

This book was produced in EPUB format by the Internet Archive.

The book pages were scanned and converted to EPUB format automatically. This process relies on optical character recognition, and is somewhat susceptible to errors. The book may not offer the correct reading sequence, and there may be weird characters, non-words, and incorrect guesses at structure. Some page numbers and headers or footers may remain from the scanned page. The process which identifies images might have found stray marks on the page which are not actually images from the book. The hidden page numbering which may be available to your ereader corresponds to the numbered pages in the print edition, but is not an exact match; page numbers will increment at the same rate as the corresponding print edition, but we may have started numbering before the print book's visible page numbers. The Internet Archive is working to improve the scanning process and resulting books, but in the meantime, we hope that this book will be useful to you.

The Internet Archive was founded in 1996 to build an Internet library and to promote universal access to all knowledge. The Archive's purposes include offering permanent access for researchers, historians, scholars, people with disabilities, and the general public to historical collections that exist in digital format. The Internet Archive includes texts, audio, moving images, and software as well as archived web pages, and provides specialized services for information access for the blind and other persons with disabilities.

Created with hocr-to-epub (v.1.0.0)

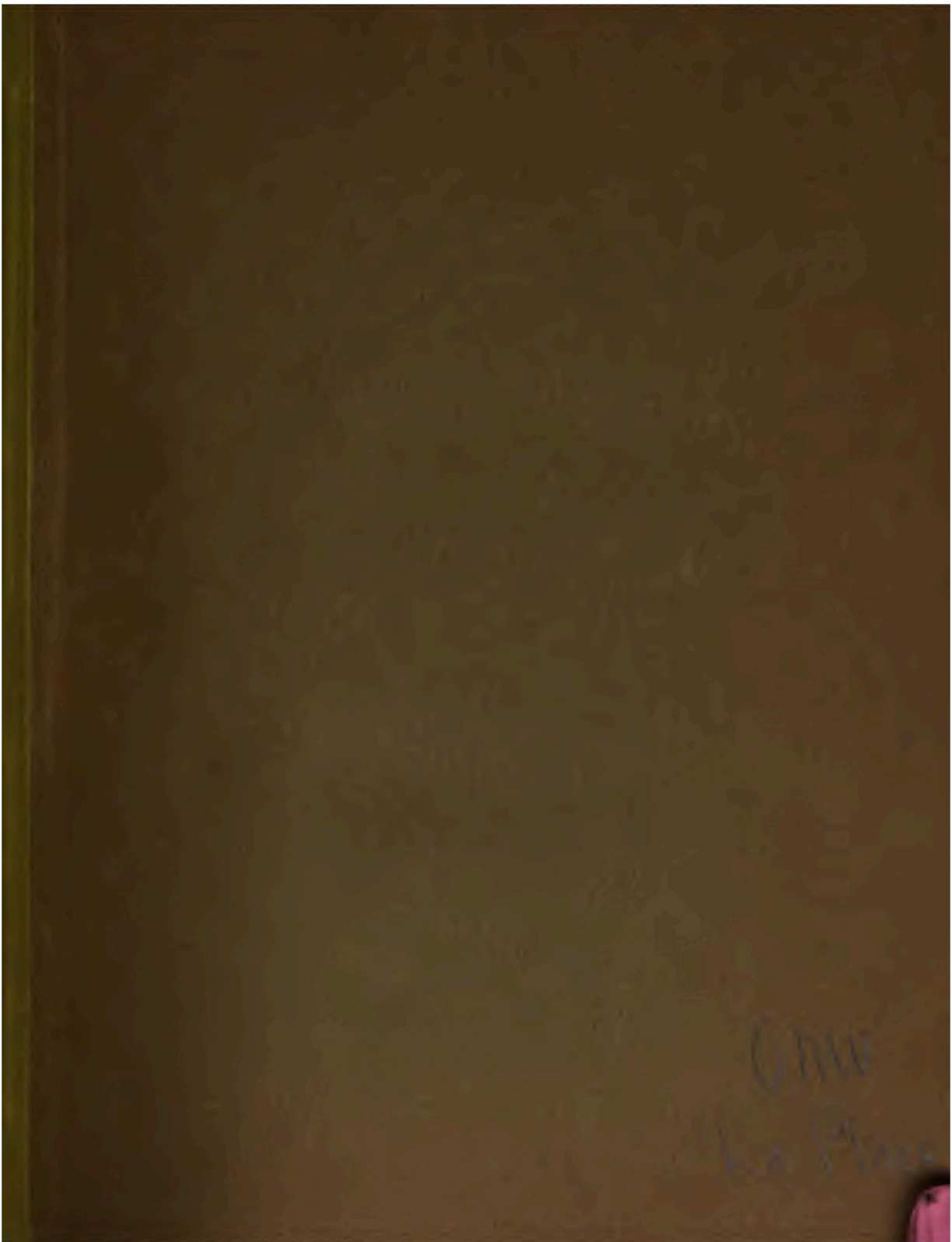
This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online. It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover. Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you. Usage guidelines Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying. We also ask that you:

- + Make non-commercial use of the files We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for Personal, non-commercial purposes.
- + Refrain from automated querying Do not send automated queries of any sort to Google's System: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + Maintain attribution The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + Keep it legal Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe. About Google

Book Search Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at [http : //books . google . corn/](http://books.google.com/)

A propos de ce livre Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne. Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public. Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains. Consignes d'utilisation Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées. Nous vous demandons également de: + Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial. + Ne pas procéder à des requêtes automatisées N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de

travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile. + Ne pas supprimer l'attribution Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas. + Rester dans la légalité Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère. À propos du service Google Recherche de Livres En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse] ht tp : //books .google . corn





The text on this page is estimated to be only 5.80% accurate

ŒUVRES I>E LAPLACE m 0^^M

The text on this page is estimated to be only 21.15% accurate

œUVRES DE LA PL ACE TOME TROISIÈME PARIS
IMPRIMERIE ROYALE M DCCC XLIV

TRAITÉ DE MÉCANIQUE CÉLESTE. III. TOME III.

The text on this page is estimated to be only 6.00% accurate

ŒUVRES DE LAPLACE TOME TROISIÈME PARIS
IMPRIMERIE ROYALE M DCCC XLIV

The text on this page is estimated to be only 0.44% accurate

I * • * • • : • • • • • • • • • • »

TRAITÉ DE MÉCANIQUE CÉLESTE. III. TOME III.

BONAPARTE, DE L'INSTITUT NATIONAL. Citoyen premier consul. Vous m'avez permis de vous dédier cet ouvrage. Il m'est doux et honorable de l'offrir au héros pacificateur de l'Europe, à qui la France doit sa prospérité, sa grandeur et la plus brillante époque de sa gloire; au protecteur éclairé des sciences, qui, formé par elles, voit dans

leur étude la source des plus nobles jouissances, et dans leurs progrès le perfectionnement de tous les arts utiles et des institutions sociales. Puisse cet ouvrage consacré à la plus sublime des sciences naturelles être un monument durable de la reconnaissance que votre accueil et les bienfaits du gouvernement inspirent à ceux qui les cultivent! De toutes les vérités qu'il renferme, l'expression de ce sentiment sera toujours pour moi la plus précieuse. Salut et respect. LAPLAGE.

PRÉFACE. Nous avons donné dans la première partie de cet ouvrage les principes généraux de l'équilibre et du mouvement de la matière. Leur application aux mouvements célestes nous a conduit sans hypothèses, et par une série de raisonnements géométriques, à la loi de la gravitation universelle, dont la pesanteur et les mouvements des projectiles sur la terre ne sont que des cas particuliers. En considérant ensuite un système de corps soumis à cette grande loi de la nature, nous sommes parvenu, au moyen d'une analyse singulière, aux expressions générales de leurs mouvements, de leurs figures et des oscillations des fluides qui les recouvrent ; expressions d'où l'on a vu découler tous les phénomènes observés du flux et du reflux de la mer, de la variation des degrés et de la pesanteur à la surface terrestre, de la précession des équinoxes, de la libration de la lune, de la figure et de la rotation des anneaux de Saturne, et de leur permanence dans le plan de son équateur. Nous en avons déduit les principales inégalités des planètes, et spécialement celles de Jupiter et de Saturne, dont la période embrasse plus de neuf cents années, et qui, n'offrant aux observateurs que des anomalies dont ils ignoraient les lois et la cause, ont paru longtemps faire exception de la théorie de la pesanteur : plus approfondie, elle les a fait connaître, et maintenant ces inégalités en sont une des preuves les plus frappantes. Nous avons développé les

II PRÉFACE. variations des éléments du système planétaire, qui ne se rétablissent qu'après un très-grand nombre de siècles. Au milieu de tous ces changements, nous avons reconnu la constance des moyens mouvements et des distances moyennes des corps de ce système que la nature semble avoir disposé primitivement pour une éternelle durée, par les mêmes vues quelle nous paraît suivre si admirablement sur la terre, pour la conservation des individus et la perpétuité des espèces. Par cela seul que ces mouvements sont dirigés dans le même sens et dans des plans peu différents, les orbes des planètes et des satellites doivent toujours être à peu près circulaires et peu inclinés les uns aux autres. Ainsi, la variation de l'obliquité de l'écliptique à l'équateur, renfermée constamment dans de étroites limites, ne produira jamais un printemps perpétuel sur la terre. Nous avons prouvé que l'attraction du sphéroïde terrestre, ramenant sans cesse vers son centre l'hémisphère que la lune nous présente[^] transporte au mouvement de rotation de ce satellite les grandes variations séculaires de son mouvement de révolution, et dérobe pour toujours l'autre hémisphère à nos regards. Enfin, nous avons démontré sur les mouvements des trois premiers satellites de Jupiter, ce théorème remarquable, savoir, qu'en vertu de leur action mutuelle, la longitude moyenne du premier, vu du centre de Jupiter, moins trois fois celle du second, plus deux fois celle du troisième, est exactement et constamment égale à deux angles droits, en sorte qu'ils ne peuvent jamais être à la fois éclipsés. Il nous reste à considérer particulièrement les perturbations du mouvement des planètes et des comètes autour du soleil, de la lune autour de la terre, et des satellites autour des planètes qu'ils accompagnent. C'est l'objet de la seconde par

PRÉFACE. m tie de cet ouvrage spécialement consacrée à la perfection des tables astronomiques. Les tables ont suivi les progrès de la science qui leur sert de base, et ces progrès ont d'abord été d'une extrême lenteur. Pendant très-longtemps on ne considéra que les mouvements apparents des astres : cet intervalle, dont l'origine se perd dans la plus haute antiquité, et qui fut proprement l'enfance de l'astronomie, comprend les travaux d'Hipparque et de Ptolémée, et ceux des Indiens, des Arabes et des Perses. Le système de Ptolémée, qu'ils ont successivement adopté, n'est au fond qu'une manière de représenter les apparences célestes; et, sous ce rapport, il fut utile à la science. Telle est la faiblesse de l'esprit humain, qu'il a souvent besoin de s'aider d'hypothèses pour lier les faits entre eux. En bornant les hypothèses à cet usage, en évitant de leur attribuer une réalité qu'elles n'ont point, et en les rectifiant sans cesse par de nouvelles observations, on parvient enfin aux véritables causes, ou du moins aux lois des phénomènes. L'histoire de la philosophie nous offre plus d'un exemple des avantages que peuvent ainsi procurer les hypothèses, et des erreurs auxquelles on s'expose en les réalisant. Vers le milieu du xvi*^e siècle, Copernic, en démêlant dans les apparences les mouvements réels de la terre autour du soleil et sur elle-même, montra sous un nouveau point de vue l'univers, et changea la face de l'astronomie. Un concours inouï de découvertes a rendu mémorable à jamais dans l'histoire des sciences, le siècle suivant, d'ailleurs illustré par tant de chefs-d'œuvre en littérature et dans les beaux-arts. Kepler reconnut les lois du mouvement elliptique des planètes; le télescope trouvé par le plus heureux des hasards, et perfectionné aussitôt par

IV PRÉFACE. Galilée, lui fit voir dans les cieux de nouvelles inégalités et de nouveaux mondes; Tapplication que fit Huygens du pendule aux horloges, et celle des lunettes aux quarts de cercle, en donnant des mesures précises des angles et de la durée, rendirent sensibles les plus petites inégalités des mouvements célestes. En même temps que l'observation offrait à l'esprit humain de nouveaux phénomènes, il créa, pour les expliquer et les soumettre au calcul, de nouveaux instruments fruit de la pensée. Néper inventa les logarithmes; l'analyse des courbes et la dynamique prirent naissance dans les mains de Descartes et de Galilée ; Newton découvrit le calcul différentiel, décomposa la lumière, et s'éleva au principe général de la pesanteur*. Dans le siècle qui vient de s'écouler, les successeurs de ce grand homme ont achevé l'édifice dont il avait posé les fondements. Ils ont perfectionné l'analyse infinitésimale, inventé le calcul aux différences partielles infiniment petites et finies, et réduit en formules la mécanique entière. En appliquant ces découvertes à la loi de la pesanteur, ils ont ramené à cette loi tous les phénomènes célestes, et donné aux théories et aux tables astronomiques une précision inespérée, dont on est surtout redevable aux travaux des géomètres français, et aux prix proposés par l'Académie des sciences. Si l'on joint à ces découvertes celles de Bradley sur l'aberration des étoiles et sur la nutation de l'axe terrestre ; les mesures multipliées des degrés et du pendule, opérations dont la France a donné l'exemple en envoyant des académiciens au nord, à l'équateur et dans l'hémisphère austral , pour y observer la grandeur de ces degrés et l'intensité de la pesanteur; l'arc du méridien compris entre Dunkerque et Barcelone, déterminé par des opérations très -précises, et servant

PRÉFACE. V de base au système métrique le plus naturel et le plus simple ; les nombreux voyages entrepris pour connaître les diverses parties du globe, et pour observer les passages de Vénus sur le soleil ; la détermination exacte des dimensions du système solaire, fruit de ces voyages; la planète Uranus, ses satellites et deux nouveaux satellites de Saturne, reconnus par Herschel ; enfin, si Ton réunit à toutes ces découvertes l'invention admirable des instruments à réflexion si utiles à la mer, et celles des lunettes achromatiques, du cercle répétiteur et des montres marines; le dernier siècle, envisagé sous le rapport des progrès de l'esprit humain dans les sciences mathématiques, paraîtra digne de celui qui l'a précédé. Le siècle où nous entrons a commencé sous les auspices les plus favorables à l'astronomie : son premier jour a été remarquable par la découverte de la planète Cérès, suivie presque aussitôt de celle de la planète Pallas, dont la moyenne distance au soleil est à très-peu près la même. La proximité de ces deux corps d'une extrême petitesse à Jupiter, et la grandeur des excentricités et des inclinaisons de leurs orbes entrelacés, produisent dans leurs mouvements des inégalités considérables qui répandront un nouveau jour sur la théorie des attractions célestes, et donneront lieu de la perfectionner encore. C'est principalement dans les applications de l'analyse au système du monde, que se manifeste la puissance de ce merveilleux instrument, sans lequel il eût été impossible de pénétrer un mécanisme aussi compliqué dans ses effets qu'il est simple dans sa cause. Le géomètre embrasse maintenant dans ses formules l'ensemble du système planétaire et de ses variations successives; il remonte par la pensée aux divers états qu'il a subis dans les temps les plus reculés, et redescend à TOMB III. *6

VI PRÉFACE. tous ceux que les temps à venir développeront aux observateurs. Il voit ce sublime spectacle, dont la période embrasse des millions d'années, se renouveler en peu de siècles, dans le système des satellites de Jupiter, par la promptitude de leurs révolutions, et produire de singuliers phénomènes entrevus par les astronomes, mais trop composés ou trop lents pour qu'ils en aient pu déterminer les lois. La théorie de la pesanteur, devenue par tant d'applications un moyen de découvertes aussi certain que l'observation elle-même, lui a fait connaître plusieurs inégalités nouvelles, et prédire le retour de la comète de 1769, dont l'action de Jupiter et de Saturne rend les révolutions très-inégales. Par ce moyen, il a su tirer des observations, comme d'une mine féconde, un grand nombre d'éléments importants et délicats qui, sans l'analyse, y resteraient éternellement cachés. Telles sont les valeurs respectives des masses du soleil, des planètes et des satellites, déterminées par les révolutions de ces différents corps et par le développement de leurs inégalités périodiques et séculaires ; la vitesse de la lumière et l'ellipticité de Jupiter, données par les éclipses de ses satellites, avec plus de précision que par l'observation directe; la rotation et l'aplatissement d'Uranus et de Saturne, conclus de la position, dans un même plan, des différents corps qui circulent autour de ces deux planètes. Telles sont encore les parallaxes du soleil et de la lune, et la figure même de la terre, déduites des inégalités lunaires; car on verra dans la suite que la lune, par ces mouvements, déceut à l'astronomie perfectionnée la petite ellipticité du sphéroïde terrestre, dont elle fit connaître la rondeur aux premiers astronomes par ses éclipses. Enfin, par une combinaison heureuse de l'analyse avec les observations, cet astre, qui semble

PREFACE. VII avoir été donné à la terre pour Téclairer pendant les nuits, devient encore le guide le plus assuré du navigateur, qu'il garantit des dangers auxquels il fut exposé longtemps par les erreurs de son estime. La perfection de la théorie et des tables lunaires, à laquelle il doit ce précieux avantage et celui de fixer avec exactitude la position des objets qui s'offrent à sa vue, est le fruit des travaux des géomètres et des astronomes, depuis plus d'un demi-siècle; elle réunit tout ce qui peut donner du prix aux découvertes : la grandeur et l'utilité de l'objet, la fécondité des résultats et le mérite de la difficulté vaincue. C'est ainsi que les théories les plus abstraites, en se répandant, par de nombreuses applications, sur la nature et sur les arts, sont devenues d'inépuisables sources de biens et de jouissances pour celui même qui les ignore.

TABLE DES MATIÈRES CONTENUES DANS LE TOME
TROISIÈME. SECONDE PARTIE. THEORIES PARTICULIÈRES DES
MOUVEMENTS CELESTES. LIVRE SIXIÈME. Théorie des mouvements
planétaires. - • . page i . Objet de cette théorie Ibid. Chapitre premier.
Formules des inégalités planétaires dépendantes des carrés et des puissances
supérieures des excentricités et des inclinaisons des orbites - page 5.
Inégalités dépendantes de la seconde dimension des excentricités et des
inclinaisons. Forme des termes qui les produisent. Influence qu'ont sur
elles les rapports des moyens mouvements à raison des petits diviseurs
qu'ils peuvent introduire. Préparations des équations différentielles pour les
divers cas que présente à cet égard le système solaire • $n \sim i$ et 2.
Considérations par lesquelles on distingue les plus sensibles de ces
inégalités n^3 . Développements des termes qui en résultent dans les
expressions du rayon vecteur*, de la longitude et de la latitude de la planète
troublée. $n \sim 5$ et 6. Inégalités dépendantes des dimensions supérieures
des excentricités et des inclinaisons. Forme des termes qui les produisent
 n^4 y.

X TABLE DES MATIERES. Examen des cas où elles deviennent sensibles : ils sont dus aux rapports presque commensurables des moyens mouvements. Applications à la théorie de Jupiter et de Saturne pour les termes de la troisième dimension. . n° 8. Inégalités dépendantes de la cinquième dimension. Sont sensibles dans la théorie de Jupiter et de Saturne. Leur calcul pour ces planètes n° 9. Inégalités dépendantes de la troisième dimension, qui deviennent sensibles dans la théorie de Mercure troublé par la Ten^e n° 10. Les inégalités dépendantes de la seconde dimension, qui affectent le mouvement en latitude de la planète troublée, en introduisent d'analogues dans le mouvement de la planète perturbatrice : ce sont les seules inégalités en latitude qui soient sensibles dans le système planétaire, parmi celles qui dépendent du produit des excentricités et des inclinaisons n° 11. Chapitre ii. Inégalités dépendantes du carré de la force perturbatrice page 38. Développements de leurs expressions analytiques données dans les n° 65 et 66 du second livre. Elles résultent de l'influence que les inégalités à longue période ont sur les termes dépendants du carré des masses perturbatrices. Les variations des excentricités et des périhélie peuvent introduire de semblables inégalités dans les moyens mouvements; mais on prouve que les termes dont ces inégalités se composent, s'entre-détruisent d'eux-mêmes; d'où il suit que les moyens mouvements et les grands axes n'éprouvent aucune altération par l'effet des termes dont il s'agit n° 12. Variations des excentricités, des périhélie, des nœuds et des inclinaisons dues à la seconde puissance des masses perturbatrices n° 13 et 14. Ces variations n'altèrent point les relations trouvées dans le second livre entre les éléments des orbites n° 15. Examen des termes de l'ordre du carré des masses perturbatrices qui ont une influence sensible sur les grandes inégalités de Jupiter et de Saturne... n° 16. Corrections qu'il faut introduire dans les moyens mouvements de ces deux planètes, en vertu de leurs grandes inégalités n° 17. Les coefficients des inégalités des planètes varient à raison des variations séculaires des éléments des orbites. Manière d'y avoir égard n° 18. Chapitre m. Des perturbations dues à l'ellipticité du soleil. . page 64. Cette ellipticité donne à la planète un mouvement direct dans son périhélie, et aux nœuds de l'orbite sur le plan de l'équateur solaire , un mouvement

TABLE DES MATIERES. xi rétrograde égal au précédent. Ces inégalités safaiblissent rapidement à mesure que la distance au soleil augmente : elles ne sont sensibles que pour Mercure. L'ellipticité du soleil n'influant ni sur l'excentricité de l'orbite, ni sur son inclinaison, ne peut altérer la stabilité du système planétaire, n° 18. Chapitre iv. Des perturbations du mouvement des planètes produites par l'action de leurs satellites page 67. Ces perturbations se déterminent par les théorèmes du n° 10 du second livre. Leur grandeur dépend des masses des satellites par rapport à celle de la planète, et de leurs élongations vues du soleil. Elles ne sont sensibles que dans la théorie de la terre troublée par la lune n° 19. Chapitre v. Considérations sur la partie elliptique du rayon vecteur et du mouvement des planètes page 69, n° 20. Chapitre vi. Valeurs numériques des quantités qui entrent dans les expressions des inégalités planétaires page 71. Valeurs des masses des planètes. Considérations d'après lesquelles elles ont été calculées n° 21. Table des éléments planétaires n° 22. Calcul numérique des formules données dans le n° 19 du second livre. . n° 28. Chapitre vu. Expressions numériques des variations séculaires des éléments des orbites planétaires page 99, n° 24-26. Chapitre viii. Théorie de Mercure page 109. Examen de la limite jusqu'à laquelle les approximations doivent s'étendre dans la détermination du rayon vecteur. Valeurs numériques des inégalités sensibles qui affectent la longitude et le rayon vecteur; Elles sont produites par l'action de Vénus, de la Terre et de Jupiter. Inégalités indépendantes des excentricités. Inégalités dépendantes de la première puissance des excentricités. Inégalités dépendantes de la seconde dimension des excentricités et des inclinaisons des orbites. Inégalités dépendantes de la troisième dimension de ces mêmes quantités. Les inégalités en latitude sont insensibles et au-dessous d'un quart de seconde n° 27.

XII TABLE DES MATIÈRES. Chapitre ix. Théorie de Vénus page 113. Examen de la limite jusqu'à laquelle les approximations doivent s'étendre dans l'évaluation du rayon vecteur. Valeurs numériques des inégalités sensibles qui affectent la longitude et le rayon vecteur. Les planètes qui les produisent sont la Terre, Mars, Jupiter et Saturne. Inégalités indépendantes des excentricités. Inégalités dépendantes de la première puissance des excentricités. Inégalités dépendantes de la seconde dimension des excentricités et des inclinaisons des orbites. Inégalités dépendantes de la troisième dimension de ces mêmes quantités. Inégalités en latitude. Elles sont dues à l'action de Mars et de Jupiter. . n° 28. Chapitre x. Théorie du mouvement de la Terre page 117. Examen de la limite jusqu'à laquelle les approximations doivent s'étendre dans l'évaluation du rayon vecteur. Valeurs numériques des inégalités sensibles qui affectent la longitude et le rayon vecteur terrestre. Les planètes qui les produisent sont Vénus, Mars, Jupiter et Saturne. Inégalités indépendantes des excentricités. Inégalités dépendantes de la première puissance des excentricités. Inégalités dépendantes de la seconde dimension des excentricités et des inclinaisons des orbites. Inégalités dépendantes de la troisième dimension de ces mêmes quantités. Inégalités du mouvement de la terre en latitude. Elles sont produites par l'action de Vénus et de Jupiter i^{'''} 29. Inégalités du mouvement de la terre produites par l'action de la lune . • n° 30. Des variations séculaires de l'orbite terrestre, de l'équateur et de la longueur de l'année. L'action du soleil et de la lune influe considérablement sur leurs valeurs. Détermination de l'époque à laquelle le grand axe de l'orbite terrestre coïncidait avec la ligne des équinoxes; et de celle à laquelle ces deux lignes étaient perpendiculaires l'une à l'autre n° 31. Chapitre xi. Théorie de Mars page 131. Examen de la limite jusqu'à laquelle les approximations doivent s'étendre dans l'évaluation du rayon vecteur. Valeurs numériques des inégalités sensibles qui affectent la longitude et le rayon vecteur. Les planètes qui les produisent sont Vénus, la Terre, Jupiter et Saturne.

TABLE DES MATIERES. xm Inégalités indépendantes des excentricités. Inégalités dépendantes de la première puissance des excentricités. Inégalités dépendantes de la seconde dimension des excentricités et des inclinaisons des orbites. Les inégalités en latitude sont très-peu sensibles. Celle qui Test le plus résulte de l'action de Jupiter n° ii. Chapitre xii. Théorie de Jupiter page i Sy. Examen de la limite jusqu'à laquelle les approximations doivent s'étendre dans l'évaluation du rayon vecteur. Valeurs numériques des inégalités sensibles qui affectent la longitude et le rayon vecteu*. Les planètes qui les produisent sont la Terre, Saturne et Uranus, mais principalement Saturne. Inégalités indépendantes des excentricités. Inégalités dépendantes de la première puissance des excentricités. Elles sont assez considérables pour qu'il soit nécessaire d'avoir égard à la variation de leurs coefficients. Inégalités dépendantes des carrés et des produits des excentricités et des inclinaisons. Sont produites par la seule action de Saturne. Inégalités dépendantes des troisième et cinquième dimensions des excentricités et des inclinaisons, ainsi que du carré de la force perturbatrice! Ces dernières, qui sont dues aux inégalités à longues périodes, influent considérablement sur les variations séculaires des éléments elliptiques. Grande inégalité du moyen mouvement. Elle est produite par l'action de Saturne. . . n° 33. Inégalités en latitude. Ont pour cause l'action de Saturne n° 34. Chapitre xiii. Théorie de Saturne page 1 54. Examen du degré auquel les approximations doivent s'étendre dans l'évaluation du rayon vecteur. Valeurs numériques des inégalités sensibles qui affectent la longitude et le rayon vecteur. Les planètes qui les produisent sont Jupiter et Uranus. Inégalités indépendantes des excentricités. Inégalités dépendantes de la première puissance des excentricités. Inégalités dépendantes des carrés et des produits des excentricités et des inclinaisons. Inégalités dépendantes des troisième et cinquième dimensions des excentricités et des inclinaisons, ainsi que du carré de la force perturbatrice. Grande inégalité de Saturne. C'est la réaction de celle de Jupiter n° 35. TOME m. c

XIV TABLE DES MATIERES. Inégalités en latitude. Sont produites par l'action de Jupiter et d'Uranus. n° 36. Chapitre xiv. Théorie d'Uranus page 166. Examen du degré auquel les approximations doivent s'étendre dans l'évaluation du rayon vecteur. Valeurs numériques des inégalités sensibles qui affectent la longitude et le rayon vecteur. Elles sont dues à l'action de Jupiter et de Saturne. Inégalités indépendantes des excentricités. Inégalités dépendantes de la première puissance des excentricités. Inégalités dépendantes de la seconde dimension des excentricités et des inclinaisons. Inégalités dépendantes de la troisième dimension des excentricités et des inclinaisons, n'y en a qu'une seule produite par l'action de Saturne. . n° Sy. Inégalités en latitude. Sont produites par l'action de Jupiter et de Saturne, n° 38. Chapitre XV. De quelques équations de condition qui existent entre les inégalités planétaires, et qui peuvent servir à les vérifier, page 169, n° 39-43. Chapitre xvi. Sur les masses des planètes et de la lune . . . page 181. Réflexions sur les valeurs données à ces masses dans le n° 1. Nouvelle détermination de celles de Vénus et de Mars. Discussion de celle de la lune par la comparaison des divers phénomènes qui peuvent la déterminer, tels que les observations des marées, l'équation lunaire des tables du soleil, la nutation de l'axe terrestre, et la parallaxe de la lune. Il en résulte que cette masse est un peu moindre que ne l'indiquent les marées observées à Brest n° 44. Chapitre xvii. Sur la formation des tables astronomiques, et sur le plan invariable du système planétaire page 187, n° 45-46. Chapitre xviii. De l'action des étoiles sur le système planétaire, p. 189. Le grand éloignement de ces astres rend leur action insensible. Réflexions sur la comparaison des formules précédentes avec les observations n° 47.

TABLE DES MATIÈRES. xv LIVRE SEPTIÈME. THÉORIE DE LA LUNE. Exposé de cette théorie; ses difficultés particulières. Considérations par lesquelles on doit y diriger les approximations. Gomment on peut en conclure plusieurs éléments importants pour la théorie du système du monde, et, entre autres, l'aplatissement de la terre, qui s'obtient ainsi avec plus d'exactitude que par les observations directes Page 196. Chapitre premier. Intégration des équations différentielles du mouvement lunaire , page 209. Équations différentielles de ce mouvement données dans le n^o 15 du second livre. Manière d'avoir égard dans les calculs à la non-sphéricité de la lune et de la terre n^o 1 . Développements des quantités qui entrent dans les équations différentielles , en supposant ces deux corps sphériques n^o 2 . L'écliptique , dans son mouvement séculaire, emporte l'orbite de la lune de manière que finclinaison moyenne de cette orbite sur elle reste toujours la même. Cette circonstance, indiquée par l'analyse , simplifie les calculs, en ce qu'elle permet de prendre, pour plan fixe de projection, celui de récliptique n^o 3. Recherche de la partie elliptique des mouvements de la lune et de la terre n^o 4. Principes relatifs aux degrés de petitesse des quantités qui entrent dans les expressions des coordonnées de la lune. Examen de l'influence que les intégrations successives peuvent avoir sur les différents termes dont elles sont composées. Indication des termes du rayon vecteur qui produisent l'évection et réquation annuelle n^o 5. Usage de ces considérations. Développements de l'équation différentielle qui donne le rayon vecteur, en n'ayant égard qu'à la première puissance de la force perturbatrice n^o 6 , 7. Recherche des termes de l'ordre du carré et des puissances supérieures des forces perturbatrices qui acquièrent une influence sensible par les intégrations.

XVI TABLE DES MATIERES. tions. Il est nécessaire d'avoir égard aux perturbations du mouvement de la terre par la lune n** 8. Réunion de ces termes aux précédents. Développement complet de l'équation différentielle qui donne le rayon vecteur *** g. Intégration de cette équation. Inégalités qui en résultent. Expression du mouvement du périhélie lunaire. La variabilité de l'excentricité de l'orbe terrestre introduit une inégalité séculaire dans la constante de la parallaxe lunaire ; mais cette inégalité est insensible. La même cause donne une inégalité séculaire dans le mouvement du périhélie lunaire; ce qui est conforme aux observations. Expression analytique de cette inégalité. L'excentricité de l'orbe lunaire est assujettie à une variation séculaire analogue à celle de la parallaxe, et pareillement insensible n° i o. Développement de l'équation différentielle qui donne la latitude, en n'ayant d'abord égard qu'à la première puissance des forces perturbatrices . . n° 1 1 . Recherche des termes de l'ordre du carré de ces forces qui acquièrent une influence sensible sur l'expression de la latitude n^ i n . Réunion de ces termes aux précédents , et développement complet de l'équation différentielle qui donne la latitude n® 1 3. Intégration de cette équation. Inégalités qui en résultent. Expression du mouvement rétrograde des nœuds. La variabilité de l'excentricité de l'orbe terrestre , introduit dans ce mouvement une inégalité séculaire. Expression analytique de cette inégalité. Son rapport avec celle du périhélie. L'inclinaison de l'orbite lunaire à l'écliptique vraie est pareillement variable en vertu de la même cause; mais cette variation est insensible n** i 4. Développement de l'équation différentielle qui donne le temps ou la longitude moyenne en fonction de la longitude vraie. Intégration de cette équation. Inégalités qui en résultent n** 1 5. La longitude moyenne éprouve aussi un changement séculaire résultant de la variabilité de l'excentricité de l'orbe terrestre; expression de cette inégalité. Rapports analytiques des équations séculaires des moyens mouvements de la lune, de son périhélie et de ses nœuds. Détermination numérique des divers coefficients qui entrent dans les formules précédentes, et développement numérique de l'expression de la longitude

TABLE DES MATIERES. xvii moyenne. Les perturbations de Torbe terrestre par la lune se réfléchissent à celle dernière par le moyen du soleil , et elles s'affaiblissent par cette transmission. Valeur numérique du mouvement du périégée et de son équation séculaire. Cette équation a un signe contraire à celle du moyen mouvement. Expression numérique du mouvement des noeuds et de son équation séculaire. Cette équation a aussi un signe contraire à celle du moyen mouvement, d'où il suit que les mouvements des noeuds et du périégée se ralentissent quand celui de la lune s'accélère. Rapports numériques de ces trois équations séculaires. Equation séculaire de l'anomalie moyenne n° 16. Inégalités les plus sensibles du quatrième ordre qui entrent dans l'expression de la longitude moyenne n° 17. Expression numérique de la latitude n° 18. Expression numérique de la parallaxe lunaire n° 19. Chapitre II Des inégalités lunaires dues à la non-sphéricité de la terre et de la lune page 288. La non-sphéricité de la terre ne produit dans la latitude de la lune qu'une seule inégalité sensible. On peut représenter cet effet, en supposant que l'orbite de la lune, au lieu de se mouvoir sur le plan de l'écliptique avec une inclinaison constante, se meut avec la même condition sur un plan passant toujours par les équinoxes entre l'écliptique et l'équateur. Cette inégalité est très-propre à faire connaître l'aplatissement de la terre. Elle est la réaction de la nutation de l'axe terrestre sur le sphéroïde lunaire, et il y aurait équilibre autour du centre de gravité de la terre, en vertu des forces qui produisent ces deux inégalités, si toutes les molécules de la terre et de la lune étaient fixement liées entre elles, la lune compensant la petitesse des forces qui l'animent , par la longueur du levier auquel elle est attachée. La non-sphéricité de la terre n'influe sur le rayon vecteur de la lune que d'une manière insensible ; la longitude de la lune n'éprouve de la part de la même cause qu'une seule inégalité appréciable. Le mouvement du périégée et celui du noeud n'en reçoivent que de très-petites augmentations n° 20. La non-sphéricité de la lune n'introduit dans son mouvement que des inégalités insensibles n° 21 .

XVIII TABLE DES MATIERES. Chapitre m. Des inégalités de la lune dues à l'action des planètes. page 303. Ces inégalités sont de deux sortes : les unes sont dues à l'action directe des planètes sur le mouvement de la lune ; les autres résultent des perturbations que les planètes font éprouver au rayon vecteur terrestre. Perturbations qui se réfléchissent à la lune par le moyen du soleil , en s'agrandissant par les intégrations qui leur donnent de petits diviseurs. Détermination de ces inégalités pour Vénus , Mars et Jupiter. La variabilité des excentricités des orbites planétaires introduit dans la longitude moyenne de la lune, des équations séculaires analogues à celle que produit la variation de l'excentricité de l'orbite terrestre, réfléchie à la lune par le moyen du soleil; mais elles sont tout à fait insensibles par rapport à cette dernière. Ainsi l'action indirecte des planètes sur la lune, transmise par le moyen du soleil, l'emporte beaucoup à cet égard sur leur action directe n° 1. Chapitre iv. Comparaison de la théorie précédente avec les observations P. 316. Valeurs numériques de l'inégalité séculaire du moyen mouvement de la lune , de celles du mouvement du périhélie et du nœud de l'orbite lunaire. Considérations qui confirment leur exactitude n° 3. Inégalités périodiques du mouvement lunaire en longitude. Accord des coefficients donnés par la théorie, avec ceux des tables lunaires de Mason et de Burg. Une de ces inégalités dépend de la parallaxe du soleil. En déterminant son coefficient d'après les observations, on en déduit la valeur de cette parallaxe, telle que la donnent les passages de Vénus. Une autre de ces inégalités dépend de l'aplatissement de la terre. La valeur de son coefficient, déterminée d'après les tables de Mason et de Burg, indique que la terre est moins aplatie que dans le cas de l'homogénéité, et que son aplatissement est $\frac{1}{25}$. Inégalités du mouvement de la lune en latitude. Accord des coefficients donnés par la théorie avec ceux des tables de Mason et de Burg. Une de ces inégalités dépend de l'aplatissement de la terre. Son coefficient, déterminé d'après les observations, donne le même aplatissement que l'inégalité en longitude qui dépend du même élément. Ainsi ces deux résultats s'accordent à montrer que la terre est moins aplatie que dans le cas de l'homogénéité. ... if 25.

TABLE DES MATIERES. xix expression numérique de la parallaxe horizontale de la lune. Son accord avec les tables de Mason et de Burg n° 26. Chapitre v. Sur une inégalité à longue période, qui paraît exister dans le mouvement de la lune $P^{gc} 33^{\wedge}$. L'action du soleil sur la lune produit, dans le mouvement de ce satellite, une inégalité dont l'argument est le double de la longitude du nœud de Torbite lunaire, plus la longitude de son périhélie, moins trois fois la longitude du périhélie du soleil. La considération de la non-sphéricité de la terre peut encore introduire dans le mouvement de la lune deux autres inégalités dont la période est à très-peu près la même que celle de la précédente, et qui, vu la position actuelle du périhélie solaire, se confondent à peu près avec elle. Ces trois inégalités sont très-difficiles à déterminer par l'analyse ; les deux dernières semblent devoir être insensibles n° 27. La première est évidemment indiquée par les observations. Détermination de son coefficient n° 28. Chapitre vi. Des variations séculaires des mouvements de la lune et de la terre, qui peuvent être produites par la résistance d'un fluide éthéré répandu autour du soleil page 3². La résistance de l'éther ne produit d'équation séculaire que dans le moyen mouvement de la lune : elle n'en produit aucune sensible dans les mouvements du périhélie et des nœuds n° 29. L'équation séculaire du moyen mouvement de la terre, produite par la résistance de l'éther, est environ cent fois plus petite que l'équation correspondante du moyen mouvement de la lune n° 30. SUPPLÉMENT AU TRAITÉ DE MÉCANIQUE CÉLESTE. Objet de ce supplément page 353. Sur les deux grandes inégalités de Jupiter et de Saturne. . . page 380. FIN DE LA TABLE DU TROISIÈME VOLUME.

TRAITÉ DE MÉCANIQUE CÉLESTE. SECONDE PARTIE. f
THEORIES PARTICULIERES DES MOUVEMENTS CELESTES.
LIVRE SIXIÈME. THÉORIE DES MOUVEMENTS PLANETAIRES. Les
mouvements des planètes sont sensiblement troublés par leur attraction
mutuelle : il importe de déterminer exactement les inégalités qui en
résultent, soit pour vérifier la loi de la pesanteur universelle, soit pour
perfectionner les tables astronomiques, soit enfin pour reconnaître si des
causes étrangères au système pla-ⁿétaire ne viennent point altérer sa
constitution et ses mouvements. Je me propose ici d*appliquer aux corps de
ce système les méthodes et les formules générales présentées dans la
première TOME III. 1

2 MÉCANIQUE CÉLESTE. partie de cet ouvrage. Je n'ai développé dans le second livre que les inégalités indépendantes des excentricités et des inclinaisons des orbites, et celles qui ne dépendent que de leur première puissance; mais il est souvent indispensable d'étendre les approximations jusqu'aux carrés et aux puissances supérieures de ces quantités, et même de considérer les termes dépendants du carré de la force perturbatrice. Je commence par exposer les formules de ces inégalités : en substituant ensuite dans ces formules et dans celles du second livre les nombres relatifs à chaque planète, je donne les expressions numériques de son rayon vecteur et de son mouvement tant en longitude qu'en latitude. Bouvard a bien voulu faire le calcul de ces substitutions, et le zèle avec lequel il s'est livré à ce pénible travail lui mérite la reconnaissance des astronomes. Divers géomètres ont déjà calculé la plupart des inégalités planétaires : leurs résultats ont servi de vérification à ceux de Bouvard, et lorsqu'il a trouvé des différences, il a remonté à la source de l'erreur, pour s'assurer de l'exactitude de ses calculs. Enfin, il a revu avec un soin particulier le calcul des inégalités qui n'avaient point encore été déterminées; et quelques équations de condition qui ont lieu entre ces inégalités m'ont fourni les moyens d'en vérifier plusieurs. Malgré toutes ces précautions, il peut s'être glissé dans les résultats suivants des erreurs presque inévitables dans un aussi long travail ; mais j'ai lieu de penser qu'elles ne portent que sur des quantités insensibles, et qu'elles ne nuiront point à la justesse des tables fondées sur ces résultats, qui, par leur importance dans l'astronomie planétaire, dont ils sont la base, méritent d'être vérifiés avec les soins que l'on a mis dans le calcul des tables de logarithmes et de sinus. Les théories de Mercure, Vénus, la Terre et Mars n'offrent que des inégalités périodiques peu considérables; elles sont cependant très-sensibles par les observations modernes, qu'elles

SECONDE PARTIE, LIVRE SIXIÈME. 3 représentent avec une exactitude remarquable. Le développement des inégalités séculaires de ces planètes et de la lune fera connaître exactement leurs masses» dont la véritable valeur est la seule chose que leurs théories laissent encore à désirer. C'est principalement dans les mouvements de Jupiter et de Saturne, les deux plus grands corps du système planétaire, que l'attraction mutuelle des planètes est sensible. Leurs moyens mouvements sont presque commensurables, en sorte que cinq fois celui de Saturne est à très-peu près égal à deux fois celui de Jupiter : les inégalités considérables qui naissent de ce rapport, et dont on ignorait les lois et la cause, ont paru longtemps faire exception à la loi de la pesanteur universelle, et maintenant elles en sont une des preuves les plus frappantes. Il est extrêmement curieux de voir avec quelle précision les deux principales inégalités de ces planètes, dont la période embrasse plus de neuf cents années, satisfont aux observations anciennes et modernes : les siècles à venir, en les développant, mettront de plus en plus cet accord en évidence. Pour en faciliter la comparaison aux astronomes, j'ai porté l'approximation jusqu'aux termes dépendants du carré de la force perturbatrice; ce qui me fait espérer que les valeurs que je leur assigne s'éloigneront fort peu de celles que Ton trouvera par une longue suite d'observations continuées pendant une période entière. Ces inégalités ont, sur les variations séculaires des orbes de Jupiter et de Saturne, une grande influence, dont je développe les expressions analytique et numérique. Enfin la planète Uranus est assujettie à des inégalités sensibles que je détermine, et que les observations confirment. Le premier jour de ce siècle est remarquable par la découverte d'une planète dont l'orbe est situé entre ceux de Jupiter et de Mars, et à laquelle on a donné le nom de Cérès. Elle ne paraît que comme une étoile de la huitième ou neuvième grandeur: son excessive petitesse rend donc insensible son action sur le 1.

4 MÉCANIQUE CELESTE. système planétaire; mais elle doit éprouver de la part des autres planètes, et principalement ^à Jupiter et de Saturne, des perturbations considérables qu'il importe de déterminer. C'est ce que je me propose de faire dans la suite de cet ouvrage, lorsque l'observation aura fait connaître avec une approximation suffisante les éléments de son orbite. Il n'y a pas encore trois siècles que Copernic introduisit le premier, dans les tables astronomiques, le mouvement des planètes autour du soleil : environ un siècle après, Kepler y fit entrer les lois du mouvement elliptique, qu'il avait reconnues par l'observation, et qui ont conduit Newton à la découverte de la gravitation universelle. Depuis ces trois époques mémorables dans l'histoire des sciences, les progrès de l'analyse infinitésimale nous ont mis à portée de soumettre au calcul les nombreuses inégalités des planètes, qui naissent de leur attraction réciproque; et par ce moyen les tables ont acquis une précision inattendue. J'ose croire que les résultats suivants leur donneront une précision plus grande encore.

SECONDE PARTIE, LIVRE SIXIÈME. CHAPITRE PREMIER.
FORMULES DES INÉGALITÉS PLANÉTAIRES DEPENDANTES DES
CARRÉS ET DES PUISSANCES SUPÉRIEURES DES
EXCENTRICITÉS ET DES INCLINAISONS DES ORBITES. Des
inégalités dépendantes des carrés et des produits des excentricités et des
inclinaisons. 1. Pour déterminer ces inégalités, je reprends l'équation du n°
46 du second livre, On a par les n° 20 et 22 du même livre, $r = a \{ 1 - e \cos [nt - \varpi] \}$; l'équation différentielle
précédente devient ainsi $r^2 \frac{dr}{dt} = -a^2 e \sin [nt - \varpi] \frac{dr}{dt}$. Maintenant tous les termes de
l'expression de R, dépendants du carré et des produits des excentricités et
des inclinaisons des orbites, peuvent être ramenés à l'une ou à l'autre de ces
deux formes, $A e^2 \cos [nt - \varpi] \sin [nt - \varpi]$, $B e \cos [nt - \varpi]$, i étant susceptible de toutes les valeurs entières positives et négatives.

The text on this page is estimated to be only 26.78% accurate

SECONDE PARTIE, LIVRE SIXIEME. 7 Si cette expression de — ; - est considérable, et si l'un des diviseurs in'-f-(3 — i)n, in'-f(i — i)n est très-petit, comme cela a lieu dans la théorie de Jupiter troublé par Saturne, lorsque l'on suppose i= 5,2» étant à très-peu près égal à 5 n'; la variabilité des éléments des orbites a une influence sensible sur cette expression : il importe donc d'y avoir égard. Pour cela, nous mettrons l'équation différentielle en rère, sous cette forme, $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} - h n^* \cdot a^*, P \cos. [nt - nt' + e' - e] - 2nt - 2e - hn^* \cdot a F \sin. [in't - nt - he' - cj - f - anf - hacj] \right)$. En l'intégrant et négligeant les termes dépendants des différences secondes et supérieures de P et de P', nous aurons $r S r n^* a^* \{ ii' + (3 - i) B \} \cdot \{ in' + (i - i)n \} (2 \cdot \{ i / (i' - n) + 2n \} - 2p \{ P + f / , / ., M I r / . / - T - i \cdot \cos. \{ i («'f - Rf + e' - e) + 2nf + 2el (\{ in + (j - i)n \} \cdot jin - (- (i - i)nj) ' ^ ' ' j , ^ 2 \cdot \{ i (« - n) + 2nj \cdot - ^ n ' \ (\{ in + (3 - i)nj \cdot | in + \{ i - ij BJ \} ' ^ ' ' La formule (F) du n°46 du second livre deviendra, en y faisant ft=i, li.djrSr) _ ^ (\{ F+ G \} \cdot e^* \cdot \sin. j i [nt - nt' + e' - e) + 2nt + 2e - 2'es \}) a^{ndt} * (+ff.ce'.sin.ji(n'f - nf + e' - e) + 2)f + 2e - 'Br - 'Br''jj JdM \setminus (lin + (a - i)n|^* in + (a - ijn)' ^ 1 + > \bullet > . / \setminus , -. a^+ . / , . ^ ./ \cdot \sin. \{ i(n7 - nf + e - e) + 2raf + J\x' \} 3i; _ ^ (i''' + (3 - ') "(tn + (2 - i)it) ' V ^)j$ En donnant à i toutes les valeurs entières positives et négatives.

The text on this page is estimated to be only 27.66% accurate

8 MÉCANIQUE CÉLESTE. en y comprenant zéro, on aura toutes les inégalités dans lesquelles le coefficient de nt surpasse ou est surpassé par celui de nt de deux unités. Si le coefficient $i7i'-t-(2-i)n$ est très-petit, et si cette inégalité est très-sensible, comme cela a lieu dans la théorie d'Uranus troublé par Saturne, alors on mettra la partie de JR , dépendante de $Tangle\ i[nt - nt-he - e)H-2Jif-+-2e$, sous la forme suivante: $Q.cos.\ i[nt - nf-4-e' - e)-h2/if-f-2ej -l-Q'.sin.\{i(7i't - 7if-he' - e)-f-2nf-+-2e\}$, et Ton aura $dQ^2 . 3 a. ffdnt. dR = ,. >7/ Vi. \bullet Q + ^{-rn} - ^{\bullet} sin. I i(ni-nt+e'-e)+2 nt-\backslash-2 e \backslash \bullet \bullet' jjn4-(2-i)nj^* (in+[2-i)n) ' v / ' ' *">$ la formule $\{Y\}$ du $n^{'''}$ 46 du second livre donnera ainsi $^{\wedge}_2.d[rSr) ^{\wedge} ((F+G).e^*.sin.\{f (nf-nf+e'-e) + 2 7if+2e-''2tg\} | ,j^{\wedge} \sim a\ndt ^*(+ff.^{\wedge\wedge}.sin.\{i(7i'(-n(+e'-e)+2nf+2e\sim CT\sim i0'j(^{\wedge\wedge} dQ' . / JQ \backslash ((6-3iW (,.^{\wedge\wedge} dt] ^{\wedge\wedge\wedge} da)) ^{rt} u . ^{\wedge} \backslash (jm+(2-i)nj^* (in+(2-i)n) in + (2-i)n) ^{\wedge\wedge} ' ' dQ . /dQ'\ (6-3i)/i'' (r^{\wedge} r dt \da I) i-i u . f \backslash (\{m+(2-i)nj^* I i/i+(2-i)jn iw+(2-i)/i) ^{\wedge\wedge\wedge} > Je$ supprime pour plus d'exactitude le diviseur $yi - e''$ dans cette expression de $h\nu$, parce que ce diviseur n affecte point, comme on l'a vu dans le $n^{'''}$ 65 du second livre, la partie de cette expression qui a pour diviseur le carré de $in-h[i - 1)71$; et dans le cas présent, cette partie est beaucoup plus grande que les autres.

SECONDE PARTIE, LIVRE SIXIÈME. 9 De plus, en vertu du même numéro, il faut appliquer cette partie de 5î; au moyen mouvement de la planète m; et comme elle est à fort peu près égale à l'inégalité entière dépendante de l'angle $i[nt - nt - he' - e) - f - 27ii - + - 2e$, on peut appliquer cette inégalité entière au moyen mouvement de m. On aura les valeurs de $-rr - \gg - rr - i - jt^{\wedge} t - \wedge \gg$ en différentiant dt dt dt dt les expressions de P , $P \setminus Q$, Q , par rapport aux excentricités et aux inclinaisons des orbites, aux positions de leurs périhélies et de leurs noeuds, et en substituant au lieu des différences de ces quantités, leurs valeurs. Mais on aura plus simplement ces $vadP$ leurs de $-jr \gg^{\wedge} tc$. de la manière suivante. On déterminera la valeur de F , pour une époque éloignée de deux cents ans, de la première époque à laquelle on fixe l'origine du temps t . En nommant P , cette valeur, et T l'intervalle de deux cents années, on aura $j \gg^{\wedge} p p^{\wedge} - dt \sim^{\wedge} \wedge^{\bullet}$. On aura par le même procédé les valeurs de $-\wedge$, $-\wedge$, $-j$ —. Pour conclure l'expression de —, de celle de — p —, nous désignerons par $-\wedge$, la partie de — qui dépend de l'angle $i(i'f - nf + e - e) + 2nf + 2e$, et nous aurons $-\hat{i} - h F. \cos - j\ddot{i} (n^7 - nf + e' - e) + eG. \cos. |i(n f - 7if + e' - e) + nf + e - izrj) + \acute{e}H. \cos. \{ i (n f - nf + e - e) + nf + e - \text{tir}' \}$) d'où Ton tire $-\wedge = -\wedge\wedge + |. (F + 2G).e^*. \cos. ji (nf - nf + e' - e) + 2nf + \hat{i}e - 2\ll \} + y. ee. H. \cos. \backslash i (\hat{i}'(-n(+e' - e) + 2n/+ 2e - 'cr - is/j$.

TOME III. %

The text on this page is estimated to be only 21.34% accurate

10 MÉCANIQUE CÉLESTE. 2. En considérant de la même manière les termes dépendants de l'angle $i[n - nt - he - e]$ et supposant que l'on ait, en ne portant l'approximation que jusqu'aux premières puissances des excentricités, $Sr = Fx \cos \Delta[n - nt + e - e] + eG \cos. i[n - nt + e - e] + nt + e - e + eG \cos. j - (/f - nf + e - e) + nf + e - e \ll rj + eH \cdot \cos. \{ i[n - nt + e - e] + nt + e - e + eH'' \cdot \cos. \{ - z (/f - nf + e - e) + wf + e - ts/j, i \text{ étant ici positif; on aura } [UG + G). e \cos. i \{ nt - nt + e - e \} i^4 (+HW \cos. ji(7i'f - 7if + e - e) - ^{+1} 4 - n^*. a(-^j ?^{\cdot} aiV \cdot \cos. ji(/i'f - /if + e - e) + L \}] rSr a' ^{in} \{ i + i \} n \cdot \{ i - i \} n \cdot dlrSr] l(G^{\sim} Gf) - ^{-} \sin. i''(/i'f - nf + e' - e) ^{+/^{+^{+^{+} + Y}}] + frgg. \sin. \{ i(yt'f - 7if + e' - e) + tg - izr' \} | Sv = I // ^{e'} \sin. j i(7i'f - /if + e' - e) - 'BT + tiT'j r - 7 - . a^*. (- T \sim 1 - 7^{\sim} 7 r - r; .uN \cdot Sm. l f/l f - flf + 6 - \pounds) + 1/ (^ yji - e^* (^ Si l'on désigne par - ^ la partie qui dépend à la fois des carrés des excentricités et des inclinaisons des orbites, et de l'angle $i \{ nt - nf - i - e' - e \}$, on aura - ^ = ^{+} \cdot \{ Gh - G' - Fj \cdot e^* \cdot \cos. i(/i'f - /if - e' - e) - +^{\cdot} H. ee. \cos. i \{ nt - nt - he - e \} - f - tlr - tff \} - hY'H'. ee. \cos. i \{ nt - /if + e' - e \} - tff - l - tffl : dans ces trois expressions $\hat{i}$ doit être supposé positif.$

SECONDE PARTIE, LIVRE SIXIÈME. 11 3. Le grand nombre des inégalités dépendantes des carrés des excentricités et des inclinaisons ne permet pas de les calculer toutes: on se dirigera dans leur choix par les considérations suivantes, 1*^ Si la quantité $i\sqrt{h(2-i)}n$ diffère peu de ± 71 , alors Tun ou Tautre des diviseurs $n-h(3-i)n$, et $n-h\{i-i\}n$ de la formule [A] du n° 1 est peu considérable, et par là cette formule peut acquérir une valeur sensible, a ° Si la quantité $n-h(2-i)n$ est peu considérable, les termes de la formule (C) du même numéro qui ont cette quantité pour diviseur peuvent devenir sensibles. 3** Si la quantité $i[n-n]$ diffère peu de $\pm n$, Tun ou Tautre des diviseurs $n-(iH-i)7i$, et $n-(i-1)71$, de la formule [E] du numéro précédent, est peu considérable, et par là cette formule peut acquérir une valeur sensible, à''' Enfin, si la quantité $i\{n-n\}$ est peu considérable, les termes de la formule (F) du numéro précédent, qui ont ce diviseur, peuvent devenir sensibles. Il faut donc calculer avec soin toutes les inégalités assujetties à Tune de ces quatre conditions. 4. Les quantités F, G, G\ H, H'', sont déterminées par les approximations développées dans le second livre : nous allons déterminer M et N. Pour cela, reprenons la valeur de R du n° 46 du second livre, r étant ici le rayon vecteur de m. Prenons pour plan fixe celui de Torbite primitive de m, et pour ligne des abscisses x, la ligne des nœuds de Torbite de m avec ce plan. Si l'on nomme v l'angle formé par r et par cette ligne, v l'angle formé par cette même ligne et par r, et y la tangente de l'inclinaison respective des deux orbites, on aura $a; = r.\cos.i;$, $y=r.\sin.v$, $2=0$, f, , , $r'.\sin.v'$, $r'y.\sin.v'$ $a?=r.\cos.r$, $y=-7=:» 2; = — ^{nzz}^z$, 2.

