera égale à chacun des arcs BO, compris entre l'ordonnée même D F & le sommet. Cela posé, la démonstration des propositions 6738593103 11,12, 13}; 14, 15. ÉQUIVIENS n'est d'être énoncées , sera facile.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION VI ... Je dis que la somme de tous les arcs BO est égale à la somme des sinus IL, | Car tous les arcs BO sont les mêmes que toutes les ordonnées D F à l'axe, dont la somme est égale à celle des ordonnées EG, par la première proposition, c'est-à-dire, à la somme des sinus IL: DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION VII Je dis que la somme des arcs BO carrée est double de la somme triangulaire des sinus ZZ, à commencer par 4, tout que la somme des DEF quarté

C'EST DE LEURS ONGLETS, 207 quarré est double de la somme
 triangulaire. des ordonnées EG, à commencer par A : ce qui est démontré
 par le Corollaire de la seconde proposition. DÉMONSTRATION DE LA
 PROPOSITION III. Je dis que. la somme des arcs BO cube est égale à six
 fois La somme pyramidale des mêmes sinus ZL ; à commencer par /, ou que
 la somme de tous les DF cube est égale à six fois la somme pyramidale de
 toutes les EG, à commencer par 4°: ce qui a été démontré par la troi-
 sième. j DÉMONSTRATION DE. LA PROPOSITION EX: Je dis que la
 somme arithmétique des arcs BO, à commencer par 4, est égale à la moitié de la
 somme des quarrés des sinus ZL, ou que la somme triangulaire des
 ordonnées 2 F, à commencer par 4, est égale à: la moitié de la somme des
 quarrés, des ordonnées E G: ce qui est démontré par le, même Corollaire de
 la seconde. DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION A. Je dis que la
 somme arithmétique des arcs BO, à commencer. par A, est égale à, la, sixième
 partie de la somme des: cubes des sinus ZL, ou que la somme pyramidale des
 ordonnées DF, à commencer par A, est égale à la sixième partie de la
 somme des cubes des ordonnées EG : ce qui a été démontré par le
 Corollaire de la troisième. T 2 DÉMONSTRATION I | 1 t | 1 } L' | É [1 , |
 L Hin | 2 Î | Î : \ | ' NA | ! L \ (LE W «t M: al } pl Ni , 4 Î Î : : : | : 4 Li | V2 L Î
 4 Lt { 1 Î gs? Î À | . u _ j Pa ne “ ue VE xs : , [4 4 e. } [4 Le « nu” # d É !
 NE: L 1U | 4 { 1. a l'4 4 "es 4: Kg » WI D 114 j Ad a tiR l (! v-# Hi | , ll : ll
 in t4 pat r! | : | À | 1B4 » L 2 { ant 1 { i ∈ J Ũ | 4 ‘ nie | TAN ' | | M 1h : d 1!
 4 41! 1. À Æ Er \ fl 12" 1 vw 3 } LV au Li b F Le P' L « DM D À | qi fi hi : |
 | 1 Î 4 { AU LE U14 t (LA LOI 11174 ù ME PU : 1 1 À L2 « L * THEN US ,
 ea. w # 5 dà Lu a AR à SE RE

>“ LA | : Il 1 1 { | Pen | 25ù 0e | 2 | 4) pd : - RTE 292 TRAITÉ
 DES TRILIGNES DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION XL Je dis
 que la somme triangulaire des arcs BO quarré , est égale à la somme
 triangulaire des sinus 1 Z quarré, à commencer toujours par 4, ou que la
 somme triangulaire des ordonnées D F quarré est égale à la somme
 triangulaire des ordonnées E G quarré , à commencer toujours par A :ce qui
 a été démontré par la cinquieme. DÉMONSTRATION DE LA
 PROPOSITION XII Je dis que la somme des rectangles BO en OD, ou FD
 en DO, est égale à la somme des portions ZR À P. C'est la même chose que
 ce qui a été démontré dans le Lemme général. Car en considérant le criligne
 B 4 P comme étant la figure adjointe dit criligne B 4 C, il s'enfuit, par ce
 qui a été démontré dans ce Lemme , que la somme des rectangles FD en
 DO (compris de chaque ordonnée DF du triligne B 4C, & de chaque
 ordonnée D O du triligne B 4 P), est égale à la somme des portions AR I P
 de la figure adjointe, comprises entre chaque contre-ordonnée RAT & la
 droite AP, & que les unes & les autres composent un même solide,
 DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION XII. Je dis que la somme de
 tous les BO quarté en

ET DE LEURS ONGLETS. 29% en OD , ou FD quarré en DO, est double de la somme triangulaire des mêmes portions ARIP, à commencer du côté de B : ou que cette somme triangulaire des portions 4RIP est égale à k somme des folides QD en FD en DO (qui font la moitié des FD quarré en DO , chaque FD étant divisée par la moitié en Q). Car soit entendue la figure adjointe B 4 P relevée perpendiculairement au plan du triligne B 4C, & former le folide dont il a été parlé dans le Lemme général, qui soit coupé par deux ordres de plans perpendiculaires au triligne, les uns passant par les droites EG & les autres par les droites DF ; les uns donnant pour sections des figures pareilles aux espaces 4RIP , & les autres donnant pour sections les rectangles FD en DO , comme cela a été dit dans le Lemme général : & ainsi ce folide fera composé de la somme des espaces ARITP, & le même folide est aussi composé de k somme des rectangles FD en DO : d'où il s'enfuit que la somme des portions ZRIP, élevées perpendiculairement au plan AEC sur les droites EG ; & la somme des rectangles FDO, élevés aussi perpendiculairement au même plan ABC, ne font qu'une même chose, tant entre elles, qu'avec le folide : & par conséquent que la somme triangulaire des portions du folide, comprises entre tous les plans EG, à commencer du 3 CÔTÉ NN KE ? Qi Ah, où - M re ." At L# d

$\frac{1}{2} \text{ re SP} = \frac{1}{2} \text{ AE FE a} \dots \leq \dots$
 $\dots ; 2 \text{ ES EE} \dots = 3 \text{ EE z} \dots \text{ es ERP NES CRT}$
 Er ndeiee Ha med 2 ne — er Z RS nn » Co dé , rire —æ 194 TRAITÉ DES
 TÎRILIGNES côté de 4B, est la même chose que la somme triangulaire des
 espaces AR IP; & que c'est aussi la même chose que la somme triangulaire
 des portions de chaque rectangle FD en DO , comprises entre tous les
 mêmes plans EG. Mais; par la méthode générale des centres de gravité , la
 somme triangulaire des portions de chacun de ces rectangles, comprises
 entre les plans EG, à commencer du côté de 4 2, est égale chaque rectangle
 multiplié par son bras QD sur A B ; donc aussi la somme des rectangles
 FDO, multipliés chacun par son bras QD, est éme à la somme triangulaire
 des portions Z R TP, à commencer par B. Ce qu'il falloit démontrer.
 DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION XIV. Je dis que la somme
 triangulaire de tous les BO en OD , ou FD en DO, à commencer par A', est
 égale à la somme de ces espaces ZR AP, multipliés chacun par son bras sur
 la base 4 P. Car en relevant le triline adjoint B 4 P, qui formera le solide
 coupé par les deux ordres de plans, comme en l'article précédent, desquels
 les uns! forment pour étions' les espaces pareils à ARIP, & les autres les
 rectangles FD'en DO, la somme de chacun, c'est--dire, tant des espaces
 ARIP, que des rectangles FD en DO, ne font qu'une même chose que le
 solide. D'où il est évident

ET DE LEURS ONGLETS. 29\$ dent que la somme triangulaire des portions du solide , comprises entre tous les plans FD , est la même chose que la somme triangulaire de tous les rectangles FD en DO; & que c'est auf la même chose que la somme triangulaire des portions des espaces AR IP, comprises entre tous les mêmes plans FD. Mais la somme triangulaire de chaque espace ARTP, compris entre les plans FD, à commencer du côté de 4 P, est égale (par la méthode générale des centres de gravité) à chaque espace ARIP , multiplié par son bras sur 4 P : donc aussi la somme de ces espaces AR IP, multipliés chacun par son bras sur 4 P, est égale à la somme triangulaire des rectangles $\frac{1}{2}$ DO, à commencer par 4. Ce qu'il falloit démontrer. DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION X}. Je dis que la somme de tous les DO carré en OB, ou de tous les FD en DO carré, est double de [la somme des portions ARIP, multipliées chacune par son bras sur l'axe B 4; ou que la somme des solides FD en DO en DS, qui est la moitié des FD en DO carré (chaque DO tant divisé par la moitié en S) est égale à la somme des espaces ARTP, multipliés chacun par son bras sur l'axe 4 2. Car soit relevé 'de même le triangle adjoint | T 4 B AP,

RER 2 LA Te = 'Ds — > z re 27 s = z = X = I Es a =: Es
 LES = me = ; LE = e & = . | | : ! W EU: L “ : : 52 CU ne Re AUTRE æ l l
 ts | LL caen (EL "en Î : M Lo : DS ar 2% Fr Pa" L — { 296 TRAITÉ Des
 TRILIGNES B AP, qui formera un folide coupé par les deux ordres de plans
 fur EG & D F, qui donnent pour fections dans le folide , les reétangles FDO
 & les efpaces ARIP, qui font tels que la fomme des rectangles FDO & la
 fomme des efpaces ARIP, ne font qu'une même chofe, tant entre elles,
 qu'avec le folide. . Soit maintenant entendu un troifieme ordre de plans,
 paralleles à celui du triligne & élevés audeffus du plan du triligne, & tous
 en diftances égales l'un de l'autre; en forte qu'ils divifent la droite 4 P
 (relevée perpendiculairement au plan du triligne) en un nombre indéfni de
 parties épales : & qu'ainfi ils coupent le folide en un nombre indéfini de
 parties, comprifes chacune entre deux quelconques plans voifins. Donc
 puifque ces trois chofes ne font qu'une même; favoir , la fomme des
 reétangles FDO, relévés fur les droites FD , la fommé des efpaces AR IP,
 relevés fur les droites E G, & le folide: il s'enfuit que la fomme triangulaire
 de routes les portions des efpaces 4 R IP, comprifes entre tous les plans
 voifins de ce troifieme ordre, eft la même que la fomme triangulaire de
 toutes les portions des rectangles F D en DO, comprifes entre les mêmes
 plans voifins de ce même troifieme ordre, à commencer toujours du côté
 d'en-bas, c'est-à-dire, du côté du triligne 4 B C, qui fert de bafe au folide |
 Mais:

ET: DE LEURS ONGLETS. 297 Mais la somme triangulaire des portions de chaque espace $4R\ IP$, comprises entre les plans voisins du troisième ordre, est égale à chaque espace $AR\ IP$, multiplié par son bras sur l'axe $4\ B$: & de même la somme triangulaire des portions de chaque rectangle $FD\ O$, comprises entre les mêmes plans du troisième ordre, est égale à chaque rectangle FDO , multiplié par son bras sur l'axe, ou à chaque rectangle $F\ D\ O$, multiplié par $S\ D$ (car SD est le bras sur l'axe), c'est-à-dire, à chaque solide FD en DO en DS . Donc la somme de tous les FD en DO en DS , est égale à la somme des espaces $ARIP$, multipliés chacun par son bras sur l'axe AB . Ce qu'il falloit démontrer. | MÉTHODE générale pour trouver la dimension & Les centres de gravité d'un triline quelconque & de [es doubles onglets, par la seule connoissance des ordonnées à l'axe ou à la base. Pour trouver la dimension, tant du triline, que de ses doubles onglets, & leurs centres de gravité; c'est-à-dire, la distance entre leurs centres de gravité & la base du triline, & la distance entre leurs mêmes centres de gravité & l'axe du triline, eu,

298 TRAITÉ Des TRILIGNES ou, ce qui est la même chose, leurs bras sur la base & sur l'axe : je me suis servi d'une méthode qui réduit tous ces problèmes à la connoissance des seules ordonnées; c'est-à-dire , à la connoissance de leurs formes simples, triangulaires & pyramidales où de leurs puissances, comme on va le voir ici. Je dis donc que si on connoît dans un triligne toutes les choses suivantes : 1°. La somme des ordonnées à l'axe. 2°. La somme des carrés de ces ordonnées. 3°. La somme des cubes de ces ordonnées. 4°. La somme triangulaire de ces ordonnées. 5°. La somme triangulaire des carrés de ces ordonnées. 6°. La somme pyramidale de ces ordonnées. On connoîtra aussi la dimension & les centres de gravité, tant du triligne , que de [es doubles onglets ; c'est-à-dire, qu'on connoîtra aussi les choses suivantes : 1°. La dimension de l'axe du triligne. 2°. Le bras du triligne sur l'axe. 3°. Le bras du triligne sur la base. 4°. La dimension du double onglet de la base: 5°. Le bras de cet onglet sur la base. 6°. Le bras de cet onglet sur l'axe. 7°. La dimension du double onglet de l'axe. 8°. Le bras de cet onglet sur la base. 9°. Le bras de cet onglet sur l'axe. Car,

ÉT DE LEURS (ONGLETS. 299 Car, pour le premier point, la somme des ordonnées étant connue, l'espace du triline fera aussi connu, puisqu'il lui est égal. Pour le deuxième: soit le triline B 4 C (Fig. 13.) dont 4B soit l'axe & AC la base; D F les ordonnées à l'axe, dont on connoisse la simple somme, & la somme des carrés & les autres choses qui ont été supposées: soient E G, les ordonnées à la base, & soit Y le centre de gravité du triline; & soient les deux bras YD, YE, sur l'axe & sur la base: je dis que le bras YD sur l'axe fera connu. Car puisque la somme des D F carrés est connue par l'hypothèse, la somme triangulaire des ordonnées EG, à commencer par 4, le fera aussi (puisque'elle en est la moitié, par le Corollaire de la seconde proposition}). Et par conséquent le bras VD fera aussi connu, puisqu'il a été montré par la Lettre, que cette somme triangulaire des ordonnées $\overline{EG}$, laquelle est connue, est égale au solide fait du criligne 4 BC, multiplié par son bras YD sur 4P, lequel solide fera par conséquent connu: mais l'espace du criligne 4 B C est connu par le premier article. Donc aussi YD fera connu. Pour le troisième; savoir, que le bras YE du triline sur la base fera connu: cela est visible, Puisque la somme triangulaire des ordonnées F D qui Fig. 13e N { even Pi « PR 7 She

px 7 nt mer : É £ Ci CE e En Et ||| L 4| LU, ||| j 1 | \ Din | UT Et
 : Qi NE DA 4 0, M Al te 14 [24 it) À Ouf N'a IE tr | He y 44 4: IME l f {
 AE: l 18 ar } (1 4 {1 L $\ddot{y}$ = —: 2. du RSS 300 TRAITÉ Des Tririenss (qui
 est connue par l'hypothese) est égale au foHide fait du triline, multiplié par
 son bras YE, lequel solide fera par conséquent connu ; mais l'espace du
 triline est connu , par le premier article. Donc aussi le bras Y E fera connu.
 Pour le quatrième : je dis que le contenu du double onglet de la base fera
 connu. | Car le contenu de ce double onglet est composé de deux fois la
 somme des rectangles FD en DA, ou de tous les EG quatre, comme cela a
 été assez montré dans la cinquième proposition, où l'on a fait voir que si on
 entend que le double onglet soit coupé par un ordre de plans
 perpendiculaires à celui du triline , passant par les ordonnées FD, &
 s'étendant infiniment de part & d'autre : leurs sections dans le double onglet
 feront des rectangles, dont chacun fera double de chaque rectangle 4 D en
 DF: & qu'en coupant ce même double onglet par un autre ordre de plans
 perpendiculaires, passant par toutes les droites EG, leurs sections dans le
 double onglet feront des triangles rectangles, dont chacun La égal au carré
 de chaque ordonnée E G: Donc si la somme des £ G carré est connue, le
 contenu du double onglet le fera aussi. Or la somme , tant de ces carrés E
 G , que de deux fois 2 forme de ces rectangles FD en D À est connue »

ET DE LEURS ONGLETS. 301 nue, puifque (par le Corollaire de la feconde) c'eft la même chofe que deux fois la fomme trianeulaire des ordonnées D F, à commencer par À {qui eft donnée par l'hypothefe). D'où il s'enfuit que le contenu du double onglet eft aufli connu. Pour le cinquieme : foit maintenant F, le centre de gravité du double onglet de la bafe : je dis que fon bras $Y^\circ \text{Æ}$ fur la bafe fera connu; & que le double onglet multiplié par le bras $Y \text{Æ}$, eft égal à quatre fois la fomme pyramidale des ordonnées DF, à commencer par À, ou, ce qui eft la même chofe, comme on l'a vu dans la Lettre, à deux fois la fomme de tous les 4 D quarré en DF; ce qui fe démontrera ainfi. La fomme de tous les 4 D quarré en D F, ft la même chofe que la fomme de tous les rectangles 4 D en DF, multipliés chacun par fon côté AD; c'eft-à-dire (puifque le premier 4 D eft, le fecond , 2, &c.) , la fomme triangulaire de tous ks 4D en DF, à commencer par 4. Donc auf le double de la fomme des 4D quarré en DF, fera la même chofe que la fomme triangulaire de deux fois tous les 4 D en DPF, c'eft-à-dire, la fomme triangulaire des rectangles ou fections formées dans le double onglet, par les plans perpendiculaires paflant par D F ; mais la fomme triangulaire $\frac{1}{2} \text{TE} \frac{1}{2} \text{un} > 2 \frac{1}{2} \text{CEE A} \text{ ——— A UE Se em tm ——— NI Lien}$ fe UE 7 LAN SL 6,

302 TRAITÉ DES TRILIGNES gulaire de ces feétions du, double onglet, à commencer du côté de 4 C est égale (par la méthode générale des centres de gravité) au double onglet multiplié par son bras Y E sur 4C; donc aussi le double de la somme des 4 D carré en LF, et égal au double onglet multiplié par Y E. Mais deux fois la somme des 4 D carré en D F , ou quatre fois la somme pyramidale des ordonnées DF, est connue par l'hypothese. Donc ce produit du double onglet, multiplié par VE est aussi connu; mais on connoît le contenu du double onglet : donc on connoîtra aussi le bras PE. Pour le fixieme : je dis que le. bras Y D, sur l'axe, fera aussi connu; & que le double onglet, multiplié par le bras Y D, est égal à la somme triangulaire des E G carré, à commencer par A; ou, ce qui est la même chose, à la somme triangulaire des F D carré , à commencer toujours par 4 : ce qui. fera montré ainsi. Si on entend que le double onglet soit coupé par des plans perpendiculaires à celui du triligne, passant par les ordonnées £ G, ils y formeront pour feétions des triangles rectangles. & isocèles, égaux chacun à EG carré"comme il a été dit. Or par la méthode générale des centres de gravité, la somme triangulaire de ces feétions .ou. des carrés £ Gs à

ERODELLEURE LONGER DS: 303: à commencer par À, est
 égale au double onglet multiplié par son bras Y D : mais la somme
 triangulaire des £ G'quarré est connue, puisque la somme triangulaire des 2)
 F quarré est connue par l'hypothese : donc le produit du double onglet,
 multiplié par FD, est connu : mais le contenu du double onglet est connu ;
 donc Y D est connu. Pour le septieme : je dis que le contenu du double
 onglet de l'axe sera connu. Car, puisque la somme des D F quarté est
 connue par l'hypothese , le double onglet de l'axe l'est 218. sg Pour le
 huitieme & neuvieme : soit maintenant ? le centre de gravité du double
 onglet de l'axe: je dis que ces deux bras Y E , Y D sur la base & sur l'axe
 seront connus. | Car, puisque tous les 4 £ quarré en EG, sont connus , étant
 évaux par la troisieme au tiers de tous les D F cube, dont la somme est
 connue par: l'hypothese; on en conclura que le bras Y° D sera connu : & de
 même , puisque la somme triangulaire des D F quarté est connue par
 l'hypothese, on en conclura que le bras Y £ sera aussi connu, de: l même
 forte qu'on l'a conclu des deux bras du double onglet de la base dans les
 articles j &&; Par le moyen des données semblables à l'égard de ce double
 onglet de la base. COROLLAIRES. | OR 0 | ! 1er IL Î | 1 | 4 L 4 | J h | : 11 l '
 k | | n 14 THE Î nl 11 { i } | \ t : |

ge “VESET (1 4 | (he | | | nr | | 11} ph «1 N Q | 24 1 4! ne fl tal 2,
Ni 4 87 1». nn. Nil fr | L : : 4 | L S 1 : CR ù 7 { a). | un. | Ni “sil 304
FRAITE DES TRILIGNES CoROLLAIRES. r. L’espace du triligne est égal
à la somme des ordonnées à la base, ou à la somme des ordonnées à l’axe.
2. Le triligne multiplié par son bras [sur l’axe, est égal à la somme
triangulaire des ordonnées à la base, en commençant par l’axe; ou à la
moitié de la somme des carrés des ordonnées à l’axe. Cela est démontré
dans le second article. 3. Le triligne multiplié par son bras sur la base, est
égal à la somme triangulaire: des ordonnées à l’axe, à commencer par la
base: ou à la moitié $2 P * SR$: des carrés des ordonnées à la base. C’est la
même chose que le précédent. 4. Le double onglet de la base: est égal à la
Somme des carrés des ordonnées à la base; ou au double de la somme des
ordonnées à l’axe, multipliées chacune par sa distance de la base; ou à deux
fois la Somme triangulaire des ordonnées à l’axe, à commencer par la base.
Cela est montré dans le quatrième article. s- Le double onglet de la base,
multiplié par son bras sur la base, est égal à deux fois la somme des
ordonnées

ÊT DE LEURS ONctETé, 30\$ ordonnées à l'axe, multipliées
 chacune par le carré de la distance de la base ; ou à quatre fois la forme
 pyramidale des ordonnées à l'axe , à commencer par la base; ou au double
 de la somme triangulaire des rectangles compris de chaque ordonnée & de la
 distance de l'axe, à commencer du côté de la base; ou aux deux tiers des
 cubes des ordonnées à la base, Cela s'enfuit du cinquième article. 6. Le
 double onglet de la base, multiplié par son bras sur l'axe ; est égal à la
 somme triangulaire des carrés des ordonnées à la base, à commencer du
 côté de l'axe ; ou à la somme triangulaire des carrés des ordonnées)/ à
 l'axe, à commencer du côté de la base ; ou à la simple somme des carrés
 des ordonnées à la bases multipliés chacun par [la distance de l'axe ; ou à la
 simple [omme des carrés des ordonnées à l'axe, multipliés chacun par [la
 distance de la base. Cela s'enfuit du sixième article. Il faut entendre la même
 chose du double onglet de l'axe, sans autre différence que de mettre axe au
 lieu de base, & base au lieu d'axe, On peut tirer de-là plusieurs autres
 Corollaires, comme , par exemple, les converfes des choses démontrées dans
 tous ces articles; favoir, que si on connoît la dimension & le centre de
 gravité, ToME PF, V tant RU PES AOVE LL OMR LA TES NUNR E LAS
 ne SCIAN LIVRES > pr te oA 3 pm — =: 1 “4 | Na

306 TRAITÉ Des TRILIGNES tant du triline que de ses onglets
: on connoitra auf, 1°. la somme des ordonnées à l'axe; 2°. la somme des
quarrés de ces ordonnées; 3°. la somme des cubes de ces ordonnées; 4°. la
somme triangulaire de ces ordonnées; 5°. la somme triangulaire des quarrés
des ordonnées; 6°. la somme pyramidale des ordonnées. Et on connoitra la
même chose à l'écart des ordonnées à la bafe, On peut encore en tirer
d'autres conféquences, mais un peu plus recherchées, & entre autres celle
> = : RE ——— LS = it 94 RER A = tai, a = 2 et À sn ed dem 'A AT re = . .
AN ? le-cl, qui peut être d'un grand usage. ne Res om Eds à
CONSÉQUENCE. EE. ARRET ORLE EE er ae PE Si un triline est
tourné, premièrement, sur la bafe, & ensuite sur l'axe, & qu'il forme ainsi
deux folides, l'un autour de la bafe & l'autre autour de l'axe : Je dis que la
différence entre l'axe & le centre de gravité du folide autour de la bafe est à la
différence entre la bafe & le centre de gravité du folide autour de l'axe,
comme le bras du triline sur l'axe au bras du triline sur la bafe. D'où il
paroît que si on connoît le centre de gravité du triline & d'un de ses folides,
celui de l'autre fera aussi connu. Fig. 13. . Soit un triline rectangle B C
(Fig.13.) dont le centre de gravité soit F, & les bras sur l'axe & sur la bafe
soient Y X, Y Z': soit aussi A le centre de gravité du folide autour de l'axe,
& soit M le centre de gravité du folide autour de la bafe.

ET DE LEURS ONGLETS, 507 centre de gravité du folide
 autour de la bafe : je dis que 4 M est à AN, comme 4X à 4Z, ou comme YZ
 à YXY: & qu'ainh fi 4X, 4Z & AN sont connus, 4 M le fera aussi. Car en
 coupant le folide sur l'axe par des plans perpendiculaires passant par les
 ordonnées D Fils donneront pour sections des cercles, dont les ordonnées D
 F feront les rayons; & en coupant ensuite le folide autour de la bafe par des
 plans perpendiculaires passant par les ordonnées ÆG, qui donneront aussi
 pour sections des cercles, dont les ordonnées ÆG feront les rayons, il arrivera
 que la somme triangulaire des cercles DF, à commencer par Æ#, fera égale
 au folide autour de l'axe; multiplié par son bras 4 M (par la méthode
 générale des centres de gravité); & par la même méthode, la somme
 triangulaire des cercles EG, à commencer par 4, fera aussi égale au folide
 autour de la bafe, multiplié par son bras 4 N': mais la somme triangulaire
 des cercles DF est égale à la somme triangulaire des cercles EG, à
 commencer toujours par 4, puisque les sommes triangulaires de leurs
 carrés sont égales entre elles : donc le folide autour de l'axe, multiplié par
 son bras 4 M, est égal au folide autour de la bafe, multiplié par son bras 4 N;
 donc 4M est à AN, comme le folide autour de la bafe au folide autour de
 l'axe, c'est-à-dire, comme le bras Y Z au bras Y X. NPA Car si De L la es je
 ex Ed CU "0 ne 2 % TC LES LR ER ET Pen 7 RP

L'ART PSE ts «si k pa LL 308 TRAITÉ DES TRILICNES Car on fait aflez que le folide autour de la bafe eft au folide autour de l'axe, comme le bras FX du triligne fur l'axe au bras $\ddot{Y}$ Z du triligne fur la bafe; ce qui eft encore une conféquence qui fe tire des propofitions précédentes, & qui fe dcmontrera ain/i. Le folide autour de la bafe eft au folide autour de l'axe, comme la fomme des cercles EG à la fomme des cercles D F; ou comme la fomme des E G quarré à la fomme des D F quarré, c'eft-à-dire (par le Corollaire de la deuxieme}; comme la fomme triangulaire des ordonnées D F à la fomme triangulaire des ordonnées E G, à commencer toujours par À, c'eft-a-dire (par la méthode oénérale des centres de gravité), comme le triligne multiplié par fon bras 4 X ou Z, au triligne multiplié par fon bras 4Z ou FX, c'eft-à-dire, comme Y Z à Y X. Ce qu'il falloit démontrer.

MérHopEe pour trouver la dimenfion & le centre de gravité de la furface courbe des doubles onglets, par la feule connoiffance des finus fur l'axe. S\$

I on connoît dans un triligne: 10. La grandeur de [a ligne courbe. 2°, La fomme des finus fur laxe. 3°, La

ET DE LEURS ONGLETS. 309 3°. La somme des carrés de ces
finus [ur l'axe, 4°. La somme des rectangles de ces mêmes finus sur l'axe
multipliés chacun par leur distance de la base: je dis qu'on connoitra aussi la
dimension de la surface courbe du double onglet de l'axe & le centre de
gravité de cette [urface courbe, c'est-à-dire, le bras de cette surface [ur la
base, & le bras de cette même surface sur l'axe. Car (Fig. 10.) si la courbe 4
Y C est divisée en un nombre indéfini de parties égales aux points Y, d'où
soient menés les finus sur l'axe, & que, comme il a été dit vers la fin de la
Lettre, des plans soient entendus élevés perpendiculairement au plan du
triligne, passant par chacun des finus Y Z: les sections qu'ils donneront dans
la surface du double onglet feront des droites perpendiculaires au plan du
triligne, qui feront doubles chacune de chaque finus Y Z, comme il a été
montré dans la Lettre. Or il est visible que la somme de ces
perpendiculaires formées dans cette double surface, composent la surface
courbe, étant perpendiculaires à la courbe 4 Y C. Donc si on connoît la
somme de ces perpendiculaires, c'est-à-dire, le double de la somme des
finus Z Y, & qu'on connoisse aussi la grandeur de la ligne courbe, on
connoitra aussi la surface courbe. Ce qu'il falloit premièrement démontrer. :
Je dis maintenant que si on connoît la somme V 3 des Fig. 10.