The text on this page is estimated to be only 21.76% accurate

12 MECANIQUE CELESTE. ce qui donne, en négligeant les
quatrièmes puissances de y , $ll = -7p \cdot \cos. [v - v] 7^{\wedge} - 7^{\wedge} \{ \cos. (v - v) - \cos. [v - hv] \} m' m' y^* r r' . j \text{ ces. } (v' - v) - \text{ces. } (v' + v) \} V r^* - 2 r r' . \cos. (v' - v) + r' - ^{\wedge} | r \ll - 2 r r' . \cos. (v - v) + r' * j'' \ll "$ Supposons, comme dans le n*" 48 du second livre, $i_- - 77. \cos. (n' f - n$

The text on this page is estimated to be only 28.77% accurate

SECONDE PARTIE, LIVRE SIXIEME. 13 De là il est facile de conclure «[^].[^].(4i-5).A.V..(.;-.)a.([^])+a..([^])j. A..[^]-[^].|t(.--.)-...M)...([^]-M.-.)<. m="">= ^.[(i-.) (4.--3).A.--.(---3).«'.([^])+a-.([^])j. O et dans le cas de i=i, Il a* o Représentons N. cos. \i{n't — n f -+- e' — e) -+- L | , par les termes suivants , N^Kcos.i{n't — nf-f-e' — e) '+-N^Kee.cos.\i{nt — nf-he' — e)-h« — tffj -hN^Kee.cos.{i{nt — nf-j-e' — e) — tff-f-tîy'j; nous aurons iV.-.=[^].j(.-+/-).J4.-.i"-'-<.. i="" suppos="" positif="" et="" plus="" grand="" que="" z="" dans="" ces="" trois="" derni="" expressions.="" le="" cas="" de="" il="" faut="" ajouter="" n="" mv="" a="" terme="" .="" est="" commode="" pour="" les="" calculs="" num="" avoir=""/>

14 MÉCANIQUE CELESTE. dans les formules que les différences relatives à Tune ou à lautre des deux quantités a et a . On trouve alors par le n° 49 du second livre, $\frac{f}{r} \cdot j(\dots) \cdot H \cdot a^{(4)} + \dots$. $j, M = j(4, \dots) \cdot 4, -, +, \dots (\dots)^{(4)} + \dots j. iV = j(\dots, \dots, \dots, i \dots) \cdot (4^4) - a \cdot (4^4)$. $iV = |\dots, >)| \cdot (\dots, +) \cdot \dots (\dots) - \dots j$. 5. Le cas de $i=0$ mérite une attention particulière. Reprenons la formule [T] du n° 46 du second livre, et considérons d'abord le terme $\frac{c}{Sv}$, donnée par cette formule. On a par le n° 53 du même livre , et en n'ayant égard qu'aux termes affectés de l'arc de cercle nt. r a 1 — A. sin. (/if-f-e) — /. cos. (/i(-+e), $\frac{1}{r} = \frac{\{IC - rD\}.nt.sm.\{nt^e\}}{\{hC - k'D\}.nt.cos.\{nt-he\}}$; ce qui donne, en ne considérant que les termes dépendants des carrés et des produits de h, l, h!, i, et indépendants des sinus et cosinus de nt-l-e, et de ses multiples. On a ensuite, par les n° 19 et 20 du second livre, $r^* dv = a^{ndt} \cdot y/i - e$ ";

SECONDE PARTIE, LIVRE SIXIEME. 15 on aura donc On a
 par le n° 55 du second livre , , m'n.C , — , m'n.D (o..)= , ([^]=z__ ; partant
 $i^{\wedge}j::^{\wedge}r^{\wedge}r:M=\pm d,n.,).$ {h'+i']-E3-{hK+in\Considérons ensuite le terme -[^] —
 4 , de la même formule {T). Si Ton n a égard qu aux quantités séculaires
 dépendantes des carrés et des produits des excentricités et des inclinaisons
 des orbites, on aura, par l'analyse du numéro précédent, -[^]•("'-H.H'-([^])-'--([^])|
 + [^].aa'.B[^]K\{p'-py+{-/>)*-+-(7~7)L ce qui donne an. d3jR=

16 MÉCANIQUE CÉLESTE. Le second membre de cette équation devient nul, en vertu des équations [A] et (C) des n° 55 et 59 du second livre; on a donc $\text{an. d. } 5jR=0$; d'où Ton tire, en observant que $7i'a=i$, $3dt.fdt.dSR \text{ Zm'gdt } m \text{ g}$ étant une constante arbitraire ajoutée à l'intégrale fà. BR. X, , , -vif*- dt\{2rSR'+R'Sr) 11 nous reste a considérer la fonction $\wedge$ qui entre dans l'expression de $d^{\wedge}v$, donnée par la formule [T) du n° 46 du second livre. En négligeant le carré de la force perturbatrice, cette fonction se réduit à $\wedge, \wedge -$, ou par le nu2a\l—j — j.ndt méro cité , à $\wedge \wedge$. Cette quantité produit d'abord le mndt.a'l-j—] $\wedge$, ,. \aa I • • . $\wedge$ \ 1 • • ôm.qat , i terme $\wedge - \wedge$, qui, ajouté à celui-ci, $\wedge$ égal $yi-T^* na'.yji—e'$ à $'—\sim r-$, à cause de $n'' a' = i$, le détruit , parce que $g = -T^{\wedge}(\sim/ -)$ » parle n° 50 du second livre. Reprenant ensuite l'expression précédente de SR, nous observerons que la fonction $m^{\wedge} . aa'$. JB'^M (/>—/>)•-+- (7 — 7)'j -4- etc. est égale à une constante indépendante du temps t, puisque sa différentielle est nulle en vertu des équations (C) du n° 59 du second livre; et si l'on ne considère que les deux planètes m et m', comme nous le ferons dans ce qui va suivre, $(p' - pY-^W - 9)^*$

SECONDE PARTIE, LIVRE SIXIÈME. 17 est, en vertu des mêmes équations, une quantité indépendante du temps; la fonction précédente ne peut donc produire dans $2 \text{ndt.} \frac{d^2 i}{dt^2} - I \frac{d^2}{dt^2} - \frac{d^2}{dt^2}$, qu'une quantité pareillement indépendante du temps, et que l'on peut ainsi négliger, puisqu'elle peut être supposée se confondre avec la valeur de ndt. On aura donc, en faisant disparaître les différences partielles de $A^{''}$ et de $A^{''}$ en a , au moyen de leurs valeurs données dans le n° 49 du second livre, ' 1 .I.V $\frac{d^2 A}{dt^2} , \frac{d^2 A}{dt^2} W$ Si l'on rassemble ces différents termes on aura $\frac{d^2 A}{dt^2} f, , \frac{d^2 A}{dt^2} , , , (\frac{d^2 A}{dt^2} \frac{d^2 A}{dt^2} / 3 (\frac{d^2 A}{dt^2} \frac{d^2 A}{dt^2}) m. \text{ndt}$ On pourra dans cette expression négliger les termes indépendants du temps t . Il est facile d'en conclure l'expression de $dhv'y$ en changeant ce qui est relatif à m , dans ce qui est relatif à n , et réciproquement, et en observant que, quoique la valeur de $A^{''}$ relative à l'action de m sur m soit, par le n° 49 du second livre, différente de sa valeur relative à l'action de m sur m' , cependant on peut, dans l'expression précédente, employer indifféremment l'une ou l'autre valeur. Mais on obtiendra plus facilement $d.hv \backslash$ par la considération suivante. Si Ton ajoute la valeur de $JSt,$, multipliée par $msja$, à la valeur de dhv , multipliée par $rr\hat{y}jd$. TOME III.

18 MÉCANIQUE CÉLESTE. on aura, en substituant au lieu des différences partielles de $A^{''''}$ et de $A^{''}$ en a , leurs différences partielles en $a, p^{\wedge}, F./r).|. -, ,. (^) _ ... (^) j. 3 mm'$ Si Ton ne considère que deux planètes m et m , la différentielle du second membre de cette équation est nulle en vertu des équations (i) du n° 55 du second livre; on a donc, en ne considérant que les quantités périodiques séculaires, $o =: m. \backslash a. \hat{d} \hat{v} - h m \backslash Ja. \hat{d} \hat{v}$; ce qui donne immédiatement Sv , lorsque Ton a déterminé Sv . La valeur de $\hat{d} \hat{v}$ est relative à Tangle compris entre les deux rayons vecteurs r et $r-h dr$. Pour avoir sa valeur relative à un plan fixe, nous observerons que par le n° 46 du second livre, si l'on nomme $dv^{\wedge}$ la projection de dv sur ce plan, on a, en négligeant les quatrièmes puissances de l'inclinaison de Torbite, $dv= dv. i-h^{\wedge} s^* \text{ — } i$ On a par le n° 53 du second livre $5 = ^{\wedge}. \sin. (/if-4-e) \text{ — } p. \cos. (/it-4-e)H-$ etc. ce qui donne $^5 == (n(j - -i \backslash dt \cos. [nt-^e)' + - \backslash np + jf) - ^' - \sin. (nt-f-e) - + -$ etc. on aura donc, en négligeant les quantités périodiques dépendantes de $n^{\wedge}$ et en observant que $dv = ndt$, à très-peu près, $dv= dv-^{\wedge} \hat{p} - p'^{\wedge}$:

SECONDE PARTIE, LIVRE SIXIÈME. 19 ainsi, pour avoir la valeur de $dSv^{\wedge\wedge}$ il faut ajouter à la valeur précédente à $d.\dot{e}v$ la quantité $\wedge^{\wedge}-\wedge^{\wedge}$. Si Ton ne considère que deux planètes m et m' , on aura, par le n° 59 du second livre, et le second membre de cette équation est égal à dt multiplié par une constante; en n*ayant donc égard qu'aux quantités périodiques séculaires, on aura $o=m.\sqrt{a}.\dot{d}v^{\wedge}-hm.\sqrt{a}.\dot{d}hv'^{\wedge}$, $5v$ et $hv'^{\wedge}$ étant relatifs au plan fixe. 6. Considérons maintenant les inégalités du mouvement en latitude, dépendantes des produits des excentricités et des inclinaisons des orbites; reprenons la troisième des équations (P) du n° 46 du second livre, $ddz\text{ ti.}z.\text{ fdR}\backslash$ Prenons pour plan fixe celui de Torbite primitive de m , ce qui permet de supposer z nul dans $(\wedge^{\wedge}-)$. On aura par le n° 4, et observant que $z=:rs, \backslash dz) -'\bullet m' s' m', r's' \wedge j r^*— a rr'. \cos. [v'—v) + r''j$ « l'équation différentielle en z deviendra ainsi $o= -r^{\wedge} -hn'2.|i-1-3e.\cos. (\ll t+e — \ll r)! m'. n^*a\backslash r's' " I r^*— 2 rr'. \cos. (t?'—v)+ r'^*p$ 3.

The text on this page is estimated to be only 18.35% accurate

20 MÉCANIQUE CÉLESTE, Représentons par $M.s\{n, i[nt - nt - e - e) + 'int - rK\} + N.s\{u, i\{nt - nt + e - e) + L\}$ la partie de $m'/m, r's' I r' - 2rr\cos. (v - v) + r'^j$ » dépendante des angles ? $[nt - nt - e - e) - h\int$, et $[nt - nt - r e - s)$; et supposons qu'en n'ayant égard qu'aux inégalités de z , dépendantes de la simple inclinaison des orbites, la partie de z relative à l'angle $i[nt - nt - he - e)H - /if$ soit $y a F. shi. \{i (nt - n t - r - e - e) r nt i - e - Il j$; on aura, en ne conservant que les termes dépendants des produits des excentricités et des inclinaisons, $ddz . ^, r>\sm Ai(nt - nt - e - e) -]2nt + 2e - ^ - U\ dv ' ^]^{\sin. \{i\{nt - nt - e - e) + ^ - U\} - n^* a\{M.s\{n, i\{nt - nt + e - e) + 2nt + K\} + nV. N. \sin. \{i [nt - n f + e - e) - rL j$; d'où Ton tire en intégrant, $i^ ' n\ ey. aF. \sin. \{i [nt - nt - he - e) - f - 2nM - 2e - \odot - Ilh (- i - n^* a\{M.s\{n, i[nt - nt - he - e)H - 27if - hA^ \} j ^{''^ ' \{in' - [i - i)n\} \{in' - [i - i)n\} (|. 71^*. ey. aF. \sin. j i [nt - nt - h e - e) - f - 'cr - Il j j (- hri'. a\{N. \sin. \{i[nt - nt - he - e) - hL\} ''^ \{in' - [i - hi)n\} \{in' - \{i - i)^{''^ ' On aura la latitude s , en observant que $5 = - = -.ii - t - ^ . \cos. (nt - he - tff)!$;$

SECONDE PARTIE, LIVRE SIXIEME. 21 ou aura donc s, en divisant l'expression précédente de z par a, et en lui ajoutant la quantité $\frac{e}{F} \sin. i [nt - nt_{he} - e] H - 27if - f - 2e - izr - IIj - \frac{e}{F} \sin. i [nt - nt_{he} - e] - ej - l - 'cr - IIj$. Il ne s'agit plus que de déterminer M et N, ce qui sera facile en suivant l'analyse du n° 4. Mais nous nous dispenserons de suivre ce calcul, parce que les inégalités de cet ordre en latitude sont insensibles, excepté relativement à Jupiter et à Saturne, à cause de la commensurabilité très-approchée de leurs moyens mouvements, et nous donnerons dans le n° 10 un moyen très-simple de déterminer ces dernières inégalités. Si l'on rapporte le mouvement de m, sur un plan fixe très-peu incliné, à celui de son orbite primitive; en nommant i l'inclinaison de cette orbite sur ce plan, et ϕ la longitude de son nœud ascendant, la réduction du mouvement sur l'orbite à ce plan sera par le n° 22 du second livre, $-J \cdot \frac{\sin. i}{\cos. i} \cdot (2v - 26) - \tan. (p \cdot \cos. i)$, V étant le mouvement v rapporté au plan fixe. Ainsi le mouvement en latitude introduit dans le mouvement en longitude sur l'écliptique, des inégalités dépendantes des carrés et des puissances supérieures des excentricités et des inclinaisons des orbites. Mais ces inégalités sont insensibles, excepté pour Jupiter et Saturne. En ne considérant que les quantités séculaires, et observant que $\tan. (p \cdot \sin. d = p$, $\tan. i \cdot \cos. 0 = 3f$, on aura $\delta s = t \cdot \frac{e}{F} \sin. i [nt - nt_{he} - e] - t \cdot i \cdot \cos. i$

22 MÉCANIQUE CÉLESTE. Le terme — tang. (p. 8s. cos. (r — d) donnera ainsi le suivant, l? P'''P. 9i . çn sorte que l'on aura ce qui est conforme à ce que nous avons trouvé dans le numéro précédent. Des inégalités dépendantes des cubes et des produits de trois dimensions, des excentricités et des inclinaisons des orbites, et de leurs puissances supérieures. 7. Les inégalités dépendantes des cubes et des produits de trois dimensions, des excentricités et des inclinaisons des orbites, sont susceptibles de ces deux formes, $M \sin. j \{ nt - wf - e' - e \} - t^3 / i (-h \Delta j, N. \sin. j \{ nt - nf - e' - e \} - f - nf - f - L j$. On peut les déterminer par l'analyse dont nous avons fait usage dans les numéros précédents; mais comme elles ne deviennent très-sensibles qu'autant qu'elles croissent avec une extrême lenteur, cette considération simplifie leur calcul. Reprenons la formule [Y] du n° 46 du second livre : on peut y négliger le terme $' / , ^$ qui est alors insensible, à cause de la petitesse du coefficient de t, dans les inégalités dont il s'agit. Cette formule devient ainsi « " = - ^, - * - 3 « . // «

SECONDE PARTIE, LIVRE SIXIÈME. 23 mouvement de m, ces inégalités, au moyen mouvement de cette planète. Cela posé, si Ton suppose $R = mP \cdot \sin. [i \{nt - nt' + e' - e\} - f - 37ifH - 3e] - h m F \cdot \cos. \{i \{nt - nfH - e - e\} - f - 37if - h3e\}$, ce qui comprend tous les termes de R, dans lesquels le coefficient de Tif surpasse ou est surpassé de trois unités, par celui de nt; on aura, par le n** 65 du second livre, $U \cdot \frac{f}{r} \frac{dt}{AR} = \frac{r}{f} \frac{dt}{r} \cdot \{i \cdot (n - n) + 3n\}$ 2.dP S.ddP' On aura ensuite l(/a Supposons enfin qu'en n'ayant égard qu'à l'angle i. (/i' (—/if + e' — e) + 2nf + 2e, on ait ! — ^z = H. $\cos. \{i \cdot (n - nf - i - e' - e) - t - 2R / - + - ae - i - il, H \text{ étant déterminé par ce qui précède, et étant affecté du très-petit dr Sr diviseur } i. (n - n) - + - 3n; \text{ le terme } -^{\text{—}}j - \text{ donnera celui-ci, } eH \cdot \sin. \{i (/i' f - 7it - he' - e) - h3nf - f - 3e - tsT - Hi\}.$

The text on this page is estimated to be only 14.58% accurate

24 MECANIQUE CELESTE. On aura ainsi, en ne considérant que les termes qui ont $i\{n-n\}+3n$ pour diviseur, $s_3(3-i)$. $m'. n' \sim ji(\langle'-n)+3/.$ }'aPla.dP ^a.ddP' t i(n'-n)-f 3n \.dt \ i(n'-n) ■\-dn\'.dl* •xa.dP' ia.ddP .sin. {i(n'-n)4-3nj.(/f j i(n -n)+3n j Vrf/' .COS. |i(n'f— nf-hc'— e)|j |+3n«-i-3e (1 i(n'f— nf-+-e'— e +3Rf+3e 1 imn \ "•• (j-) •cos. {i(/i't-nf+e'— e)+3nf+3eji -.•.(n'-«)+3«- 1 _ ^ . >\ .si,,j/(, '<_ j="" .sin.ii="" e="" t="" j.="" l="" dift="" d="" dr="" r="" ..="" r.="" donne="" en="" ne="" consid="" que="" les="" termes="" qui="" ont="" i="" n="" pour="" diviseur="" rsr="" _="" ap.="" sin.="" a="" h="" ji="" cette="" celle-ci="" s="" cos.="" nt="" on="" tirera="" sr="" nt-he="" nt-i-e="" ap.sin.="" .="" nf="" />

SECONDE PARTIE, LIVRE SIXIEME. 25 Cette valeur de — introduit dans èv une inégalité dépendante de Fangle $i[nt - nt-he - e) - hnt-he$, et qui a pour diviseur $i[n - n) - 4-3/1$. Pour la déterminer, nous reprendrons l'expression de $8v$, donnée par la formule [Y) du n*" 46 du second livre. La partie $— ^ — - — ^ — ^ —$ de cette expression produit dans 5 1; le terme $^eH.^m.i[nt - nt-i-e - e)H-7if-f-e-+-'CT-+-i4 |$: c'est le seul de ce genre qui ait $i\{n - 7i\}-h37i$ pour diviseur. L'inégalité de $8v$, dépendante de l'angle $i(/i'f — nf+s' — e)+27?f+2e$, est à très-peu près, par le n*" 1, en n'ayant égard qu'aux termes qui ont $i[n - 7i)-f-3ii$ pour diviseur, $2H.sin. \ i[nt - jifH-e' — e)H-2nf-h2eH-i4 j$. En désignant donc cette inégalité par $K.s\backslash n.\ i[nt - nf-ne' — e)H-2;if-4-2e-+-Bj$, on a dans hv l'inégalité $\backslash eK.sm.\ i[nt - nt-he — e)-f-nfH-eH-'CT-h5 j$. 8. C'est principalement dans la théorie de Jupiter et de Saturne que ces diverses inégalités sont sensibles. En supposant $1 = 5$, la fonction $1(71' — n)-h^n$ devient $5/i' — 2/1$, et cette dernière quantité est très-petite, en vertu du rapport qui existe entre les moyens mouvements de ces deux planètes, ce qui donne aux inégalités correspondantes de 5 r, et de 5 v, de grandes valeurs. Pour les déterminer, reprenons l'expression de -R donnée dans le n** 4 : la partie $— ^cos. [v — v) r''-7*- "77. jcos. (r' — v) — cos. (v'-hr) \{ \bullet y .y^*, rr. COS. (v — v) \ r' — 2 r r. ces. (v—v) +r^*\}$ TOME III. 4

The text on this page is estimated to be only 22.77% accurate

26 MECANIQUE CELESTE. ne produit aucun terme de Tordre des cubes des excentricités, et dépendant de l'angle $5nt - 2nt$; il ne peut donc en résulter que de la partie $-y - y^* \cdot rr \cdot \cos. [v+v] m^4 \cdot s'$ $V/r^2 - 2rr' \cdot \cos. (t; -v) + r'^* | r^* - 2rr' \cdot \cos. (t; -t;) 4 - r'^* \}^*$ et alors les valeurs de P et de P' sont les mêmes, lorsque Ton considère l'action de m sur m, et celle de m sur m. Déterminons ces valeurs. On a parle n** 22 du second livre, en ne portant la précision que jusqu'aux troisièmes puissances des excentricités inclusivement, $= 1 + -^{**} - (^ - f') - ^{**} - ('^ + ^' \sim ^') \sim i^* - ^{**} - (271^ + 20 - 2151) - Y^ - c^s - (3nf + 3e - 3\ll), v = nt + e + (2e - je').sh \setminus (/if + e - \ll) - ! - - ^e^ - sin. (2n(+ 2e - 2^ + Hô \setminus sin. (3nf + 3e - \sim 3tzt). Gela posé, si l'on développe R suivant les termes dépendants de l'angle $5n'f - 2nt$, on aura une expression de cette forme, $R = M^{^^} \cdot e \setminus \cos. [bnt - 2nt - h5e - 2e - 3'cr') - + - M^K eV \cos. [bnt - 2nt - h5e - 2e - 2\ddot{t}T' - ia) - hM^K eV. \cos. [5nt - 2nt - \setminus Se - 2e - ^' - 2tzt) - hM^K e \setminus \cos. [Snt - 2nt - hbe - 2e - 3'Ct) - + - M^{^^} \cdot ey. \cos. \{bnt - 2nt - hS e' - 2c - \ll - 2H) - + - M^K ey \setminus \cos. [5nt - 2nt - \setminus 5e - 2e - ia - 211); et l'on trouvera après toutes les réductions, «M'=- ^. | 389.6 \gg +, o..o..^ + .7.a-..-jJl + \ll - .^j,$$

The text on this page is estimated to be only 16.01% accurate

SECONDE PARTIE, LIVRE SIXIÈME. 27 10 I J '^ da rfa* da'
a'Afw= — X. 306.^*' + i84.a. -^-^+tth.(t\— rr- +

The text on this page is estimated to be only 14.86% accurate

28 MECANIQUE CELESTE. — — .sin. (5n't— 2nf4-5e'— ae—
tJ+A) +|-eJir.sin. {bn't- 4nf + 5e'-4e+'BT+ B) , — = Jï. COS. (5n'f- Snt +
5e'-3e +y4) - cH. COS. (5n'(- 2n(+ 5e'— 2 e — «j+il) +eH.cos. (5/i't—
4nf+5e— 4c4-i!)»H-i) hm'.n (aP. sin. (5n'f— 2n£+ 5e'— a c)l 5 n'— 2 n '
j+aP'. cos. [bn't- 2nt+6e'— a e) j" En supposant i= — 2, et changeant ce qui
est relatif à m, dans ce qui est relatif à m, et réciproquement, on aura 1 („y
2a'. dP ^a'.ddP' i ' tr ,. ,. c / \i ,_ i5.m.n*] j (5n— 2n).af [5n—in.y.dr) ^ \
(5n'-2n)"] (,_ 2a'.dP' 3a'.rfe/P ,(- / , , c / ^ [^ I — \aP-j7-, tj; — TT-' vT-rn -
cos.fSnt-a/KH-ôc— ae I I (5n— 2n).af (on — an)*, a') ^ '] a'*(-j-r).cos.
(5n'f— 27if+5e'— 2e) 8v'= 2m. n f--a*(-T-r).sin. (5/i'f— 2nf+5£'— 2e) -
\.etr.s\n.{bnt-2nl+oe-2e-^ + A') + |. c À".sin.(3/i« -2/if + 3e-2e+«'+fi'), —
r=H'. COS. (Anf— 2nf+4e'— 2e+yl') —e'H'.cos. (5n7— 2nf+5e'— 2e—
tar'+y4') + efr.cos. (3nf— 2;if+3e'— 2e+tar'+i4') io.7/în' j aP .sin. (5/i'

SECONDE PARTIE, LIVRE SIXIÈME. 29 de Saturne, comme nous l'avons fait dans le développement de l'expression de $\frac{1}{t^4}$ du n° 4, et comme nous le ferons dans le numéro suivant. Nous ne conserverons ainsi que pour l'analogie Tangle H, qu'il faut alors supposer nul. On déterminera de la manière suivante les différences -r-, $\frac{ddP}{dP}$ $\frac{ddP'}{dP'}$, , y, A ri . -jrr[^] -[^]T-, , : on calculera pour l'époque de 1700, et pour une époque plus éloignée de deux cents années juliennes, c'est, T r 1 1 1 ^{^^} d[^] de' dfs dy cfl o • a-dire pour 1900, les valeurs de -[^], -[^], -[^], -[^], 'Ji' 'Ji' ^{^^^^^} df lf[^] "[^] ^{^*}[^] ^{^^} valeurs pour la seconde de ces époques; on aura, en supposant que t exprime un nombre d'années juliennes, de de dde les différences de et dde dans le second membre de cette équation étant relatives à 1760. L'expression de e, pour un temps quelconque t, est, en négligeant le cube de t, et ses puissances supérieures, de. V dde e-ht. dt l' dV [^]Tt -7-, -T — , se rapportant à l'époque de 1750 : cette expression peut s'étendre à mille ou douze cents ans avant et après cette époque. On aura de la même manière les expressions de "cs, e, m\ y et H. On calculera par leur moyen les valeurs de P correspondantes aux trois époques de 1760, 2260 et 2760. Soient P, P , P[^] ces valeurs ; l'expression générale de P étant dt ' 2' dt

30 • MECANIQUE CELESTE. on aura, en faisant successivement $f=500$, $\omega=1000$, $P-h$ 000.-7- h 200000.4-. $-j7— =:/^$, (It ■* ai* ' n dP , ddP j, F -h IOOO.-t; h 1000000. -5-. -rrr- $=^ / dt ^ dV$ " ce qui donne JP _ iP-^SP^P^ ddP _ P-2P;hP dt 1000 ' dp qSgooo 9. Les termes dépendants des cinquièmes puissances des excentricités peuvent avoir une influence sensible sur les deux grandes inégalités de Jupiter et de Saturne; mais le calcul en est pénible par son excessive longueur. Son importance a déterminé Burckhardt, très-habile astronome, à l'entreprendre. Il a discuté avec une scrupuleuse attention tous les termes de cet ordre qui dépendent de Tangle bnt — 2nt, en se permettant seulement de négliger les produits des excentricités, par la quatrième puissance de l'inclinaison mutuelle des orbites: ce qui ne peut, en effet, produire que des quantités insensibles. L'expression de R du n** 4 est relative à l'action de m sur m : la partie de cette expression qui a le plus d'influence sur cette inégalité est le produit de m par le facteur $^{\wedge}.rr. j\cos. (v'— v) — \cos. (r + r)j H 1 : \l r*-\wedge r r. \cos. [v — v) + r' | r'—2rr'. \cos. [v'—v) +r''\ " ce facteur est le même pour les deux planètes; en le développant, et en ne considérant que les produits des excentricités et$

The text on this page is estimated to be only 10.81% accurate

$a'A'fi = aN^{\wedge} =$ SECONDE PARTIE. LIVRE SIXIÈME. 31 des
 inclinaisons, relatifs à l'angle $Sn't - 2nt$, on a une fonction de cette forme ,
 $N^{\wedge}K \cos. \{5nt - \text{anf-i- } 5 e' - ae - W-f-'cr) \setminus -f-iV'''. \cos. (5n'f - 2n$

The text on this page is estimated to be only 8.66% accurate

a'iV'''=32 MÉCANIQUE CÉLESTE. i-{i0939a.c''+53o64.e').6f;'-
(42368. c''+ 23436. c'). a. -ji 768 • +(io64.e''+2o88.e').a'.-^^H-
(i572.c''+i7io.c').a'.-^ + (i52.e''+ 1 92. e').tt*. ^^7 4-(4-e'+6.e').tt'.— g^ 1
595.a. /è''' + 6 d'iw 768 •j-(64o.c'+297o.e'').a'.— ^+(864.c* + i854.e'').a'. -j^
l+(ii6.e'+ 2io.c'').a\ -^ +(4.e'+6.c'').a'.-^ T ^ 680 e'e'. y' 128 •; •-•(»i + *'|) +
>34.«-. \^ -^ + -^ d'tw d-ftC) (/«fcw d>6W + 28.a\ -j-f- + -r:f- +«'. -^^1- +
dfc''' a'iVW=768 -(ii84o.c*+ 162000. e'j.è'''- (656o. e'+65i68. e'*). «--^^ —
(592.c'+4720.e'*).a'. ^ , ' + (i52.e' + 920.e') .«'. . / d*6W d'6';' + (26.6*+
i28.e'*).a'. — j-^ + (e'+4.e'').a'. — r;î^

The text on this page is estimated to be only 15.35% accurate

SECONDE PARTIE, LIVRE SIXIÈME. 33 1 554.a./è*' -hi""\ +
a22.a'.(-ji- + — jX Ui448.6"" + i83Q2.a.— j^ + i78o.a'.— j-4768 j rf'fcC)
d«6C) t/.ftC) (, ^ i (56.e'+842,e").a.6';' + (4.e'+87.e").a'.-T^ a'/V")= ^ y') ±
da 128 •) (f.ftw d'i^C -(i6.e'+2.e").a'.-^-(2.c'+e").a'.-^ i-
(i74.e'+i96.e").a.6'^"-(5o. e'+i8o.e").a*.-ji-| 128) rf'iw ri- -1580. a. 6""* +
86. a\— H^ -8a'.— j-i- -d'.—H>•/> aW^î^z- ^'^y Lorsque Ton considère
Taction de rn sur m, il faut par le n*" 4 augmenter dans aN^ U], de >, ou
de— a, ce qui augmente a'A'^""^ de ^rj . Lorsque Ton considère Faction de
m sur TOME III.

34 MECANIQUE CELESTE. m , il faut augmenter $U']^{\wedge}$ de j , ce qui augmente $a'iV^{*\wedge}$ de $'$. Cela posé, on multipliera les valeurs précédentes de $aN^{\wedge''}\ aN^{\wedge'K}$ etc. par m , et Ton décomposera chacun des cosinus qu'elles multiplient dans la fonction (0), en sinus et cosinus de $bnt - 2n\dot{i}-h5e' - 2e$; ce qui donne à cette fonction la forme suivante, $m. aP^{\wedge} . \sin. [5nt - 2/i f - h 5e' - 2c) - t - m. aP \backslash \text{COS. } (5nt - 27iZ - t - 5c' - 2e)$. On multipliera pareillement par m les valeurs de $aN^{\wedge''}\ aN^{\wedge'}$ etc. relatives à l'action de m sur m , et Ton décomposera les sinus et cosinus de la fonction (0), en sinus et cosinus de $57i7 - 2nt - \backslash - 5e - 2e$; ce qui lui donnera la forme suivante, $m.a'P^{\wedge} . \sin. [but - 2nf - h5e' - 2e) - + - m. aP \backslash \text{cos. } [bnt - 2nt - + - 5e' - 2e)$. On substituera donc successivement ces valeurs dans les expressions de 5 1; et de 8v du numéro précédent, et Ton pourra négliger leurs différences secondes, à cause de la petitesse de ces quantités. On aura ainsi les parties des inégalités de Jupiter et de Saturne, relatives à l'angle $\&nt - 2nt$, et dépendantes des cinquièmes puissances des excentricités et des inclinaisons des orbites. On peut observer ici qu'en vertu du rapport qui existe entre les moyens mouvements de Jupiter et de Saturne on a $3\ 1\ 2\ 5.$ »' = 500. En effet, $a'^{\wedge} - \wedge$; et de plus, on' est à fort peu près égal à $2/1$, ce qui donne $--^{\wedge} = 2 - ^{\wedge}$. De là il suit que la valeur de $aN^{\wedge'}$ est la même, soit que l'on considère l'action de m sur m , soit que l'on considère Faction de m sur m . Ainsi l'on peut conclure la partie

SECONDE PARTIE, LIVRE SIXIEME. 35 précédente de $h\nu$, de la partie correspondante de S_r , en multiT. Il . 5/w. n^* pliant celle-ci par ?—

- 10. Dans la théorie de Mercure troublé par la terre, il faut considérer l'inégalité dépendante de l'angle θ — θ , parce que le moyen mouvement de Mercure est à très-peu près quadruple de celui de la terre. En supposant que m soit Mercure, et m la terre, on aura l'inégalité dont il s'agit, en faisant $i = 4$ dans l'expression de $h\nu$ du $n^{**} 7$. Vu l'extrême petitesse de cette inégalité, on peut négliger les termes qui n'ont point $(\sin \theta - \sin \theta)^*$ pour diviseur, et ceux qui dépendent de $\cos \theta$ et $\sin \theta$. On aura ainsi $\theta^3 m'.7i'$ ($aF.\sin.[\theta - \theta - \sin \theta] \sim \{n - \sin \theta\} \cos \theta$. $\cos. \{\theta - \sin \theta - \sin \theta - \sin \theta\}$) On déterminera facilement P et F , de cette manière : on calculera r S_r par la formule (A) du $n^{**} 1$, la valeur de — — correspondante à l'angle θ — 2θ , ce qui revient à faire $i=4$, dans cette formule. On aura ainsi une valeur de — —, de cette forme, $L. e^* . \cos. [\theta - 2\theta - \sin \theta - 2C - 2\theta] - h-U'.ee.\cos. [\theta - 2\theta - 4e' - 2e - \sin \theta - \sin \theta] + U^* \cos. [k\theta - 2\theta - 4 - 4c - 2C - 2\theta] - U^Ky \cos. (4\theta - 27\theta - 4e' - \sin \theta - qU)$. On observera ensuite que cette valeur de — θ résulte des variations de l'excentricité et du périhélie, dépendantes de $wf - k\theta$ dans l'expression elliptique de y . — : cette expression contient le terme — $e.\cos. (\sin \theta - m)$, dont la variation est — $he.\cos. (\theta - \sin \theta) - e\theta'OT.\sin. (\theta - \sin \theta)$,

The text on this page is estimated to be only 13.44% accurate

^ m .an •. m Mît 36 MÉCANIQUE CÉLESTE. Se et 8^ élant les variations de e et de ^, dépendantes de nt—Ant On a par le n''' 69 du second livre l-j-\ . sin. (4/i'f — nt-h^e — c) 1 [H-l-T- j.cos.(4/if — nt-h-ke — e) (-T- I .COS. [[\nt — nt-hkt — e) n—lxn ' 1 /(IP^ \ 'if if \ I — (7—) • sin.(4/ii — nt-hfxe — e) La variation de — e.cos. [nt-i-e — isr) devient ainsi i l-i-] .sm.i2nt--^nt-\-2e — 4e' — tix) m .an] \de) ^ ' n — lxn '] [dP^ I If I f \ \ — (-7—) .COS. (27if — knt-\-i^ — 4e — «) Cette fonction est identique avec l'expression précédente de — j-; en changeant donc dans l'une et dans l'autre, 2 7i("4-- 2e, dans 7if+-e-4-isTH — , TT étant la demi-circonférence, on aura = L. e\ sin. (4/i'f -/i<4-4e'~e — 3tïT) -^U'K e e. sin. [fxnt—nt\ - 4e — e — 'cr'- i^a) f-/>.e'. sin. [knt -nt-r[\s!—e - stzr'— 'cr) r U'''' . y *. sin. (!\nt — n(+4e--e — 'cr— 211). Si Ton intègre cette équation par rapport à e, et qu'ensuite on]a multiplie par —7-7, on aura \L. e\sin. (4w'f — /if + 4e — e — S'Ct) 3/i \+\L'Ke^e.s\xi. [l\nt — nt + [\e—e — 'cs'—i^) n — lxn' j+ L".eÉ?"\sin. (4n't -7if+4e— e — 2'Ct'— 'cr) (' - L'^ey*. sin. [knt — nt+ke'—t — ^ — ^Jl)

SECONDE PARTIE, LIVRE SIXIÈME. 37 Dans cette intégration, on néglige les termes de P et de P' dépendants de e' et de $ey^\wedge$ mais l'excentricité de l'orbite de la terre est si peu considérable relativement à celle de Mercure, et l'inégalité dont il s'agit est si petite, que l'on peut les omettre sans erreur sensible. 11. Il résulte du n° 71 du second livre que les termes $M^\wedge \cos. (bnt - 27if - 4e' - 2e - 211 - ^\wedge)$ - $M^\wedge \cos. [but - 2nf - t - 5e' - 2e - 211 - \llcorner)$, du développement de R, donné dans le n° 8, produisent dans la valeur de s, ou dans le mouvement de m en latitude, l'inégalité $\sin. (5; i't - 3nri - in^\wedge ey.M^\wedge \sin. [ont - 3/i(-h5e' - 3e - II - ^\wedge)$ Pareillement, les mêmes termes produisent dans la valeur de s, ou dans le mouvement de m' en latitude, l'inégalité $\sin. m j ey.M^\wedge \sin. [knt - 27i(-f - 4e' - 2e - II - ^\wedge) \backslash Sn - in^\wedge [-+-ey. M^\wedge \sin. (^\wedge nt - 2n - t - h4e' - 2e - II - ^\wedge))'$ n'étant, comme dans l'inégalité précédente de 5, la longitude du nœud ascendant de l'orbite de m sur celle de m'. Ce sont les seules inégalités sensibles en latitude, du système planétaire, dépendantes du produit des excentricités et des inclinaisons des orbites. On a vu dans le n° 6 que la valeur de 8s introduit dans le mouvement de m, réduit au plan fixe, le terme $\tan.^\wedge . S^\wedge . \cos. \{v, - d\}$: en substituant dans ce terme l'inégalité précédente de s, on aura un terme dépendant de $5nt - 2nt$, qui doit s'ajouter à la grande inégalité du mouvement de m; mais ce terme est insensible pour Jupiter et Saturne.

38 MÉCANIQUE CÉLESTE. CHAPITRE II DES INÉGALITÉS DEPENDANTES DU CARRÉ DE L'ÉLOIGNEMENT

PERTURBATRICE. 12. Les grandes inégalités que nous venons de déterminer en produisent de sensibles, dépendantes du carré de la force perturbatrice : nous en avons donné les expressions analytiques dans les nos 65 et 69 du second livre. Il résulte du n° 65 du même livre que si l'on désigne par $H \sin[5nt - 2\sqrt{f-h}5e' - 2e - 4]$, la grande inégalité de Jupiter, on aura $-f(\sqrt{f-h} - V'' + j \cdot V')$. $\sin.2(5n-t-2\sqrt{f-h}5e' - ae - H)$ pour l'inégalité correspondante de Jupiter, dépendante du carré de la force perturbatrice : cette inégalité s'ajoute, comme celle dont elle dérive, au moyen mouvement de la planète. Pareillement, si l'on désigne par $jE' \sin(5i7 - 27if + 5e' - ac + l')$ la grande inégalité de Saturne, on aura $-\frac{1}{2} \frac{f}{A} \sin.2[bnt - 27if - f - 5c - 2e - hA]$ pour l'inégalité correspondante de Saturne, et qui doit être ajoutée au moyen mouvement de cette planète. Les variations des excentricités et des périhélies peuvent introduire de semblables inégalités dans les moyens mouvements des deux planètes. Pour les déterminer, nous observerons que l'on a, en n'ayant égard qu'aux cubes et aux produits de trois

The text on this page is estimated to be only 16.14% accurate

SECONDE PARTIE, LIVRE SIXIEME. 39 dimensions, des
 excentricités et des inclinaisons des orbites, Sanî.ffi o /./• 1 in /./...il P. cos.
 (5wf— 2wf+5e — 2e)) ••^ ^^ — P.sin. {5nf— 27if+i>e -2e) r ce qui donne
 dans 3a.ffndt.dR, la quantité 5e.|(j-Jxos.(5Rf— 2nf+5e— ae)— (^— |.sin.
 (5n'f--2nf+5e' +S«. (^|xos.(57i'f— 27if+5e'— 2e)~(^—).sin.(5n'(--2nf+5e'
 +Se. (•T-,Vœs.(5nV~2nf+5e~2e)— (T-rVsin.fSrt'f— 27if+ .1 in ai .\ {/dP\
 (dP\ +5^0^^ (^, I xos. (5ii'f-^2 Rf +5e ~2 e)— (j-r I . sin. (5/i'«— -)-5y. (j-
 |xos.(5nf— 2/if+5e— 2e)~/Y^|.sin.(57i'f--27if+5e' — 2e —2e —2e .(^ •2e
 —2e —2e 'Il Se, 5«, (Je, eîtiT', (Jy, (îll étant les parties de e, tsr, e, «', y. Il ,
 qui dépendent de l'angle bnt;-2nt On a par le n** 8 \d^) \de) \atEr / \de)
 ("3^) ""^'- (i7") ' ("3^)= — ^'- (-iT") ' \dli)-y\dy)' [dn)- ^'[dy De plus, on a
 par le n** 69 du second livre (^|.cos.(5ii'f— 27i(4-5e'— 2e)— (j-|.sin.(5nt
 — a?i/+5e'---ae)=: i ^7^ ■ ■ (j-J.sin.(5nV— 2iif+5e— 2e)4-(j— j.cos.
 (5/i' (— 2nt+5e— 2e)= 5 e;

The text on this page is estimated to be only 20.71% accurate

40 MECANIQUE CELESTE, on a pareillement (t— ,|.sin.(5nf—
2/ji+5e— 2ej+(y-r).cos.(5ii

SECONDE PARTIE, LIVRE SIXIEME. 41 représentant par $S^{\wedge}$ et $^{\wedge}\wedge n$, les variations précédentes dues à l'action de $m!$ sur m , on aura $^{\wedge} ma$ 71
 $^{\wedge} \wedge ---. ma /i^{\wedge}$,, $Sy=--- .3 y$, $dn=--- 7 --- .5 II$, $m an '^{\wedge}' m an "$ Cela
 posé, si l'on substitue ces diverses quantités dans la fonction (A), on trouve
 quelle se réduit à zéro. Les variations des excentricités, des périhélies, des
 nœuds et des inclinaisons des orbites, correspondantes aux deux grandes
 inégalités de Jupiter et de Saturne, n'introduisent donc dans le moyen
 mouvement de Jupiter, et dans le grand axe de son orbite considérée comme
 une ellipse variable, aucune inégalité sensible dépendante du carré de la
 force perturbatrice; et il est visible que cela a encore lieu, pour le moyen
 mouvement de Saturne, et pour le grand axe de son orbite. 13. Considérons
 présentement les variations des excentricités et des périhélies. Nous avons
 donné dans le n°* 69 du second livre , . j . $^{\wedge} \wedge$ de d'à de' dvs , les
 expressions des accroissements $^{\wedge} \wedge "TTy 'ir^{\wedge} 'jt^{\wedge} -rr y$ dus aux deux grandes
 inégalités de Jupiter et de Saturne; et nous avons observé dans le même
 numéro que les variations de e, tsT, e, tsT' , relatives à Tangle bnt $--- 2nt$,
 introduisent dans ces expressions des variations semblables à celles qu'y
 produisent les deux grandes inégalités. En appliquant ces considérations à
 Jupiter et à Saturne, et désignant par he , et $StsT$, les variations dues au carré
 de la force perturbatrice, on trouve $--- ^{\wedge} V > --- \backslash -iii .cos.2 (5n f---$
 $27if+5e'--- ae) 2.(011 --- 21?) ^{\wedge} ' TOME III. 6$

The text on this page is estimated to be only 20.50% accurate

â2 iw".a'n' 5n'— an MÉGANIQUE CÉLESTE. ({dP\ (ddP\ (dP\
/ddP;\ , (dF\ (ddP\ _ (dP\ (ddP\ \ \ \ ^)-\d^r\di}\de^j^dy)\dedy) \dyl'\ded7]\ -7
— {w-A — T^ . COS. 2 [but— 2 nt+ 5e'— 2 e) 4e.{07l— 2») ^ ' ^/r / ^ (
.siD.2(5yi7— 2nf+5e— 2g) 2c.(on— 2n) ^ ' mmWnn'H/dP'X (ddP\ /dP\
(ddF\,(dP\ (ddP\ /rfP\ / " ^ 5n'-2B -j \rf7/ • \,rf6

SECONDE PARTIE, LIVRE SIXIÈME. 43 $bnt - 2ni + 6e - 2e$, et qui sont dues à la première puissance de la force perturbatrice; et par $5'e$ et $5'tar$, les variations précédentes de e et de « dépendantes du double de cet angle; si Ton désigne ensuite par Se la somme des deux inégalités de m . Tune dépendante de $5nt - 2nt-hbe - le$, et Tautre dépendante du double de cet angle; le terme $2^{\wedge}. \sin. [nt-he - tsr)$ devient $\{2e'i-2âe-h28'e\}.sm.[nt-he-\hat{a}e - tsT - \hat{a}^{\wedge} - e\hat{i}^{\wedge}nr)$; et par conséquent, en négligeant le cube de la force perturbatrice, il se développe dans les termes suivants, $2 e.\sin. (nf-f-eH-Se - tsr) - f- 2 \hat{e}e. \sin. [nt-he - tsr) - 2e. Star, \cos. [nt-he - ta?) - h|2 5'e-+-2e. 5ttT. Se - e. (Staf)*j.\sin. [nt-he - tsr) - \sqrt{2}e. S'tsT-t- qS^{\wedge}. St\hat{i}T - 2 Se Sej. \cos. [nt-he - tsT)$. Le terme $2^{\wedge}.\sin. (nf-f-e-f-Se - \hat{e})$ est celui que Ton obtient en augmentant, comme nous le prescrivons, dans la partie elliptique, le moyen mouvement nt , de Se : les deux termes, $sSe.\sin. [nt-he - tsr) - 2eS\ll.\cos. [nt-he - tar)$, forment Tinégalité dépendante de Tangle $Snt - Snt-h^{\wedge}e - 5e'$, que donnent les formules du n''' 1. Si Ton substitue ensuite dans les autres termes, au lieu de $S(?)$, et $S'cr$, leurs valeurs données par le n'' * 69 du second livre, et au lieu de $h'e$, et $S'tsT$, leurs valeurs données par ce qui précède, leur somme donnera, en négligeant les termes dépendants du sinus et du cosinus de $nt-he$, parce qu'ils se confondent avec Téquation du centre, $rrn r, \hat{e} - \hat{e}^{\wedge} \backslash \backslash PA'j-]-hP.[j-] \backslash \cos.[bnt'-iont+be-ioe-\hat{e}) 3m' (5i rn'Ka'n' (5m\hat{f}â+/im\hat{a}') (n, /dP\ n fdP\) . ,r , t / x \ V^{\wedge} V f)p\l\pi\l [\hat{e}^{\wedge}j^{\wedge}i^{\wedge}nt-iont+\hat{e}-ioe - \hat{e})$. 6.

The text on this page is estimated to be only 22.75% accurate

44 MECANIQUE CÉLESTE. Cette inégalité peut être mise sous la forme suivante : si l'on représente par $K \sin. (5/i't - 3nt + 5e' - 3e + J5)$, l'inégalité de m dépendante de $3nt - Snt + 3e - 5e$, et par $H \sin. [Snt - 2nt + Se - 2e + A]$ la grande inégalité, l'inégalité précédente sera, par le n° 69 du second livre, $j (\hat{O}TW V/a + 4/w'V/a) jj^{yr} . /r^{\wedge} '* . c: ' d 1 \backslash - - ^{\wedge} \_$
 $^{\wedge} . HK. \sin. [bnt - io/if-f-5e - loe - B - A)$. $m y a m' mm, \sim 5i$ On trouvera pareillement, en n'ayant égard qu'aux variations séculaires dépendantes du carré de la force perturbatrice, $^{\wedge} , \_ 5m \backslash a'n \backslash t \{ om \backslash \hat{a} + 2my \hat{a} \}$
 $(p \backslash fdF \backslash jy \backslash fdP \backslash \backslash i \backslash a''n \backslash t \backslash UdP^{\wedge} (ddP \backslash /dP \backslash (ddF \backslash (dP \backslash (ddP \backslash (dP \backslash (ddP \backslash bn'^{2n} \backslash \backslash dc') \backslash de'^{\wedge}) \backslash de') \backslash de'^{\wedge})'^{\wedge} \backslash dy) \backslash de'dy] \backslash dy] \backslash de'dyj n'.aa'.nn'A \backslash (dP \backslash (ddP \backslash (dP \backslash (ddP \backslash (dP \backslash [ddP \backslash (dP \backslash fddP' \backslash \backslash in'-2R' \{ [de) \backslash dede') [de) \backslash dede')'^{\wedge} \backslash dy) \backslash de'dy) \backslash dy) \backslash de'dy) \backslash m \backslash a'n \backslash t i(dP \backslash /ddP \backslash /dP \backslash \{ ddP \backslash fdP \backslash ddP \backslash (dP \backslash (ddP \backslash ''^{\wedge} \{ 5n'-2n).e' - \backslash \backslash de') - \backslash de'^{\wedge})'^{\wedge} \backslash W) \backslash W^{\wedge})'^{\wedge} \backslash d\zeta') \backslash drd\zeta')'^{\wedge} \backslash d\zeta') \backslash d^{\wedge} l mm'.aa'.nn'.t \backslash UdP \backslash \} ddP \backslash (dP \backslash (ddP \backslash [dP \backslash (ddP \backslash (dP \backslash \} ddP \backslash '^{\wedge} \{ 5n'-2n).e' - \{ [de) - \backslash dedej'^{\wedge} \backslash de) \backslash dedej'^{\wedge} \backslash dy) \backslash de'dy)'^{\wedge} \backslash dY) \backslash drd\zeta)$ On trouve encore que le mouvement de m en longitude est affecté de l'inégalité Si l'on désigne par $J5^{\wedge} . \sin. (4^{\wedge} 7 - 2nt - h^{\wedge} e - 2e - h 5')$, Fine

The text on this page is estimated to be only 26.80% accurate

SECONDE PARTIE, LIVRE SIXIÈME. 45 galité de m
dépendante de $\text{int} - 4 n't - h 2 e - 4 e'$, et par $\text{ff}.\sin. [\text{bnt} - 2/\text{if-h}5e' - 2e \text{ H- il')}$, la grande inégalité de m' , on aura pour son inégalité dépendante de $\text{knt} - \text{gn}'f\text{-t-de} - \text{ge}'$, $|\cdot^{\wedge\wedge}V^{\wedge+!}\cdot^{\wedge\wedge}IH\text{-r}.\sin.(4\ll t\text{-}9n\text{-}f\text{-}+4e\text{-}9e\text{-}^{\wedge}\text{-}I')$.
14. Les nœuds et les inclinaisons des orbites de Jupiter et de Saturne sont assujettis à des variations analogues aux précédentes. Pour les déterminer, nous observerons que (p et

The text on this page is estimated to be only 16.97% accurate

46 MÉCANIQUE CÉLESTE. Les variations de $\hat{\cdot}$, 6,

SECONDE PARTIE, LIVRE SIXIÈME. 47 15. Si l'on voulait déterminer pour un temps quelconque les éléments des orbites planétaires, il faudrait intégrer les équations différentielles [A) et (C) des n° 55 et 59 du second livre, par la méthode exposée dans le n° 56 du même livre; mais l'ignorance où nous sommes encore sur les valeurs des masses de plusieurs planètes rend inutile à l'astronomie ce calcul, dans lequel il devient indispensable de faire entrer les variations séculaires dépendantes du carré de la force perturbatrice, que nous venons de déterminer, et qui sont très-sensibles pour Jupiter et Saturne. Ces $\delta h, \delta r, \delta p, \delta q$ variations augmentent les valeurs de $-j, -j', -r, -r', -f, -f',$ etc. relatives à ces deux planètes, respectivement des quantités $h', r', p', q',$ etc. en ne considérant dans $Se, StsT$ etc. que les quantités proportionnelles au temps t déterminées dans les numéros précédents. On substituera dans ces dernières quantités, au lieu de $e, \sin, \cos,$ etc. leurs valeurs en $h, l,$ etc. les équations différentielles (il) du n° 55 du second livre cesseront d'être linéaires; mais il sera facile de les intégrer par les méthodes connues d'approximation, lorsque la suite des siècles aura fait connaître les vraies valeurs des masses planétaires. Dans l'état actuel de l'astronomie, il suffit d'avoir les variations séculaires des éléments des orbites, en séries ordonnées par rapport aux puissances du temps, en ne portant l'approximation que jusqu'à la seconde puissance. On a vu dans les n° 57 et 59 du second livre, que l'état du système planétaire est stable, c'est-à-dire que les orbites de ce système restent toujours très-peu excentriques et très-peu inclinées les unes aux autres. Nous avons déduit ce résultat important du système du monde, de l'équation trouvée dans le n° 61 du second livre, constante = $(e' - h(p')). m \sqrt{ci} - h(c' - f(j_3')). m \sqrt{a} - \dots$ etc.

48 MÉCANIQUE CÉLESTE. En effet, le second membre de cette équation est très-petit dans l'état actuel de ce système; il le sera donc toujours, ce qui exige que les excentricités et les inclinaisons des orbites soient toujours peu considérables. Nous allons faire voir ici que la différentielle de l'équation précédente, $Gz = [ede \bullet + \bullet 9c?9) \cdot m \cdot v/a-h [ede - ^{(^d(p')). m \backslash Ja - \backslash -}$ etc. subsiste, en ayant même égard aux variations séculaires des éléments des orbites, déterminées dans les numéros précédents; d'où il suit que ces variations n'altèrent point la stabilité du système planétaire. Pour cela, il suffit de prouver qu'en représentant par m , Jupiter; par m , Saturne; et par hcy he , $S(p, 5(p'$, les variations séculaires de $e, e, ^, ^$, données par ce qui précède, on a En substituant dans la fonction $(ph(p.m \backslash ja' + -(p'h$

$m \backslash Ja + m' \backslash a$ ce qui change l'équation précédente dans celle-ci, $5 \ 4 /''' \cdot f\% \ t' \cdot /''^ \cdot fnm \cdot \backslash aa \bullet, e.mya-^ -e\hat{o}e \cdot m \ yaH \text{ --- } .yoy. m \backslash a + m' \backslash ci!$
 Considérons d'abord le premier terme de l'expression de he , du $n''' \ 13$. Ce terme devient, en observant que $n''a'=i$, $3m \backslash (5mV^+3m^{\wedge} \vee 7) \{^ \wedge (^ \backslash _jy (^ \backslash a.\backslash f^ \cdot \{5n'^2nY \wedge \wedge 'i \backslash \wedge \wedge) 'V^ \}$

The text on this page is estimated to be only 23.05% accurate

SECONDE PARTIE, LIVRE SIXIEME. 49 Considérons ensuite le premier terme de l'expression de Ze du même numéro $a\sqrt{?} \cdot (5n'-2/i)' I V^J V^J$) Considérons enfin le premier terme de l'expression de hy du numéro précédent $_3m' \cdot (5m y/\wedge + 2 m' V/\wedge) (my/\hat{o} + m'y/\wedge) \wedge \wedge jp / \wedge \_ p' / \wedge \backslash$) On aura, en n'ayant égard qu'à ces termes, $ehe.m \sqrt{a+e}e'. m \backslash JaA \blacksquare = - \wedge \text{---} \text{---} \cdot yZy m \sqrt{a+m'Sja!} \cdot 3mm' \cdot (5m \sqrt{V/\wedge} + 2m' \sqrt{V/\wedge}) \wedge' r \backslash de)'^{\wedge \wedge} \backslash de')'^{\wedge} y \backslash W)) \{ = - , \dots -, ,. \check{v} i'^{\wedge} \bullet " \blacksquare | - iv.j.(-) \dots (-) ,. (-) jf \text{ or } p \text{ et } P' \text{ étant des fonctions homogènes en } e, e, \text{ et } y, \text{ de la troisième dimension, on a on a donc } o = e8e. msja -f- ehe. Tr\hat{i} \backslash Ja - \wedge \text{---} \text{---} \cdot y Sy. Considérons ensuite le terme de } \hat{a}e, \_w^{\wedge} \ll f U i P \backslash (ddP \backslash (dP \backslash (ddP' \backslash (dF \backslash fddP \backslash \{ dP \backslash (ddP' W \ll ^{Sn'-an})' \backslash \backslash de) \backslash de^) [de) \backslash de^) [dy) \backslash dedy) \backslash dy) \backslash d^) y$
TOME III.

The text on this page is estimated to be only 19.02% accurate

50 MECANIQUE CELESTE, le terme de he , mm'.t \ (dF\ fddP\ {dP\ (ddP'\ (dF\ (ddP\ (dP\ (ddP' d. {bf^-'xn)\V

SECONDE PARTIE, LIVRE SIXIÈME. 51 de plus, (^—) et (^—) sont homogènes en e, e et y, de la seconde dimension; ce qui donne , (ÉÉL\^e' l^^Wy (^^\-i (^ e (Éân^e' (^^\-^y (^^\-, f^V ^■\dedy)^^\de'dY)^y-\dr)~ \dy)' on a donc encore, en n'ayant égard qu'à ces termes, m\fâ+m'\a' Considérons enfin le terme de de, mm'.t UdP\ (ddP_ (dP\ (ddP\ (dP\ (ddP\ (dP\ (ddP'W (5n'-a«).V^iWA5^/ \de']\dede'r\dr)\dedy) \dy]\dedy}Y le terme de S e m*t i(dP\ {ddP_ (dP\ (ddP\ , (dP\ {ddP\ (dP\ (ddP'W {bn'--in).a''\de')\d^)\de')\de'r\dy)\de'dy] \dy)\dédy)y et le terme de ôy mm' (my/^+mV?) A(dP\ (ddP\ (dP\ (ddP'\ {5«'-n).v/a''^ m'Sj-^' \àe')\de'dy} \de')\de'dy]Y on aura encore, en n'ayant égard qu'à ces termes, Si— 1^ r t n Tnm\aa ^ e.m\ja-\-e ce .m \ja H — — —yoy. mya + m'yô^ Cette équation a donc lieu généralement, en ayant même égard aux termes dépendants du carré de la force perturbatrice.

52 MÉCANIQUE CÉLESTE. La détermination du plan invariable, donnée dans le n^o 62 du second livre, est fondée sur les trois équations $c = m \sqrt{a} (1 - e^*) \cos. (p + m' \sqrt{a} (1 - e'^*) \cos. (p' + \text{etc. } c = m \sqrt{a} (1 - e'^*) \sin. \theta + \text{etc. } c'' = m \sqrt{a} (1 - e^*) \sin. (p \cos. \theta + n' \sqrt{a} (1 - e'^*) \sin. \theta' + \text{etc. } a, a, \text{ etc. étant constants par le n^o 12, en ayant même égard au carré de la force perturbatrice, la première de ces équations donne, en négligeant les produits de quatre dimensions de $e, e, \text{ etc. } 9,$$

SECONDE PARTIE, LIVRE SIXIÈME. 53 16. Les termes dépendants de ce carré peuvent avoir une influence sensible sur les deux grandes inégalités de Jupiter et de Saturne : nous allons déterminer les plus considérables. On a vu dans le n° 5 que l'expression de R ou de $5jR$ renferme la fonction $E \sin y$ faisant croître e , $e \cos \tau$, $e \sin \tau$ et y , de leurs variations dépendantes de l'angle τ — 2τ , on aura dans R un terme dépendant du même angle, et qui, à raison du diviseur $5/1—2/1$, qui affecte ces variations, paraît devoir être sensible. Mais on doit observer que ce diviseur disparaît dans djR , parce que la caractéristique différentielle d , se rapportant aux seules coordonnées de m , elle se rapporte aux variations de e et de τ , et par conséquent elle introduit le multiplicateur τ — 2τ ; or on a vu que la grande inégalité de m dépend principalement du terme $3a \sin \tau$; les inégalités du rayon vecteur et de la longitude, qui dépendent des variations des excentricités et des périhélies, relatives à l'angle τ — 2τ , ont donc très-peu d'influence sur les deux grandes inégalités de Jupiter et de Saturne. On verra dans la suite que les inégalités les plus sensibles de ces deux planètes, dépendantes des simples excentricités des orbites, sont relatives à l'angle τ — 2τ . Nommons $F \cos (\tau—2\tau+e—2e'+A)$, le terme de — qui dépend de cet angle, et $E \sin (\tau—2\tau+e—2e'+B)$, le terme de τ , dépendant du même angle. Soient $F \cos (\tau—2\tau+e—2e'+A)$, et $E \sin (\tau—2\tau+e—2e'+B)$, les termes correspondants de — r et de τ . Supposons que R soit

The text on this page is estimated to be only 25.98% accurate

54 MÉCANIQUE CÉLESTE. relatif à Saturne, troublé par Jupiter : en le développant par rapport aux carrés et aux produits des excentricités et des inclinaisons des orbites, et en ne considérant que Tangle $Znt - nt$, on aura par le n° 4 une fonction de cette forme $M^{\wedge}K \text{ Acos. } (S/i'f - /if-4-3e' - e - 2tsy') -^{\wedge}M^{\wedge}Kee. \text{ COS. } [Znt - 7if-f-3e' - e - ^{\wedge} - tsr') ^{\wedge}-M^{\wedge\wedge} c'.\text{cos. } (S/i'f - 7if-t-3e' - e - i^{\wedge}) -+-M^{\wedge\wedge\wedge}7\backslash\text{cos. } (3nf - 7if-+-3e - e - 2n)..$ Le premier terme $M^{\wedge}\backslash e\backslash\text{cos.} [int - 7if-4-3e' - e - i^{\wedge}cs')$ résulte du développement de $A^{\wedge}\backslash\text{cos.} [v - r)$, dans l'expression de R. Il faut augmenter dans ce dernier terme, r de $5r$, r de Sr , v de $5r$, et V de hv ; ce qui revient à augmenter dans son développement, a de $5r$, a de Sr , et $nt - nt$, de $hv - hv$. Ce premier terme donne alors les suivants $- M^{\wedge*}\backslash e\backslash(5\hat{i};' - St;).\text{sin.}(37i'f - /if-H3e' - e - 2tsy') -ha.l - 1 - j.e\backslash - .\text{COS. } [ont - /if-hoe - e - atiy j -ha.l , ; \backslash.e\backslash - 7. \text{ COS. } (oTif - nt-i-oe - e - 2t\ddot{y} J; d'o\grave{u}$ résultent dans jR les termes $- \pm M^{\wedge}Ke'.E\backslash\text{cos.} \{5nt - 2nt-^{\wedge}be - 2e - 2^{\wedge} - B) ^{\wedge} |. W'K \acute{e} E . \text{ COS. } \{5nt - 27if -4- 5e' - 2e - 2^{\wedge} - B) -h|.a.(-^{\wedge} - J-e'.F.\text{cos. } (5/i'f - 27if-f-5e' - 2e - 2t\ll y' - A).$ Désignons par d'jR la dififérentielle de R, prise en ne faisant varier que les coordonnées de m. Dans les termes multipliés par E' et F' la partie $6nt - nt$ de l'angle $Snt - 2wf$, est relative à

The text on this page is estimated to be only 23.22% accurate

SECONDE PARTIE, LIVRE SIXIÈME. 55 ces coordonnées.

Dans les termes multipliés par E et F, la partie 3^{nt} du même angle leur est relative; on a donc, en n'ayant égard qu aux termes précédents de R, a.
à'R=i. {Sn-n).dt. aWK E. e\ siu. {bnt-2nt+ ôe'-ae-atsy'-F) _i.. [Sn'^n). du
a\C^ F. é\ sin. {5/i'f-2/i(+5e'-2e-2

The text on this page is estimated to be only 18.91% accurate

56 MÉCANIQUE CÉLESTE. donc faire varier dans ce terme, a de 5r, a de èr, et 3n'(— 3nf, de 3Sî>' — 35i>, ce qui donne les suivants, — 3M relative à ce terme, sera donc -|-(5ft' — n).(/f.a'M''' .£'.e\sin.(5n't— 2/iffH-5e'— 26 — 2-©— B'J _2..{5,, '_,,).rff.a'.Yj^yir'.e..sin.(5n'f— 2nf- +-5e'— 26 — 2«T— i4 — I- n'dt. a'M^*". E. e\ sin. [bn't — 2/i

The text on this page is estimated to be only 27.68% accurate

SECONDE PARTIE, LIVRE SIXIÈME. 57 Les inégalités les plus sensibles dépendantes des carrés et des produits des excentricités et des inclinaisons des orbites, et qui n'ont point $5ji' - 2/1$ pour diviseur, ou qui ne dépendent point des variations des éléments, relatives à l'angle but — int, se rapportent à l'angle $3nt - nt$. Soit $G. \cos. (3/i'f - /if-hSs' - e+C)$, la partie de — qui dépend de cet angle; so\th. $\sin. [3nt - nt - \sqrt{3e - e^D})$, la partie de Si; qui dépend du même angle. Soient pareillement, $G'. \cos. (S/i'f - 7if+3e' - e + C)$, et $//'. \sin. (3/i'f - nf+3e' - e + D')$, Sr f. les parties de —r et de hv relatives au même angle. L'expression de $\hat{v}$, développée par rapport aux puissances simples des excentricités, renferme les deux termes suivants, $iV^{\wedge\wedge} e. \cos. [nt - 2nt - s - 2e' - h'cy) - h - N^{\wedge}le. \cos. [ni - 2nt - i - \xi - ss'h - 'Ct')$: le premier de ces termes résulte du développement de $A^*K \cos. (\hat{v} - Qv)$, dans l'expression de R; il faut donc augmenter dans ce développement, a de 5r, a de 5r, et $2nt - 27it$, de $28v - 2Si$; ce qui donne les termes suivants, $2N^{\wedge}Ke. \{hv - 8v\}. \sin. \{nt - 2nt - e - 2\xi - + - \wedge\} - f - a.l - 7 - \backslash.e. - . \cos. [nt - 2nt - \backslash - e - 2e - htsyj H - a.l - \wedge - 7 - i.e. - r. \cos. [nt - 2nt - \backslash - e - 2e - htsrj$; d'où résultent dans R les termes suivants, $N^{\wedge}KH \backslash e. \cos. [5nt - 2nt - i - be - 2e - t \langle y - + - D' \rangle - N^{\wedge}KH .e. \cos. [5nt - 2yif - hSe' - 2e - \langle - hD \rangle - 1 - j.G.e. \cos. [5nt - 271 f - h 5e' - 2e - tZR - i - C)$. TOME III.

The text on this page is estimated to be only 25.83% accurate

58 MÉCANIQUE CÉLESTE. Pour avoir la partie correspondante de $\hat{a}!R$, il faut dans les termes multipliés par H' et G' faire varier l'angle $5nt - nt$; et dans les termes multipliés par J_i et G , ne faire varier que $2nt$; ce qui donne $a.\hat{a}!R = \{5n - n\}.dt. \hat{a}. W'K //'. c.\sin. (57i'f \sim 2nf + 5f' - 2e \rightarrow cy + J - j - r -).G'.e.\sin.(5n'f - 2nf + 5e' - 2e - t_{zr} + < -h \ 2n. dt. a. N'^{KH}.e.sm.\{5nt - 2nt + Se - ie - \wedge - \{-D\} - n.dt.aa.l - \wedge - \}. G.e. \sin. (5/i7 - 2/if + 5e' - 2e - t_{\langle y + C \rangle}).$ Le terme $N'^{Ke}.\cos.[nt - '2nl + f - 2f + \wedge]$ résulte du développement de $A'^{\wedge}\cos. [v - v)$ dans R ; il faut donc faire varier dans ce terme, a de $\hat{a}r$, a de $\hat{e}r$ et $nt - nt$ de $\hat{a}v - 8v$; ce qui donne les suivants, $N'^{Ke}.\{8v - \hat{e}v\}.sm. \{nt \sim 2nt - \wedge e - 2e'^{\wedge\wedge}\} - ha.l - l - Ve. - . \cos. [nt - 2nt - he - 2e' - f - t_{\langle y \rangle}] - + - a.l , , L g. - T. \cos, [nt - 2nt - \wedge e - 2e - h'cy)$. La partie de $a.d'/\hat{i}$, relative à ces termes, sera donc $- |. [bn - n) . dt. a. N'^{KH'}. e'.\sin. [5n't - 2nt + be - 2e - \wedge + iy) - r - r -) \cdot G', e. \sin. (\hat{O}Ti'f - 27i t + Se - 2e - \langle + C \rangle) - + - ndt. a. N'^{KH}. e .s\backslash n. [bnt - 2nt + be - 2e - \wedge + D) - ndt.aa.l - j^{\wedge} - |. G.e'. \sin. [bnt - 2nt + be - 2e - 'ts' + C)$. Les valeurs de $M'^{\backslash} M'^{\backslash} M'^{\backslash} M'^{\backslash}$ sont déterminées par les formules du n** 4, en y changeant ce qui est relatif à m , dans ce qui

SECONDE PARTIE, LIVRE SIXIÈME. 59 est relatif à m' , et réciproquement. Les valeurs de TV'''' et $A'^{\wedge}$ seront déterminées par les équations $a'A'^{\wedge\wedge} = -2m.aA'^{\wedge}\sim i.m. \text{ ad. } [-^{\wedge})$, $dN^{\wedge} = m.a^{\wedge\wedge} - |.m. a\backslash(-^{\wedge})$. En réunissant toutes ces expressions partielles de $a. d'JR$, on aura un terme de cette forme, $mn\backslash Ldt.sm.[bnt - 27if-f-5e' - 2e - 0)$. Le terme $id.ffndt.iiR$, de l'expression de $\hat{v}$, donnera ainsi $-c / \backslash .sin.(5yi'f - 27iZH-5e' - 2e - 0)$. G^* est le terme le plus sensible, de la grande inégalité de Saturne, dépendant du carré de la force perturbatrice. Si l'expression de $J?$, divisée par la masse perturbatrice, était la même pour Jupiter et pour Saturne, on aurait, par le n^{*} 65 du second livre, l'inégalité correspondante de Jupiter, en multipliant la précédente par $L^{\wedge}$ — mais la valeur de $A'^{\wedge}$ n'est pas la même pour les deux planètes, et par conséquent les termes $M^{\wedge}\backslash \cos. (37i'f - nf'f-3e' - e - 2\ddot{y}')$, et $IS^{\wedge}l e . \cos. \{nt - 2nt^{\wedge}e - 2e'-H-W\}$, divisés par les masses perturbatrices, sont différents pour chacune d'elles. Mais il résulte du n^{**} 65 du second livre, qu'en Q^* ayant égard qu'aux termes qui ont $(5n - 2/1)'$ pour diviseur, on a dans ce cas $fdR^{\wedge}f\grave{a}R=o$, R étant ce que devient R , relativement à Jupiter, et la caracté8.

60 MECANIQUE CELESTE. ristique différentielle d se rapportant aux coordonnées de Jupiter; d'où il suit que l'inégalité de Jupiter qui correspond à la précédente est $3 m . n \setminus i / \text{---} \text{---} r^t \text{---} Xr \text{---} . I . \sin . \{ 5nt \text{---} '2nt \text{---} \setminus \text{---} Se \text{---} 2e \text{---} 0 \} . (on \text{---} 27?)^* \wedge \wedge 17$. Dans les inégalités de Jupiter et de Saturne, dans lesquels le coefficient de t n'est pas $bn \text{---} 2/1$, et ne diffère pas de cette quantité du coefficient n pour Jupiter, ou du coefficient n pour Saturne, il faut augmenter nt et nt de leurs grandes inégalités dépendantes de $Sut \text{---} 2nt$. En effet, on a vu que ces grandes inégalités doivent être ajoutées aux moyens mouvements, dans les formules du mouvement elliptique; elles doivent donc être ajoutées aux mêmes quantités dans le développement de R. Soit H. COS. $[int \text{---} int \text{---} i \text{---} A)y$ un terme quelconque de ce développement, et L. sin. $[in t \text{---} int \text{---} hB)^$ l'inégalité correspondante de Jupiter. En augmentant nt et nt, de leurs grandes inégalités, dans le terme H.cos. $[int \text{---} \{nt \text{---} + \text{---} A)^$ il en résultera un terme de la forme qll. cas. $\setminus int \text{---} int^{\wedge} [bnt \text{---} 2nt) \text{---} \{ \text{---} A \text{---} \setminus \text{---} E \setminus$. Maintenant la suite des opérations qui lient H k L donne aux parties de H les diviseurs $[in \text{---} //i)\%$ $in \text{---} in$, $in \text{---} iw=t/i$. La même suite d'opérations donnera à l'inégalité correspondante aux parties de $^ H$. COS. I i lit $\text{---} int \pm [brit \text{---} ^nt) \text{---} \setminus \text{---} A \text{---} \setminus \text{---} E \setminus$ les diviseurs $\setminus in \text{---} in =b [bn \text{---} 2n) \setminus \setminus in \text{---} in \pm (on \text{---} 2/1)$, $in \text{---} in \pm (5/i \text{---} 271) \pm n$. Si $iii \text{---} in$ ou $in \text{---} in \pm w$ ne sont pas très-petits de Tordre $S/i \text{---} 2/1$, on peut négliger $Sn \text{---} 2/1$, dans ces derniers diviseurs, et alors l'inégalité correspondante à sera $(jH.cos.\setminus int \text{---} int \hat{\text{---}} [ont \text{---} 2nt) \text{---} i \text{---} A' \text{---} + \text{---} E \setminus (j$ L. sin. $[int \text{---} intdt [bnt \text{---} 2nt) \text{---} f \text{---} fi \text{---} i \text{---} \pounds \}$;

SECONDE PARTIE, LIVRE SIXIÈME. 61 ce qui revient à augmenter dans $L \sin. [int - i/4 - J5)$, nt et nt , des grandes inégalités. Il faut pareillement augmenter dans les termes dépendants des simples excentricités, les quantités $e, e, ^\wedge, ^\wedge \backslash$ de leurs variations dépendantes de l'angle $bnt - 2nt$; mais on s'assurera facilement qu'il n'en résulte que des inégalités insensibles. 18. Les coefficients des inégalités des planètes varient à raison des variations séculaires des éléments des orbites : on peut y avoir égard de la manière suivante. On mettra d'abord l'inégalité relative à un angle quelconque $i'nt - int$, sous cette forme, $P \sin. (int - int - i - ie - ie) H - F \cos. (int - int - i - ie - ie)$. On déterminera les valeurs de P et de P' pour l'époque de 1760 ; en faisant ensuite $t = \frac{L}{P - f - F\%}$ le signe de $\sin. A$ étant le même que celui de P' , et son cosinus étant du même signe que P ; l'inégalité dont il s'agit sera $L \sin. [int - int - h - le' - ie - \backslash - A)$. On déterminera les valeurs de P et de P' pour 1960, en ayant égard aux variations séculaires des éléments des orbites ; et l'on aura ainsi pour cette inégalité, en $igSo, [L'hSL)$. $\sin. [int - int - hie - ie - hA - i - SA)$. En exprimant donc par t le nombre des années juliennes écoulées depuis 1760, l'inégalité précédente relative au temps f prendra cette forme. $\frac{1}{200} / \sin. int - int - ^\wedge - ie - ie - hA - \{ 200$ sous cette forme, elle pourra s'étendre plusieurs siècles avant et

The text on this page is estimated to be only 26.57% accurate

62 MECANIQUE CÉLESTE. après 1750. Mais ce calcul ne doit avoir lieu que pour les inégalités un peu considérables. Relativement aux deux grandes inégalités de Jupiter et de Saturne, il sera utile de porter l'approximation jusqu'au carré du temps, dans la partie qui a pour diviseur $[bn - 211]'$. Cette partie de l'expression de $\hat{v}$ est par le $n^{**} 8, j \setminus, v 2a, dP'$ $ia.ddP'$) . . , ^ , '\ , 1 \ \blacksquare t.\backslash a. dP 2a.ddP') , . ddP + f. fl.-n — 7^, r-îTi+Tr.a (dt {ôn'-2n).diy ^ ' de les valeurs de P, P et de leurs différences étant ici relatives à l'époque de 1760, et déterminées par la méthode du n° 8 : les autres parties de la grande inégalité de m étant peu considérables, il suffira d'avoir égard, par ce qui précède, à la première puissance du temps. Cette grande inégalité prendra ainsi la forme suivante ; $(i-t-fi.f-4-C.r).sin.(5n'< — int-r-^s — 2e) -f- (i'H-J5'.f-|-C'.f').cos. (5/i'(- 2nf-i-5e'— ae).$

SECONDE PARTIE, LIVRE SIXIÈME. 63 On donnera à la grande inégalité de m la même forme, sous laquelle il sera facile de réduire en tables ces inégalités. Si Ton veut réduire l'inégalité précédente à un seul terme, on la calculera pour les trois époques de 1760, 1750 et 2750. Soit 6. $\sin. (5j'i'f - 27i'f + 5f'i' - 2e + A)$, cette grande inégalité pour 1760 ; soient $6^{\wedge}, A^{\wedge}; \hat{e}^{\wedge}, A^{\wedge}$, ce que deviennent $\hat{e}$ et A , aux époques de 1750 et de 2750. Cette inégalité relative à un temps quelconque t sera les différences de S et de A se rapportant ici à l'époque de 1750. On aura ensuite par le $n^{\wedge} 8$ «ie $4e-3e-e$ dd $e, -26, +e$ dt 1000 ' dr 260000 ' dA $4A-3A-A$ dt 1000 ' ddA dr $A-2A^{\wedge}+A$ 260000 Conformément à la remarque que nous avons faite dans le $n^{\wedge} 1$, ces deux grandes inégalités de Jupiter et de Saturne doivent être respectivement appliquées à leurs moyens mouvements.

64 MECANIQUE CELESTE. CHAPITRE III. DES
PERTURBATIONS PLANETAIRES DUES X L'ELLIPTICITE DU
SOLEIL. 18. Le soleil étant doué d'un mouvement de rotation, sa figure ne
doit pas être exactement sphérique. Nous allons déterminer l'influence de
son ellipticité sur les mouvements des planètes. Si l'on nomme p cette
ellipticité; q , le rapport de la force centrifuge à la pesanteur, à l'équateur
solaire; et $(x$, la déclinaison d'une planète m relativement à cet équateur; si
de plus, on prend pour unité la masse du soleil, et que l'on nomme D son
demi-diamètre; il résulte du n° 35 du troisième livre que l'ellipticité du
soleil ajoute à la fonction R du n° 46 du second livre, la quantité $(p-17)^{-1}$
 $(f''-i)$ l'équation différentielle en r du n° 46 du second livre deviendra
donc, en n'ayant égard qu'à cette partie de R , en négligeant le carré de $(x$, et
en observant qu'ici $f''R = g^{-1}R$, g étant une arbitraire, $d^2r/dr^2 = p -$
 q). D'ailleurs $r^3 \ll r^3$ Pour déterminer la constante g , nous observerons que la
formule [Y] du n° 46 du second livre donne dans S_v la quantité $3a \cdot \text{ngt-h}\{p$
 $- i(j)$. — .nt. nt exprimant le moyen mouvement de la planète, cette
quantité doit être nulle; on a donc $3 \sim 3a'$

SECONDE PARTIE, LIVRE SIXIÈME. 65 et par conséquent l'équation différentielle en r devient, en observant que $n'a = i$, et négligeant le carré de e , $o = f^{+ -} n'.rSr. \{i-h3c. COS. (nf+e-'By)\} — ^i.^.^./iM)' _ ^_iPZ^, n \ D \ ti-l-3c.cos. (n«-4-e — tar)\};$ ô ce qui donne en intégrant, $^=|.(p — 19). — . \{1 — 3e.nf.sin.(/if-4-e —$

66 MÉCANIQUE CELESTE. Prenons pour plan fixe celui de l'équateur solaire, ce qui donne $(x^* = \dots)$; en observant ensuite que $r^{\wedge} = x^{\wedge} - y^{\wedge} - z^{\wedge}$ on aura $(^{\wedge}) = 3.(p-9).^{\wedge}.z$; l'équation différentielle précédente devient ainsi or on a par ce qui précède, on a donc $o = -^{\wedge}H/i \ll z.ji-h2.(p-19).-j$; ce qui donne en intégrant, $z = 9.\sin.j/if.[i+(p-17).-] - 0j$, (p étant l'inclinaison de l'orbite à l'équateur solaire, et d étant une constante arbitraire. Ainsi les nœuds de l'orbite sur cet équateur ont un mouvement rétrograde égal au mouvement direct du périhélie, et qui, par conséquent, ne peut être sensible que pour Mercure. On voit en même temps que l'ellipticité du soleil n'ayant aucune influence ni sur l'excentricité de l'orbite de la planète, ni sur son inclinaison à l'équateur solaire, elle ne peut pas altérer la stabilité du système planétaire.

ATTIE, LIVRE SIXIEME. 67 CHAPITRE IV. DES
 PERTURBATIONS DU MOUVEMENT DES PLANÈTES, PRODUITES
 PAR L'ACTION DE LEURS SATELLITES. 19. Les théorèmes du n° 10 du
 second livre offrent un moyen aussi simple qu'exact pour déterminer les
 perturbations des planètes, dues à l'action de leurs satellites. On a vu dans le
 numéro cité que le centre commun de gravité de la planète et de ses
 satellites décrit à très-peu près un orbe elliptique autour du soleil. En
 considérant cet orbe comme étant l'ellipse même de la planète, la position
 respective des satellites entre eux, et par rapport au soleil, donnera celle de
 la planète par rapport au centre commun de gravité, et par conséquent les
 perturbations que la planète éprouve de la part de ses satellites. Soit M la
 masse de la planète; R , le rayon vecteur du centre commun de gravité; U ,
 l'angle que ce rayon fait avec une droite invariable prise sur l'orbite de ce
 centre, et d'où l'on compte les longitudes. Soient $m, m, \text{etc.}$ les masses des
 satellites; $r, r, \text{etc.}$ leurs rayons vecteurs; $v, v, \text{etc.}$ leurs longitudes vraies; $s,$
 $s, \text{etc.}$ leurs latitudes au-dessus de l'orbite du centre commun de gravité.
 Enfin, soient X, Y, Z les coordonnées rectangulaires de la planète, en supposant
 leur origine au centre commun de gravité, et prenant le rayon R pour l'axe
 des X , Z étant la coordonnée perpendiculaire au plan de l'orbite de ce
 centre. On aura à très-peu près, par la propriété du centre de gravité, et en
 observant que les masses des satellites sont très-petites par rapport à celle de
 la planète, $0 = M \cdot X - m \cdot r \cos. [v - U] - m \cdot V \cos. [v - U] - \text{etc.}$
 $0 = Z - m \cdot r \sin. [v - U] - m \cdot V \sin. [v - U] - \text{etc.}$
 $0 = M \cdot Z - m \cdot r \sin. [v - U] - m \cdot V \sin. [v - U] - \text{etc.}$
 etc. 9.

68 MECANIQUE CELESTE. La perturbation du rayon vecteur est à très-peu près égale à X , et par conséquent à $-T^2 \cdot \frac{1}{r} \cos. [v - U] - \frac{1}{2} T^2 \cdot \frac{1}{r} \cos. [v - U] - \text{etc.}$ La perturbation du mouvement de la planète en longitude est à Y très-peu près $\frac{1}{r}$, et par conséquent égale à $-\frac{1}{r} \sin. (v - f) - \frac{1}{r} \sin. (v' - f) - \text{etc.}$ Enfin, la perturbation du mouvement de la planète en latitude est à très-peu près $-\frac{1}{r}$, et par conséquent égale à $m \cdot r \cdot w \cdot r'$ Ces diverses perturbations ne sont sensibles que pour la terre troublée par la lune. Les masses des satellites de Jupiter sont si petites par rapport à celle de la planète, et leurs élongations, vues du soleil, sont si peu considérables, que ces perturbations sont insensibles. Il y a tout lieu de croire que cela a également lieu pour Saturne et Uranus.

SECONDE PARTIE, LIVRE SIXIEME. 69 CHAPITRE V.
 GONSIDÉBÂTIONS SUR LA PARTIE ELLIPTIQUE DU RAYON
 VECTEUR ET DU MOUVEMENT DES PLANÈTES. 20. Nous avons
 déterminé dans le chapitre vi du second livre les arbitraires, de manière que
 le moyen mouvement et l'équation du centre ne reçussent aucun
 changement par Faction mutuelle des planètes; or on a, dans Thypothèse
 elliptique, — ———^{^^} la masse du soleil étant prise pour unité ; ce qui
 donne $s a = n' \cdot (iH - y/n)$: tel est donc le grand axe dont on doit faire usage
 dans la partie elliptique du rayon vecteur. Si, comme nous le ferons dans la
 suite, on suppose $a = n'$, $a = 7i^{\wedge} \setminus$ etc. il faudra, dans le calcul de la partie
 elliptique du rayon vecteur, augmenter respectivement a , a , etc. des
 quantités $y ma$, $y m'a$, etc. mais cette augmentation n'est sensible que pour
 Jupiter et Saturne. On appliquera ensuite au rayon vecteur les corrections
 données par les formules du n° 50 du second livre, et par les numéros
 précédents. Ces corrections contiennent les deux termes, — $m'a \cdot \text{fe. COS.}$
 $[nt-h-e - ^{\wedge}) - ma \cdot y^{\wedge} V \cdot \text{cos. (nf-4-e - tsr')}$;

70 MECANIQUE CELESTE. f et f' étant déterminées par les deux équations suivantes, équations données par le n° 50 du second livre. La partie précédente du rayon vecteur peut être réunie dans une même table, avec la partie elliptique de ce rayon.

SECONDE PARTIE, LIVRE SIXIÈME. 71 CHAPITRE VI.
VALEURS NUMÉRIQUES DES DIVERSES QUANTITÉS QUI
ENTRENT DANS LES EXPRESSIONS DES INÉGALITÉS

PLANÉTAIRES. 258. Pour réduire en nombres les formules exposées dans le second livre et dans les chapitres précédents, on est parti des données suivantes : Masses des planètes, celle du soleil étant prise pour unité. Mercure m_{M} = Vénus m_{V} = La Terre m_{T} Mars m_{M} Jupiter m_{J} Saturne m_{S} = Uranus m_{U}
 $m_{\text{M}} m_{\text{V}} m_{\text{T}} m_{\text{M}} m_{\text{J}} m_{\text{S}} m_{\text{U}}$ 383,30 1 829630 1 816082 1 1067,09 1 3359,40 1 19604 De toutes ces masses, celle de Jupiter est la mieux connue : je l'ai conclue de l'équation suivante, qui résulte du n° 25 du second livre. Si Ton nomme T la révolution sidérale d'une planète m ; T , celle d'un de ses satellites, dont j est le sinus de l'angle sous lequel le rayon moyen de son orbite est vu du centre du soleil,

72 MÉGANIQUE CELESTE. à la moyenne distance de la planète à ce centre ; la masse de la planète, celle du soleil étant prise pour unité, est $\frac{1}{530^3}$. On a, relativement au quatrième satellite, $\sin i = \frac{z}{r}$, $T = 161^m, 6890$; d'où Ton tire $M = 1067,09$ La masse de Saturne a été conclue de la même manière, en supposant la révolution sidérale de son sixième satellite, égale à $153^m, 9453$, et l'angle sous lequel le rayon moyen de l'orbe de ce satellite est vu du soleil, dans les distances moyennes de Saturne, égal à $55' 2''$, 47- La masse d'Uranus a pareillement été conclue, en supposant, conformément aux observations d'Herschel, la durée de la révolution sidérale de son quatrième satellite, égale à $133^m, 4559$, et le rayon moyen de l'orbe de ce satellite, vu du soleil, dans la moyenne distance d'Uranus, égal à $136' 51''$. Mais les plus grandes élongations de ces satellites, à leurs planètes respectives, ne sont pas aussi certaines que celle du quatrième satellite de Jupiter. Leur observation mérite toute l'attention des astronomes. La masse de la terre a été déterminée de cette manière. Si l'on prend pour unité la moyenne distance de la terre au soleil, l'arc décrit par la terre dans une seconde de temps sera le rapport de la circonférence au rayon, divisé par le nombre des secondes de

SECONDE PARTIE, LIVRE SIXIÈME. 73 Année sidérale, ou
 par 3652 56 3 8\4. En divisant le carré de cet arc par le diamètre , on aura
 $\frac{1}{2}$ pour son sinus verse : c est la quantité dont la terre tombe vers le
 soleil, pendant une seconde, en vertu de son mouvement relatif autour de
 cet astre. Sur le parallèle terrestre dont le carré du sinus de latitude est y,
 L'attraction de la terre fait tomber les corps, dans une seconde, de
 $3''^{\wedge^2},66553$. Pour réduire cette attraction à la moyenne distance de la terre
 au soleil, il faut la multiplier par le carré du sinus de la parallaxe solaire, et
 diviser le produit par le nombre de mètres que renferme cette distance ; or
 le rayon terrestre sur le parallèle que nous considérons est de
 $6369374''^{\wedge^2}$; en divisant donc ce nombre par le sinus de la parallaxe
 solaire supposée égale à $27''^{\wedge^2},2$, on aura le rayon moyen de Terre terrestre
 exprimé en mètres; d'où il suit que l'effet de l'attraction de la terre, à la
 moyenne distance de cette planète au soleil, est égal au produit 366553 de
 la fraction $\frac{1}{2}$ par le cube du sinus de $27''^{\wedge^2},2$; il est par conséquent égal à
 $\frac{1}{2}$. En retranchant cette fraction de $\frac{1}{2}$, on aura $\frac{1}{2}$ pour
 l'effet de l'attraction du soleil, à la même distance; les masses du soleil et de
 la terre sont donc dans le rapport des nombres 1479560,5, et 4,4885; d'où il
 suit que la masse de la terre est $\frac{1}{1479560,5}$. Si la parallaxe du soleil est un peu
 différente de celle que nous avons admise, la valeur de la masse de la terre
 doit varier comme le cube de cette parallaxe comparé à celui de $27^{\wedge^2}$. J'ai
 conclu la masse de Vénus, des formules que je donnerai dans la suite, de la
 diminution séculaire de l'obliquité de l'écliptique à l'équateur, en supposant
 cette diminution égale à $5430''$: c'est en effet celle qui résulte des
 observations qui me paraissent mériter le plus de confiance. Quant aux
 masses de Mercure et de

7/4 MÉCANIQUE CÉLESTE. Mars, j'ai supposé, d'après les observations, les diamètres moyens de Mercure, Mars et Jupiter, vus à la moyenne distance de la terre au soleil, respectivement de $21^{\circ}60'$; $58^{\circ}45'$; et $626^{\circ}04'$. Ces diamètres donneraient leurs masses, celle de Jupiter étant connue, si l'on connaissait la loi de leurs densités; or, en comparant les masses de la Terre, de Jupiter et de Saturne, à leurs volumes, on trouve que la densité de ces trois planètes est à peu près en raison inverse de leurs moyennes distances au soleil; j'ai donc adopté la même hypothèse, relativement aux trois planètes, Mercure, Mars et Jupiter; d'où résultent les valeurs précédentes des masses de Mercure et de Mars. L'irradiation et les autres difficultés qu'offre l'observation des diamètres planétaires, jointes à l'incertitude de l'hypothèse adoptée sur la loi de leurs densités, rend ces valeurs d'autant plus incertaines, que cette hypothèse s'éloigne de la vérité, relativement aux masses de Vénus et d'Uranus. Heureusement Mercure et Mars n'ont qu'une très-petite influence sur le système planétaire, et il sera facile de corriger les résultats suivants qu'elles affectent, lorsque le développement des inégalités séculaires aura fait connaître exactement leurs masses.

22. Moyens mouvements sidéraux des planètes, pour une année julienne de 365 $\frac{1}{4}$ -J-, ou valeurs de n , n' , etc. Mercure $n = 16608076\frac{1}{50}$, Vénus $n = 6501980^{\circ}00'$, La Terre $71^{\circ} = 3999930^{\circ}09'$, Mars $11^{\circ} = 2126701^{\circ}00'$, Jupiter $n^{\circ} = 337210^{\circ}78'$, Saturne $n = 35792^{\circ}34'$, Uranus $71^{\circ} = 47606^{\circ}62'$. En employant pour n , n' , etc. ces valeurs, le temps t désigne le nombre d'années juliennes. De là, en prenant pour unité la

SECONDE PARTIE, LIVRE SIXIÈME. 75 moyenne distance du soleil à la terre, on a conclu, par la loi de Kepler, les distances moyennes suivantes, des planètes au soleil. Distances moyennes des planètes au soleil, ou demi-grands axes de leurs orbites. Mercure $a = 0,38709812$, Vénus $a = 0,72333230$, La Terre $a = 1,00000000$, Mars $a = 1,52369352$, Jupiter $a = 5,201\,16636$, Saturne $a = 9,53787090$, Uranus $a = 19,18350500$. L'action mutuelle des planètes altère un peu ces moyennes distances : nous déterminerons dans la suite ces altérations. Rapports des excentricités aux moyennes distances, ou valeurs de e , etc. pour 1760. Mercure $e = 0,20551320$, Vénus $e = 0,00688405$, La Terre $e = 0,01681395$, Mars $e = 0,09308767$, Jupiter $e = 0,04807670$, Saturne $e = 0,0562\,2460$, Uranus $e = 0,0469950$. Longitudes des périhélies en 1760, ou valeurs de ϖ , etc. Mercure $\varpi = 81^{\circ}40'$, Vénus $\varpi = 142^{\circ}24'$, La Terre $\varpi = 109^{\circ}57'$, Mars $\varpi = 368,3037$, Jupiter $\varpi = 111^{\circ}50'$, Saturne $\varpi = 97^{\circ}46'$, Uranus.. $\varpi = 185,1262$. 10.

76 MÉCANIQUE CÉLESTE. Inclinaisons des orbites à Técliptique en lySo, ou valeurs de $(p, \zeta^{\wedge}, \text{etc.})$. Mercure $\wedge = 7^{\wedge}7778$, Vénus $\wedge' = \wedge^{\wedge} \gg 770^{\wedge} \gg$ Mars $(p'' = 2,0556$, Jupiter $(\wedge'' = 1,4636$, Saturne $\wedge''^{\wedge} = \wedge^{\wedge} > 7762 >$ Uranus $\wedge'^{\wedge} = \wedge^{\wedge},8596$. Longitudes des nœuds ascendants sur Técliptique de j 780, ou valeurs de fl, ff, etc. Mercure d = 50%3836, Vénus ff = 82,7093, Mars r = 52,9376, Jupiter d''' = 108,7846, Saturne $0^{\wedge} = i23,8960$, Uranus $0^{\wedge} = 80,7015$. Toutes ces longitudes sont comptées de Téquinoxe moyen du printemps, à Tépoque du 3i décembre 1749» à midi, temps moyen à Paris. On doit observer ici que Ton entend par longitude du périhélie, la distance du périhélie au nœud ascendant, comptée sur Torbite, plus la longitude du nœud. 23. On a obtenu les résultats suivants par les formules du n^o 49 du second livre, MERCURE ET VÉNUS. $a = \text{---} = 0,53516076$; d'où l'on a conclu $b^{\wedge} \backslash r = 2,145969210$, $t^{\wedge} \backslash' = \text{---} 0,515245873$.

The text on this page is estimated to be only 9.96% accurate

SECONDE PARTIE, LIVRE SIXIÈME. 77 Ensuite, $6^{**}=2$,
1721751, $i^{*}=0,6057052$, $6^{'}=0$, 2466877, 7 T T $\grave{e}';=0$, i 107665,
 $\grave{e}W=0,0520855$, $i';=0,025i378$, T T T $6^{*}=0,01\ 23\ 166$, $i'^=0,0060633$,
 $i'^=0,0029287$, T T T $6^{*}=0,00i2758$. T ia : 0,780206, $-^=1,457891$, t da
1,070071, 0,691487, -T- $\hat{i}=0,42\ 38i8$, -T-!- = 0,252376, ia $-^=0,147708 =$
i4,584366, $^,^=16,067040$, , / 1=1:15,6172741 = 13,720218.

The text on this page is estimated to be only 8.97% accurate

78 MÉCANIQUE CELESTE.. (/»6(;) d»6W rf»è(;) -^ =
69,60694, -^ = 82,36773, -^ = 92,72610, -3-^ = 105,33962. è'''=4,2i4i54,
6';' = 3,035376, i'''=i,95o536, i'j'=: 1,192372, 6';' = o,7o8667, 6";' =
0,413762, T T T i';» = o,2388o7. T d6(" d6''' dfc'** -^^=i2,5o63o, -^^ =
9,76666, -3^=7»o8399, -^=4,88781. 3 i. -^=78,09476, -^=67,14764.
MERCURE ET LA TERRE. a= -T =0,38709812; d'où Ton a conclu b'^^ ^ =
2,07566247, T i'^= — 0,37970591. Ensuite, &(;) = 2,08 1980,
fc^;^=o,4iii4o, 6^; =0,120178, T T T 6^*^ = 0,038900, fe^*^ = o,oi3202,
6^*^=:o,oo46o3, T T T 6^*^=0,001629, 6^'^ = o,ooo573, 6^*^ = 0,000177.

The text on this page is estimated to be only 8.66% accurate

SECONDE PARTIE, LIVRE SIXIÈME. 79 dfcw dfet;) dftt;
-2^=0,464378, -j-^= 1,199633, -2^=0,665739, (f6'*' ± ± i-2;;î=-5,49232,
-2^=5,45663, -2^=6,5i373. 6^=2,871833, i

80 MECANIQUE CELESTE. Ensuite, $6'' = 2,033500$, $i' = 0,26046a$, $fc' = 0,010546$, $T_1 = 0,273829$, $-^{\wedge} = 0,127139$, $I = -\pi = 1,050458$. $6^{\wedge} = 2,322536$, $6^{*\wedge} = 0,002331$, $T_{cfc} = 1,077839$, $da db^{\wedge} I_{77} = 0,037781$, $la : 0,666780$, $i' = 0,049766$, $T_{iw} = 0,000638$. $s - ^{\wedge} = 0,402980$, (fit;) $T_{\ll *^{\wedge} = *'77864i, 60} = 0,863876$, $i'; \gg = 0,272086$.

MERCURE ET JUPITER. d'où l'oD a conclu $a = -w = 0,07442666$; $a i''^{\wedge} = 2,00277063$, $J'' = -0,07437397$. En déterminant, au moyen de ces équations et des formules du n° 49 du second livre, les valeurs de $fe'J \setminus$ $è^{\wedge} J^{\wedge}$ etc. on a reconnu qu'elles deviennent de plus en plus inexactes, ce qui a lieu dans tous les cas où a est peu considérable; parce qu'alors ces valeurs sont les différences de nombres qui diffèrent très-peu entre eux,

The text on this page is estimated to be only 26.44% accurate

SECONDE PARTIE, LIVRE SIXIÈME. 81 en sorte qu'il faudrait avoir ces nombres avec une très-grande précision, pour déterminer exactement ces différences, ce qui exigerait l'usage des tables de logarithmes à dix ou douze décimales. Pour obvier à cet inconvénient, il faut recourir à la valeur de b en séries : on trouve par le numéro cité. $\backslash l \backslash \dots Q t H . \text{---} . P L . (\ll) 5.5 + 1.5 + 3 \text{---} 5 + 1 \text{---} 1 .] ' \text{---} \wedge \wedge \wedge \wedge \ddot{i} + 1.1 + 2 \text{---} b = 2.5 ; . a \{ \backslash \wedge \hat{o} \text{---} \bullet \text{---} \text{---} \text{---} . a^* + \text{etc.} < \backslash \wedge \wedge \wedge 1 + 1.1 + 2.1 + 3$ Cette valeur de b est ici très-convergente, à cause de la petitesse de a : cest par son moyen que Ton a déterminé les valeurs de $b^{\wedge} \backslash T f c^* \wedge \text{etc.}$ $b^{\wedge} \wedge^j \text{etc.}$ dans tous les cas où a est peu considérable. On $T T a$ trouvé de cette manière, pour Mercure et Jupiter, $f c \ll ;) = 2,002778$, $f e^{\wedge} ; \wedge = 0,07ii58i$, $6^{\wedge} ; \wedge = 0,00^{\wedge} i64$, $T T T i^{\wedge} \wedge = 0,0002 \text{---} 58$, $6^* \wedge \wedge = 0,000017$. $T T d b^* J d b^{\wedge} \wedge^1 d b^{\wedge} J \text{---} j \text{---} L . = 0,0748qi$, $\text{---} j \text{---} \wedge = 1,006269$, $\text{---} ; i \text{---} \hat{i} \text{---} = 0, i \text{---} 1 i380$, da $cLa \text{---} ua \text{---} \text{---} \wedge = 0,010428$. da $d^* f c w$

The text on this page is estimated to be only 13.05% accurate

82 MÉCANIQUE CELESTE, d'où l'on a conclu $6'' = 2,0008368$,
 $T b'^{\wedge} = -0,0406771$. r Ensuite, $b'^1 = 2,000823$, $b'^1 = 0,040610$,
 $\epsilon'^{\wedge} = 0,001236$, $T T T 6'^{\wedge} = 0,000042$, $6'^{\wedge} = 0,000001$. $T T (/6(\ll di dé''$
 $\pm \pm 2. -j-i- = 0,040662$, $, ' := 1,001841$, $' = 0,060919$, $db'^{\wedge} 1 \hat{=} 20,003085$. d
a rffcw

The text on this page is estimated to be only 9.62% accurate

SECONDE PARTIE, LIVRE SIXIEME. 83 VÉNUS ET LA
TERRE. t (x= — =o,7233323o; a d OÙ Ton a conclu $b^{\wedge} = 2,27159162$, $b^{\wedge}$
 $^{\wedge} = — 0,67226315$. T Ensuite, & d6''' dèC) i. JL $\pm -2^{\wedge} = 1,643709$, $-^{\wedge} = 2$,
272414, $-^{\wedge} = 2,069770$, dfcw d6(»' dfcw L — 1. $-2^{\wedge} = 1,738781$,
 $-2^{\wedge} = 1,407491$, $-2^{\wedge} = 1,113704$, --î-i- = 0,867 147, $-r^{\wedge} = o,66883o$. ttflt (lot

The text on this page is estimated to be only 8.83% accurate

U»4 = 56,55335, 1 ^,/— 57.35721, (fa' = 58,19633, da^ ~ T „ =
62,87646, 1 . ' — fĩ fĩ 'îo/inn d'b^'l T _ — 70 5A336 da' ~ 1 5 wvj,ci-4q.uy,

The text on this page is estimated to be only 16.83% accurate

SECONDE PARTIE, LIVRE SIXIÈME. 85 -^ = 2,192778, —p-l.
=1=2, 628516, -^=7,65440, 1 , ' = io,665i3. è";=3,523572, T è'^'^ = o,
722687. T -^ = 8,47521. -T-i= 1,81 5836, -J^= 2,004429. -ï-î^= 8,45655, (la
-^=2,795574, -^ = 8,17676, 6

The text on this page is estimated to be only 12.24% accurate

86 MÉCANIQUE CÉLESTE. dftc d6") rfi" :0,143160, -j—î=1,
022206, -j—î=0,212046, da —"»*•*-'"" J,, . * =0,086783, -7-^=0,0061 1
1. (la ' da d*b'^^ d'b'^^ d'b'^^ — ' JL ± -^=1,067532, -^ = 0,326869, _-î.=:
1,576190, -^ = 0,533951. 6';>= 2,089736, 6';» =0,432801, 6

The text on this page is estimated to be only 17.36% accurate

SECONDE PARTIE, LIVRE SIXIÈME. 87 rf-fci" J«6(" d«6 _i_
j_ _1_ —1-^ = 0,716690, . * = 1,000829, — 7-^ = 0, o56634. LA TERRE
ET MARS. ir a= —Tn = o,6563oo3o; a dou Ton a conclu ¥\ = 2,22192172,
T 6",=— 0,61874262.

The text on this page is estimated to be only 6.73% accurate

88 MECANIQUE CELESTE. Ensuite, $6'';' = 2,291132$, $6''; =$
 $0,804563$, $6'';' = 0,405584$, $T T T 6'^{\wedge} = 0,224598$, $6'^{*} = 0,129973$, $6'^{*} =$
 $0,077170$, $T T T è;'z = 0,046595$, $6'';' = 0,028^{\wedge}80$, $6'';' = 0,017065$. $T T T de'»'$
 $(/6''' d6''> J. -L i. —r^{-} = 1,228078$, $, ' = 1,871211$, $, ' = 1,601236$, aa' (la
 $aa db'^{\wedge} db'^{\wedge} db'^{\wedge} 1 j\_ i\_ ^j^{\wedge} = i$, 240990 , $-^{\wedge} = 0,920710$, $-^{\wedge} = 0,666207$, $-j^{-}$
 $= 0,4739^2$, $-7^{-} = 0,333444$. (lot, (lot d'6''' d'6''))

The text on this page is estimated to be only 13.94% accurate

SECONDE PARTIE, LIVRE SIXIEME. 89 rf6W dt''' d6(') s 3 S ,
^ =31,80897, . ^ =82,26285,... , ' = 18,26867. dOL (lot dOL LA TERRE ET
JUPITER. d'où l'on a conclu Ensuite, J';' = 2.01 8885, T iw = o,oo45i6, T
J'^^ = 0,00002 3. T ^-^o,2oo586, a= -FF =0,19226^61, U^\ = 2,01862593,
U^\ = — 0,19137206. T 6'^^ = 0,1 96003, T 6*' =0,0007 79, ia --
^=0,070932, — î-r-=i,i32355, as* -T-î^= 0,7 46681. -2^=1,473714, TOMB
III. rf6''' I — ' = i,o432o4, da :o,oi6369, da , .' =0,4661 65, da* 1 l^ da>
2,874986, T 0,028195, 0,OOOl32, dfcw 0'29799S' o,oo3448. (/d =
1,628667, «fici i,4i883o. 13

The text on this page is estimated to be only 13.56% accurate

90 MÉCANIQUE CÉLESTE. 6

The text on this page is estimated to be only 9.80% accurate

SECONDE PARTIE, LIVRE SIXIEME. 91 d'où l'on a conclu $i'' = 2,00135893$, $b'^{\wedge\wedge} = \text{--- } 0,05211095$. Ensuite, $e^{\wedge}i = 2,001355$, $i'^{\wedge} = 0,052182$, $6^{*\wedge} = 0,002040$, $T T T 6^{*\wedge} = 0,000089$. $T dfcw rffcw (i6C) \pm \pm$
 $i^{\wedge}-i-zzz: 0,052288$, $'j * = 1,003060$, $, * = 0,078449$ ua aa oa ' " $\wedge$ d OÙ Ton a
conclu MARS ET JUPITER. $a = -7F = 0,29290212$, 6

The text on this page is estimated to be only 12.09% accurate

= i,87i538, 92 MECANIQUE CELESTE. d'fcw d'6(; ' d'6(* -
^=1,338769, -^=0,794557, -j^ -j-f= 1,258858, -T-f=o,62 3i84. J>5{.) (f3^(.)
^JW i. J_ i. -^^=2,69358, -^=3,77722, -^=2,91068, -^=5,47068. J(.) S d6">
da : 2,444762, :0,127942. :3,488i5, 6>;'=i,o4o2o6, 6'*' = 0,376693, d6''' (fa
= 4,80540, s (fa = 2,99684. [ARS ET SATURNE. a= — =0,15975187, d'où
l'on a conclu èw= 2,01278081, T U' ^=. 0,15924060. T Ensuite,
6^;^=2,oi2g45, 6^;^=o,i6i3o5, T T h^^l = 0,00 2 57 7 , 6 ^*^ = o,ooo36o ,
6^*^=0,019347, T 6^*^ = 0,000062.

The text on this page is estimated to be only 9.75% accurate

SECONDE PARTIE, LIVRE SIXIÈME. 93 db^l dft'; dbⁱ -T-⁻
= 0,1 64463, -T-⁻ = 1,029493, -j-⁻ = 0,244843, -⁻ = 0,048740, *
=0,009065. d«6C) d«6î») d«6(») J. JL J. -⁻ = 1,090095, -⁻ = 0,379322, -j⁻ =
1,596248, -⁻;2- = z = 0,620632. 6

The text on this page is estimated to be only 14.61% accurate

94 MÉCANIQUE CELESTE. JUPITER ET SATURNE. $a = -F -$
 $= 0,54531725$, a d'où Ton a conclu $U' = 2,151682iii$, $i'^{\wedge} = \text{---} 0,52421272$.
Ensuite, $e^{\wedge} = 2,1802348$, $h^{\wedge} = 0,6206406$, $h^{\wedge} = 0,2576379$, T T T
 $fe'; = 0,179760$, $i'; = 0,056552$ 2, $i = 0,0018056$, e

The text on this page is estimated to be only 9.03% accurate

SECONDE PARTIE, LIVRE SIXIÈME. 95 (f6W (i'fcO d'iW ± ±
i. -^=1,664586, -j^= 1,144377, -^^^0,760603, -i-i=o,485i35. rffcw d'fcC)
d>6(') i. JL i. -T-^= i2,i2863o, -T-^ = 12,878804, -j-p-=i2,832o5o, d'b^l
d»6(») 6W -T-^=i5,45485o, -j-^= 17,0681 55, -}-i=i 6,655445, U(X (Z(X
(t(t d»6C) d'fco d'éc) i. JL J. -^=14,958762, -2^ = 12,234874, -^=9,566420.
d«6c>

The text on this page is estimated to be only 7.32% accurate

96 MECANIQUE CELESTE. $\delta'' = 0,273629$, $\delta''^{\wedge} = 0,1\ 58799$,
 $J'^{*} = 0,092290$, $T\ T\ 7\ i'^{*} = 0,06892\ 2$. $T\ dfct \gg) rfftW\ dfcW \pm JL\ 1\ \text{---} -1 =$
 $1^{\wedge},68\ 1824$, $-T^{\wedge} = i5i23q657$, $-p\hat{-} = i3,4i6o26$, $aa\ aa\ ^{\wedge}\ 'aa\ dfcw\ (/6''\ (i6$

The text on this page is estimated to be only 10.24% accurate

SECONDI PAin^{-t4}= 1.664586, —[^]= da' as -r-r= 12,12863o,
— . — = ia' as d'iw d ■ :i5,45/i85o, DIXIEME. 97 d'b[^]l d h -5[^]=14.958762,
-[^] -[^]=84,4oi59, -5[^]= 89,8615, [^]=118,6607 -5[^]=747,480, -[^]=785,884,
-5[^]=912,301. 6']|=4,3583[^] T 6';'=i,2 95(i d'. 1, .)0,)32, i''' = 0,056906, T
i'''=: 0,000745, d6W -j-î[^]=o,43363o, -j—î- = 0,0 1 54 1 o , aa -[^]=i,8i545i,
CS794, 6'*'=o,3i5i86,

The text on this page is estimated to be only 9.98% accurate

98 MÉCANIQUE CELESTE. Ensuite, $6';' = 2, a444o$, $è';' = 0,552007$, $è';' = 0,2083i3$, $è''' = 0,086834$, $6fc(.) ft(.) -^{\wedge} = 8,798999$, $-^{\wedge} = 9,578267$, $-^{\wedge} = 9,425450$, $db^{\wedge}j rf6(;>^{\wedge} = 9,75656$, $-r^{\wedge} = 7,24097$, $-^{\wedge} = 4,95052$.