310 TRAITÉE DES TRILIGNES des rectangles F Z en ZY ,
 compris de chaque fénus € de fa diftance de la bafe, on connoitra auffi le
 bras TFou HK, de point H étant pris pour le centre de gravité de la furface
 courbe du double onglet : & que la fomme des finus Z Y etant multipliée
 par le bras TF, eff égale a la fomme de tous les rectangles YZ en ZE. | Car il
 eft vifible que le mêmesbras T'F, qui mefure la diftance d'entre le centre de
 gravité H de la furface courbe du double onglet, & la bafeF 4, mefurera
 auffi la diftance qui eft entre le centre de gravité commun de tous les finus
 Z Y, placés comme ils fe trouvent, & la même bafe 4F :d'autant que chaque
 finus Z F eft éloigné de la bafe AF de la même diftance que chacune des
 perpendiculires au plan du triligne, paffant par les points F, & que chaque
 finas eft à chaque perpendiculaire toujours: en même raifon, favoir, comme
 1 à 2: Or ilifera montré incontinent que la fomme des rectangles Z 7 en Z F,
 compris de chaque Y Z & de fa diftance du point F, eft égale à la fomme des
 mêmes Ÿ Z, multipliée par la diftance d'entre la bafe & le centre de gravité
 commun de toutes les Z Y placées comme elles fe trouvent; mais fomme
 des re&tangles Y Zen Z F eft donnée par Fhypotheſe. Donc la fomme des
 finüs, mulriplice par la diftance entre leur centre de gravité commun & Ja
 bafe, fera auſſi donnée ; mais! la fomme des

ET DE LEURS ONGLETS. 311 des finus est aussi donnée par l'hypothèse. Donc la distance entre leur centre de gravité commun & la base sera aussi donnée : & par conséquent sur la distance entre la base & le centre de gravité de la surface courbe du double onglet, puisqu'elle est la même. Maintenant on démontrera le Lemme qui a été supposé, en cette sorte : Soit (Fig. 9.) FC une balance horizontale divisée comme on voudra en parties égales ou inégales, aux points Z, où pendent pour poids des droites perpendiculaires ZY de telle longueur qu'on voudra. Soit enfin le centre de gravité commun de toutes au point T°, auquel la balance soit suspendue en équilibre : je dis que la somme des rectangles YZ en ZF, compris de chaque perpendiculaire YZ & de la distance de l'extrémité de la balance F, est égale à la somme des rectangles, compris du bras ZF & de chacune des perpendiculaires ZY. Car en prenant la droite XF petite que le rectangle compris de cette droite X & de la plus grande des droites ZY, soit moindre qu'aucun espace donné, & divisant cette droite # en parties égales qui soient en plus grand nombre que la multitude des droites ZY; il est visible que la somme des rectangles, compris de chaque ZY & de chacune des petites portions de #, sera moindre qu'aucun Fig. 9. Ne : LR (f Le! Dal | 0 (NB En + 20 a | | LP Le 14 ul: hi! LA { { pt 1] MEN À | | ! Dur »5 : l \$! 1t ll {fl Lan HE LL'RSA 14 Y LE MR ti] } ; nf t # à AH AiUr 4 4 Ur viLé nt Mi " (lu are 'h AE | Gin ! L 4! sit u!| 4 OM, F4] 1 47 qu (nl! EC RET MAT ! i A! L L | 11 Î + 4 Le nl Lu HW ' , LA] je BAFA LOT EL l PA à NL d LH © nt |} ce ME 1 ERP LRU | EUR 11 E'i don d Hd " nn MAÉ EDET EEn ns» ET MER AE a RE ELU SC É Sunaermenerrur TT SE PES,

312 TRAITE DES TRILIGNES qu'aucun espace donné, puisque par la construction, le rectangle compris de la plus grande des Z & de l'entière X, est moindre qu'aucun espace donné. Maintenant soit divisée la balance entière FC en parties égales, chacune à chacune des petites parties de X: donc les points Z se rencontreront aux points de ces divisions, ou la différence n'altérera point l'égalité qui est proposée, puisque la somme de toutes les Z Y, multipliées chacune par une de ces petites parties de la balance, fera moindre qu'aucun espace donné. Et par conséquent FC fera une balance divisée en parties égales, & aux points de division pendent des poids; savoir, aux uns les perpendiculaires Z Y, & aux autres pendent pour poids des zéro : & le centre de gravité commun de tous ces poids est au point 7. Donc, par ce qui a été démontré dans la Lettre, la somme de tous les poids multipliés par le bras FT (c'est-à-dire, la somme des rectangles, compris des FT & de chacune des Z Y), est égale à la somme triangulaire de tous les poids, à commencer par F. Or en prenant cette somme triangulaire, il est visible qu'on prendra la première Z F ou 4 autant de fois qu'il y a de parties dans la distance FV, & qu'on prendra de même la seconde Z Y ou A ÿ autant de fois qu'il y a de parties dans la distance FH, & ainsi toujours. Donc la somme | triangulaire

ET DE LEURS ONGLETS. 313 triangulaire de ces poids, à commencer par F, neft autre chofe que la fomme des produits des poids, multipliés chacun par fon propre bras fur FT, c'eft-à-dire, la fomme des rettangles FZ'en Z Ÿ, qui feront partant égaux à la fomme des rectangles, compris de chaque Z Y & du bras commun 7 F, AVERTISSEMENT, De-là paroît la démonftration de cette méthode aflez connue, que la fomme des poids, multipliée par le bras commun de tous enfemble, eft égale à la fomme des produits de chdque poids, multiplié par fon propre bras, à l'égard d'un même axe de ba> 5 lancement. Je ne m'arrête pas à l'expliquer davantage, parce que je ne m'en fers point : ce n'eft pas que je n'eufle pu démontrer par cette méthode les propofitions V, XII, XIV, XV. Mais ma méthode m'ayant fuffi Pa-tout, j'ai mieux aimé ne point en employer d'autre, Je dis maintenant que / o7 connoft (Fig. 10.) la fomme des quarrés ZY, on connottra aufft le bras AT oz KF, c'eff-à-dire, la diffance entre Paxe CE Ê le centre de gravité H de la furface courbe du double onglet : & que la fomme des finus Z Y étant multipliée par le bras KF, fera égale à la fomme des quarrés des mêmes finus ZY. Car Fr. 10. he dr A FETES

314 TrRAÏITÉ Des Tririenes Car en menant de tous les points Y les perpendiculaires YQ sur la base 4F, & en les prolongeant de l'autre côté de la base jusqu'en B, en sorte que chaque Q B soit égale à chaque Z F: il est visible que le même bras HT ou KF, qui mesure la distance d'entre l'axe & le centre de gravité H de la surface courbe du double onglet, mesurera aussi la distance qui est entre le même axe CF & le centre de gravité de toutes les perpendiculaires © B, placées comme elles se trouvent, par la même raison qu'en l'article précédent : savoir, que chaque Q B est toujours en même distance de l'axe CF, que la perpendiculaire correspondante élevée dans la surface courbe sur le point Y, & qu'elles sont toujours en même raison entre elles. Or, par le Lemme précédent, le centre de gravité commun des perpendiculaires QB, placées comme elles sont, est distant de l'axe CF de telle sorte, que la somme des rectangles Q B en QF, compris de chaque Q B & de sa distance du point A, est égale à la somme des mêmes Q PB, multipliée par la distance d'entre leur centre de gravité commun & l'axe. Mais la somme de ces rectangles Q B en QF, ou des Z Y carré, ou des Q B carré (chaque Q P étant faite égale à chaque Z F) est connue par l'hypothèse. Donc on connaîtra aussi la somme des droites Q BR, multipliée par la distance d'entre leur centre de gravité commun & l'axe. Mais la

ÊT DE LEURS ONGLETS. 315 h fomme des Q B ou des Z Y eft
aufli connue par l'hypothefe. Donc on connoîtra auffi la diftance d'entre
l'axe & le centre de gravité commun des droites Q B, placées comme elles
font, c'eft-à-dire, h diftance d'entre l'axe & le centre de gravité de k furface
courbe du double: onglet. AVERTISSEMENT, Il faut entendre la même
chofe du double onglet de la bafe, & cela fe démontrera de même, en
mettant fimplement hafe au lieu d'axe, & axe au lieu de 4afz; c'eft-à-dire,
que fi on connoît la fomme des finus fur la bafe & la fomme de leurs
quarrés, & la fomme des rectangles compris de chaque finus & de fa
diftance de l'axe, on connoîtra auffi la dimension & le centre de gravité de
la furface courbe du double onglet de la bafe. Or il eft vifible que les finus
fur la bafe ne font autre chofe que les diftances entre la même bafe & les
finus fur l'axe, & que les finus fur l'axe ne font auffi autre chofe que les
diftances d'entre l'axe & les finus fur la bafe. * Donc fi on connoît : 1°. La
fomme des finus fur l'axe. 2°. La fomme des quarrés de ces finus. 3°. La
fomme des diftances entre ces finus & la bafe. 4°. La fomme des quarrés de
ces diftances. s #1 be ." DR ERNEST RTE DEEE MES — De= — s n =
u = : — — — ©" — — — — — = — — — — — = a RS RER, ms Ze
: MEL ER Se Sn , = — — — — — Re - — ? = æ Tes = a — TS — — — * vr ES
De + — ce — EE s Er = a ES Lu sr = — — — — — ... — FE : FT L ST = : 5 D
— = < > Rage Re es re — — — — — A er - = = — — — RS me + pe == = — in En os ur -
— — — — — = ES = De = — — — — — 7 — = I = = TS 7 = < = VEN

316 TRArTÉ Des TririrenwEes, &c. \$ °. La fomme des rectangles compris de chaque finus fur l'axe & de fa diftance de la bafe. Et qu'on connoiffe outre cela la grandeur de la ligne courbe : On connoitra aufli la dimenfion & le centre de gravité, tant de la furface courbe du double onglet de l'axe que de la furface courbe du double onglet de Ha bafe. Et on connoitra aufli le centre de gravité de la ligne courbe. Car la ligne courbe multipliée par fon bras fur la bafe; c'eft-à-dire , par la diftance entre fon centre de gravité & la bafe, eft égale à [a fomme des finus fur la bafe : ce qui eft vifible par ces deux propofitions qui font démontrées dans les chofes précédentes ; l'une, que la fomme des finus fur la bafe eft égale à la fomme triangulaire des portions de la ligne courbe, comprises entre le fommet & chacune des ordonnées à l'axe, à commencer par la bafe; l'autre, que cette fomme triangulaire elt égale à la ligne courbe entiere multipliée par fon bras fur la bafe. Et la même chofe fera véritable à l'égard de l'axe , en prenant l'axe pour bafe & la bafe pour axe. = 5: LL fl ZE 27 SA s — È K : es De £: ? RES c NZ TUE | w RCA NN" LA = —_ pu Bet Mgr CNT mire a: ns ile EE 7 PROPRIÉTÉS M4 MP À 4 fr 44 arms s: =“; ... EE mm à —

527 SE ALL émmensenst meer een QT — at abs nnenmensres + a
2 — P'R'O PRIEÉT-ÉS DES SOMMES SIMPLES, TRIANGULAIRES ET
PYRAMIDALES. AVERTISSEMENT. O fuppose ici que ces trois Lemmes
foient connus : [. Si une droite quelconque 4F ft 4 HF divisée comme on
voudra au point A: TRE je dis que 4 F quarré est Cgal à deux fois le
rectangle F 4 en À H, moins À H quarré, plus 4 F quarré. Il. Je dis aussi que
ZF cube est égal à 4H cube, plus 4 F cube, plus 3 4 H quarré en AF, plus 3
HF quarré en H 4. IT. Je dis que 3 4F en HA À quarré, plus 3 ZF en HF
quarré, moins 4F cube, moins 2FH cube, sont égaux à 2 4H cube.
PREMIERE PROPRIÉTÉ. Soit une multitude indéfinie de grandeurs telles
qu'on voudra À, B, C, D, desquelles on connoisse la somme fimple, la
somme triangulaire & la somme PYramidale, à commencer par À : je dis
qu'on trouvera aussi leur somme triangulaire & pyramidale, à commencer par
D. Car

Fig. 71 318 PROPRIÉTÉS 'DES SOMMES SIMPLES, Car foit prise (Fig. 17.) la ligne droite 4 F de telle grandeur qu'on voudra, laquelle foit divise en un nombre indéfini de parties égales aux points A, & que de tous les points de division on élève des perpendiculaires Z D, qui soient entre elles comme les grandeurs proposées, c'est-à-dire, que la première D (qui est la plus proche du point 4) soit à la seconde H D, comme Z est à B, &. Maintenant puisqu'on connoît tant la droite 4F, par la construction, que la somme des droites HD, par l'hypothese, on connoitra la somme de tous les rectangles compris de 4 F. & de chacune des AD; mais la somme des rectangles 4 H en H D est donnée, puisque la première 4 H étant 1, la seconde AH, 2, &c., la somme des rectangles 4 H en HD n'est autre chose que la somme triangulaire de toutes les HD, à commencer par 4, laquelle est donnée par l'hypothese. Donc la somme des rectangles restant FH en 71 D sera donnée, c'est-à-dire, la somme triangulaire des 4 D, à commencer paré, & par conséquent aussi la somme triangulaire des grandeurs proposées 4, B, C, D, à commencer par D. De même puisque 4 F carré est donné, & aussi la somme de tous les 4 D, il s'enfuit que la somme de tous les 4F carré en AD est donnée; c'est-à-dire, la somme des solides compris de chaque A D & de 4 F carré. Mais, par les Lemmes supposés dans l'avertissement, 4 F carré est égal d

TRIANGULAIRES ET PYRAMIDALES 319 à deux fois F A en
 4H, moins AH carré, plus HF carré ; & cela est toujours vrai , quelque
 point que l'on considère d'entre les points A : donc tous les D H en A F°
 carré font évaux à deux fois tous les D H en. 4 en A F, moins tous les D H
 en H A carré, plus tous les D H en A F carré : mais tous les 4 D en 4H en
 A F font donnés (puisque 4Æ et donnée , & auf tous les 4 H en H D, comme
 on vient de voir), & tous les D en 4 H carré font aufli donnés, puisque c'est
 la même chose que la somme pyramidale des HD, à commencer par A,
 laquelle est donnée par l'hypothèse. Donc auf tous les restants, savoir, tous
 les D H en HF carré, feront. par conséquent donnés, c'est-à-dire, la somme
 pyramidale des 4 D, à commencer par F & partant aufli la somme
 pyramidale des grandeurs proposées, à commencer par la dernière D. Ce
 qu'il falloit démontrer. ITPROPRIÉTÉ. Les mêmes choses étant posées : ff
 on ajoute à Chacune des grandeurs proposées A, B, C, D, une A _ " PR
 même grandeur commune E, laquelle soit aussi connue; en sorte que
 chacune des grandeurs A ,B,C,D, avec l'ajoutée E, ne soit plus considérée
 que comme une même : & qu'ainfi il y ait maintenant autant de grandeurs
 nouvelles qu'auparavant ; savoir, A plus E, B plus E, C plus E, D plus E, 6c.:
 Je 41 le \ | } 1 (l ! : 144 : [l : "4! 44 | î {1 tLM LES Fi EN rh M in }l (AMEL
 TA 11 h : 4 4 (AIRE | qi v 1 : W f | f 1 | | min | D fa A 4! Pr PARLE | à A |
 tel WA? tu | my {ill M1! nr 17 WA nil qui W 14 L al à on Al EC " CRE l pal
 | ml 240 || LH ë 4. Î | | [

820 PROPRIÉTÉS DES SOMMES SIMPLES, je dis que la
 somme triangulaire & la [omme py= rarmidale de ces grandeurs ainft
 augmentées ; fera aufft connue ; de quelque côté que l'on commence. Car
 en prenant la fioure 4 4 F D comme auparavant , & prolongeant chacune
 des perpendiculaires D H jufques en ©, en forte que l'ajoutée commune À
 © foit à chacune des H D , comme la grandeur ajoutée Æ, eft à chacune des
 autres À, B, C, D:il eft vifible que puifque AO eft donnée , & auffli la
 somme de toutes les 4H (car elles font égales à la moitié de 4F quarré), la
 somme des rectangles 4H en H O fera donnée; mais la somme des
 rectangles 4 H en H D eft auf donnée; donc la somme des rectangles 4H en D
 O eft aufli donnée, c'est-à-dire, la somme de tous les rectangles R O en O
 D, c'est-à-dire, la somme triangulaire des O D; & partant auffli la somme
 triangulaire des grandeurs augmentées À plus E, B plus E, C plus E, D plus
 £. Ce qu'il fa loit premièrement démontrer. On montrera de même que la
 somme pyramidale des O D eft donnée; ou, ce qui eft la même chofe , la
 somme des RO quarré en O D: car la somme des RO quarré eft donnée;
 favoir, le tiers de RS cube ou 4F cube; mais HO ef donnée; donc tous les
 RO quairé en OH font donnés; mais tous les RO quatré, ou AH quarré en
 HD font aufli donnés, comme il a été dit; donc

“TRIANGULAIRES ET PYRAMIDALES 32% donc tous les
 RO LEE en OD font donnés”; donc, &c: | III Propriété D Les mêmes choses
 étant posées : si les grandeurs proposées A, B, C, D /ont des lignes droites
 ou courbes, de quelles les sommes simples ; triangulaires & pyramidales
 soient données comme il a déjà été supposé © outre cela la forme simple de
 leurs carrés, la somme triangulaire de leurs carrés & la somme simple de
 leurs cubes : je dis que la ligne commune E leur étant ajoutée, comme il a
 été supposé, & qu'ainsi chacune 'd'elles avec leur ajoutée ne' soit plus con-
 sidérée que comme une seule ligne, la [somme des carrés de ces lignes
 augmentées] sera 'donnée, & aussi la forme triangulaire de leurs carrés & la
 somme simple de leurs cubes. Car-soit comme auparavant les perpendiculaires
 HD égales aux lignes proposées A, B, C, D, chacune à la sienne, & la
 droite AO à la ligne ajoutée E + donc, par l'hypothèse, la somme simple des
 HD sera donnée, & la somme de leurs carrés, & la somme de leurs cubes,
 & aussi la somme triangulaire des carrés A, B, C, D, où la somme des carrés A, B, C, D
 & la somme triangulaire de leurs carrés y ou la somme des carrés A, B, C, D
 carrés, & la somme pyramidale des carrés A, B, C, D ou des carrés A, B, C, D
 faut: maintenant démontrer que la somme des carrés A, B, C, D a TPE =
 rs A² + B² + C² + D² = ER EME : gone ee SSH ER — = GT 5 CERPRER CENT ET “65
 | S HAN CE 3 | 7 22 £ CPrETERE rs L 1 RE ne: XX à 4 D “2 à Le Rs Lo
 Les? # 12 219 1,2 \ du Lai El Ë Su Er T) | Fu dt WE Cet mb

A% ...': / : . ue. | r 1 : \ 4 Î URAL | [re 10 Hi |! nX LA * } k | 4 (|
 LCI NCA AX | EVE | * LV | A CA. £ ae Ta { "4: HA | ù } < u 3 | sn ||! re ||
 1! 1 fe à } | C + ' vS 2 {ll * | & | AS | À S* +42 |! || { | : 322

PRroPRrÉTÉS- Des: SOMMES SIMPLES, O D quarre eft donnée, & aufl
 la fomime des OD cube, & enfin la fomme triangulaire des OD quarré, ou
 la fomme des RO en O D quarré. Ce qui fera aifé en cète forte. Chaque O
 D quarré étant égal à deux fois OH en 4D, plus OA quarré, plus H D.
 quarré, l s'enfuit que la fomme des O D quarré fera donnée, fi la fomme des
 O H en AH D deux fois eft donnée, & la fomme des O Æ quarré, & la
 fomme des 4 D quatté. Or puifque O H eft donné, & aufl la fomme des D,
 la fomme des rectangles O H'en HD eft donnée; & partant aufl deux fois la
 fomme de ces mêmes rectangles O #4 en H D; mais la -fomme des OA
 quan, ef donnée, & aufl. la fomme des H D quarrés par l'hypothefe. Donc.
 la fomme des OD quarre eft donnée. Ce qui eft le premier article,
 Maintenant chaque © D cube étant égal à trois fois O H quarré en Æ,D,
 plustrois fois O ien À D quarré, plus OA cube,-plus 4 D cube. il-s'enfuit
 que la fomime des © D cube fera donnée, fi trois fois la fomme-des O H
 quarré.en -H-D eft donnée, plus trois fois Ja fomme des HO en HD quart,
 plus la fomme des' O-cube , plus la fomme des 4 D cube. Or pufque 40
 quarré eft donné, & auf la fomme des 4,1). la fomme des HO :quarré en HD
 fera aufl données & partant, aufl le triple de cette fomme. De même
 puifque ZO eft donné; & aufl Ja formme-des 4 D'quarré, la fomme des OH

TRIANGULAIRES ET PYRAMIDALES] 323 OH.en H D quarré
 fera auili donnée, & partant auili le triple de cette fomme. Mais tous les O A
 cube font encore donnés, & tous les AED cube {ont auili donnés par
 l'hypothese. Donc-la fomme des O D cube fera donnée. Ce qui ef le fecorid
 article. Enfin pour montrer que la fomme des ROenO2 quarré eft donnée, il
 faut montrer que la fomme. des RO en O A quarré eft donnée, plus la
 fomme des RO en HD quarré , plus le double de la fomme des RO en OH
 en 4 L. Or la fomme des RQ où 4 H en H D'quarré eft donnée par
 lhyporhese : & puifque H © quarré eft donne, & auili la fomme de tous les.
 R ©, il s'enfuit que la fomme de tous les RO en OH quarré eft donnée ; & de
 même puifque AO eft donné, & auili tous les 4'-en HD, par lhypothese, tous
 les 4H en 4 D en HO le feront auf, ou tous les RO en OH en HD; & partant
 auili le double de cette fomme. Donc tous les R Q.en © D quarré font auf
 donnés. Ce qui eft le dernier article. AV PROPRIÉTÉ. Les mêmes chofes
 étant pofées : fi on applique à chacune des lignes propofées une ligne
 quelconque.; comme D N, qui fera appelée fa coëfficiente , & que Chaque
 coëfficiente D'N ait telle raifon qu'on voudra avec fa ligne D'H; foit que ces
 raifons foient par: 2 tout pt =) L— Er = = nt de PR TAPIE 44 # LA Fa €
 Ame TE PE FRRR 125 vi BE CALME ETS LS 2 A ts. 22) rise

STE CT RE = 514 PROPRIÉTÉS DES SOMMES SIMPLES, tout
 les mêmes, ou qu'elles soient différentes, @ gu'on connoif[e la fimple
 fomme des coefficients DN, 6 La fimple fomme de leurs quarrés, & la
 Jomme triangulaire des droites D'N, où, ce qui eft la même ons la HAE des
 RO en D'N: Je dis, 1°. que Ji la fomme des H D en DNf donnée, c'est-a-dire
 , la fomme des reilangles compris de chaque ligne & de [a coefficiente; auffi
 là Jomme des OD en DN fera donnée, c'est-à-dire, la fomme des rectangles
 compris de chaque augmentée & de fa coefficiente. Car tous les OD en DN
 font égaux à tous les H D en D N (qui font donnés par l'hypothefe) plus
 tous les OH en D'N, qui font donnés, pif: que OH eft donné, & aufli la
 fomme des DN par : ES Je' dis, 2°. que ft la fomme des HD en DN quarré
 eff donnée ; la fomme des O D'en D N quarré fera auffi donnée: Car la
 fomme des OH en D N quarré eft auf donnée, puifque O H eft donné, &
 aufli la fomme des DN quarré, par l'hypocheffe. Je dis, 3°. que Ji la fomme
 des HD quarre en DN eft donnée, & auffi la fomme des H D en DN, La
 fomme des O D'aquarré en D N fera auffi donnée: Car la fomme des HD
 quarré en DN ft donnée par lhypothefe, & la fomme des 40 quarré en D N
 eft aufli donnée (puifque AO quarté La pr el

TRIANGULAIRES ET PYRAMIDALES. 32\$ ft donné, & aufñli
 la fomme des D N), & la fomme des O X en A D en D NN eft auñi donnée,
 puifque OA eft donné, & aufli la fomme des HD en D'N par l'hypothefe ; &
 partant aufi le double de cette fomme. Je dis, 4°. que Ji la fomme
 triangulaire des rectangles H D en DN eff donnée, ou, ce qui eft la même
 chofe, ft la fomme des AH en HD en DIN dt donnée ; ou des RO en H D en
 DN, /a fomme triangulaire des O D en DN fera auffi donnée; Ou, ce qui eft
 la même chofe, la fomme des RO em O D en D N. Car la fomme des RO en
 OH en D N eft aufi donnée, puifque OH eft donné, & aufli la fomme des
 RO en D N par l'hypothefe. AVERTISSEMENT. Si au lieu d'ajouter la
 grandeur commune $\text{\AA}$, eu HO à chacune des grandeurs propofées HD,
 comme on a fait ici, pour en former les toutes O D, on Ôôte, au contraire, de
 chacune des grandeurs A D la grandeur commune $\text{\AA}$ 1, on conclura des
 reftes DI, rout ce qui a été conclu des enüeres O D. Et fi on prend, au
 contraire , une grandeur quelconque HG, de laquelle on ôte chacune des
 gtandeurs propofces 4 D, on conclura encore des reftes G D les mêmes
 chofes : & de même fi on prend 4 X (égale à la plus grande des granX 3
 deurs or = : f 8 : " L / "y : 2377) 08 LR" re tri un + h 21 € Fe 24 ne D rs Ps"
 DE 7 ca VE, "e AD

pm cu rs moe _ me _ : i ù et E . sf RS HE SP POST ADS ne 5
 CRM r sr" _ RTE 4 DRE SET PI] Be CAF 24 Re ARS "EN Be Las D PA 7
 k n'E./ 4 2. PL nie 4 ASE 2 ON 2'hfi A fe - _ ar : = - ss G 5 er te elle ve he #
 | — L a — 2 eng s a ————— == ESS == 356 PRÔPRIÉTÉS DES
 SOMMES SIMPLES, deurs propofces) pour la grandeur commune, de
 liquellé on ôte chacune des autres # D, on con: clura toujours |1 même
 chofe des reftes D X. Car il n'y a de différence en tous ces cas, que dans les
 figues de plus & de moins; & la démonftration en fera femblable & n'aura
 nulle difficulté, principalement après les Lemmies marqués dans
 l'Avertiffement devant la premiere de ces Propriétés. D'où il paroît que s'il
 y a une ligne quelconque droite ou courbe, donnée de grandeur R S, coupée
 tommé on voudra aux points T', en parties égales ou inézales , & qu'elle foit
 prolongée du côté de S jufqu'en P, & du côté de R jufqu'en Q, & que les
 lignes ajoutées S P, Q R foient données de gran: deur : fi on connoît toutes
 ces chofes, favoir, la fomme de leurs quarrés, la fomme de leurs cubes, la
 fomme triangulaire des mêmes lignes TP, la fomime pyramidale des mêmes
 lignes, & la fomme | triangulaire de leurs quarrés, à commencer toujours du
 côté de R : il arrivera auflî que les mêmes chofes feront données à l'égard
 des lignes 7 Q; c'eft-à-dire, la fomme des lignes T'Q, la fomme de leurs
 quartés, la fomme de leurs cubes, la fominetrianoulaire des mêmes lignes 7
 Q , leur fomme pyramidale, & la fomme triangulaire de leurs quatrés, à
 commencer maintenant du côté de \$. Car en prenant les droites AD de la
 grandeur des droites PT; c'eft-à-dire, que la premiere PT ou

TRIANGULAIRES ET PYRAMIDALES. 3217 ou PR, foit égale
 à la premiere HD, c'est-à-dire, à la plus proche du point 4, & que la feconde
 PT foit égale à la feconde H D, &c., & prenant À G égale à P Q : il est
 visible que (puisque toutes les sommes supposées sont données à l'égard des
 droites T'P, à commencer par la grande RP)les mêmes sommes feront
 données dans les droites A D qui leur sont égales, à commencer du côté de
 la grande H D, ou du côté du point 4; & par conséquent les mêmes sommes
 feront données à l'égard des mêmes HD , à commencer du côté de F (par la
 premiere de ces propriétés}: & partant les mêmes sommes feront données à
 l'égard des restes G D, à commencer du côté E ; c'est-à-dire, que les mêmes
 choses feront données à l'égard des droites T Q, à commencer du côté de S;
 puisque chaque T Q est égal à chaque D G, des choses égales étant ôtées de
 choses égales. Il faut entendre la même chose dans les portions des figures
 planes, comme on va voir dans cet exemple. Soit une figure plane
 quelconque (Fig. 18.) LZ Z V donnée de grandeur, & divisée comme on
 voudra par les droites YZ, & qu'on y ajoute d'une part la figure ML Z, & de
 l'autre la figure KV Z, qui soient aussi toutes deux données de grandeur : je
 dis que si on connoît la somme des 4 espaces Fig. 18, on peut USER Jp mn DS
 Frs 2 Es ES , Le 237 À SAS + , à 2 LC us Pre Ja A 21 | 2202 Me : 7 D! PA
 ne : pra : : AL La d à xk! NF D as Fes Fa 4e SAR HS A CE t SEL Er te DT
 PSN # œe .* £ ven J \$ | # GE : su RE O + on a . 7: Dir nm + -rék

| al | Fa 328 PROPRIÉTÉS des SOMMES SIMPLES; espaces M Y Z , & auf: leur somme triangulaire, à commencer du côté de YZ ; on connoîtra auf la somme des espaces K YZ , & leur somme triangulaire. Et on le montrera de la même sorte ; en prenant de même les droites H D qui représentent les espaces MYZ ; c'est-à-dire, que la première HD représente le plus grand M YZ ou MK, & la seconde, le second, &c. : & que la droite AG représente l'espace entier M7Z; c'est-à-dire, que ces droites soient entre elles en même raison que ces espaces. De toutes les propriétés qui sont ici: données, se tirent plusieurs conséquences , & entre autres celles-ci. Que s'il y a un triligne quelconque FDX4 (Fig: 17.) dont on connoisse l'espace, l'élément autour de l'axe F 4, & le centre de gravité de ce demi-élément, lequel centre de gravité soit F: je dis que quelque droite qu'on prenne dans le même plan, parallèle à F4, & qui ne coupe point. le triligne, comme RS , laquelle soit éloignée de FA d'une distance donnée; & qu'on entende que le plan tout entier soit tourné autour de cette droite RS : on connoîtra aussi le élément formé par le triligne dans ce mouvement ; & auf le élément formé dans le même mouvement par le triligne. F D XX (qui

-#TRIANGULAIRES ET PYRAMIDALES. 329 fqui eft le refte du reangle circonfcrit F 4XX) & aufli les centres de gravité de ces folides & de leurs demi-folides. Cela fe conclut des propriétés précédentes; car on a lci les grandeurs 4 D , defquelles on connoit la fomme fimple & la fomme de leurs quarrés (puifque l'efpace 4 F D X & fon folide autour de AF font donnés); donc en leur ajoutant, pour grandeur commune, la diftance AO (qui eft auf donnée par l'hypothefe), il s'enfuit de ce qui a été montré dans ces propriétés, que la fomme des 0 D quarré fera donnée; & partant aufli le folide formé par la figure entiere SFDXAR, tournée autour de RS, fera donné. Mais le cylindre formé par le rectangle S F 4 R fera aufli donné ; donc l folide annulaire refant, formé par le triligne FDX À autour de RS, fera aufli donné. On montrera de même que le folide annulaire formé par le triligne FDXX, fera aufli donné, puifque le cylindre de S XXR eft donné. Et pour leur centre de gravité, .cela fe montrera ainfi. | Puifque le centre de gravité du demi-folide , formé par le triligne FX 4 autour de F À, eft donné, ou (ce qui eft la même chofe, en fupposant la quadrature du cercle) le centre de gravité du double onglet de l'axe; il s'enfuit que la fomme des 4 D cube eft donnée, & aufli la fomme triangulaire

330 PROPRIÉTÉS DES SOMMES SIMPLES, &c, gulaire des Δ
D carré; donc puisque la grandeur commune 0 est aussi donnée, la somme
des O D cube sera aussi donnée, & aussi la somme triangulaire des O D
carré; donc le centre de gravité du demi-solide de la figure entière
SFDXAR, tournant autour de S À d'un demi-tour, sera aussi donné. Mais le
centre de gravité du demi-cylindre de S FAR est aussi donné (en
supposant toujours la quadrature du cercle quand il le faut); donc le centre
de gravité du demi-solide annulaire restant, formé par le triangle FX 4
autour de la même S R, sera aussi donné; la raison du cylindre au solide
annulaire étant donnée. On le montrera de même du solide annulaire FDX.
Et on montrera aussi la même chose en faisant tourner tout le plan autour de
XX ou de D'E', &c TRAITÉ

5 ————— a), TRAITÉE DES SINUS DU QUART DE CERCLE. Le mMmME (Fig. 29). | ÇOIT ABC un quart de cercle, dont le rayon "AB /oit confidéré comme axe, & le rayon perpendiculaire AC comme bafe ; foir D un point quelCOngue dans Parc, duquel foit mené le finus DI Jur le rayon AC; & la touchante DE, dans le quelle foient pris les points E où l'on voudra, d'où foient menées les perpendiculaires ER Jar le rayon AC:7e dis que le réélangle compris du finus DIX G de la touchante EE, eft égal au réélangle compris de la portion de la bafe (enfermée entre les paralleles } & du rayon À B. Car le rayon À D eft au finus DT , commæ EE à RR ou à EK : ce qui paroît clairement à caufe des triangles réélangles & femblables DIA, EK FE, l'angle E E K ou E DT étant égal à l'angle D AT. PROPOSITION PREMIERE. Lafomme des finus d'un arc quelconque du quart . f \ ° de cercle, eft égale à la portion de la bafe , comprie entre Les finus extrêmes , multipliée par le rayon. ProrosiTION Fig. 29. D Le È D = EEE, = — a . s ER A Se - — = = = ne ae — = a — = eee: x he — — — — — = = zx = _ ns — EEE Res — — — x = — — — — a = = > - = : 7 cs ER PS . RE — PET De + a Rose — — — + em = - = = DER ns T2 EE = =. —. = = = eee — — — D me + a - — 356 = = MECS. 2 te F: z Pen — = . ————— © = =. ————— = EE es à pe su — = : . = = ————— té nn ————— tr y 2 4 à { ELLES à VIN 77 rs] 2 RS NE. th ri F LÉ “ 2" Nu MS PT.

332 TRAITÉE Des Sinus PROPOSITION IL La somme des
quarrés de ces sinus est égale à la somme des ordonnées au quart de cercle ;
qui seroient comprises entre les sinus extrêmes, multipliées par le rayon.
PROPOSITION III. La somme des cubes des mêmes sinus est égale à la somme
des quarrés des mêmes ordonnées , comprises entre les sinus extrêmes ,
multipliées par le rayon, LS TEE © — S me Lee 2 PL AEPZ rE TR VE ES
———— = TE PrRoProsrTronN IV. fl 1 | La somme des carré-carrés des
mêmes sinus est égale à la@somme des cubes des mêmes ordonnées
comprises entre les sinus extrêmes, multipliées par le même rayon. - Et ainsi
à l'infini. d 4 | ti 11 : 1 \ h 1 { qe 1! tan A! Th 1 MEN A 1h | 4 | (Hi À h L
Fig. 34 PRÉPARATION A LA DÉMONSTRATION(EF. 34). DAT NP NT
CON - à Soit un arc quelconque B P, divisé en un nombre indéfini de parties
aux points D, d'où soient menés les sinus PO, D I, &c.: fait prise dans
l'autre quart de cercle la droite 4Q, égale à 40 (qui mesure la distance entre
les sinus extrêmes de l'arc B 4 PO}: soit 4 Q, divisée en un nombre indéfini
de parties égales aux points Æ , d'où soient menées les ordonnées HI. Bret
Can Ch Y: _ Er Rat, ? 1 DÉMONSTRATION CE ra æÆ "TR dits 74e

DU QUART:DE CERCLE. 335 DÉMONSTRATION DE LA
PROPOSITION I. Je dis que la somme des sinus DT (multipliés chacun par
un des arcs égaux D D, comme cela s'entend de foi-même) est égale à la
droite 4O. multipliée par le rayon 42. Car en menant de tous les points D
des perpendiculaires DE, dont chacune coupe la circonférence aux points E, &
rejoignant les perpendiculaires ER ; il est visible que chaque sinus DZ
multiplié par la tangente EE, est égal à chaque distance RR multipliée par le
rayon AB. Donc tous les rectangles ensemble des sinus D Z, multipliés
chacun par la tangente EE (lesquelles sont toutes égales entre elles) sont
égaux à tous les rectangles ensemble, faits de toutes les portions RR avec le
rayon AB; c'est-à-dire (puisque l'une des tangentes EE multiplie chacun
des sinus, & que le rayon AB multiplie chacune des distances) que la
somme des sinus DI, multipliés chacun par une des tangentes EE, est égale
à la somme des distances RR ou à 40, multipliée par AB: mais chaque
tangente EE est égale à chacun des arcs égaux D D. Donc la somme des
sinus multipliés par un des petits arcs égaux, est égale à la distance 40
multipliée par le rayon. AVERTISSEMENT. Quand j'ai dit que toutes les
distances ensemble 2 — ee E - E 7] re ” + s Z sn — 2 A: E K; ER NET | “dr
are. 2 N n % pe De 4 ROM | fa * EP | "A à CA # # # : L DE me 2.2 +." #fté
4% ? re ve

334 TRAITÉ des Surfaces RR, font égales à 4 O, & de même que chaque touchante E E est égale à chacun des petits arcs D D, on n'a pas dû en être surpris, puisqu'on fait assez qu'encore que cette égalité ne soit pas véritable quand la multitude des finus est finie; néanmoins l'égalité est véritable quand la multitude est indéfinie, parce qu'alors la somme de toutes les touchantes, égales entre elles EE, ne diffère de l'arc entier B P, ou de la somme de tous les arcs égaux D D, que d'une quantité moindre qu'aucune donnée: non plus que la somme des RR de l'entière A O.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION II. Je dis que la somme des DJ quere (multipliés chacun par un des petits arcs Cgaux DD) est égale à la somme des H L ou à l'efface BHQL. Preuve. Le rayon 4 B. Car, en prolongeant, tant les finus DJ, que les ordonnées HL de l'autre côté de la base, jusques à la circonférence de l'autre part de la base qui les coupe aux points G & N; il est visible que chaque D I sera égal à chaque ZG, & HN 2H: | Maintenant pour montrer ce qui est proposé, que tous les DI carrés en DD, font égaux à tous les HL en AB: il suffit de montrer que la somme de tous les HZ en 4B, ou tous les AN en

DU QUART DE CERCLE 335 en #B, ou l'espace QNN multiplié
 par 4B, est égal à tous les GZ en Den EE, ou à tous les GT en RR en AB
 (puisque]Den EE est tel à chaque RR en 4B). Donc en ôtant la grandeur
 commune 4B, il faudra montrer que l'espace 4AQ NN est égale à la somme
 des rectangles Glen RR : ce qui est visible, puisque la somme des
 rectangles compris de chaque GT & de chaque RR, ne diffère que d'une
 grandeur moindre JR ACTE donnée de l'espace AOGN, qui est égal à l'es-
 pace 4AQNN, puisque la droite AQ est égale à la droite 4 O. Ce qu'il
 falloit démontrer, DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION III. Je dis
 que la somme des DJ cube est égale à la somme des HL carré, multipliée
 par le rayon 4 B. Car soit décrire la ligne CGNNM de telle nature, que
 quelque Sn Aentre qu'on mène à la base, comme DIG où LAN, il arrive
 toujours, que chaque DII 'carré soit égal à ZGien AB, & la démonstration
 fera Pareille à la précédente. Il est ROSE de montrer que la
 somme des HI carré en 4.B, ou des HN en 4 B carré, où de l'espace
 AQNN, multiplié par 4 B carré, est égal à la somme des DJ cube,
 multipliés par chaque Si Ss = 2 = Re TES — — RER DA CSN Ta \ LA " #
 ou Pa 4 o 7} ce DEN PE EE 7 Tps à 4 pes ETS. - 1# et Lee AN sx : A

- 336 ... TRAITÉ des Snus Fig. 19. chaque arc D D, ou à la
 somme des DIT quarté en D Ten EE, ou des GI en Ben RR en AB, ou des 4B
 quarré en GZ en RR : donc 'en Ôtant de part & 'd'autre le multiplicateur
 commun 4B quarré, il faudra montrer que l'espace AQNN est égal à la
 somme des rectangles GI en RR ; ce qui est visible par la même raison qu'en
 la' précédente, -DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION [Y. Je dis que
 la somme des D Z quarré-quarré est égale à la somme des HL cube,
 multipliés par 48. = Car en décrivant une figure CGN M, dont la nature soit
 telle que quelque perpendiculaire qu'on x mene , comme D IG, il arrive
 toujours que DJ cube soit égal à .7G en AB quarré; la démonstration fera
 semblable à la précédente, parce que cette figure sera toujours coupée en
 deux POHQES égales & semblables par l'axe 4 B.N, de même que le demi-
 cercle C B M. Et ainsi à l'infini. CO'R OL TATRE* De la première
 proposition, il s'enfuit que la somme des sinus versés d'un arc est égale à à
 l'excès dont l'arc surpasse la distance d'entrée FR sinus ex trêmes , multiplié
 par le rayon. #tot «_Je dis (Fig 10e) que la somme des sinus sa Dx est
 égale à l'excès, dont l'arc BP LT - droite 4O ; multiplié par 4 B+ ds Car

pu QUART DE CERctEr. 337 Car les finus.verfes ne font autre
 chofe que l'excès , dont le rayon furpalfe les finus droits : donc ll fomme
 des finus verfes D X eft la même chofe que le rayon 4B, pris autant de fois,
 c'eft-à-dire, multiplié par tous les petits arcs évaux DD, c'eft-à-dire, UspUS
 pat l'axe entier B P , moins la fomme des finus droits DT, ou le rectangle B
 4 en ÆO. Et par conféquent la fomme des finus verfes D X eft égale au
 reéctangle compris du rayon AB, & de la différence entre l'arc BP & la droite
 4 O. PROPOSITION V. Le centre de gravité de tous les finus d'un arc
 quelconque ; placés comme ils Je trouvent , eft dans celui qui divife en deux
 également la diffance d'entre les extrêmes. Soit (Fig, 19.) un arc
 quelconque B P , & foit AO la diftance entre les finus extrêmes, conpée en
 deux également en Y:je dis que le point Y fera le centre de gravité de tous
 les finus 27 de l'arc BP. Car fi on entend que 40 foit divifée en un nombre
 indéfini de parties égales , d'où foient menées des ordonnées, & que l'on
 confidere chaque fomme des finus qui fe trouve entre deux quelconques des
 ordonnées voifines ; il eft vifible que toutes ces petites fomme particulieres
 de finus feront touTOME F. Y tes Fig. 19. fl Ju \# À \ ne æs

338 TRAÏTÉ des Sums des égales entre elles, puisque les distances d'entre les ordonnées voisines sont prises toutes égales entre elles, & que chaque somme de sinus est égale au rectangle fait de chacune de ces distances égales, multipliée par le rayon. Donc la droite 40 est divisée en un nombre indéfini de parties égales, & ces parties égales entre elles sont toutes chargées de poids égaux entre eux (qui sont les petites sommes de ces sinus, comprises entre les ordonnées voisines). Donc le centre de gravité de tous ces poids, c'est-à-dire, de tous les sinus placés comme ils sont, se trouvera au point du milieu Y. Ce qu'il falloit démontrer. PROPOSITION VI. La somme des rectangles, compris de chaque sinus sur la base & de la distance de l'axe, ou du sinus sur l'axe, est égale à la moitié du carré de la distance d'entre les sinus extrêmes sur la base multiplié par le rayon, lorsque l'arc est terminé au sommet. Soit d'arc BP, terminé au sommet B, & soient DS les sinus sur l'axe : je dis que la somme des rectangles DIT en 14, ou DI en DS, est égale à la moitié du carré de 4 O multiplié par 4B, Car il a été démontré à la fin du Traité des Trilignes, que la somme des rectangles 47 en 1D,

DU QUART:DE CERCLE. 339 ID, est égale à la somme des sinus Z D multipliée par 4 Y (qui est la distance entre Je dernier ÆB & leur centre de gravité commun F); mais la somme des sinus est égale à 48 en À O : donc la somme des rectangles 47 en I D, est égale à AB en AO en A}, c'est-à-dire, à la moitié du carré de 4 O, multiplié par 4 2. . PrRorosiTionN VII. La somme triangulaire des sinus [ur la base d'un arc quelconque , terminé au sommet, à commencer par le moindre des sinus extrêmes , est égale à la somme des sinus du même arc sur l'axe, multiplié par le rayon , ou , ce qui est la même chose, à la différence d'entre les sinus extrêmes sur la base, multipliée par le carré du rayon. Je dis que la somme triangulaire des sinus DT, à commencer du côté de DO, est égale à la somme des sinus DS, multipliée par le rayon , ou à BV. (qui est la différence entre BA & DO) multipliée par B À carré, ce qui n'est visiblement que la même chose, puisque la somme des sinus DS est égale au rectangle VB en B À, par la première de ce Traité, Car la somme triangulaire des sinus DT, à commencer par DO, n'est autre chose, par la définition, que la simple somme de tous les DJ compris entre les extrêmes B4, DO: plus la somme de tous les DZ, excepté le premier DO, Y 2 c'est-à-dire, L EE DT = = — — = = mer mx = ER PTE a = = Pa En, LEA FA | Li] AE 4 | ' il | UN |. 4 11 *1 RE || | np || WE à y | Il PRES HT 2778 - - + passe TI, Ep

È 2 ##œ mn. k De 2 LR Le «+ 2 : : Lt sg? tt — Re “et Le
 (ME: he. tps C0 DES S #" LE AN SRE 340 TRAITÉ Des Srnus ceft-à-dire,
 compris entre le fecond QT & 4B, & ainfi de fuite : mais la fomme des
 finus compris entre D O & BA, eft égale à O 4 ou PF en 4B ; & la fomme
 des finus compris entre DT & AB, eft de même égale au rectangle T4 ou QS
 en AB, & ainfi toujours. Donc la fomme triangulaire des finus D I, à
 commencer par DO, eft égale à la fomme des finus PF, QS, DS, &.,
 multripliée par 4B. Ce quil falloit démontrer. PROPOSITEION. VIII La
 fomme pyramidale des finus d'un arc quelconque, terminé au fommet, à
 commencer par le Mnoindre , eft égale à la fomme des finus verfés du
 même arc multipliée par le quarré du rayon, ou, ce qui et la même.chofe, à
 l'excès , dont l'arc f[urpalle la diftance entre les finus extrêmes, multiplié par
 le cube du rayon. Je dis que la fomme pyramidale des finus DI, à
 commencer par DO, ef? égale à la fomme des Jinus verfés D'X, multipliée
 par B À quarré, ou, ce qui eft la même chofe, par le Corollaire , à Parc BP,
 moins éa droite AO , en AB cube. Car cette fomme pyramidale n'eft autre
 chofe que la fomme triangulaire des finus D TZ compris entre PO & AB,
 plus la fomme triangulaire de tous les finus compris entre DT & AB, &
 ainfi de fuite : mais la premiere de ces formes | triangulaires

DU QUART DE CERCLE. 341 triangulaires est égale par la précédente, à BY ou PX en $4B$ carré; & la seconde de ces sommes triangulaires est égale, par la même raison, à BZ ou QX en $4B$ carré. Donc toutes les sommes triangulaires ensemble, c'est-à-dire, la somme pyramidale des sinus DZ, à commencer par DO, est égale à la somme des sinus versés D X multipliée par B^4 carré. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION IX. . La somme des espaces, compris entre l'axe & Chacun des sinus d'un arc, terminé au sommet, est égale, étant prise quatre fois, au carré de l'arc. plus, le carré de la distance entre les sinus extrêmes, multiplié chacun par le rayon. Je dis que la somme des espaces DI AB, prise quatre fois, est égale au carré de l'arc BP, multiplié par AB; plus le carré de la droite AO, multiplié aussi par AB. Car ces espaces D I AB ne font autre chose que les secteurs $4 D B$, plus les triangles rectangles $47 D$. Or chaque secteur $4 D B$ est égal à la moitié du rectangle, compris de l'arc BD & du rayon : donc le secteur pris deux fois, est égal au rectangle compris de l'arc & du rayon: & partant tous les secteurs ensemble pris deux fois, font égaux à tous les arcs B D, multipliés par AB ; ou à la moitié du carré de l'arc entier BP, Y^3 multiplié a = — | LR 4. } 1 { | La 1 1 IL HI } | Î (“ 1] 7 (! ‘ n { | Lt MIRE: Î | : (ul w 1 11 LU | BU 1 : || 19) HO EUE! LIT ER | { | Le | 1 Fi (| LI? f | WP | AMP LT ns 24 : || [(| LT R Ê (l ul LE EU P N “ V1 4: AA TR | 1 {! 1 1 n 1 ALI F | 1h HIRET TU ' : IFR 4 PEL LE ? : || | NAN E: HUM 8 } k || | il : : {)\M A nl 1! ! || | 1" }] \ CAM LE || “ | } { NA " | in [21 t ; 14 Hat ll | : À | n = ——— RSR Re —

342 TRAITÉE Des SrNus multiplié par 4B (puisque tous les arcs ensemble B D font égaux à la moitié du carré de l'arc entier BP, parce qu'il est divisé en parties égales). Donc la somme des secteurs, prise quatre fois, est égale au carré de l'arc BP, multiplié par le rayon. Et chaque triangle rectangle 47 D est la moitié du rectangle de 47 en FD; & partant tous les triangles ensemble 47 D; pris deux fois, font égaux à tous les rectangles 47 en FD, c'est-à-dire, par la cinquième, à [la moitié du carré A O en 4B : donc quatre fois la somme des triangles AID est égale au carré AO, multiplié par 4 B. D'où quatre fois la somme des espaces DIAB est égale au carré de l'arc BP; plus, au carré de 4 O O, multiplié chacun par 4 B. Ce qu'il falloit démontrer. PROPOSITION X. La somme triangulaire des mêmes espaces, prise quatre fois, à commencer par le moindre finus; est égale au tiers du cube de Parc; plus; la moitié du solide, compris de Parc & du carré du rayon, moins la moitié du solide, compris du moindre finus, & de la distance d'entre les extrêmes & du rayon; le tout multiplié par le rayon. Je dis que la somme triangulaire des espaces DIAB, à commencer par DO, prise quatre fois, est égale au tiers du cube de l'arc BP, multiplié par NU MT Et | :: La. ax : « | du | . ! L 1! vs | PR #ù 2 pe 7? EU , |||| LA | [4 | 11 4 14 11 :: 1 | : {1

DU QUART DE CERCLE. 343 par AB; plus, la moitié de l'arc BP, multiplié par AB cube, moins la moitié du réctangle AO en OD, multiplié par AB quarré. Car la fomme triangulaire de ces efpaces, à commencer par D O, fe forme en prenant, premièrement , la fomme fimple de tous ces efpaces, dont le quadruple eft égal, par la précédente, au quarré de l'arc BP, multiplié par 4B, plus 40 quarré multiplié aufli par À B ; & en prenant enfuite la fomme de tous les efpaces, excepté le premier B PO À, favoir, la fomme de tous les efpaces BOT A, BDIA, &c., dont le quadruple eft égal, par la précédente, à l'arc BQ quarré, multiplié par 4B, plus TA quarré multiplié par 4 B ; & ainfi toujours. Donc quatre fois cette fomme triangulaire des efpaces B D 14, eft évale à la fomme de tous les arcs BD quarré multipliés par 4B, c'eft-à-dire, au tiers du cube de l'arc entier B P, muluplié par 4B, plus la fomme de tous les Z 4 quarié, ou de tous les DS quarré (qui font les finus fur l'axe } multipliés par A BP. Mais la fomme des finus D S quarré eft égale à l'efpace B P F, mukiplié par 4 B (par la feconde de ces propofitions } : & en prenant 4B . pour commune hauteur, la fomme des DS ou 1 À quatré multipliés par 4 B, fera égale à l'efpace B PF multiplié par 4B quarre. Donc la fomme triangulaire de tous les efpaces NA D14A4B

IE Sutins CT + Le ! ge | { ere Lr ve | 24 : #0 | LA M4 | ?. “ P : \ :
 344 TRAITÉ des SINUS D I AB est égale au tiers du cube de l'arc BP,
 multiplié. par 4 B ; plus à l'espace B P F, multiplié par 4B quarré; mais
 l'espace BPF est égal au feéteur B P 4, moins le triangle 47 P, cest-à-dire, à
 la moitié du reéctangle compris de l'arc BP & du rayon B À, moins la moitié
 du rectangle de 40 en O P. Donc cette somme triangulaire est égale au tiers.
 du cube de l'arc BP, muluplié par 4B, plus la moitié de l'arc multiplié par
 4B cube, moins la moitié de 40 en O D, multiplié par 4 B quarré. Ce qu'il
 falloit démontrer. Proposition XI. La somme triangulaire des quarrés
 des sinus d'un arc quelconque , terminé au sommet, à commencer par le
 moindre sinus , est égale, étant prise quatre fois, au quarré de Parc, plus au
 quarré de la distance entre les sinus extrêmes , multipliés chacun par le
 quarré du rayon. | Je dis que la somme triangulaire des D quarré, prise
 quatre fois , à commencer par DO, est égale au quarré de l'arc BP, plus au
 quarré de la droite AO, multipliés chacun par AB quarré. Car cette somme
 triangulaire des DIT quarré se trouve , en prenant premièrement la simple
 somme de-tous les DJ quarré, qui est égale, par la seconde, à l'espace B D O
 À multiplié par 4B, &

DU QUART DE CERCLE. 3 4S\$& en prenant ensuite la somme des mêmes quartés, | excepté le premier DO, favoir, QT quarré, D 1 quarré, &c., qui font égaux, par la même seconde, à l'espace QTAB, multiplié par 4B, & ainsi toujours. Donc la somme triangulaire de tous les D I quarré est égale à la somme des espaces DTA B, multipliée par 2 : donc aussi leurs quadruples font égaux ; mais la somme de ces espaces, prise 4 fois , est égale au quarré de l'arc BP, plus au quarré 4 O, multipliés par 4 B : & en multipliant encore le tout par 4B , la somme des espaces D TA B, prise quatre fois, & multipliée par AB, fera égale au quarré de l'arc BP, plus au quarré ZO, multipliés par 4 B quarré. Donc aussi la somme triangulaire des D 7 quarré fera égale au même arc BP quarré, plus au même ZO quarré, multipliés de même par 4 B quarré. Ce qu'il falloit démontrer. TRAITÉ A Le , 1 4 "AA der 7} x 5 Fev A Pa | Lu r Al »'°4 “; 4 24 D 4 _ | »,#1 ‘ ve «+ = € L : SEE ET 7 TERRE EN * TRS: DEA = ce

146 TRAITÉ Des Arcs te ee ee en TRAITÉ:..DES: ARGS DE
 CHE RLC:L:E DÉFINITION. ii "À PPELLE triligne circulaire toutes les
 portions d'un quart de cons retranchées par une of donnée quelconque au
 rayon. Fig-10. Soit (Fig. 20.) un quart de cercle 4 BC, dont . Æ soit le
 centre, À B un des rayons, qui fera appelé Paxe ; 4 C l'autre rayon
 perpendiculaire au premier, qui fera appelé /a bafe ; & le point B fera le
 fommet, Z M une ordonnée quelconque à l'axe. L'espace Z MB fera appelé
 n rriligne circulaire: fur quoi il faut remarquer que le quart de cercle entier
 eft aufli lui-même un triligne circulaire. AVERTISSEMENT. On fuppose
 dans tout ce difcours, que l'a raifon de la circonférence au diametre eft
 connue, & que quelque point qu'on donne dans le rayon BA, comme S\$,
 d'où on mene l'ordonnée \$ R , coupant Parc en R, l'arc BR retranché par
 l'ordonnée (& qui s'appelle l'arc de l'ordonnée) eft aufli donné: de même
 que quelque point qui soit donné dans l'arc il 114 || SAIT ml M | _— HS

DE CET R SO LE; 347 lafc, comme À, d'où on mene R S
perpendiculaire |4B À, les droites RS, S B font auili données.

PROPOSITION PREMIERE. Soir (Fig. 17.) BSR un triligne circulaire
quel- Yig, x7. wonque donné, dont l'axe BS étant divifé en un nombre
indéfini de parties égales en Z, les ordonnées Z M coupent l'arc en M : je
dis que toutes ces hofes feront auffi données; favoir, 1°. la' fomme de tous
les arcs B M; 2°. la fomme des quarrés de es arcs ; 3°. la fomme des cubes
de ces arcs; 4°. la | Jomme triangulaire de ces arcs; 5°. la fomme trianfulaire
des quarrés de ces arcs ; 6°. la fomme pyramidale de ces arcs. Car en
menant les finus fur la bafe de ce meme arc, ou de l'arc pareil B P, pris de
l'autre part (pour rendre la fisure moins confufe), lefquels nus coupent l'arc
en D, la bafe S P du triligne én 7', & le rayon ACenI:il a été démontré dans
k Traité des Frilignes, que la connoiffance de La À 7 ei | Fe toutes les
fommes cherchées dans les arcs BE M, 51 dépend de la connoiffance des
mêmes fommes dans ks finus DT, & on en a donné toutes les raiÀ sie LPS
ns; en forte que la connoiflance des üns enferz me auili celle des autres.
Donc il fuffira de mon: ler que routes ces fommes font données dans les
fnus DT pour moni®r qu'elles le fonc auili dans les arcs B M. | Mais

SENS 224 27 | Æ . « SAME 7. 1€ ba |! LT Hi à 348 TRAITÉ pes
 Arcs | Mais toutes ces sommes feront connues dans les sinus DT, si elles le
 font dans les sinus entiers DT, parce que la droite T J ou S À, qui est donnée
 , comme on l'a vu dans l'Avertissement, est une grandeur commune, qui est
 retranchée de toutes les autres D 7 : & partant, par le Traité des sommes
 simples triangulaires , &c., ces sommes feront données dans les restes DT, si
 elles le font dans les entières D I Or toutes ces sommes font données dans
 les droites D I, comme il s'enfuit facilement des propositions 1,2, 3,7, 8, 11,
 du Traité des Sinus du quart de cercle. Car, 1°. la somme des droites D I est
 donnée, puisqu'il est démontré qu'elle est égale au rectangle compris du
 rayon donné 4 B, & de la droite donnée À O ou SP. 2°. La somme des
 carrés D I est donnée, puisqu'il est démontré qu'elle est égale à l'espace
 donné B P O 4 multiplié par le rayon donné 4 B. 3°. La somme des D I
 cubes est donnée, puisqu'il est démontré qu'elle est égale à [la somme des
 carrés des ordonnées au rayon 4 C, comprises entre les sinus extrêmes B 4,
 P O, multipliés par AB. Or AB est connu, & aussi la somme des carrés de
 ces ordonnées , puisque l'espace B P O A 4 est ici donné, & que son #lde
 autour de 40 l'est auf, par Archimede, Pie La

The text on this page is estimated to be only 46.51% accurate

hi tt die dre tn © pi CERCLE 349 4%. La fomme triangulaire de ces ordonnées D est aussi donnée, puisqu'il est démontré qu'elle est Coale à la différence d'entre les finus extrêmes BA4,TO, c'est-à-dire, à BS qui est donnée, multipliée par le carré du rayon. | 5°. La fomme pyramidale des mêmes finus DY _ est aussi donnée, puisqu'il est démontré qu'elle est égale à l'excès dont l'arc donné BP surpasse la droite donnée A O ou S P, multiplié par le cube du rayon. 6°. Enfin la fomme triangulaire des D'I carré et donnée, puisqu'il est démontré qu'étant prise quatre fois, elle est égale au carré de l'arc donné BP, plus au carré de la droite donnée A O ou PS, multipliés chacun par le carré du rayon. PrRoPosiTION IL Soit maintenant dans le diamètre du demi-cercle (Fig. 21.) A BCE, la portion B H donnée plus grande que le rayon B A, laquelle étant divisée en un nombre indéfini de parties égales aux points Z, soient menées les ordonnées Z D : Je dis que les mêmes sommes que dans la précédente, feront données dans les arcs BD; c'est-à-dire, la somme simple des arcs; celle de leurs carrés & celle de leurs cubes; la somme triangulaire des arcs; la somme triangulaire de leurs carrés; & la somme pyramidale des arcs. Car en achevant de diviser la portion restante HF Fig. 21. = — Ps PR Sr le é Te arÉ vis é : : : HI | PA ! { A 11 | ! : EU Ne! [M : REBIONIEN HH A LRU . TH Ĩ h L { | Ĩ UT E RE 1 INTIUI Lt | fn | | à 4 FAN VE 14 414 |! 4 Ê Lil A1 LA 2" EN : 11m x (1 |A li 11 | f | Ĩ L % .! ' { | fl EU LE! 0 (BA 1 (1 AA EU La LE 4 Ĩ | | 1 | LE? qi 1 Il | | AM . (| 2 (| 4 1 | OU LE EN ENTRE | 14 ĩ Ĩ | LI IPURNMNE LE EU UN À HAT PE Fil | É | 1 At H n L: UI II | | HE | k ' IHNTU \ EN et ; ! { LI ù '0 (PE | TN ga fu PU ni 1 Ĩ Hi À LE | fl 44 || | ; 180 LEE IL L 1} È | il 11 \ 1! Lœ Ĩ | k | : { | DA 711 | { TE kg 1 CU M CUT a! ans ill un NA 4/14 LFB AE Eu ohL 0:04 Ont {1 (1m Ĩ APPATEL 4 LA En | ! { pH | v x; RE 1 14 AN TN HOT 411 HO 14 LM L ù M! hà en TE (1! El 1% 4 An : : IH PAaT | u f 4 ni 1! F EU i ! : : Lin \ AR LE \ . a un 1,41 1h * H Ml k l .e NE (LA i ; \P | APT CRE 48 - , 4 SEAT on | ut | 1 { ! ILE | Ÿ À | 1 4 OI aut LIEN M 24) 4 LUN V4 11 AR \ : b Vi (\ An (il : il 11 } 4 14 , ou & 4 f ; 1 y k % Wat | sd Ni 6 CE AT EI | HN © nul 1 [l E 4 \ : [_) LA 1 et 0 a { il * i 1 L À Up A æ HT LR 0 % J è ! he 1h) | AA + va 181}% . & Fin ! tn Lan 1} NUL EVE re4 2 1! HRRLRANE 2 k \ a! : A4 | : A L Lt h HI AU À LA t VE Ni 1 Lun n: ! NERO | 10 6 RUE \$ “in hb! | 14.) | \1Be! } k DO 4 le Ai Ĩ \ À. L pe EU À ROBRIPPE 4 À LT L M 4h V gi Or (41 | 1 Lu | UM : J | | 1 nt! |

f LUN 0 D L #4 SEE AE 1: L nl À : (n { HE Lu à ' D + 14 17 || 1} LE ||
LAR | ((vs ii l TRIM | A k 1 (k ENT " ee 1 | l Lt | i ! 1 \ Il | : l D RGP:
ARR ES EE AE "à N | ' x È hi ds : 7 ET Sn etes ze PRE we SR TERRE
RES 7 | mr CAR TUE Lu GES LE Len

dogme» = A PONTS ET does — $z > L = ae 4 = Re AR$ ee mt ee
 — ” = = = z PTS = = : ETS NS . a = = 350 TRAITÉ Des Arcs H F aux
 points Z, en parties égales aux parties de la portion A.B, & menant les
 ordonnées Z S: 11 3 pe . ! 4 11 s'enfuit, par la précédente , que toutes ces
 sommes sont données , tant dans les arcs FAN, con pris entre les points F
 & C, que dans les arcs FS, compris entre les points F & K (puisque FAK est
 un triligne circulaire, & que le quart de cercle F AC en est un autre, desquels
 le point F est le sommet). Donc aussi les mêmes sommes seront données
 dans les arcs FM, puisque si de tous les arcs FN on ôte les arcs FS, il restera
 les arcs FM. Donc l'arc CK fera une ligne donnée, divisée comme on voudra
 en un nombre indéfini de parties aux points 1, ou 4, où S {car toutes ces
 lettres ne marquent qu'un même point), à laquelle sont ajoutées de part &
 d'autre des portions données KF, CB; & il arrive que toutes les sommes
 proposées sont données dans les lignes FM: donc elles le seront aussi dans
 les arcs Z M (parce qu'il est démontré à la fin des propriétés des formes
 simples triangulaires , &c.) Mais les mêmes sommes sont données, par la
 précédente, dans les arcs B O du quart de cercle BC 4 : donc, en ajoutant les
 deux ensemble , les mêmes sommes seront données dans tous les arcs B D,
 puisque la somme des arcs B D n'est autre chose que la somme des arcs BO,
 plus la somme des arcs BL, Ce qu'il falloit démontrer. COROLLAIRE:

D'E CERCLE 35% COROLLAIRE. De ces propositions, il paroît que si la portion quelconque $4 \text{ } \mathcal{A}E$ donnée est divisée en un nombre défini de parties égales en Z , d'où soient menées les ordonnées ZM , on connoîtra la somme des arcs FN , & leurs sommes triangulaires, & leurs sommes pyramidales, &c.

LU EM MCE: Soit une figure plane quelconque (Figure 28.) $ACQT$, dont le centre de gravité soit Y : soit divisée cette figure en tant de parties qu'on voudra, & telles qu'on voudra, comme en deux parties AQT , AQC , desquelles les centres de gravité soient R , V , d'où soient menées les perpendiculaires VS , RK sur une droite quelconque AC (laquelle AC ne coupe pas la figure proposée $ACQT$: mais, ou qu'elle la Borne, ou qu'elle en soit entièrement dehors); & soit sur la même AC , menée la perpendiculaire YO du centre de gravité de la figure entière ACQ : Je dis que le solide fait de la figure entière $ACQT$, multipliée par son bras YO , est égale à tous les solides ensemble faits des parties, multipliées chacune par son bras particulier, c'est-à-dire, au solide de la figure $TAQT$, multipliée par son bras RK , plus au solide de la figure ee multipliée par son bras VS . Car Fig. 23.