SECONDE PARTIE, LIVRE SIXIÈME. 99 CHAPITRE VII.
 EXPRESSIONS NUMÉRIQUES DES VARIATIONS SÉCULAIRES DES
 ÉLÉMENTS DES ORBITES PLANÉTAIRES. 24. Nous allons présentement
 donner les valeurs numériques des variations séculaires des éléments des
 orbites planétaires. Reprenons pour cela les variations différentielles des
 excentricités, des périhélies, des inclinaisons et des nœuds des orbites,
 données dans les n° 58 et 60 du second livre. Pour les réduire en nombre,
 il faut d'abord déterminer les valeurs numériques des quantités $(0,1)$, $[\wedge]$, etc.
 On a d'abord calculé les valeurs de $(0,1)$ et $[\wedge]$, au moyen des formules
 suivantes données dans le n° 55 du second livre, $3 \sin' . na . j(i + \llcorner) . 6(\prime, + | \llcorner . 6W,$
 $\wedge = 1 \wedge \wedge 2 . (1 - \llcorner \bullet)'$ On en a conclu les valeurs de $(\prime . \llcorner)$ et $[TT\hat{o}]$, au moyen
 des équations suivantes, trouvées dans le même numéro, $(\prime, o) = -sL - (o..),$
 $\backslash r \wedge = / -Ei\hat{i}]m'.yja' m'.ya'$ On a obtenu de cette manière les résultats suivants
 réduits en secondes, et dans lesquels les chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, se
 rapportent respectivement à Mercure, Vénus, la Terre, Mars, Jupiter,
 Saturne et Uranus. On a multiplié les masses précédentes

The text on this page is estimated to be only 15.30% accurate

100 MÉCANIQUE CELESTE. dentés des planètes,
respectivement par les facteurs indéterminés $i\text{-hfi}$, $iH\text{-jx'}$, $i\text{+fx''}$, etc. afin de
pouvoir corriger immédiatement ces résultats, quand on aura les corrections
des masses. $6',053725$, 1^{411096} , 0^{089496} , $o\backslash45i633$, $o\backslash oi26io$, $(0,1) \text{ — } f$
 $l\text{-f-fA}) (0..) (>+f^{*}) (0.3) \text{ — } (>+(*)) (o.\grave{a}) (1 \text{-f-f.}) (0.5) (>+f^{*}) (0.6) ($
 $1+f^{*}) (1,0) \text{ — } [l\text{-t-fA}) ('.\ll) (l+f.') (-.3) (l+fl'') (..4) (H\text{-fi}) (1.5) (H\text{-fi})$
 $\{>.6) (1+f.') (a,o) (H\text{-fi}) \{*.>) (>H\text{-f}^{\wedge}) (a, 3) (l\text{-4-f.}) ('.\grave{a}) (1 \text{+--K}')$
 $\{\ddot{i}.5) (iH\text{-f.}) (\gg.6) (i+f.') (3.0) (.i\text{-}^{\wedge}f^{*}) (3,1) (>+f^{\wedge}) (3.^{\wedge}) (>\text{-}^{\wedge}i^{\wedge}) (3.4) ($
 $>\text{-}^{\wedge}n (3,5) (i\text{-f-f.}) (3.6) (.^{\wedge}\blacksquare^{\wedge}n (4,0) (^{\wedge}l\text{-}^{\wedge}f^{*}) (*..) (i+f.') 9\backslash43ii52,$
 $2\backslash974746, o^{\wedge}i2 \ 54o3, A\grave{i}S\grave{o}a\grave{o}yo, o',24864i, o\backslash oo5252 , . i\backslash3o345o, \bullet$
 $22'',889753, . o',457288, . i2'',75o5i2 , . 0^{\wedge},640032, . 0^{\wedge}013439, . o'',3oi54,$
 $. i6\backslash749o6o, . i\backslash3364i7, .2i'',444oi5, . i\backslash o5o745, . \odot',021899, . o'',o576oo, .$
 $l^{\wedge}5l8l47, . 6'',o634i3, .44'',4795io, . 2'',o3i9i8, . o^{\wedge}o4i468, . o'',ooo699, .$
 $o'',oi3244, 0, 1 - . (o.\grave{e}l : \text{ — } : (l+p.-) 0,3 r- 1 \text{' +C}) o.4 | (l\text{-h(A}) |o,5 (1+f.')$
 $lo^{\wedge}=(1+f.') 1,0 :: \text{ _} -: (l\text{-f-fA}) 1,1 (1+f.') 1,3 ^{(1\text{-l-f.}) |..4 (1+f^{\wedge}'') |..5 ($
 $1+fx') ..6 | \{ 1+ft'') 2,0 z (l\text{+--fl}) h'I (l\text{-hft}) a, 3 (1+f.') |\ll.4 (1+f.-) 2,5 (l\text{-$
 $hf.') h.6 | (1+f.') 3,0 (l\text{-hft}) 3.1 (1+f.') |3.\ll (1+K) |3.4 (l\text{-i-n} 3.5 (l\text{-hf.')$
 $3.6 (i\text{+--n} |4.o (H\text{-ft}) |4.. (i\text{-t-f.}) . 0,000129. . o\backslash837553, . i9'',o58562, .$
 $0^{\wedge}2 \ 031241 . 2^{*^{\wedge}},211195, . o'',o6o62i, . 0^{\wedge}000634. . o\backslash i42855, . i3\backslash94567i , .$
 $1^{\wedge},027656, . 5^{\wedge}129740, . 0^{\wedge}137390, . o\backslash ooi42 \ 8. . 0^{\wedge}0181 \ 42, . o^{\wedge}873545, .$
 $4'',662 \ 52 \ 2, . 16^{\wedge}108309, . o\backslash4o4446, . o^{\wedge}oo4ll4\bullet . o^{\wedge}oooo65, . 0^{\wedge}002297,$

The text on this page is estimated to be only 24.21% accurate

SECONDE PARTIE, LIVRE SIXIEME. 101 (4..) = 1 'l-f-ft') M \ 1-t-f.-) M = 1 1-Hft') M l+ft") M >+f*) M >-Hf^') (5..) >-t-f*") M = [i+ft') (5.4) [i+f*") (5.6) (i+ft") (6.o) ([l-t-f*) (».) >+f*') (6.«) 1=1 >+f*') (6.3) ([l+f*') (6.4) = 1 [i+f*") (6.5) = (1+^') . o^oSoASg, . o\oi39i6, . 23",77i4ii , . 0^,298294, . o\oooo83 , . o\ooi545, . 0^003467, . o^ool478, .55",263722, . i",o9634o, . 0^000007 , . o\oooi33, . 0^000296, . 0^000124, . 2^,838932, . 4\488i96, 4,2 (■+c') |4.3| (i+p') |4.5 (!+(.) |4.6| (>+c") |5.o (•-HC) 5,1 (I+K) 5,» (1+f) 5,3 (■-HC-) |5.4 ; — [. -H,") 5.6 [• -HC") 6,0 (.+,.) 6,1 (>+f) |6,. (>+(•) |M — (1+C') |6,4 (>+(") 6,5 (1-l-f') . o^oo728l, . o\oo5o4o, . i5\53764o, . o\iooi43. . o\ooooo4 , . o\oooi46, . 0^000454, . 0^000294, .36\i2i899, . o',6585o5. . o^oooooo, . 0^000007, . 0^000019, . 0\000012, . 0^963096, . 2\695783, 25. Au moyen de ces valeurs et des formules données dans les n~ 58 et 60 du second livre , on a conclu les résultats suivants, dans lesquels -tt exprime le mouvement sidéral du périhélie en longitude, à Tépoque de 1 760, et pendant une année de 365i*""Y; -^-- est la variation annuelle de l'équation du centre, ou du double de Texcentricité, à la même époque; -^ est la variation annuelle de Tinclinaison de Torbite, à Fécliptique fixe de 1760; ^ est la variation annuelle de l'inclinaison de l'orbite, à l'éclip. . dO . tique vraie; -77 est le mouvement annuel et sidéral du nœud as, . , . de cendant de l'orbite sur l'écliptique fixe de 1 7 5o ; -jr' est le mouvement annuel et sidéral du même nœud sur l'écliptique vraie.

The text on this page is estimated to be only 3.48% accurate

df -Tr= — i3",o4oio6 — 5^,446264. (x' — 2\974745.(x" —
o\o92442.fz' 102 MECANIQUE CELESTE. MERCURE. i7\367383-i-
9\3o2569.fjL' H- 2^870l6l.(x'-t-o^l29l5l.(l^ H-4\8i4947.f^^-+- o^2
453o3.jx"-ho^oo52 52.ft^ 2.-1-= o\o42252 -f-o",o67742.(x' -h 0^020096. fi"
— o^oo7l9o.jx" — 0^038766. (x""-!- o^ooo358.(x'^-o^oooo12.(x^ -7^= —
o\37o349 — 0^271453. (x' — o^ool62.(x'^ — o\o88777.(x" — 0^009924.
(x*^ — o\oooo33.(x'^, -J^=: o\547557H-o\2ii i4o.(x' h- o\ooi569.(x"-4-
o\3o273o.fz" -ho^o32oi5.fjt'^ H- o^oooio3.(x", 5^,446264. (x' — 2\974745.
(x"— 4^3o8989.fjt"^ — 0^,2 12 92 9. (x" — 0^004737. jx", -7T^=: —
23\354327 — o\3oi i54.(x — 1 2^^,51 366 i.jx' — 2^974745. |x\ —
o^443748.fl"— 6\75o288.fjt"— o',363854.ft'^ — o\oo6877.(i'^. VÉNUS.
^=— 7",23i874— i3\3i8446.fjt— i7\76i229.fi"-+- 3\7i5362.ft" -
hi9\863664.fi"-+- o\2 58684.fi" -h o\o 10091/'^ i.-Trz= — o",8o42i8 —
o\279256.(x — o\Ziibi.\i — o",oi9686.(x" — o\i887i4.|x"^ — o^oo4348.
(x'^ -h o\oooo38.(x"» ^= — o^o49228-h o^o77777.(x -4- o\oo6658.fx" —
o',ii6834.(x" — o^oi6835.jx'^-t- o\ooooo6.(x", ^= o\i37464-l- o^o598o7.(x
— o^ol2 8ol•(x"-h o',o79659.jx" -h o\oio8o3.(x'^ — o^ooooo4.fx*^^

The text on this page is estimated to be only 5.19% accurate

SECONDE PARTIE, LIVRE SIXIÈME. 103 T--= — 3o\55863o-
i- i",o5572o.|x — as^SSgySS.fx" — o\23^gi^.fi' — 8",2i5i38.jx"^ —
o\264i64.jx'^ — o",oio38i.(x'", ^= — 56\75235i-h o",5io648.fi —
i6\jligoS3.fi — 22^889753.(x" — o",8r84798.fjt" — i5\8428oo.fjt" —
o',88i2 3o.(jt' — o\oi5365.ft". LA TERRE. ^= 36^88a43 — i",28o628.fjt -+-
ii\76937i.fi'-h4\772io7.(jt'^ -4-2 i",oo 12 1 o.(jt'"H- 0^598970. (i-ho\o20^ 1
3. (x"\ de' 2.-T--= — o\579i3o — o\o24866.|x -f- o\og3g36.fi — o",i52
5oo.fjt'* — 0^^930 iS.fjt" — o\oo28o6.(x"h-o\oooi24.(x'^. MARS. — TT-
= 48^386296^ - o",o49209.(x h- 1^677303. (x'-+-6\571974..(x" -+-38\oo2 7
5o. (x"'-4- 2^141 598. (x*^ -ho\o43462 . ii\ if! rfç; i\i498o6-i- o\oo72 92.fx
-+- o\oo4832.(x' -ho\i 24976. (x" -h o\972i68.(x"'-4- o\o4o638.(x'^ —
o\oooiioo.(x"', ^= — o^9o679l-h 0^000284. (X — o",o4o575.(x' —
0^786665. (x"' — 0^07 9 699. jx" — 0^0002 36. (x^\ Tj- — — o^o4oo74
— o\ooi i99.(x -h o^/^o'jo^S.^' — o\4o74o4.(x"' — o\o38437.ix'^ — o\oooi
i2.(x"\ -T"= — 3o\o254i5-+- o\i6ii85.(x -h o^969343.(JL' — 6\o634i3.(x"
— 2 4^2 44 1 44 . (x'*^ — o\82 2 63o. fx*^ — o\o 2 5766. (i\ jj^= —
7o^338499 — 0^,982701. jx — 26^474o72.(x' — 6",o634i3.(x" —
i\3364i7.fx" — 33\999862.fjt' — i\44798o.fA' — 0^034054. (x*".

The text on this page is estimated to be only 9.55% accurate

104 MECANIQUE CELESTE. 1 ir -^= 20',369659-fdt d£ dt d^_
dt ~' dt dt o',ooo2 44.f*' o',oo3766.(t", o',ooo346.jx' o',68882o—
»9"»936792JUPITER. o',ooo574.(Ji -f- o',oi3364.j*'h- o',o3o362.fi' -h
o',oo63i9.(i"-i-i9',93i7oi.(x"~|- o',387339.(x", ■== i',7iii68 —
o'jOooooA.fJt-t- o',oooo2 8.jx'-t— o",ooo588.j*'-j- i',70774a.fi'-l= —
o',2^ll'J^-+- o',oooo68.(A H- o',ooo3i3.jx'-f— o',a4362i.(i'-f- o*,ooi720.(x",
o",o29292.(x — o",3954i4.|*' — o',o32856.(x' o",2 32 852.jx"-4-
o',ooi594.f*", o",ooi57o.|x-f- o',oi8o76.|*' — o',o3o439.(i' — o",ooi423.ft"'-
j-2o',078923.jx" — o',i399i5.fi", •== — 45^,257336 — o',976oo8.|x — 3
9^,594863. fji' — o',o3o439.jx' — i",2oio89.fA"'— 2i',444oi5.(jt"H-
i8',i4o62i.fi' — o',i5i543.ft". SATURNE. •= 49',73o637-i- o',oooo68.j* -f-
o*,ooi53i.|x' H- o",ooi697.fi"-+-48',737o68.fi" 2.-T— = — 3*,334597 —
o',ooooooo.fi -f- o',ooooo 1 .ft' — o',oooo48.ft"— 3',3948i2.fjt" -^=z=
o',3o784n- o\ooooo9.(x -h o^oooo55.(x'-t- o^2 98443.(x"'-f- o\oo92 9i-(x" :
— o^47929o — o^o338l3.(x — o\SgSSi3.(i' — o',o38709.fi' o\i82 639.fx'^-
h o^oo9lo6.ft^^ d(p; _ o\oo3334.fA* 0^,98693 9.fA" 0^000002.(A" o',o6o2
6o.(x"" o^oooo43•flr'*

The text on this page is estimated to be only 12.98% accurate

SECONDE PARTIE, LIVRE SIXIÈME. 105 -ir= — 27[^],7941
lo-h o\ooooii.jx H- o\oooi3o.(x' — o\ooi^6'j.(i — o\ooogg6.(i''' —
26\957559.(x''' — o\S3222g.ii\ ^=— 58',77oo6o— o',342473.fjL —
i8\i58i75.fjL' — o>o3467/ — o\436463.(x'^ — 37\94i2 34.(x''' —
i",o5o744.fA'^ URANUS. I ri TT— = 7^576700-h o\ooooo8.(x -4-
o",oooi32.(x'-+- o\ooo2 93.(x" -H o\oooa7.fi"H- 3\737i3o.ft'''-
h3\838990.fjt', 2.T— = — 0^333901 — o",oooooo.jx — o",oooooo.(x' —
o'^oooooo.ft" -h o",oooooi.(x'* — o",o36890.(x''' — 0^29701 2. (x^ -jj—=
— o\i 50807-)- O^OOOOOO.fJt -h o^oooooo.(x' H- o'^oooooi.ft'''
0,027000.(X 0,122920.(X, ^j^= — 0^,084754 — o",oi695i.jx H- o\o3i3i2.
(x' — o\oi8232.(x" H- o",i82 767.(x'^ — o^o94l42.(x^ ^— = 8^336o37-h
o",oooo5i.(x -+- o'\ooo45o.(x' — o^ooo2 96.(1" -H o>ooi44.fx"-h
1^532o43.fl"-^-6^8o3645.fj^^ ^=— lo6^l83322— ^ 2\433693.(jt—
73\5o58i7.fjL' — o\ooo296.ft''' — 2",897429.fjt" — 3i\484265.fjL"-t-
4\i6oo79.fjt' — 0^021 90 l.jX*^'. Je n'ai point compris dans les formules
précédentes les variations de l'orbe terrestre; on les déterminera par les
équations, (ang. (p\ sin. d'=p\ tang. (^ \ cos. 6' =({". Quant aux valeurs de p"
et de q\ on les déterminera par les forTOMI III. 14

106 MÉCANIQUE CÉLESTE. mules du n° 59 du second livre, et l'on aura, en prenant pour plan fixe l'écliptique de 1760, , , $dp' r ddp' dq' r dddq' t$ exprimant le nombre des années juliennes écoulées depuis 1760, et les valeurs de $-x-y-x-$, , , etc. se rapportant à cette époque. On pourra ne considérer que la première puissance de t dans ces deux séries, lorsque t n'excédera pas 300; et lorsqu'il ne surpassera pas 1000 .ou 1200, on pourra rejeter les puissances supérieures au carré, ce qui est permis, même relativement aux observations les plus anciennes, vu leur imperfection. On trouve par les formules citées, $-x-== o",236792 H- 0^025989. (X -h o\2664o8.(x' -h 0^,02 9082. fi." — o\o67966.jx''' — 0*^,0 1 6809. jx'^ -h o\oooo88. fi.*^', ^== 1^546156 — o",o263o4,ft — o",956638.fjt' — o>3 1898.(1'^ — o\488376.(x''^ — o",o42 658.jx'^ — o", 000 2 8 2. (x". dt 26. On a vu dans le chapitre m que Tellipticité du soleil produit dans les périhélies des orbes planétaires un léger mouvement égal à Considérons ce mouvement par rapport à Mercure, (j est le rapport de la force centrifuge à la pesanteur à Téquateur solaire : soit mt le mouvement angulaire de rotation du soleil; la force centrifuge à Téquateur solaire sera $m\ D$. Si Ton exprime par S 1$

SECONDE PARTIE, LIVRE SIXIÈME. 107 S la masse du soleil, on aura $\frac{S}{a^3} = n^2$ ou $S = n^2 a^3$; ce qui donne la pesanteur j - à l'équateur solaire, égale à $\frac{j}{a^2}$: on a donc $m^2 D$ La durée de la rotation du soleil est, suivant les observations, à très-peu près égale à 25 Jours, 4i7. La durée de la révolution sidérale de la terre est de 365 Jours, 256; d'où Ton tire $m = 366,256$ n" 25, 4i 7 Le demi-diamètre apparent du soleil dans sa moyenne distance est de 2968"; ce qui donne $\sin. 2968''$; on a donc $(l = z = 0,0000209268$. Dans le cas de l'homogénéité du soleil, on a, par le n" 24 du troisième livre, $jO = y$.

108 MÉCANIQUE CÉLESTE. tité presque insensible devient plus petite encore, si, comme il y a tout lieu de le croire, le soleil est formé de couches dont la densité croît de la surface au centre; on peut donc la négliger pour Mercure, et, à plus forte raison, pour les autres planètes. Les variations des nœuds et des inclinaisons des orbites, dépendantes de la même cause, peuvent être également négligées.

SECONDE PARTIE, LIVRE SIXIEME. 109 CHAPITRE VIII.

THÉORIE DE MERCURE. 27. Les inégalités de toutes les planètes, indépendantes des excentricités, et celles qui ne dépendent que de leurs premières puissances, ont été calculées par les formules du n° 50 du second livre. On a d'abord déterminé les valeurs de $A'' \setminus A'$ etc. et de leurs différences, par les formules du n° 49 du même livre; ensuite on a obtenu les résultats suivants dans lesquels j'ai omis les perturbations du rayon vecteur, dont l'effet sur la longitude géocentrique de la planète est au-dessous d'une seconde. Pour déterminer la limite qu'une inégalité du rayon vecteur doit atteindre pour produire une seconde sur la longitude géocentrique de Mercure, nous observerons que si l'on nomme V cette longitude, et si Ton fait $r' = a$, on a pour variation SV correspondante à $\hat{r}$, $r'' = 1 - 2a \cdot \cos. (v - v' + a^*)$ Le maximum de la fonction $\sin. (v - v' + 1 - 2a \cdot \cos. (v - v' + a^*)$ correspond à $\cos. (v - 1) = -1$; ce qui donne ; pour ce maximum; on a donc alors

The text on this page is estimated to be only 26.69% accurate

110 MÉCANIQUE CÉLESTE. Si Ton suppose ($i = \text{iti}$) et si Ton prend pour r et $/$, les moyennes distances de Mercure et de la terre au Soleil, on aura par ce qui précède, $r'' = i$, $\ll = 0,38709812$; d'où l'on tire $\hat{r} = z:p$ $0,000001335$: on peut donc négliger toutes les inégalités du rayon vecteur de Mercure, dont le coefficient est au-dessous de $\pm 0,000001$. Parmi les inégalités du mouvement en longitude, nous ne rapporterons que celles dont le coefficient est au-dessus d'un quart de seconde, excepté les inégalités qui dépendent de la simple distance angulaire de la planète, et qui peuvent être réduites dans une même table avec des inégalités plus considérables.

Inégalités de Mercure indépendantes des excentricités. $2'',044299.\sin, [nt - nf - e - e) 1 - 4\backslash 4972 55. \sin. 2(nff - nt - e - e) \hat{v} = (n - (^)). \{ - o^{\wedge} 395294. \sin. 3(/i'f - wf - f - e' - e) - 0^{\wedge}, 09032 2 . \sin. 4(n f - nt - \{-e - e) [- 0^{\wedge} 027485. \sin. 5(/i7 - nt - ^e - e) 0^{\wedge}, 62 2 493. \sin. [nt - nt - i - e'' - e) (^, If \ j - o\backslash 5ii2 5o. \sin. 2(7i''f - /if - he'' - e) ^ - o', o52 i63. \sin. 3(7i''f - /it - f - e'' - e) j - o'', oo9652, \sin. 4(w''f - nfH - e'' - e)] 1^{\wedge} 757209. \sin. (/i'''f - nt - he''^ - e) \ (i + f'''). ! - o^{\wedge} 365384. \sin. 2(/l''f - nf - f - e'' - e) , - o^{\wedge} oo962 4. \sin. 3(/l''^f - /i/H - e''^ - e)) 0,0000000376 - 0,0000004094.$

COS. $[nt - nt - he - e) | Sr = - (i - t - jx'), |h - 0,000001 5545. \cos. 2(7i'f - nt - h - e - e) \backslash - 0,0000001702. \cos. 3(7i'f - nf - t - e' - e) \backslash - 0,000000043 7. \cos. 4(i't - nt - he - e) i$

The text on this page is estimated to be only 18.01% accurate

SECONDE PARTIE, LIVRE SIXIÈME. Hl Inégalités dépendantes de la première puissance des excentricités. ' o\9i 1 1 i4.sin. [nt-he — 'cr) — 1 2^440900. sin.(27i't — nt-hie — e — ©) — 5^204241.5111. (3717 — 2wfH-3e' — 2e — tsr) Sv=[i-^(i)./-h o",':>9oo9o.sin. (3/i'f — 2nt~\ -3e' — 2e — tjr') H- o",907384- sin. [^nt — 3nt-h^e — 3e — ^) — 0^545742. sin. (27if — nt-h2e — e — tsy) ^-4- i",2 17550, sin. [3nt — 27i'f-|-3£ — 2e' — tjr)) 10^294499. sin. [nt-h e" — "Cs) — i",425o25.sin. (27i^f — nt-h-^e" — e — ^) -h 0^753543. sin. (3 Ai"f — 2nt+-^e" — 2e — «) Io^ 7 2 9463. sin. [n'^t-he"" — ^) — 1^765962. sin. (yi^^f H- e'^ — 'Ct'') — io",i 19405. sin. [2n^t — nt+-2e""^ — e — ^cs)) _ (h-mM j o\259774.sin.(7i'f-f-e"— tĩT') j \ f^ ^j_j_ i\2 2o658.sin. (27i"f — nt-h'ie" — e — ^)y êr=z — (i-f(x'). 0,000001 3482. cos. [3nt — 27if-f-3e' — 2e — tjr) — (i-4-(x" ^). 0,0000029625. COS. (2/i" ^f — 7if-t-2e""^ — e — tjr). Inégalités dépendantes des carrés et des produits des excentricités, et des inclinaisons des orbites. Ces inégalités ont été calculées par les formules des n° 1, 2 et 4. Le double du mouvement de Mercure diffère très-peu de cinq fois le mouvement de Vénus, en sorte que 5 [n — w)-h 2/1 est à très-peu près égal à — n; il faut donc, par le n° 3, considérer l'inégalité dépendante de 6 m — ont. Lanjçie 3nt~nt, croît avec assez de lenteur, pour avoir égar ^ité qui en dépend. Pareillement, le mouvement de t ;j;àl à très-peu près à quatre fois celi "*"Ière V,

112 MÉCANIQUE CÉLESTE. peu de — n; il faut donc, par le
 n^{'''} 3, considérer l'inégalité dépendante de 2nt — an t. On trouve ainsi js _ (
 $r \{ 5^{217417} \cdot \sin. (S \sin f - 57i'f + 3\hat{E} - 5e' - 48\%i2io) i^{\wedge''''''\wedge'f^{\wedge}i+i\backslash 84464i} \cdot \sin.$
 $(3/i'f - /it + 3e' - e + 45\%i2i9) j - (i4 - fJt'').o'', 8i3i90 \cdot \sin.(2/i$

SECONDE PARTIE. LIVRE SIXIEME. 113 CHAPITRE IX.

THÉORIE DE VÉNUS. 28. Si Ton fait $\text{---} = a$, et si Ton nomme V la longitude géocentrique de Vénus, Téquation $Sr = \text{---} / (i - a \ll).SF$, donnée dans le numéro précédent, deviendra, relativement à cette planète. En prenant pour r et r les moyennes distances de Vénus et de la Terre au Soleil, on a par le n° 23, $a = 0,72333230$; en faisant donc $SV' = d zi \backslash$ on aura $hr = zp 0,0000007489$. On peut ainsi négliger les inégalités du rayon vecteur, dont le coefficient est au-dessous de $0^{\wedge},0000007$. Nous négligerons les inégalités du mouvement en longitude, au-dessous d'un quart de seconde. Inégalités de Vénus indépendantes des excentricités. $i5 \backslash 48 i2 70. \sin. [nt \text{---} Ji'tH-e" \text{---} e^{\wedge} -35^{\wedge} 2 60^{\wedge} 70. \sin. 2 (/i" f \text{---} nt-h-e' \text{---} \acute{e} \text{---} 22", 388478. \sin. 3 (/i" f \text{---} n7-+-e' \text{---} e \text{---} 3", 2 6i48i. \sin. 4 (Vf \text{---} nf-+-e \text{---} i \backslash o67587. \sin. 5 (7i'f \text{---} \gg'f-t-e o", 448709. \sin. 6 (7i*'f \text{---} n'f-he o^{\wedge} 2 1 52 o3. \sin. j [nt \text{---} n't-h e' \text{---} e o^{\wedge} lll75l. \sin. 8 (7l" f \text{---} nt-he" \text{---} e) l e\hat{i},'=(i-t-.fi^{\wedge}). \backslash$ TOME III. 15

The text on this page is estimated to be only 8.87% accurate

114 MÉCANIQUE CÉLESTE. (o',2 4662 9.sin. {n''t—nt-he"—
e)] I m. j — o",32 7ii9.siD.2 {n'''f — nt-he" — e') "^^*"'^*M—
o>33497.sm.3 {»i"f— n'i-He"— e') \ — o ,oo7i90.sin,4(/i t — »f-}-e — e j]
(8\92326o.sin. (n^^f_n'f-f-e"— e')\ I ir^ J — 2 ,70o7io.sin.2(/i t — nt-\-e
— e jr "^^'■^^ ^' — o',i2356i.sin.3(7i'7— /i7-+-e"— e') \ — O ,00000
i.sin.a(/i t — nf-l-e — e)] i 0^587881. sin. [nt — nt'+-e — e)\ (i-h(x^).| —
o",i2 3o2 2.sin.2(7i*'f — nt-^-e — e')[, — o^oo4o3 1 . sin. Z[nt — nt -t-
e*^ — e)) I — o,oooooooo3 1 45 -o,oooooooo38362. -o,ooooi65o5o. -
o,ooooi4oi55. 5r = (1 -h \l).1 — 0,000002 42 55. — 0,0000008873. —
o,oooooooo4o2i. — 0,0000002033. \ — 0,0000001094. -o,oooooooo3io6
-0,0000048903. (1-1- (x"^\)/ — 0,000002191 1. I — 0,0000001 155. \ —
0,0000000098. (If, 'ai" ' 71 t — /if-he — £ C0S.2 (nt — n f -4- e" — e
C0S.3 (nt — nt H- e" — e' Q^os. k[nt — nt-^-e — e' cos.oynt — /if-f-e —
e cos.6(7i"t — rît-^-e — e' COS. ^{nt — nt H- e" — e cos.8(n'f — nf-4-
fi"— e' n t — nt-he — e COS. 2 [n"t — n'f-h e" — e' cos.3(n'''f— n'e-he"—
e' cos.4(/i t — nt-^e — e

The text on this page is estimated to be only 10.66% accurate

SECONDE PARTIE, LIVRE SIXIÈME. 115 Inégalités
dépendantes de la première puissance des excentricités. $\hat{e}v' = (i-i-|*)$.
 $2', i472oi4.sm. (an'f — 7if-+-ae' — e — ts) I o'', 2 2 5944.sin.(n'f-|e' — -o')$
 $— o'.Sg^{ig}S. sin. \{n*f-4-e'' — -Bf''\} - o', 5o3442.sin.(Qn''< — n't-h^{e'} — e'$
 $— -©') - o'', 35oi 34. sin.(2R'f — n'f-h 2e' — e' — -Br'') - 4', 78256i.sin.$
 $\{3/i'f — 2n'fH-3e' — 2e' — ts' (i-f-(A')./H-i4', 7io902.sin.(3R'f — 2/i'f-+-3e'$
 $— 2e' — ts' — o'', 9243i4.sm.(4n'f — 3n'f-h4e' — 3e' — bt' - 2', 92484i.sin.$
 $(47i'f — 3/i'f-h4e'' — 3e' — «' — 2', 1 35o 1 1 . sin. \{5n''f — ^{nt-h^{e'}} — 4e'$
 $— i»' -h 6', 7794o5.sin.(5n''« — 4ra'$

116 MÉCANIQUE CÉLESTE. En vertu des rapports qui existent entre les moyens mouvements de Mercure, Vénus, la Terre et Mars, les quantités $an - Sn$, $an - 3n$, et $n - 3n'$ sont très-petites par rapport à n ; ainsi, par le $n^{**} 3$, les inégalités précédentes paraissent être les seules de l'ordre des carrés des excentricités, qui puissent être sensibles. Inégalités dépendantes des cubes et des produits de trois dimensions des excentricités et des inclinaisons des orbites. (Jt;' = $(n-(x).3^{656920} \sin. \{2nf - 5nfH - 2e - 5e'^{-33^{5852}}\}$). Inégalités du mouvement de Vénus en latitude. Les formules du $n^{**} 51$ donnent $o^{385i97} \sin. (n''f + -e'' - 0')$ $- o^{28o655} \sin. [2nt - nt-h'^e'' - e - 0') \wedge // A j-t-o'', 2 2 6675 \sin. (3/i''f - 27i'f-t-3e'' - 2e' - 0')l - o^{Q6^{6l5} \sin. \{5nt - ^{nt} - \{-5e'' - àe - e'\} \setminus \setminus - o^{2liiioS} \sin. \{2nt - nt-h2e - e'' - e'\} - (l-+-fl'') \cdot o^{458953} \sin. (3/l^f - 2nf + -3e'' - 26 - n'') \wedge - (i-f-fA'') \cdot o', 498i9o \sin. (27rt - nfH - 2e'' - e - n'')$, n''' étant ici la longitude du nœud ascendant de l'orbite de Mars sur celle de Vénus, et $11''^{\wedge}$ étant la longitude du nœud ascendant de l'orbite de Jupiter sur celle de Vénus.

SECONDE PARTIE, LIVRE SIXIEME. 117 CHAPITRE X.

THEORIE DU MOUVEMENT DE LA TERRE. 29. γ étant la longitude géocentrique de Vénus, et α étant supposé égal à $-\gamma$, F' sera fonction de α et de $v - v'$; on aura donc par le n° 27 $\bullet$ $J\alpha \sin. (v' - v + I - 2a \cos. (v' - v + \alpha))$ ce qui donne par le même numéro, lorsque dF est à son maximum, $Sa \, SV' = I - \alpha$ En ne faisant varier que r dans $5a$, on a $5a = \gamma$; partant α En supposant $5F = \pm i'$, et prenant pour r et r' les moyennes distances de Vénus et de la Terre au Soleil, on aura $eir' = \pm 0,000001 \, 035$. Si Ton nomme V , la longitude géocentrique de Mars, et si Ton fait $-\alpha = \alpha$, on aura par le n° 27, $3r' = r' \cdot \{i - \alpha\}$; en prenant pour r et r' les moyennes distances de la Terre et de Mars au Soleil, on a $\alpha = 0,65630030$, $r' = 1,5236935$ -

The text on this page is estimated to be only 12.96% accurate

118 MECANIQUE CELESTE. En supposant donc $hV''' = \pm i$ on aura $5/ = \pm 0,000001363$; on peut donc négliger les inégalités de $5/$, dont le coefficient es au-dessous de $\pm 0,000001$. Nous négligerons les inégalités di mouvement de la terre, en longitude, au-dessous d'un quart d< seconde. Inégalités de la Terre indépendantes des excentricités. • nt-he — f M. . ' n f H-e n t+-e If. , / n fH-€ If. , / n t-4-e -71 tn t■e 16^{329870} . sin. [nt — - i8",567565.sin.2(7i'f — nt -\-e — I — 2\294582.sin.3(nf — 5r -- fi^LL'^]~ o\695799.sin.4(/i'f — - ^'^f^_ o",28i5ii.sin.5(nï — — o",i32i i3.sin.6(n'f — — 0^067984- sin.7(7i' (— nt-{-e — \ — o",o37202.sin.8(nf — 1^31 8563. sin. [n't — -io",75oii5.sin.2(7i'^f — — 0^,664350. sin.3(7i'^f — (i-4-fA"). (— o',a5i3o.sin.4(w"« — — o',o48984.sin.5(n'''t — — o\oi993i.sin.6(n"f — — o\oo902 2.sin.7(7i'^f — 2i",78720i.sin. (n''^f — / . ir^] — 8",2 5388o.sin.2(n''^(— ^ f' M_ o\5i78o8.sin.3(ii"t — — 0^051076. sin.4(/i''^f — 1^35620ii.sin. [nt — (i-h(x'^).| — o\3^'i6ai.s\ n.2 {nt — — o\oi2 792.sin.3(ii"< — n t-he — nt-^e" — n't-i-e" — nt-i-e'" — nt-he — n t-he If. . tr n f+-e rt. , r n f+-e — n t-\-e — ff. , r nt-he — "XI f\ I 'A «) e) , «'XI

The text on this page is estimated to be only 12.05% accurate

SECONDE PARTIE, LIVRE SIXIÈME. o,oooooi5553 —
0,00000600 1 2 . COS. (lit — 7i"f -f- e Jh-o,oooo 171431. COS. i[nt — nt-
{-e '=(1 -h |x') . / -+ -0 , 0000027072. cos.3(n'f — nt-hé -1-0,0000009358.
cos.4(/i'< — nt-^e -}-o,ooooooo4o86. cos.5(w'f — nt-h e -+ -0,0000002008.
cos.6(n'f — nt-{ -é — 0,0000000478 -t-o,ooooooo5487.cos. [n't — nt-^e''' (1
-t-jx^^j-JH-o, 00000806 20. COS. 2 (w'^f — nt-he''' — 0,000000647 5.
cos.3(w'''f — nt-he''' — 0,0000001 643. cos.4(/i'^t — nt-^e'' — 0,000001
i58i -+ -0,0000 169384. COS. (n''^f — nt-h-e' -(i-f-(x''^).< —
0,0000090986. cos.2(n'^f — nt-he'' — o,ooooooo655o. cos.3(w''^f — nt-he
— 0,0000000704. cos.4(/i''^f — nt-i-e' — o,ooooooo58o {i-+(x').|-}-
o,ooooo 10337. COS. [nt — nt-^e''^ — 0,0000003859. COS.2 (nt — nt -+-
e*^ 119 ff\ À -ol Inégalités dépendantes de la première puissance des
excentricités. 0^,234290. sîn.(7i7-he' — 13^) 1^ — o\4oo233.sin.(2n'f —
nt-^ 3e' — e'—'cr'') 0^448083. sin.(2n''f — 7i'f-h is'' — e—^)] o\52i547.sin.
(2n''f — nt-^^e''* — e'— tir) — ii\3 18247. sin.(3Ai'''f—2w'r-h3e— 28—
w') 3\66i696.sin.(3n'f— 2?i'f^-3f'— 2 e— w'i 7^23l346.sin.(4/l't— 3/i'ï-
H4r— 3e— 10^) 2^2 29704. sin.{4/i''f — 3?i'ï-i-4ê'' — ^3e' — ts')
o',6678o2.sin.{5/i^f— 4ni-H5f— 4e' èv'= [i-^fi'Y I r »

The text on this page is estimated to be only 7.04% accurate

120 MECANIQUE CELESTE. 3",38i49o.s 6',5977ii.s o",269754-
s; + (i+(x"))./-t- 2",o43o57. s: j o\32 02 4o.S 2^491082.5; 1 — o",4i64o5. S /
o",932384.s i — 7",839i48.s I — 4\6o5o75.s (i+(jt"))./-f. 1^^,871601.8: —
1^677049.8 — o",459646.s ^ — 0^289022.8 ('+C')] — 1",l 10867.8 —
o",46837i.8 (m. If. . iff If if\ \ 2nt — nfH-2e — e — ^) \ (m. Im t nf If fif\
211 t — n (-f-2e — e — tzT) n.(3n'f— 27i'f-+-3e"— 2e'— tar") n. (3n'^f—
3/i'7^—3e"— 2e"— ^)) n. {^n""t—3n""t^lie"—3e"—^") n. [hn't — Snt-h-^e"
— 3e" — 'ts""") n. [STl't—^nt-hSe"—^e—^) n f-+-e — 'CT j (ir. ffx . '^ If If\
271 t — 7if-t-2e — e tST] (/F . n^ , iy If jy \ 271 t — 7ifH-2e — e — 'cr)
/o ir. If 1. , O f^ If t^W n. (071 t — 27ifH-oe — 2e — «)\ (n. tr , If IV ff\
2nt — n f-f-2e — e — tsi J (n. IV . , n f^ IV \ int — 71 fH-2e — e — tar) n
t-he — 'cr j) (V, If. , y ff n \t ^ int — 7ifH-2e — e — tar j) -
o,ooooo3o439.co8.(37i"f— 27i'f+3e"— 2e'--W)j hr= (i+(x').| —
o,ooooo498i5.co8.(47i"f— 37i7+4e"— 3e'— «")' [-ho,oooooi5895.co8.
(47i"f— 37i7+4e"— 3e'— «')] (— o,ooooo3o4 1 o. C08. (271""^— 71""^+
2 e""^— e"— 'cy*) + (1 + (x""^).|+0,000001 2662. COS. (271""f— 7i""f+2e'^
— e"— «") , (■—0,00000 18101 .008.(371""*— 27i""f+3e""^— 2 e'^—'^^)]
Inégalités dépendantes des carrés et des produits des excentricités, et des
inclinaisons des orbites. = (i+fi').3\473997.8in.(57i"f-37i'f + 5e-
3e'+23%3759) , «rv j 3\o67702.8in.(47i"f-27i"f+4£ -2e"+75%35o6)) + li+f^
JLi;o85790.8in.(57i'^f-37i'

SECONDE PARTIE, LIVRE SIXIÈME. 121 En vertu des rapports qui existent entre les moyens mouvements de Vénus, la Terre et Mars, $5n - 3$, et $n - 2n$, sont de petits coefficients; en sorte que, par le $n^{**} 3$, les deux premières de ces inégalités sont les seules de cet ordre qui doivent être sensibles. On a cependant calculé la troisième, parce que $3n - bn$ n'étant à peu près que la moitié de n , il était utile de s'assurer que cette inégalité n'acquiert par cette considération qu'une valeur très-peu sensible. Inégalités dépendantes du cube et des produits de trois dimensions, des excentricités et des inclinaisons des orbites. $Sv' = (1 - t - (1).o^{215787}.sin. (/i(- nt' + -e - 4e' - 4 - 2i\%i52 2))$. Inégalités périodiques du mouvement de la Terre en latitude. On a trouvé par les formules du n° 51 du second livre $^{\wedge}'\blacksquare^{\wedge}f^{\wedge}i - Ho\backslash 723oi2.sin.(4/i''f - 3)\prime(- + - 4e - 3e' - 0')j - f - \{n - fi''\}.o^{\wedge}5o8343.sin.(Q/l''f - /i'\ll - 4 - 2e'' - e^{*}\wedge - r)$. Inégalités de la Terre dépendantes de l'action de la Lune. 30. Si l'on nomme U la longitude de la lune vue du centre de la terre, et v'' la longitude de la terre vue du centre du soleil; si Ton nomme encore R le rayon vecteur de la lune, et r , celui de la terre; enfin, si Ton désigne par m et M les masses de la lune et de la terre, et par s la latitude de la lune; on a vu dans le chapitre IV que rinégalité du mouvement de la terre en longitude, produite par Faction de la lune, est — - $jr^{\wedge}. jR. sin. (U - v'')$. TOME III. 16

122 MÉCANIQUE CELESTE. L'inégalité du rayon vecteur de la terre est $m R \frac{1}{r} \frac{dt}{dt} - \frac{1}{2} \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{1}{2} n^2$ étant le moyen mouvement de la lune; on a donc $m \frac{1}{2} n^2 = \frac{1}{2} M + m n^2$. Suivant les observations, $\frac{1}{2} = 0,0748018$; ce qui donne $m \frac{1}{2} M + m 59,6'$ et par conséquent $m \frac{1}{2}$. Nous supposerons ensuite la parallaxe horizontale du soleil égale

SECONDE PARTIE, LIVRE SIXIÈME. 123 à 27',[^], et la parallaxe moyenne horizontale de la lune égale à 10661"; d'où Ton tire $R = 27,27 \sim 10661'$ et conséquemment, $\hat{v}'' = -27 \sqrt{2} 524 \sin. [U - v'']$, $\hat{r} = -0,000042808 \cdot \cos. [U - v'']$. En prenant ensuite pour s la plus grande inégalité de la lune en latitude, que nous supposerons égale à $5723 \sin. (f/ - 0)$, $U - O$ étant la distance de la lune à son nœud ascendant; on aura $-2^{4499} \sin. \{\hat{^} - \hat{^}\}$ pour l'inégalité du mouvement de la terre en latitude : il faut l'ajouter à la valeur précédente de S , pour avoir la valeur entière de Ss . Cette valeur entière, prise avec un signe contraire, donne les inégalités du mouvement apparent du soleil en latitude. Elle influe sur l'obliquité de l'écliptique, conclue de l'observation des hauteurs du soleil vers les solstices : elle influe encore sur le moment de l'équinoxe, conclu des observations du soleil vers les équinoxes, et sur l'ascension droite et la déclinaison des étoiles, déterminées par leur comparaison avec le soleil. Vu la précision des observations modernes, il est nécessaire d'y avoir égard. Il est facile de voir que la déclinaison apparente du soleil en est augmentée de la quantité $Ss \cdot \cos. (\text{obliquité de l'écliptique}) \cos. (\text{déclinaison du soleil})$ et que son ascension droite apparente en est augmentée de la

124 MÉCANIQUE CÉLESTE. il faut donc diminuer de ces quantités les déclinaisons et les ascensions droites observées du soleil, pour avoir celles qu'on observerait, si la terre ne quittait point le plan de l'écliptique. Des variations séculaires de Torbe terrestre, de Féquateur et de la longueur de Tannée. 31. Nous avons donné dans le n° 26 les variations séculaires des éléments de l'orbe terrestre; mais l'influence de ces variations sur les phénomènes les plus importants de l'astronomie nous engage à les déterminer avec plus de précision, en ayant égard au carré du temps, t exprimant un nombre quelconque d'années juliennes écoulées depuis 1760, on a trouvé, par la méthode du n° 56 du second livre, et en adoptant les valeurs des masses des planètes données dans le n° 21, le coefficient de l'équation du centre de l'orbite terrestre égal à $2E - f. 0'',579130 - f^*.$
 $0'',0000207446$; $2E$ étant ce coefficient au commencement de 1760, où t est nul. On a trouvé pareillement la longitude sidérale du périhélie de l'orbe terrestre égale à $cyVf.36',881443-4-r.o\0002454382$. Enfin, les valeurs de p'' et de q'' pour un temps quelconque t , ont été trouvées respectivement égales à $f. 0^{\wedge},236793 - t-f^*.o'',0000665275, - t. i\546i56-j-f^*.$
 $o\0000208253$. Nous avons présenté dans les n° 6 et 7 du cinquième livre les formules de la précession des équinoxes et de l'inclinaison de l'équateur, soit à une écliptique fixe, soit à l'écliptique vraie; mais ces formules supposent que la valeur de p'' est sous la forme

1 SECONDE PARTIE, LIVRE SIXIÈME. 125 S.c.sin. [gt-hë), et que (j" est sous la forme S.ccos. [gt-hS). On a vu dans le n° 59 du second livre que les expressions finies de p" et de q" se présentent sous ces formes, et l'on peut déterminer, par la méthode exposée dans le n° 56 du même livre, les valeurs de c, ^, ê, etc. mais cela suppose les masses des planètes exactement connues, et Ton a vu l'incertitude qui existe encore à cet égard. Ainsi, au lieu de faire le calcul pénible que cette méthode exige, il est préférable de le simplifier, en n'étendant les résultats qu'à mille ou douze cents ans avant et après l'époque de lySo; ce qui suffit aux besoins de l'astronomie. On pourra facilement recommencer ces calculs à mesure que le développement des variations séculaires fera mieux connaître les masses des planètes. Donnons aux valeurs de p" et de g" les formes suivantes comprises dans celles-ci, S. c. sin. (^f-i- ê), 2.C.C0S. (flft-l-ê), c.sin.ê — c.cos. ê. sin.^f — c. sin.ê.sin.(^f+--| , C.C0S.6 — c. COS. ê. cos.gt — c.sin.ê. cos.lgt-\ — J , ir étant la demi-circonférence dont le rayon est l'unité. Si l'on développe ces deux fonctions par rapport aux puissances du temps t, on aura, en les comparant aux séries précédentes, c g. COS. ê= — o^îSôygS , cg. sin.ê= — i\546i56, cg*. COS. ê = o%oooo4 1 65o6 , cg*. sin. ê = o^ooo 1 33o55o ; d'où il est facile de conclure ^=—1 1 1^,978, ^= — 54^,7845, c. sin. €=17967^0 , c. COS. ê=i346\2i. Maintenant, on a vu dans le n° 6 du cinquième livre que la pré

The text on this page is estimated to be only 26.49% accurate

126 MÉCANIQUE CÉLESTE. cession >|/ des équinoxes par rapport à Técliptique fixe de 1760 est, en ne considérant que les variations séculaires, $It^{-1} Ij - 1 j.tang. A^{-} + -cot. A^{-} .y^{-}.sin. (/f-4-ê)$. Pour avoir $S.c.sin. (/f-+-ê)$, il faut, par le n° 5 du même livre, augmenter dans $S.c.sin.$, $\{9f-hê\}$, $Tan^e gt^{-} -ê$, de It , ce qui donne $f=g-\{l\}$; on aura ainsi $S. c.sin. (/f-+-ê) = c.sin. (/f-hë) - c. cos. ê. sin. (^f-4-/f) - c. sin. ê. sinAgî-i-lt-h -J$; par conséquent, $>|/ = /i+?+c. cot. /t.sin. (/f+ê) \sim T - .c.cos.ê.jcot. ^ - 7-^ - , . , .c.sm.6. ^+9 coi. h - T^| - T.tang. hLsin.lgt+lt+ -i$. En nommant ensuite V l'inclinaison de Téquateur à Técliptique fixe de 1760, on aura, par le n° 6 du cinquième livre, $F=i - S.y.cos.(/f-4-ê)$. Pour avoir $S.c. cos. (/H-ê)$, il faut, par le n° 5 du même livre, augmenter dans $S.c. cos. (^i-f-ê)$, $Tangle^f-f-ê$, de It ; on aura ainsi $S. c. cos. \{y«-f-ê\} = c. COS. (/f-hê) - c. COS. ê.cos. [gt^{-} -lt) - c.sin. ê.cos. (^t-l-Zf-4--|$; Partant, $V=h - c.cos. (/f-hê)H$
 $\hat{i} - .c.cos. ê.cos. (^f-H/) H - r-T-'C.sin.ê.cos.l^t-h/fH - I$.

SECONDE PARTIE, LIVRE SIXIÈME. 127 >|/' expiimant la
précession des éqiiinoxes par rapport à Técliptique vraie, et F étant
Tinclinaison de Téquateur à cette écliptique, on trouvera, par le n*" 7 du
cinquième livre, $t' = lt + ^+ T^ - . c. \text{COS. S. cot. } h + j . \text{tang. AJ. sin. } [gt + lt) + ,_f / . c. \text{sin. } \hat{e}. \text{jcot. } A + -T - 7. \text{tang, } h \setminus . \text{sin. } |^f + lt + - \setminus , V = h \sim r^ , c. \text{cos. } \hat{e}. \text{COS. } [gt + lt) - .^ , .c. \text{cos. } \hat{e}. \text{cos-} f^f + Zf + H. \text{L'expression de } >f' \text{ donne } dt = l + cg. \text{cos. } \hat{e}. \text{cot/} t + -j . \text{tang. } A | . \text{COS. } [gt + lt) + cg. \text{sin. } \hat{e}. \text{jcot. } h + . , . \text{tang. } h \setminus . \text{cos. } \{gt + lt + - \setminus . \text{En retranchant de cette valeur de } -t - , \text{lorsque } t \text{ est nul, sa valeur à une autre époque, la différence réduite en temps, en raison de la circonférence pour une année tropique, donnera faccroissement de Tannée tropique depuis 1 760. On voit par cette formule, et par la difflÉrentiation de l'expression générale de } \setminus /' \text{ donnée dans le } n^ 7 \text{ du cinquième livre, que l'action du soleil et de la lune change considérablement la loi de la variation de la longueur de l'année. Dans les hypothèses les plus vraisemblables sur les masses des planètes, l'étendue entière de cette variation, ainsi que retendue entière de la variation de l'obliquité de l'écliptique à Féquateur, sont réduites à peu près au quart de la valeur qu'elles auraient sans cette action. Suivant les observations, on a, en 1 760, } -t - = 1\ 54 \setminus 63; \text{ mais par ce qui précède on a à cette époque } k - TT = / - t - c^ . \text{COS. } \hat{e}. \text{jcot. } Ah - t - . \text{tang. } a \setminus$

128 MECANIQUE CELESTE, on a donc l-hcg. COS. $\hat{e} \cdot \hat{j} \cot. h - h \cdot \hat{j} \text{---} \text{tang. } h \backslash = 1 \text{ } 5A',63$; équation dans laquelle on peut, en négligeant le carré de c, substituer pour h l'obliquité de Técliptique à l'équateur en i yôo. Cette obliquité^ suivant les observations, était ^ors égale à $\hat{a} \hat{o} \hat{^} \hat{o} y g \hat{o}$; d où l'on tire $\text{---} = i55 \backslash 542$. On a ensuite, en 1760, $V = h \text{---} 7 \cdot 2 \text{---}$, c. COS. $\hat{e}$; $1 + 9$ ce qui donne $A = 26^\circ 07' 96'' - 3A60'',3$. Au moyen de ces valeurs, on trouve $\text{---} \text{---} = M55',5A2 + 2^\circ 92883 + 42i8'',3 \cdot \sin.(f.i55',542 + 95^\circ 2389) - 7 \text{ } 1289^2 \cdot \cos.(f.i \text{ } oo \backslash 757) - i \text{ } 6621^1 \cdot \sin.(^43^56 A)$, $K = 26^\circ 07' 96'' - 3460',3 - i8oi7'',4 \cdot \cos.(f.i55 \backslash 542 + 95^\circ 2389) + 48o6 \backslash 5 \cdot \cos.(t. 43 \backslash 56A) - 2 \text{ } 7736 \backslash 3 \cdot \sin.(f. 100^ \backslash 757)$, $\text{---} \text{---} = m55'',5A2 + 2^\circ 92883 - 29288 \backslash 3 \cdot \cos.(moo',757) - i3374' \gg 2 \cdot \sin.(f. A3^564)$, $r = 26^\circ 07' 96'' - 3460 \backslash 3 \cdot \text{ii} \cdot \cos.(f.A3 \backslash 564) \}$ $\text{---} 9769^2 \cdot \sin.(f.ioo'',757)$. On pourra, par ces expressions, déterminer la précession des équinoxes et l'obliquité de l'écliptique, dans l'intervalle de mille ou douze cents ans avant et après l'époque de 1760, en observant de faire t négatif pour les temps antérieurs à cette époque : on pourra même les étendre aux observations d'Hipparque, vu leur imperfection.

SECONDE PARTIE, LIVRE SIXIÈME. 129 La valeur

précédente de λ donne pour l'accroissement de Tannée tropique, à partir de
 $\lambda_{So} - \sin^{-1} \cos(t43', 564) \} - \sin^{-1} \cos(t43', 564) \} - \sin^{-1} \cos(t43', 564) \}$ — $\sin^{-1} \cos(t43', 564) \}$ Sa 7. sin. [t.
1 00", 7 67) ; d'où il suit quau temps d'Hipparque, ou cent vingt-huit ans
avant l'ère chrétienne, Tannée tropique était de 1 2^, 326 plus longue qu'en
1760; Tobliquité de Técliptique était plus grande alors de 2 83 2^, 2 7. Une
époque astronomique remarquable est celle où le grand axe de Torbe
terrestre coïncidait avec la ligne des équinoxes; car alors Téquinuxe vrai et
Téquinuxe moyen étaient réunis. Je trouve par les formules précédentes que
ce phénomène a eu lieu vers Tan ^ooA avant Tère chrétienne, époque où la
plupart de nos chronologistes placent la création du monde, et qui, sous ce
point de vue, peut être considérée comme une époque astronomique. En
effet, on a pour ce temps, $t = -6764$; et Texpression précédente de λ
donne $\lambda = -87^{\circ} 8530$: c'est la longitude de Téquinuxe fixe de 1760, par
rapport à Téquinuxe d'alors. L'expression précédente de "cs" donne pour la
longitude du périégée de Torbe terrestre, ou de Tapogée solaire, comptée de
Téquinuxe fixe de 1750, $W = 89^{\circ} 1700$. Cette longitude, par rapport à
Téquinuxe de Tannée 4004 avant Tère chrétienne, était donc $1^{\circ} 3170$;
d'où il suit que Tinstant où la longitude de Tapogée solaire, comptée de
Téquinuxe mobile, était nulle, précède d'environ soixante-neuf ans Tépoque
où Ton fixe la création du monde. Cette différence paraîtra bien petite,
TOME 111. 17

130 MÉCANIQUE CÉLESTE. si Ton considère l'inexactitude des expressions précédentes de $\frac{1}{t}$ et de Ct , lorsqu'on les rapporte à un temps aussi éloigné, et l'incertitude qui subsiste encore, soit relativement au mouvement des équinoxes, soit à l'égard des valeurs que nous supposons aux masses des planètes. Une autre époque astronomique remarquable est celle où le grand axe de l'orbe terrestre était perpendiculaire à la ligne des équinoxes, car alors le solstice vrai et le solstice moyen étaient réunis. Cette seconde époque est beaucoup plus rapprochée de nous, et remonte à peu près à l'année 1260. Si l'on suppose, en effet, $t = -500$, les formules précédentes donnent $100^{\circ} 18'$ pour la longitude de l'apogée solaire, comptée de l'équinoxe mobile; ainsi l'instant où cette longitude était de 100° répond à fort peu près au commencement de 1249. L'incertitude des éléments du calcul en laisse une, au moins d'une année, sur ce résultat.

SECONDE PARTIE, LIVRE SIXIÈME. 131 CHAPITRE XI.