Z La: (A ñ nr He tn _ ——— || 3\$2 TRAITÉE DES Arcs Car fi on
 entend une multitude indéfinie de droites paralleles à 4C, & toutes
 éloignées cha cune de fa voifine d'une même diftance moindre qu'aucune
 donnée, & qui coupent ainfi toute la figute, comme il a été fuppoffé dans la
 méthode des centres de gravité : Il eft vifible, par cette mé: thode, que la
 fomme triangulaire des portions de cette figure entiere 4 CQT, comprifes
 entre les paralleles voifines , eft égale à la figure multiplie par fon bras FO;
 & que de même la fomme triangulaire des portions de la petite figure 740,
 comprifes entre les mêmes paralleles, eft égale cette fioure T' 4 Q ,
 multipliée par fon bras RK; & enfin que la fomme triangulaire des portions
 de l'autre petite figure 4 QC, comprifes entre les mêmes paralleles , eft
 égale à cette même portion AQC, multiplie par fon bras 77S. Mais les por:
 tions de la figure entiere 4 COQ T, comprifes entre les mêmes paralleles, ne
 font autre chofe que les portions de fa partie 4 T'Q ; plus les portions de fa
 partie 4 Q C, comprifes entre les mêmes paralleles : & de même la fomme
 triangulaire des portions de la figure entiere, n'eft autre chofe que la fomme
 triangulaire des portions de la partie AQT ; plus la fomme triangulaire des
 portions de l'autre figure 4 QC. Donc aufi la figure entiere ACQT, multiplie
 par fon bras YO, ci: égale à la partie 4QT, multipliée par. fon bras: RK;

DE CE RIGEAES T 353 RK , plus à la partie 4AQC -multipliée par, fon bras 77 S\$. CCROLLATRE. De-là f s'enfuit que la figure entière AT QC mulciphée par fon bras Y O , plus la même figure entière, moins fa premiere portion 4 QT, favoir, la portion 4QC, multipliée par fon bras WS, eft égale A, la premiere partie AQT mulriplce par fon bras RK, plus à la feconde portion -de la foure 4 QC, multipliée par deux fois fon bras VS. Ce qui paroi par l'égalité démontrée dans le Lemme, puifqu'on ne fait qu'y. ajouter de part & d'autre, le folide de la partie 4AQC, multipliée par fon bras FS. Et fi la figure étoit divifée en trois parties , comme le fecteur 4 Q C(Fig. 27.), lequel eft divifé en trois parties, qui font les fecteurs Q 45, S4R, R AC: on montrera de même que la figure entière Q AC, multipliée par fon bras fur C, plus la figure entière, moins fa premiere portion Q4S, c'est-à-dire, la figure reftante S 4 C , multipliée par fon propre bras fur la même ZC, plus l figure entièreQ 4 €, diminuée de: fes deux premieres portions O AS, SAR, c'efta-dire, la portion reftante R 4C mulciphée aufli par fon propre bras fur la même 4 C', font égales à la premiere portion Q 4 \$ multipliée par fon propre bras fur 4C, plus'la feconde portion \$ 4 R multipliée TOME F. Z par Fig. 27 e Lt. y œ j ' CA QE 1 Pi £ MINI 2 np Up 1 | " | ' À HN hi Î | {h 11] | AUAIL | MA RUMEAUL III À WU} À J!! \ 1 (ji |: PLa } L : { | | | | : qi! 1 LO % 1 CA CU IE ER FE \ : \ | | 4 1 | Ne Il ! i (ll k l'A! (ML! , 1 N | | 1k ; y : | * | AU | ù | NU n 1L L ANNE | 1H | IRL AI? IL 11 1 41 BNIIE Qu LR PU EP MEL 'A iM h | 4! | UP | | ail Mi 14° 1 | Ha |! AE 11 A LE! u AR Ë j | | x Î A TRS tUE OL: 4 | | | j 1. | al : | Il 4 1 :] VA y qi : ul 4] 1 L W M M LE | Ml | Hi (4 | (ME DIN EURE \ al à D 2H RE Un ul Di Î NUM l " " | # i M l MN il ! il: RE : > M OT Ê # (| Ait MU 18 17 21H ü 1h } q il In 4 À (EN 24! } BA | j fl 11 | N f. 4, "4 0 A M | i Hi | y = f + Hs ESC : - — LE Sie: ra FUTURS

§s4 TrAtTÉ pes Arcs par deux fois fonbras fur 4C, plus la
 troifieme portion À 4 C multipliée par trois fois fon bras fur 4C. Et ainfi à
 l'infini en quelque nombre de portions que la figure foit divifée. PRENOM
 E UT LI Fig. 32. Soit (Fig. 32.) un fecteur quelconque, qui ne foie pas plus
 grand qu'un quart de cercle, DAC divifé en un nombre indéfini de petits
 Jecteurs égaux QAS, SAR, RAC, defquels les centres de gravité foient P,
 T,N,& Les bras fur AC foient PO, TO, NO: 7e dis que tous les points P,T,N,
 font dans un arc de cercle concentrique à Parc QDC, & que les petits arcs
 NN font trous égaux entre eux , comme les petits arcs D'D font aufi égaux
 entre eux ; & que chacun des petits arcs NN eft à chacun des arcs D'D ,
 comme le rayon FA delarc PTN, au rayon D À de l'ar Q DC; 6 que le-rayon
 F À eff les deux tiers du rayon D A. Cela eff vifible de foi-même , puifque
 ces fecteurs étant en nombre indéfini, ils doivent être confidérés comme des
 triangles ifofceles, defquels le centre de gravité eft aux deux tiers de la
 droite qui divife l'angle par la moitié. COROLLAIRE. De-là il paroît que
 les bras NO des fecteurs D AD,

DE 2CTE LCTIÉ, 354 D AD, font les finus de l'arc FNT, dont le rayon est les deux tiers du rayon À D. ProPostrion III Soit (Fig. 32.) un quart de cercle donné ABC, dans Parc duquel [oit donné le point Q, tel qu'on voudra , & ayant divisé l'arc QC en un nombre indéfini d'arcs égaux aux points D, d'où soient menés les rayons À D: je dis que la somme des secteurs A D C est donnée, & égale au quart du carré de Parc QC multiplié par le rayon: A B, Car chaque secteur 4 DC est égal à la moitié de l'arc DC multiplié par le rayon 4 2. Où puisque l'arc QC est divisé en parties égales, la somme de tous les arcs D C fera égale à la moitié du carré de l'arc entier QC; & partant la moitié de la somme des mêmes arcs DC {era égale au quart du carré de l'arc Q C : & en multipliant le tout par 4B ,la moitié de tous les arcs DC multipliés par 4 B, c'est-à-dire, la somme des secteurs À D C fera égale au quart du carré de l'arc QC multiplié par 4 B. Ce qu'il falloit démontrer. PrRorPostITIoN IV. Les mêmes choses étant posées : je dis que la somme triangulaire des mêmes secteurs A DC, à commencer du côté de Q À, est donnée, & égale à la deuxième partie du cube de Parc QC, multiplié par le rayon. LE2 Car TES PES x # 7. Pr

Fig. 32. 356 TRAITÉ prs Arcs Car la somme triangulaire des
secteurs 4 DC, à commencer du côté de X#Q, n'est autre chose que la simple
somme de tous les secteurs 4 DC, prise une fois, c'est-à-dire, par la
précédente, le quart de QC carré en 4 B, plus la simple somme des mêmes
secteurs 4 D C, excepté le premier Q AS, c'est-à-dire , la somme des
secteurs SAC, RAC, &c. qui sont égaux, par la précédente, au quart de SC
carré en 4B, & ainsi des autres. D'où il paroît que la somme triangulaire des
secteurs 4 D C est égale au quart des carrés de tous les arcs D C. Mais la
somme des carrés de tous les arcs DC est égale au tiers du cube de l'arc
entier QC; donc la somme triangulaire des secteurs 4 DC est égale à la
douzième partie du cube de l'arc entier Q C, multiplié par 4B. Ce qu'il falloit
démontrer. PROPOSITION 'V. Soit (Fig. 32.) le point Q, donné où l'on
voudra dans l'arc BC du quart de cercle donné B AC; & soit l'arc QC,
divisé en un nombre indéfini d'arcs égaux aux points D, d'où soient menés
les rayons D A : Je dis que la somme des solides , compris de chaque secteur
AD C & de son propre bras [ur AC, est connue & égale au tiers de l'arc D'C,
moins le tiers de la droite CK (en menant le sinus QK) multiplié par AB
cube. Car

DE (CRE RAC LUE: 357 Car pour connoître la fomme de ces folides, il fuffira de connoître la fomme de ces autres folides qui leur font iégaux, par le fecond Lemme ; favoir, le petit feéteur Q 4S multiplié par fon propre bras P O, plus l'autre petit feéteur S ZR multiplié par deux fois fon propre bras TO, plus le petit feéteur RAC multiplié par trois fois fon propre bras NO, & ainfi toujours; c'est-à-dire, le petit feéteur Q 45, où le reéctangle compris du rayon 4B, & de là moitié du petit arc Q S où D D, multiplie par PO pris une fois, plus par Z'O pris deux fois, plus par l'autre MO pris trois fois, & ainfi toujours; c'est-à-dire, la fomme triangulaire des bras NO, à commencer par PO, multipliés chacun par la moitié des petits arcs DD, & le tout multiplié par 48. : Or le rayon 4 B eft connu : donc fi on connoit encore la fomme triangulaire des bras NO (multipliés chacun par la moitié des perits arcs DD), On connoitra la fomme de tous les folides propofes. Mais, par le Lemme précédent, tous ces bras NO font les finus de l'arc F PT, defquels la fomme triangulaire eft connue par le Traité des Sinus, & égale au folide compris de 4F quarré, & de la différence dont l'arc FN I fuxpafle la droite GZ (lorfque les finus NO font mulcipliés par les peuts arcs NV). Et partant cette fomme trianguLA laire re nEE-nns x == RS Se cp RE = E = Te arf : | RT 7 y L | Der nain + 4 SP , “dus” * : NS TE s LS =. is ritin Len ARR > qe M ge Dee 24 9 pm ra 12 4 x t e ; À "4 \$ + L # ge + IN C3 (ES À MANIE ” nee PE AT 2 Res se éa 22 : #4" :

353 TRAÏTÉ pres Arcs laire des finus NO fera à la fomme triangulaire des mêmes finus MO multipliés par les petits arcs D D, en raifon donnée; favoir, comme 4F quarré à ÀQ ou AB quarré (parce que la fomme triangulaire de ces finus multipliés par ces petits arcs, eft un folide duquel les arcs donnent deux dimenfions). Donc cette fomme triangulaire des finus NO multipliés par les arcs D D, eft égale à l'arc FAN, moins la droite 1G, multiplié par 4 B quarré, où aux deux tiers de Farc QC, moins les deux tiers de la droite CK , multiplies par 4 B quarre. Et par conféquent la fomme triangulaire des mêmes finus NO multipliés par la moitié des petits arcs DD, eft égale à un tiers de l'arc QC, moins un tiers de la droite CK , multiplié par 4 B quarré. Et en multipliant le cout par AB, le tiers de Parc QC; moins le ets de là droite CX, multipliés par 4B cube, fera égal à la fomme triangulaire des mêmes finus NO multiplies par la moitié des petits arcs DD, & le tout multiplié par 4 B ; ce qui eft démontré être égal aux folides propofés à connoître. PrRroPosiRtIonN VI. Les mêmes chofes étant pofées : je dis que la fomme des folides, compris de chaque feëteur ADC & de fon bras fur AB, eff donnée, & égale au tiers de la droite CK multipliée par AB cube. Re | all he. “ui ñ Le # ie 4 r., AZ. 1 24 Car C4 HU A À AE

D+ CE Rex. 359 Car en menant les bras NT sur 4B, qui feront
 auflé des finus, on démonttera de même que la somme des folides proposés
 est égale à la somme triangulaire des bras ou finus NT, à commencer par PT,
 multipliés chacun par la moitié des petits arcs DD, & le tout multiplié par 4
 B, Et d'autant que la somme triangulaire des finus NT (multipliés chacun
 par les petits arcs NN) est égale, par le Traité des Sinus, à la droite 7ZG
 multipliée par 4 F quarté : on conclura, comme en la précédente, que la
 somme triangulaire des mêmes finus MT multipliés, par la moitié des petits
 arcs DD, & le tout multiplié par 4 B, est égale au tiers de la droite CX
 multipliée par AB cube. PROPOSITION VII. Soit donné (Fig. 17.) le même
 quart de cercle ABC, & un point Q dans son arc; d'où soient menés les finus
 D'X & les rayons DA: Je dis que la somme des triangles AXD est donnée ;
 & égale au quart du carré de la droite AAZ, qui mesure la distance entre
 les finus extrêmes, multipliée par le rayon. Car tous ces triangles AXD font
 la moitié des rectangles AXD, la somme desquels est démontrée, dans
 le Traité des Sinus, être égale à la moitié du carré de la droite AZ
 multipliée par 4 B. Donc, &c. Z 4 PROPOSITION Fig. 27. RE = = = Au
 de + 1 ||

Le F r ... 8 PL se. LP t4 4 : | « 360 TRAITÉ DEs Arcs

PROPOSITION VIIL Les mêmes choses étant posées : Je dis que la somme triangulaire des mêmes triangles AXD , à commencer du côté de QX, est donnée & égale à la huitième partie de Parc QC, multipliée par AB cube, moins la huitième partie du rectangle compris du dernier sinus QZ & de 'Z A (qui est la hauteur du point A) multipliée par AB carré. Car la somme triangulaire des triangles 4 XD, à commencer du côté de ZQ, n'est autre chose que la somme de tous , c'est-à-dire, par la précédente , un quart de 4Z carré multiplié par ZB , plus la somme des mêmes triangles AXD, excepté le premier 4Z Q, qui fera coal, par la° précédente , au quart de 47 carré , multiplié par. 4 B; .8& ainsi toujours. De sorte que la somme triangulaire de ces triangles est égale au quart de la somme des carrés 4 X multipliés par 4B, ou au quart des carrés DT multipliés par. 4B ; ou au quart de l'espace QKC multiplié par AB:carré (car la somme des carrés des sinus DIT est égale à l'espace Q K C multiplié par 4 B, par le Traité des Sinus); c'est-à-dire, au quart du secteur 4 QC multiplié par AB carré, moins le quart du triangle 4KQ est par A B'carré: Ce qui est la même chose se un huitième de l'arc QC, multiplié par 4B cube,

D'EX. CE-R ci En 361 cube, moins un huitieme du rectangle Q Z en ZA, multiplié par 4 B quarté. Prorossion IX. Soit un quart de cercle (Vis. 27.) donné, dans l'arc duquel soit donné le point quelconque Q, & Parc QC étant divisé en un nombre indéfini d'arcs égaux aux points D, d'où soient menés les sinus | DX & les rayons D'A : je dis que la somme des folides ; compris de chaque triangle AXD & de son bras sur AC, est donnée & égale au tiers de la portion AZ en AB cube, moins le tiers de la somme des carrés des ordonnées à la portion AZ (qui sont données, puisque l'espace-AZ QC, & son folide autour de A Z sont donnés par Archimede) multipliés par AB. Car le bras de chacun de ces triangles sur AC, est les deux tiers de chaque DX ; donc la somme des folides proposés n'est autre chose que la somme des triangles ZX D multipliés chacun par les deux tiers de son côté DX. Or chaque triangle rectangle DX D multiplié par les deux tiers de son côté DX, est égal au tiers de DX carré en XD, c'est-à-dire (chaque ZX carré étant D carré, moins DX carré), au tiers de chaque D carré. en DX, moins le tiers de chaque DX cube. Donc tous les triangles ensemble DX* D multipliés chacun par les deux tiers de DX, sont égaux Fig. 27: Ps ee qe ee me mm he HP EE 7 | CIGR" 4 ln. E s de A A (: LS T'ES = — LT = 2 = = STE sr. e — = 2 Wir ps é PRE . L ra i re | : > » 4 — EE — d > — = 22 STE = ER SES x

362 TrRaAïITÉ pes Ârecs égaux au tiers de tous les DX
multipliés par A D où AB carré, moins le tiers de la somme de tous les D X
cubes, c'est-à-dire (puisque tous les D X sont égaux à AZ en AB, & que
tous les D X cubes sont égaux aux carrés des ordonnées à la portion 4Z ,
multipliés par 4 B), au tiers de la portion 4Z en 4 B cube, moins le tiers de
la somme des carrés des ordonnées à la portion 4Z , multipliés par 4 B. Ce
qu'il faut démontrer. Proposition X. Les mêmes choses étant posées :
je dis que la somme des solides, compris de chacun des triangles AX D,
multiplié par son bras sur A B , est données & égale à un sixième de CK (
qui est la différence entre les sinus extrêmes), multipliée par A B cubes
moins un sixième de la somme des carrés des ordonnées à la portion CK
(laquelle est donnée, puisque l'espace QKC & son solide sont donnés par
Archimède) multipliée par AB carré. Car chacun de ces triangles est la
moitié du rectangle 4X en XD, & le bras de chacun sur 4B est le tiers de
XD. Donc la somme de ces triangles multipliés par ces bras, est la moitié
des rectangles 4X en XD, multipliée par un tiers de XD ; c'est-à-dire, un
sixième des solides A en XD carré, ou (puisque chaque XD carré est Le)
HE : KE LR) M: par D à es | v'Pe an : fr 24 Be le

D $\frac{1}{2}$ CERCLE. 363 tft égal à 4 D quarré, moins 4 X quarré) un
 fixieme des folides de 4Xen 4 D quarré, moins un fixieme des 4 X cubes, ou
 un fixieme des folides des DIen AD quarré, moins un fixieme dès D I
 cubes; c'est-à-dire (puifque la fomme des DT eft égale à CK en AB, & que
 la fomme des DT cubes eft égale à la fomme des quarrés des ordonnées à
 la portion CK , multiplies par À B) un fixieme de là portion C X en 4B
 cube, moins un fixieme de la fomme des quarrés des ofdonnées à là portion
 CX, mulpliée par 4B quarré, COROLLAIRE PREMIER. - Si le point
 donné © eft au point B, c'est-à-die, fi on confidère tout le quart de cercle
 enter, au lieu de n'en confidérer que la portion AZ QC : on y conclura les
 mêmes chofes qu'on faites jufqu'ici, puifque ce n'est qu'un cas de la
 propofition générale, & que même ce cas eft roujours le plus facile. Il
 faudra entendre la même chofe dans les pro: poñitions fuivantes. ? ss
 COROLLAIRE II. k. * De toutes ces propofitions, il s'enfuit que s'il y a un
 quart de cercle donné (F9. 27.) ABC, dans l'arc duquel foit donné le point
 Q, & que l'arc Fig. 27.

364 TRAYTÉ des Arcs Farc Q € étant divisé en un nombre indéfini d'arcs égaux en D, on en mene les finus D X & les rayons D 4. Il arrivera : 1°. Que la somme des espaces 4X D C fera donnée, puisque chacun de ces espaces est composé du secteur 4QC & du triangle 4XD, & que la somme de ces parties est donnée; c'est-à-dire, tant la somme des secteurs 4QC, que celle des triangles 4XD, est donnée par les précédentes. 2°. Que la somme triangulaire des mêmes espaces 4X DC est donnée. Car elle est égale aux sommes triangulaires de leurs parties qui sont données par les précédentes. 3°. Que la somme de ces espaces 4# DC, multipliés chacun par son bras sur 4C, est donnée: car la somme de leurs parties (avoir de ses secteurs & de ses triangles), multipliées chacune par leurs bras sur 4C, est donnée par les propositions précédentes. Et il a été montré, par les Lemmes précédents, que la figure entière, multipliée par son bras sur AC, est égale à ses parties multipliées chacune par leurs bras sur la même 4C: 4°. Que la somme des mêmes espaces 4X DC; multipliés chacun par son bras sur 4B, est donnée: car elle est égale à la somme de leurs parties multipliées par leurs bras sur la même 4C, qui est donnée par les propositions précédentes. PROPOSITION

DE CE R'6 LiE 365\$ PRorositIOn XI Soir (Fig. 30.) #n quart de cercle donné MTG, fig. 30. dans le rayon duquel foit donné le point quelconque P, d'où Joir menée l'ordonnée P V, & la portion PM divisée en un nombre indéfini de parties égales aux points ©, d'où foient menées les ordonnées OR : je dis que la Jomme des reélangles compris de chaque ordonnée OR & de fon arc RM (compris entre l'ordonnée & Le fommer M), eff donnée. Car en prenant dans un autre quart de cercle pail 4BC(Fig. 31.) le point correspondant Z, & menant le finus Q Z, & divifant l'arc entier BQC aux points D, «en un nombre indéfimi d'arcs évaux, tant entre eux, qu'aux portions égales OO de la droite A£ P, d'où foient menés les finus D X: il a été démontré dans le Traité des Trilignes, Propoñtion XII, que la fomme des rectangles, compris de chaque OR & de l'arc RM, eft égale à h fomme des efpaces QZ LIN (compris entre le nus Q Z & chacun des autres finus D N ou LN, qui fone entre les points Q,B). Or la fomme de ces efpaces eft donnée; car fi de la fomme des efpaces 4 XD € (compris entre AC & le point B), qui eft donnée par les propofitions précédentes , on Ôte la fomme des efpaces AXS C (compris entre AC & Z Q) qui eft auf donnée Fig. 31. FE 4 À DE ERA RS Fe rs LP x 2 ee, a 3 di. me Y À PA 7 Frs pe 2 "12 FT eg EX: FRANS. EVER | 4 : + U 4 PRES nt De." :: EE GC :

366 TRAÏTÉ pres Ancs donnée par les Corollaires précédents :
 les portions restantes 4 NL C feront aussi données ; c'est-à-dire (en prenant
 les portions au lieu du total }, la somme des portions Z N LQ, plus la
 portion 4Z QC prise autant de fois, c'est-à-dire, multipliée par l'arc
 BLQ: mais cette portion 4Z Q C multipliée par l'arc BQ, est donnée,
 puisque, tant 4 portion, que l'arc font donnés. Donc la somme des portions
 Z NL Q fera donnée ; & partant aussi la somme des rectangles compris de
 chaque OR; & de l'arc RM. Ce qu'il falloit démontrer. PrRrorostTrion XII
 Les mêmes choses étant posées : je dis que la somme des solides ; compris
 de chaque O R 6 du carré de Parc RM, est donnée. Car en reprenant la
 même Figure, il a été démontré dans le Traité des Trilignes, Proposition
 XIII, que la somme de ces solides est double de la somme triangulaire des
 portions Z NLQ; à commencer par B. Il faudra donc de montrer que cette
 somme triangulaire est donnée, & on le montrera en cette sorte. Si de la
 somme triangulaire de toutes les portions 4X* DC, qui est donnée par les
 Corollaires précédents, on ôte la somme triangulaire de toutes les portions
 4 XSC, qui est aussi donnée. par les mêmes

DE CERCZRR 367 mêmes propositions , la somme triangulaire restant des portions 4 N LC fera donnée (c'est-à-dire, en prenant les parties au lieu du total) la somme wangulaire des portions ZNLQ, plus la portion 4Z QC, prise autant de fois, ou multipliée par: la moitié du carré de l'arc B Q 4 car la somme angulaire d'un nombre indéfini de points est égale à la moitié du carré de leur somme simple); mais la portion 4Z QC est donnée, & aussi la moitié du carré de l'arc BQ. Donc la somme triangulaire des ZNLQ l'est aussi. Ce qu'il falloit démontrer. PROPOSITION XIII Les mêmes choses étant posées : je dis que la Somme des carrés des ordonnées RO , multipliés chacun par l'arc RM, est donnée. Car, par la Proposition XV des trilignes, la somme de ces folides est double de la somme des folides , compris de chaque espace Z NL Q, multiplié par son bras sur 4 B. Donc il suffira de connaître La somme de ces derniers folides. Ce qui se fera en cette sorte. Si de la somme des folides, compris de chaque espace 4 XD C & de son bras sur AB, qui est donnée par le Corollaire précédent, on ôte la somme des folides, compris de chaque espace 4 XSC & de son bras sur 4B, on aura la somme des folides, > a 44 #3 si , À LAON ME Ru, 7, À UT PET sn D, AE. CAPOT ER AP te 44 - set AA | LP “

363 TRAITÉ DES Arcs folides , compris de chacun des efpaces reftarits ANEC & de fon bras fur ZB; c'eft-à-dire (en prenant les portions au lieu du total), qu'on conuoïtra la fomme des folides, compris de chaque efpace ZNLOQ & de fon bras fur 4B, plus l'efpace ÀZ QC pris autant de fois, où multiplie par l'arc BQ, & le tout multiplié par le bras de cet efpace 4 Z QC fur AB; car il a été démontré, dans les Lemmes de ce Traité, que l'efpace entier quelconque 4NLC, multiplié par fon bras fur 4B, eft égal à la portion 4 Z Q C , multiplie par fon bras fur 4B, plus à la portion reftante ZNLQ multiplie toujours de fon bras fur la même AB. Or on connoît l'efpace 4Z QC, multiplié par BQ, & le tout multiplié par fon bras fur 4B, puifqu'on connoît l'arc BQ, l'efpace 4ZQC & fon bras fur AB. Donc on connoît la fomme. reftante des efpaces ZNLQ mulupliés chacun par fon bras fur 4 B. Ce qu'il falloit démontrer. PROPOSITION XIV. Les mêmes chofes étant pofées : je dis que la [omme triangulaire des rectangles ; compris de chaque ordonnée OR & de fon arc RM, eft donnée, ou, ce qui eft la même: chofe , la fomme des PO en OR en RM. Car cette fomme eft égale, par la Propofition XIV

r D: 5 C*E RICL,E 369 XIV des trilignes, à la somme des folides,
 compris de chaque espace Z NL Q & de son bras sur Z Q. Donc il suffira de
 connaître cette dernière somme, ou même il suffira de connaître la somme
 des folides, compris de chacun des mêmes espaces ZNLOQ & de son bras
 sur AC; puisque chaque bras sur Z Q diffère du bras sur ZC d'une droite
 égale à 7 4, & que la somme des espaces ZNLQ, multipliés chacun par Z 4,
 est donnée (Z 4 étant donnée, & aussi la somme des espaces ZNLQ). Or on
 connaîtra cette somme des espaces Z NL OQ, multipliés chacun par son
 bras sur AC, en cette sorte: Si de la somme des espaces 4 X DC, multipliés
 chacun par son bras sur 4 C', qui est donnée par le Corollaire précédent, on
 ôte la somme des espaces AXSC, multipliés chacun par leurs bras sur 4C, *
 qui est aussi donnée par le même Corollaire, la somme restante des espaces 4
 L NC, multipliés par leurs bras sur 4C, fera connue; c'est-à-dire (en prenant
 les portions au lieu du total), la somme des portions ZNZOQ, multipliées
 chacune par son bras sur 4C, plus 4Z QC pris autant de fois (ou multiplié
 par l'arc BOQ), & le tout multiplié par le bras de l'espace 4 Z QC sur AC.
 Or on connaît ce dernier produit de l'espace 4Z OC, multiplié de cette sorte (
 puisqu'on connaît l'espace AZQC, & son bras sur 4C, & l'arc QB). TOME F.
 À a Donc SYRIE Le HE Y. se rh PRES D 2 Tr et, D 7 HR PEER à De h ©
 QE LA LÉ “à a : 408

nl à F3 | Ph ; { : L 4! | : | / fall (1) : Fig. 30. #70 TrRaïTs des Arcs
 Donc on connoît la somme des espaces ZNLQ, multipliés chacun par son
 bras sur 4 C. Donc, &c. Ce qu'il falloit démontrer. PROPOSITION XV. Soit
 donné un demi-cercle MT F (Fig. 30.) dont G soit le centre, © dont le
 diamètre MF soit divisé en un nombre indéfini de parties égales aux points
 ©, d'où soient menées les ordonnées O A; & soit donnée une ordonnée
 quelconque P V, menée du point donné P dans le demi-diamètre GM : je dis
 que la somme des rectangles compris de toutes les ordonnées OX (qui sont
 entre l'ordonnée PV & le point F, qui est l'extrémité de l'autre demi-
 diamètre GF) & de l'arc XF (entre chaque ordonnée & le point F) est
 donnée. Car si on ôte la somme des rectangles OR en R M (compris de
 toutes les ordonnées, depuis PF, jusqu'à 47, & de leurs arcs), qui est donnée
 par la précédente, de la somme des rectangles O S en S M (compris des
 ordonnées, depuis le rayon GT, jusqu'à #1, & de leurs arcs), qui est aussi
 donnée par la même précédente : les rectangles restants O C'en CM ;
 compris des ordonnées OC entre GT & P PF, & de leurs arcs, seront connus.
 Donc par les propriétés des sommes simples triangulaires, &c., en
 considérant l'arc T' # comme une ligne donnée, divisée en un nombre
 indéfini de telles

DÉE LE TIRICLAE EL 37T telles parties qn'on voudra, aux
 points €, à laquelle font ajoutées de part & d'autre les lignes données Y RM,
 TBF, & en prenant les droites CO pour coefficients : Il s'enfuit que
 puifque la fomme des rectangles O C en C M eft donnée, auffi la fomme
 des rectangles O C en CF (compris de chaque € O & de l'arc C BF) {era
 donnée. Mais la fomme des rectangles O D en DF (compris des ordonnées
 entre GT & F, & de leurs arcs D F) eft donnée, par la précédente. Donc la
 fomme, tant des rectangles O C en CF, que des rectangles O D en DF, eft
 donnée, c'eft-à-dire, la fomme des rectangles OZ en IF, Ce qu'il falloit
 démontrer. Propofition XVI. Les mêmes chofes étant pofées : je dis que la
 fomme triangulaire des mêmes rectangles OX en XÆ (compris des
 ordonnées qui font entre P & F, & de leurs arcs jufques à F) eft donnée; &
 auffi la fomme des OA quarré en IF; & la fomme des OX en
 IE quarré. Car on montrera de même qu'en la précédente, que la fomme
 triangulaire des rectangles OS en S M 'eft donnée (compris des ordonnées
 qui font entre GT & M, & de leurs arcs jufqu'à 4) ; & auffi la fomme
 de tous les O S quarré en SM; & celle de tous les OS en SA quarré.
 Aa 2 Et

52 TRAITÉ des Arcs Et on démontrera aussi de même que la somme triangulaire des OR en RM est donnée (compris des ordonnées qui sont entre PF & M, & de leurs arcs); & aussi la simple somme des OR carrée en RM; & aussi celle des OR en RM carrée. D'où on conclura de même qu'en la précédente, que la somme triangulaire des OC en CM (compris des ordonnées qui sont entre G & P, & de leurs arcs jusqu'à M) est donnée ; & aussi la simple somme des OC carrée en CM ; & aussi celle des OC en CM carrée. Et de-là on conclura par la propriété des sommes simples triangulaires, &c., que puisqu'on connaît la somme des ordonnées OC, qui sont les coefficients, & aussi leurs sommes triangulaires, & aussi la simple somme de leurs carrés (car l'espace GTV P est connu, & partant la somme des ordonnées O C; & le centre de gravité de cet espace GT JP est aussi connu, & partant la somme triangulaire des OC, où la somme des rectangles GO en OC; & aussi le solide de l'espace GT PP tourné autour de GP, & partant la somme des carrés OC):il s'en suit qu'on connaîtra 'aussi la somme triangulaire des O C'en CF, compris des mêmes OC & de leurs arcs jusqu'à F'; & aussi la simple somme des O C carrée en CF; & aussi celle des OC en CF carrée. Mais on connaît, par la à ER) précédente,

Dir ACHEC RACE IR 373 précédente, la fomme triangulaire des
 OD en D F, compris des ordonnées qui font entre G & F, & de leurs arcs
 jiqu'a F, & auili-l fimple fomme des O D quarré en D F, & celle des OD en
 D F. quarré. Donc en ajoutant les deux enfemble, on nes ll fomme
 triangulaire-des OT en LF, compris des ordonnées. entre P & F, & de leurs
 arcs jufqu'à F; & auili la fimple fomme des OZ quarré en ZF, & celle des
 OZ en 1F quarré. Ce qu'il falloit démontrer. nn QUE SÉ ÿ "2 TS + AU (f
 QUECE A = É A PP CE ; & s LA 4 £ SM 3 4 à DCR A 2 . ? el LR um VS
 la, à) ” Ér BES EP Aa 3 PETIT

: | bas Tu SE è E « v£ “ A * l TC Cat 2, j EPP RS RE AT PP AT
 RAM PS # Fig. 30. 3+4 PeavnrATriaunmrEk = = Ne, DÉTTTS PR AUTEÉ
 DES SOLIDES CIRCULAIRES. E Ç Orr donné le point Ÿ, où l'on voudra
 ùZ Fig, 30.) dans la demi-circonférence donnée MT F; foit lé rayon GT
 perpendiculaire au diametre MF, & foit menée JP parallele à GT, & ayant
 divifé le diametre entier F M en un nombre indéfini de parties égales aux
 points ©, d'où foient menées les ordonnées O À: J'ai fuppofé dans tour le
 difcours précédent, comme je fuppofe encore ici, qu'on fache-que l'efpace
 GT JP eft donné, & aufli fon centre de gravité; parce qu'en menant le rayon
 CF, le triangle GP VF eft donné, & fon centre &e gravité ; & auf le fecteur
 GT F: , & fon centré de gravité , COMme cela peut être démontté fi
 facilement, & comme cela l'a été par plufieuts perfonnes, & entre autres par
 Guldin : en! fuppofant toujours la quadrature du cercle quand il le faut. J'ai
 fuppofé de même que l'efpace VW PM & l'efpace JT FP font donnés, &
 aufii leurs centres de gravité : ce qui n'eft que la même chofe. J'ai fuppofé
 encore que les folides de ces efpaces tournés autout du diametre Â{F, font
 encore

DES SOLIDES CIRCULAIRES. 37 core donnés; ce qui a été démontré par Arcluimede. De toutes lefquelles chofes j'ai pris pour fupposé qu'on sût que la fomme des ordonnées OC entre G & P eft donnée, & que la fomme de leurs quarrés le fera aufli; & de même la fomme triangulaire de ces mêmes droites O C, ou la fomme des efpace 7° CO P, ce qui n'est que la même chofe (comme on l'a affez vu dans la Lettre à M. de Carcavi); parce que la fomme des droites OC, n'est autre chofe que l'espace GT F7 P, & que la fomme triangulaire des OC eft égale à cet efpace multiplié par fon bras fur G T'; & que le folide de la figure GT F $^{\circ}$ P autour de G P étant donné, la fomme des cercles dont OC font les rayons, eft donnée ; & partant aufi la fomme des quartess OC, Il faut entendre la même chofe des ordonnées OR, qui font entre. P & M, & des ordonnées OT qui font entre P&F, II. Je dis maintenant que le centre. de gravité du folide de l'espace 7° MP, tourné autour de MP, eft donné. Car, en prolongeant les ordonnées R © jufqu'en Z , en forte que toutes les OZ foient entre elles comme les quarrés O R, l'espace MZ P fera une portion de parabole, & fon centre de gravité F Aa 2 fera ni > , . NN 4 Ve BIS FEV je EU Ne — 1 f mn. :: Ca Le Le ei A a; FD 4 7 5% SN NX & PARARE ET EU 2 rx

\f 1 | [1 | [1 11 | H PI | F | ! (1 376 PETITE? TRAITÉE fera donné
 par Archimede : d'où menant F B perpendiculaire à P M, le point B fera
 vifiblement le centre de gravité du folide MP autour de PI P ; puifque 1 P
 étant une balance, aux points © de laquelle pendent pour poids les
 perpendiculaires OZ, qu'étant en équilibre au point B; elle fera en équilibre
 au même point B, fi on entend qu'au lieu des perpendiculaires OZ; on y
 pende pour poids les cercles qui leur font proportionnels & qui compofent
 ce folide, & dont les OR font les rayons. Et elle fera encore en équilibre au
 même point B, fi on y pend pour poids les OR quarré. D'où il paroît que la
 fomme triangulaire des OR quarré eft aufli donnée, puüifqu'elle eft égale,
 par la méthode générale des centres de gravité, à la fomme des OR quarrés,
 multipliés par leurs bras BP. Il faut entendre la même chofe, par la même
 rafon, des folides des efpaces PVTG&PVEF, & de la fomme triangulaire
 des quarrés de leurs ordofnées. | [TL Je dis aufli que le folide de l'efpace
 MP, tourne autour de PV, fera donné, & aufli fon centre de gravité. Car en
 divifant P F en un nombre indéfini de parties égales en L, d'où l'on mene
 les perpendiculaires

DES (SOLIDES CIRCULAIRES. 377 cures KZLH:ileft
vifible, par ce qui vient d'etre dit, que la fomme des HK eft donnée, & leur
fomme triangulaire, & la fomme de leurs quarrés, & la fomme triangulaire
de leurs quarrés. Et partant en Otant de toutes la grandeur commune HAL,
la fomme des quarrés des reftantes LK fera donnée, & la fomme
triangulaire de ces quarrés; & partant le folide de P F7 M autour de P F, fera
donné, & aufli fon centre de gravité ; puifque fon bras fur P AZ multipliant
la fomme des quarrés LK, le produit en eft égal à la fomme triangulaire des
quarrés ZK. Il faut toujours entendre la même chofe des efpaces VTGP
&VFP. [V. Je dis de même que la fomme des OR Quarré-quarré eft donnée.
| Car en menant la même parabole MZZ , dont le côté droit foit le rayon
GM, & qu'ainfi chaque À O quarré foit égal à chaque OZ en GM; & partant
aufli chaque À O quarré-quarré , à chaque OZ quarré en GM quarré : Il eft
vifible que puifque , tant le plan M Z P, que fon centre de gravité font
donnés , le folide de MZ P autour de MP fera aufli donné ; & partant auffi la
fomme des quatés OZ ; mais G M quarré eft aufi donné; donc h fomme de
OZ quarré en G M quarré fera donnée, & par conféquent la fomme des OR
quarré= quarré qui lui eft égale: V. Je Lift red Lg 41 : #4à ST [TTA Rs | n 7 ,
Tue: } ag ARR er 1 ; 4 4 } Le,2 2 «3 NEC 2, 2e ee 7) : Stade! £ e ALLIE E
à LE Pa L'CJARE LOTS ch re o À > ANE

378 Pere Trärré V. Je dis enfin que la somme des R O cube fera donnée; ou, ce qui est la même chose, que le centre de gravité du demi-folide de l'espace MVP, autour de MP, sera donné. Car si le centre de gravité du demi-folide du secteur M F7 G, tourné autour de MG, est donné, celui du demi-folide de MY P sera aussi donné; puisqu'on fait que le folide du demi-cône du triangle GP, tournant autour de G P, est donné, & qu'on connoît la raison de ce cône au folide de MFP. Or le centre de gravité du demi-folide du secteur M } 7G autour de MG, sera connu, si on connoît le centre de gravité de la surface sphérique de ce demi-folide, décrite par l'arc MF, voutant d'un demi-tour autour de MG. Car de même que Guldin & d'autres, ont démontré quel du centre de gravité de l'arc 177, on mène une droite au centre G, les deux tiers de cette droite depuis G, donneront le centre de gravité du secteur MPG, parce qu'il est composé d'une multitude indéfinie d'arcs semblables à l'arc 41, qui sont entre eux comme les nombres naturels 1, 2, 3, 3 &c.; ainsi, & sans aucune différence, on démontrera que si du centre de gravité de la surface décrite par l'arc MY, on mène une droite au centre G, les trois quarts de cette droite depuis G; donneront le centre de gravité du folide décrit par le secteur MG, dans le même mouvement; parce es || x 411 | HUM HUE PM , #4 ES

DES SOLIDES CIRCULAIRES. 379 parce que ce solide est composé d'un nombre indéfini de portions de surfaces sphériques , semblables à celle qui est décrite par l'arc MF, qui sont entre elles comme les carrés des nombres naturels 156250139100. | Or le centre de gravité de la surface de ce demisolide sera connu (par la fin du Traité des Trilignes), rien divisant l'arc en un nombre indéfini d'arcs égaux, d'où on mène les finus sur MP, il arrive qu'on puisse connoître la somme de ces finus, & la somme de leurs carrés, & la somme des rectangles compris de chaque finus & de sa distance de 7P. Et toutes ces choses sont connues; car, par le Traité des Sinus, l'arc T° 77 étant donné, la somme de ces finus est donnée; & aussi la somme des carrés de ces finus; & la somme des rectangles compris de ces finus, & de leurs distances de T G. Mais la somme des finus de l'arc entier T'M est donnée; & la somme des carrés de ces finus; & la somme des rectangles compris de chaque finus & de sa distance de T G. Donc, en ôtant les uns des autres , la somme des finus de l'arc 77 M sera donnée; & la somme des carrés de ces finus; & la somme des rectangles compris de ces finus, & de leurs distances de TG ; & partant aussi la somme des sécantes comprises des mêmes finus & de leurs distances de 77 P, puisqu'ils ne diffèrent pas de la somme à "Eu ce LIN r ' SHOT ou :: LR x + # 0 st : : #; 2 pi. "4 : # x 4 À Ca Es Los 3 d: F4 m2 ENTRE EX As "4 En

3830 Périrre: : Taser me des autres rectangles, compris des mêmes finus. & de leurs distances de la droite TG; laquelle fom-. me est donnée, puisque PG est donnée, & auf la somme des finus de l'arc 7 M. Donc le centre de gravité de cette denri-surface. fera donné; & partant celui du demi-folide du feéteur MG; & auffi celni du demi -folide MVP; & partant aufli la somme des OR cube, Et, par la même raifon, la somme des cubes des ordonnées du quart de cercle GT M & GTPF, fera donnée; & partant aufli la somme des cubes des ordonnées de l'espace GT PP, puisque ces ordonnées ne font que les restes de celles du quart > dire PE ae DT d 3 ee EAU. de cercle, quand on en a ôté ceiles des espaces PM; & de même les cubes des ordonnées de l'espace P F7 F font donnés, puisque ce n'est que ajouter le quart de cercle. : k4 : : LEE an NAN + RL {i] NT Pt D EI! he || in [! { | : À : Nil «t AN 74 | IA VI. On démontrera de même que la somme des L K cube est donnée, puisque la somme des HK cube est donnée par Particle précédent, & que la droite Æ L est une grandeur commune, & ôtée de routes les HK. VII. I s'enfuit aufli de toutes ces choses, que tant dans l'espace T7 PG, que dans le quart de cercle entier, la somme des GO cube en OC est Hig- 33: donnée, puisqu'en divifant (Fig..33.) tout le rayon

DES SOLIDES CIRCULAIRES. 381

tayon G T', en un nombre indéfini de parties égales aux points À & Q, & menant les perpendiculaires HL jusqu'à P7, & QQ jusqu'à l'arc; & considérant 7 #7 P G comme un triligne mixte dont TG & G P font les droites, & T F7 P la ligne mixte, composée de l'arc T 7, & de la droite 7 P: la somme de tous les GO cube en OC, prise quatre fois, est égale à la somme des carrés des droites HZ & QQ. Or la somme des HZ carré carré est donnée, puisque, tant AE Lou G P; que PF sont données; & la somme des Q Q carré carré est donnée, par ce qui a été dit ici article IV. Il faut entendre la même chose de tous les GO cube en OS, c'est-à-dire, dans tout le quart de cercle GT M.

VIII. Il paraît aussi par tout ce qui: a été dit, que la somme des GO carré en O S est donnée, puisqu'étant prise trois fois, elle est égale, par le Traité des Trilignes, à la somme des cubes des droites HK, QQ, qui est donnée par le cinquième article. Et de même la somme des GO carré en OC fera donnée, puisqu'étant prise trois fois, elle est égale à la somme des cubes des droites HL, QQ, qui est donnée, puisque la somme des Q Q cube est donnée par le cinquième article, & que la somme des HZ cube est donnée, HL ou PG & PF étant données.

DE: EX 1% pe F LL EL ue 1 J LL 7 2 " PA, Lis, » Il nl 1 } | 1 54 | LA r, LAC \ [I L : 1 M | | | NE 1 8 Qu ! : { t h FE & An EP | x | \ Ù U h j | Al à | { 1 pu F QE il | 1 | Al 4 NH! ' } " 44 4 | t s : D ju +4: J UN H ' / : Î . | : 71 | : (NI 18 | ES W ie es Au nr ; 1h LOU M A É Il [ue 2 ; , [N À PTAE D r* . NME 1 < \ (| : " + 0 1 | \ « 2 [4 Ĩ LS UT EL [& , | : N Pi 1 À { * À } j ; TH à _ 1j TM 41 FI | « 4! LU PE] HE è LI'4 f UP R CR l (IA ns! 1 ATX Es L 4 y 1 Il H. IN 4 e-- '4 i ga RUE | A 4 d À # Ut TE + À H { r Î (LRU SPA 1" F1. : Hill Lé) 1 4 Æ h LÀ k TS in # : AL | 4 a | Fe 2": # MU #2 ni 01 = a me = Tr = = Le " rer mot FA DEA 7 da, TR 7 AE Per L LENrT Re À D, ne ' \ L 4 ke Ù te. | 2 à À ERAE F7 Au Ru? AS Le es L2 DE at é pe 4 RAR E &.

382 Pépin TRATTE IX. Il paroît auffi par-là que la fomme pyramidale des OC eft donnée, ou, ce qui eft la même chofe, la fomme triangulaire des efpaces 7 COP, comme on verra dans l'avertiflement fuivant, puifque le double en eft donné, favoir, G O quarré en O C. I faut dire le même de la fomme pyramidalé des OS , ou de la fomme triangulaire des efpaces MOS, & de même pour la fomme pyramidale Fig. 30. des O D (Fi. 30.). Et partant (par la fin du Traité des fomes fimples , triangulaires , &c.), la fomme pyramidale, tant des droites O R entre P & M, que des droites OT entre P & F, fera donnée, puifque les efpaces MF P, TFG, font donnés; & qu'ainfi la fomme triangulaire des efpaces FCO fera donnée. Mais la fomme triangulaire des ef paces F D O eft auffi donnée (puifque ce n'eft que la fomme pyramidale des droites O D). Donc, en ajoutant les deux enfemble, la fomme triangulaire des efpaces FI O fera donnée, c'eft-à-dire, la fomme pyramidale des droites O Z. On le démontrera de même de celle des droites OX. 20e ... FRE 8 4 k: RS | cad 74 re AVERTISSEMENT. On a dit en un mot que la fomme pyramidale des droites OC, eft la même chofe que la fomme triangulaire des efpaces CO P : & on a dit auf dans le commencement, que la fomme triangulaire des mêmes OC eft la même chofe que la fimple fomme

DES SOLIDES CIRCULAIRES. 383 fomme des efpaces 7 CO P; parce que l'un & l'autre eft vifible, & affez expliqué par la Lettre à M. de Carcavi. Car la fomme triangulaire des OC, à commencer par &, n'eft autre chofe que la fimple fomme de ces lignes, c'eft-à-dire, l'efpace GT FP, plus k fimple fomme de ces mêmes lignes, excepté la premiere GT, c'eft-à-dire, l'efpace FCVP; & ainfi toujours. De forte que la fomme triangulaire entiere eft proprement la fomme de tous les ef paces 7 CO P. Et de même la fomme pyramidale des mêmes CO, n'eft autre chofe que la fomme des fommés angulaires des mêmes lignes; c'eft-à-dire, premièrement , la fomme triangulaire de toutes les lignes CO, laquelle, par ce qui vient d'être dir, fit la même chofe que la fimple fomme de tous les éfpaces 7 CO P : fecondement, la fomme triangulaire de toutes les lignes OC, excepté la premiere TG, laquelle n'eft autre chofe que la {omme de tous les efpaces 7 CO P, excepté le premier Ÿ TG P : troifiémement, la fomme trianoulire des mêmes droites O C, excepté les deux premieres TG, FC, ce qui eft encore la même chofe que la fomme des efpaces 7°COP, excepté les deux premiers WT GP, VCY P; & ainfi toujours. Or cette maniere de prendre les efpaces } CO P, én les prenant premièrement tous; & enfuite tous, excepté | IN " \ (} L ». (1 4 'Eu \] | D |. } L i 1! | (| | : il w y . ant : Al ' » | « 1 } F QUE PS À " { | Ch d À # a | “ ! 44 ” | NI | N Ÿ ; h | { | ! CA | ! | BE (MS # Lac 2 : DIEU ie, Lo mr SZ, CE: CR er L 23 su Dee. Le Se D 2 a Jr me Pas 1. ye 146 ps 2h = HIS AT = À +

384 Perirr TraArTé, &c excepté le premier; & puis tous, excepté les deux premiers, &c. : c'est ce qu'on appelle en prendre la somme triangulaire; & ainsi la somme pyramidale des OC n'est autre chose que la somme triangulaire des espaces 7 COP. Et de même la somme triangulaire des espaces MRO est la même chose que la somme pyramidale des droites RO, & la somme triangulaire des espaces FIO est la même chose que la somme pyramidale des droites ZO. Toutes ces choses viennent de ce que les droites OT sont des ordonnées, c'est-à-dire, qu'elles sont également distantes, & partent des divisions égales & indéfinies du diamètre; ce qui fait que la simple somme des ordonnées est la même chose que l'espace compris entre les extrêmes. Mais cela ne ferait pas véritable des sinus, parce que les distances d'entre les voisins ne sont pas égales entre elles, & qu'ainsi la simple somme des sinus n'est pas égale à l'espace compris entre les extrêmes; à quoi il ne faut pas se méprendre. \4 GES 45 | : | TRAITÉ

_____ =

BREL SR AE 2 KR Piük SR ATEIT SEX Sn TRAITÉ GÉNÉRAL
 DE LA ROULETTE: Ou Problèmes touchant la Roulette, propofés
 publiquement & réfolus par A. DETTONVILLE. AVERTISSEMENT. O:
 fuppose ici qion fache la définition de la Roulette , & qu'on foit averti des
 Écrits qui ont été envoyés fur ce fujet à tous les Géometres pour leur
 propofer les problèmes fuivants. PROBLÈMES propofés au mois de Juin
 1658. Étant donnée (Fig. 22.) une portion quelconque de la Roulette COS,
 retranchée par une ordonnée quelconque OS à l'axe CO : trouver la
 dimension du centre de gravité, tant du triline COS, que des Di formés
 par ce triline , tourné premièrement autour de la bafe OS, & enfuite autour
 de son axe CO , d'un demi-tour feulement : en Juppofant qu'on connoiffe la
 raifon de la bafe de la Roulette AF à son axe FC, c'est-à-dire, de la
 circonférence au diamètre ? TOME F. Bb Problèmes ip, 22

— RIT. dr"? Fe Rs 7e => AE 'ii S ER OR A SR A Et KE DRE em
out 1,1 Pop dt Lee ES .s vs rh | Î || : en || Nul 40 || [pi fl 336 TOR ANT CE
N'ÉIR AL PROBLÈMES propofés au mois d'Oétobre 165,8, Trouver la
dimenfion & le centre de gravité des Surfaces de ces deux demi-folides ?
RÉSOLUTION des Problèmes touchant la dimenfion & le centre de gravité
du sriligne G de [es demi -folides. k L a été démontré à la fin de la Lettre à
M. de Carcavi, que pour réfoudre tous ces problèmes, il fufhit de connoître
la dimenfion & le centre de gravite, tant du triligne CO S, que de fes deux
doubles onglets, fur l'axe & fur la bafe. Et il a été démontré dans le Traité
des Trilignes, que pour connoître la dimenfion, & le centre de gravité de ce
triligne & de fes doubles onglets, il fufñc de connoître ces fix chofes; favoir,
en divifant l'axe CO en un nombre indéfini de parties égales en Z , d'où
foient menées les ordonnées Z F: 1, La fomme des ordonnées ZY. 2. La
fomme de leurs quarrés. 3. La fomme de leurs cubes. 4. La fomme
triangulaire des mêmes lignes ZY. s. La fomme triangulaire de leurs
quarrés. 6. La fomme pyramidale des mêmes lignes ZY. Or pour connoître
toutes ces fomme, je me fers

DE LA Roulette. 387 fers d'une feule propriété de la Roulette, qui réduit la Roulette à fon feul cercle générateur : la voici. Chaque ordonnée à l'axe de la demi-Roulette est égale à l'ordonnée du demi-cercle générateur ; plus à l'arc du même cercle, ONE entre l'ordonnée & le fommet. Soit CRE Ze demi-cercle générateur de la demiRoulette CYAF, & que les ordonnées à la demiRoulette Z Y, coupent la dermi-circonférence en M: Je dis que chague ordonnée Z'Y est égale à lordonnée ZM, plus à l'arc MC. Cette propriété est Frop facile, pour s'arrêter à la démontrer. Or il paroît par-là qu'on trouve la Roulette entiere dans fon feul cercle générateur; puifqu'en confidérant toujours chaque arc CM & fon ordonnée M Z , comme une feule ligne mixte Z MC, on trouvera toutes les ordonnées Z F de la demi-Roulette dans toutes les lignes mixtes Z MC. Donc tous les problèmes propofés couchant â la Roulette, qui viennent d'être réduits à la connoiffance des fix fommes des ordonnées à l'axe, se réduiront maintenant à la connoiïflance des fix mêmes fommes des lignes mixtes ZM C: & ainfi tous ces problèmes de la Roulette se réduiront aux problèmes fuivants, où l'on ne parlera point de Roulette, & où l'ori ne confidérera qu'un feul demiis == = £ LL LL LUE | cercle. Bb 2 Etant

Fig. 13. 358 TRAITÉ GÉNÉRAL Étant donnés (Kig. 23.) un demi-cercle CRE, & la portion quelconque CO de son diamètre, laquelle soit divisée en un nombre indéfini de parties égales aux points Z, d'où soient menées les ordonnées ZM, chacune desquelles, avec son arc MC, soit considérée comme une seule & même ligne mixte ZMC : trouver : 1. La somme des lignes mixtes ZMC. 2. La somme des carrés de ces lignes mixtes ZMC. 3. La somme des cubes de ces lignes mixtes ZMC... 4. La somme triangulaire des lignes mixtes ZMC. s: La somme triangulaire des carrés de ces mêmes lignes ZMC. G. La somme pyramidale des lignes mixtes ZMC. Or tous ces problèmes vont être facilement résolus par le moyen des Traités précédents, en NE cette sorte. 1. Pour connaître la somme des lignes mixtes ZMC. Il faut connaître la somme de leurs parties; savoir, la somme des ordonnées ZM, plus la somme des arcs CM. Or la somme des ordonnées est connue, puisque l'espace COR est connu: & la somme des arcs CM est donnée par le Traité des Arcs de cercle. Donc la somme des lignes mixtes ZMC est donnée. 2. Pour

DE LA ROULETTE. 389 2. noi connoitre la Jomme des quarrés des lignes mixtes ZMC. Il faut connoître la fomme de leurs parties ; favoir, la fomme des quarrés Z M (qui eft donnée, puifque lefpace CRO éft donné; & aufi fon folide autour de CO, par Archimede) : plus la fomme des quarrés des arcs C M (qui eft donnée par le Traité des Arcs de cercle) : plus deux fois la fomme 'des rectangles C M en MZ, compris de chaque arc & de fon ordonnée (qui eft donnée par le Traité des Arcs de cercle). Donc puifque toutes les parties font données, le tout fera donne; c'eft-à-dire, la fomme des quarrés des lignes mixtes Z MC. à Pour connoître la [omme des cubes des lignes mixtes ZMC. Il faut connoître la fomme de leurs parties ; favoir, la fomme des Z M cubes, (qui eft donnée par le Traité des Solides circulaires) : plus la fomme des C M cube (qui eft donnée par le Traité des Arcs) : plus trois fois la fomme des Z M quarré en MC (qui eft donnée par le Traité des Arcs): plus trois fois la fomme des ZM en MC quarré (qui eft donnée par le même Traité des Arcs }. Donc les parties étant données, le tout eft donné. Bb 3 4. Pour | |

a bee rh 4 390 TRAITÉE GÉNÉRAIL 4 Pour connoître la fomme triangulaire des lignes mixtes. Z MC. Il faut connoître la fomme triangulaire des parties ; favoir , la fomme triangulaire des Z M (qui eft donnée par le Traité des Solides circulaires) : plus la fomme triangulaire des arcs CM (qui eft donnée par le Traité des Arcs de cercle). Donc les parties étant données, &c. . . é s« Pour connoître la fomme triangulaire des quarres des lignes mixtes ZMC, Il faut connoître la fomme triangulaire des patx' . ' , 4 ties; favoir, la fomme triangulaire des ZM quarté (qui eft donnée par le Traité dès Solides circulaires) : plus la fomme triangulaire des C M quarré (qui. eft donnée par.le Traité des Arcs_ de cercle) : plus deux fois la fomme triangulaire des reclangles Z M en MC (qui eft donnée par le Traité des' Arcs, &c.). Donc, &c. 6. Pour connoître la fomme pyramidale des lignes mixtes Z. MC. I faut connoître la fomme pyramidale des parties ; favoir, la fomme pyramidale des ordonnées Z M (qui eft donnée par le Traité des Solides cir'culaires) : plus la fomme pyramidale des arcs CM (qui eft donnée par le Traité des Arcs de cercle). Donc, &c. Et

pe LA RoOULETT:E. 391 Et par conféquent on connoît toutes les
chofes . propofées à trouver par les premiers problèmes , touchant la
dimenfion & le centre de gravité de la demi-Roulette & de fes portions , &
de leurs demi-{olides. Je viens maintenant aux derniers, pour lefquels j'ai
befoin de ces deux Lemmes. LEMME PREMIER. Soit CDF un demi-cercle
(Fig.16.) dont FC foit le diametre : foit FCEZ un autre dermi-cercle, dont
CF prolongée & doublée [oit le diamerre : je dis que quelque droite qu'on
mene du point F, comme FDN, coupant les deux circonférences en D, N,
d'où on ments la droite DC au point C, & les droites NK, N M,
perpendiculaires , l'une à FC, l'autre au rayon FE, qui eft perpendiculaire à
CZ : il arrivera toujours que N M fera égale à FK; ce qui eft vifible : & que
NK fera égale à CD; ce qui fe voit par la fimilitude des triangles rectangles
FK AN, FDC, ayant les côtés FC, FAN égaux entre eux. Je dis enfin que
Parc CN fera égal à Parc CD. Car ces arcs font entre eux en raifon
compofée de la raifon des rayons FC, GC (G étant le centre du demi-cercle
CD F), & de la raifon des angles NFC, D GC. Or un de ces angles eft
double de l'autre, & réciproquement un des rayons Bb 4 eft Fig, 26e 5 "mm
mm _ - _____ = DRE EL ES r _____ = ' * _ = ee 7 EE us ---- { \y 1 | ! |
| | | 1! | | | | | ' (fil | ll | D HAN WEAR | 1 | | HUE | NH EU | (l | | (fl! {I [HA
N'ANIN E I LA 114 ! | 1] IRC { DEA | RIM | [11 Al 11 LAN ON TE RE ||
(\ D 1 {! A "A ! M Bel PME 1 {1 (il Lan | | | Ati | | { | | JU fl LL | } \ ' LT |
14 AL | |14 | Lun : 118] LH ul | Pi | ' AUNT 1 + |

392 TRAITÉE GÉNÉRAZ ; est double de l'autre ; & ainsi la raifon compofce de ces deux raifons, dont l'une est double & l'autre fous-double, est la raifon d'égalité. PS Ci (1 LoE MONTE AIT RL ss CN SP HET Fig. 25. Soir GD F2 demiscerele (Fig. 25.) dont FC Joit le diametre : soit FCEZ un autre demi-cercle, dont CF prolongée & doublée, soit : le diametre : soit CHK une parabole dont CF soit laxé , C le [ommet, & dont le côté droit soit égal a CF & partant à@ la bafe FK : soit donnée une portion quelconque CO du diametre, & soit OR perpendiculaire au diametre. Soient accommodées à Parc CR un nombre indéfini de droites CD, dont la premiere foi x, la feconde 2 , & ainfi toujours felon l'ordre . des nombres naturels, toutes terminées au point ©, G cts , a LÉ de || coupant la circonference aux points D, d'où soient menées les droites D'G perpendiculaires a CF, coupant la parabole en H : soient auffi menées les droites D'F, du point F par tous les points D, coupant Parc CE en N, d'où soient menées NM V; paralleles à CF, recoupant en V la circonférence, & en M le rayon FE perpendiculaire à FC: || 1 «Ait | à | LA a: || [1 || Je dis que toutes les droites FM feront égales à routes les droites CD, chacune à la fiene; & qu'ainfi la plus grande FM fera coupée en un nombre indéfini de parties égales aux points M. Cela est vifble par le Lemme précédent. Je

DE LA ROULETTE. 393 . Je dis de même que toutes les MN ou MV, feront égales à toutes les FD, chacune à la. fiene. Ce qui est aussi visible par le Lemme précédent. Je dis de même que les droites FL feront égales aux droites CD, chacune à la, fiene ; © qu'ainfi la plus grande FL fera coupée en un nombre indéfini de parties égales aux points L.. Car par la nature du cercle chaque CD quarré est Cgal à chaque rectangle FC en CG, c'est-à-dire ; par la nature de la parabole à chaque G H quarré; &c partant chaque CD est égal à chaque G H ou à chaque FL. | Je dis aussi que tous les rectangles compris de CE & de chaque GD, sont égaux à tous les rectangles. FM en M V, chacun au sien. Car FC en GD est égal à CD en DPF, c'est-à-dire , par ce qui vient d'être démontré, à.F M en M7. AVERTISSEMENT, Je suppose qu'on fasse que les mêmes choses étant posées que dans le Lemme précédent, si le cercle C D F est le générateur de la demi-Roulette CBAF, & qu'on prolonge les droites D G jusqu'à ce qu'elles coupent la Roulette au point B: il arrivera que toutes Les portions B B de la courbe feront égales entre elles ; parce que chaque portion

y z PTÈ mx ER NE Kà| re 4 Ha 441 sa | K 394 TRAITÉ
GÉNÉRAL tion de la courbe CB fera double de chaque droité: CU). C'est
cette propriété dont j'ai dit dans l'Hiſtoire de la Roulette, que M. VWren l'a
produite le premier : je ne m'atrèete pas à la démontrer ici, parce que
plufieurs perſonnes l'ont déjà fait; car depuis M. Wren, M. de Roberval en a
produit une démonſtration & M. de Fermat enfuite, & depuis encoré M.
Auzoult : & j'ai moi-même dcmontré la même choſe dans un Traité à part
(1) ,où j'ai fait voir que cette propriété dépend immédiatement de celle-ci;
ſavoir, que ſi la demi-circonférence d'un cercle eſt divifée en un nombre
indéfini d'arcs égaux , & que de l'extrémité du diametre on mené des
droites à chaque point de diviſion , la ſomme de cés droites fera égale au
quairé du diametre. Et cette propoſition n'eſt encore que la même choſe que
celle-ci : la ſomme des ſinus d'un quart de cercle, eſt égale au quarré du
rayon (ce qui eſt démontré dans le Traité des Sinus, propoſirion [] de forte
que ces trois propoſitions ne font pteſque qu'une même . choſe. PE CE EE
RE (1) Nous n'avons pas ce Traité; heureuſement il peut être ſuppléé par
celui des Sinus du quart de Cercle. RÉOLUTION

D'R-ATAUR OU LE TITLE: 395 RÉsozuTION des derniers
 Problèmes touchant la dimenfion & le centre de gravité des f[urfaces des
 demi - folides . de la Roulette. fL a été démontré à la fin de la Lettre à M. de
 Carcavi, que, pour réfoudre ces problèmes, il fuffit de connoître la
 dimenfion & le centre de gravité des furfates courbes , des deux doubles
 ongllets de l'axe & de la bafe. Et il a été démontré dans le Traité des
 Trilignes, que pour connoitre ces chofes, il fuffit de connoître les cinq
 fuivantes; favoir, en divifant (Fig. 24.) la ligne courbe CS de la portion
 donnée de la demi-Roulette , en un nombre indéfini de parties égales aux
 points B, d'où foient menés les finus fur l'axe B G: 1. La forme: des finus
 BG. 2, La fomme des diftances GE, 3. La fomme des GK quarre. 4. La
 fomme des reclangles BG en GE. s. La fomme des BG quarré. Or pour
 connoître toutes ces fommes, je me ré de deux propriétés de la Roulette.
 L'une eft celle, dont j'ai parlé, qui réduit la Roulette au cercle; favoir, que
 chaque B G (coupant le cercle générateur en D) eft égale à la ligne mixte
 CDG, en