THÉORIE DE MARS. 32. On a par le n° 29, dans le cas du maximum de hV'' , et étant égal à $-tt$. Si Ton ne fait varier que r dans a , on aura En prenant pour r et r' les moyennes distances de la Terre et de Mars au Soleil, et supposant $hV'' = \pm i$ on aura $Sr'^{2p} 0,000002076$: ou peut donc négliger les inégalités du rayon vecteur r' dont les coefficients sont au-dessous de $\pm 0,000002$. Nous négligerons les inégalités du mouvement de Mars en longitude, au-dessous d'un quart de seconde d'inégalités de Mars, indépendantes des excentricités. $o',644302.\sin. [r\dot{t} - nt - e' - e''] \dot{o}i;'' = f, .\gg m) - 0^{\wedge}76897. \sin.2(/i7 - n''f - \text{£}' - e'')^{\wedge}{}^{\wedge}{}^{\wedge} - o;'\dot{o}i543i.\sin.3(Ai'f - 7i'^{\wedge}\ll - H\text{£} - e'^{\wedge}) - o ,004222. \sin.4(^f - n f - 4 - e - e)]$ 17.

The text on this page is estimated to be only 6.99% accurate

132 MECANIQUE CELESTE. r 21,070470.810. [nt — n f-he —
e] — 2',98978o.sin.2(/i"«— n^f-f-e"— e") — o',564852.sin.3(n"f— «"f-f-
e"— e") -{-(iH-ft").! — o',i 79760. sin.4(n"t—/i"'f-|—e"—e") — o
,07i294.sm.5(7i f — n fH-e — e) ~ o',o3i909.sin.6(/i'f— 7i"f-he"— e'') (i +
f^T -Ai\96933o,sin.2(7i"^f — n'^f-f-e"^ — 1^ - 3\642865.sin.3(n"f—
Ti'^f-he"— e") - o",5332 36.sin.4(/i"^f — nt-^—e'" — e')i - o",io2
363.sin.5(7i"^f — nt-he'" — e*)! - o ,041427. sin-o(/i t — /if-he — e j;
(i+f.-). h/= (n-(x')). 4\i47390.sin. [nt — nt-\-e i\369345.sin.2(n7— 7i"f-he'
o^07i2 6o.sin.3(n*^f — nt-^é"o\oob^^.sm.li[nt — nt-{—eH' 0,0000016104
0,0000021947.008. [rît — nt-^e — e'') 0,0000001972. cos.2(/i'f — nt-\- e
— e") o,oooooooo4i8.cos.3(7i'f — n't'^e — e") o,ooooo2386o —
0,0000187564.005. [nt—nt-he—e") -f- 0,0000052387. cos.2(n"f — n't-he"
— e") [i-h(i).\ -i- 0,00000 11 969. cos.3(7i"f — nt-^e' — e'') -1-
0,0000004169. cos.4(/i" f — n't'-he" — e*)! +-0,0000001733, cos.S[nt —
n't-\-e" — e) -f-0,0000000796. cos.6[nt — ift-h e" — e*^)

The text on this page is estimated to be only 12.08% accurate

SECONDE PARTIE, LIVRE SIXIÈME. — 0,0000066174 -4-
0,0000784371.008. $[n'^t — «f-f-e' — 0,0000679436. \cos.2\{n''f — v^t-he'$
(i-t-f*))./ — 0,0000069390. $\cos.3(n''f — re^f-f-e' — 0,0000010930.$
 $\cos.4(«^f — ift-he" — 0,0000002004. \cos.5\{n''f — n't+- e" —$
0,0000000620. $\cos.6(n''f — n^f-f-e' 133 — OjOooooSiyS$
+0,00000^7062.008. $[nt — rTt'^-e' — e''') [i-\backslash k)\grave{A} — 0,000002 32 76.$
 $\cos.2(n''f — nt-\backslash e — e!''') — 0,0000001 3 99. \cos.3(w'^f — nt-he — e''') —$
0,0000000 1 2 5. $\cos.kint — nt'+- e — e''')$ Inégalités dépendantes de la
première puissance des excentricités. $hv'' = (i+ft'). 3',34i i89.siii.(2K''f — n'f-$
+- 26" — e' — «r'')l o',779586.sin.(2n''t — n'«-|-2e" — e' — «y')j .(14-f*),
2',i5632 5.5in. $\{n''-i-e' — tsT) \backslash — o',4i52i5.8in.(2n''f — n'f-i-2e' — e' — o')$
— 3i'',2 i8207.sm.(2/i'''f — n'f-h2e" — e'-^sr") -hi5',8i i92o.sin.(2/i'''« — n'f-
i-2e''' — e' — «y') — 2o',i 1 i96o.sm.(3n'''f — 2R''t-i-3e" — 2e' — -or'')\} -4-
2',6iii22.sin.(3/i'''r — 2n''(-l-3e" — 26' — ©*) H- 2',o9 1 81 5. sm.(knt
— 'in't-\- 46" — 3e' — «T) — o',2443o6.sin.(4n'''f — 3n''f-f-4e" — 3^" — «y')
-h o',37oi4i.sin.(57i'''f — 4R''«-f-5e" — 46" — tJ*)

The text on this page is estimated to be only 5.27% accurate

134 MÉCANIQUE CELESTE. (i + f[^])i6",945362.s —
i6\56483o.s — 72^692383. s: -f- 8",oo3396.s -h 7\o8859o.s: — 1 i\oi5o46.s
-h o\67947i.s — 1^088395.8 — 8\853862.s' — o\63i233.s -f- 5",7i9628.s -h
o\6i i53o.s 271 t — n t+ie — e — ^) 2/1 f — 71 t+2f — e — ^) n.(on (—
2n(+3e -2e — -oy) D.(3n'7-2n'''f + 3e"-2e"-Br''') n.{àn'''t-Sn't+/ie'-'de'-'a")
(m. IV, , m ir m \ 2n t — n f+2e — e — tzt) n.(2n^f-/i''t+2e'^-e"-w") n.
(3/i''f-2/i'7+3e"-2e"-«")l n.(4w'^i — 37i''^t4-4e'*- 3e''^ — 'ct''') 0^443697.
sin.(7i''f + e' — 'CT''') - 2",i5ioo5.sin.(/i'^t+e'^ — 'Ct'^) I — o\3og^oi.sin.
[3nt--iTft + 3e'^—2f" — ^'^) \— o\48390i.sin.(2/i''f-/i'^f+2e"-e'^-'CT") /1
èr'= {i-\-(i').\ 0,0000044700. cos.(27i''f — nt-h2e''' — e' — ts'''))
-0,000000971 3. cos.(27i'''f — nt-h^e" — e' — 7s')\ . — 0,000002 2 865.
cos.(/i''f -h e' — "ts") I-ho,ooooo86337.cos.(2/i''f-/i''f+2e"-e'-'CT") —
0,0000031269.005.(2/1"*— 7i''fH-2e'^— e"— 'Ct') , , . —
o,oooo2oo33i.cos.(3/i''f — 2/i''f+3e"— 2e"— 'Ct')] j-+-o,ooooo2 5454.cos.
(3/i'^— 2/i''(+3e'^— 2 e"— tar"))! |-ho,ooooo3o863.cos.(4/i'^f—
3/i'7+4e'''— 36"— 'cy'*)] \-f-o,ooooo4o2 39.cos.(4/i'''t— 3/i''f+4e'^— 3e'—
'or');'

The text on this page is estimated to be only 15.10% accurate

SECONDE PARTIE, LIVRE SIXIEME. 135 / 0,0000035825.
 $\cos.[n''t + e'' - W] - 0,00001\ 07986. \cos.\{7i''^{\wedge} + e''^{\wedge} - W\}$
 $ho,000003i43i.\cos.\{n''' + e^{\wedge} - \wedge'''\} - 0,0000699^{\wedge}70. \cos.(2n''^{\wedge}f - i'''f + 2$
 $e'^{\wedge} - e'^{\wedge} - 'cr''') / jrx\ I - 1 - 0,0000069892. \cos.(2W^{\wedge}f - 7l'^{\wedge}f + 2\ e''^{\wedge} -$
 $\pounds^* - 'CT'^{\wedge}) + ii + f^{\wedge} \wedge^1 - ^0,00001\ 14352. \cos.(37i''f - 2ri''f + 3e'' - 2e'^{\wedge} - 'CT''')$
 $- 0,0000i6974i.\cos.(3/i''^{\wedge}f - 2]n^*f + 3e'' - 2e''' - 'ct'') - 0,000002\ 0307.$
 $\cos. (4w''^{\wedge}i - 3/i^*f + 4e''^{\wedge} - 3\ e' - 'ct''^{\wedge}) - 1 - 0,0000087307. \cos.(27i'^*t -$
 $n''^{\wedge}f + 2e''' - e''^{\wedge} - '\odot''') \setminus - 0,0000063983. \cos.(3/i'''f - 27i'^{\wedge}f + 3e''' -$
 $2e'^* - 'ct''') - (i + fi'').\ 0,000006\ 1906.003.(2\ 7i''f - n''t + 2\ e'^{\wedge} - c'^{\wedge} -$
 $'CT''').$ Inégalités dépendantes des carrés et des produits des excentricités et
des inclinaisons des orbites. $3/_ = (i + ff').\ 2\ 1^*^{\wedge}29612\ 1.\sin.(3/l''(-nt4 - 3e'' -$
 $e' + 72^{\wedge}7083)\ 4\ 365840.\sin.(3n''f - n'f + 3e'' - e'' + 8i\%33i8)\ i3\ 49044i.\sin.(4n''f -$
 $2n'f + 4e'' - 2e' + 75\%35i8)[\ 8',2\ 2\ 8086. \sin.\{5nt' - 3nt + 5e'' - 3e'' + 75\%98\ 1\ 4)\}$
 $(- i\ 428330.\sin.(n''f + n''f + e'' + e'' - 59\%0333)] + (i + f;t'^{\wedge}))\ 4^{\wedge},^{\wedge}57\ 166. \sin.$
 $(2/i''f + 2e''' + 66\%7969)\ (-4 - 3\ 998i74.\sin.(/i''f - 7i''f + e'' - e\%60\%769i)]$ La
dernière de ces inégalités peut être réunie à l'inégalité indépendante des
excentricités $(i - fi'').75\ 434700.\sin.(/i'' \ll - n''f - he'' - e'');$ leur somme
donne l'inégalité $(i - 4 - fA'').\ 77^{\wedge}81392\ i.\sin.(n'f - 7i^{\wedge}f - e'' - e''' - h2\%6702).$

The text on this page is estimated to be only 25.30% accurate

136 MÉCANIQUE CÉLESTE. $5r'^{\wedge} = \text{---} (i+(x').0,000002$
 $346i.\cos.(3/i''f\text{---} w f+3e''\text{---} e'+7i\%99o4) 0,000005o4o3.\cos.$
 $(37i'^{\wedge}r-/i''f+3e''\text{---} e^{*'}+8o\%87o4) j + (i+(x''). 1-4- 0,00000702 48. \cos.$
 $(4n'^{\wedge}f--2n''t+4e'^{\wedge}-- 2 e''--65\%4o42 ^ 0,0000075o32.\cos.(5n'''f\text{---}$
 $3ii''f+5e^{*'}\text{---}3e'+76\%o64i D I ty. ij 0,0000080002. \cos.$
 $(2n'^{\wedge}f+2e''' +66\%9975)) + (i+f^{\wedge} ^{\bullet}j+o,000004i488.\cos.(M''f-n''f+e''-$
 $e''+65\%72i4)r$ La dernière de ces inégalités peut être réunie à l'inégalité
indépendante des excentricités $(i-f(x''). 0,0000784371. \cos.(/i''' \ll \text{---} 7i''f H-$
 $e''\text{---} e'''');$ leur somme donne l'inégalité $(H- jx''^{\wedge}) . 0,0000806432 . \cos.$
 $[n'^{\wedge}t \text{---} n't \text{---} e''^{\wedge} \text{---} e'-h 2\%8 1 3 3) .$ Les inégalités du mouvement de
Mars en latitude sont très-peu sensibles. En désignant par U''' la longitude
du nœud ascendant de l'orbite de Jupiter sur celle de Mars, on trouve o
 $,291339. \text{sm.}(/i f-t-e \text{---} n) / -\} -i ,244607. \text{sm.} (271 t \text{---} n t\text{---} 2e \text{---} e \text{---} n))$
\

SECONDE PARTIE, LIVRE SIXIÈME. 137 CHAPITRE XII. *

THÉORIE DE JUPITER. 33. L'attraction réciproque des planètes entre elles et sur le soleil est principalement sensible dans la théorie de Jupiter et de Saturne, et nous allons en voir naître les plus grandes inégalités du système planétaire. L'équation $5r^{\wedge} = - C.f\ddot{i} - aM.Sr r^{\wedge}$ trouvée dans le numéro précédent, relativement à Mars, devient pour Jupiter $5r'' = - \wedge$. (i— a»). 5r. Si l'on prend pour r et $r''^{\wedge}$ les moyennes distances de la Terre et de Jupiter au Soleil, et si l'on suppose $SY''' = \wedge \pm . \backslash \backslash$ on aura $5r''^{\wedge} = z f z$ 0,0000409226; on peut ainsi négliger les inégalités de dr'' au-dessous de :fo,oooo4i. Nous négligerons les inégalités du mouvement de Jupiter en longitude et en latitude, au-dessous d'un quart de seconde. Inégalités de Jupiter indépendantes des excentricités. $3^{\wedge}, - f\ddot{i} . ., 'm1 o'', 372 9Ai, sin. (n'f - n''f - e' - e''))^{\wedge} i-j _o > oo266.8 in. 2(n^{\wedge}f - n'^{\wedge}f^{\wedge}e^{\wedge} - e'') j$ TO& if m. 18 t

The text on this page is estimated to be only 16.31% accurate

138 (i, -fx') (1-4- f.-). 5r': (^-f')^ MECANIQUE CELESTE. ' 255",59i70o.sin. [nt — n^t-i-e" — e'^)» — 63o\883870.sin. 2 (zi^f — n^^t-he" — e") — S2\6gooi3.sm.'6[nt — 7i'7-f-e*^ — e") — 12 ,1 18299. sin.a(/i f — n t-h^ — e) — 3^736337. sin.5(w^(— /i''^f-he' — e") — i\32 2 283.sin.6(7i*^f — rî^t-^e — e") — 0^627541. sin. 7 (/l^f — n^t-^e' — e") — o",2 34833.sin.8(n^f — w^f-H-e'^ — e") \ — o\i2 7385.sin.9(/i"f — n^t-^e^ — e") ; ,246102. sin- [n t — n f-f-e — e) — 1 \3 1 88 1 5. sin.2 [n't — n""t -h e' — e") — o",i36o65.sin. 3(7^7 — n^t-^e" — e") \ — o\oi8447.sin.4(w"f — n^^i-he*^ — e") — 0,000062 o586 - + -0,0006768760.008. [nt — 7i'7-l-e'^ — e") — o, 0028966200. cos.2(n^f — n""t-{-e' — e") — O,ooo3o2i367.cos.3(/rf — n^t-^e' — e") — 0,000078261 4. cos.4(7i'^< — 7i''^fH-e^ — e^) — 0,0000258962. cos.5(7i7 — w" ^f-f-e'^ — e") — 0,0000094779. cos.6(/i^f — n^f-he" — e") — 0,0000037660. 005.7(7i'^^ — n^t-{-e — e") — 0,00000 14781. COS.8 (/l^f — n^t-he' — e*) — o, 0000004799. cos.9(ii"f — n"t-+-^ — e")/ Inégalités dépendantes de la première puissance des excentricités. Plusieurs de ces inégalités étant considérables, il importe d'avoir les variations de leurs coefficients : nous allons donner celles des coefficients qui surpassent cent secondes dans l'expression de hv\ Les coefficients des inégalités dépendantes de 'cr" ont e^ pour multiplicateur; en nommant donc Ae"" Tun de ces coefficients, sa variation sera Ae\ — tf-; et Ton verra dans la suite qu'en

The text on this page is estimated to be only 16.86% accurate

ov = SECONDE PARTIE, LIVRE SIXIÈME. 139 ayant égard aux quantités dépendantes du carré de la force perturbatrice, et dont nous avons donné les expressions analytiques dans le n^o 13, on a $5i''^* = f$. 1^{016936} . Pareillement les coefficients des inégalités dépendantes de cr^* ont e''' pour multiplicateur; en nommant donc $Be^$ l'un de ces coefficients, sa variation sera $Be'' - r$, et l'on verra dans la suite que Cela posé, on trouve $-29''94770 \sin(7i'^$

The text on this page is estimated to be only 7.83% accurate

140 MECANIQUE CELESTE. $\wedge o",38 \ 1 \ 191. \sin. [n't-+- e" \text{---}$
 $'cr") \backslash \text{---} o",72 \ 6o5o.\sin.(7i"f-he'^{\wedge} \text{---} ^{\wedge}''') o\backslash Z \ i6Sqi . \sin.[2n't \ o",394947.$
 $\sin.(37i^*fn \ t-\backslash -2e \text{---} e \text{---} \odot jK \ tr, , \ 1/ /r \ ri \backslash \backslash n \ f-f-2e \text{---} e \text{---} tar \ j\ l /!' . o \ F/$
 $ir \ ri \backslash I \ 2/1 \ f-4-3e \text{---} 2e \text{---} tET) / \ 0,00002061 \ 1 \ i.\cos.(/i"f-he" \text{---} 'Ct'^{\wedge})$
 $-0,00007962 \ 46. \cos.(ni-+-e^{*\wedge} \text{---} 'cr") -0,0000^92096. \cos.(/i^{\wedge}f-f-e'^{\wedge} \text{---}$
 $ter') \text{---} o,ooo2 \ 92 \ 2i3o.\cos.(27i' \ t \text{---} n'^{\wedge}t-\{-2e \text{---} e" \text{---} ter" \} \ H-$
 $o,oooi688o85.\cos.(27i^{*\wedge}f \text{---} /i"f-f-2e' \text{---} e" \text{---} tsr') \text{---} o,ooo4584483.\cos.$
 $(3/i' \ f \text{---} 27i"iH-3e'^{\wedge} \text{---} 2e" \text{---} tzt") \ 5r' \ i=(n-(x')./-+-o, \ 0009047822. \cos.$
 $(3/i'^{\wedge}f \text{---} 27i'7-+-3e'^{\wedge} \text{---} 26'''^{\wedge} \text{---} tar'^{\wedge}) \bullet H^{\wedge} \ 0,000 \ 1 \ 2 \ 59429. COS. (4/1^*$
 $f \text{---} 3n''t-\backslash -45^{*\wedge} \text{---} 36'^{\wedge} \text{---} tar'^{\wedge}) -0,0002 \ 42 \ 44 \ 1 \ 3. COS. [l^{\wedge}n \ t \text{---}$
 $3n''t-\backslash -4^{\wedge}''^{\wedge} \text{---} 3e" \text{---} \odot') -0,00002 \ 68383. \cos.f\hat{o}/i'^{\wedge}f \text{---} 4^{\wedge}''f-f-5e' \text{---} 4^{\wedge}''$
 $\text{---} ''^{\wedge}) \text{---} o,oooo5 \ 1 \ 6o48. \cos.[5n \ t \text{---} ^{\wedge}n''^{\wedge}t-hSe'^{\wedge} \text{---} 4^{\wedge}'' \text{---} "cs')$
 $-0,0000679151. \cos.(2/i'^{\wedge}f \text{---} n'M-2e''^{\wedge} \text{---} e^{*\wedge} \text{---} tar") -0,000$
 $i34653o.\cos.(3/i'^{\wedge}f \text{---} 2n''f-f-3e" \text{---} 2e' \text{---} ^{\wedge}''') In\acute{e}galit\acute{e}s d\acute{e}pendantes des$
 $carr\acute{e}s et des produits des excentricit\acute{e}s et des inclinaisons. S\hat{i};"r_{-}:(1+jx').$
 $3",o9778o.\sin.(/rf-i-n''f-+-e'^{\wedge}-+-e"-f-5o^{\circ},5438) \ 1 \ 7^{\wedge},2 \ 18232. \sin. (27i'M-$
 $2e'^{\wedge}-hi \ 7^{\wedge},71 \ 1 \ 1) \ 36^{\wedge},186942. \sin.(37i'f\text{---}7i''f-4-3e\text{---}e"+88\%5i48)$
 $-56",7879i2.siD.(4/i'f\text{---} 2/i''(-h4e'\text{---} se''\text{---} 63\%5635) \ tr \ ft , \ ra \ ^ \ " \ 5 \ \ ' /3n''f$
 $\text{---} 67i'f4-3e''--5e' \ \ i \ (522 ,420601\text{---} f.O ,Ol3202).Sin.(\ ^{\wedge} \ ^{\wedge} \ ^{\wedge} \ ^{\wedge} \ ^{\wedge} \ ,^{\wedge} \ \Pi \ ^{\wedge} \ '$
 $\backslash +6i^{\circ}\%8669 + i.i55\backslash 89/ \ 5\backslash o83765.\sin.(6/i'f\text{---} 4n''i-4-6e\text{---} 4e'\text{---} 6o\%4778)$
 $7^{\wedge}6432 \ 2 \ 1. \sin. (n'i \text{---} /i''i-f-e' \text{---} e"-h48\%0929) [\text{---} 1 \ 9^{\wedge},407399. \sin. (2nf$
 $\text{---} 2n''i-H2e'^{\wedge} \text{---} 2e"-f-47^*42io)$

SECONDE PARTIE, LIVRE SIXIÈME. 141 Ces deux dernières inégalités réunies aux deux suivantes, I, v i 2 55^591 700. sin. [nt — n'Y-f-e'^ — e")) i'—^f ^j_63o\88387o.sin.2(/i"f— /i"f-4-e— e")î que nous avons trouvées précédemment, et qui sont indépendantes des excentricités, donnent celles-ci, , ,. j— 26i\20oA20.sin.(n"f— n*>+e"~e*— i°,2756) j ^""^^^j-f-645^364888.sin.(2/^">-2/^^^+2e"-2e-l^2957)i• On a ensuite 0,000082 2A15.C0S.(2/l^f+2eV 12%2 392) + o,oooo2 2 62 52.cos.(3n'^t— 7i'''f+ 3e'^"-e"^^— 2 4",^093) yr__j r\] — o,oooioio533.cos.(4w'^f— 2/i"H-4e'^— 2e"^^— 56%74i9) "" i / ,K , ^ . QN /3n"f-5/i'''f+3s"-5e"V -(o,oo.,ia5o2-f.o,oooooooo5323).cos.(^^g^,,^^^^^^^^^^,gJ| \ — o,oooo652 2o4.cos. (2M*^f~2n'^f+2e'^— 2e"+6o%i64i) En réunissant la dernière de ces inégalités à la suivante, — (i-h(x'). 0,0028966200. cos.2(n*^f — n7-he*^ — e"), que nous avons trouvée précédemment, et qui est indépendante des excentricités, on a celle-ci, — (i+jx*^). 0,0029261 892. COS. [2n"t— int+2e"— iq — i%i5o6). Les inégalités précédentes de hv' ont été calculées par les formules (i), (C), [E) et (F) des n*" 1 et 2, à l'exception de l'inégalité dépendante de l'angle 3n"(— but: bn — 271"^ étant un coefficient très-petit, en vertu du rapport qui existe entre les moyens mouvements de Jupiter et de Saturne, l'angle ^n'^t — bnt diffère trèspeu de n^t; on a donc fait usage, pour calculer cette inégalité, des formules [B) et (C) du n° 1, et de la méthode du n° 18.

142 MÉCANIQUE CELESTE. Inégalités dépendantes du cube et des produits de trois et de cinq dimensions des excentricités et des inclinaisons des orbites, ainsi que du carré de la force perturbatrice. La grande inégalité de Jupiter a été calculée par les formules des $n^7, 8, 9, 13, 14, 15, 16$ et 17 . On a trouvé par le n^8 , $a.M'^{''} = -5,2439100$. m' . $a.M'^{''} = 9,6074688$. m' , $a.M'^{''} = -5,8070750.7/1^*$, $a./l'^{''} = 1,1620283.771'$, $a'.M(* = -0,638578 i./n'$, $a.M'^{''} = 0,3320740.771'$. De là on a conclu pour 1750, $a.P = 0,0001093026$, $a.F = -0,0010230972$. On a déterminé ces valeurs pour 2250, et pour 2750. Pour cela, il a été nécessaire de déterminer les valeurs de $e \backslash e' \backslash cr''$, $t_z r \backslash y$ et n , en séries ordonnées par rapport aux puissances du temps, en portant la précision jusqu'au carré du temps. On a d'abord calculé par les formules du $n^{**} 13$, les variations séculaires de $he' \backslash he' \backslash S'cr''$, Stn' , dépendantes du carré de la force perturbatrice, et l'on a trouvé pour ces variations. $he' r:t. o'', i6i35a$. $S \ll r'' - t. 1'', 089325$, $Se' .: - t. o'', 3i7i7i$. $S - bt' - ^{io'', 00840i}$. Les coefficients de f , dans ces expressions, sont les parties de $-r -$, $-j -$, $-7 -$, $-jj y$ dépendantes du carré de la force perturba

The text on this page is estimated to be only 29.06% accurate

SECONDE PARTIE, LIVRE SIXIÈME. 143 trice : il faut les
ajouter aux valeurs des mêmes quantités déterminées dans le n° 25; ce qui
donne pour ces valeurs entières en 1750, $de' = i''$, 016936, $r^{\wedge} - 21^{\wedge} 459284$, di
ir $-^{\wedge} = r =$ — r, 984469, $^{\wedge}jp = 59,789037$. On a déterminé par le même procédé
ces valeurs pour 1960, et Ton a trouvé pour cette époque, $-^{\wedge} = 1$, 006705,
-37-== 2i'', 769069, $de' =$ — 2'', 001540, $dt -^{\wedge} = 59'', 952898$. De là on a
conclu par le n° 8 les expressions suivantes de $e'^{\wedge}$ tir'', $e^{\backslash} \textcircled{C}^{\wedge}$ pour un temps
quelconque t, $e'' = i e'^{\wedge} t$. $1^{\wedge} 016936$ — r. o', 0000255775, $t5'' = tiT''' - + - f.2$
 $1^{\wedge}, 459284 - f -$

144 MÉCANIQUE CÉLESTE. On a déterminé les valeurs de y et de Π , au moyen des équations $(p' \sin. 0' - p'' \sin. d' = y \sin. H, \zeta \cos. 6' - 9'' \cos. d'' = y \cos. H. dy d\pi$ Ensuite on a déterminé les valeurs de $-j$ et de $-j'$, au moyen des différentielles de ces équations, en y substituant pour $-\dot{\alpha}$, $-\dot{\alpha}'$, $-\dot{\alpha}''$ leurs valeurs données dans le n° 25. On a trouvé de cette manière pour 1760, $y = 1\%3982$, $n = 39\%7142$, $-\dot{\alpha} = -80',537447$, $-\dot{\alpha}' = -0\%000326$. Les formules du n° 14 donnent pour les variations séculaires de y et de n , dépendantes du carré de la force perturbatrice, $\Delta y = 5\%000568$, $\Delta n = -0\%0023552$. En ajoutant les coefficients de t dans ces équations, aux valeurs précédentes de $-\dot{\alpha}$ et de $-\dot{\alpha}'$, on aura pour les valeurs complètes de ces quantités en 1750, $dy = 0,000242$, $\Delta 57 = -80\%560999$.

The text on this page is estimated to be only 24.25% accurate

SECONDE PARTIE, LIVRE SIXIÈME. 145 On a trouvé par le même procédé pour 1960, $\alpha = -0.4589$, $\beta = -81.87827$. De là on a conclu par le n° 8, pour un temps quelconque t , $y = y_{ht}$. $0.000242 \dots$. 0.0000120776 , $n = n - t$. $80.660999 \dots$ V. 0.0023170701 , les valeurs de y et de n , dans les seconds membres de ces équations, étant celles de 1760. Gela posé, on a trouvé pour 2200, $a.P = -0.000080189$, $a.P' = -0.00006510$; et pour 2760, $a.P = -0.000260997$, $(C.P = -0.000954608$; doù Ton a conclu par le n° 8, $a.-j = -0.000000887666$, $a.-y = -0.0000000021401$ at $a.-j = 0.000000000084784$, $r ddF$, $o a.-Tfr^{^^}$ 0.000000000141700. TOME m. 19

The text on this page is estimated to be only 17.13% accurate

146 MÉCANIQUE CÉLESTE. La partie de èv" donnée dans le n° 17, { .rdF 2a\ddP) . . .drfP'l''''-^^*' ^" ^^^® ^^1 (.rp ia\ddP 3o". rf(iP] \ ^ ' ^ ~ (Sn'-a n"). dt ~ (5n'-2 n")}' .d/' ~i, (,dp 7a".ddP'), ., .,rrf(/P' , cos. {Snt-in"t+be'-2e") dt {Sn'-^n'ydf devient ainsi, en la réduisant en nombres, [igoo\6i62']o — t.o\o25gS2 —

The text on this page is estimated to be only 20.07% accurate

SECONDE PARTIE, LIVRE SIXIÈME. 147 On a coudu de ces valeurs, celles de a^* , $\backslash-j-r-\backslash-$, $a''./-j-j-|$, etc. qui sont nécessaires dans la théorie de Saturne, au moyen de l'équation générale On a trouvé ensuite pour $lySo, \_ ,\rangle'. \rangle'') ''''\blacksquare\bullet(^)- '="i68i82). \cos.(5n'\ll-27i''f+5e'-2e'')$. La grande inégalité de Jupiter renferme encore, par le $n^{**} 8$, le terme $\bullet sm.(57it — 2/1 t-hoe — 2e — \ll -hA)$. Ce terme, en 1750, était égal à $2'',53i758.\sin.(5nf— 2n''fH-5e'^— 2 e'') — 5\backslash67272 4.\cos.(5n'^f — 2ii''f-h5e^ — a e^)$; 19.

The text on this page is estimated to be only 25.97% accurate

148 MÉCANIQUE CÉLESTE, et en 1900, il sera égal à $2\sqrt{65507}$
 $-s^{\wedge\wedge} (5^{\wedge\wedge} - 2 n^{\wedge\wedge} t - i - 5 \& - 2 e^{\wedge\wedge}) - 5\sqrt{681970} \cos. (5 n^{\wedge\wedge} f - 2 n^{\wedge\wedge} f -$
 $\hat{o} e^{\wedge\wedge} - 2 e^{\wedge\wedge})$; d'où Ton a conclu pour un temps quelconque f, ce terme
égal à $(2\sqrt{531758} - \hat{o} \sqrt{10018310}) \sin. (57 i^{\wedge\wedge} f - 27 i^{\wedge\wedge} (- + - 5 e^{\wedge\wedge} - 2 e^{\wedge\wedge}) - (5'', 6 \ 7 \ 2$
 $7 \ 2 \ 4 - + - \hat{o}'' , 0000460) \cos. (5 n^{\wedge\wedge} t - 2 n^{\wedge\wedge} t - h \ 5 e^{\wedge\wedge} - 2 e^{\wedge\wedge}')$. Pour
déterminer la partie de la grande inégalité de Jupiter, dépendante des
produits de cinq dimensions des excentricités et des inclinaisons des orbites,
on a déterminé par le n° 8 les valeurs de $iV^{\wedge\wedge}$, $iV^{\wedge\wedge}$ etc. pour les deux
époques de 1760 et de 1960, et Ton a trouvé En 1750. En igSo. a. $iV^{\wedge\wedge} =$
 $- 0,00000 \ 1 \ 3 \ 5044$, a. $N^{\wedge\wedge} = - 0,00000 \ 1 \ 2 \ 9983$, a. $N^{\wedge\wedge} =$
 $0,00000789719$, a. $N^{\wedge\wedge} = 0,000007647711$ a. $N^{\wedge\wedge} = 0,0000198552$,
a. $N^{\wedge\wedge} = 0,0000196012$, a. $N^{\wedge\wedge} = - 0,0000176127$, a. $N^{\wedge\wedge} =$
 $0,0000172416$, a. $N^{\wedge\wedge} = 0,0000066540$, a. $N^{\wedge\wedge} = 0,0000066661$, a. $N^{\wedge\wedge} =$
 $0,0000009277$, a. $W^{\wedge\wedge} = - 0,0000009408$, a. $N^{\wedge\wedge} = - 0,0000003618$,
a. $N^{\wedge\wedge} = - 0,0000003662$, a. $iV^{\wedge\wedge} = - 0,0000003643$, a. $N^{\wedge\wedge} =$
 $0,0000003460$, a. $N^{\wedge\wedge} = 0,0000001720$, a. $JS^{\wedge\wedge} = 0,0000001712$, a. $N^{\wedge\wedge} =$
 $- 0,0000000730$. a. $N^{\wedge\wedge} = - 0,0000000732$. De là on a conclu l'inégalité
correspondante relative à Saturne, que nous donnerons ci-après; et en la
multipliant par le facteur $\hat{o}$, on a obtenu l'inégalité suivante de Jupiter *, m'
 $m^{\wedge\wedge} \sqrt{a} (38\sqrt{692671} - f \cdot \hat{o}'' , 005418) \sin. (57 i^{\wedge\wedge} f - 2 n^{\wedge\wedge} f - h \ 6 e^{\wedge\wedge} - 2 e^{\wedge\wedge}) -$
 $\{26\sqrt{6470} - f \cdot \hat{o}'' , 015076\} \cos. (6 n^{\wedge\wedge} f - 2 / i^{\wedge\wedge} f - + - 6 e^{\wedge\wedge} - 2 e^{\wedge\wedge})$. * Voyez la
correction indiquée par Tauteur, à la fin du volume, n° 5 du Supplément.

SECONDE PARTIE, LIVRE SIXIÈME. 149 Enfin on a déterminé par le n^o 16 la partie sensible de la grande inégalité de Saturne, dépendante du carré de la force perturbatrice, et l'on en a conclu celle de Jupiter, en la multipliant par :, ce qui donne pour cette dernière inégalité, m

$$v = m \left\{ 5 \frac{a^6}{b^6} - \frac{a^6}{b^6} Q \right\} \cdot \sin. [b n - 2 n^2$$

150 MÉGANIQUE CÉLESTE. Il faut encore appliquer au moyen mouvement de Jupiter cette inégalité à longue période. L'inégalité $\left| \frac{d^2 V}{dt^2} + \frac{d^2 V}{dH^2} \right|$ trouvée dans le n° 13, donne, en la réduisant en nombres, $12''{,}42207i \sin. [bn't - ion t - h 5e'' - ioe' - f - 57\%072 5)$. On a encore par le n° 8 l'inégalité Cette inégalité, réduite en nombres, donne $31 \setminus 125493. \sin. (4n''f - bn t - ^lx e'' - 5 e' - f - 50\%4o2 5)$: en la réunissant aux deux inégalités $3 \setminus 387695. \sin. (57i^f - 4n''f - h5e' - 4fi'' - \textcircled{R}) - 8'',585382. \sin. (5/i''t - 4n''f - 4 - 5e' - 4 e'' - ist')$, que nous avons trouvées précédemment, on aura l'inégalité $(i - ^ft^{\wedge}).35 \setminus 5i2932. \sin. (4n''f - 5/i'^f - T - 4e' - 5e^{\bullet \wedge} - 64^{\wedge}4555)$. On a vu dans le n° 5 que l'expression de dhv'''' renferme une inégalité séculaire dépendante de l'équation $m \sim + - 4 r ir$

The text on this page is estimated to be only 29.56% accurate

SECONDE PARTIE, LIVRE SIXIÈME. 151 d'où Ton a conclu
 $\frac{73}{90} \times 6'' - 85' 7873'' + 132^{\circ} 4989''$ On peut, dans le second
membre de cette équation, négliger la partie constante qui se confond avec
le moyen mouvement de Jupiter, et alors on a $= -\frac{73}{90} \times 6''$. f. $2e^{-7T}$
 35^{7873} . f. $\frac{1}{32} \log Sg.t. (e^{\wedge} + e^{\searrow} . \cos. («^{\wedge} - «^{\searrow}) - e^{\vee}$. ($\wedge^{\vee}$ -
 $\wedge^{\wedge^{\wedge^{\wedge^{\wedge}}}$) .sm. { $\wedge^{\vee} - \wedge^{\vee}$) En substituant pour -tj— » - $\wedge^{\wedge^7}$ —» -rr-, leurs valeurs
données par ce qui précède, et intégrant, on a St; $\wedge^{\wedge} — 1 \setminus o''$,ooooo20o66.
Cette inégalité est insensible dans l'intervalle de mille ou douze cents ans, et
même par rapport aux observations les plus anciennes qui nous soient
parvenues; on peut donc la négliger. Il nous reste à considérer le rayon
vecteur de Jupiter. On a vu dans le n° 8 que les termes dépendants du cube
des excentricités ajoutent à son expression la quantité — a . e . H. COS. [on
t — $\frac{2}{1} H - 5e — 2e — ter \sim \setminus A) - \setminus a. e. H. COS. [\wedge^n \wedge^t — \wedge^{nt-i-} \wedge^{e'''}$ —
 $\hat{o}e^{\wedge} — tj^{\wedge} — A)$ iim $\wedge^n \wedge^a$ « (P.sin. ($5^{\wedge^7} — \frac{2}{i^7} - f - 5e^{\wedge} — 2e^{\prime\prime}$) j $\frac{5}{1^{\wedge} - 211^{\wedge}}$
($-\wedge^{\vee} - F.\cos.(5/i^7 — \frac{2}{i^7} - 4 - 5e^{\prime\prime} — 2e^{\vee})$) ' En réduisant cette fonction en
nombres, on trouve $\wedge^{if} / rx (— o,ooo3o42 733.\cos.(57i^{\prime\prime}f — 2^{\wedge^{\wedge^{\wedge}}}$ hôte $^{\wedge}$
— $2e^{\wedge} — i3\%4966)) — V r ^{1^0},000 100 1860. COS. \{4w^{\prime\prime}f — 5n^{\prime\prime}f-t-$
 $4e^{\prime\prime} — 5e^{\vee}-+5o\%3io8))$

152 MÉCANIQUE CELESTE. La dernière de ces inégalités réunie à celles-ci, / rx J 0,00002 68383. cos,(5n''f — 4n'''f-f-5f'^ — 4e''^ — tar'^1 donne la suivante, 5r' =(i+(x'). 0,0000983161. cos.(4nV57i7+4e''--5e-i5%9874). Le demi-grand axe a''^ dont on doit faire usage pour calculer la partie elliptique du rayon vecteur doit, par le n''* 20, être augmenté de la quantité y a \ m''' : en la réunissant à la valeur de a''' du n''* 21, on trouve a''' = 5, 20279108. Inégalités du mouvement de Jupiter en latitude. 34. Il résulte du n''* 14 que les termes dépendants du carré de la force perturbatrice ajoutent à la valeur de -^ la quantité m''.\Ja''+m\\la: * ^ ' ^ * ^ ') et à la valeur de ^— , la quantité -'^^V^' \h 3i^^ (n_0..) +y. ilî. eos. (n-0-)L dy et dn étant déterminés par le numéro cité. La première de ces fonctions, réduite en nombres, est égale à — o\ooo2 24;

The text on this page is estimated to be only 29.00% accurate

SECONDE PARTIE, LIVRE SIXIÈME. 153 elle doit être ajoutée aux valeurs de $-\wedge$ et $-\wedge$ du n^o 15. La seconde fonction réduite en nombres est égale à $0^{\circ},002504$; elle doit être ajoutée aux valeurs $\wedge e-\wedge$ et $-\wedge-\wedge$ du n^o 25; on aura ainsi $3p- = -0^{\circ},241398$, $\wedge = -0^{\circ},689044$, de $^{\circ}, .j^{\wedge} = 19,929296$, $\wedge' = -45^{\circ},254832$. On trouve ensuite, par les formules du n^o 51 du second livre, $i^{\circ},742154.\sin.(n^{\wedge}(-He^{\circ} - 11^{\circ})^{\wedge} - 2^{\circ},049156.\sin.(2n^{\wedge} - n^{\wedge}t-h^{\wedge}e' - e' - n^{\circ}))i - 0^{\circ},862291.\sin.(4n^{\wedge}f - 3/i^{\circ}f-f-4e' - 3e' - n^{\circ})' - 0^{\circ},830647.\sin.(2n^{\circ}f - /i^{\circ}f-^2e' - e' - H^{\wedge} \wedge^{\wedge})$ dans cette formule, étant la longitude du nœud ascendant de Torbite de Saturne sur celle de Jupiter. Enfin, on a par le n^o 11 l'inégalité $55^{\circ}\wedge = 12^{\circ}165680.\sin.(3/l^{\wedge}* - 5/i^{\circ}t-4-3e' - 5e'H-66\%i2i9)$. TOME III. 20

The text on this page is estimated to be only 21.49% accurate

154 MÉCANIQUE CÉLESTE. CHAPITRE XIII, THEORIE DE SATURNE. 35. Céquation $8^{\wedge} = ^{\wedge} . [i - a^{\wedge}) M'$ trouvée dans le n° 33 , relativement à Jupiter, devient pour Saturne , $8r' = - \zeta . \{i - a^{\wedge}) . 8V \setminus$ Si Ion prend pour r et r , les moyennes distances de la Terre et de Saturne au Soleil, et si Ion suppose $3^{\wedge * \wedge} = \pm i'''$, on aura $5/ = op\ 0,000i4i326$. On peut ainsi négliger les inégalités de hr au-dessous de $=fo,000\ 1\ 4\ 1$. Nous négligerons les inégalités du mouvement de Saturne en longitude et en latitude , au-dessous d'un quart de seconde. Inégalités de Saturne indépendantes des excentricités. $j\ 9 \setminus 742382 . sin . [n'^{\wedge} t - nt - ^{\wedge} e' - e' - 97 \setminus 2\ 02\ 867 . sin . 2 (/i'^{\wedge} f - nt - he'''' - e'''' - 20 , 2o5220 . sm . o(n\ t - nt - h - e - e - 6'' , o67i24 . sin . 4(w''^{\wedge} f - nt' - he'''' - e' \ 8v = (i - f - jx'') . < - 2'' , 1\ 5i\ 379 . sin . 5 (/i'7 - nt - h - e'''' - e - o'' , 835768 , sin . 6(7i''^{\wedge} f - /iV - t - e'''' - e'''' - 0^{\wedge} 35892\ 3 . sin . 7 [n'''t - nt - H\ e'^{\wedge} - e''^{\wedge} - o , i73227 . sm . 8 (/i\ t - nf - he - e - o'' , io52\ 39 . sin . 9(7i''^{\wedge} f - nt - ^{\wedge} e''^{\wedge} - e''''$

The text on this page is estimated to be only 14.56% accurate

SECONDE PARTIE, LIVRE SIXIÈME. 155 (t-Hf[^]). 2

8\544oi&o.sio. [n't — n A^\Go^6'Jo.sia.2 {n't — a — 4^4o48l6.sin.3(R''^f
— n — o\g'j2og^.sm.à{R't — n — o''^2'jggoS.sm.b[n't~n —
o\i46432.sin.6(n'^f — n' — o\oi 2 gSo.sin.T [n't — o'yOi2i66.sin.S[n't — n
f-He. — ^ e e t-he" — e e e e e t-he — i nt hr'={i^(i").[I 0,0039077763 -t-
o,oo8i5384oo.co5- [n''t -ho,oo 1 383833o.cos.2 [n^t — nt -+-
o,ooo320o673.cos.3(7i''^t — nt -1-0,0000992 63 2 •cos.4(a''^f — nt ir w ■e
— e -e •e -1-0,000035591 9xos.5(/i'^f — nt-{-0,00001 3 5999.cos.6(n''^t —
nt-[o,ooooo55 1 35.COS.7 (/i''^t — nt -t-0,000002 1 63 1 xos.S{n'''t — nt •
\-ho,ooooooo6436.cos.9{n'''f — ntI — 0,0000137622 [-[-0,0001491217.008.
[nt — n'tI — 0,00039499 1 6.COS.2 [nt — n't (i-l-ft'')j —
o,oooo48o3o3.cos.3(«'^if — n't— 0,00001 1 82 01 .COS. 4 (a*^' — n't—
o,oQooo362 8o.cos.5(7i'^f — n't-0,00000 1 2 5o 1.cos.6(7i''t — n't • /r r ■e
— e /r r e — e -e" — e^ r n -e — e Inégalités dépendantes de la première
puissance des excentricités. On a eu égard, comme on Ta fait dans le n° 33,
relativement à Jupiter, aux variations séculaires des coefficients des
inégalités qui surpassent cent secondes, et Ion a trouvé so.

The text on this page is estimated to be only 4.76% accurate

156 MÉCANIQUE CELESTE. /— 35\52 32 02.s 1+ 3^882844.s:
— 6^371723.8 0\902132.S — o',688862.s — o\27973i.s n t+e — «) 71 t+e
-^BT) in f— n f+2e — e — ^) 271 f— 71 f+2e — e — tiT) n. (37i'''f— 2
7i'^f+3 e'''— a e'^-^cy'^) ii.(37i'7— 27i'^f+3e'''— 2 e''--«T''^) in.
(47i'V37i''f+4e'-3e'^-^) -{ 56i\94o390— f.o\o3i202i).sin.(27i''(— 7i'''f+2e'^
— e''^— isy*) (1287^21 62 5o+f.o\o42 769 i).siii.(27i'^f— 7i'''(+2e'^—
e''^—4ÿy") 5t; = (i+ (!"). {+(io5\992675--f.o>o58853).sin.{37iV27i''f+3e-
2e''-«') -54\488i62.si +i4\79963i.s: - 7',5i6699.s + 4^3o12 73.s; 2^171 142.
s: i'',6579o4.s o\79i698.s: o^6672 7o.s o\33i3oi.s n.(37i7-27i'''f+3e^—2e''-
©") n.(47iV37i''f+4e -3e''-cT'^) n.(47iV37i''t+4e-3e''-Bj") n.(57iV47i''t+5e
-4e''-«') n.(57iV4w''f+5e^—4e''--cr") n.(67iV57i''f+6e'-.5e''--BT") n.
(67iV57i''f+6e'-5e''-©") n.(77i''f— 67i'''f+7e'^— 6e'''— w") n.(77iV67i'74-
7e'-6e'^-cT") / 3\52592o.sin.(7i''f+e''-©") ~ 3",i2 2367-sin.(7i'''fH-e'^—
ist") — 30^96872 i.sin.(27i''f— nt+iz'— e + 8\53 7 570.5111.(2 71^7—
71*^^+2 e*'^— e y ("'\ /+77^63379o.sin.(37i''f— 27i'^f+3e'^— 2£ + (i +
f*]-L r',726346.sin.(4«"i-37i'^f+4e''-3e — 2\34o202.sin.(47i''f— 371*^(4-
4^"— 3e o\5794io.sin.(57i'^f— 4w'^f+5e'''— 4e 2\o79683.sin.(27i'^—
7i''f4-2e'^— e*'^ 4\6962 2 6.sin.(37i''f— 27i'^f+3e''— 2e'^

The text on this page is estimated to be only 15.95% accurate

SECONDE PARTIE, LIVRE SIXIÈME. 157 ■— o,ooo342 2 1
7o.cos.(7i'^f+e'^— «") 1— 0,0020775935.008.(271'^^— n7+2e"- e"-tīt' ^ /
,KY)+o,oo5386i75o.cos.(2/i"f- /i"'^f+2e'^- e"-4iy" — 1 r ^j+o,ooi 1594872.
cos.(37i"f-27i"'"fH-3e*^-2e"^-«' [—0,00062 1 7670.cos.(37i*^f-
2n""(+3e'-2e"-^" '+0,0002 1 1 7893. COS. (4/i'^t-3n"'^f+4e*-3e"^-t[y*^ / r/v
1 0,0003750767. C0S.(3/l"f 2/l'^f-4-3e" 2 6*^ — 1!t')] 1 ""^ ^|+ -
o,ooo56o549o.cos.(3ii'^f — ^nt-hie"'^ — 2e' — tsT^jj Inégalités
dépendantes des carrés et des produits des excentricités et des inclinaisons
des orbites. (169 ..834^-1.0 ,00. • >7)«'>.j^^^,, ^,3^_^^g. g35J . . _ ,,,
)+88',o45398.sin.(B"(-n'(+e"-e'+93",6429) ' / /îc» * » / /c\ • P" t-ànt+2e -4e -
(2066 ,9ao9oo-t.o >o47745).sin.j^g^,, ^^^^^^^^^^,, ^^^ ^-9',o6io90.sin.
(5/i'^f— 37i"'^f+5e'^— 3e"'^— 63%5o2 5) j 5^936888.sin.(3n"f-
3/l^f+3e"-3^ -75%4576)(+(*+^ ^•i+95\7757344.sin.(3/i'V/i"f+3e"- e
-95%o779)r En réunissant les inégalités dépendantes de n' t — nt, et de int
— ^n't, avec celles qui sont indépendantes des excentricités, on a pour leurs
sommes, (H_pt"). 89^,404702. sin.(/i"f—/i'^f+—e'—e*^-^86%7262) — {iH-
ft").5;9i448i.sin.(3w'f— 3n"t-+-3e"— 3e'^-h76,°o577). On a ensuite !—
0,001 17 io8o5.cos.{3n'i—n'f+3e'—£"—ioo%233o) —o,ooo562 1901
.COS. (/i'^f—7i'^f+e"'^—e'+92%7 1 39) i . ^ , 00 , (2/i'V4/i^/+2e'^-4e' \i +
{o,oi5i99o624-^o,oooooooo337o|.cos.j^g^^^^3^^^^^^^^.3gH

158 MÉCANIQUE CÉLESTE. L'inégalité du rayon vecteur, dépendante de n'^t — nly réunie à son analogue indépendante des excentricités, donne $(i-h(x'')) .0,008\ 1090035. \cos. [nt - 7i''^f-t-e' - e''^ - 4\%3997). 5'' - 2m''^$ étant très-petit, l'inégalité dépendante de $in'^t - l'^nt$ a été calculée par les formules (i5) et (C) du $n^{**} 1 . 3 n - n''^$ étant fort petit, l'inégalité dépendante de $l'int - w'^f$ a été calculée par les formules [A] et (D) du même numéro. Elle doit, pour plus d'exactitude, être appliquée au moyen mouvement de Saturne, à cause de la longueur de sa période. Inégalités dépendantes des cubes et des produits de trois et de cinq dimensions, des excentricités et des inclinaisons des orbites, et du carré de la force perturbatrice. La partie la plus considérable de la grande inégalité de Saturne est celle qui a pour diviseur $[bn - 2/1'')$, et qui dépend de P et de P. Elle a été conclue de la grande inégalité de Jupiter, en multipliant cette dernière partie par le facteur $^ ' y \backslash r^$, conformément au $n^{**} 8$; ce qui donne pour cette partie de l'inégalité de Saturne, $19i2\ 9'', i90020 - f.o'', o6o8o6i - f.o'', oooi39o3j. \sin. (57i'^t - an'^f + Se' - 2 j\ 863^4 15400 - f.3\ 42i723o + f^*.o', ooo5675oj. \cos. (5/i''^f - 27i''^f + 5e^* - 2$ La grande inégalité de Saturne se compose de plusieurs autres parties : elle renferme, par le $n^{**} 8$, la fonction $2 m'' // a \backslash i - T^y \cos. \{ 5 n t - n'^t - 5 e'^ - 2 e'' \} ! a \backslash l - Y^ \backslash . \sin. [5 nt - 2 n'^t - Se'^ - 2 e'') \backslash$ En réduisant cette fonction en nombres, on a trouvé pour 1760, $i6o'', 9228i\ 1 . \sin. [5 nt - 2 n''^f - 5 e'^ - 2 e''^) - 34\ 80064o. \cos. (5w''^f - 2n'^t - Se'^ - 2 e'') ;$

The text on this page is estimated to be only 20.09% accurate

SECONDE PARTIE, «LI7BE SIXIÈME. 159 et pour 1960
 $i58'',002590 \sin. [bnt - 2n'^t - hBe'' - 2e''] - 46',240842 \cos. (5/i'f - 2n''f - t - 5e'' - 2e'')$; d'où ion tire la valeur de cette fonction pour un temps
quelconque t , égale à $j160'',922811 - t. o \circ 146011 \}$ $\sin. [bnt - 2$
 $/rf - + - 5e' - 2e''] - \{34\800640 - hf.o'',05720io \cos. (\hat{O}Ti'^f - 2n'^t - + - Se'^\wedge$
 $- 2e'')$. La grande inégalité de Saturne renferme encore, par le $n'''8$, le
terme $-^\wedge . \sin. (6n't - 2n't^\wedge 5e - 2e' - \odot'^H - i')$. Ce terme, en lyâo,
était égal à $23'',315711 \sin. (5nt - 27i'''(-4-5e'' - 2e'')) - + -$
 $i6',423734 \cos. (5n'f - 2/i''f - h5e' - 2e'')$; et en 1960, il sera égal à
 $23^\wedge,800290 \sin. [but - 27i''^\wedge f - f - 5e^{*\wedge} - 2e'^\wedge) - hi4\8945io \cos. (57i'f -$
 $^\wedge n'^t - hSe''^\wedge - 2e''')$; ce qui donne j pour le temps t linégalké $J23\3i57ii -$
 $H(.o'',002423j \sin. (5n''f - ^2n''^\wedge t - h5e'^\wedge - 2e'^\wedge) - t - \{i6',423734 -$
 $f.o\007646 \cos. (57i'f - 2w''f - h5e' - 2e'')$. La partie de la grande inégalité
de Saturne, dépendante des produits de cinq dimensions des excentricités et
des inclinaisons des orbites, est, par les $n^{***}8$ et 18 , $\{ ' (on - an) . dt dt) ^$
 $' | (r p 2a \backslash dP; , , . dfj fr . , rf, r J$

The text on this page is estimated to be only 29.39% accurate

160 MÉCANIQUE CÉLESTE. en désignant par P et P' les coefficients des $\sin.(5n'^f - 2n''^f + 5e'^f - 2e''^j)$ et de $\cos. \{bnt - an'^f - hSe'' - 3e''\}$, du développement de R , et dépendants des produits de cinq dimensions des excentricités et des inclinaisons. On a trouvé pour 1760, $a.P = -0,0000068876$, et pour 1960, par conséquent, $a.P - a.P \text{ r dP } a . ' = -0,0000100087$, $= -0,0000077132$, $' = -0,00000969^0$; $= -0,0000000043780$, $a . ^ = 0,0000000010735$, ce qui donne pour la fonction précédente réduite en nombres, $-\frac{1}{9} \frac{f.o^2}{596j} \sin.(5/i^f - 2n^t - hbe^ - 2e'') - \frac{1}{58^2} \frac{70353}{-hf.o^35o48j} \cos.(5/i^f - in^t - hbe'' - 2e^)$. Enfin, on a déterminé par le n''' 16 la partie sensible de la grande inégalité de Saturne, dépendante du carré de la force perturbatrice, et Ton a trouvé pour cette partie, en 1750, $-\frac{1}{779433} \sin.(57i^t - 211'7 - h5e' - 2e'') - \frac{1}{32^4} \frac{470131}{\cos. [bnt - 2n''^f(-h5e'^ - 2e'')]$; et en 1950, $-\frac{5}{5i766} \sin.(5/i7 - 2M''^f - H5e - 26'') - \frac{1}{34} \frac{644o93}{\cos.(5n'^f - 2n''^f - h5e' - 2e'')}$; ce qui donne pour le temps t , cette partie égale à $-\{11'', 779433 - \frac{f.o^336383}{j} \sin.(57i'^f - 2n''^f - f.5e - 2e'') - \frac{1}{32} \frac{47oi2i-hf.o^io8698J}{\cos.(57i'^f - 2n'^f + 5e' - 2e'')}\}$.

SECONDE PARTIE, LIVRE SIXIÈME. 161 Maintenant, si l'on rassemble ces diverses parties de la grande inégalité de Saturne, on aura pour sa valeur entière que Ton doit appliquer au moyen mouvement de cette planète, i {9o46",68347i-^o',0948628-r.o',oooi39o3j.sin.(5n'f-2n"f+5e'-2e") (^-^^)-jV{ 689",o5i83o~f.3',4o2793/i+— il) m .V a trouvée dans le n*" 13 devient, en la réduisant en nombres, — 2 5",5o7770. sin. {kn't—^nt-^ke"—ge"— 67%35o8). On a encore , par le n"* 8 , l'inégalité \e\K. sin. (Sn'^f — Qn"t-+- 3e — 2e'^-f.«V ii) : TOME III.