396 TRAITÉE GÉNÉRAL en considérant la droite GD & l'arc DC, comme une seule ligne mixte G D C. L'autre, qu'en menant les droites C D, chaque portion de la Roulette CB fera égale à deux fois la droite C D. D'où il paroît que puisque la première portion C B de la Roulette est 1, que la seconde CB est 2, & ainsi toujours selon l'ordre des nombres naturels : il arrivera aussi que la première CD fera, la seconde CD, 2; & ainsi toujours selon la même suite des nombres naturels. Donc tous les Problèmes des surfaces des demifolides de la Roulette qui viennent d'être réduits à la connoissance des droites BG & GF, se réduiront aux problèmes suivants, où l'on ne parlera plus de Roulette, & où l'on ne considérera qu'un seul demi-cercle. G Fig. 14 Étant donné (Fig. 24.) un demi-cercle CDF & la portion quelconque CO de son demi-diamètre; & l'ordonnée OR; 6 un nombre indéfini de droites CD, dont la première soit x, la seconde 2, 6. selon l'ordre des nombres naturels, étant accommodées à l'arc CR, & toutes terminées au point C, & coupant l'arc aux points D, d'où soient menées DG perpendiculaires à l'axe; chacune desquelles DG avec son arc DC soit considérée comme une seule & même ligne mixte : il faut trouver : 1. La somme des droites FG. | 2. La

DE LA ROULETTE. 397 2. La Somme des FG quarré. 3. La somme des lignes mixtes GDC. _ 4. La somme des quarrés de ces lignes mixtes GDC. s. La Somme des rectangles compris de chaque ligne mixte GDC & de EG. _ Or tous ces Problèmes vont être résolus en reprenant toute la construction du second Lemme, en cette sorte. 1. Pour connoître la somme des lignes EG. Il suffit de connoître la somme des lignes Z H qui leur sont égales : or la somme des droites LH est connue, puisque l'entière FL étant divisée en un nombre indéfini de parties égales, la somme des HL est la même chose que l'espace parabolique FCHL, compris entre FC & la dernière H L, lequel espace est connu par Archimede. 2. Pour connoître la somme des FG quarré. Il suffit de connoître la somme des Z H quarré, laquelle est connue, puisqu'on connoît par Archimede, tant l'espace FCHL, que son centre de gravité, & partant son solide autour de FL; ce qui donne la somme des quarrés LH, & par conséquent des quarrés FG. 3. Pour

2" Dés J TD - ET De LCL 2» re Es phil RAA.) COLIS #7 CET 1
 ” ||| h ||| : . 4! M | Ds | Lu L/a : A | À : fl 2,1 +: { x | rs Eux 1 1 a arile 398
 TRAITTÉ GÉNÉRAL 3. Pour connoître la [omme des lignes mixtes
 GUC., Il faut en connoître les parties, favoir, la fomme des droites GD & la
 fomme des arcs DC, Or la fomme des dtoites DG fera connue, fi en les
 multipliant chacune par la droite connue FC, on peut connoître la fomme
 des rectangles FC en DG, ou la fomme des retangles € D en DF, ou la
 fomme des rectangles FM en MP, Mais puifque l'entiere FM eft divifce en
 un nombre indéfini de parties égales aux points 47, d'où font menées les
 ordonnées MF : il eft évident que la fomme des rectangles FM en M F eft
 donnée par le Traité des Solides circulaires; & par conféquent auflî la
 fomme des reétangles FC en DG, & partant auflî la fomme des DG, Et
 quant à la fomme des arcs DC, elle eft la même que la fomme des arcs CN.
 Car puilque F M eft divifée en un nombre indéfint de parties égales, d'où
 font menées les ordonnées AN, il s'enfuit, par le Traité des Arcs, que la
 fomme des arcs E N eft donnée; & partant auflî la fomme des arcs CN, qui
 font les reftes du quart de 90 degrés. Et par conféquent auflî la fomme des
 arcs C D qui leur font égaux. 4. Pour connoître la fomme des quarrés des
 lignes mixtes GDC. Il faut connoître la fomine de leurs parties, favoir,

DE LA ROULETTE. 399 voir, la somme des GD carré, plus la somme des arcs DC carré, plus deux fois la somme des rectangles GD en DC , compris de chaque GD & de son arc DC . Or la somme des GD carré est connue, puisqu'elle est égale à la somme des rectangles FGC , ou à la somme des LH en AJ , lesquels sont donnés, puisque leur somme doublée est égale à la somme des entières ZL carré, qui est donnée, moins la somme des ZH carré, qui est aussi donnée, comme il a été dit, moins encore la somme des AZ carré, qui est aussi donnée, puisque ce sont les restes de l'entière LI , qui est donnée, par les propriétés des sommes simples, sommes triangulaires, &c. Et quant à la somme des arcs CD carré, ou des arcs CN carré, elle est visiblement donnée, par le Traité des Sommes simples, &c., puisque ce sont les arcs restants du quart de cercle, & que la somme des carrés de leurs compléments EN est donnée par le Traité des Arcs. Enfin la somme des rectangles de chaque GD & de son arc DC sera connue, si en multipliant le tout par la droite connue CF , il arrive qu'on connoisse la somme des CF en GD en l'arc DC , ou des FM en MN en l'arc NC . Or la somme de ces derniers est connue, si que (chaque arc NC étant égal à CE moins EN) cette

400 TREALDTÉ PCÉNÉRAL cette fomme des FM en MN en NC n'est autre chose que la fomme des FM en MN multipliee par l'arc EC'(qui est donnée, puisqu'on connoit, tant l'arc EC, que la fomme des FM en MN), moins la fomme des FM en MN en NE, où la fomme triangulaire des rectangles MN en NE, qui est aussi donnée par le Traité des Arcs de cercle. CI BST - LT? - | AR air 2 = £ EX HAE 4. Pour connoître la fomme des rectangles compris de chaque ligne mixte CDG 6 de GF. Il faut connoître la fomme de leurs parties, favoir, la fomme des rectangles FG en GD, plus la fomme des rectangles FG en arc DC. Or on connoitra la fomme des FG en GD, si on connoît la fomme des CG en GD (puisque ce sont les restes de la fomme des C F en G D qui est connue, puisqu'on connoît, tant la droite CF, que la fomme des droites DG); & l'on connoitra la fomme des CG en G D, si en les multipliant à | 4! 741 Al [ph h Il \ a | + : #6 MTS + 2,2 2: par le carré connu de CF, on peut connoître __Ja fomme des C F quarté en CG en GD, ou des CF en CG en CF en GD, ou des droites CD carré en CD en DPF, ou des droites CD cube en DF, ou des FM cube en MY, laquelle est connue par le Traité des Solides circulaires. POSTE ETS Et quant à la fomme des rectangles FG en arc DC, on démontrera de même qu'elle est connue, PE EPS A si on peut connoître la fomme des GC en ac CD: # "

DE LA ROULETTE. 40^e CD; & on connoîtra la somme des GC en arc CD, si en multipliant le tout par la droite con nue C F, on peut connoître la somme des CF en CG en arc DC, ou la somme des droites CD carrée en atc CD, ou la somme des F M carrée en arc VC, c'est-à-dire (puisque la première F M est 1, la seconde, 3, & ainsi toujours) la somme pyramidale des arcs CN; laquelle somme pyramidale des arcs CN est donnée, par le Traité des Sommes simples, triangulaires, &c., puisque la somme pyramidale des arcs restants EN est donnée par le Traité des Arcs de cercle. Donc on connoît toutes les choses cherchées touchant la dimension & le centre de gravité, des surfaces des demi-folides de la demi-Roulette & de ses portions. Mais la dimension & le centre de gravité des demi-folides sont déjà donnés; & par conséquent tous les Problèmes touchant la Roulette sont entièrement résolus. Il fera sur cela facile à tout le monde de trouver les calculs de tous les cas, par le moyen de ces méthodes. us TOME 7. Ce nt un | | Al 1" h | {HUE UNI EL Il | l NE hell ; R | (hi | Ja RUE | PE FA pe NAT EAN l LIN A nt + 144 ! UN NAN A HN] ||| | { :h LR HAN ANA E \ + \ 1 (| P bp NOEL Fr eu l | LI 14 NE 1: WT (l ù 4 |||| | f | | NN Na D L A : mb L'pnr det n 2: “ + L ” en. à : - - 1e GNT L - _ . > :S Et:

£ »— ‘ "RC ‘ + (} Ce k = F PAT * AE et f 401 DimeEnston pës
 Courses FSU ES LAiAL ee, 0 ee ee ee ____ ne té et a nent 0e Le ee ee 2
 _____ tt tt tt DIMENSION DES ZIGN ES" COUV RPES DE
 TOUTES LES-ROULETTES: BST LSREE DE M DETTONVILLE A M.
 HUGUENS DE ZULICHEM. Moxsieur, Comme j'ai fu que M. de Carcavi
 devoit vous envoyer mes folutions des Problèmes que j'avois propofes
 touchant la Roulette, je l'ai prié d'y joindre la dimenfion des courbes de
 toutes fortes de Roulettes, que je lui ai donnée pour vous l'adrefler, parce
 qu'il ma dit que vous avez témoigné d'avoir quelque envie de la voir. Je
 voudrois, Monfieur, que ce put vous être une marque de l'eftime que j'ai
 toujours faite de votre mérite. Je croyois qu'on ne pouvoit rien y ajouter :
 mais VOus l'avez encore augmentée par cette horloge incomparable, & par
 ces merveilleufes dimenfions des furfaces courbes des Conoïdes que vous
 venez de produire s

DE TOUTES LES ROULETTES. 408 produire, & qui font un
fujet d'admiration À tous nos Géometres. Pour moi je vous avoue que j'en ai
été ravi, par la part toute particuliere que je prends à ce qui peut agrandir
votre réputation, & par la pañlion avec laquelle je fuis, &c. ' — — — — — D'I-
M'E "NS T'ON Des lignes courbes de toutes les Roulettes. E n'ai qu'une
feule méthode pour la dimenfion des lignes de toutes fortes de Roulettes, en
forte que, foit qu'elles foient fimples, alongées ou accourcies, ma
conftruétion eft toujours pareille, en cette maniere : Soit (Fig. 43.) une
Roulette de quelque efpece que ce foit, dont 4F foit la bafe; FC l'axe; & CM
F la circonférence du cercle cénérateur, laquelle ait telle raifon qu'on
voudra à la bafe F 4: &c ayant divifé cette circonférence en un nombre
indéfini d'arcs égaux aux points Af, je mene de tous les points de divifon
des droites M B paralleles à la bafe, qui coupent la courbe de la Roulette,
chacune en un point B ; & je joins vous les points voifins B B. Je fuppofe
que les divifions de la circonférence foient en fi grand nombre que la
fomme de ces dtoites BB (lefquelles fonce les fous-rendantes de la Gcr2
Roulette) 1. Les 10083 14 Éte: SE à Fig. 43.

{1 ° nn. | fo | UE C2 Cid, MZ 104 DiMENSION DES CouRrBÉS
 Roulette) ne different de la courbe de la Rotlette, que d'une ligne moindre
 qu'aucune donnée. J'ai auflî befoin qu'on fache (& je le démontrerai en peu
 de mots) que fi ôñ fait : comme la circonférence du cercle générateur, à la
 bafe de la Roulette , ainfi le rayon FG, à la portion GH de l'axe prife depuis
 le centre; & que de l'extrémité H de cette portion on mene toutes les droites
 AM: 1] arrivera que toutes ces droites feront entre elles comme les fous-
 tendantes B B de la Roulette, & quelles les repréfentent; & c'eft pourquoi je
 les appelle les repréfentantes. Cela fera vifible , fi on entend que le cercle
 générateur foit placé à tous les points B, lequel coupe chaque parallele B M,
 voifine au point O, en forte qu'on n'en confidere que les arcs BO, lefquels
 feront égaux, tant entre eux, qu'aux arcs MM, & les portions B O des
 paralleles feront égales encre elles. Et ainfi chaque arc BO fera à la portion
 O B de la parallele, comme la circonférence FMC à la bafe 4F, ou comme
 GM à GH. Et il arriveralainfi que chacun des petits triangles B O B fera
 femblable à chacun des triangles MG H : chacun des angles HGM étant
 égal à chacun 'des angles BOB ou BMC, faits de chaque parallele & de la
 circonférence. Et partant chaque B B fera à chaque arc BO, comme chaque
 HM à MG. Et toutes les B B enfemble , c'eft-à-dire , la courbe,

DE TOUTES LES ROULETTES. 404 be, fera à tous les arcs égaux enfemble OZ ou M M, c'est-à-dire, à la circonférence CM F, comme la somme des H M, à la somme des G M, ou au rayon multiplié par la circonférence CHF. Donc en multipliant les deux premiers termes par le rayon, la courbe multipliée par le rayon, est à la circonférence CM F multipliée par Le rayon, comme la somme des représentantes HM, au rayon multiplié par la circonférence CM F ; mais les deux conséquents sont égaux : donc la courbe multipliée par le rayon est égale à la somme des représentantes M (multipliées chacune par les petits arcs M M); mais le rayon est donné : donc si la somme des H M est donnée, la courbe le fera aussi. Donc toute la difficulté de la dimension des Roulettes est réduite à ce problème. La circonférence d'un cercle donné, étant divisée en un nombre indéfini d'arcs égaux ; 6 ayant mené des droites d'un point quelconque donné -dans le plan du cercle à tous les points de division ; trouver la somme de ces droites? Ce problème est aisé à résoudre, quand le point donné est dans la circonférence (comme il arrive quand la Roulette est simple ; c'est-à-dire, quand la base 4 F est égale à la circonférence CMF); car alors la somme de ces droites est égale au carré du diamètre, parce que c'est la même chose que $7e ds NE \times CH + 2 De nr 7 4$ LATEST IEP TES TT 7 | ro ve . 13 * ea É cie he Ye LLe 2 à 2. TES EX — — — — —
 EEE — — — — — | z ane e- TE mx Se ze = are - #1 + bd 4 NX. 4 P; _ L à e s. 2
 2 MA 1 + \ > avc d * \ d * Y 4 LU TN . à \ He: à SS RS { Fe, SN à ; 3 . S : «
 Fa «FE RENEN Pr ha _ TES * | nes Ag r SUR Fr, «us \$> : RE SR LT rs
 +94 FR € LB, *

ER O7 TE Æ , Fe 4 24 | à | C4 l 406 DirimEensron pès Courses
 que la somme des sinus droits du quart d'un autre cercle, dont le rayon fera
 double. Et si on résout ce problème quand le point donné est au-dehors , il
 sera résolu en même-temps quand le point est au-dedans. Car s'il y a deux
 cercles concentriques , dont les circonférences soient divisées chacune en un
 nombre indéfini d'arcs égaux, la somme des droites menées d'un point
 quelconque de la grande circonférence à tous les points de division de la
 petite, fera la même que la somme des droites menées _ d'un point
 quelconque, pris dans la petite circonférence,, à tous les points de division
 de la grande; & chacune des droites d'une multitude fera égale à chacune
 des droites de l'autre multitude, parce qu'elles font les bases de triangles
 égaux &c semblables. Et ainsi la somme des unes fera égale à la somme des
 autres, pourvu qu'elles soient multipliées par les mêmes arcs. Mais si on
 entend qu'elles soient multipliées chacune par les arcs auxquels elles se
 terminent, alors la somme de celles qui sont menées aux divisions de la
 grande circonférence , fera à la somme des autres, comme la grande
 circonférence est à l'autre, où comme le grand rayon au petit. Et ainsi si la
 somme des unes est donnée, la somme des autres le fera aussi, les deux
 cercles étant donnés. Or j'ai ce Théorème général, La

DE TOUTES LES ROULETTES. 407 La circonférence d'un cercle donné étant divisée en un nombre indéfini d'arcs égaux, & un point quel: conque étant pris où l'on voudra, soit en la circonférence, soit dedans, soit dehors, soit [ur le plan; Soit hors du plan, d'où soient menées des droites à tous les points de division: je dis que la somme de ces droites fera égale à la surface d'un cylindre oblique donné. | Et je le démontre en cette sorte dans le cas où le point est pris hors du cercle, qui est le seul dont j'ai besoin ici, & duquel s'enfuient tous les autres. à | LEMME. Soit Le cercle donné A L B (Fig. 44.) dont la circonférence soit divisée en un nombre indéfini d'arcs égaux en L; soit le point H hors du plan, & élevé perpendiculairement sur un des points A, c'est-à-dire, que la droite AH soit perpendiculaire au plan du cercle; & soient menées toutes les HE: Je dis que la somme des droites H L multipliées chacune par chaque petit arc LL, est égale au quart de la surface du cylindre oblique, qui aura pour base le cercle AMC, dont le rayon fera AB, & pour axe la droite HB, menée à l'autre extrémité du diamètre A B. Car soient les côtés du cylindre oblique MN, qui coupent la base supérieure en N; & soient MO les touchantes de la base inférieure: sur lesquelles Fig. 44

7 A ss V2 lai 22 & M à LA | ei Æ 408 DiMEensron Des Courses
 quelles soient menées les perpendiculaires NO. Il est visible que le quart de
 la surface oblique 1F TC est composé des parallélogrammes compris des
 arcs MM & des côtés MN, ou des rectangles compris des mêmes arcs AM
 & des perpendiculaires NO : mais les arcs MM sont égaux, tant entre eux,
 qu'aux arcs LL. Donc la somme des perpendiculaires NO est égale à la
 somme des droites HZ, ce qui est proposé fera évident. Or chaque WO est
 égal à chaque XL, comme il est visible par l'égalité & la similitude des
 triangles HBL, NMO. Car l'axe HAB est égal & parallèle au côté NM, &
 les droites BL, MO sont parallèles, étant perpendiculaires l'une à MB,
 l'autre à ZL, qui sont parallèles à cause de l'égalité des angles CBM, BAL,
 PROPOSITION. Soit maintenant (Vis. 45.) Le point H, donné dans le plan
 du cercle: ALB & hors le cercle, & soient menées les HL aux points L
 des divisions égales : je dis que leur somme est égale à la surface d'un
 cylindre oblique. Car menons le cercle dont BH est le diamètre, & prenons
 47 en sorte que PF carré soit égal à B4 carré, plus deux fois le rectangle
 BAH; & menons le cercle dont BY soit le diamètre, & où il arrivera sur que
 quelque droite qu'on

DE TOUTES LES ROULETTES. 409 qu'on mene du point B ,
comme PB L1Z, le quarré de BI fera égal à BL quarté, plus deux fois le
rectangle BLZ. Soit auſſi élevée 77O perpendiculaire au plan du cercle, &
ſoit priſe BO égale à BH, & ſoient menſes toutes les droites OZ (aux points
où les droites B L coupent la circonférence C IV) : je diſ que chaque droite
O J eſt égale à chaque droite HL. Car 4 B quarré eſt égal à H L quarré, plus
LB quarré , plus deux fois le rectangle HZ Y (en prolongeant HL juſqu'au
cercle: B Z H), ou à AL quarré, plus ZB quarré, plus deux fois le rectangle
BZZ, on à HL quarré, plus BJ quarré: mais auſ OB quarré (qui eſt le même
que 4B quarré) eſt égal à OZ quarré, plus BZ quarré. Donc O 1 quarré, plus
Z B quarré, eſt égal à AZ quarré ; plus Z B quarré : donc auſſi OZ quarré eſt
égal à HL quarté; & partant OI à HI. Donc la ſomme des O Left la même
que la ſomme des ÆZ, ſi on les multiplie chacune par les mêmes petits arcs;
mais la ſomme des OZ (multiplies par les petits arcs ZZ, leſquels ſont
égaux entre eux, puifque les arcs ZL Z le ſont par l'hypothefe) eſt égale au
quart de la ſurface d'un cylindre oblique, par le Lemme, puifque 7°O eſt
perpendiculaire au plan du cercle B 1. Donc la ſomme des AL multipliées
par les mêmes arcs 21, eſt égale au quart de la même ſurface

PM A æ DS 4 ll je | 4! | (il At 410 'DrmEensron Des COURBES
face. Donc la fomme des HZ multripliées par les petits arcs LL, eft auili
égale à une furface d'un cylindre oblique proportionnée à l'autre. Ce qu'il
falloit démontrer. On démontrera la même chofe, fi le point donne X eft pris
hors du plan, & élevé perpendiculairement fur le point Æ. | Car en prenant
dans la perpendiculaire 770 le point X , en forte que K O quarré, plus deux
fois le reétriangle K O F, foit égal à H X quarré : il eft vifible que toutes les
XL feront égales à toutes les K I, chacune à la fienne, puifque chaque XYZ
quarré, ou XH quarré, plus HZ quarré, fera égal 4 chaque KZ quarré, où O I
quarré (qui eft éval a HL quarré), plus KO quarré, plus deux fois KOP, qui
font pris égaux à KA quarré. Donc la fomme des XL eft égale à la fomme
des K J, laquelle eft égale à la furface d'un cylindre oblique par le même
Lemme. Cio: NSC: L: US: S 1:30 N: De toutes lefquelles chofes il s'enfuit que
{a . fomme (Fig. 43.) des repréfentantes AM, étant égale à la furface d'un
cylindre oblique, elle fera par conféquent égale au reétriangle qui a pour
hauteur l'axe du cylindre oblique, & pour bafe la courbe de l'ellipfe,
engendrée dans la furface du cylindre oblique par le plan perpendiculaire à
l'axe. Or la même

DE TOUTES LES ROULETTES. 4^{te} même forme des
représentantes est déjà montrée égale à la courbe de la Roulette multipliée
par le rayon de son cercle générateur. Donc la courbe de la Roulette
multipliée par le rayon, est égale à la courbe d'une ellipse multipliée par
l'axe d'un cylindre oblique donné. Donc comme l'axe du cylindre donné, est
au rayon donné, ainsi la courbe de la Roulette est à la courbe d'une ellipse.
Ce qu'il falloit démontrer. En suivant cette méthode, on trouvera le calcul
des deux axes de l'ellipse, dont la courbe se compare à celle d'une Roulette
donnée. Le voici tel que je le fis envoyer à beaucoup de personnes au
commencement de Septembre 1658, en Angleterre, à Liege & ailleurs, &
entre autres à M. de Roberval, à M. de Sluze, & quelque Re après à M. de
Fermat. * Soit fait: comme la circonférence du cercle générateur, à cette
même circonférence plus la base de la Roulette, ainsi le diamètre du cercle à
une autre droite; cette droite soit le grand demi-axe d'une ellipse. Soit fait :
comme la circonférence plus la base, à la différence entre la circonférence
& la base, ainsi le grand demi-axe, à l'autre demi-axe. La moitié de la
courbe de l'ellipse, qui aura ces deux demi-axes, fera égale à la courbe de la
Roulette entière, & les parties aux parties. On

DirmMEensron Des Courses On conclura auflí de tout ce qui a été démontré, que deux Roulettes , lune alongée, l'autre accourcie, ont leurs lignes courbes égales entre elles, s'il arrive de part & d'autre que la bafe de l'une foit égale à la circonférence du cercle générateur de l'autre. Il me feroit aife de réduire cette méthode à la maniere des Anciens, & de donner une démonfration pareille à celle que j'ai faite de l'égalité des lignes fpirale & parabolique. Mais parce que cela feroit un peu plus long & inutile, je la laiffe , quoique je l'aie toute prère; je me contente d'en avoir donné cet exemple de la fpirale & de la parabole. On voit auflí, par toutes ces chofes, que plus la bafe de la: Roulette approche d'être égale à la circonférence du cercle générateur, plus le petit axe de l'ellipfe qui lui eft égale, devient petit à l'égard du grand axe : & que quand la bafe eft égale à la circonférence , c'eft-à-dire, quand la Roulette eft fimple , le petit axe de l'ellipfe eft entièrement anéanti ; & qu'alors la ligne courbe de l'ellipfe, hiquelle eft toute applatie , eft la même chofe qu'une ligne droite , favoir , fon grand axe : & dela vient qu'en ce cas la courbe de la Roulette eft auflí égale à une ligne droite. Ce fut pour cela que je fis mander à ceux à qui j'envoyai ce calcul, que les courbes des Roulettes étoient toujours, par leur nature, égales à des ellipfes ; & que cette admirable égalité

be roures Les Rourérres. 4i3 égalité de la courbe de la Roulette
fimple à une droite que M. Wren a trouvée, n'étoit, pour ainfi dire, qu'une
égalité par accident, qui vient de ce qu'en ce cas l'ellipfe fe trouve réduire à
une droite. À quoi M. de Sluze ajouta cette belle remarque dans fa réponfe
du mois de Septembre dernier, qu'on devoit encore admirer fur cela l'ordre
de la nature , qui ne permet point qu'on trouve une droite égale à une
courbe, qu'après qu'on a déjà fuppofé l'égalité d'une droite à une courbe: Et
qu'ainfi dans la Roulette fimple, où l'on fuppofe que la bafe eft égale à la
circonférence du générateur, il arrive que la courbe de la Roulette eft égale
à une droite. DE = ——— } , | Ni! | (l 111188 1 (] ' HUM i j UN LU TRE
LE EU ANT {l nn MN || } At Ũ AU NUM EAU L | au Hu ñ | À À a !t * | (
UN 4 ? VA 4 À (i | (| \ MINI ER RTE } \HHE à (EAU MC A à UC 1 (10 A
Re] Î 1 | À | LIU 4: L ' | { | h U4l l lt | un l EN [{l N - if À | } 1h HA LUNA
& {AA 1! À RU | { all MAL UNI F Hi NTI RE AU ll { RUE Ha! \ Hi | (ul!
(1ja D } || [|| Î IE ! | i | ER a MERE ps pr à & 74. ++ TR, EC LS . “4 | æ
27 li € "EH S . FE es DRE UE RS LEUR a. Pannes

A4 Dex L'EscALtrEr;, a ——— RE LPSC CEA LEE Re DES
TRIANGLES CYLINDRIQUES, ET DE LA SPIRALE AUTOUR D'UN
CÔONE. NRC D 0 ra 7 * ur LAON 2 Éotet ne: | FOR Re PEN RE 2 JO DE
M DETTONVILLE AND EE SsLeU ZE: Chanoine de la Cathédrale de
Liege. Mo INSEE UFR, JE n'ai pas voulu qu'on vous envoyât mes
Problèmes de lxRouletre, fans que vous en recufliez en même-temps
d'autres que je vous ai promis depuis un fi long temps, touchant la
dimenfion & le centre de gravité de l'Æfcalier & des Triangles
cylindriques. J'y ai joint*aupli la réfolution que j'a pe . | + l La n 4 : 9 r4 +
F4 7 || QU, [|| : fl | ln faite d'un problème, où il s'agit de la dimenfion d'un
folide formé par une fpirale aurour d'un cône. C'eft une folution que j'aime,
parce que j'y fuis arrive par le moyen de vos lignes en perle ÿ & Go É FA Pr
que tout ce qui vous réfarde meft cher. Cela me la

DES TRIANGLES CYLINDRIQUES, &C. 414 la rend plus
confidérable que fa difficulté , laquelle je ne puis défavouer, puifqu'elle
avoit paru fi grande à M. de Roberval : car il dit qu'il avoit réfolu ce
problème depuis long-temps; mais qu'il n'a jamais rien voulu en
communiquer à qui que ce foit, voulant le réfervier pour s'en fervir en cas de
néceffité, de même qu'il en tient encore fecrets d'autres fort beaux pour le
même deffein. Sur quoi je fuis obligé de reconnoître la fincérité de fa
maniere d'agir en ces rencontres : car aufsitôt qu'il fut que je l'avois réfolu ,
Il déclara qu'il n'y prétendoit plus , & qu'il n'en feroit jamais rien paroître ;
par cette raifon que n'en ayant jamais produic la folurion, il devoit la quitter
à celui qui l'avoit produite le premier. Je voudrois bien que tout le monde
en usat de cette forte , & qu'on ne vit point entre les Géometres cette
humeur toute contraire de vouloir s'attribuer ce que d'autres ont déjà
produit, & qu'on ne trouve qu'après eux. Pour vous, Monfieur, vous en êtes
bien éloigné, puifque vous ne voulez pas même avoir l'honneur de vos
propres inventions : car je crois que pour faire favoir que vous avez trouvé ,
par exemple, cette parabole , qui eft le lieu qui donne les dimenfions des
furfaces des folides de la Roulette autour de la bafe , Il faudroit que ce fût
moi qui le difle, auflibien que les merveilles de votre nouvelle Analyfe, &
tant d'autres chofes que vous m'avez fait l'honneur | r \ À } (nl | A Ÿ | ADP !
11 (1h | \ (RE. | {n |! { | 1 fl | ta (l | 1

Se A Fr 2 " = Lo: LICE ——. es L, ES rest * 4 ' S 14 "4 ts ae ù ja
LES Êe Fig. 27 ê 46. 416 DE L'EscAttiEer, | neur de me communiquer avec
cette bonté que > 2 » A vous avez pour moi, qui mengage d'être toute ma
vie, &c. POUR LA DIMENSION Et le. centre de gravité de l'efcalier,
DÉFINITION. Or (Fig. 27 & 46.) l'arc de cercle quelconque CQ divisé en
un nombre indéfini d'arcs égaux aux points 2), d'où foient menés les rayons
D 4; & foit entendu le premier feéteur 4 SC, élevé audeffus du plan du
fecteur entier 4Q C, & para lélement à ce même plan; en forte que chaque
point du fecteur 4S C élevé réponde perpendiculairement au même fecteur
4SSC dans le plan du cercle; c'est-à-dire, que le point À élevé foit dans la
perpendiculaire au plan du cercle, mené du centre À ; & de même le point C
au-deffus du point C, &c. Et foit la diftance d'entre le plan du cercle & le
feéteur ASC élevé, égale à un des petits arcs D D. Soit le fecond feéteur 4
RC élevé de même patallélement au plan de [a bafe, & diftant de ce même
plan de deux petits arcs D D. Et foit le troifieme fecteur élevé de même de
la diftance de trois petits arcs. Et ainfi toujours. Le

DES TRIANGLES CYLINDRIQUES, &c. 417 Le folide, composé de ces secteurs, s'appellera éscalier: & le rayon AQ s'appellera le commencement ou le premier degré; & AC fera le dernier degré de l'éscalier, & le secteur $4QC$ en fera la bafe. PROPOSITION PREMIERE. Trouver la dimension d'un éscalier donné, en fuppofant toujours la quadrature du cercle quand il le faut. L'éscalier eft égal au quart du quarré de l'arc de fa bafe multiplié par le rayon. Cela eft vifible, & démontré dans le Traité des Arcs, Propofition III. PROPOSITION II. Trouver le centre de gravité d'un éscalier donné. Le centre de gravité de l'éscalier eft élevé au deflus de la bafe du tiers de l'arc de la bafe. Cela eft vifible de foi-même, & s'enfuit auf du Traité des Arcs, Propofition IV, Et fi de ce centre de gravité on abaiffe une perpendiculaire fur la bafe, le point où elle tombera fera donné, puifque les diftances, tant de la droite AB , que de la droite $4C$ (Fig. 27 ou 32.) font données par les Propofitions V & VI des Arcs. F Car la diftance de la droite $4C$ multipliant l'éscalier, eft égale à la fomme des folides compris

TOME 7, D d de

. ESS V7 2 LA à & a | k Bu 4 PA Fo : k PAS si 218 Devis Else At
 En; de chaque fecteur 4 DC, & de fon bras fur 4C: laquelle fomme eft
 donnée par la Propofition V des Arcs. | Et fa diftance de la droite 4B
 multipliant de même l'efcalier, eft égale à la fomme des folides compris de
 chaque fecteur 4 D C & de fon propre bras fur 4 B ; laquelle fomme eft
 donnée par Ja Propofition VI. Le calcul en eft trop facile à faire, puifqu'on
 connoît l'efcalier & les fommés de ces folides, par les Propofitions V & VI.
 Et fi on cherche, felon cette méthode, le centre de gravité de l'efcalier, qui a
 pour bafe le quart de cercle, on trouvera qu'il eft élevé au-deffus du plan de
 la bafe de la douzieme partie de la circonférence : & que le point où rombe
 cette perpendiculaire fur la bafe, eft diftant du premier degré 4 B, d'une
 droite qui eft au rayon, comme quatre fois lequarre du rayon, à trois fois le
 quarré de l'arc de 90 degrés : & diftant du dernier degré AC, d'une droite
 qui eft à fa diftance de AB, comme l'arc de 90 moins le rayon, eft au
 ZayOIL PRE SAS POUR

DES TRIANGLES CYLINDRIQUES, &C. 419 POUR LA

DIMENSION Et le centre de gravité des Triangles cylindriques.

DEFINITION: SI trois points quelconques font pris comme on voudra sur la surface d'un cylindre droit, & qu'on les joigne par des lignes planes (lesquelles feront nécessairement, où des droites, ou des arcs de cercle, ou des portions d'ellipse) : la portion de la surface cylindrique comprise de ces trois lignes, s'appellera Triangle cylindrique. Et si de deux points pris dans la circonférence de la base inférieure d'un cylindre droit, on mène les côtés du cylindre jusqu'à la base supérieure : la portion de la surface cylindrique, comprise entre ces deux côtés & les arcs des deux bases, s'appellera Rectangle cylindrique. AVERTISSEMENT. Je ne m'arrête pas à démontrer qu'en supposant la quadrature du cercle, on connoît le centre de gravité, & la dimension d'un rectangle cylindrique donné. Et je ne m'arrête pas aussi à démontrer qu'on aura la dimension & le centre de gravité d'un triangle cylindrique quelconque, si on connoît la dimension d'un

420 Dr .r'EscAtrér, fion & Îe centre de gravité d'une forte de triangle cylindrique, que j'appelle de la premiere espece; Fig. 3. favoir, de ceux qui, comme ZFB (Fig. 3.), font composés de l'arc BF de la bafe, d'un côté FZ du cylindre, mené d'une des extrémités F de l'arc BF, & d'une portion d'ellipfe Z B, engendrée dans la surface cylindrique par le plan Z B À, pañlant par le rayon BA, mené de l'autre extrémité B de l'arc BF. Car fi on veut s'y appliquer, on verra incontinent qu'un triangle cylindrique quelconque, se Dep EEE divifera toujours en plusieurs petits triangles qui {esont, ou la fomme, ou la différence des triangles cylindriques de cette espece , ou de rectangles cylin& à Ke k driques : de la même forte qu'un triangle réétligne uelconque se divifera toujours en plusieurs perits triangles, lesquels feront les fommés ou les différences de triangles rectangles donnés; & qu'ainfi en connoiffant la dimenfion & le centre de gravité des feuls triangles réétangles, on connoïtroit aufli la dimenfion & le centre de gravité de toutes fortes de triangles recilignes donnés. Ainfi on connoïtra la dimenfion & le centre de gravité de toutes fortes de triangles cylindriques, fi on connoît ces chofes, tant dans les rectangles cylindriques (où elles font connues d'elles-memes, comme Il eft déjà dit), que dans les triangles cylindriques de la premiere espece, dans lesquels l

DES TRIANGLES CYLINDRIQUES, §C. 429: quels on va le
réfoudre dans la Proposition suivante. PROPOSITION. Étant donné un
triangle cylindrique ZFB de la première espèce ; en trouver la dimension &
le centre de gravité? Cette proposition est déjà résolue dans le Traité des
Solides circulaires. Car ce triangle cylindrique n'est autre chose que la
surface courbe de l'onglet du triline circulaire BFEÆ. Or dans ce Traité on
a donné la dimension & le centre de gravité de la surface de son double
onglet. Et il est visible que le centre de gravité de la surface d'un des
onglets, est dans la perpendiculaire au plan du triline, menée du centre de
gravité de la surface du double onget : de sorte qu'il ne reste qu'à trouver la
longueur de cette perpendiculaire ; laquelle est aisée, puisque la surface de
l'onglet multipliée par cette perpendiculaire , est égale à la moitié de la
somme des carrés des sinus de l'arc FB (quand - le plan qui retranche
l'onglet est inclinée de 45 degrés : & quand on l'a dans cette inclinaison, on
l'a aussi dans toutes les autres, puisqu'elle est toujours en même raison à la
hauteur ZF). Or la moitié de la somme des carrés de ces sinus est connue,
& égale (par le Traité des Sinus, Proposition II) à la moitié de l'espace BFE,
multiplié par le rayon BA. | DA eon ' (l [| 1 À : Wu | (fl nl À } Î ME 4 dl
LIN 0 WE UE lp NIUE HUIT 0 ||

|| HE 400 422 De L'ÉscALIER, On fuppose ici que dans la Figure 3, A B C'eff, un quart de cercle , dont À est le centre; & que la surface BFCY ZB est une portion de la surface du cylindre droit, retranchée par le plan Y Z B 4, passant par le rayon B 4, & formant dans la surface cylindrique la portion d'ellipse BZ 7. | DIMENSION D'un solide formé par le moyen d'une spirale autour d'un cône. O r un cercle donné 4BCD, dont À soit le — centre, & À B un demi-diametre; soit B G perpendiculaire au plan du cercle de quelque grandeur que ce soit, par exemple, égale à 4B, & soit entendu , en un même temps, la ligne 4B , se tourner uniformément à l'entour du centre 4, & la ligne BG, se porter en même-temps & par un mouvement uniforme le long du demi-diametre B A; & soit encore entendu en même-temps le point B monter uniformément vers G ; en sorte qu'en un même temps le point B arrive à l'extrémité de la ligne BG, la ligne B G au centre.4, & le demi-diametre 4 B au point B d'où il étoit parti. Par ces mouvements , la ligne BG décrira une spirale BJ H 4 dans le plan du cercle; & le point B, en montant, décrira une espèce de spirale en l'air,

DES TRIANGLES CYLINDRIQUES, &c. 423 l'air, ou autour d'un cône BFE, qui se terminera au point $\text{\AA}$, d'où la perpendiculaire 4E est égale à BG. On demande la proportion de la sphère, dont le cercle donné est un grand cercle, avec le solide spiral décrit par ces mouvements, & terminé par quatre surfaces; savoir, la spirale B HA décrite dans le plan du cercle, la portion de surface conique bornée par la droite BE & par l'espece de spirale BFE, le triangle rectiligne BAE, & la surface cylindracée décrite par BG portée autour de la spirale B H A. S O L U: T 1 O N: Soit coupée B 4 en un nombre indéfini de parties égales aux points © : & soit le point T celui du Rulicre d'où soit mené le demi-cercle TH, qui, comme il m'a été de l'entendre, contera le Fes prolongé en $\text{\AA}$ au même point où arrive la spirale. Soit sur ce demi-cercle élevée la surface cylindrique T P FH, qui coupe les surfaces qui bornent le solide, & y donnent EAU communes sections T PFH, qui sera composée de quatre lignes; savoir, la ligne TP, qui se trouvera dans le plan BAE, la ligne FH dans la surface cylindracée égale à TP, le demi-cercle P F dans la surface supérieure, & le demi-cercle de la base T A coal au précédent P F, comme tout cela est évident; & D d 4 ainsi j pi { | | ! ! HN Q h NU! il | i \ HN A | } Î [| u | Il Il ! HT 1 | | 1 | ! ! \ Î [| HI Û | } 1 { : | M | | | | il | | | { Â k | | } } | 11 | | { (| F lr 1! , | | | } h (! Hill j | | W | M: | | 174 1] ù TE 1 { ! M (1 ll | { Uh \ { i ll (| (1 (IR | IN un fu) ll HE | | Â | ! ! 1 on 1 1 D IPS ER] | NICE 1 ll DEMI L #0 WW} | (N | | 1 { ! NEDALEU LA UNE I LA NA | il k 1 HU } INR |] UM (PE 1e RE D RU: iv 1 : AIRE 1 (AURA Ni À ul NL ar Hal Hi! mi AU PLUIE (Min | i n r L | nn WE | | | \ 4 {h H 21 NN EL Nr f fi | # (L LA 4 Na 4 LIRE USA ! } UE Î HUI! (Al AH : 1 un} A NICE if LUE ul M! Îl ir ot 4 IA IH HE | ! HE ; (UE VAN! | 1h | À NN RUN MAITRE OR De 3. 4712 ei 0, #, lie Lie Lz . Lies ra : . ea ant" + er. y À FR M À : Q! : LR : 74 C2 \ à . : ge » L L SR" . : y Nu À + À. ETS SN: De 12 EN) ALT V1 Lu L — NS à Le AE en ! Pur ." Le D. 0 À pe è LA L _ L'H 24 EI L. Mer ? CR Lt] C4 0 ak D NE £ > ns Es gnants/7

424 Dr, EsicA Leenr ainfi la figure T P FH fera un rectangle cylindrique. Soit maintenant d'un des points © mené larë OT à l'entour du centre 4, qui coupe la fpirale en Z, & foit élevé de même le rectangle cylindrique OYSJZ: je dis, & cela fera incontinent démontré, que ce rectangle cylindrique OF SI fera au premier PT HF, comme BO quarré en O À, à BT quarré en 7' À. Ce qui étant toujours véritable en quelque lieu que foit le point O: il s'enfuit que tous les rectangles cylindriques enfemble, c'est-à-dire, le folide propofé, fera à celui du milieu PT HF pris autant de fois, c'est-à-dire, au demi-cylindre qui a le cercle donné pour bafe, & pour hauteur TP, qui eft la moitié du demi-diametre, comme tous les BO quarré en O 4 enfemble, à BT quarré en T' A, ou à BT cube pris autant de fois, c'est-à-dire, comme la perle du troifieme ordre au rectangle de laxe & de l'ordonnée du milieu : laquelle raifon M. de Sluze à donnée, non-feulement dans la perle du troifieme ordre, mais encore dans celle de tous les ordres, où cette raifon eft toujours comme nombre donné à nombre donné. Donc le folide propofé eft au demi-cylindre du cercle donné & de la hauteur 7 P, en raifon donnée ; donc il eft aufli en raifon donnée au cylindre entier de même bafe & de la hauteur quadruple, favoir, du diametre entier BD, & par conféquent \ à

DES TRIANGLES CYLINDRIQUES, &C. 42\$ à la sphere, qui est les deux tiers du cylindre. Ce qu'il falloit démontrer. Or que le rectangle cylindrique YOTS soit au rectangle cylindrique PT'HF, comme BO carré en O 4, à BT carré en T A: cela se prouve ainsi. Je dis, premièrement, que l'arc OI est à l'arc TH, comme le rectangle BO, O A au rectangle BT, T A; car les arcs OT, T H sont en raison composée des demi-diamètres 40, AT, & des angles, ou des arcs BC, BCD, qui sont, de la nature de la spirale, comme CZ ou BO, à DH ou BT; donc ces arcs sont en raison composée de BO à BT & de OA à T A, c'est-à-dire, comme le rectangle BO, O A au rectangle BT, TA. Venons maintenant aux rectangles cylindriques YOIS, PTHF:: il est visible qu'ils sont en raison composée des hauteurs & des bases, c'est-à-dire, en raison composée de OY à TP, ou BO à BT, & de l'arc O T à l'arc TH, c'est-à-dire, comme on l'a vu, du rectangle BO, O A au rectangle BT, T A: mais la raison composée de BO à BT, & du rectangle BO, O A au rectangle BT, T A, est la même que la raison de BO carré en O 4 à BT carré en T A. Donc, &c. Ce qu'il falloit démontrer. = Les solides des autres spirales des ordres supérieurs, se trouveront de même par le moyen des lignes en perle des ordres supérieurs. ÉGALITÉ

ÉGALITÉ pes Lignes — —© ee — > ER à PCALITE- DES.
LIGNES SPIRALE ET PARABOLIQUE. PPT E SRE DE M.
DETTONVILLE ATOS STADE € Monsieur, J'Ar reçu la Lettre que vous
m'avez fait l'honneur de m'écrire, avec le petit Traité de Géométrie qu'il
vous a plu m'envoyer; & je prends pour un effet de votre civilité l'ordre que
vous me donnez de l'examiner ; car vous pouviez le faire facilement vous-
même, puifque ce qui eft une étude pour les autres , n'eft qu'un
divertiflement pour vous. Mais puifque vous voulez en favoir mon
fentiment , je vous dirai, Monfieur, que l'Auteur y touche une difficulté où
beaucoup d'autres ont heurté : & c'eft une chofe étrange de voir qu'en une
matiere de Géométrie il fe rencontre tant de conteftations. Il y à environ
quinze ans que M. Hobbes crut que la ligne courbe d'une parabole donnée
étoit égale \ a

SPIRALE ET PARABOLIQUE 417 à une ligne droite donnée. M.
 de Roberval en suite dit qu'elle étoit égale à la ligne courbe d'une spirale
 donnée; mais sans en donner de démonstration autrement que par les
 mouvements, dont on voit quelque chose dans le Livre des Hydrauliques
 du R. P. Merfenne : & comme cette manière de démontrer n'est pas
 absolument convaincante, d'autres Géomètres crurent qu'il s'étoit trompé,
 & publièrent que cette ligne parabolique étoit égale à la demi-circonférence
 d'un cercle donné: le Livre que vous m'envoyez maintenant, foutient de
 nouveau la même chose. Cette diversité d'avis m'ayant étonné, je voulus
 reconnoître lequel étoit le véritable; car quelque nombre de Géomètres qu'il y
 eût contre M. de Roberval, j'en conclus rien contre lui : & au contraire si
 on jugeoit de la Géométrie par ces fortes de conjectures, la connoissance
 que j'ai de lui m'auroit fait pencher de son côté, le voyant perfister dans son
 sentiment; mais comme ce n'est pas par-là qu'on doit en juger je résolus
 d'examiner moi-même si la ligne à laquelle on peut comparer la ligne
 parabolique donnée, est une ligne droite ou une spirale, ou une
 circonférence de cercle : c'est ce que je voulus chercher, comme si
 personne n'y avoit pensé : & sans m'arrêter, ni aux méthodes des
 mouvements, ni à celles des indivisibles, mais en suivant celles des Anciens,
 afin que la chose pût être FETES DNS EE Re = { Lf Jk il si Tue. hs En

428 Écarté Des Lignes être désormais ferme & sans dispute. Je l'ai donc fait, & j'ai trouvé que M. de Roberval avoit eu raison, & que la ligne parabolique & la spirale sont égales l'une à l'autre : c'est ce que vous verrez. La démonstration est entière & exactement accomplie, & pourra vous plaire d'autant plus qu'elle est la seule de cette espèce : aucune autre n'ayant encore paru, à la manière des Anciens, de la comparaison de deux lignes de différente nature. Ainsi je puis dire, avec certitude, que la ligne parabolique est égale à la spirale, & je m'afflure que cette preuve arrêtera toutes les contradictions. Voilà ce que vous avez demandé de moi : je souhaite que cela vous agrée, & que ce vous soit au moins une marque du desir que j'ai de vous satisfaire & de vous témoigner que je fais de tout mon cœur, &c.

NU 7 45, € pr + PRFAERIT - OS REMOTE ET | ! DR DAV 7 ut a [EU " | | sl
De Paris, ce 10 Décembre 1658. riz > A « ue PROPRIÉTÉS ÉTAT 28

SPIRALE ET PARABOLIQUE. 429 PROPRIÉTÉS DU

CERCLE. | b: I la rouchante EV (Figure 35.) est perpendiculaire au rayon À E, & que l'arc EB étant pris moindre qu'un quart de cercle, on incline BV, faisant avec la touchante l'angle BV E aiou : je dis que toute la portion BV fera hors du cercle. Car en menant la touchante BZ, elle fera angle obtus avec $\text{Æ} Z$ (puisque l'arc B E est moindre qu'un quart de cercle). Donc l'angle BZE fera plus grand que l'angle B FE : donc le point Z est entre les points Æ , 77: donc l'angle 4 BF est obtus; donc la portion B F fera hors du cercle. Ce qu'il falloit démontrer. QE Si d'une extrémité du diametre (Fig. 36.) est menée la touchante SN, & de l'autre extrémité G a droite GN , qui la coupe en N, & Le cercle en X : je dis que la droite SN est plus grande que l'arc S X. Car en menant la touchante X R, les deux touchantes XR, RS feront égales, tant entre elles, qu'à RN {à cause que l'angle S XN est droit): donc SN est égale à SR, plus RX, qui font ensemble Fig. 3\$. Fig. 36.

RGP OS EE Rp'' ste: z sut er À Fig. 37. $\text{Æ } 0 \text{ V3 } 430 \text{ ÉcAzLrITÉ}$
 pes Lignes femble plus grandes que l'arc S X. Ce qu'il fals loit démontrer.
 TL Si la touchante SE (Fig. 37.) étant perpendiculaire au diametre SG, eff
 égale à Parc S X, moindre qu'un quart de cercle : je dis gwen menant les
 droites SX, XL, Les trois angles du triangle XSL font aigus. Car en menant
 la droite GX N, l'angle XSL l'est vifiblement, puifqu'il est égal à l'angle G;
 l'angle S XL l'est auflé, puifqu'il divife l'angle droit SXN, par la précédente;
 & l'angle SZX left, à plus forte raifon, le côté SZ qui est égal à Parc SX,
 etant plus grand que la droite S X. Ce qu'il falloir démontrer. Re Si la-
 touchante S 8 (Fig: 38.) étant prile plus grande que le diametre SG, auquel
 elle est perpendiculaire, l'on fnene au centre la droite 8 V, coupant le cercle
 au point YŸ : je dis que quelque point qu'on prenne dans l'arc SX, comme
 X, dont on mene SX coupant T 8 en Q, la portion 8 Q est plus grande que
 Parc SX. Car en menant 8 Z parallele à ST, les triangles rectangles Z8S,
 NGS feront femblables (à caufe de l'égalité des angles G & 85 Z); donc les
 cotés feront proportionnels : mais GS est posée moindre

SPIRALE ET PARASOLIQUE 43 dre que S 8; donc S NV est
 auili moindre que Z8 : mais Z 8 est moindre que 8 Q (puisque ST est
 moindre que 7 Q , le point Q étant hors du cercle } ; donc S NW est moindre
 que 8 Q : mais l'arc S X est moindre que S N (par ce qui a été démontré) ;
 donc à plus forte raison l'arc S X est moindre que 8 Q. Ce qu'il falloit
 démontrer. V. Si l'arc de cercle EB (Fig. 39.) moindre qu'un quart de cercle,
 est égal à la touchante E V, perpendiculaire au rayon À E : je dis que l'angle
 E AV fera plus grand que la moitié de l'angle E A B. Car soit menée la droite
 47, qui coupe l'angle Æ AB en deux parties égales, & la touchante E V au
 point Z : il est visible que la portion E Z est moindre que la corde E B
 (puisque l'angle £ Z B est obtus, l'arc étant moindre qu'un quart de cercle } ;
 mais la corde E B est moindre que l'arc EB, & partant moindre que £ F7 :
 donc à plus forte raison EZ est moindre que ÆE 7 : donc l'angle E 4 Z est
 moindre que l'angle E 4 F. Ce qu'il falloit démontrer. FAR PROPRIÉTÉS
 Fig. 39

432 ÉcALITÉ Des Lrenes PROPRIÉTÉS DE LA SPIRALE. Fig. 40. Ç! le rayon 4 B (Fig. 40.) qui est le commencement de la spirale de la première révolution BCD XA, est divisé en tant de portions égales qu'on voudra aux points 4, Y, 4,3, B : & les arcs menés de ces points autour du centre commun A, coupant la spirale aux points C, D; X, é'c.: Je suppose qu'on fasse toutes les propriétés suivantes : 1°. Que l'arc quelconque 3 C'est à l'arc 4 D, comme le rectangle 8 3 in 3 4 au rectangle B 4 in 44. 29. Que les rayons 4B, AE, A8, &c. font tous les angles égaux entre eux, & divisent les arcs en tant de portions égales entre elles que le rayon 4 B : & qu'ainsi telle partie que la première portion B 3, est du rayon, telle partie l'arc BE left de la circonférence', & l'arc CF ou 3 € de la fiene : & telle partie est encore l'angle BAE de quatre angles droits. 3°. Que le rayon entier B 4 est à une portion quelconque 4 3, comme la circonférence entière BE B, à l'arc E8 B, qui contient autant de portions égales du cercle, que 43 contient de porpe, à tions égales du rayon, où comme telle autre circonférence qu'on voudra 3 C3, à l'arc correspondant CF3. 4°. Que v CR ARLES = mn e Fr LE " CESR RE RER

SPIRALE ET PARABOLIQUE 433 4°. Que tous les arcs BE, 3C, 48, compris entre deux rayons prochains 4B, AE, qui comprennent un des arcs égaux, font tous en proportion arithmétique : & que le moindre de ces arcs V9, qui part du point Y: le plus proche du centre, est égal à la différence dont chacun des autres diffère de son voisin : & qu'ainsi si le premier est 2, le second est 4, le troisième est 6: & ainsi toujours en suivant les nombres pairs. 5. Que ce moindre arc Y'9, pris autant de fois que l'arc BE est dans la circonférence, est égal au plus grand arc BE. 6°. Que ce moindre arc Y 9 est égal au dernier arc extérieur de la spirale XX. 7°. Que l'angle aigu que fait la touchante à un point quelconque de la spirale € avec son rayon AC, se trouvera en faisant un triangle rectangle, dont la base soit ce rayon 4 C, & la hauteur soit égale à l'arc extérieur C F3. Car alors l'angle de la touchante avec son rayon fera égal à l'angle que l'hypoténuse d'un tel triangle rectangle fait avec sa base, CONSÉQUENCES. 8°. Que la touchante de la spirale au point 4 est la même que le rayon 4B, & que les touchantes aux autres points font toujours avec les rayons menés de ces points des angles d'autant plus grands que le point d'attouchement est plus

TOME F. E'e proche LINE! | 1 4 WI! HU | '!' ft 1 f. IN hp — CE sen + L

WU 7: Zi pr Bi # en. Pc T4! 2“ 2? Le ES er De RES Re Le PA
 CPU 3 En À À ÿ: : Là Ji Ë k | LA | { | 434 ÉGALITÉ Des LIGNES proche
 de B, parce que la raifon du rayon à Parc extérieur en eft d'autant moindre :
 y ayant moindre raifon de AC à l'arc CF3, que de 4D à l'arc D H 4,
 puifqu'en changeant & en renverfanr, il y a plus grande raifon de l'arc CF 3
 à l'arc DH4, que de CA à ADou AS, c'eft-à-dire, que du même arc CF3 à S
 D4, 9°. Qu'ainfi fi on mene des touchantes de tous les points où la fpirale
 eft coupée par les rayons qui divifent la circonférence en arcs égaux, le plus
 grand angle que ces rouchantes faflent avec les rayons , eft celui de la
 couchante menée du point B , où le premier rayon coupe la fpirale, lequel
 eft égal à celui d'une hypothénufe avec fa bafe, la bafe étant à la hauteur,
 comme le rayon à la circonférence, Et le moindre de ces angles eft celui de
 la touchante menée du point X, où le dernier rayon coupe la fpirale. 10°.
 Que le moindre des angles des touchantes avec leurs rayons, eft plus grand
 que la moitié de l'angle compris par deux rayons prochains qui enferment
 l'un des arcs égaux ; favoir , la moitié de l'angle BAE. Car l'angle de la
 touchante au point X eft celui de l'nyhorne nufe d'un triangle avec fa bafe (
 la bafe étant à la hauteur, comme ZX, à l'arc extérieur XF, ou comme 4 Y, à
 l'arc Yo); donc en faifant a perpendiculaire Y G égale à l'arc Fo, l'angle
 GAY

SPIRALE ET PARABOLIQUE: 434\$ G AY fera celui de la
 touchante au point avec on rayon. Or cet angle G 4 Y est plus grand que la
 moitié de l'angle Y 49 où BAE (par la dernière propriété du cercle); &
 menant la rouchante E V égale à l'arc E B, & menant aufl i l'hyporhénufe
 AW, l'angle E 4 F fera égal à cet angle, qui est le. moindre de tous, de la
 dernière rouchante au point X avec son rayon : mais l'angle E À V est plus
 grand que la moitié de l'angle BAE, par ce qui a été démontré; donc l'angle
 de la touchante au point % est auf toujours plus grand que la moitié de
 l'angle BAE. Ce qu'il falloir démontrer. PROPRIÉTÉS DE LA
 PARABOLE. OIT AB (Fig. 42.) la touchante au [ommet d'une + parabole ,
 divisée en tant de parties égales qu'on voudra aux points 3, 4, Y , d'où soient
 menés les diametres ou les paralleles:à l'axe, coupant la parabole en Q , 7,
 L. Et de ces points soient menées les touchantes jufqu'aux diametres
 prochains Q K,, 75, LT, &c. : Je dis que toutes les portions des diametres
 PK,Q s ,7 T, EL Y, &c. comprises entre les touchantes & la parabole, font
 égales entre'elles. Car chacune , comme P K, par exemple, fera montrée
 égale à la première Y L ; en cette forte. Soit prolongée K Q (puisque PK est
 prise en Ee 2 exemple) Fig. 42.

36 ÉcatITÉ Des Licenes exemple) jufques à l'axe au point S, &
 mence l'ordonnée Q M. Donc , par la nature de la parabole , puifque les
 deux diametres \$ 4, K P, font coupés par la touchante SX, Il arrivera que S
 4 eft à P K comme QS quarté à Q K quarré, ou comme 3 À quarré à 3 B
 quarré, ou comme 3 À quarré à À Ÿ quarré, ou comme 3 Q ou M À àLY
 Mais , à caufe de la touchante, S 4 eft égale à M À; donc PK eft égale à LY.
 Ce qu'il falloir démontrer. EPP ET LC) CPV OH ERREUR _" Je fuppose
 qu'on fache cette autre propriété de la parabole : PE Que fi on mene les
 ordonnées, par tous ces mêmes points, P R,QM,;G, LH; toutes les portions
 de l'axe comprisés entre ces ordonnées, favoir RM, MG, GH, HA, feront en
 proportion arithmétique : & que leur différence {era double de la premiere
 Æ 4 (il faut dire le même des droites qui leur font égales PZ, Q2,70,LY). De
 forte que fi la dernière L F eft 1 , la feconde eft 3, la troifieme s, &c.; ainfi
 toujours par les nombres impairs: PR REA el Te QUAS & + | “ fi LU || 4
 URI {A | 11 Il : AVERTISSEMENT. Je démontre l'égalité de la ligne fpirale
 avec la parabolique PAR AP EE Foot étrangement)

SPIRALE ET PARABOLIQUE. 437 parabolique en inscrivant & circonscrivant, tant à la spirale, qu'à la parabole, des figures desquelles je considère seulement le tour, ou la somme des côtés. | La manière dont je me fers pour inscrire & circoncrire ces figures est telle. Pour inscrire une figure en la parabole. Soit (Fig. 40.) une parabole dont A R soit l'axe, RP la base, AB la tangente au sommet, divisée en tant de parties égales qu'on voudra ; aux points 3, 4, Gc. d'où soient menées les parallèles à l'axe, qui coupent la parabole aux points 7, Q, P, &c. Les accommodées PQ, Q7, &c. font une figure inscrite en la parabole ; & c'est celle de laquelle je me fers, dont le tour est visiblement moindre que celui de la parabole, puisque, par la nature de la ligne droite, chaque accommodée est moindre que la portion de la parabole qu'elle sous-tend. AVERTISSEMENT: Je suppose le principe d'Archimède : que si deux lignes sur le même plan ont les extrémités communes, & sont courbes vers la même part, celle qui est contenue sera moindre que celle qui la contient. Ee 3 Pour Fig. 405

438 ÉGALITÉ des Litcenes Pour circonferire une figure à la parabole. Fig. 40. SOIENT dans la même (Fig. 40.) des points Q, 7, Gc. menées des touchantes QK, 75, &c. qui coupent les diametres prochains en K, 5, &c. la figure PKQ 57, &c. composée des touchantes KQ, s 7, &c. & des portions extérieures des diametres PK, Q 5, Gc. forme une figure circonferite à la parabole ; qui est celle dont je me fers, & dont le tour est visiblement plus grand que celui de la parabole, puisque les deux quelconques côtes liés KK., plus PQ (dont l'un est la touchante, & l'autre la portion extérieure du diametre) [ont plus grands que Des PISE EPL 62 LP ROC RAA 2 OU TRE. AMD la portion de la parabole qu'ils enferment, puis qu'ils Pmeir VE à ont les extrémités P, Q communes, & que la parabole est courbe vers la même part. CONSÉQUENCE. De cette description & de la propriété que nous avons démontrée de la parabole, il s'enfuit, qu'en toute figure circonferite à la parabole en la maniere qui est ici marquée, les portions des paralleles à Vaxe PK, Q, L ?, font toutes égales entre elles. Pour inferire une figure en la spirale. SOIT le rayon AB le commencement d'une spirale de la premiere révolution, divisé en parties égales RP G ra: " les Eu ü |||

SPIRALE ET PARABOLIQUE. 439 les aux points 3, 4, Gc., d'où
 foient menés les cercles 3C, 4a DC, &c. concentriques au grand , qui
 coupent la fpirale en ©, D, Gc. Les accommodées BC, CD, &c. formeront
 une figure infcrite en la fpirale , qui eft celle dont je me fers, & dont le tour
 eft vifiblement moindre que celui de la fpirale , puifque par la nature de la
 ligne droite , chaque accommodée eft moindre que la portion de la fpirale
 qu'elle fous-tend. Pour circonfcire une figure a la fpirale. SOIENT des
 points C, D, Éc. menées les rouchantes de la fpirale , jufques aux cercles
 prochains qu'elles coupent en M, N , &c. la figure à MCND, compofée des
 portions extérieures des arcs BM, CN, Gc. & des touchantes MC, ND, éc.,
 qui fera cérconfcrite à la fpirale , eft celle dont Je me fers, & dont le tour eft
 vifiblement plus grand que celui de la fpirale, puifque deux quelconques
 côtés liés BM, plus MC (dont l'un efl un arc de cercle extérieur, G& l'autre
 la'touchante de la fpirale) [one plus grands que la portion de la fpirale qu'ils
 enferment, ces fioures étant par-tout courbes vers la même part, & ayant les
 extrémités B, C communes. ÉLDEÉEIENTETONS: Soit dans la même
 (Fip./40.) la droite 4B le commencement d'une fpirale de la premiere
 révoEe 4: lution, Fi { . 40. ————— ÂL

Loi dut 2 4 « ds Es 2 || 440 ÉcAziITÉ pes Licenes lution; & foit
 la même droite 4 B la touchante au fommet d'une parabole, dont l'axe 4 R
 foit égal à la moitié de la circonférence du grand cercl BEB, & la bafe RP,
 égale au rayon AB. Cette parabole & cette fpirale ayant cette condion,
 feront dites corre/pondantes. Soit maintenant divifée 4 B en tant de portions
 égales qu'on voudra aux points 3,4, Ȳ, &c. d'où foient menés autant de
 cercles ayant le centre commun en 4, qui coupent la fpirale en C,D, &c. que
 de lignes droites paralleles à axe , qui coupent la parabole Q, 7, &c. (Donc
 chaque point du rayon, comme 3, donnera un point dans la parabole par la
 parallele à l'axe 3 Q, & un point dans la fpirale par l'arc de cercle 3 C). Ces
 points font dits corre/pondants ; & la portion de la parabole entre Q & P
 correpond à la portion de la fpirale entre B & C; & les infcnites CB, PQ,
 font correpondantes : & par la même raifon les infcrites DC, Q7. Et fi de
 ces points Q, 7, &c. font menées les ordonnées Q Z, 72, &c. la portion Q Z
 correpond À la portion CE , & 7 2 à D F, &c. Et la premiere portion P Z
 (égale à la premiere portion de l'axe, comprife entre les deux premieres
 ordonnées) correpond à l'arc B E du premier cercle, compris entre les deux
 premiers rayons : & la feconde poräon Q2, comprife entre la feconde & la
 troifieme,

SPIRALE ET PARABOLIQUE. 441 me, corre/pond à l'arc du
 fecond cercle CF compris entre le fecond & le troifième rayon; & ainfi des
 autres. Et le triangle rectangle PQ Z correpond au triline BEC, fait de l'arc
 BE & des droites BCCE : & de même le triangle Q72z correpond au
 triline CF DC; & les rouchantes de la parabole & de la fpirale Q K, CM
 font corre/pondantes ; étant menées des points correpondants Q, C; & la
 portion PK à l'arc B M, &c. — Rapports entre la parabole & la {pirale, qui
 ont la condition fupposée pour être dites correpondantes. I. S Î une
 parabole & une fpirale font en la condition fupposée : je dis que quelque
 point gwon prenne dans la touchante A B, comme 3, la portion du diametre
 extérieur, ou bien 3 Q ; compri[e entre le point 3 © la parabole, efl égale à
 la moitié de l'arc 3 FC, paffant par le même point 3, & extérieur à la fpirale.
 Car, par la nature de la fpirale , la circonférence entiere BE B eft à l'arc
 extérieur C F3, comme B À quarré à 4 3 quarré (puifque l'entiere BE B eft
 à l'arc CF3, en raifon compofée de l'entiere BE B à l'entiere 3 C3, ou de
 BST à 43, & de l'entiere