The text on this page is estimated to be only 24.68% accurate

162 MÉCANIQUE CÉLESTE. cette inégalité, réduite en nombres, était en 1760 égale à $a5',4i7ioi.sin. (an't — 3n'f-f-2e'' — 3e'-4-i64^{\circ},595o)$; en 1960, elle sera $lAa'.gaSSGa. sin. (an'f — 3n'f-h ae'' — 3e''H-i66\%3i97)$; sa valeur pour un temps quelconque (est donc $(145 ,417101-f.o .0124687). sm.j\_^{^g^},^{^5^{^g^}.^3 j.$ En réunissant cette inégalité à celles-ci , $j io5',992675 — t.o'',oo59i4|.sin. \{3nt — an^t-i-Se' — »e'' — ta') — 54',488i62. sin. (3n'f — 2n''f-t-3e — ae'' — «T\}$, que nous avons trouvées précédemment, on aura pour leur somme l'inégalité $-(75 .8372oa-f.o .oi3555).sm.j^{^g,,^{^3\_^{^g,^{^g} j.$ On a vu dans le n° 5 que le moyen mouvement de Saturne est assujetti à une équation séculaire correspondante à celle que nous avons trouvée dans le n° 33, pour Jupiter, égale à — f. $0\%0000020066$. L'équation séculaire de Saturne est ainsi, parle n° 5, égale à $T=r.f .0 ,0000020066$; et par conséquent égale i $f.o\backslashooooo466\&$: cette inégalité peut être né^igée san» erreur sensible.

The text on this page is estimated to be only 21.67% accurate

SECONDE PARTIE, LIVRE SIXIÈME. 163 Il nous reste à considérer le rayon vecteur de Saturne. On a vu dans le n° 8 que les termes dépendants du cube des excentricités ajoutent à l'expression du rayon vecteur de Saturne la quantité $-\frac{f^3}{H \cos \theta} \left(\frac{2n^3 t^3}{5e^2} - \frac{2e^3}{A} \right) + \frac{a}{e} \cos \theta \left(\frac{5n^3 t^3}{2} - \frac{2e^3}{V} \right) + \frac{a}{V} \sin \theta \left(\frac{5n^3 t^3}{2} - \frac{2e^3}{V} \right) + \frac{a}{V} \cos \theta \left(\frac{5n^3 t^3}{2} - \frac{2e^3}{V} \right)$. Cette fonction réduite en nombres donne $5 \frac{r}{i} \left(\frac{5n^3 t^3}{2} - \frac{2e^3}{V} \right) \cos \theta + 4 \frac{r}{i} \left(\frac{5n^3 t^3}{2} - \frac{2e^3}{V} \right) \sin \theta$. En réunissant la dernière de ces deux inégalités à celles-ci, que nous avons trouvées précédemment, dépendantes des simples excentricités, on a $159487a \cos \theta + 17670a \sin \theta = (2n^3 t^3 - 3e^3 - 25e^3) \frac{r}{i} + (2n^3 t^3 - 3e^3 - 25e^3) \frac{r}{i}$. Le demi-grand axe a dont on doit faire usage pour calculer la partie elliptique du rayon vecteur doit, par le n° 50, être augmentée de la quantité y . a. m : en la réunissant à la valeur de a du n° 21, on trouve $a = 9,53881757$. SI.

The text on this page is estimated to be only 20.34% accurate

164 MECANIQUE CELESTE. Inégalités du mouvement de Saturne en latitude. 36. Les formules du n° 51 du second livre donnent

$$5'',516537.\sin.(i''f+e'-n'')-o',772161.\sin.(27i't-n'fH-2e'-e'-II)^r /$$

$$/rx]-o'259092.\sin.(3w''t-2n'f-t-3e''-2e'-11^1)1^{1+9}$$

$$,702232.\sin.(27i't-n't-2e'-e'-n'j|-i'',61378o.\sin.(37i''f-27i''f-j-3e''-2e''-W)\}-o'256T36.\sin.[^nt-37i'7-h4e'^-3e''-n'^)]$$

$$Io'',261948.\sin.(l''fH-e'^-II'')\ +o'3']ji'jo.\sin.[2n't-nt-h^e''-e''-H''')!, +2^,046267.\sin.(3w''f-2nt-h^e'^-ae'^-n'^))n'^ étant$$

la longitude du nœud de Torbite de Jupiter sur celle de Saturne, et H'' étant la longitude du nœud de Torbite d'Uranus sur celle de Saturne. Enfin on a, par le n° 10, l'inégalité $S = -28'28''27\frac{1}{3}.\sin.(2n''f-4i''f-i-2e''-4e''-4-66\frac{1}{2}i2i9)$. Il résulte du n° 14 que les termes dépendants du carré de la force perturbatrice ajoutent à la valeur de $-^$ la quantité ; $-^ = -.f.\cos.fn - d$) $-^ - .sm.(n - 0)$; m .y a +m .ya $^ ^ i$ la valeur de $-r-$, la quantité $-: = z^ = -.f.Sin.fn - 0$)-h $-^ - .cos.fn - d$)[, a +m .ya v^{**} ; 5 y et 5 n étant déterminés par le numéro cité. La première de ces fonctions, réduite en nombres, est égale à o'ooo474:

SECONDE PARTIE, LIVRE SIXIÈME. 165 elle doit être ajoutée aux valeurs de $\sim$ et de $\wedge$ du n° 25. La seconde fonction, réduite en nombres, est égale à $\frac{1}{2} \log 2$. Soit $\log 2$ elle doit être ajoutée aux valeurs de $\frac{1}{2}$ et de $\frac{1}{2}$ du n° 25. On aura ainsi $\log 2 = 0.30103$, $\log 2 = 0.30103$, de", $Q = 27.799890$ » $\log 2 = -58',77584$.

The text on this page is estimated to be only 28.06% accurate

166 MECANIQUE CELESTE. CHAPITRE XIV. THÉORIE
D'URANUS. 37. L'équation trouvée dans le n° 35, relativement à Saturne,
devient pour Uranus, Si Ton prend pour r et r' les moyennes distances de la
Terre et d'Uranus au Soleil, et si Ton suppose $\hat{e}V''' = \pm i^0\%$ on aura $\hat{a}r' = q =$
0,00067648 : on peut ainsi négliger les inégalités de $\hat{a}r'$ au-dessous de $q =$
0,00067. Nous négligerons les inégalités du mouvement d'Uranus en
longitude et en latitude, au-dessous d'un quart de seconde. Inégalités
d*Uranus, indépendantes des excentricités. $i6i'',43844o.\sin. (/i'^{\wedge} -$
 $o'',58755o.\sin.2 (m'' \hat{e}v' = (i-t-(x'') ./ — o'',o8o3i9.\sin.3(/i'' — o^{\wedge}oi$
 $i090.\sin.4(w'' — o'',oo2\ 37i.\sin.5(M'^{\wedge} / 65'',96io45.\sin. [n - i3'',o2$
 $769i.\sin.2(M'^{\wedge} 2'',66o85o.\sin.3(M'^{\wedge} - o^{\wedge}75435o.\sin.4(M'^{\wedge} — o^{\wedge}2$
 $47564.\sin.5(n'^{\wedge} — o'',o892\ 94.\sin.6(n'^{\wedge} — o'',o3373i.\sin.7(7i'^{\wedge} — o^{\wedge}o$
 $12801 .\sin.8 (n'' (1-4-f.) t—n't-he'^{\wedge}-e'' t—n'i-he'''-e''' 't—n't-+-e''-e'' t—n't-$
 $he''-e'' t—n't-^{\wedge}e''-e'' t—n't-+-e''-e'' t—n't-he'-e'' t—n't-he''-e'^{\wedge} t—n't-\{-e-e''' t$
 $—n't-he-e''' t—n't-^{\wedge}\hat{E}-e'' t — n^{\wedge}f-t-e'-e'' t n^{\wedge}t-he' -e'' i$

The text on this page is estimated to be only 8.13% accurate

SECONDE PARTIE, LIVRE SIXIEME. 167 0,0063⁷³¹⁶⁰
-0,0048914790. COS. [a^t — n't-\- e''' — e*[^]) 5/'==(i₋^{f^}-).j-
+_o,oooo236i84.cos.2(Vf — n"f+e' — - 0,0000030669. cos.3(/i" f — n't+-
e" — e') -o,oooooooo5o44.cos.4(/i"V — n't-^e" — q")j 0,002:364 1285 -
0,0035433901 . COS. [nt — n't -f- e*[^] — e") (i-+- (x').

168 MECANIQUE CÉLESTE. Inégalités dépendantes des carrés et des produits des excentricités et des inclinaisons des orbites.

1-
(408'',97800i<.o>448i63).sin.(^ 1~^1^."rt, ,)i 5 - _ . ' J \-98%i3i3~f.53
,4o/f -li^fjL s\2SS^^o.sm.{^n't~2nt+^^'-2^'--^2%S6Sb) ['(4-3 5^,864683.
sin.(nt~ n't+ e- e"+98^327l) ! La première de ces inégalités doit être appliquée au moyen mouvement de la planète, à cause de la longueur de sa période. La dernière de ces inégalités, réunie à sa correspondante, qui est indépendante des excentricités , donne la suivante : (i+jx*^).

7i'',47ooo2.sin.(7i'^f— /i''f+e^— e'^'+23%5385). On a ensuite 5r"=-(i4-fjt").o,ooo755384o.cos.(3/i''f-i''f+3e"-e'^'+83%3463). Inégalité dépendante des cubes et des produits de trois dimensions des excentricités et des inclinaisons des orbites. Si;"= — (i+(x')^).2'',977432.sin.(5/i'''t— 2n'^f+5e'^~2e'^— 75%99i 1). Inégalités du mouvement d*Uranus en latitude.

38. Les formules du n** 51 du second livre donnent 5/ = (i+jx'''). i'',97o35o.sin.(7i'''^f+e'^— n'*^), r.i 2\82 636o,sin.(/i'''t+e'^— n'*^) i ^ '
(+9'',o 15592. sin. (2/1'^'/— 71*^^+2 e^—e'^—II'^)) n''' étant ici la longitude du nœud ascendant de Torbite de Jupiter sur celle d'Uranus, et U'^ étant la longitude du nœud ascendant de l'orbite de Saturne sur celle d'Uranus.

SECONDE PARTIE. LIVRE SIXIEME. 169 CHAPITRE XV. DE QUELQUES ÉQUATIONS DE CONDITION QUI EXISTENT ENTRE LES INÉGALITES PLANÉTAIRES, ET QUI PEUVENT SERVIR X LES VÉRIFIER. 39. Les inégalités à longues périodes, produites par les perturbations réciproques de deux planètes m et m', sont à peu près, par le $n^* 65$ du second livre, dans le rapport de m'.sja à — m. \fa; en sorte que pour avoir les perturbations de ce genre, correspondantes, dans le mouvement de m^ à celles du mouvement de m, il suflBt de multiplier celles-ci par ^-^^. Ce résultat est d'autant plus exact, qu en vertu du rapport qui existe entre les moyens mouvements des deux planètes, la période de ces inégalités est plus grande par rapport aux durées de leurs révolutions. Nous allons, au moyen de ce théorème, vérifier plusieurs des inégalités précédentes. L'action de la Terre sur Vénus produit, par le $n^{**} 28$, dans le mouvement de Vénus, les deux inégalités dont la période est d'environ quatre années, — 4',78256i .sin.(3/i"f— 2nf-4-3e'— 2e'— tsj) -t- i4',7i0902.sin.(3/i"f— 2/i'fH-3e" — 2e' — m"). En les multipliant par — '^ — , on a pour les inégalités correspondantes de la terre m m 3',4995 . sin. (3n'f — 2 n'f + 3 e'— 2 ©'— 'o') — io',7644.sin. {3n'f — 2n'f-f-3e' — 2e' — -or'). TOMB UI. a

170 MÉCANIQUE CELESTE. Le calcul direct a donné, par le n° 29, pour ces inégalités, $3\sqrt{6616Q6} \sin. \{3nt - 2nt - h^e - 7e - ^\wedge\}$ - ii", $3i8247 \sin. (37i''f - 2/17 - 4 - 36'' - 2e' - \ll')$; ce qui diffère peu des inégalités précédentes. L'action de la Terre sur Vénus produit encore, par le n° 28, l'inégalité suivante, dont la période est d'environ huit ans, $-4\sqrt{645i72} \sin. (5/i''f - 3/i7 + 5e' - 3e' - + - 23\%23o2)$. En la multipliant par $\sim 7 = \gg \wedge \wedge * P^{\wedge \wedge}$ l'inégalité correspondante de la Terre, $3\sqrt{39900a} \sin. \{5w''f - 3\ll'f - h5e'' - 3e' - f - 2 - 3\%23o2\}$; et le calcul direct a donné, par le n° 29, $3\sqrt{473997} \sin. (5ji''f - 37i'(- + - 5e'' - 3e' - + - 23\%3769)$. Mars éprouve, par l'action de Vénus, comme on l'a vu dans le n° 32, l'inégalité à longue période $- 2i\sqrt{295i2i} \sin. (3/i''f - /i'f - + - 3e'' - e' - + - 72\%7o83)$. En la multipliant par $\wedge \wedge \wedge$, on a m!, y a' $6'', 4i44 \sin. (3n''*t - n'f - h3e'' - e' - h72\gg, 7o83)$. Le calcul direct donne, par le n° 28, $6'', 2027o6 \sin. (3n''*f - n'f - hSe'' - e' - f - 73'', 2o63)$; ce qui diffère peu de l'inégalité précédente. Mars éprouve, par le n° 32, de la part de la Terre, les deux inégalités suivantes, dont la période est d'environ seize ans, $- 3i^*, 2 - 18207. 8 \sin. (2n''f - n''*f - i - 2e'' - e'' - n'f'') - h - 1 - 6', 8 - 1 - 1 - 9 - 2 - o. \sin. (2 \ll''f - \ll''t - h - a - e'' - e' - ts')$.

SECONDE PARTIE, LIVRE SIXIEME. 171 m'W^aT En les multipliant par $1 - \frac{1}{r}$, on a pour les inégalités correspondantes de la Terre, $68807 \sin(2i''f - w''f - 2e'' - e'' - 'Of'') - 3''485 \sin(27i''f - i''t - 2e'' - e'' - 13'')$. Le calcul direct donne, par le n''^{29} , $65977i \sin[\int_{nt-i\phi}^{e'' - \wedge} - 338490 \sin(2i''f - n''fH - ac^{\sim}e'' - \ll'')]$; ce qui diffère peu des précédentes. Mars éprouve encore de la part de la Terre, par le $n^{\circ} 32$, l'inégalité à longue période $- i349044i \sin(4i''\ll - 2n't - 4e'' - 2c' - h75\%35i8)$. En la multipliant par $1 - \frac{1}{r}$, on a pour l'inégalité correspondante de la Terre $29734 \sin(4n''f - 27i'^f - 4e'' - 2eV75\%35i8)$; ce qui diffère peu de l'inégalité $367702 \sin(4i''i - 27i''i - 4e''' - 2e' - h75\%35o6)$, trouvée dans le n^{29} . Les deux grandes inégalités de Jupiter et de Saturne sont encore à peu près l'une à l'autre, dans le rapport de $\frac{m^Y/a^{\wedge}}{nT.SJd^{\wedge\wedge}}$, à nT.SJd^{\wedge\wedge} comme il est facile de s'en convaincre. Enfin Uranus éprouve de la part de Saturne, par le $n'' 37$, l'inégalité à longue période $- 408'97800i \sin(3i''f - i7-H3e'' - e'' - 98\%i3i3)$. 22.

The text on this page is estimated to be only 27.03% accurate

172 MÉCANIQUE CÉLESTE. m. En la multipliant par $\frac{1}{r^2}$, on a dans le mouvement de Saturne l'inégalité $99\ 900 \sin(3n''f - \frac{1}{l}f^3 - 3e' - e' - 98\ 313)$; ce qui diffère peu de l'inégalité $95\ 334\ 222 \sin(3n''f - n'f - 4 - 3e'' - e' - 97\ 319)$, donnée dans le n° 35. 40. Considérons dans le développement de R le terme de la forme $m \cdot M^{\frac{1}{2}} e e \cdot \cos\{i\{n f - n f - h e' - e\} - f - \arctan - 2e - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{n}}\}$; et supposons que $i \sqrt{\frac{1}{n}} - n$ - h an soit fort petit par rapport à n et à n; ce terme produira par le n° 69 du second livre, dans l'excentricité e de l'orbite de la planète m, considérée comme une ellipse variable, l'inégalité $\dots M^{\frac{1}{2}} e^2 \cos\{l(l'f - wf + e - e) + Qnt + 2C - \dots - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{n}}\}$; et dans la position $\frac{1}{2}$ du périhélie, l'inégalité $\dots \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{n}} \dots \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{n}}$. $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{n}}$, $\sin\{i(nf - if + e' - e) + 27it + 2e - \dots - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{n}}\}$. $i(n - n) + 2ii e^{\frac{1}{2}}$ Nommons Se la première de ces inégalités, et Stsr la seconde. L'expression de t; contient le terme $2e \sin(nf - e - isy)$, et par conséquent l'inégalité $2.5e \sin(7i(-he - tsy) - 2e \cdot 5' BT \cos(nf - f - e - tar)$; ce qui donne dans t; l'inégalité $i'H^{\frac{1}{2}}T, .M$

SECONDE PARTIE, LIVRE SIXIÈME. 173 Il résulte du n^o 65 du second livre, que dans le cas de $i \{n - n\} + 2n$ très-petit, l'expression de R relative à l'action de m sur m' renferme encore à très-peu près le terme $mM^{\wedge}Kee.co8.\dot{i} [r\dot{t} - /if-+-e' - e)H-27if-+-2e - ^ - \langle ' \rangle$, puisque en n ayant égard qu'aux deux termes de ce genre dans R et R , on a par le numéro cité, à très-peu près, $m.f\grave{a}R-\backslash-rn!.f\grave{a}lR=o$. On a donc dans v l'inégalité $2m.a'n' ., / \backslash . M^{\wedge}Ke.sinAilr\dot{t} - nt-+-e' - e)-\}-nt-he - tari$. Ces deux inégalités de v et de v sont dans le rapport de $m', e. \sqrt{a}$, à $m.e. \sqrt{a}$; en sorte que la seconde se conclut de la première, en multipliant le coefficient de celle-ci par $- ^{-} . - . bn - Zn$ étant peu considérable par rapport à $r\dot{t}$ et même à n , on a dans v , en supposant $i=5$, une inégalité dépendante de l'argument $bnt - ^{711}-+-^{^^} - ke - ^$; et dans v , une inégalité dépendante de l'argument $kv\dot{t} - int-\backslash-ke - 3e' - tar'$. La première de ces inégalités est, par le n^o 28, $6',7794o5.sin.(5?i"t - 4/i'fH-5e" - ke - "cs")$. [^] En multipliant son coefficient par $- ' ^ . -$, on a pour la Terre l'inégalité $2',o3io.sin.(4/i'f - 37i'f-i-4e' - 3e' - tar)$. Le calcul direct donne, par le n^o 29, l'inégalité $\dot{i}i2^{^}]ok.sm.[knt - SnV-hAe" - 3e' - 'cr')$; ce qui diffère peu de la précédente.

174 MÉCANIQUE CÉLESTE. Pareillement, $kv^{\wedge} - \wedge/i''$ est assez petit relativement à $n\backslash$ et même à n . En supposant $i = 4$ on a dans / une inégalité dépendante de l'argument $knt - Znt'^{\wedge} - ke' - Zz'\sim\wedge; e\grave{a}dJisv$, une inégalité dépendante de l'argument $Znt - 2?i''fH - 3e'^{\wedge} - 2e'' - \wedge'$. La première de ces inégalités est, par le $n''' 29, 2'', 49io8a.sin.(Kf - 37i'f - f - 4e'' - 3e' - \ll)$. En multipliant son coefficient par $-\wedge'.$, on a pour Mars l'inégalité $2,0410. sm. (3711 - in f - + - 3e - 2e - \ll)$. Le calcul direct donne, par le $n''* 32, 2'', 6iii23.sin.(3n''(-27i't - h3e'' - 2e* - \ll))$: la différence est dans les limites de celle que Ton peut supposer, d'après le rapport de $kn''' - in\backslash$ à n , qui est à peu près celui de 1 à 4. 41. Il résulte encore du $n^{\circ} 71$ du second livre, que si $?(n' - n) - h2n$ est très-petit par rapport à ri , l'inégalité de m en latitude, dépendante de $[i - 1) \{j\grave{a}t - nf - he' - e\} \sim hnf - 4 - e'$, est à l'inégalité de m' , en latitude, dépendante de $(i - 1) (wf - /if - i - s' - e) - hnf - t - e$, dans le rapport de $m.\backslash fc\grave{a}$ à $-m.sja$. En supposant $i = 5$, on a, par le $n''' 28$, dans le mouvement de Vénus en latitude, l'inégalité $-o\backslash^{\wedge}QkQib.sm.[bnt - knt^{\wedge}be - ke - B')$. En multipliant son coefficient par $\wedge'_{-}$, on a, dans le mouvement de la Terre en latitude, l'inégalité $o'', 7o5835.sin.(47i''f - 3/i'f - f - 4e - 3e - 0')$.

The text on this page is estimated to be only 25.42% accurate

f SECONDE PARTIE, LIVRE SIXIÈME. 175 Le calcul direct donne par le n° 29 l'inégalité $o^{723} o i^{\wedge} . \sin. [^{\wedge} nt - 3nt' - h^{\wedge} e'' - 3e' - 6']$; ce qui diffère peu de la précédente. $3n'$ — n est peu considérable par rapport à n' ; en faisant donc $1 = 3$, on a dans 8\$" une inégalité dépendante de $3n't - 2nt H - 3e'' - 2e'$, et dans 5', une inégalité dépendante de $2n't - nt - f - ae'' - e^{\wedge}$ La première de ces inégalités est, par le n° 36, $2', 046267. \sin. (37i''f - 27i''f - H3e'' - 2e' - n'')$, $31'''$ étant la longitude du nœud ascendant de Torbite d'Uranus sur celle de Saturne. En multipliant le coefficient de cette inégalité par $' - ^{\wedge} -$, on a dans 5^''' l'inégalité $m'' . \backslash a^{\wedge} - 8', 3772.8 \sin. (2i''f - n''fH - 2e'' - e' - n''')$; et par le n° 38, cette inégalité est $- 9^{ol5592} . \sin. (2n''f - 7i''f - + - 2 e''^{\wedge} - e' - II'')$; ce qui diffère peu de la précédente. 42. Il suit du n° 69 du second livre, que $iV - in$ étant supposé très-petit relativement à 71 et à $n \backslash$ si l'on représente par mfi . $P. \sin. (iVt - int H - l'e' - le) - h m. P. \cos. [\int - \int - f - i'e - i e)$ ia partie du développement de R qui dépend de l'angle $\int - \int - hiV - le$; il en résulte dans hv l'inégalité, $i (-7 -)$. $COS. (\int - \int - hie - ie - nt - e - + \bullet \ll)$ $2m . an I \backslash de) ^{\wedge} \backslash I - (^j . sm. [\int - \int - ^i e - le - nt - e - h \ll j]$

The text on this page is estimated to be only 27.47% accurate

176 MECANIQUE CELESTE, et dans 8v, Tinégalité $2m \wedge$ -
 $T) \cdot \cos. (i7it - mf-hie - le - nt - e-i-tar \text{ ji } i'n - 171 '1 (dP \setminus \bullet 1-, I \bullet V / \bullet$
 $// \wedge (1 - (^-T) \cdot \sin. (i7if - int-\backslash ie - le - nt - e-f-isT) \setminus$ Il suit encore du
 $n^{**} 71$ du second livre, que les mêmes termes de R donnent dans hs
Tinégalité $i (rf \sim)' \wedge \wedge \wedge \wedge - int-\wedge ie - le - nt - e -f- Il) i m .an in -$
 $in \setminus (dP \setminus \bullet t-i ! \bullet \bullet / \bullet \bullet, \setminus (* / - (j -) \bullet sm. [int - mf -t- 1 e - le - nt - e -$
 $+ - H) j$ y étant la tangente de l'inclinaison respective des orbites de m et de
 m' , et II étant la longitude du nœud ascendant de Torbite de m sur celle de
m. Si l'on augmente l'argument de l'inégalité de Sr, de $nf+e - tar$, et que l'on
multiplie son coefficient par e; si l'on augmente l'argument de l'inégalité de
 $hv \setminus$ de $n f + e' - 'or'$, et que l'on multiplie son coefficient par $- ' \wedge \wedge .e$; enfin
si l'on augmente l'argument de l'inégalité de Bs, $dent + -e - H$, et si l'on
multiplie son coefficient par $- 2y$; la somme de ces trois inégalités sera
 $.m'.an \setminus | \wedge - (iif) + \wedge \{ \wedge \} + \wedge (\wedge) H \ll - (*' \ll - ' \ll + > ' - \wedge) |$ or P et P' sont les fonctions
homogènes en e, e et y, de la dimension $i - i$, i étant supposé plus grand
que i; la fonction précédente est ainsi égale à $\_ \wedge 2m \setminus an. \{ i-i \} j P. \cos. \{ int -$
 $int + ie - ie \} in' i n \bullet j^p'. \sin. (iVf - int + re' - ie) \setminus$

The text on this page is estimated to be only 20.70% accurate

SECONDE PARTIE, LIVRE SIXIÈME. 177 Mainteoant on a, par le n° 69 du second livre, dans Sv, l'inégalité Sm'.an\i (P. cos. [int — int+— i'e — le) 1 { {n'^iny -j—F.sin.îiVf— iiif-+-iV— le))' D'où il suit que si Ton représente par K. sin. [int — int -h i'e — ie — nt — e -h 0) , l'inégalité de 8v, dépendante de l'angle int—int + ie — ie—nt—e; si l'on représente par K\ sin. [int — int-h le — ie — nt — e -h (7) , l'inégalité de Sr, dépendante de l'angle ïnt — int+ie — ie — nt—e; enfin, si Ton représente par K\ sin. [int — int -}- ie — ie — nt — e -f- (7) , l'inégalité de S 5, dépendante de l'angle int—int+ie — ie—nt—e, on a eK. sin. («Vf — int+—ie — ie — ^-hO) -heK\ sin. [i'nt — in t -f- ie — ie — ist'h- 0) — 2y. K\ sin. [i'n't—int^ ie — ie — Tl-h (f) 2li'—i) jj (in'— in) . /•/ /• ^ ••. •' / • rk\ = \ . \H. ^ ^ . sin. fiTif — mt-hie — îe-+-Q), 01 n ^ ' H.s\ u. {i'nt — int-h-ie — ie-^-Q) étant l'inégalité de 5 v dépendante de l'angle int — int-^—ie — ie. bn — 271 étant fort petit par rapport à n, on a par le n"* 27, dans Sv, l'inégalité 5',Q 17417. sin.(5/i'f — 3nf H- 5s' — 3s -f- 48^ 1210). L'inégalité de 5^, dépendante de bnt — 3nt-\-be — 3e, est insensible. On a ensuite par le n^ 28, dans hv, l'inégalité — i\o296i7.sln.(47i'/ — 2fif-+-4e' — 2e — 43^898o). TOME III. 23

178 MÉCANIQUE CÉLESTE. Enfin, on a par le n^{'''} 27[^] dans [^]v, Tin égalité 26\i8446o.sin.(5n7 — 2?if-h5e' — 2e — 33%5852). Ici 1 = 5 y et i=2; on a donc, par ce qui précède, Téquation de condition , 5[^]2 17417.[^]. sin. [bnt — an^f + 5e' — 2e — «+ 48% 1210) — 1[^]029617.[^]. — ^{^^}r.sin-(57i'i — 2/if+5e — 2 e — «' — 43[^]8980) >[^] — 26\i8446o.^{^^''''''''}^{^^}sin.(5n7-2nf+5e'-[^]2e-33%585:[^]). Le premier membre de cette équation donne i\i io35.sin.(5nf — 27if-i-5e' — 2e — 3i%62i2). Le second membre donne i\ii35.sin.(57i'f — 27if-4-5e' — 2e — 33%585îi); la différence est insensible. On pourrait vérifier par les théorèmes précédents plusieurs des inégalités respectives de Jupiter et de Saturne; mais comme toutes les inégalités de ces deux planètes ont été vérifiées plusieurs fois et avec beaucoup de soin, par divers calculateurs, cette dernière vérification devient inutile. 43. L'inégalité de /n, produite par l'action de m et dépendante de l'argument nt-[^]-z — ter', est, par les n^{''}' 50 et 55 du second livre, égale à -7-7-; -rrr . (o, 1). e . sm. (71 (-t- e — tar . 71.(71* — 71*) [^] ' V / L'inégalité de m, produite par l'action de tti, et dépendante de rargument nt-\-z — «, est

..vⁱ.jLiii PARTIE, LIVRE SIXIÈME. 179 Les coefficients de ces deux inégalités sont donc dans le rapport de — (o,i), n' à (1,0). n"; or on a, par le n^{*} 55 du second livre, (i,o):z--:(o,.). ^ ; m\\a en nommant donc Q le coefficient de la première inégalité, le coefficient de la seconde sera Les inégalités de ce genre ont été vérifiées, soit au moyen de cette équation de condition , soit au moyen de Texpression précédente de Q. Ainsi l'action de Jupiter produit, par le n° 29, dans la Terre, l'inégalité sensible — 7\839 1 49. sin.[n'''t'+-e" — ^rs") . Cette inégalité, par ce qui précède, est Or on a, par le n[^] 24, (3.4) =2i\444oi5; en substituant dans cette formule cette valeur, et celles de n, n\ et c\ données dans le n® 22 , et multipliant le résultat par l'arc égal au rayon , on trouve — 7\8397.sin.(/i'^f-f-£"^ — 'cr"). L'action d'Uranus sur Saturne produit par le n^{**} 35, dans le mouvement de Saturne , l'inégalité — 3\i22367.sin.(/i" f+e"— ©"). 23.

The text on this page is estimated to be only 22.92% accurate

180 MÉCANIQUE CÉLESTE. m .a * e En multipliant son
coefficient par ft— 777 . -n , on a dans Uranus Tinégalité m .a ' e o",663 1
a4. sin.(ii"f -f- e' — «') ; et le calcul direct a donné dans le n^ 35
o',663i39.sin.(ii"t-i-e" — tar*^).

SECONDE PARTIE, LIVRE SIXIEME. 181 CHAPITRE XVI.
 SUR LES MASSES DES PLANÈTES ET DE LA LUNE. 44. Un des objets les plus importants de la théorie des planètes est la détermination de leurs masses. On a vu dans le n° 21 l'incertitude qui subsiste encore à cet égard. Le moyen le plus exact de lever cette incertitude sera le développement de leurs inégalités séculaires; mais en attendant que la suite des siècles ait fait connaître avec précision ces inégalités, on peut faire usage des inégalités périodiques déterminées par un grand nombre d'observations. Delambre a discuté sous ce point de vue les nombreuses observations du soleil de Bradley et de Maskeline : il a déterminé par ce moyen le maximum des inégalités produites par les actions de Vénus, de Mars et de la Lune. L'ensemble des observations de Bradley et de Maskeline lui a donné le maximum de l'action de Vénus, plus grand que celui qui correspond à la masse que nous avons supposée précédemment à cette planète, dans le rapport de 1,0743 à l'unité; ce qui donne la masse de Vénus $3^{1/2}$ de celle du Soleil. Les observations de Bradley et de Maskeline, considérées séparément, donnent à très-peu près le même résultat, qui par conséquent n'est pas susceptible d'une erreur égale au quinzième de sa valeur. De là il suit incontestablement que la diminution séculaire de l'obliquité de l'écliptique est fort approchante de $1'' 54$. Pour l'abaisser, comme l'ont fait quelques astronomes, à $10''$, il faudrait diminuer de moitié la masse de Vénus, et cela est évidemment incompatible avec les observations des inégalités périodiques que

182 MÉCANIQUE CÉLESTE. cette planète produit dans le mouvement de la terre. Les bonnes observations modernes de l'obliquité de l'écliptique sont trop rapprochées, pour déterminer cet élément avec exactitude. Les observations des Arabes paraissent avoir été faites avec beaucoup de soin : ces observateurs, qui n'ont rien changé au système de Ptolémée, se sont attachés spécialement à perfectionner leurs instruments et leurs observations, qui donnent une diminution séculaire de l'obliquité de l'écliptique très-peu différente de $54''$. Cette diminution résulte encore des observations de Go-cheou-king faites à la Chine, au moyen d'un grand gnomon, et qui par leur précision me paraissent mériter beaucoup de confiance. Delambre a encore déterminé par un grand nombre d'observations le maximum de l'action de Mars sur le mouvement de la Terre. Il a trouvé que cette action est plus petite que celle qui correspond à la masse que j'ai supposée à cette planète, dans le rapport de $0,725$ à l'unité; ce qui donne la masse de Mars $^{\wedge}.$ — de celle du Soleil. Cette valeur est un peu moins précise que celle de la masse de Vénus, parce que son effet est moindre; mais les données d'après lesquelles nous avons déterminé la masse de Mars étant fort hypothétiques, il importait de connaître l'erreur qui peut en résulter dans la théorie du soleil; et comme les observations de Bradley et de Maskeline, prises, soit ensemble, soit séparément, concourent à indiquer une diminution dans la masse de Mars, il faut diminuer les inégalités précédentes qu'elle produit dans le mouvement de la Terre, dans le rapport de $0,726$ à l'unité. Ces changements dans les masses de Vénus et de Mars en produisent de sensibles dans les variations séculaires des éléments de l'orbe terrestre; on trouve alors la longitude du périhélie égale à $13^{\circ} 36' 44,3578''$, 0002620006 ;

The text on this page is estimated to be only 22.97% accurate

SECONDE PARTIE, LIVRE SIXIÈME. 183 le coefficient de
Téquation du centre de l'orbe terrestre devient $2E = t \cdot o^{53} o^2 2^4 -$
 $f^* \cdot o^*, oooo^2 10474$. Enfin les valeurs de p'' et de q'' données dans le $n^{\wedge} 30$
deviennent $t \cdot o^{248589} - h(* \cdot o^{oooo7i3376}, - t \cdot i^{6o8463} H - 1 \setminus 0^{00002}$
19740 ; doù il suit, par le même numéro, que la diminution séculaire de
lobliquité de Técliptique est, dans ce siècle, égale à $i60'',85$. En partant de
ces nouvelles données, on trouve par les formules $dun^{\wedge} 31, \setminus / = 1 \cdot 155^{592}$
 $7 - I - 3^{\wedge} 11 o 19 - + - 42556'',2 \cdot \sin.(f. 155^{592} 7 - h 96^{0733}) -$
 $-7353o^{\wedge} 8 \cdot \cos.(f.99', i227) - i7572'',4 \cdot \sin.\{f.43'o446\}, \sim h5o82',7 \cdot \cos.$
 $(f.43', o446) - a8463^{\wedge} 6 \cdot \sin.(^{\wedge} 99^{\wedge} I227), > /' = zzzf. i55', 5927 - t - 3\% iioi9 -$
 $3^{\wedge} II O19 \cdot \cos.(f.99^{\wedge} I227) - i4282',3 \cdot \sin.(f.43', o446), Fz = a6 > 796 -$
 $3676^{\wedge} 6 \cdot |^{\wedge} - \cos.(f.43', o446) | - io33o',4 \cdot \sin.((.99 \setminus i227)$. L'accroissement
de Tannée tropique, à partir de 1760, est alors égal à $- 0^{\wedge}, 000086354 \cdot \{1$
 $- \cos.(f. 43', o446)\} - o\hat{i}, ooo442i98 \cdot \sin,(f. 99', i227)$; d'où il suit qu'au
temps d'Hipparque l'année tropique était de $i2', 6769$ plus longue qu'en
1750. L'obliquité de l'écliptique était plus grande alors de $3948^{\wedge}, 2$. Enfin le
grand axe de Forbe solaire a coïncidé avec la ligne des équinoxes, dans
l'année 4089 avant notre ère; il lui a été perpendiculaire en 1248. J'ai
déterminé la masse de la lune[^] par les observations des

184 MÉCANIQUE CÉLESTE. marées dans le port de Brest.

Quoique ces observations laissent beaucoup à désirer encore, cependant elles donnent avec assez de précision le rapport de l'action de la lune à celle du soleil sur les marées de ce port. Mais j'ai observé dans le n° 18 du quatrième livre, que les circonstances locales peuvent influer très-sensiblement sur ce rapport, et par conséquent sur la valeur qui en résulte pour la masse de la lune. J'ai indiqué dans le même livre divers moyens pour reconnaître cette influence ; mais ils exigent des observations très-précises des marées, et celles qui ont été faites à Brest présentent encore assez d'incertitude pour craindre une erreur au moins d'un huitième sur la valeur de la masse de la lune. Les observations des marées équinoxiales et solsticiales semblent même indiquer dans l'action de la lune sur ces marées une augmentation d'un dixième, due aux circonstances locales; ce qui diminuerait d'un dixième la valeur que j'ai assignée à la masse de la lune : il paraît, en effet, par divers phénomènes astronomiques, que cette valeur est un peu trop grande. Le premier de ces phénomènes est l'équation lunaire des tables du soleil. J'ai trouvé dans le n° 29 du sixième livre $27^{\circ}25'24''$ pour le coefficient de cette équation, en supposant la parallaxe du soleil égale à $27''{,}2$. Il serait $26^{\circ}47'14''$, si la parallaxe du soleil était $26''{,}4205$, telle que j'en ai conclu de la théorie de la lune, comme on le verra dans le livre suivant. Delambre a déterminé ce coefficient par la comparaison d'un très-grand nombre d'observations, et il l'a trouvé égal à $23''{,}48$; ce qui, en admettant la seconde de ces parallaxes du soleil, que plusieurs astronomes ont conclu du dernier passage de Vénus sur le soleil, donne la masse de la lune, $7\frac{1}{2}$ — de celle de la terre. 69,2 Le second phénomène astronomique est la nutation de l'axe terrestre. J'ai trouvé, dans le n° 13 du livre V, le coefficient c l'inégalité de cette nutation égal à $31^{\circ}36'$, en supposant la ma?

SECONDE PARTIE, LIVRE SIXIÈME. 185 de la lune, divisée
 par le cube de sa moyenne distance à la terre, triple de la masse du soleil,
 divisée par le cube de la moyenne distance de la terre au soleil ; ce qui
 suppose la masse de la lune $\frac{1}{81}$ de celle de la terre. Maskeline a trouvé, par
 la comparaison de toutes les observations de Bradley sur la nutation , le
 coefficient de cette inégalité égal à $2''^{\frac{1}{5}}$; ce résultat donne la masse de
 la lune $\frac{1}{81}$ de celle de la terre. Enfin, le troisième phénomène
 astronomique est la parallaxe de la lune. On verra dans le livre suivant que
 la constante de l'expression de cette parallaxe, en fonction de la longitude
 vraie de la lune, est $10580''^{\frac{1}{3}}$, en supposant la masse de la lune $\frac{1}{81}$ de celle
 de la terre. Burg qui a déterminé cette constante, par un très-grand nombre
 d'observations de la lune , l'a trouvée égale à $10592''^{\frac{1}{3}}$; et l'on verra par
 les formules que nous donnerons dans le livre suivant, que ce résultat
 correspond à une masse de la lune $\frac{1}{77}$ de celle de la terre. Il paraît donc,
 par l'ensemble de ces trois phénomènes, qu'il faut diminuer un peu la masse
 de la lune, qui résulte des phénomènes des marées observées à Brest, et
 qu'ainsi l'action de la lune sur les marées de ce port est sensiblement
 augmentée par les circonstances locales; car les observations multipliées
 soit des hauteurs, soit des intervalles des marées, ne permettent pas de
 supposer cette action sensiblement plus petite que le triple de l'action du
 soleil. La valeur la plus vraisemblable de la masse de la lune, qui me paraît
 résulter des divers phénomènes, est $\frac{1}{81}$ de celle de la terre. En employant
 cette valeur, on trouve $\frac{23}{370}$ pour le coefficient de l'équation lunaire des
 tables du soleil, et $10589''^{\frac{1}{3}}$ pour la constante de l'expression de la parallaxe
 de la lune. On trouve encore $2''^{\frac{1}{5}}$ $\cos.$ (longitude du nœud de la lune),
 pour l'iné

186 MÉCANIQUE CÉLESTE. galilé de la nutation[^] et—
 $55\sqrt{648} \sin. (\text{tang. du nœud } c)$, pour l'inégalité de la précession des
équinoxes. Le rapport de l'action de la lune à celle du soleil sur la mer est
alors égal à $a,566$; ainsi les observations des marées dans le port de Brest,
ayant donné 3 pour ce rapport, il paraît qu'il est augmenté par les
circonstances locales, dans la raison de 3 à $2,566$. Des observations
ultérieures et très-précises fixeront invariablement ces divers résultats, sur
lesquels il ne reste plus que très-peu d'incertitude. La masse de Jupiter
paraît bien déterminée» Celle de Saturne présente encore quelque
incertitude, et il est bien à désirer qu'on la fasse disparaître par l'observation
des plus grandes elongations de ses deux derniers satellites, déterminées
dans deux points opposés des orbites, afin d'avoir égard à l'ellipticité de ces
orbites. On pourra encore employer pour cet objet la grande inégalité de
Jupiter, lorsque les moyens mouvements de Jupiter et de Saturne seront bien
connus; car ils ont une influence très-sensible sur le diviseur $[5n -$
 $2n"]$ *qui affecte cette inégalité. Il me paraît vraisemblable qu'il faut
augmenter d'une ou deux secondes le moyen mouvement annuel que j'ai
assigné à Jupiter, et diminuer à peu près de la même quantité celui que j'ai
assigné à Saturne. Les inégalités périodiques de Jupiter et d'Uranus
produites par l'action de Saturne offrent encore un moyen assez exact pour
déterminer la masse de cette dernière planète. La valeur que j'ai assignée à
la masse d'Uranus dépend de la plus grande elongation de ses satellites,
observée par Herschel. Ces elongations doivent être vérifiées avec un soin
particulier. Quant à la masse de Mercure, les inégalités qu'elle produit dans
le mouvement de Vénus peuvent servir à la vérifier. Heureusement son
influence sur le système planétaire étant très-petite, l'erreur qui peut exister
encore sur la valeur de cette masse est presque insensible.

SECONDE PARTIE, LIVRE SIXIEME. 187 CHAPITRE XVII
SUR LA FORMATION DES TABLES ASTRONOMIQUES, ET SUR LE
PLAN INVARIABLE DU SYSTEME PLANETAIRE. 45* Nous allons
présenter la méthode dont on doit faire usage dans la
formation des tables astronomiques. Quoique nous ayons donné des
inégalités tant en longitude qu'en latitude, qui ne sont que d'un quart de
seconde, cependant les observations les plus parfaites ne comportant point
ce degré de précision, on peut simplifier les calculs en négligeant les
inégalités au-dessous d'une seconde. On formera, au moyen d'un grand
nombre d'observations choisies et disposées d'une manière avantageuse, le
même nombre d'équations de condition entre les corrections des éléments
elliptiques de chaque planète. Ces éléments étant déjà connus à très-peu
près, leurs corrections sont assez petites pour que l'on puisse en négliger les
carrés et les puissances supérieures, ce qui rend les équations de condition,
linéaires. On ajoutera ensemble toutes les équations dans lesquelles le
coefficient de la même inconnue est considérable; de manière que leurs
sommes donnent autant d'équations que d'inconnues; en éliminant ensuite,
on déterminera chaque inconnue. On pourra même déterminer par ce moyen
les corrections dont les masses supposées aux planètes sont susceptibles. Si
les valeurs numériques des inégalités planétaires sont exactement calculées,
ce dont on s'assurera en vérifiant avec soin les résultats précédents, alors
on pourra, à chaque observation nouvelle, former une nouvelle équation de
condition; en éliminant ensuite, tous les dix ans, les corrections fournies par
ces équations et par toutes les précédentes, on corrigera.

188 MÉCANIQUE CÉLESTE

Erigera sans cesse les éléments des tables, et Ton parviendra ainsi à des tables de plus en plus exactes, pourvu, toutefois, que les comètes ne viennent point altérer ces éléments : mais il y a tout lieu de croire que leur action sur le système planétaire est insensible.

46. Nous avons déterminé dans le n° 62 du second livre le plan invariable à l'égard duquel la somme des produits de la masse de chaque planète, par l'aire que son rayon vecteur projeté sur ce plan décrit autour du soleil, est un maximum. Si Ton nomme y l'inclinaison de ce plan, à l'écliptique fixe de 1760, et λ la longitude de son nœud ascendant sur ce plan, on a, par le numéro cité,
$$2m\sqrt{a} (1 - e^*) \sin(p \sin \theta \tan \gamma \sin n - j' - \dots, 2 \cdot m \sqrt{a} (1 - e') \cos \theta^2 \cdot m \sqrt{a} (1 - e^*) \sin(p \cos \theta \tan \gamma \cos H = m \sqrt{a} (1 - e^*) \cos \theta^2$$
 le signe intégral $\int$ aux différences finies embrassant tous les termes semblables relatifs à chaque planète. Si l'on fait usage des valeurs de m , a , e , θ et θ données pour chacune d'elles, dans le n° 22, on trouve par ces formules $y = 1^{\circ} 7689$, $n = 114^{\circ} 3979$. En substituant ensuite pour e , $(p$ et θ , leurs valeurs relatives à l'époque de 1960, on a $y = 1^{\circ} 7689$, $n = 114^{\circ} 3934$; ce qui diffère très-peu des valeurs précédentes, et ce qui fournit une confirmation des variations trouvées précédemment pour les inclinaisons et les nœuds des orbés planétaires.

SECONDE PARTIE, LIVRE SIXIEME. 189 CHAPITRE XVIII.
DE L'ACTION DES ÉTOILES SUR LE SYSTÈME PLANÉTAIRE . 47.

Pour compléter la théorie des perturbations du système planétaire, il nous reste à considérer celles que ce système éprouve de la part des comètes et des étoiles. Mais vu l'ignorance où nous sommes des éléments des orbites de la plupart des comètes, et même de l'existence de celles qui, ayant une grande distance périhélie, se dérobent à nos regards, et cependant peuvent agir sur les planètes éloignées, il n'est pas possible de déterminer leur action. Heureusement il y a plusieurs raisons de croire que les masses des comètes sont très-petites, et qu'ainsi leur action est insensible: nous nous bornerons donc ici à considérer l'action des étoiles. Reprenons pour cet objet les formules (A), (7) et (Z) du n° 46 du second livre, i

$a \cos v \sin v \sqrt{2} \frac{dR}{dt} - h^2 r \frac{d^2 R}{dt^2} - I - a \sin v \frac{d}{dt} \left(\frac{R}{r} \cos v \frac{dR}{dt} - h r \frac{d^2 R}{dt^2} \right) - I$
 $f A \sqrt{i} - e' \frac{d}{dt} \left(\frac{R}{r} \sin v \frac{dR}{dt} - h r \frac{d^2 R}{dt^2} \right) - I - a \cos v \frac{d}{dt} \left(\frac{R}{r} \sin v \frac{dR}{dt} - h r \frac{d^2 R}{dt^2} \right) - I$
 $, m a \cos v \frac{d}{dt} \left(\frac{R}{r} \sin v \frac{dR}{dt} - h r \frac{d^2 R}{dt^2} \right) - I - a \sin v \frac{d}{dt} \left(\frac{R}{r} \cos v \frac{dR}{dt} - h r \frac{d^2 R}{dt^2} \right) - I$
 $3, = :: \sqrt{v} :: X \text{ if } Z. (z)$
 Désignons par m la masse d'une étoile; par x, y, z , ses trois

190 MÉCANIQUE CÉLESTE. coordonnées rectangles,
 rapportées au centre de gravité du soleil, et par r , sa distance à ce centre; Xy
 y, z étant les trois coordonnées de la planète m , et r étant sa distance au
 soleil, on aura, par le n° 46 du second livre, $\sqrt{xx - yy'^2 - zz'^2}$ $m y^2 [x' -$
 $xY - [y - yY - [z' - zy$ En développant le second membre de cette équation»
 suivant les puissances descendantes de r on aura $P m', m.r', \sqrt{xx + yy + zz' - r'y} . \sqrt{R} = \sqrt{r} H 1 \sqrt{m} \sqrt{r} - r, -h$ etc. Prenons pour plan
 fixe celui de l'orbite primitive de la planète ; nous aurons, en négligeant le
 carré de z , $j = zr \cos. v$, $y = r \sin. i$, $z = r \sin. i \cos. v$. Nommons ensuite l la latitude de
 l'étoile m' , et f sa longitude; nous aurons $a' = r \cos. f / \cos. f$, $f' = \sqrt{1 - \sin^2 l} \sin. i$, $zr = r \sin. i \cos. v$; d'où l'on tire, en négligeant les puissances descendantes
 de r au-dessus de r^2 , $j = m.r^2 J_2 - 3 \cos. f / - 3 \cos. f' / \cos. (ai; -$
 $af)) r^4 r^2 j - 65 \sin. 2l \cos. (v - U)$ \ Maintenant, r, f , et f' , variant d'une
 manière presque insensible, si l'on désigne par $R^2 U$ partie de R divisée
 par r ; on a, en négligeant le carré de l'excentricité de l'orbite de m , et le
 terme dépendant de 5 , et qui est de l'ordre des forces perturbatrices que m
 éprouve par l'action des planètes, $\frac{1}{r} \{ \sqrt{1 - \sin^2 l} R - \sqrt{1 - 3 \cos^2 l} \}$,

The text on this page is estimated to be only 28.71% accurate

SECONDE PARTIE, LIVRE SIXIÈME. 191 La formule (A) deviendra ainsi, en supposant $x=i$, ce qui revient à très-peu près à prendre pour unité la masse du soleil, $5r - 4\ll$. $\text{COS. } v.\text{fn du } rR. \sin. v = ^a.\sin. v.\text{fn dt. } rR. \cos.v$. Substituons pour r sa valeur $a.\backslash i\text{-he. cos. } [v - t\gg)\}$, et pour $\text{ndt, sa valeur } dv.\backslash i - 2 e. \cos.(r - ttT)j$; et négligeons sous le signe/, les termes périodiques affectés de T angle v ; nous aurons $r. R^\wedge. \sin. v = ^\wedge - 'j\text{-ii} - . j (1 - 4. \cos^*. /) . e. \sin. t\gg + -f. \cos'. / . e. \sin. (t\gg - 2 f/) \}$, $r.R^\wedge.\cos.v = - ^4^\wedge - .j(i - Y.\cos\backslash).e. \cos.'cy - y. \cos^*./e.\cos.(ttT - 2f/j$; ce qui donne, en regardant $t\gg$, /, r et U , comme constants à très-peu près, $= ^7^\wedge. |(i - -f-. \cos\backslash).e.\sin.(r - tsr) - \bullet f.\cos\backslash.e.\sin.(t; + tar --- 2f/)|$. Maintenant on a $- r = :Se. \cos.(i; - ^\wedge) - \backslash - e. S\ll.\sin.(t? - \ll)$; en comparant cette équation à la précédente, on aura $3\ 3m'.a\backslash v\ \text{il}'/ TT\backslash e = - j - r^\wedge - .\cos^*. /e. Sm.(2ttT - 2t/)$, $rf\ll r = \backslash ' .\backslash i - ^\wedge.\cos\backslash l - J. \cos V / . \cos.(2'cr - 2f/)|$. Ainsi l'action de Tétoile m produit des variations séculaires dans l'excentricité et dans la longitude du périhélie de l'orbite de la planète m ; mais ces variations sont incomparablement plus petites que celles qui sont dues à l'action des autres planètes. En effet, si l'on suppose que m soit la terre, r ne peut pas, d'après les

^ 192 MÉCANIQUE CÉLESTE. observations, être supposé plus
 petit que $100000.a$, et alors le $m \backslash a \backslash v$, ,1 terme $7^{\wedge} - n$ excède pas $m't$.
 $o^{\wedge}000000004 \blacklozenge t$ exprimant un nombre d*années juliennes; ce qui est
 incomparablement au-dessous de la variation séculaire de l'excentricité de
 l'orbe terrestre, résultante de l'action des planètes, et qui par le $n^{\wedge} 25$ est
 égale à $- t.o \backslash 2SQ56bj$ à moins qu'on ne suppose à m' une valeur
 entièrement invraisemblable. De là nous pouvons conclure que l'action des
 étoiles n'a aucune influence sensible sur les variations séculaires des
 excentricités et des périhélies des orbes planétaires; et il est facile de voir
 par le développement de la formule (Z), que leur action n'a pareillement
 aucune influence sensible sur la position de ces orbes. Examinons
 présentement leur influence sur le moyen mouvement des planètes. Pour
 cela, nous observerons que la formule [Y) donne dans d.Sv, le terme
 $liandt.R$, et par conséquent le terme $- 'j^{\wedge}.ndt.\backslash 2 - 3.C0S^* . /j$. Supposons r
 égal à r' . ($1 - cet$), et l égal à $L(i - \hat{e}/)$, r et $l^{\wedge}$ étant les valeurs de r et de $/$
 en 1760, ou lorsque $f=0$; on aura dans $\hat{a}v$ la variation $TT-$. $1 -$
 $T'COS \backslash \backslash .a.nV Tr-sm- 2l.S.nV. 2r^{\wedge}$ Les observations ne donnent point la
 valeur de af , mais elles peuvent faire connaître celle de $\hat{e}f$. En supposant
 pour la terre,

The text on this page is estimated to be only 23.84% accurate

SECONDE PARTIE, LIVRE SIXIEME. 193 $\hat{e}=i'$, et $r'=100000.a^\wedge$
la quantité $— j^\wedge . \& . nV$ devient à très-peu près quantité insensible depuis les
observations les plus anciennes. L'expression de $d\hat{a}v$ contient encore, par ce
qui précède, les termes $— ^ . m . a \backslash n d t . f \hat{a} . - ^ — 7^\wedge — . \cos . (t ; — U) \backslash 77 — \bullet$
 $^\wedge . \sin . 2 / . \cos . \{ r — U \} ;$ or on a $s^\wedge z z t - n - . \sin . V — ' \bullet ^ - \cos . V ;$ ce qui
donne, en négligeant les quantités multipliées par le sinus et le cosinus de
Tangle $v, 5 . sm . Q . a / , j j . sm . Q / (dp . j j ^ d q j A 7 ; — . \cos . f v — U] = — t t A I'$
 $- j t - sm . U — t . - y f \bullet \cos . c / J ; ' V ' i r ^ \backslash d t a i)$ et par conséquent $d 5 . \sin . a / / r T \backslash$
 $\sin . 2 / ((2 p . t t d q r r) . 7 ; — . \cos . t v — 1 /) = T T . \{ - j f . sm . i / — - y f . \cos . t / ; r \gg ^ '$
 $a r ^* \backslash d t d t)$ d'où il résulte dans $d i v$, le terme $- 7 - . — ' t ^ . n t . d t . \sin . 71 . \backslash - ^ .$
 $\sin . U — - ^ . \cos . U k$ et par conséquent dans $8 v$, l'inégalité séculaire, $2 1 m' . a ^$
 $, ^ \acute{e} A d p . t t d q r r) ^ . — ; ; — . n t \backslash sm . 2 / - j ^ . \sin . U — ^ . \cos . U \backslash$. Nous avons
donné dans le n^o 31, relativement à la terre, les valeurs de $- ^$ et de $- ^$. En
les substituant dans la fonction préTOMC m. 85

194 MÉCANIQUE CÉLESTE. cédente, on voit quelle est insensible depuis les observations les plus anciennes. il est facile de s'assurer que les résultats précédents ont encore lieu relativement aux planètes les plus distantes du soleil : ainsi l'action des étoiles sur le système planétaire est[^] à raison de leur grande distance, totalement insensible. il reste présentement à comparer aux observations les formules des perturbations planétaires, exposées dans ce livre, et principalement celle des deux grandes inégalités de Jupiter et de Saturne; mais cette comparaison exigerait de trop longs développements. Il me suffira de remarquer ici qu'avant la découverte de ces inégalités, les erreurs des meilleures tables s'élevaient à trentecinq ou quarante minutes, et qu'elles n'excèdent pas maintenant une minute. Halley avait conclu de la comparaison des observations modernes, soit entre elles, soit aux observations anciennes, que le mouvement de Saturne se ralentit, et que celui de Jupiter s'accélère de siècle en siècle. Lambert avait reconnu , par les observations modernes, que le mouvement de Saturne s'accélère présentement, et que celui de Jupiter se ralentit. Ces deux phénomènes, opposés en apparence, indiquaient dans les mouvements de ces deux planètes, de grandes inégalités à longues périodes, dont il importait de connaître les lois et la cause. En soumettant à l'analyse leurs perturbations réciproques, je parvins aux deux principales inégalités exposées dans les chapitres xii et xni de ce livre; et je vis que les phénomènes observés par Halley et Lambert en découlent naturellement, et qu'elles représentent avec une exactitude remarquable toutes les observations anciennes et modernes. Leur grandeur et la longueur de leurs périodes, qui embrassent plus de neuf cents ans, dépendant, comme on l'a vu, du rapport presque commensurable qui existe entre les moyens mouvements de Jupiter et de Saturne, ce rapport donne naissance à plusieurs autres inégalités considérables que j'ai détermi

SECONDE PARTIE, LIVRE SIXIÈME. 195 nées, et qui ont donné aux tables la précision dont elles jouissent maintenant. La même analyse, transportée à toutes les planètes, m'a fait découvrir dans leurs mouvements, des inégalités très-sensibles que l'observation a confirmées. J'ai lieu de croire que les formules précédentes, calculées avec un soin particulier, ajouteront une précision nouvelle aux tables des mouvements du système planétaire. ro.