442 ÉGALITÉ pes Licenes lentièr 3 C3 à l'arc CF3, qui est encore comme :B 4 a A 3). Donc leurs moitiés font auili en même raifon; & partant BP, qui est la moitié de la circonférence BE B, est à la moitié de l'arc CF3, comme B 4 quarré à 4 3 quarré, ou, par x nature de la parabole, comme la même BP à 3 Q. Donc 3 Q est égale à la moitié de l'arc CF 3. Ce qu'il falloit démontrer. Ni het sr nd "7 PPS RESTE: DT 27 — déeréi MARNE TS y Lo 7 CORO FE ATRE. D'où il s'enfuit que le moindre des arcs Fo, compris entre deux rayons prochains, est double du dernier diametre extérieur Y L. Car ce moindre arc Yo est égal au dernier exrieur ŸX, lequel est double de fa portion FL par cette propofition. 4 Les mêmes chofes étant pofées : je dis que les angles que les touchantes de la fpirale font avec leurs rayons ; font égaux aux angles que les touchantes de la parabole font avec leurs ordonnées aux points correfpondants : ou, ce qui est le même, que quelque point qu'on prenne dans la fpirale, comme. ©, son correfpondant Q dans la parabole ; l'angle EC M du rayon avec la touchante ; fera égal à l'angle ZQK de l'ordonnée ZQ avec la touchante Q K. Car là portion de la touchante, comprise entre le point Q & l'axe, est l'hypothénufe d'un triangle vel est | Kù gr À LE L 4 # 4

SPIRALE ET PARABOLIQUE. 443 ole rectangle , dont la
 bafe eft l'ordonnée Q 6(égale à A3 ou AC), & la hauteur eft double de 46
 ou de Q 3, & partant égale à l'arc extérieur CF 3 (qui eft double de la même
 Q 3) : mais par la Propriété VII de la fpirale, l'angle ECM de la touchante
 au point C avec fon rayon, eft aufli égal à l'angle de l'hypothénufe avec la
 bafe qui foit à la hauteur, comme le même rayon 4 C au même arc extérieur
 € F3. Donc l'angle ECM eft Cgal à l'angle Z Q K. Ce qu'il falloit démontrer.
 ALES Les mêmes chofes étant pofées : je dis que chacun des arcs BE, CF,
 &c. (qui font les mêmes que les : arcs BE, 3C,45s,&c. compris entre les
 deux rayons Prochains) diminué de la moitié du dernier Y 9, eft à éoal &
 chacune des portions de l'axe qui lui cor- ti A (eg . 5 A , + L refpond,
 PZ,Q2,6c. (& qui [ont les mêmes que dy es portions de l'axe entre les
 ordonnées). * Car toutes ces portions font entre elles comme 4 les nombres
 impairs; & tous les arcs BE, CF ou 3 €, font entre eux comme les nombres
 pairs : mais le plus petit des arcs Yo eft double de la premiere portion Y£ ,
 par le Corollaire du rapport premier; donc fi Y L eft x, l'arc fera 2 : &
 partant toutes les portions P 2, Q2, &c. étant 5536255749 dccaudun les arc
 BE CC étant 2,4, 6, 8, &c. : Il s'enfuit que chacun differe

444 ÉcALITÉ Des Lrenrs fere de fon correspondant de l'unité, c'est-à-dire, de la moitié de 9. Ce qu'il falloit démontrer. CSM ER Si une grandeur À est moindre que quatre autres ensemble B, C, D, E : je dis que la différence entre {x première À & deux quelconques des autres, comme B, plus C, fera moindre que les quatre ensemble B, C, D, E. Cela est manifeste. PROBLÈME. ÉTANT donnée une parabole & une spirale en la condition supposée : inscrire & circoncrire en lune & en l'autre des Figures, en sorte que le tour de l'inscrite en la parabole ne diffère du tour de l'inscrite en la spirale, que d'une ligne moindre qu'une quelconque donnée Z; & de même pour les circonscrites. Fig. 41. Soitpris dans une figure séparée (Fig. 47.) le rayon #5, plus grand que le rayon À B; & ayant élevé 58 perpendiculairement égale à la circonférence, dont rs est le rayon, soit menée 8, coupant son cercle en y : soit maintenant de 8 Y retranchée 8 4 de. Less . ASTIER telle grandeur qu'on voudra, pourvu qu'elle soit moindre qu'un tiers de Z; & ayant mené as coupant l'arc en d, soit divisée la circonférence en tant d'arcs S'ÉIRS AE GET RE P PR : s: nets

SPIRALE ET PARABOLIQUE. 44\$ d'arcs égaux qu'on voudra ,
 pourvu que chacun, comme sx , soit moindre que $Parc\ sd$. Je dis qu'en
 divisant le cercle $BE\ B$ en autant d'arcs égaux, & le rayon $4\ B$ de même en
 autant de portions égales aux points 3, 4, &c., d'où soient menés à
 l'ordinaire des cercles & des parallèles à l'axe, qui coupant la spirale & la
 parabole, y donneront les points pour inscrire & circoncrire des figures en
 la manière qui a été marquée : ces figures satisferont au Problème. I
 PARTIE DE LA DÉMONSTRATION. Que la différence entre les deux
 inscrites est moindre que Z . Pour prouver que la somme des côtés de
 l'inscrite en la parabole diffère des côtés de l'inscrite en la spirale d'une
 ligne moindre que Z , on fera voir que chaque côté de l'une ne diffère de son
 correspondant que d'une ligne, qui, prise autant de fois qu'il y a de côtés, ou
 qu'il y a d'arcs en la circonférence, est moindre que Z . D'où il s'enfuit
 nécessairement que toutes ces différences ensemble, prises chacune une fois,
 sont moindres que Z . Je dis donc que la différence entre BC , par exemple,
 & son correspondant $P\ Q$, prise autant de fois qu'il y a d'arcs en la
 circonférence, est moindre que Z . Car

Cd PE 2 à i d: 446 ÉcALITÉ Des Licenrs Car en menant du point Æ (puisque BC est prise en exemple) la perpendiculaire E V7 égale à l'arc EB, & retranchant E O 'égale à Z P, (& qu'ainsi l'excès 770 soit égal au demi-arc Fo): il est manifeste que CO sera égale à PQ, CE étant égale à OZ; donc il suffira de montrer que la différence entre CO & CB, prise autant de fois qu'il y a d'arcs, est moindre que Z. Mais cette différence entre BC & CO est moindre que la somme des deux droites BF, FO (car la différence des côtés BC, CO est moindre que la base BO, laquelle B O est moindre que les côtés ensemble B7, FO). Donc il suffira à fortiori de montrer que les deux côtés ensemble BY, FO, pris autant de fois qu'il y a d'arcs, sont moindres que Z : & cela est aisé, puisque chacun, pris autant de fois qu'il y a d'arcs, est moindre qu'un demi & même qu'un tiers de Z. Car cela est visible de 70, puisqu'étant égale à un demi-Yo, il est clair qu'étant prise autant de fois qu'il y a d'arcs, elle ne sera égale qu'au demi-arc BE, & partant bien moindre qu'un demi-Z, l'arc BE étant moindre qu'un demi-Z, puisqu'il est moindre que l'arc sx de la figure séparée (le rayon ÆB étant moindre que rs), lequel arc s x est moindre que 8 Q par le Lemme IV des spirales, & à fortiori, que 8 4, qui a été pris moindre qu'un tiers de Z. Il

SPIRALE ET PARABOLIQUE. '447 Il ne reste donc qu'à
 démontrer la même chose de BF, & cela fera aisé en cette sorte : Soit prise
 dans la figure séparée la portion 54 égale à l'arc sx, & soit menée /e
 parallèle à r8, & ty parallèle à /x. Donc puisque l'angle xs est aigu par la
 troisième propriété du cercle, l'angle r7s sera obtus, & partant #7 sera
 moindre que ts oury, & à fortiori que tq : donc aussi, à cause des parallèles,
 /x sera moindre que /e : mais Ze est à 89, comme /s à 58 : donc /x à
 moindre raison à 8q, que /s à 58, ou que l'arc /x à la circonférence : donc /x
 prise autant de fois que l'arc sx est en la circonférence, ou l'arc B E dans la
 figure, est moindre que 89, & à fortiori qu'un tiers de Z. Donc BF à fortiori
 prise autant de fois, sera moindre qu'un tiers de Z, puisqu'elle est moindre
 que /x., le rayon 4 B étant moindre que le rayon rs, & toutes choses
 proportionnelles. Ce qu'il falloit # ed # démontrer. y he" + ' Il PARTIE DE
 LA DÉMONSTRATION. É 2 2" 4 Le Que la différence entre les deux
 circonscrites est moindre que Z. Pour prouver que la somme des côtés de la
 circonscrite à la spirale, ne diffère de celle des A RY Ke | ? > \ ? côtés de la
 circonscrite à la parabole, que d'une ligne

448 ÉGcALITÉ Des Lignes ligne moindre que Z : on montrera que deux quelconques côtés liés, circonscrits à la spirale, comme l'arc BM, plus la touchante MC, ne diffèrent des deux côtés correspondants en la parabole PK, plus KQ, que d'une ligne, qui, prise autant de fois qu'il y a d'arcs en la circonférence, est moindre que Z. D'où il s'enfuit nécessairement que toutes les différences prises chacune une fois ne AR + mn Le 0 ÉC nMn P . , De de feront moindres que Z. Je dis donc que la différence entre deux quelconques côtés liés BM, plus MC, & les correspondants PK, plus KQ, prise autant de fois qu'il y a d'arcs, est moindre que Z. Car puisque CE est égal à QZ, que les angles Z & CE sont droits, & que les angles ECI du rayon avec la touchante de la spirale, & ZQK de l'ordonnée avec la touchante de la parabole, sont égaux : il s'enfuit que EI est égal à ZK, & CI à QK, & OI à KP ou à FL ou au demi-arc Yo. Maintenant puisque AE 77 touche le cercle BE en E, la portion ZV est toute hors le cercle; & puisque BY est inclinée en angle aigu, & au lieu CZ (l'angle au point AE étant droit) : il s'enfuit par la première propriété du cercle, que les droites BZ, MI sont toutes hors le cercle; donc les trois droites BJ, VI, IM, étant toutes hors le cercle, l'arc BM, par le principe d'Archimède, fera moindre mme. 2 s in il, , Fe LE { tÉ LS Ft dE 2 2

SPLRALE ET PARABOLIQUE. 449 dre que les trois droites, ou queces quatre droïtes BF, VO, OI, 1 M; donc, par le Lemme précédent, la différence entre l'arc BP M & les deux quelconques O 7, plus ZM, fera moindre que les quatre BY, FO, OT, TIM, ou que les trois B F7, VI, IM. Donc la différence, qui est toute la même, entre l'arc BM, plus AC, & les deux OT, plus ZMC, ou les deux PK, plus K Q, est moindre que BF, plus F1, plus 71M. Donc pour montrer que la différence entre BM, plus MC, & PK, plus KQ, prise autant qu'il y a d'arcs, est moindre que Z, il suffira à fortiori, de montrer que ces trois ensemble B7, plus FI, plus 2 M, prises autant de fois, sont moindres que Z. Et cela est aisé, puisque chacune d'elles, prise autant de fois, est moindre qu'un tiers de Z. Car cela est déjà montré de BF. Cela est aisé de PT, puisqu'elle est égale à l'arc Yo (chacune des deux FO, OT étant montrée égale à un demi-Yo), & qu'ainsi 77T-étant prise autant de fois qu'il y a d'arcs, ne fera qu'égale à l'arc BE, & partant moindre qu'un tiers de Z. Il ne reste donc qu'à le montrer de ZA, en cette sorte. Soit prise: dans la figure séparée, s À égale à ET; & soient menées Lo 2, parallèle à c8, & Acf perpendiculaire à s5cg. Soit maintenant mence Ærp, faisant l'angle Ap s égal à l'angle ZC E de la Fig. 40: TOME F, | Ff donc

40 ÉcaLiTé. pes Lienes donc. ‘elle tombera entre Af & h2, puifque l'angle Aps ou Æ CT , du rayon avec la rouchante de la fpirale , eft moindre que l'angle s 2 A ou sr8 (à caufe qu’au triangle rectangle 518, la bafe eft à la hauteur comme le rayon à la circonférence) & plus grand que la moitié de l’angle B 4 FE, ou que l'angle LEB, ouhsx, oukfs : mais l’angle C eft droit; donc l'angle Aro eft obtus : & partant Ar eft moindre que 4o : mais 4o efta 8q comme. s à 58. Donc il y a moindre raifon de hrà 8g, que de As à 58 : donc à fortiori il ya moindre raifon de Ar à un tiers de Z, que de »s où ET, à la circonférence B E B, moindre ques8, & à fortiori, que de EF ou l'arc BE à la circonférence. Donc Ar, prife autant de fois que l'arc BE eft en fa circonférence, eft moindre qu'un tiers de Z. . Et partant IT (qui eft égal à As, toutes chofes étant pareilles) , & a fortiori I M, pris autant qu'il y a d’arcs, fera moindre qu'un tiers de Z. Ce qu'il falloic démontrer.

AC:O"R'OTIL AT RE: Il s'enfuit de cette même conftruétion que la figure infcrite en la parabole, ne differe de la cir| ca | | confcrite à la même parabole, que d’une ligne moindre que Z. re OP 2 = È Fer rt 24 ro
 ———’ — Car en tout triangle reétangle ou amblygone, l'excès dont les deux moindres côtés enfemble furpaflent LE Z>" ve aie PF : Fe “1= n 1 mm

SPIRALE ET PARABOLIQUE. A4SI pañlent le plus grand, est toujours moindre que chacun des côtés. D'où il s'enfuit que deux côtés liés quelconques de la figure circonscrite, comme PK, plus K Q, surpañent l'inscrite P Q d'une ligne moindre que le côté PK (puisque l'angle de la rouchante avec la parallèle à l'axe, est toujours obtus, si ce n'est au sommet où il est droit}; donc tous les excès ensemble, dont les côtés liés de la circonscrite, surpañent les côtés liés de l'inscrite, sont moindres que tous les côtés P K ensemble, c'est-à-dire, moindres que Y Z pris autant de fois qu'il y a d'inscrites, ou qu'il y a d'arcs en la circonférence; or $\frac{1}{2}$ L ou la moitié de Fo prise autant de fois, est moindre que Z'; donc tous les excès ensemble dont les cotés circonscrits surpañent les inscrites; sont moindres que Z.

THÉO0 RAPAM E. Si une parabole & une spirale sont en la condition supposée : je dis que la ligne parabolique est égale à la ligne spirale. Car si elles ne sont pas égales, soit X la différence; & soit Z le tiers de X; & soient inscrites & circonscrites à la parabole & à la spirale des figures comme en la précédente, en sorte que la différence entre les inscrites soit moindre que Z, & que la différence entre les circonscrites soit aussi moindre que Z. Ff 2

Maintenant SE RE = $\frac{1}{2}$ EE

, mr Y A ESPRTERF RS. ve » Ph, AS MISES PORT LL: © TE
vec TRE À Pen probe Lui Ds | 452 ÉcALITÉ Des Liones, &c. Maintenant
puisque la ligne spirale est moindre que le tour de la figure qui lui est
circonscrite, & plus grande que le tour de l'inscrite : il s'en suit que la
différence entre la ligne spirale & le tour de la figure qui lui est inscrite, est
moindre que Z ; & de même pour la parabole (puisque la différence entre
l'inscrite & la circonscrite, est moindre que Z, par la construction) ; mais la
différence entre l'inscrite en la spirale & l'inscrite en la parabole , est aussi
moindre que Z, par le Corollaire de la précédente. Donc la différence entre
la ligne spirale & le tour de l'inscrite en la parabole, est nécessairement
moindre que deux Z. Mais la différence entre l'inscrite en la parabole & la
ligne même de la parabole, est moindre que Z. Donc la différence entre la
ligne de la spirale & la ligne de la parabole est nécessairement moindre que
trois Z , c'est-à-dire, que X, contre la supposition. On montrera toujours la
même absurdité, quelque différence qu'on suppose entre les lignes spirale &
parabolique. Donc il n'y en a aucune : donc elles sont égales. Ce qu'il falloit
démontrer. LETTRE

453 ÉEREOR un DE a a — . FEES RE DE M. HUGUENS DE
ZULICHEM A M DETTONVILLE. Mr LE Gentilhomme inconnu ne peut
vous avoir fait enten dre que la moindre partie de l'estime que j'ai pour
vous; & si vous n'en croyez beaucoup davantage, vous ne (avez non plus
combien j'ai eu de joie en recevant celle que vous m'avez fait l'honneur de
m'écrire : ne pouvant l'exprimer dignement, je vous dirai feulement que je
me crois bien plus heureux qu'auparavant, après avoir reçu les offres de
votre amitié, & que je répute cette acquifition pour la plus infigne que j'aie à
faire jamais. Je fuis si loin de croire de l'avoir méritée par l'accueil que j'ai
fait à cet excellent homme, qu'au contraire je fais bien qu'il faut que j'en
demande pardon, ne l'ayant pas traité, ni selon sa condition, ni même selon
que méritoient celles de ses qualités qu'il n'a pu me celer. Je le prierai de ne
point s'en fouvenir, & vous, Monfieur, de croire qu'à l'avenir je tâcherai de
m'acquitter mieux envers ceux qui m'apporteront de vos nouvelles. J'ai été
bien aise de voir que mon invention des Horloges est dans votre
approbation, quoique les éloges qu'il vous a plu lui donner, font beaucoup
au-deffus de ce qu'elle mérite. Il y a beaucoup de hafard à rencontrer des
choses femblables, & fort peu de science ou de subtilité, Aussi ne font-elles
propres qu'à acquérir du crédit aux Mads Ff 3 thématiques

Mo 2 lame. LP SEA. DAT PO. Aie) Rai AE ||||| ë| 4 |||||

454 Lettre De M. Hvevuexs thématiques parmi le commun des hommes ; au lieu que des Lettres (1) comme vous allez nous en produire, feront fuivies , avec raifon, de l'admiration & de l'étonnement des plus favants. Jene fuis pas de ce nombre; mais j'ai un defir incroyable de voir la fuite de cette merveilleufe Lettre (2) dont vous m'avez fait la faveur de m'envoyer le commencement, & d'autant plus, que cet échantillon me fait efpérer que nous y trouverons les chofes les plus fublimes traitées avec toute la clarté & évidence poffible. Vous ne devez donc pas craindre de groflir vos paquets de ces feuilles fi précieufes; mais croire au contraire que vous m'obligerez infiniment de le faire le plutot que vous pourrez. J'ai effayé quelques-uns de vos problèmes, mais fans prétendre aux Prix; & je me crois heureux de n'avoir pas entrepris la folution des plus difficiles, parce que tant de perfonnes plus intelligentes que moi n'en ayant pu venir à bout, cela me fait conclure que ma peine, aufhi-bien que la leur, auroit été perdue: même dans ce que je crois avoir trouvé, j'ai commis une^e erreur aflez lourde, de laquelle je ne me fuis apperçu que depuis avoir vu que mon calcul ne répondoit pas au vôtre. Je parle de la proportion que vous avez trouvée de fept fois le diametre à fix fois la circonférence, qui eft vraie, & non pas la mienne, que je crois que vous avez vue dans Îa Lettre que j'ai envoyée il y a quelque temps à M. de Carcavi, Vous jugerez bien pourtant que je ne me fuis abusé qu'au calcul, & non pas à la méthode, laquelle je connois affurément être fans faute, —————

————— (1) Huguens fair allufion aux différentes pieces compofées par Pafcal à l'occafion de fes Problèmes fur la Cycloïde, & imprimées dans ce Volume. (2) Lettre à M. de Carcavi par A. Dettonville, ci-deflus page.229.. | puifqu'elle

A M DErrronwvirzre. 45\$ puisqu'elle confirme votre proposition
 susdite : & je pourrois par-là même trouver encore le centre de gravité de la
 moitié du solide que fait le double espace B CG dans votre Figure à l'entour
 de sa base, mais non pas aux autres cas, faute de savoir le centre de gravité
 de certaines portions du cylindre. J'ai prié M. de Carcavi de vous
 communiquer sur ce que j'avois ajouté dans ladite Lettre touchant les
 superficies des Conoïdes & Sphéroïdes, & de la longueur de la ligne
 parabolique. Et peu de jours après avoir envoyé cette Lettre, je trouvai le
 centre de gravité de la ligne cycloïde & de ses parties coupées par une
 parallèle à la base, qui ont cette propriété étrange, que leur centre de gravité
 divise leur axe toujours en la raison de 1 à 2, comme vous savez, Monsieur;
 mais vous sçavez aussi que je ne vous parle de ces choses que pour vous
 faire voir l'inclination que je garde toujours pour la science dans laquelle
 vous excellez si fort, afin que vous m'en estimiez d'autant plus digne de
 profiter de votre instruction. Je souhaite que ce puisse être bientôt, & il me
 tarde fort de joindre la qualité de votre Disciple à celle de, Monsieur, votre,
 &c. A la Haye, ce 5 Février 1659. Ff4 LETTRÉ

456 Lerrre pe M. SLruze me te _ — _ — LS NS dé — > LETERE
 DEAM, :SEUZE 4:..M.. P ASC A L. Non si rue: BtEN que je devrois pafler
 pour importun, je ne faurois m'abftenir de vous témoignet par la préfente le
 contentement que j'ai reçu d'apprendre de vos Traités que le peu que j'avois
 démontré touchant les Cycloïdes confidérées univerfellement , -a tant de
 rapport avec vos-principes. Il ie fouvient de vous avoir envoyé un Lemme,
 l'automne pailé, fur lequel eft fondé tout ce que j'avois trouvé. En Voici
 un'exemple. Soit un triligne compofé de l'angle droit A L H N CC MB K I
 G ABC & de la courbe € À : & par le mouvement de la figure 4 BC fur AB
 prolongée, & un autre mouvement égal du point C fur la courbe AC ,.foit
 décrite la cycloïde CO H. Soit auffi le point X le centre de gravité de la
 courbe ZP H égale à C À, duquel foit menée a HG, la perpendiculaire X Q::
 je dis que le triligne mixtiligne € H A au triligne mixtiligne C HZ, aura
 toujours la même raifon que ÀQ à QG. De même en prenant quelque point
 en Ja

ASENLSDS AESICTALT. 457 la cycloïde, comme ©, par lequel
 pafle le triligne générateur MOLK, & menant OPT parallde à CG, fiR eft
 centre de la courbe PH, duquel on applique RS, le triligne LOH au triligne
 HO P fera toujours en même raïon de HS à ST. D'où s'enfuit (fuppofant le
 triangle 4 / 4 générateur connu), que quand nous avons le centre de .
 pefanteur de la ligne courbe du triligne & des parties d'icelle, nous avons
 aufhi la quadrature de la Cycloïde; & qu'ayant d'ailleurs la quadrature de la
 Cycloïde, nous avons le centre de la courbe qui l'engendre, & d'où auffi l'on
 peut tirer quantité d'autres conféquences que vous avez déjà tirées, ou que
 vous tirerez fans difficulté. Mes principes font quafi les mêmes que ceux
 dont vous vous êtes fervi; je le vois par les regles de la Statique & par les
 nombres (comme vous avez pu remarquer dans le Lemme que je vous ai
 envoyé); mais votre application eft plus belle & plus univerfelle. Pardonnez
 à mon incivilité, fi j'interromps vos occupations plus férieufes, quoique ce
 foit une faute dans laquelle je fuis en hafard de retomber encore ci-après ;
 car fi je puis rencontrer un jour le loifir que je n'ai pu avoir jufqu'à préfent,
 d'étudier parfaitement vos principes, je prendrai la hardiefle de vous écrire,
 s'il y a en quoi j'aie eu le bonheur de rencontrer quelque chofe qui ait du
 rapport avec iceux ; & j'efpere que vous aurez la bonté de le fouffrir de
 celui qui eft abfolument, Monfieur, votre, &c. A Liege, ce 29 Avril 1659.
 LERTRE

458 Lettre DE M. Sruze À M: PASCALe = ——— BEBE" DEN -
SEUZE AM, PAS CAL. Nb fersse: AYANT rencontré avant-hier l'occafion
d'un ami qui s'en alloït à Sedan, je l'ai chargé de quelques copies du Livre
dont je vous avois écrit il y a quinze jours, & j'efpere qu'elles arriveront à
Paris en même-temps que la préfente, où au moins avec les Coches de
Sedan. Le paquet porte l'infcription de votre nom; mais en cas que l'on
tardât à vous le porter, vous m'obligerez fort de le faire prendre au logis où
les Coches arrivent, & me donner votre fentiment fur le contenu du Livre,
pendant que je demeure inviolablement, Monfieur, votre, &c. A Liege, le 19
Juillet 1659. LETTRE

2 PORESRC ARE DES MEN LEELBENET-Z AM -P'ÉRTIER:

Confeiller à la Cour des Aides de Clermont-Ferrand, Neveu de M. Pafcal.
NÉ ee Vous m'avez obligé fenfiblement, en me communiquant les
manulcrits (1) qui reftent de feu M. Pafcal , touchant les Coniques. Car,
outre les marques de votre bienveillance , que j'eftime beaucoup, vous me
donnez moyen de profiter par la lecture des méditations d'un des meilleurs
cfprits du fiecle : je fouhaiterois pourtant d'avoir pu les lire avec un peu
plus d'application; mais le grand nombre de diftra@ions qui ne me laiflent
pas difpofer entièrement de mon temps, ne l'ont pas permis. Néanmoins je
crois les avoir lues aflez pour pouvoir fatisfaire à votre demande, & pour
vous dire que je les tiens aflez entieres & finies, pour paroître à la vue du
public; & afin que vous puiffiez juger fi je parle avec fondement, je veux
vous faire un récit des pieces dont elles font compofées, & de la maniere
que je crois qu'on peut les ranger. I. Il faut commencer par la piece dont
l'infcription eft: (1) J'ai écrit, & fair écrire de tous côtés, pour me procurer
ces Ouvrages de Pafcal, dont parle Leïbnitz ; mais jufqu'à préfent mes
recherches à ce fujet ont été prefque inutiles. Generatio LA ee A # RS : #

DEA. | av 4 | { | ur | ® 18 if ee D re) pe * As 'is ma APS
 CEDENDE CORRE 460 LETTRE DE M. L'Eerpnrz Geñeratio coni
 feéfionum tangentium & fecantium , feu prejeëlio peripherie, tangentium ,
 & fecantium circuli, in quibuscunque oculi, plani ac tabellis pofitionibus,
 Car c'eft le fondement de tout le refte. II. Après avoir expliqué la génération
 des feétions du cône, faite optiquement par la projeéction d'un cercle fur un
 plan qui coupe le cône des rayons , il explique les propriétés remarquables
 d'une certaine figure , compofée de fix lignes droites, qu'il appelle,
 Hexagramme myflique. J'ai mis au-devant ces mots , de hexagrammo
 myflico & conico : une partie de cette piece fe trouve répétée & inférée mot
 à mot dans une autre, favoir, les définitions Cavec leurs corollaires) ; & les
 propofitions (mais fans Jes démonftrations) qui fe trouvent répétées dans
 le Traité de loco folido , fuppléeront au défaut, de quelques-unes qui
 manquent dans celui-ci de hexagrammo. Le III^e Traité doit être, à mon avis,
 celui qui porte cette infcription : De quatuor tangentibus , & reëtis punüta
 taéluum jungentibus , undè reëtarum harmonicè fe&larum & diametrorum
 proprietates oriuntur. Car c'eft la-dedans que l'ufage de l'hexagramme paroît
 , & que les propriétés des centres & des diametres des fe&ions coniques
 font expliquées. Je crois qu'il n'y manque rien. Le IV^e Traité eft: de
 proportionibus fegmentorum [ecantium & tangentium. Car les propriétés
 fondamentales des feétions coniques, qui dépendent de la connoiffance du
 centre & des diametres, étant expliquées dans le Traité précédent ; il falloir
 donner quelques belles propriétés univerfellement conçues, touchant les
 proportions des droites menées à [a feétion conique; & c'eft de-là que
 dépend tout ce qu'on peut dire des ordonnées. Les figures y {ont aufh, & je
 ne vois rien qui manque. J'ai mis après ce Traité une

AM SP'É RER R. 461 une feuille, qui porte pour titre ces mots :
 De correspondentibus diametrorum , dont la troisieme page traite de Jummä
 & differentiâ laterum feu de focis. Le V^o Traité est : de taétionibus conicis ,
 c'est-à-dire (afin que le titre ne trompe pas), de punélis & reékis quas feétio
 conica attingit ; mais je n'en trouve pas toutes les figures. Le VI^o Traité fera,
 de loco folido : j'y ai mis ce titre, parce qu'il n'y ena point: c'est pour ce fujet
 que Meflieurs Descartes & Fermat ont travaillé, quand ils ont donné la
 compofition du lieu folide, chacun à fa mode , Pappus leur en ayant donné
 l'occafion. Or je crois que M. Pafcal a voulu donner ce Traité à part, ou le
 communiquer au moins à fes amis, parce qu'il y répète beaucoup de chofes
 du deuxieme Traité, mot à mot & aflez au long; c'ait pourquoi il commence
 par ceci: Definitiones excerptra ex conicis ; favoir, du deuxieme Traité
 fufdit, où il explique ce qu'il entend par ces mots, hexagrammum myfticum
 , conicum, &c. On peut juger par-là que le premier , le fecond, le troisieme
 & peut-être le cinquieme Traité, doivent faire proprement les ,coniques ; &
 ce mot fe trouve aufl au dos du premier Traité. Les grandes figures
 appartiennent à ce fixieme. Traité. J'ai mis enfemble quelques fragments. Ily
 a un papier imprimé (1) dont le titre. est : Eflai des coniques ; & comme il
 s'y trouve deux fois tout de même, j'efpere que vous permettrez, Monfieur,
 que j'en retienne un. Il y a un fragment , de reffitutione conti ; {avoir , les
 diametres & parametres étant donnés, retrouver les feétions coniques. Ce (r)
 Cet Écrit, le feul de tons ceux dont parle Leibnitz, que j'aie pu me procurer,
 est imprime à {a tête du quatrieme Vofume de cette édition. difcours

AR + ei TEE QLÉ< Lv 2; el N tr 145 45e: j TE a RTE | LE 77 ||!
AL | 741] MNT. LS)

The text on this page is estimated to be only 41.13% accurate

Le DRE Le» REA PTT Dee LE fe V4, rrangle Ardhmehque

/rvenkons Ceometriques PL. Z. D

The text on this page is estimated to be only 34.54% accurate

4 LA Invent., Ceom. PL. I. ww bé ve og mn ET + _ “ as » ms ss
LT TE = : u : mn SRE DETTE F té , ; PT A 2 2 TR NY " 7 P Z40.20: Le
PDT C OIIILITHIA C C I LR NET U ë Pré ren RU

The text on this page is estimated to be only 28.71% accurate

À sv: = : Fig HS pr marre Al iEr L Ra DER LE PNR gén na et,
DROLE CR RL TE" < A d ' Invent. Geom. PL. LIL. RL EE JS LE TT

| 1 1 Pie D ji nl It 2 || DT Invent. Ceom. F!, 17,

Li a

The text on this page is estimated to be only 24.54% accurate

PE | C+ ce AL L'HSM ae MÉTIERS nn di CICR RAA D le «à : D
0 tt Ph 7 ff EE RAT" net ae hes CIO) Ne en L + 2 A #4 LÊES D niet Lord À
dr es 0, ns ae ee : VE PR EP. [ES D O7 3 À Te Le . être: es r Dee d 27 LU
EN ET re AS US

The text on this page is estimated to be only 30.97% accurate

£ " LS = PERRET IR NES AE Pa =, : . 1e “ 2 ste KA 7 ee = em rs
IE Le en PSE R LE à eu

The text on this page is estimated to be only 37.09% accurate

pOZ 494 pal 860 SL0 044] 970 GVO 600 +00