LIVRE SEPTIEME. THÉORIE DE LA LUNE. La théorie de la lune a des difficultés qui lui sont propres, et qui résultent de la grandeur de ses nombreuses inégalités, et du peu de convergence des séries qui les donnent. Si cet astre était plus près de la terre, les inégalités de son mouvement seraient moindres, et leurs approximations plus convergentes. Mais, à la distance où il se trouve, ces approximations dépendent d'une analyse très-compiquée, et ce nest quavec une attention particulière et au moyen de considérations délicates, que l'on peut déterminer l'influence des intégrations successives sur les différents termes de l'expression de la force perturbatrice. Le choix des coordonnées n'est point indifférent au succès des approximations : la force perturbatrice du soleil dépend des sinus et cosinus des élongations de la lune au soleil, et de ses multiples : leur réduction en sinus et cosinus d'angles dépendants des moyens mouvements du soleil et de la lune est pénible et peu convergente, à raison des grandes inégalités de la lune; il y a donc de l'avantage à éviter cette réduction, et à déterminer la longitude moyenne de la lune, en fonction de sa longitude vraie, ce qui peut être utile dans plusieurs circonstances. On pourra ensuite, si on le juge convenable, déterminer avec précision, par le retour des séries, la longitude vraie, en fonction de la longitude moyenne. C'est sous ce point de vue que je vais envisager la théorie de la lune. Pour ordonner les approximations, je distingue en divers ordres les inégalités et les termes qui les composent. Je considère comme quantités du premier ordre le rapport du moyen mouvement du soleil à celui de la lune, les excentricités des orbes de

SECONDE PARTIE, LIVRE SEPTIÈME. 197 la lune et de la terre, et rinclinaison de Torbe lunaire à Técliptique. Ainsi, dans l'expression de la longitude moyenne en fonction de la longitude vraie, le principal terme de l'équation du centre de la lune est du premier ordre : le second ordre comprend le second terme de cette équation, la réduction à Técliptique, et les trois grandes inégalités connues sous les noms de variation, d'évection et d'équation annuelle. Les inégalités du troisième ordre sont au nombre de quinze : les tables actuelles les renferment toutes, ainsi que les inégalités les plus considérables du quatrième ordre; et cest par là qu'elles représentent les observations, avec une précision qu'il sera difficile de surpasser, et à laquelle la géographie et Tastronomie nautique sont principalement redevables de leurs progrès. Mon objet, dans ce livre, est de montrer dans la seule loi de la pesanteur universelle, la source de toutes les inégalités du mouvement lunaire, et de me servir ensuite de cette loi, comme moyen de découvertes, pour perfectionner la théorie de ce mouvement, et pour en conclure plusieurs éléments importants du système du monde, tels que les équations séculaires de la lune, sa parallaxe, celle du soleil, et l'aplatissement de la terre. Un choix avantageux de coordonnées, des approximations bien conduites, et des calculs faits avec soin et vérifiés plusieurs fois, doivent donner les mêmes résultats que l'observation, si la loi de la pesanteur en raison inverse du carré des distances est celle de la nature. Je me suis donc attaché à remplir ces conditions, qui exigent des considérations très-déliçates, dont l'omission est la cause des discordances que présentent les théories connues de la lune. C'est dans ces diverses considérations que consiste la vraie difficulté du problème. On peut aisément imaginer un grand nombre de moyens différents et nouveaux de le mettre en équation; mais la discussion de tous les termes qui, très-petits en eux-mêmes, acquièrent une valeur sensible par les intégrations successives, est ce qu'il offre de plus

198 MÉCANIQUE CÉLESTE. difficile et de plus important, lorsque Ton se propose de rapprocher la théorie de Tobserver; ce qui doit être le but principal de Tanalyse. Tai déterminé toutes les inégalités du premier, du second et du troisième ordre, et les inégalités les plus considérables du quatrième, en portant la précision jusqu*aux quantités du quatrième ordre inclusivement, et en conservant celles du cinquième ordre, qui se sont présentées d'elles-mêmes. Pour comparer ensuite mon analyse aux observations, j'ai considéré que les coefficients des tables lunaires de Mason sont le résultat de la comparaison de la théorie de la pesanteur, avec onze cent trente-sept observations de Bradley, faites dans Fintervalle de 1 760 à 1 760. Burg, astronome distingué, vient de les rectifier au moyen de plus de trois mille observations de Maskeline, depuis 1 765 jusqu'en 1 798 ; les corrections qu'il y a faites sont peu considérables : il y a ajouté neuf équations indiquées par la théorie. Les tables de ces deux astronomes sont disposées dans la même forme que celles de Mayer, dont elles sont des perfectionnements successifs; car on doit à cet astronome célèbre la justice d'observer non-seulement qu'il a formé, le premier, des tables lunaires assez précises pour servir à la solution du problème des longitudes , mais encore que Mason et Burg ont puisé dans sa théorie les moyens de perfectionner leurs tables. On y fait dépendre les arguments les uns des autres pour en diminuer le nombre : je les ai réduites, avec un soin particulier, à la forme que j'ai adoptée dans ma théorie, c'est-à-^ire en sinus et cosinus d'angles croissants proportionnellement à la longitude vraie de la lune. En y comparant les coefficients de mes formules, j'ai eu la satisfaction de voir que la plus grande différence qui, dans la théorie de Mayer, l'une des plus exactes qui aient paru jusqu'à ce jour, s'élève à près de cent secondes, est ici réduite à trente, relativement aux tables de Mason, et au-dessous de vingt-six secondes, relativement aux tables de Burg, qui sont encore plus

SECONDE PARTIE, LIVRE SEPTIÈME. 199 précises. On diminuerait cette différence en ayant égard aux quantités du cinquième ordre, qui ont de l'influence, et que l'inspection des termes déjà calculés peut faire connaître : c'est ce que prouve le calcul de deux inégalités dans lesquelles j'ai porté l'approximation jusqu'aux quantités de cet ordre. Ma théorie se rapproche encore plus des tables à l'égard du mouvement en latitude : les approximations de ce mouvement sont plus simples et plus convergentes que celles du mouvement en longitude; et la plus grande différence entre les coefficients de mon analyse et ceux des tables n'est que de six secondes, en sorte que l'on peut regarder cette partie des tables comme étant donnée par la théorie elle-même. Quant à la troisième coordonnée de la lune, ou à sa parallaxe, on a préféré avec raison d'en donner les tables, uniquement par la théorie qui, vu la petitesse des inégalités de la parallaxe lunaire, doit les donner plus exactement que les observations. Les différences entre mes résultats sur cet objet, et ceux des tables, sont donc celles qui existent entre ma théorie et celle de Mayer, suivie dans ce point par Mason et Burg : elles sont si petites, qu'elles méritent peu d'attention; mais comme ma théorie se rapproche plus de l'observation que celle de Mayer, à l'égard du mouvement en longitude, j'ai lieu de penser qu'elle jouit du même avantage à l'égard des inégalités de la parallaxe. Les mouvements du périhélie et des nœuds de l'orbite lunaire offrent encore un moyen de vérifier la loi de la pesanteur* Leur première approximation n'avait donné d'abord aux géomètres que la moitié du premier de ces mouvements, et Clairaut en avait conclu qu'il fallait modifier cette loi en lui ajoutant un second terme. Mais il fit ensuite l'importante remarque, qu'une approximation ultérieure rapprochait la théorie de l'observation. Le mouvement conclu de mon analyse ne diffère pas du véritable, de sa quatre-cent-quarantième partie : la différence n'est pas d'un trois-cent-dixième, à l'égard du mouvement des nœuds.

200 MÉCANIQUE CÉLESTE. De là il suit incontestablement que la loi de la gravitation universelle est l'unique cause des inégalités de la lune; et si Ton considère le grand nombre et l'étendue de ces inégalités, et la proximité de ce satellite à la terre, on jugera qu'il est de tous les corps célestes le plus propre à établir cette grande loi de la nature, et la puissance de l'analyse, de ce merveilleux instrument sans lequel il eût été impossible à l'esprit humain de pénétrer dans une théorie aussi compliquée, et qui peut être employé comme un moyen de découvertes aussi certain que l'observation elle-même. Parmi les inégalités périodiques du mouvement lunaire en longitude, celle qui dépend de la simple distance angulaire de la lune au soleil est importante en ce qu'elle répand un grand jour sur la parallaxe solaire. Je l'ai déterminée en ayant égard aux quantités du cinquième ordre, et même aux perturbations de la terre par la lune, ce qui est indispensable dans cette recherche épineuse. Burg l'a trouvée de $877^{\circ}71'$ par la comparaison d'un très-grand nombre d'observations. En égalant ce résultat à celui de mon analyse, on a $36''^{\circ}205$ pour la parallaxe moyenne du soleil, la même que plusieurs astronomes ont conclue du dernier passage de Vénus sur cet astre. Une inégalité non moins importante est celle qui dépend de la longitude du nœud de la lune. L'observation l'avait indiquée à Mayer, et Mason l'avait fixée à $23^{\circ}766$; mais, comme elle ne paraissait pas résulter de la théorie de la pesanteur, la plupart des astronomes la négligeaient. Cette théorie approfondie m'a fait voir qu'elle a pour cause l'aplatissement de la terre. Burg l'a trouvée, par un grand nombre d'observations de Maskeline, égale à $20''^{\circ}gS^{\circ}$; ce qui répond à l'aplatissement $-j^{\circ}-^{\circ}$ — $^{\circ}$. On peut encore déterminer cet aplatissement au moyen d'une inégalité du mouvement lunaire en latitude, que la théorie m'a fait connaître, et qui dépend du sinus de la longitude vraie de

SECONDE PARTIE, LIVRE SEPTIÈME. 201 la lune : elle est le résultat d'une nutation dans l'orbe lunaire, produite par l'action du sphéroïde terrestre, et correspondante à celle que la lune produit dans notre équateur, de manière que l'une de ces nutations est la réaction de l'autre; et si toutes les molécules de la terre et de la lune étaient fixement liées entre elles par des droites inflexibles et sans masse, le système entier serait en équilibre autour du centre de gravité de la terre, en vertu des forces qui produisent ces deux nutations, la force qui anime la lune compensant sa petitesse par la longueur du levier auquel elle serait attachée. On peut représenter cette inégalité en latitude, en concevant que l'orbe lunaire, au lieu de se mouvoir uniformément sur l'écliptique, avec une inclinaison constante, se meut, avec les mêmes conditions, sur un plan très-peu incliné à l'écliptique, et passant constamment par les équinoxes, entre l'écliptique et l'équateur: phénomène que nous retrouverons d'une manière encore plus sensible dans la théorie des satellites de Jupiter. Ainsi, cette inégalité diminue l'inclinaison de l'orbite lunaire à l'écliptique, lorsque le nœud ascendant de cette orbite coïncide avec l'équinoxe du printemps; elle l'augmente, lorsque ce nœud coïncide avec l'équinoxe d'automne ; ce qui , ayant eu lieu en 1755, a rendu trop grande l'inclinaison que Mason a déterminée par les observations de Bradley de 1760 à 1760. En effet, Burg, qui l'a déterminée par des observations faites dans un plus long intervalle, et en ayant égard à l'inégalité précédente, a trouvé une inclinaison plus petite de $11^{\circ}4'$. Cet astronome a bien voulu, à ma prière, déterminer le coefficient de cette inégalité, par un très-grand nombre d'observations, et il l'a trouvé égal à $\frac{1}{246914}$: il en résulte $\frac{1}{246914}$ pour l'aplatissement de la terre, le même, à très-peu près, que donne l'inégalité précédente du mouvement en longitude. Ainsi la lune, par l'observation de ses TMS ni. S6

202 MÉCANIQUE CÉLESTE. mouvements, rend sensible à l'astronomie perfectionnée, Tellipticité de la terre, dont elle fit connaître la rondeur, aux premiers astronomes, par ses éclipses. Les expériences du pendule semblent indiquer un aplatissement un peu moindre, comme on Ta vu dans le troisième livre : cette différence peut dépendre des termes par lesquels la terre s'écarte de la figure elliptique, et qui, peu sensibles dans l'expression de la longueur du pendule, deviennent insensibles à la distance de la lune. Les deux inégalités précédentes méritent toute l'attention des observateurs, car elles ont sur les mesures géodésiques l'avantage de donner l'aplatissement de la terre, d'une manière moins dépendante des irrégularités de sa figure. Si la terre était homogène, elles seraient beaucoup plus grandes que suivant les observations, qui concourent ainsi, avec les phénomènes de la précession des équinoxes, et de la variation de la pesanteur, à exclure l'homogénéité de la terre. Il en résulte encore que la pesanteur de la lune vers la terre se compose des attractions de toutes les molécules de cette planète; ce qui fournit une nouvelle preuve de l'attraction de toutes les parties de la matière. La théorie, combinée avec les expériences du pendule, les mesures géodésiques, et les phénomènes des marées, donne la constante de l'expression de la parallaxe lunaire, plus petite que suivant les tables de Mason. Elle est très-peu différente de celle que Burg a déterminée par un grand nombre d'observations de la lune, d'éclipses de soleil et d'occultations d'étoiles par la lune : il suffit de diminuer un peu la masse de ce satellite, déterminée par les phénomènes des marées, pour faire coïncider cette constante avec le résultat de cet habile astronome; et cette diminution est indiquée par les observations de l'équation lunaire des tables du soleil, et de la nutation de l'axe terrestre; ce qui semble prouver que dans le port de Brest le rapport de l'action de la lune à celle du soleil sur la mer est sensiblement augmenté par

SECONDE PARTIE, LIVRE SEPTIÈME. 203 les circonstances locales. Des observations ultérieures de tous ces phénomènes lèveront cette légère incertitude. L'un des plus intéressants résultats de la théorie de la pesanteur est la connaissance des inégalités séculaires de la lune. Les anciennes éclipses indiquaient dans son mouvement moyen une accélération dont on a cherché longtemps et inutilement la cause. Enfin la théorie m'a fait connaître qu'elle dépend des variations séculaires de l'excentricité de l'orbe terrestre; que la même cause ralentit les moyens mouvements du périhélie de la lune et de ses nœuds, quand celui de la lune s'accélère; et que les équations séculaires des moyens mouvements de la lune, de son périhélie et de ses nœuds, sont constamment dans le rapport des nombres 1, 3 et 0,74. Les siècles à venir développeront ces grandes inégalités, qui sont périodiques comme les variations de l'excentricité de l'orbe terrestre, dont elles dépendent, et qui produiront, un jour, des variations au moins égales au quarantième de la circonférence, dans le mouvement séculaire de la lune, et au douzième de la circonférence, dans celui de son périhélie. Déjà les observations les confirment avec une précision remarquable : leur découverte me fit juger qu'il fallait diminuer de quinze à seize minutes le mouvement séculaire actuel du périhélie lunaire, que les astronomes avaient conclu par la comparaison des observations modernes aux anciennes : toutes les observations faites depuis un siècle ont mis hors de doute ce résultat de l'analyse. On voit ici un exemple de la manière dont les phénomènes, en se développant, nous éclairent sur leurs véritables causes. Lorsque la seule accélération du moyen mouvement de la lune était connue, on pouvait l'attribuer à la résistance de l'éther, ou à la transmission successive de la gravité; mais l'analyse nous montre que ces deux causes ne produisent aucune altération sensible dans les moyens mouvements des nœuds et du périhélie lunaire; ce qui suffirait pour les exclure, quand même la vraie cause serait 26. i

204 MÉCANIQUE CÉLESTE. encore ignorée. L'accord de la théorie avec les observations nous prouve que si les moyens mouvements de la lune sont altérés par des causes étrangères à l'action de la pesanteur, leur influence est très-petite, et jusqu'à présent insensible. Cet accord établit d'une manière certaine la constance de la durée du jour, élément essentiel de toutes les théories astronomiques. Si cette durée surpassait maintenant d'un centième de seconde, celle du temps d'Hipparque, la durée du siècle actuel serait plus grande qu'alors, de $365^{\text{h}} 25^{\text{m}}$: dans cet intervalle, la lune décrit un arc de $534^{\circ} 6'$; le moyen mouvement séculaire actuel de la lune en paraîtrait donc augmenté de cette quantité, ce qui ajouterait $13^{\text{h}} 51^{\text{m}}$ à son équation séculaire, que je trouve, par la théorie, de $31^{\text{h}} 42^{\text{m}} 48^{\text{s}}$ pour le premier siècle compté de 1760. Cette augmentation est incompatible avec les observations, qui ne permettent pas de supposer une équation séculaire plus grande de $6''$ que celle qui résulte de mon analyse; on peut donc affirmer que la durée du jour n'a pas varié d'un centième de seconde depuis Hipparque; ce qui confirme ce que j'ai trouvé à priori dans le n° 12 du cinquième livre, par la discussion de toutes les causes qui peuvent l'altérer. Pour ne rien omettre de ce qui peut influer sur le mouvement de la lune, j'ai considéré l'action directe des planètes sur ce satellite, et j'ai reconnu qu'elle est très-peu sensible. Mais le soleil, en lui transmettant leur action sur les éléments de l'orbe terrestre, rend leur influence sur les mouvements lunaires très-remarquable, et beaucoup plus grande que sur ces éléments eux-mêmes; en sorte que la variation séculaire de l'excentricité de l'orbe terrestre est beaucoup plus sensible dans le mouvement de la lune que dans celui de la terre. C'est ainsi que l'action de la lune sur la terre, d'où résulte dans le mouvement de cette planète l'inégalité connue sous le nom d'équation lunaire, est, si je puis m'exprimer ainsi, réfléchie à la lune par le moyen du soleil, mais

SECONDE PARTIE, LIVRE SEPTIÈME. 205 affaiblie à peu près dans le rapport de cinq à neuf. Cette considération nouvelle ajoute à l'action des planètes sur la lune, des termes plus considérables que ceux qui dépendent de leur action directe. Je développe les principales inégalités lunaires résultantes des actions directes et indirectes des planètes sur la lune : vu la précision à laquelle on a porté les tables de la lune, il serait utile d'y introduire ces inégalités. La parallaxe de la lune, l'excentricité et l'inclinaison de son orbite à l'écliptique vraie, et généralement les coefficients de toutes les inégalités lunaires, sont pareillement assujettis à des variations séculaires; mais elles sont jusqu'à présent très-peu sensibles. C'est la raison par laquelle on retrouve aujourd'hui la même inclinaison que Ptolémée avait conclue de ses observations, quoique l'obliquité de l'écliptique à l'équateur ait diminué sensiblement depuis cet astronome; en sorte que la variation séculaire de cette obliquité n'affecte que les déclinaisons de la lune. Cependant le coefficient de l'équation annuelle ayant pour facteur l'excentricité de l'orbite terrestre, sa variation est assez grande pour y avoir égard dans le calcul des anciennes éclipses. Les nombreuses comparaisons que Burg et Bouvard ont faites des tables de Mason, avec les observations lunaires de la fin du xviii^e siècle, par Lahire et Flamsteed, du milieu du xviii^e par Bradley, et avec la suite non interrompue des observations de Maskeline, depuis Bradley jusqu'à ce jour, présentent un résultat auquel on était loin de s'attendre. Les observations de Lahire et de Flamsteed, comparées à celles de Bradley, indiquent un mouvement séculaire plus grand de quinze à vingt secondes que celui des tables lunaires insérées dans la troisième édition de l'Astronomie de Lalande, et qui, dans l'intervalle de cent années juliennes, excède un nombre entier de circonférences, de 342⁰ : les observations de Bradley, comparées aux dernières observations de Maskeline, donnent au contraire un mouvement 1

206 MÉCANIQUE CELESTE. séculaire plus petit de cent cinquante secondes au moins. Enfin les observations faites depuis quinze à vingt ans prouvent que cette diminution du mouvement de la lune est maintenant croissante. De là résulte la nécessité de retoucher sans cesse aux époques des tables, imperfection qu'il importe de faire disparaître. Elle indique évidemment l'existence d'une ou de plusieurs inégalités inconnues à longues périodes, que la théorie seule peut faire connaître. En l'examinant avec soin, je n'ai remarqué aucune inégalité semblable dépendante de l'action des planètes. S'il en existait une dans la rotation de la terre, elle se manifesterait dans le moyen mouvement de la lune, et pourrait y produire les anomalies observées; mais l'examen attentif de toutes les causes qui peuvent altérer la rotation de la terre m'a convaincu de plus en plus que ses variations sont insensibles. Revenant donc à l'action du soleil sur la lune, j'ai reconnu que cette action produit une inégalité dont l'argument est le double de la longitude du nœud de l'orbite lunaire, plus la longitude de son périégée, moins trois fois la longitude du périégée du soleil. Cette inégalité[^] dont la période est de 184 ans, dépend du produit de ces quatre quantités : le carré de l'inclinaison de l'orbe lunaire à l'écliptique, l'excentricité de cet orbe, le cube de l'excentricité de l'orbe solaire, et le rapport de la parallaxe du soleil à celle de la lune; elle paraît ainsi devoir être insensible, mais les grands diviseurs qu'elle acquiert par les intégrations peuvent la rendre sensible, surtout si les termes les plus considérables dont elle se compose sont affectés du même signe. Il est très-difficile d'obtenir son coefficient par la théorie, à cause du grand nombre de ses termes, et de l'extrême difficulté de les apprécier, difficulté beaucoup plus grande encore qu'à l'égard des autres inégalités de la lune; j'ai donc déterminé ce coefficient au moyen des observations faites depuis un siècle, et j'ai reconnu qu'il est égal à peu près à 47^{51} . Son introduction dans les tables doit en changer les

SECONDE PARTIE, LIVRE SEPTIEME. 207 époques et le moyen mouvement. J'ai trouvé ainsi qu'il faut diminuer de $98^{\circ}664$ le moyen mouvement séculaire des tables de la troisième édition de l'Astronomie de Lalande , et j'en ai con[^]ciq la formule suivante, qui doit être appliquée à la longitude moyenne donnée par ces tables dont l'époque en 1760 est $ao9^{\circ}ao8ao$: i étant le nombre des siècles écoulés depuis 1750 ; E étant le double de la longitude du nœud de l'orbite lunaire, plus la longitude de son périégée, moins trois fois la longitude du périégée du soleil. Cette formule représente avec une précision remarquable les corrections des époques de ces tables, déterminées par un très-grand nombre d'observations, pour les six époques de 1691» 1756, 1766, 1779, 1789 et 1801; et comme la théorie, examinée avec la plus scrupuleuse attention, ne m'a point indiqué d'autres inégalités lunaires à longues périodes, il me paraît certain que les anomalies observées dans le moyen mouvement de la lune dépendent de l'inégalité précédente; je ne balance donc point à la proposer aux astronomes, comme le seul moyen de corriger ces anomalies. On voit par cet exposé combien d'éléments intéressants et délicats Tanalyse a su tirer des observations de la lune, et combien il importe de multiplier et de perfectionner ces observations, qui par leur grand nombre et leur précision mettront de plus en plus en évidence ces divers résultats de l'analyse. L'erreur des tables formées d'après la théorie que je présente dans ce livre ne s'élèverait à cent secondes que dans des cas fort rares; ces tables donneraient donc, avec une exactitude suffisante, la longitude sur la mer. Il est très-facile de les réduire à la forme des tables de Mayer; mais comme dans le problème des longitudes on se propose de trouver le temps qui correspond à \

208 MÉCANIQUE CÉLESTE. une longitude vraie observée de la lune, il y a quelque avantage à réduire en tables l'expression du temps en fonction de cette longitude. Vu l'extrême complication des approximations successives et la précision des observations modernes, la plupart des inégalités lunaires ont été jusqu'ici mieux déterminées par les observations que par l'analyse. Ainsi, en empruntant de la théorie ce qu'elle donne avec exactitude, et la forme de tous les arguments; en rectifiant ensuite par la comparaison d'un très-grand nombre d'observations ce qu'elle donne par des approximations qui laissent quelque incertitude, on doit parvenir à des tables très-précises. C'est la méthode que Mayer et Mason ont employée avec succès; et en dernier lieu, Burg, en la suivant et s'aidant des nouveaux progrès de la théorie lunaire, vient de construire des tables dont les plus grandes erreurs sont au-dessous de quarante secondes. Cependant, il serait utile pour la perfection des théories astronomiques, que toutes les tables dérivassent du seul principe de la pesanteur universelle, en n'empruntant de l'observation que les données indispensables. Il se croit que l'analyse suivante laisse peu de chose à faire pour procurer cet avantage aux tables de la lune, et qu'en portant plus loin encore les approximations, on y parviendra bientôt, du moins à l'égard des inégalités périodiques; car quelque précision que l'on apporte dans les calculs, les mouvements des nœuds et du périhélie seront toujours mieux déterminés par les observations.

SECONDE PARTIE, LIVRE SEPTIÈME. 209 CHAPITRE
PREMIER. INTÉGRATION DES EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU
MOUVEMENT LUNAIRE. 1. Reprenons les équations différentielles {K}
du n^o 15 du second livre, et donnons-leur la forme suivante, $dt = \frac{h^* \sqrt{ds}}{h^* \sqrt{ds}} \frac{dQ \sqrt{ji-hss}}{dQ \sqrt{h^* a \sqrt{ds}}}$ A>a' '{ds}' dans ces
équations, t exprime le temps, et Ton a f) __ M-hm m'. {xx' - {yy' - i-zz'}) m'
~~~~ "^^ ^ \{x'—xy-h{y'—yyM'—zY ' M, m et m' sont les masses de la  
terre, de la lune et du soleil; X, y, z sont les coordonnées de la lune  
rapportées au centre de gravité de la terre, et à une éciptique fixe; oc, y, z  
sont les coordonnées du soleil; r et t sont les rayons vecteurs de la lune et du  
soleil; 5 est la tangente de la latitude de la lune au-dessus du plan TOME  
III. 27 \

210 MÉCANIQUE CÉLESTE. fixe; -est la projection de son rayon vecteur sur le même plan;  $V$  est l'angle fait par cette projection, et par l'axe des  $x$ ; enfin  $h^*$  est une constante arbitraire dépendante principalement de la distance de la lune à la terre. La valeur précédente de  $Q$  suppose la terre et la lune sphériques. Pour avoir sa vraie valeur due à la non sphéricité de ces corps, nous observerons que par les propriétés du centre de gravité il faut transporter au centre de gravité de la lune,  $i^*$  toutes les forces dont chacune de ses molécules est animée par l'action des molécules de la terre, et diviser leur somme par la masse entière de la lune; 2° les forces dont le centre de gravité de la terre est animé par l'action de la lune, prises en sens contraire. Cela posé, il est facile de voir que  $dM$  étant une molécule de la terre, et  $dm$  une molécule de la lune, dont la distance à la molécule  $dM$  est  $r$ , on aura les forces dont le centre de gravité de la lune est animé dans son mouvement relatif autour de la terre, au moyen des différences partielles de la double intégrale  $(M-f-m) \iint \frac{dm}{r^2}$ .  $dm$   $M$   $m$   $j$   $f$  prises par rapport aux coordonnées du centre de la lune. Ainsi Ton doit substituer cette fonction à , dans l'expression précédente de  $Q$ . Si la lune était sphérique, on pourrait, par le n° 12 du second livre, supposer sa masse entière réunie à son centre de gravité; on aurait donc alors  $\iint \frac{dm}{r^2}$  — égal à la masse  $m$  de la lune, multipliée par la somme de toutes les molécules de la terre, divisées par leurs distances respectives au centre de la lune; en nommant ainsi  $V$  cette somme, on aurait  $\iint \frac{dM}{r} \cdot dm = m.V$ .

SECONDE PARTIE, LIVRE SEPTIÈME. 211 K serait égal à —,  
si la terre était sphérique; en désignant donc F par 5 F, m.

212 MÉCANIQUE CÉLESTE. Prenons pour unité de masse, la somme  $M+m$ , des masses de la terre et de la lune, et observons que  $r \ll a$  et  $\sin i \ll 1$ . Posons  $r = a \sin i$ . Soient  $x, y, z$  les coordonnées du soleil relatives à la terre; nous aurons  $x = a \cos i \cos \theta$ ,  $y = a \cos i \sin \theta$ ,  $z = a \sin i$ . La distance du soleil à la terre étant à très-peu près quatre cents fois plus grande que celle de la lune,  $r$  est très-petit relativement à  $a$ ; ainsi on peut, dans la théorie lunaire, négliger les termes de l'ordre  $r/a$ . On peut encore simplifier les calculs, en prenant pour plan de projection celui de l'écliptique. A la vérité ce dernier plan n'est pas fixe; mais dans son mouvement séculaire, il emporte l'orbite de la lune, de manière que l'inclinaison moyenne de cette orbite sur lui reste constante, en sorte que les phénomènes dépendants de cette inclinaison respective sont toujours les mêmes. 3. Pour le faire voir, nous observerons que  $s$  est, comme il



**The text on this page is estimated to be only 25.81% accurate**

SECONDE PARTIE, LIVRE SEPTIÈME. 213 résulte du n° 59 du second livre, égal à une suite de termes de la forme  $k \cdot \sin. \{t; -+- \text{ if } -f- e\}$  : nous la représenterons par  $S \cdot L \sin. (v - \text{hif} - \text{he})$ ,  $i$  étant un coefficient extrêmement petit dont nous négligerons le produit par  $\mu$ . La valeur de  $s$  sera, en négligeant les quantités de Tordre 5% égale à  $S \cdot Jt \cdot \sin. \{t; -+- \text{ it} - h - \wedge\} - s^\wedge$ ,  $s^\wedge$  étant la tangente de la latitude de la lune au-dessus de l'écliptique vraie. Cela posé, on aura  $dv = K \cdot (\xi) - (-)^\wedge \cdot 5 \cdot \cos. (r - v) - u \cdot 2U \cdot \cos. (i; - v) - \text{etc.}$  2 a  $S \cdot \cos. (v - v') [ - \wedge \cdot \sin. (t? - V) - s \cdot$  En substituant dans le second membre de cette équation, au lieu de  $5$ ,  $S \cdot \sin. (r - \text{Hif} - f - e) \cdot H - 5^\wedge$ ; et au lieu de  $s'$ ,  $S \cdot h \cdot \sin. (v - f - \text{if} - H - e)$ ; il devient  $im' \cdot a'^* ( / A \cdot k' \cdot 5 \cdot tt' ./ A . ) \cdot 1 / f \cdot d\$ \cdot , a - ; - \cdot \cos. (v - v) \cdot 1 \cdot \cos. (i; - v) + \text{etc.}$   $5^\wedge \cdot \cos. (t; - r_j - - \wedge \cdot \sin. v - i; )$  La troisième des équations [L] du n° 1 donne par conséquent,  $dds "7 m', a" 5 + \text{etc.}$   $dv^* - K - / (^\wedge) - ^\wedge r$  ou  $dds |m' \cdot tt'^* 5, . ^ 0 = -j - -4 - 5 - 4 - ' . , , ^ - + - \text{etc.}$  Si Ton néglige les excentricités et les inclinaisons des orbites^ on a  $u = -$ ,  $u = -r$ ;  $a$  et  $a$  étant les moyennes distances du soleil

214 MÉGANIQUE CÉLESTE. et de la lune à la terre : on verra dans le numéro suivant que  $h^a = a k$  fort peu près; on aura donc dds . ,  $a' o = -j-T- H-5- \} -- | m. - r. 5 - \text{hetc.}$  Nommons  $mt$  le moyen mouvement du soleil,  $m n$  exprimant plus ici la masse de la lune; on aura, par le n<sup>o</sup> 16 du second livre,  $m^* = -77$ . Si l'on suppose ensuite que le temps  $t$  soit représenté par le moyen mouvement de la lune, ce que Ton peut toujours faire, on aura  $— = 1$ ; partant, dds  $G = -rT -4-5-f- | -m^*.5 -+- \text{etc.}$  Substituons dans cette équation,  $S. A.: \sin.(i;-i- if-f- e) -h 5$  au lieu de  $5$ , et observons que l'on peut ici changer  $it$  dans  $iv$ ; on aura  $o = -7-^ -H \{ i-+-Ym' \}. 5^ -i-S.i. \{ i — (i-4-i) * j. \sin. (v-f-iî;+e) -\text{Hetc.}$  ce qui donne pour la partie de  $s^$  relative au mouvement séculaire de l'écliptique ,  $2.(2 i + z^*) . A. \sin. (v+iv+e) ' - . m^* — ai — i' '$  Cette dernière quantité est insensible; car  $iv$  s'élevant au plus à cinquante secondes par année, et  $^m^v$ , qui exprime à peu près, comme on le verra dans la suite, le mouvement rétrograde du nœud, surpassant  $20''$ ,  $-m'$  est au moins quatre mille fois plus grand que  $qi$ ; on peut donc négliger le terme  $S.Lji — (iH-i) * \}$ ,  $\sin. [v + iv-^e)$  dans l'équation différentielle en  $5^$ , et alors cette équation est indépendante de tout ce qui a rapport au mouvement séculaire de

**The text on this page is estimated to be only 29.38% accurate**

## SECONDE PARTIE, LIVRE SEPTIÈME. 215 Téquiptique.

Uinclinaison moyenne de Torbite lunaire à Técliptique vraie est une des arbitraires de Tintégraie de cette équation; on voit donc qu'à raison de la rapidité du mouvement des nœuds de la lune, cette inclinaison est constante^ et la latitude s^ de la lune au-dessus de Técliptique vraie est la même que dans le cas où cette équiptique serait immobile; nous pourrons conséquemment supposer dans les recherches suivantes  $s = 0$  ce qui simplifiera les calculs. Nous aurons de cette manière, en négligeant les quantités des ordres  $m' u' 5^*$ , et  $m' u'$ ,  $a$ ,  $m' a' Q = -hm'uH 7^{\wedge}, ji-4-3\cos. (2t; - 2v) - 25M m' n'^* -4- g \setminus \{3 (1 - 45').\cos.(v - v')-f-5\cos.(3i; - 3w')\}$ ; d'où l'on tire, en négligeant les quantités de l'ordre  $m' a'^* 5\% -y - )+-.|-j-^{\wedge}= r^{\wedge}. 1 + 3C0S.\{21>- 2V) \setminus dtt/ u \setminus ds ; (+, \ll)r 2\ll^{\wedge} 8T\sim\{ (3 - 45'). \cos,(i;- v') + 5 \cos.(3i; - '6v) \setminus , H=^{\wedge}.\sin.(2i;- 2v')^{\wedge}.\{3(i- 45^*).\sin.(i;- i;')+i5\sin.(3\hat{i}; - i^{\wedge}\hat{i};')''\}$ ,  $(dQ \setminus us m'.u^{\wedge}s 3m'.a'^*5 , ,v 4$ . Pour intégrer les équations (L) du  $n^{**} I$ , nous observerons que sans la force perturbatrice du soleil, la lune décrirait une ellipse dont le centre de la terre occuperait un des foyers. On aurait alors par le n° 16 du second livre,  $5=:y.\sin. [v - 0)$ ,

216 MÉCANIQUE CÉLESTE. équations dans lesquelles  $y$  est la tangente de l'inclinaison de l'orbite lunaire;  $d$  est la longitude de son nœud ascendant;  $e$  et  $i$  sont deux arbitraires dépendantes principalement de l'excentricité de l'orbite, et de la position du périhélie,  $y$  et  $\theta$  sont des quantités fort petites : en négligeant la quatrième puissance de  $y$ , on aura

$$r = K(1 + y^2) \frac{1}{1 - \theta^2} - g -$$

SECONDE PARTIE, LIVRE SEPTIÈME. 217 Les coefficients de cette intégrale sont un peu modifiés par l'action du soleil, comme on le verra dans la suite. Dans l'hypothèse elliptique, le coefficient de  $v$  de cette expression est, par le n° 16 du second livre, égal à  $a'$  ; ce qui donne  $a$  étant le demi-grand axe de l'ellipse; on a donc alors  $h = a^\wedge \cdot [i - \pm e^\wedge - \pm Y]$ ; et par conséquent,  $n = -\cdot i + e' + y^\wedge + e \cdot \{i + e^\wedge\} \cdot \cos. \{cv - \wedge\} - y \cdot \cos. [2gv - 2d]$ . En faisant ensuite  $n = a$  on aura  $nt + e = v \cdot (i - \bullet^\wedge) \cdot \sin. (c\hat{i} - ttT) + y - \cdot \sin. (2C\hat{i} - atsr) - Y - \sin. (3ct - 3ttT) + \wedge \cdot \sin. (2^\wedge \hat{i} - 20) - Ti - \cdot - z \cdot \sin. (2qv + cv - 20 - \wedge) - \cdot, \wedge - r \cdot \sin. (c\hat{o} - ci - 20 - Hsr), 4\{25f + c\}^\wedge^\wedge^\wedge^\wedge \cdot (i\hat{j}f - c)^\wedge^\wedge^\wedge^\wedge$   $e$  étant une arbitraire. Dans la substitution de  $nt - he$ , on pourra supposer  $c$  et  $\wedge$  égaux à l'unité, et négliger les quantités de l'ordre  $e$  ou  $ey$  dans les coefficients des sinus. On aura ainsi, en conservant le terme dépendant de  $\sin. (2j\hat{f} - cv - 20 - 4 - \ll)$ , qui nous sera utile,  $?if + e = t; - 2c \cdot \sin. (c\hat{i} - ttT) - \cdot - e^\bullet \cdot \sin. (2ct - 2ttT) + -j - y^\bullet \cdot \sin. (2^\wedge v - 20)$  En marquant d'un trait pour le soleil les quantités relatives à la lune, et observant que  $y = 0$ , on aura  $n'f - h e' = t; ' - 2e \cdot \sin. [cv - \wedge]^\wedge \cdot \sin. (2cV - 2^\wedge)$ ,  $a' = ly \cdot [i^\wedge e'' - e \cdot [\wedge - e'] \cdot \cos. \{cv - \wedge\}]$ . TOME III. 28

**The text on this page is estimated to be only 28.73% accurate**

218 MÉCANIQUE CÉLESTE. L'origine du temps  $t$  étant arbitraire, nous pouvons supposer  $e$  et  $e$  nuls, et alors en faisant  $— = m$ , la comparaison des valeurs de  $71 f$  et de  $ut$  donnera  $V — 2e.s\backslash n. \{cv — 'cy'j - Hy^{\wedge} - \wedge^{\wedge} * !^{\wedge} \wedge^{\wedge} — 2'®') = mv — 2m^{\wedge}. \sin.(ri; — ^) -] - \sim \text{messin. } [2c v — 2^{\wedge}) - hjm.y\backslash s\backslash n. [2gv — 26) — \backslash mey\backslash \sin. [2gv — cv — ^d-h'ts]; d'où Ton tire, en observant que  $c$  est extrêmement peu différent de l'unité,  $v =: mv — 2me.s\backslash n. [cv — ^) - + - j^{\wedge} me\backslash s\backslash u. (2 ci; — 2^{\wedge}) - f - Ymy'. \sin. [^{\wedge} f j v — 26) — ^{\wedge} mey\backslash \sin. [2 g v — cv — 2 0 - + - ttr) - [-2e.[i — jc']. \sin. [cmv — 'U!f) — 2mee.s\backslash n. [cv + cmv - - '& — ^) — 2mer . \sin. cv — cmv — ^ - \ - ^) \sim \backslash - \backslash e\backslash \sin. [2cmv — 2'Ts')j , \_ 1 (1 + ^'. (1 — ye') . \cos. [cmv — ^) + e\backslash \cos.(2cmr — 2tar') a i - \backslash - mee . \cos. [cv — cmv — 'cs + 'af) — mec . coi > . [cv + cmv — "cs — ^) ) 5. On substituera ces valeurs de  $u$ ,  $u$ ,  $s$  et  $v$ , dans l'expression de  $Q$  et de ses différences partielles , que l'on développera ainsi en sinus et cosinus d'angles proportionnels à  $v$ ; mais il est nécessaire, pour ce développement, d'établir quelques principes relatifs au degré de petitesse des quantités qui entrent dans ces fonctions, et à l'influence des intégrations successives sur leurs différents termes. La valeur de  $m$  est à peu près égale à la fraction  $— ^r$  : nous la regarderons comme une quantité très-petite du premier ordre. Les excentricités des orbites du soleil et de la lune, et l'inclinaison de l'orbite lunaire à récliptique, sont à peu près du même degré de petitesse : nous regarderons ainsi les carrés et les produits de ces quantités comme très-petits du second ordre; leurs cubes et leurs produits de trois dimensions comme très-petits$$

r SECONDE PARTIE, LIVRE SEPTIEME. 219 du troisième  
 ordre, et ainsi de suite. La force perturbatrice du soleil est de Tordre  $\frac{1}{2}$ ,  
 et Ton a vu dans le n° 3 que cette quantité est de Tordre  $m'$ , ou du second  
 ordre. La fraction  $\frac{1}{7}$  étant à peu près égale à  $\frac{1}{2}$ , elle peut être considérée  
 comme étant du second ordre. Nous porterons d'abord les approximations  
 jusqu'aux inégalités du troisième ordre inclusivement, et dans le calcul de  
 ces inégalités, nous aurons égard aux quantités du quatrième ordre; mais il  
 faut une attention particulière pour ne laisser échapper dans les intégrales  
 aucune quantité de cet ordre. Le développement de la seconde des équations  
 (L) du n° 1 lui donne la forme suivante, ddu  $T..$ ,  $dv^* N^*$  ne différant de  
 Tunité que d'une quantité de Tordre  $m'$ , et  $II$  étant une suite de cosinus de la  
 forme  $k.\cos. [iv \sim he)$ . La partie de  $H$  relative à ce cosinus est, par le n° 41  
 du second livre, égale à  $\frac{1}{2}.\cos.(ii; - + - s)$ ; or il est clair que si  $i^*$  ne diffère  
 de Tunité que d'une quantité de Tordre  $m$ , le terme  $A. \cos. (/t; - f - e)$  acquiert  
 par l'intégration un diviseur de cet ordre, et par conséquent il devient  
 beaucoup plus considérable et de Tordre  $r - 1$ , s'il est de Tordre  $r$ , dans  
 l'équation différentielle. On verra dans la suite que c'est à cela qu'est due la  
 grandeur de Tinégalité nommée évection. Les termes dans lesquels  $i$  est fort  
 petit, et qui ne se rapportent qu'au mouvement du soleil, n'augmentent point  
 par Tintégration, dans la valeur de  $u$ ; mais il est visible, par la première des  
 équations (L) du n° I, que ces termes acquièrent le diviseur  $/$ , par f  
 intégration, dans Texpression du temps  $t$ ; il faut donc faire une 28.

220 MÉCANIQUE CÉLESTE. grande attention à ces termes.

C'est de là que dépend la grandeur de l'équation nommée équation annuelle. Les termes de la forme  $kdv.\sin.[iv'\backslash-e)$  de l'expression de  $|-7^{-\wedge}|,-^{\wedge}$ , acquièrent, par l'intégration de cette expression différentielle, un diviseur de l'ordre  $i$ , dans la valeur de  $u$ ; d'où il semble que dans l'expression du temps  $t$  ils doivent acquérir un diviseur de l'ordre  $i^*$ , ce qui rendrait ces termes fort grands, lorsque  $i$  est très-petit; mais il est essentiel d'observer que cela n'est pas, et que si l'on n'a égard qu'à la première puissance de la force perturbatrice, ces termes n'ont point, dans l'expression du temps, de diviseur de l'ordre  $i$ . Pour le faire voir, nous observerons que, par le chapitre viii du second livre, l'expression de  $V$  en fonction du temps ne peut acquérir de diviseur de l'ordre  $i^*$  que par la fonction  $— 3a.fndt.fàQ$ , la différentielle  $dQ$  étant uniquement relative aux coordonnées de la lune. Si  $Q$  contient un terme de la forme  $/f.\cos.(â-+-e)$ ,  $i$  étant fort petit, ce terme ne peut acquérir un diviseur de l'ordre  $i^*$  qu'autant que  $dQ$  n'acquiert point un multiplicateur de l'ordre  $i$ : la partie de l'angle  $it$  relative à la lune ne peut dépendre que des moyens mouvements de la lune, de son périégée et de ses nœuds, lorsque l'on n'a point égard au carré de la force perturbatrice; cette partie, si  $i$  est fort petit, ne dépend point du moyen mouvement de la lune; elle ne peut donc alors dépendre que des mouvements de son périégée et de ses nœuds. Dans ce cas,  $dQ$  acquiert un multiplicateur de l'ordre de ces mouvements, c'est-à-dire du second ordre; ce qui fait perdre au terme dont il s'agit son diviseur de l'ordre  $i$ . Les angles, croissant avec lenteur, n'ont donc, dans l'expression de la longitude vraie en fonction du temps, qu'un diviseur de l'ordre  $i$ ; et il est aisé d'en conclure que cela a également lieu dans l'expression du temps en fonction de la longitude vraie. Mais, si l'on a égard au carré de la force perturba



SECONDE PARTIE, LIVRE SEPTIÈME. 221

irice, la partie de Tangle it relative aux coordonnées de la lune peut renfermer le moyen mouvement du soleil, et alors la différentielle à Q n acquiert qu'un multiplicateur du premier ordre, ou de l'ordre de m. On pourra, d'après ces principes, juger de l'ordre auquel les divers termes des équations différentielles s'abaissent dans les expressions finies des coordonnées. 6.

Développons, d'après ces considérations, les différents termes de la seconde des équations (L) du n<sup>o</sup> 1. Dans l'hypothèse elliptique, la partie constante de u serait  $-(i - h e' - f - x 7' - + - ^)$  »  $^$  étant une fonction de la quatrième dimension en e et y; et l'on aurait  $A' = a.(i - c^* - 7' - f - S')$ ,  $e'$  étant pareillement une fonction de la quatrième dimension en e et y. L'action du soleil altère cette partie constante de u; mais a étant arbitraire, nous pouvons supposer que  $-(i + e^{\wedge} + y' + e)$  représente toujours la partie constante de u. Dans ce cas, on n'aura plus  $A^* = a.(i - e^* - 7' - + - S')$  • i nous ferons alors  $z = z a.(1 - e^* - / - h e')$ , a étant une arbitraire qui, sans l'action du soleil, coïnciderait avec a. Nous ferons ensuite  $m.a' - m'$ . Cela posé, le terme  $^{\wedge}$  de l'expression de  $_i.(^{\wedge} _J _{.} (^{\wedge})$ , deviendra par son développement  $i - h m a a - 3^{\wedge} .(i - h - 5 - e^* - h | e''). \cos. \{cv - ^{\wedge} \} - H 3 e' .(i - \{-e' - + - / - 4 - | c^*\} . \cos. (cmt; - tsr') - y \{3 - \{-2m\} . ^{\wedge} \} . \cos. (ct; - h cmi; - 'cy - 'cr') - - f - i S - 2m) . ee . \cos. \{cv - cmv - ^{\wedge} - ^{\wedge} \} y - h 3 e^* . \cos, (2 C \hat{i}; - 2 \ll) H - - | - / . \cos. (25 f \hat{i}; - 2 0) H - Y e^* . \cos, (2 cmt; - 2 ^{\wedge}) - - | e 7' . \cos. (2 ^{\wedge} t; - cv - 20 - + - \ll)$

**The text on this page is estimated to be only 8.85% accurate**

222 MECANIQUE CELESTE. Pour développer le terme — rrr-  
 $\wedge \wedge i' \wedge \wedge \wedge \wedge$  Texpression de — j\T^ ) ^T^i'J^)^ ^ ^ ^ ^ alloDS d'abord  
donner le développement de 3m'. tt\*. COS. (21; — 2v). Ce terme  
développé devient /(i — -f-e\* — ^m\e\*).cos.[2v — imv) \ -f- Y e'. COS.  
(21; — 2mv — cmv-h'Uf) — Y^ . COS. (21; — 2mv-hcmv — ^)  
'+-2me.cos.[2v — 2mv-+-cv — tsr) — 2me.cos.(2i; — 2mv — cv-+-^ ) -f-  
YAcos.(2v — 2mv — 2cmvH-2tïr') — Ymee.cos.[2v — 2mv — cv — -  
cmv-f-tsr-h'cy') -hymee. cos.(2i; — 2mv-^cv — cmv — ^tsf-htsr') — -5-  
m^e.cos.(2i; — 2mv-^cV^cmv — ^ — 'cy') -h Y me^'. COS. (21; — 2mv  
— cv-hcmv-h'Uf — W) (3 + 8m) 3m' m. m, -j — ^e\*.cos.(2ct; — 2t;H-  
2mt; — 2^ ) (3-8m) , / . X ^ — 7 — ■' .e\cos.(2a;-h2i; — 2mv — 2^ ) ~-.cos.  
[2gv — 2V'-\ -2mv — 2 0) — y-.cos.(2^vH-2t; — 2inv — 26) T-^ .cos.(2t;  
— 2mn — 2gV'+CV-h2d — tzt)

**The text on this page is estimated to be only 11.07% accurate**

I SECONDE PARTIE, LIVRE SEPTIÈME, 223 Il faut multiplier cette fonction par  $7^{\wedge} -^{\wedge}$ , et Ton a ce facteur en faisant è nul dans le développement précédent de  $'^{\wedge}$ , et en multipliant cette dernière quantité par  $7^-$ ; on aura ainsi, à trèspeu près, en négligeant les quantités qui restent de Tordre  $m^*$  après les intégrations,  $/ (i + \ll^* + x7' - Ye'^*) . \cos.(2i; - ami;) \setminus -^{\wedge} . e.(i + Ye' - | - e'^*) . \cos.(2i; - ami; - cv + ist) - -^{\wedge} .^{\wedge} . \cos.(2i; - 2mv + cî? - tzt) + Ye' . \cos.(2i; - 2 m v - cm r + tar') - \blacksquare je \cos.(2v - 2mi; + c'mi; - 'Of) 21(1 + 21 \gg) il t f \setminus -^{\wedge} 7^- . ee . \cos.[iv' - imv - cv - cmv + "(3 + "& ) 21(1 - 2Wl) , f . , fK^{\wedge} - .^{\wedge} . ee . \cos.(2i; - 2mt; + ct; - -cmt; - tsT + \odot ) I (3 + 2m) , / t i \setminus^{\wedge} , + -^{\wedge} - ; - '- . ee . \cos Aiv -- imv - cv + cmv +^{\wedge} -^{\wedge} ) 3m / 4^{\wedge} ' - 7; - - . \cos.(2i; - 2r) : 2 A \gg , a'^{\wedge} f \setminus 2a' j (3 - 2m) , , , , \setminus \setminus ' + -^{\wedge} - 1 - '- . ee . \cos.yiv - imv + cv + cmv - TS' - m) + ye'^* . \cos.(2t; - 2mv - icmv + i'us') (6 + i5m + 8m') , / x + 7^{\wedge} . e'^* . \cos-. (2ci; - 2r + 2mv - 215) (6 - i5m + 8m') , / . x +^{\wedge} j -^{\wedge} . e \setminus \cos.(2cv + 2t; - imv - im) (3 + 2m) , / . / . v + -^{\wedge} - -r -^{\wedge} )^{\wedge} \setminus \cos.(2^{\wedge} i; - 2i; + 2mt; - 2O) (3 - 2m) , / . / i \setminus + -^{\wedge} -^{\wedge} -^{\wedge} . 7 \setminus \cos. (2^{\wedge} i; + 2t; - 2mt; - 20) 3(2 + m) , / / > \setminus I$

**The text on this page is estimated to be only 27.85% accurate**

224 MÉCANIQUE CÉLESTE. Le terme  $\frac{1}{r} \cos(r - t)$  de l'expression de  $i^{(1)} - i^{(2)}$ , donne les suivants,  $\frac{1}{r} (i - 4 - 2e'' - f - 2eM - 7 \cos(t; - m; i))$  ou  $a''^2 a'''^2 0 m^* a, / , / \_ / v H - \wedge - . -, e \cos. v - mv - hcmv - tsr 8a^2 a'^2 21 m^* a f I , , v H i - . - e \cos. fv - mv - cmv - i - cy )$ , -7 étant, par le numéro précédent, de l'ordre  $m^*$ , les deux premiers de ces termes deviennent de l'ordre  $m'$  par les intégrations. L'inégalité dépendante de l'angle  $v - mv$  étant très-propre à faire connaître la parallaxe du soleil, donnée par le rapport  $-$ , il importe de la déterminer avec un soin particulier: je porterai par cette raison, dans le calcul de cette inégalité, l'approximation jusqu'aux termes de l'ordre  $m^*$  inclusivement. Développons maintenant le terme  $(\wedge) \cdot i$ ,  $i$  de la seconde des équations (L) du n° 1. Ce terme contient d'abord le suivant,  $3m'.tt''$  du  $.$ ,  $f \setminus r \setminus Zm'.u'^2 . , , . \ddot{I} - 7 - - r - - sm.(2i; - iv)$ . On aura  $rr - r - sm.(2r - iv)$ ,  $ih^2.u^2 dv^2 2n'u^2 \wedge'$  en augmentant  $iv$  d'un angle droit, dans le développement  $\text{pré} Q' 's$  cèdent de  $./ \wedge \cos.(2i; - iv)$ . Il faut ensuite multiplier ce développement par  $-T-$  ou par  $-ce. (i - h - j - e^* - y/)$ .  $\sin.(ci; - tsr) - + \setminus ce \setminus S \setminus Ti.[2CV 2^2) - j - c^2. \sin.(3ct; - Stsr) - + - Y^2 y \setminus \sin.(2^2 t; - 2 0) - T^2 7 - \sin.(25fi; - cv - 20 - f - tzt)$ . On aura ainsi

The text on this page is estimated to be only 15.51% accurate

SECONDE PARTIE, LIVRE SEPTIÈME. 225 / .(i+ - — ^^^.é'—  
 \e^\cos. {2v--2mv'--cv + ^) — ce.cos.^iv — ^mv + cv — ^) + Yce^'. cos.(2î;  
 — 2mv— cv— cmr+tsT+tir') — ycee'. cos.(2i;— amv+cv — cmi;— ist +  
 'Of') — ^cee . cos.[2v — 2mv — cv + c'niv+tsT— tzt') ■7— — .-j-.Sin.(2r-  
 -2V )=-7- - / V / X ft o av ^^\* +2c.(i— m) .e".cos.(2ct;+2t;— 2mr — 213?)  
 4mc. e\*.cos,(2t;—2mv) — ^y.cos.(2^t?— 2t;+2mv — 2 0) +^y'.cos.(2^i;4-  
 2t;--2mt;— 2 0) (2— 5m) , , . . n \ ^ — y — ^-ey\cos.[2v—2mv — 2gv +  
 cv + 20'-^j Les termes de l'expression de f^j. . ° , ne produisent aucune  
 inégalité de troisième ordre dans les intégrales. Développons enfin le terme  
 ^ . l [-j^] •— r- Ce terme contient le suivant, -j—. l ^ \^sin.(2t;— 21;'). Le  
 développement précédent de — T^cos.(2v—2v) donne celui de rrV--sin.  
 (2v— 2v'), en y augmentant 2v d'un angle droit, et en multipliant par - ou  
 par \ — e. (1 — -J-e" — -|-/).cos.(cr — ^)^ 2a. |-|±^ . cos.(2ct; — 2tir) 1-4-  
 77\*. cos.(2^i; — 20) l^y'- COS. (2^1; CV 20-1-'©) TOME III. 10

**The text on this page is estimated to be only 6.83% accurate**

226 MECANIQUE CELESTE. On aura ainsi  $3m' r u \backslash dv . / , v^2 -$   
 $2m \cos.[2v - 2mv)^2 IL \_ ^ | i4.A^i \_ \pm y i \_ Ag'^* j^{^^} cQs.^2i;--2mt; - cv+tsT^$   
 $i - 2m - c^2 (i - m , V - ^ . e . \cos.[2v - 2mv + cv - 'Ui] 2 - 2 7n4-C H , ^ , ,$   
 $- r . \cos.(2v - 2mt; - cmv + 'cy')^2 (2 - 3m) ^ ^ \cos. (2 1; - 2 mv + cm$   
 $v - 'cy')^2 (2 - m) 7(2+3m).ee' / ' . . '\ - ' - ) 7i - - - T.\cos. 2v--2mv -$   
 $cv - cmr + 'OF + tar 2(2 - om - c) ^ ' 7 (2 - 3 m). ce' / , , /x - -M T, - -$   
 $- T.\cos. 21; - 2m\hat{i}; + ci; - cmr - tST + 'CT 2(2 - om + c) ^ ' o - , a /$   
 $\{2+m).ee , , , . \_ , n a^ \ 2(2 - m - c) ^ ^ (2 - m).ee' , / /x + - ^ - 7 ^$   
 $r^ . \cos A 2v - 2mv + cv + cmv - 'ts - 'ts ] 2 (2 - m + c) ^ ^ (io + iqm +$   
 $8mM ^ / , \_ ^ v 4(2C - 2 + 2m) ^ ' + ^ " - r - , - \{ . e \backslash \cos A 2cv + 2v - 2mv - 2^ ]$   
 $4(2C + 2 - 2m) ^ ' 4(2gf - 2 + 2m) ' V J / (2 - m) ^ f ^ v 4(2(/ + 2 - 2m) ^$   
 $V \ll 7 / 1 ' 7 H 7 - ^ - r . (? '* . \cos.(2i; - 2m\hat{i}; - 2cm\hat{i}; + 2'cy')^2 [2 - km) ^$   
 $^ (5 + m) , , ^ 4(2 - 2m - 2(/ + c) ' ^ \ll ^$  Dans cette formule, les termes  
dépendants des angles  $2CV - 2v - f - 2m\hat{i}; - 2'cy$  et  $2gv - 2i; H - 2mv - 20$

SECONDE PARTIE, LIVRE SEPTIÈME. 227 ont des diviseurs de Tordre  $m$ , et ils acquièrent de nouveau ces diviseurs par l'intégration, dans l'expression de la longitude moyenne de la lune; ce qui les réduit au second ordre, et ce qui semble devoir donner de grandes valeurs aux inégalités relatives à ces angles. Mais on doit observer que, par le  $n^{*5}$ , les termes qui ont pour diviseur le carré du coefficient de  $v$  (ians ces angles se détruisent. à très-peu près, dans l'expression de la longitude moyenne; en sorte que les inégalités dont il s'agit deviennent du troisième ordre et conformes au résultat des observations, comme on le verra dans la suite. On peut se dispenser, par cette raison, de considérer, dans le calcul de ces inégalités, les quantités multipliées par  $e$ ,  $y$  et  $y^*$ ; car les quantités du quatrième ordre qui en résultent après les intégrations se détruisent à très-peu près. L'intégrale  $\int i-j^y$  contient encore le terme  $3m^2 \int \frac{dn}{dv} dv$ .  $\int \frac{f}{M} \sin(i - V)$ ; ce terme donne les suivants,  $i - \frac{1}{2} Lj! i - i^* \cos Av - mv) \int \frac{m^2}{m^2} 3m^2 a a \dots, e \cos Av - mr - hc' mi; \int \cos(v - mv - cmv - Hcr')^1 - 2$  in les autres termes de la même intégrale peuvent être ici négligés. Cela posé, si Ton observe que l'expression de  $n$ , du  $n^{*4}$ , donne  $f(i - cn.e \cos Acv - m) \int J \int J$  le terme  $(-^{*}) - ir - (t^{\wedge})^{\wedge \wedge \wedge \wedge}$  seconde des équations (L) 20.

The text on this page is estimated to be only 7.45% accurate

228 MÉGANIQUE CÉLESTE du n° 1 , donnera par son  
développement • cos.fat;— amr) ( 1— C\* 2(l+'w) / 7 • n m) /\ + -77 r ^^  
^•(l+T^—T^ ) .e.C0S.(2V— 2mt?— Clî+ISy) (a(i— Wl) 2— 2m— C V \* 2  
/) \ / 2(1— m) , . V 2— 2W+C ^ ' H T-^-ô — r.cos.(2t;— 2mi; — cmv+tîT')  
2(2— 3 m) ^ ' .cos.(2î;— 2 mt; + cm t;—«') 2 (2— m) 7(2+3m) , f f f\ P—  
5 V.ee.cos.(2t; — 2mv— cv — cmr+tsT+tST ) 2(2— 3 m— c) ^ ' 7(2 — 3  
m) , / . / ,x P— ô ^ .ee.cos.(2t; — 2mt;+ct;— cmt;— tsr+tsT ) 2(2— 3m+c)  
^ ' (2+m) , I t i\ ^ ^— T. ee.cos.(2t; — 2mv— cv + cmv+tsr— ta? + 2 (2—  
m— c) 3m" -( / "^^ , . ^e'.cos.(2t; — 2mî;+ci;+cmi;— «— «') — •/ 2 (2—  
m+c) ^ ' ' \ (lO+iom+Sm\*) , / . \ — ^-T-, — r^.c\ cos.(2ci;— 2i;+2mt; —  
2«j) 4 (2 c— 2+2 m) ^ ' (10— lom+Sm\*) - , X + S-7 — r^ . ^ . cos.{2Ci;+  
2î;— 2mt;— 215) 4(2C+2— 2 m) ^ ' + H — 7-^-î — r.cos.(2î;— 2mt;—  
2cmt;+2'cr') 2(2— 4m) ^ ' ( 5+»» 3(1— m) ) , / fi \ — -r-7 — \ + -7-7-^ f-T  
.ey'.cos. (2 r— 2 mv— 2 ai;+ctH-2 O-^or) (4(2— am- 2j+c) 4(2— 2m-f-c))  
^ ^ «^ ' + ^ — 7^7 r-^-T.cos.fi; — mv) 4(i— m) a ^ ' a + y -T. c . cos.(t;—  
mu + cm t; —tsr' ) + -7-7 r.-7.c.cos.(v— mv— cmu+tj') 4(1— 2 m) a ^ '



**The text on this page is estimated to be only 17.78% accurate**

SECONDE PARTIE, LIVRE SEPTIÈME. 229 1. Le terme —  $-5^{\wedge}$  de l'expression de  $\_i. /^{\wedge} s\_ (dQ\backslash$  devient, en négligeant les inégalités du quatrième ordre,  $S''$  étant une fonction de la quatrième dimension en  $e$  et  $y$ , et  $h$  étant la partie de  $5$  due à l'action de la force perturbatrice. On verra ci-après que  $5$  est de cette forme,  $\S 5 = 5'^{\wedge} y.\sin.(2t; — 2mv — gv-i-d) - hB^{\wedge\wedge}K y.\sin.(2t; — 2mv-\backslash-gv — 6) -t-5,^{\wedge*^{\wedge}}cy.\sin.(^{\wedge}t;H-cv — 0 — ^{\wedge}) - hB^{\wedge\wedge}Key.\sin.i^{\wedge}v — cv — \hat{O}-f-isr) . -t-J5,^{\wedge*^{\wedge}}ey.\sin.(2t; — 2mv — ^{\wedge}v-hcv-h -^{\wedge}BJ*Key.sm.[2v — smv-t-^{\wedge}t? — cv — -h-B,^{\wedge*^{\wedge}}.ey.\sin.(2i; — 2mv — gv — cv-f-h 5'^{\wedge} . e y .\sin. [gv-hcmv — 6 — ^{\wedge} ) -h B'^{\wedge} . e y .\sin. \{gv — cmv — d -4- tsr' ) -f-5/^{\wedge}ey.\sin.\{2t; — 2mv — gv-\backslash-cmv -i-5/^{\wedge}ey.\sin.(2v — 2mv — gv — cmvH-£.^{\wedge\wedge}e'y.\sin.(2ct; — gv — 2«-f-0) -f-£,^{\wedge\wedge}e^{\wedge}.\sin.(2v — 2mv — 2cv-^{\wedge}gv-0 — «) ■0 — tsr') 27S 9) -f-5/^{\wedge}e^{\wedge}.\sin.(2ct;H-^{\wedge}t; — 2t;-4-2mt; — 2tar — B) -f-J5,^{\wedge\wedge} — .y.\sin.(^{\wedge}t; — v-^{\wedge}-mv — 6) -t-J5,^{\wedge\wedge} — .y.\sin.(^{\wedge}i;-ht; — mv — B) : les nombres placés au bas de la lettre B indiquent l'ordre de cette lettre; ainsi,  $5/^{\wedge}$  est du premier ordre; B seç r$

**The text on this page is estimated to be only 27.20% accurate**

230 MÉCANIQUE CÉLESTE. ordre; et  $1^{\wedge, ''}$  est fini. On peut observer que cela a lieu, suivant que le nombre qui multiplie l'angle  $v$  dans le sinus correspondant diffère de l'unité, d'une quantité de l'ordre  $m$ ; ou d'un nombre fini, c'est-à-dire, de l'ordre zéro; ou d'une quantité de l'ordre  $m^*$ ; parce que l'intégration fait acquérir à ces termes un diviseur du même ordre. On aura, cela posé,  $34.^4_3_3_{aa}, _3_2a, J_2a, J_2a_3_2a, _3_2a, J^2a, _3_2a, _3_2a, _3_2a. j5, w - i5, ''|.7'. \cos. \{2t; - amr\}$   
 $B, '^\circ *.y'. \cos. (2w - amv - 2^w-f-20) jB. '*-hB wj. ey \cos. (cw - tar)$   
 $B^{\wedge \wedge} Key^{\wedge} . \cos. [igv - cv - 20-) - ' \odot) J5, w. ey'. \cos. (2w - imv - igv - \backslash - cv - it - iB - xs] \{5, ^'' - B/'\} . c\}'' . \cos. (2 \gg - 2mw - cv - \backslash \sim ts)$   
 $j\pounds/' )_4_5 WJ. e'y \ll . \cos. (c'TOt; - \ll') J5, '*'. e'7'. \cos. (2i; - - xmv - ^ - c'mv - ta')$   
 $B/' '*'. c'y'. \cos. (2w - 2TOti - c'mv - ^ - ts') J5, '''. e*y*. \cos. (2cw - 2 - \odot)$   
 $jB. '' H-B, ''j. ^ . y*. \cos. \{v - m \ll\}$ . Si l'on réunit les différents termes que nous venons de développer, la seconde des équations (L), du n° 1, prendra cette forme,  $dda, , o = -j - f - a - f - n,$

**The text on this page is estimated to be only 21.14% accurate**

SECONDE PARTIE, LIVRE SEPTIÈME. 231 n étant une fonction rationnelle et entière de constantes, de sinus et de cosinus d angles proportionnels kv; mais comme nous nous proposons d'avoir égard à toutes les inégalités du troisième ordre, et aux quantités du quatrième ordre qui les multiplient, il faut joindre aux termes précédents tous ceux qui, dépendants du carré de la force perturbatrice, deviennent de ces ordres, par les intégrations. Analysons ces nouveaux termes. 8. Pour cela, supposons que hu soit la partie de u due à la force perturbatrice, et que Ton ait  $a_8 u = \hat{A}^{\wedge\wedge} K \cos.[2v - imv) 'A^{\wedge\wedge} K e. \cos.(2t; - 2mr - cv - htsr) i4, ^{*^} e. \cos. (qv - 2mi; - t - ci; - ^) - il, ^{\wedge\wedge} e. \cos.(2i; - imv - ^{cmv} - ^) - i4, ^{*^} e. \cos. \{2t; - imv - cmv - h'CT') 'A^{\wedge\wedge} K e. \cos. (cm v - ^) - f - i4 | ^{*^} ee. \cos. [iv - imv - cv - t - c' mv - j - tsr - ^a) - f - i4 J^{\wedge} ee. cxys. [iv - imv - cv - cmv H - 'CTH - 'cy) - hili^{\wedge\wedge} ee'. \cos^{\wedge} cv - ^{cmv} - ^ - tsr) H - idj^{\wedge\wedge} ^e. \cos.(ci; - cmv - 'cr - h'©) - j - ij^{\wedge\wedge} e*. \cos.(2cî; - im) - f - i4, ^{\wedge\wedge} e*. \cos.(2ci; - 2i; - \{-2inv - 21\}) - + - i4, ^{\wedge\wedge} y \cos.[i2V - 20) _^{\wedge\wedge} (i3j yi \cos.(25fi; - 2î; - f - 2î?ii; - 20) - \ - A^{\wedge\wedge} K e \cos [icmv - 2®) - t - >4, ^{\wedge\wedge\wedge} \cos.(2^t; - cv - 2 0 - h'cr) - l - i4 / ^{\wedge\wedge} ey'. \cos.(2i; - imv - 2^1; - ! - cv - f - a 0 - - cr) - i4 / ^{\wedge\wedge} - T. \cos.(t; - mv) i4 o^{\wedge\wedge} - T. «'. \cos.(t; - mv' + 'cmv - «') - i4 / ^{\wedge\wedge} - T. e'. \cos.(i; - mv - c' mv - htir') : a ^{'$

232 MÉCANIQUE CÉLESTE. les nombres 0,1,2, placés au bas de la lettre A, indiquent que la quantité est de Tordre zéro, ou de Tordre m, ou de Tordre m\ Je ne considère ici que les inégalités du troisième ordre, et celles qui, étant du quatrième, peuvent produire les quantités du quatrième ordre, dans les coefficients des inégalités du troisième- Je porte l'approximation plus loin, relativement à l'inégalité dépendante de  $\cos.lv - mv$ ). Cela posé, le terme  $\frac{1}{2} A^2$  donne par sa variation le suivant  $-\frac{1}{2} \frac{dA^2}{dt}$  ; et il en résulte la fonction  $\frac{1}{2} A^2 \frac{dK}{dt} \cos.(2t; - 27111; - cr + tT) + 2 A \frac{dK}{dt} \cos.[2v - 2mV - 2cv + 2\wedge) + \frac{1}{2} i^4 \frac{d^4 e}{dt^4} \cos.(2i; - 2mi; - cr + cmv + tsr - tZR)$   $\frac{1}{2} Y i^4 \frac{d^4 c}{dt^4} \cos.(2v - 27111; - cv - c'mv + \wedge + 'Cj') - \frac{1}{2} i^4 \frac{d^4 e}{dt^4} - 7 - e \cos.(i; - Tnv + cmi; - 'Of) + jA \frac{dK}{dt} - T.e' \cos.[v - mv - cmv + 'Vs') + i^4 \frac{d^4 e}{dt^4} \cos.\{v - mv) + 1$  u éprouve une variation par la variation de v qui dépend du temps t, et de ses inégalités en fonction de v; mais ces inégalités sont multipliées par m, dans l'expression de v, et de plus, par e dans l'expression de u ; on peut donc d'abord négliger ici, sans erreur sensible, la variation  $\frac{1}{2} u$ . Nous aurons bientôt égard au terme de cette variation, qui dépend de l'action de la lune sur la terre. Le terme  $-\frac{1}{2} T^2 \cos.(2i; - 21;)$  a pour variation  $-\frac{1}{2} T^2 \frac{dT}{dt} - T \cos.[2v - 2v) + 3i \frac{dT}{dt} - 2v$ ).

# 9^ SECONDE PARTIE, LIVRE SEPTIÈME. 233 Si Ton

substitue au lieu de Su sa valeur précédente, on trouve que le premier de ces deux termes donne la fonction + {3i4,^«î+i4.^+^^\*^|.^.cos.(cmî;~^') + {A/\*^+Y4/\*^j.ee'. cos.(ci;---cmî;— 'cr+'cr') 4- {i/'^li/'^l.^'.cos.jcv-cmv - '©-'©') -\A^^\*Kee.cos.[2v—2mv—cv--cmv+'rs+^') -hA^^^\*Key^.cos.{2v — 2mv—2gv+cv+20—^} a + \A,^^^-\A,^^Ke\ .-T. COS. [v-mv) a + {i4/"J- |>l,^"îj.^'.e'.cos.(i;-mî;+cmî;- 'cr') + \A.^^^+^A,^^^\.^.e.cos.{v-mv-cmv+^') ahu contient un terme dépendant de cos. (3i; — Smt;), que nous avons négligé à cause de sa petitesse; mais comme il peut influencer sur le terme dépendant de cos.(i; — mv), nous aurons égard à cette influence. Pour cela, désignons-le par X,— .cos.(3v — 3mr); la fonction — ^-tt-t- 5u.cos.(2r — 2v) donnera le terme, 2A\*. tt\* ^ ^ ^ — .Aj.-r.cos.fv — mv). ka 3m'.tt'^ Pour développer la variation -rr-V"- ^^ - ^^-(^^ — 2v), nous observerons que Sv contient, par le n° 4, les mêmes inégalités que Texpression de la longitude moyenne de la lune, en fonction de sa longitude vraie; mais elles y sont multipliées par la petite TOUE III. 30

**The text on this page is estimated to be only 29.45% accurate**

234 MÉCANIQUE CÉLESTE. quantité  $m$ . Il suffit ici d'avoir égard aux termes dans lesquels le coefficient de  $v$  diffère peu de l'unité; et il est aisé de voir que le terme  $e \cos.[cv - \odot)$  de l'expression de  $au$ , donnant par  $len^{**} 4$ , dans  $\hat{a}v$ , le terme  $- am^{\wedge} \sin.[cv - 'cr)$ ; un terme quelconque de  $aSu$ , tel que  $L \cos.(iv - he)$ , dans lequel  $i$  diffère peu de l'unité, donne à fort peu près dans  $Sv$ , le terme  $- 2mL \sin.(it; - he)$ . On trouve ainsi que la variation précédente donne par son développement la fonction  $im.A^{\wedge\wedge}Ke.[i \sim e^*).\cos.[cV' - ^{\wedge}) + m.A,^{\wedge}\backslash ey \backslash \cos.[2v - imv - 2gv + cv + 2d' - ^{\wedge})^{\wedge\wedge} 1 + m. i4/"^{\wedge} - . \cos.iv - mv] I a^{\wedge}' \backslash + m. A^{\wedge}*^{\wedge} . - r . e . \cos.iv - mv - ^{\wedge}cmv + "Cs'] \ a^{\wedge}'$  les autres termes de ce développement sont insensibles. Les termes  $Q\hat{A}\ll' 4 \gg \{3\cos.(i; - t;') - + - 5\cos.(3v - 3v )\}$ , de l'expression de  $h^{\wedge\backslash\backslash da)'^{\wedge} u\backslash ds)y$  ont pour variation ,  $.- . \{3\cos.(t; - mi;)-f-5\cos.(3t; - 3mi;);j; aa. a$  en substituant pour  $a\hat{e}u$ ,  $i.^{\wedge\wedge}\cos. (av - amr)$ ; il en résulte le terme  $. il/*^{\wedge} . - . \cos. (t; - mv] . a, a^{\wedge}'$

**The text on this page is estimated to be only 11.64% accurate**

SECONDE PARTIE, LIVRE SEPTIÈME. 235 La variation du  
terme  $3 m'. a'^* du . f, . 2A^*.a^* dv ^ '$  peut se réduire aux termes suivants,  
 $6m'.a'^* (itt Su . , , . ^m.u'^ dSu . , , s -71 — T'-j''- — .sm. 2t;— 2v \ddot{r}- — -. \hat{r}$   
 $— .sm.(2t;— 2t; A', a^* dv u ^ ' 2n \backslash u ^ dv ^ ^ 3m'.tt'^*.Jt;' du , , v + A'. \ll ' ^ \bullet \cos.$   
 $(av-2t>);$  ces termes, par leur développement, produisent la quantité /  $a(i-$   
 $m).iw.(i-|e'') + \{6(i-m). i4.'''+ (2-/n).4''' + (2-3in).i4,w\}. e'.\cos.(c'in \ll -'Br') +$   
 $1(2— 3m— c).i4,'''— \blacksquare 5-(2— am— c).y4,wj.ce. \cos.(ct; + cmv— 1 \gg -^ \odot')$   
 $4-j \{2— m— c\}.i4,'*'+-|-(2— 2m— c).i4,— cTOw-^ -Htsr') + \{c —$   
 $m).y4/'*.ee. \cos.(2 \gg — 2mr— cw + cmw+isy— - \odot') , \_ , 4- (c+m). 4,'*'. ec'.$   
 $(\cos. 2 \gg — 2mv— cv— c'mr+' \odot +'or') + \{ a ^ ' > .ey'. \cos.(2^w— cr— aO+t \gg )$   
 $(+(2— 2m— 25f4-c).i.'''') A, ^{*}Key'.\cos.[iv— 2mv— 2gv+cv+iiB— 'a) +$   
 $t(i-m).4,'''-|i.''''). e''4-3 (i-m) . X.\} . ^ . \cos. (u-mr) + j (1— 2m). >!,— 4- (1—$   
 $m). 4,'''j. ^- e. \cos.(t;— mw+cmu-- \odot') i+ji, — omv)|.-r.-T— ; 4a$

**The text on this page is estimated to be only 18.30% accurate**

236 MÉCANIQUE CÉLESTE, et il en résulte la quantité 4a a La  
fonction — .{i—m).AJ"K -T.cos.(t;— mr). dda ' ) " J \^^ / " contient d'abord  
le terme ddu 1 r/3m'.u'.dv . , ,A sa variation est dv Su . f ,v + \hv' . COS. (2t;  
— 2v) \m' -p^{i+|y\cos.(25ft;-20)j.j-j^ 9 m' ru'\Su' j . f M Le  
développement de ces termes donne, en observant que c est à très-peu près i  
—\m% et que g est à très-peu près i+ jm\*, y+(a-2m-c)'j ^ (o \_i//^ \_^y\_j{i j  
'+''» , '-''« ) ^ w) ^ .i4/l.



The text on this page is estimated to be only 13.04% accurate

SECONDE PARTIE, LIVRE SEPTIÈME. 237 — ; — 5 T.ee.cos.  
 $(2v - 2mv - 'CV - cmv + ^{++}) a^{.}(2 - 3 m - c) ^{^} 6m \backslash i4W , 7 -$   
T.ee.cosA2v—2mv-'CV+cmv + 'CS-'<sup>^</sup>) 7 r- M/\*<sup>^</sup>+T/\*<sup>^</sup>l .ee'.cos.fci;— cuir  
— 'cr+'cr') a<sup>^</sup>.(c — m) \* <sup>^</sup>'<sup>^</sup>' fi 1<sup>^</sup>\* H 7 ; r. e\*.cos.(2Cî;— 2i; + 27ni; —  
Q'cr) a<sup>^</sup>.(2c— 2 + 2m) <sup>^</sup><sup>^</sup> H 7 î r.y.cos.fiûft; — 2t;+2mv — 20) a<sup>^</sup>.(2<sup>^</sup>—  
2+2m) <sup>^</sup><sup>^</sup><sup>^</sup> i J2i4/"J-i/"<sup>^</sup>+Ç.i/<sup>^</sup><sup>^</sup>j • <sup>^</sup>y<sup>^</sup> cos.(25fi;-cv 7 r.<sup>^</sup>y.cos.(2t;— 2mv  
— 2ûfi;+ct;4-2 0 — tar) a<sup>^</sup>.(2 — 2111 — 2<sup>^</sup> + c) '<sup>^</sup>'<sup>^</sup>' 6 m' a. 1<sup>^</sup>(1— 2 m)  
\* <sup>^</sup>'<sup>^</sup>' a <sup>^</sup>' On doit observer ici que C»<sup>^</sup>\*<sup>^</sup>sin.(2i; — imv) est Tinégalité  
dépendante de sin.(2t; — imv) dans l'expression de la longitude moyenne  
de la lune, en fonction de sa longitude vraie; C,<sup>^</sup>\*\e'.sin.(2i;— 2mî;+cmi;—  
W) et C,<sup>^</sup>""<sup>^</sup>e,sin.(2i;— 2mi;— cW— 'cr') sont les inégalités dépendantes  
des angles iv — imv-<sup>^</sup>-cmv — 'cr' et IV — imv — crtiv-<sup>^</sup><sup>^</sup>', dans la même  
expression. On peut observer encore que le terme <sup>^</sup>.j4<sup>^</sup><sup>^</sup>»<sup>^</sup> + i/'<sup>^</sup>—  
i.<sup>^</sup>\*Jj.e'.cos.(cmt; — tsr')

238 MÉCANIQUE CÉLESTE. paraît être de Tordre  $m^*$ , ce qui produirait une quantité de Tordre  $m$  dans l'expression de la longitude moyenne de la lune; mais ce terme n'est véritablement que de Tordre  $m^*$ ; car on verra, par les valeurs que nous donnerons ci-après de  $A'' A^{*''}$  et il,  $^{*''}$  que la fonction  $I x A^{*''} - \{ - A^{*''} - A^{*''} \}$  est de Tordre  $m'$ ; il n'en résulte donc qu'un terme de Tordre  $m^*$  dans l'expression de la longitude moyenne. Nous le conservons ici, parce que nous nous sommes imposé la loi de conserver les termes de cet ordre dans le calcul des inégalités du troisième ordre. Il est indispensable, par cette raison, dans le développement  $j \ 3m'tt \ ra'' dv . , \ j^i \cdot \cdot$  de  $Tj - . I - . sm. (2v - iv \ j, \text{ de porter la précision jusqu'aux quantités de Tordre } Su^*; \text{ il en résulte le terme } \ o \ m'a \ ru \ Su^* \ i \cdot / \wedge - yTT - \cdot ( \wedge, . rfi; . sin. (2i; - 21; ) .$  Ce terme produit le suivant,  $1 \ 5 \ m' \ (i4 \ J^*J) \ c'. 008. (2 \ c \ V - 2 \ v + 2 \ m \ v - 2^{\wedge})^{\wedge} 2a^{\wedge} \ 2c - 2 + 2m$  quoiqu'il ne soit que du cinquième ordre, cependant, comme il acquiert par l'intégration, dans l'expression de la longitude moyenne, le diviseur  $2c - 2 - j - 2m$ , il faut y avoir égard. La fonction  $dv^{\wedge} J f^{\wedge} J dv J u^*$  donne celle-ci,  $7i; 7 + "j - J - j^{\wedge} r - i3sm. (\hat{i}; - i; ) - 4 - i5sm. (3^{\wedge}$

## SECONDE PARTIE, LIVRE SEPTIÈME. 239 Sa variation

produit les termes suivants,  $\sim a^j 3 \ddot{r}^{\wedge \wedge} j^j A a - '13 \sin, (i; - i;) + -i5 \sin. (3i; - 3i;)$   $j^5 m^* a \cdot 7 - .-fahn.dv. j3 \sin. (i; - v) - j-i5 \sin. (3v - 3\hat{i};)$  d'où résulte le terme  $7 V . |j3h-8 (i - m) M . A^{\wedge \wedge} K \rightarrow . \cos (v - mv). 2a^{\wedge} . (i - m)^{\wedge \wedge \wedge} a^{\wedge} *$  On doit faire ici une observation importante relativement aux termes dépendants de  $\cos. (i; - mr)$ , et que nous nous proposons de déterminer avec exactitude. Les expressions du rayon de l'orbite du soleil et de sa longitude contiennent des termes dépendants de l'angle  $v - mr$ , et qui résultent de l'action de la lune sur la terre : ces termes en produisent d'autres dans l'expression de  $u$ , et de la longitude moyenne de la lune, auxquels il est essentiel d'avoir égard. Pour cela, nous observerons qu'en vertu de l'action lunaire, le rayon vecteur du soleil contient, par le chapitre iv du sixième livre, le terme  $-\cos. (v - v)$ , ( $x$  étant le rapport de la masse de la lune à la somme des masses de la lune et de la terre; ce qui donne dans  $u$  le terme  $\cos. fv V$ ). La longitude  $v$  du soleil contient encore, par le chapitre cité, le terme  $f l M \cdot \sin. (t; - V)$ .

**The text on this page is estimated to be only 16.72% accurate**

240 MÉCANIQUE CÉLESTE.  $m' n'^*$  Cela posé, le terme  $'$ , contient le suivant,  $3m a.tt'^* / t \setminus rf - T \cos.ii; - r$  ). Le terme  $- n - r \cos.fav - 21?'$ ) contient les deux suivants,  $- - - , , , .\cos. (r - V .\cos. (2v - 2r H rr - - .sm.(r - iM.sm.[2v - 2i; ;$  ce qui donne le terme  $. '^ \setminus .\cos. (y - i;')$ . En le réunissant au précédent, on aura  $- hi!^ \setminus - ^ \wedge \wedge - (^{''''} \wedge 0' ^* \wedge \wedge$  résultent les termes suivants.  $- ^ - 7 - \hat{i} - .\cos.iv - mrj - - 2 - 7 - ^ - .\cos.fr - mr + cmi; - tsr ) t^a^ a ^ ' ka^ a ^ ' 21 m^* a , f , fv f - . - T.e.\cos. V - mv - cmv + tsT ). aa^ a ^ ' Le terme 77-. | - V'' - ^ \wedge \wedge - (2v - av)$  donne pareillement les suivants,  $3m'./x a a , x 3 m', a a a , , , m 7 r.-.\cos.it; - mv) ^ - ., .c.\cos.(t; - mv + cmi; - \odot ) 2(1 - 111) a^ a ^ \wedge 2 a^ a ^ ' Qm^*.i\hat{A} a a , f , , k - - , \hat{i} - r.-.\cos.iv - mt; - cmr + 'C\hat{i} ) 2(1 - m) a^ a ^ ' Il nous reste à considérer la partie du développement de 7, qui dépend du carré de la force perturbatrice- Ce A».  $(1 + 5^*)$ «$

**The text on this page is estimated to be only 19.57% accurate**

SECONDE PARTIE, LIVRE SEPTIEME. 241 3 développement  
renferme la fonction — .  $(S^{\wedge})'$ , ce qui produit les termes suivants ,  $^{\wedge} \{B/*'-$   
+-fi.

**The text on this page is estimated to be only 8.47% accurate**

242 / c 4 3m\* MÉCANIQUE CÉLESTE i+x«\*(2— 19m)— f-e\*  
 1— C» . e. COS. (2 1; — 2 m V — ci;+ tñj) 2—2 m— c -i-(i/^)-2^^»^)+|  
 (5,î»)-B.^'^). 1^ S^w (o / 8 (1— /w) . ,,, ) / X — 7 — . 3+c— 4mH ^^ + 2  
 il/'^ \.e.cosA2V'-2mv+cv — ^) Ixa^ { 2—2m+c ) — 7 — . i-2A^^4t  
 +2i4,^^ .e.cos.(2v — 2mv + cmv — 'CT ) 4a (2— m m ) ^ ' m +  
 i+e«+i.y.+|.e'.+(B,w+BW).-^-(i+2m).4w 3^j\_2(-2m)(3-2,«).(3-m) \_^^ . \_3  
 .^^ 2 a. j (2— 3 m). {2— m) ^ ' + (B/'"+fi.'"). J5,'»'X -^ .w-i iC.W-2 C,'"+  
 2C.'"" e'. COS. (cm D^cr 6m a + 3m' 3+2 m-c 2+m \_ ^ . ,,,\_ . (j . 2— m— C  
 2^ 1 (3+m-^c 4 2 — m — c (7(3+6 m-c) 7(2+3m) , 3 ^ (o J 3m' 4 + 2-3 m-c  
 +''^^^ ( 2a 3— m— c 4 2 2— 3 m— c 3m' [3+2 m j 1+2 m+c 2 c+m 2a.  
 jW:3m+c \_ ^\_4\_j^^,„ 2 C+m ' . ee. COS. (21;— 2 mi; — cr + cmv -hi» ce'.  
 COS. (2r — 2 mv — et;- c'mv + t«r -h cc. cos.(cî; + cmt;— ©— tsT')

**The text on this page is estimated to be only 7.25% accurate**

3to\* SECONDE PARTIE, LIVRE SEPTIÈME. 2 ' 4 c— m 2a, l  
i+m+c , 4 /+ c — m 2â3 ee. cos.(c» — c'mv— 'O+'Bj') 3m' 2a 1 - 5..e'.COS.  
(2Ci;-2»+3m»-2'©) 2 C — 2 +2 m ' --T— •ji+c\*— -j-y'— -i-in'+ 2 m\*.  
>!,> .y\(^s.{2gv—2d) |3+2m— 2j 4^— 1 2+m 3m\* ] 4 + ' m 2 g— '2+2  
m i^j|^iN}.e\cos.(2c'mt;-2©') A(i — m) 2q—2+2m\ 3^' \_ . L+^ + '■+--Y-°  
°).i,...-(.o+5».).i,'-l "■ +(5+m).i.H-^""lf"+^" i+2m+ ^ ^ ~-ô^ ■' +2il/"^i 1  
— 2/» 3—27» ' \_25^ 10 .4o^") ey\ cos.(2^v— cv— 2 0+'©) . ^yV cos.(2i;  
— 2mv— 2^t;+ct;+ 2 0— ©) m 1—2 m (9/ \ . '!\ 3(i-2|t£).(i + -|-e«+2e'»)\ l|  
(i-2fi).(i+2.'+2.«)+ -^ XTr=^ô \ ^ ml y (36+2im-i5m>)^ L(l±ZÎ!) , A^^.) , ^  
U.cos.f.-m.) a, j a(i — m) 2 (i— m) 1 a ^ '\ 4 (i— 'w) ^ ^ 'm 31.

244 MÉCANIQUE CÉLESTE.  $\sqrt[3]{m' i M i i : i f i _ i , ( . . ) + ( i + ^ { \wedge } . ^ { \wedge } J a , , ^ { \wedge } , ,$   
 $H . / 4 ^ { \wedge } > - r ^ { \wedge } ^ { \wedge } > \{ . - r . e . \cos . \{ v - m v + c m v - t a \} ' ( - ( 5 + m ) . 4 . " " ) ^ { m ' } ( ( \gg 5 -$   
 $i 8 w ) . ( i - 2 ^ { \wedge } ) ( 7 6 - 3 3 1 \gg ) . , , , , ) H ; r \{ 4 4 \} . - 7 . e . \cos . i r - w v - c m v H$  Je n'ai  
point eu égard aux termes multipliés par  $X$ , parce qu'ils se détruisent  
réciproquement aux quantités près de l'ordre  $m \backslash 10$ . Pour intégrer cette  
équation différentielle, nous observerons qu'elle donne, en n'ayant égard  
qu'aux parties non périodiques,  $-f - 1^{\wedge} . \{ 4 - 3m - m'M$



SECONDE PARTIE, LIVRE SEPTIEME. 245 pondantes, à raison du terme  $- \frac{1}{2} \frac{d^2 u}{dt^2}$  qu'elle contient; et comme la constante de la parallaxe de la lune est proportionnelle à  $\frac{1}{r}$ , on voit qu'elle doit éprouver une variation séculaire; mais on voit en même temps que cette variation sera toujours insensible. Nous avons représenté précédemment par  $-(i + \frac{1}{2} \frac{d^2 u}{dt^2}) \cos.(ct - \theta)$ , la partie de  $u$  dépendante de  $\cos.(cr - \theta)$ . En la substituant dans l'équation différentielle précédente; en comparant ensuite les sinus et cosinus de  $cv - \theta$ , et négligeant les quantités de l'ordre  $\frac{1}{r^7}$ , ce qui est permis, vu la lenteur des variations séculaires de l'excentricité de l'orbe terrestre; on aura les deux équations,  $a \frac{dv}{dt} = i - (c^2 - \frac{1}{2} \frac{d^2 u}{dt^2}) \frac{d\theta}{dt}$ .

246 MÉCANIQUE CELESTE. et par conséquent, si Ton regarde  $\tau$  comme constants, ce que l'on peut faire ici sans erreur sensible, on aura, en désignant  $\tau_0$  par  $(j f e \text{ étant une arbitraire; ce qui donne } \cos.(c v - 'c r j^{\wedge} \cos. j v. y / i - p - Y q. f e^* d v - e \backslash$ . Il suit de là que, conformément aux observations, le périhélie lunaire a un mouvement égal à  $(i - \sqrt{i} - p). v -^{\wedge} c i. f e^{\wedge} d v$ . Ce mouvement n'est pas uniforme, à raison de la variabilité de  $e$  ; et si l'on suppose qu'à partir d'une époque donnée on représente  $e$  par  $E' '+ - f v - + - l v \backslash E'$  étant l'excentricité de l'orbe terrestre à la même époque , le mouvement du périhélie sera  $\{i - y J, - . p^{\wedge} \pm C'. E''\}. v - + - \backslash c, '. E' J V -^{\wedge} i q \backslash \{i \ddot{E}' l -^{\wedge} p\}. v'$ : cette expression pourra servir pendant deux mille ans, soit avant, soit après l'époque. La partie forme l'équation séculaire du mouvement du périhélie, qui maintenant se ralentit de siècle en siècle. La valeur de la constante  $c$  peut être supposée égale à  $\sqrt{i} - p - y^{\wedge} . E'$ ; l'angle  $^{\wedge} c s$  est alors égal à la constante  $e$ , plus à l'équation séculaire du mouvement du périhélie. L'excentricité  $e$ , de l'orbe lunaire, est assujettie à une variation séculaire analogue à celle de la parallaxe, mais insensible comme elle; ces variations étant proportionnelles à  $-r-$ , qui ne devient sensible que dans l'intégrale  $i -^{\wedge} . d v$ .

f SECONDE PARTIE, LIVRE SEPTIÈME. 247 JJ Si l'on représente par  $— .\cos.(iv-f-\hat{e})$  un terme quelconque de Téquation (L'), et que Ton désigne par P.  $\cos.(ir-f-\hat{e})$  H-Q.  $\sin.(it'-h\hat{e})$  la partie correspondante de u; on aura, pour déterminer P et Q, les deux équations  $^{\circ} = i'-(^{\prime}+3^{\wedge})': \backslash dv J$  ' dv a I .  $^{\wedge} \backslash ^{\wedge} p dd^{\wedge} \backslash dv J$  ' dv ' dv Les variations de  $\hat{e}$  et de P étant extrêmement lentes, et i étant très-grand relativement à -7-, la valeur de Q est insensible, et l'on a H «'|0 $^{\wedge}$ )'où Ton doit observer que iH — -j- étant le coefficient de dv, dans la diffÉrentielle de l'angle ivH- $\hat{e}$ , on peut supposer  $\hat{e}$  constant dans cet angle, pourvu que l'on prenne pour i le coefficient de v correspondant à l'époque pour laquelle on calcule. On déterminera ainsi les coefficients A $^{\wedge}$ '\ A, $^{\wedge}$ '\ etc. de l'expression de a. Su. Relativement aux termes dans lesquels le coefficient de v ne diffère de l'unité que d'une quantité du second ordre, et qui dépendent des angles 2gv — cv — lO-i-'cs et v — mv-\-cmv — tEr', la considération des termes dépendants du cube de la force perturbatrice devient nécessaire; mais en portant, comme nous l'avons fait, l'approximation jusqu'aux quantités du quatrième

**The text on this page is estimated to be only 29.51% accurate**

248 MÉCANIQUE CÉLESTE. ordre inclusivement, les termes dépendants du cube de la force perturbatrice, qui peuvent devenir sensibles, se trouvent compris dans les résultats précédents. Cela posé. Si Ton substitue dans Téquation (L'), au lieu de u, la fonction  $1 - h e^* - f - xy^* - h_6 - f - e. (i - + - e^*) . \cos. [cv - \ll) - t_7' - (i - ^ - ^ - Ty') '0OS.[2gV 20) Su, la comparaison des divers cosinus donnera les équations suivantes :  $0 = \{i - 4(i - m) \ll |. A / ^ ^ + | m' 4. | (i + Se^ + ly' - l ^ ^) a. 1 - I \gg 0 = j l - (2 - 2TO - c) j. i / ) + 3TO^* . ^ . ^ . 'm = ^ l 2(l + w) 2 - 2 m - c ^ ^ \ll ' o == \{i - (2 - 2m + c)'\} . ^ . W - \pm r. - . ! 3 + c - 4m + lli :: ^ + 2 ^ wi, II m^*$$

**The text on this page is estimated to be only 8.66% accurate**

SECONDE PARTIE, LIVRE SEPTIÈME. 249  $m^{\wedge'} i a, \backslash (a - 3$   
 $m). (2 - m)^{\wedge'} I + jB / " + B. "" | . B, w. - i - i. W - n C. W - 2C. W + 2C. "" ) + 6m. a^{\wedge'} 1 o$   
 $= ji44. w + A, "" - i4. W - iO i4. w. e^{*} + - i - (4. W - i / ") . e' j, 3 + 2m - c 2 + in / \,, . \,, , \_,$   
 $a 1 a a - m - c (a - m - c)' . i4. "" + | m . - . \,, , 2 - m - c i. w 0 = 1 7 (3 + 6i \ll - c)$   
 $^ 7 (2 + 3 w)^{\wedge}, ^{\wedge} ( \gg ) 0 = 1 -, a 2 2 - 3m - c 3 + 2m (i + 2m + c 2 A^{\wedge\wedge} - (c +$   
 $m)' \} . 4. "" - | r. -. "" / + i. "" + 7 + -- , 4 c + m i + 3m + c A 0 = 1 o = ji (c - m) . | . 4. .) - | ^{.} ^ J ' 3$   
 $- 2m + i / ^{\wedge} + 7 2 c + m i + 2m + c 2 c - m + \{ i \pm - ^{\wedge} \pm ^{\wedge} + - ^{\wedge} l. A \ll ' c - TO - 4c' \} . i.$

**The text on this page is estimated to be only 8.65% accurate**

250 MECANIQUE CELESTE.  $\phi = j_1 - (2^{\wedge} - 2 + 2 m) * j . i / '' + 1$   
 $m \backslash \text{---} . 3 + 2 n i \text{---} a_7 4.9' \text{---} i 2 4-111 a 2 J 5 . W 4 \{ i \text{---} m \} 2^{\wedge} \text{---} 24-21 \gg 8 i 4, f)$   
 $m 2 y 4 . '' ) + 2^{\wedge} \text{---} 2 + 21 \gg ! 5 + m 3 1 \text{---} m 1 i + 2 m H^{\wedge} \text{---} 5 J 1 \text{---} 2 m 6 \text{---} i m$   
 $\backslash 0 = j , - \{ 2 \ll j f - c \} | . ^{\wedge} , " m 1 \text{---} 2 n i \phi = \{ i - (i_{\text{---} m}) t . ^{\wedge} / " M - m' . _ . a \backslash 36 + 2 i m - i 5 r e' ^{\wedge} \wedge$   
 $, , , , ^{\wedge} \wedge ( " ^{\wedge} " L i " " . c * 4 ( i - T O ) 2 ( i \text{---} m ) ' ( 57 - 38 m ) j w , i j D ( u ) , D ( , s ) j 2 l \phi - , ( i 5$   
 $\text{---} i 8 / w / V 76 \text{---} 33 i i i I , , _ / \hat{i} \gg 2 ( i _ 2 m ) a J ^{\wedge} . , , , X i / ^{\wedge} 11 .$  Considérons  
présentement la troisième des équations (L) du  $n^{**} 1$  . La fonction devient  
 $\_ j \_ / d Q \backslash \_ j i + s s ) / d Q \backslash h K u ' \backslash d a ) A ' . a ' ' \backslash d s ) , \cos / \_ M 3 m' . u ^{*} . S ( i i \cos . ( v \text{---}$   
 $v' ) 1 ^{\wedge} \wedge \wedge \wedge + - 8 \hat{A} r i F - j + 5 \cos . ( 3 r - 3 \gg ' ) r$

**The text on this page is estimated to be only 10.17% accurate**

SECONDE PARTIE, LIVRE SEPTIEME. 251 développons ces différents termes. Le terme — ' \ donne « par son développement, la fonction  $2/\sqrt{t}^* -5-1$  » '—y \* a. ' |(i-H2e\*— |y"-f-|e^)\sin. (^v— 0) 1 — !ie.\sin. (^t;-4-ct; — 0 — t?) — 2e.sm.[gv — cv — 0H-«) -hYe'.sin. (^t;- hciit? — 0 — tu') -4-~e'. sin. (^i; — cmv — O-i-t?) — ^e\s\n.[2cv — gv — a«-hê) Le développement de — .\ \ .cos.(2v — nv) se réduit à multiplier le développement de ' ^cos.(2!; — 2v) , que nous avons donné dans le n\*" 6, par -; et Ton aura 3 -« ^ a. ' i-H2e\*— / '7^— i^\* \.sm.[iv — 2mv—gv^t-B) + ûa\iv — imv+gv — Q) ) .e.sm.[2v—imv+gv — cv—B + ^) ) .e.sm^gv+cv — iv + imv — B — ^) ) .e.sin.(2v — amv— ^v + cv+fl — «) ) .e.sm\gv + cv+iv—imv-'B—'ts) [iv — imv^gv—cmv + B+^') [iv— imv+ gv — cmv— B +'&') [iv—imv—gv+cmv+B — '&') [2v—imv+gv+cmv — B—'&') 10+19 w+Sto\* ^, (5in.(2i;— amv — 2cv+5fi;+2t5— ô)l (+sin.(2cv+5fv— 21;— amv — atff—ô)) — 2 (i+m -2 (i+m 1 + 2 (1— m -2 (1— m — fe.sm. +Y«'.sin. +^e.sin. — Ye'.sin. .e\ 32.

**The text on this page is estimated to be only 21.02% accurate**

252 MÉCANIQUE CÉLESTE. Le terme  $\frac{1}{2} \cos(\hat{i}; -v)$  produit les suivants :  $-\frac{1}{2} j^7 \dots y. j \sin(\hat{i}; -v-i-mv-d) \dots \sin.[gV'^v - mv - d]$ . Le terme dépendant de  $\cos(3i; -3v)$  est insensible; nous n'avons même eu égard aux deux précédents qu'à raison de leur petite influence sur l'argument de la longitude lunaire, dépendant de  $V - mv$ . La fonction  $ti - \dots \cdot t'' \cdot (-t^{\wedge} J_i^{\wedge \wedge \wedge}$  renferme la troisième des équations (L), donne le terme suivant, On aura le développement de ce terme en augmentant, dans le développement de  $\frac{1}{2} \cos(2i; -21;')$ , les angles  $gv$  et  $iv$  d'un angle droit, et en le multipliant par  $g$ , ce qui donne  $[i-f2c^*-(2+m) \dots \sin.\{2v-2mv+gv-d\}^2 (i+m) \dots \sin.[2v-2mv+gv-cv-d+'cs)+2(i+m) \dots \sin.[gv+cv-2v+2mv-d-'cs) \dots \{i-Tn\} \dots \sin.[2v-2mv+gv-cv+d-'cs) \dots \sin.[gv+cv+2v-2mv-u-'cs)+Y^{\wedge} \dots \sin.(2r-2mi; -^v - cmt; +0 + ^') + T^{\wedge} e \dots \sin.[2v-2mv+gv-cmv-0 + ^') Y^{\wedge} \dots \sin.(2t; -2mi; -^v + c'mv + \hat{O} - \ll') - ye. \sin.(2i; -2mi; +9i; +cmt; -0 - \ll') (io + i9w+8m) \dots j \sin.(2v-2m\hat{i}; -2C\hat{i}; +^i; +2tST - I 4' \wedge \sin. \{2cv+gV'-2v+2mv - 20 - ^ +$



SECONDE PARTIE, LIVRE SEPTIEME. 253 Les termes de la fonction  $t^{\wedge} \dots, -j-- ("T^{\wedge}) > \wedge \wedge \wedge$  dépendent de  $u \backslash$  produisent les suivants,  $— j^{\wedge} \dots \bullet \dots -7- | \sin.(9i; — v-hmv — 6) — \sin.((r-f-i; — mv — 6) j$ . Le produit  $(-jt^{\wedge} A'T; ' I (^/\bullet \sim^{\wedge} \wedge \wedge \wedge$  renferme la troisième des équations (L) du n° 1, se réduit à  $1 — g^{\wedge}$  étant de Tordre  $m \backslash$  nous ne conserverons dans ce produit que le terme dépendant de  $\sin.(2i; — 2mv — gv-\backslash-d)$  ; et il résulte du développement précédent de  $-77. | (77^{\wedge}) -t \gg \hat{i}^{\wedge \wedge \wedge}$  terme est égal à  $3m^*$ .  $(a \gg — 1) a . / ^v , , ^{\wedge \wedge} — r-^{\wedge} . — .y.sm. 2t; — 2mv — qv-+-0]. 4(1 — m) a^{'$   $^{\wedge} j /$  La troisième des équations (L) du n° 1 se réduit ainsi à la forme suivante ,  $dds^{\wedge} r$  étant la somme des termes que nous venons de considérer. IVfais, pour plus d'exactitude, il faut lui ajouter les termes dépendants du carré de la force perturbatrice, et qui peuvent avoir iine influence sensible. 12. Le terme  $— jV — \hat{i}-$  donne, par sa variation, les deux sui\ants,  $im'.u'\backslash Ss$   $6m \backslash u \backslash s.Su$

**The text on this page is estimated to be only 7.28% accurate**

254 MECANIQUE CELESTE, et il en résulte la fonction  $3m' a^{\wedge}$   
 $. \text{---} . \text{os } 2 a^{\wedge} . jJ5/^{\wedge} \_f \_J5/B) j . e' - y . \sin . (^i; \text{---} 0) \text{---} 3m' . \text{---} . B, ^{\wedge} . ey . \sin . \{ 2v$   
 $\text{---} 2mv \text{---} gv - r - cv - i - O \text{---} \ll \rangle \text{---} 3m' . \text{---} . i4 / * ^{\wedge} ey . \sin . (2r \text{---} 2mv - h - gv \text{---} cv$   
 $\text{---} 0 - ^{\wedge} - \ll \rangle - h 3m \backslash \text{---} . j JB / ^{\wedge} \text{---} i4 / ^{\wedge} \backslash . ey . \sin . [gv' - h - cv \text{---} 2v - \backslash - 2mv \text{---} S \text{---}$   
 $\ll \rangle 9^{\wedge} a D(o) ' i \sin . (2i; \text{---} 2mv \text{---} gv - hcmv - \{ - d \text{---} ^{\wedge} \} 4 ' a / ' ' (-4 - \sin . (2i; \text{---}$   
 $2mv \text{---} gv \text{---} cmv - h 6 - h "ts ) - I \text{---} . \text{---} . \backslash bA, ^{\wedge} \text{---} 2i4 / ^{\wedge} \text{---}$   
 $Yfi / ^{\wedge} j . e * y . \sin . (2ci; - + - ^{\wedge} i; \text{---} 2i; - 4 - 2mv \text{---} 2 \ll \text{---} 2 a^{\wedge} - t . \text{---} . J5 > 1 / ^{\wedge} \text{---}$   
 $2i4 / ^{\wedge} j . e * y . \sin . (2v \text{---} 2mv - hgv \text{---} 2cv \text{---} 0 h - 2ttT) .$  Le terme  $\text{---} ' \backslash . \cos ,$   
 $(2i; \text{---} 21; ' )$  donne, par sa variation, les suivants ,  $^{\wedge} m' . u \backslash S \$$  ,  $n \text{Çnn}' . u \backslash s . Su$  ,  
 $, . \text{---} -7 - \text{---} ; \text{---} . \cos . 2t; \text{---} 2t; ) r : \text{---} z . \cos . (2r \text{---} 2V ] Zm, u \backslash s . Sv' . , , v H$   
 $71 \text{---} : . \sin . (2v \text{---} 2v ;$

**The text on this page is estimated to be only 7.34% accurate**

SECONDE PARTIE, LIVRE SEPTIÈME. 255 et il en résulte la  
fonction  $\_ , \backslash \text{Bi}^{\wedge} / \text{iAM}^{\wedge} \text{B} : \text{"Ke}^* - \{ \text{B}, ^{\wedge} \text{Ke} \} . \{ \text{i} - \text{e}^{\wedge} \} . \text{y.sm}, \{ \text{gv} - 6 \} 3 \text{m}' \text{ g j}$   
 $\{ (\text{i} + \text{m}) . \text{B} . \text{W} - \text{i} . \text{"} \} . \text{sin.} (5 \text{fr} - \text{c} \ll - 0 + \text{'Of} | / \backslash \text{B}, ^{\wedge} *) + \text{iB}, \% \text{sm}. \{ \text{gv} - \text{c}' \text{mv} - \text{e} + ^{\wedge} \} 3 \text{m}' \text{ a}$   
 $, \text{j} + \text{JB} . \text{"} - - | - 5 . \text{w} | . \text{sin.} ( ^{\wedge} \text{w} + \text{c}' \text{TO} \hat{\text{i}} \gg - 0 - \text{'iaf} ) 4 * \text{a}, * ^{\wedge} \text{j} + \text{J5}, \text{"} . \text{sin.} ( 2 \text{w} -$   
 $2 \text{TOI} \gg - ^{\wedge} \text{i} \gg + \text{c}' \text{mi} \gg + 9 - \text{ct}' ) \text{' + 5}, \text{"} . \text{sin.} ( \text{aw} - \text{amt} \gg - 5 \text{fv} - \text{cW} + ^{\wedge} \text{i} \gg \text{'}) ]$   
 $- 7 - . . \text{'e'yJ lo} + \text{igm} + \text{Sw} * ^{\wedge} . \text{sin.} ( 2 \text{ct}; - ^{\wedge} \text{v} - 2 \ll + 0 ) ^{\wedge} / \text{I } 7 - \text{A} \backslash - \text{T} - . .$   
 $\text{'Bo} ^{\wedge} * ^{\wedge} - ^{\wedge} . \text{sin.} ( 2 \text{i}; - \text{Qmv} - \hat{\text{icv}} + ^{\wedge} \text{fv} + \text{atar} - \hat{\text{O}} ) .$  Le terme  $\text{rrT-T}'' -$   
 $^{\wedge} \text{^} \text{^} \text{^} - ! ^{\wedge} \text{^} \text{^} \text{^} \text{^} \text{^} \text{^} \text{^} )$  donne par sa variation,  $^{\wedge} \text{m} . \text{a}^{\wedge} \text{d}, \text{Ss} . / \text{n } 6 \text{m}', \text{a}'' ^{\wedge} \text{d5} . / \text{n} - \text{n}$   
 $- \text{r} - \hat{\text{i}} - . \text{sin.} \text{iat}; - 2 \text{t}; \text{H n} - \text{r} - ^{\wedge} \text{ii} . - \text{r} . \text{sin.} ( 2 \hat{\text{i}}; - 2 \hat{\text{i}}; ) 2 \text{A}^* . \text{Il}^* \text{dv} ^{\wedge} \text{^}$   
 $\text{A}^* . \ll \bullet \text{dv} ^{\wedge} \text{'}, 3 \text{m}' . \text{tt}'' ( ^{\wedge} 5 ^{\wedge} , , , \text{x} + - \text{n} - \text{r}' - \text{j} - - \text{dt}; . \text{cos.} ( 2 \text{V} - 2 \text{t}; 1 . \text{A}'' . \text{H}^*$   
 $\text{dv} ^{\wedge} \text{'}$

**The text on this page is estimated to be only 11.57% accurate**

256 MECANIQUE CELESTE. De là résulte la fonction  $3m' a_- (i(i+m).(2-2m^{-(j)}f). \mathfrak{L}, W-i4. ''j. \sin. (^w - cw - 0+ - \odot)) ' 2 \sim a/ ' ^ \bullet | + j(i_-/n).(2 - 2m - ^). B, w+i, ''j. \sin. (\hat{i}; + cw - 0 - or)) i (2 - m - o). B, W ) , \hat{u} rvl , / \ ' , , .sm. (ov-cmi; - 0+i\hat{T} ) - T - . - .67./+ , \ ^[ ' , J.sm.fow+cmt; - 0 - 'O ) ^ '' j I - |-(2-2TO-^). B. ''j ^{''} ^1 [( - m). B, '*'. \sin.(2w - 2mv - ^i; + c'mv-f-0 - i\hat{t}') (^+m). B, '''. \sin.(2w - 2/ni; - ^v - cmy+\hat{o}+itr') (5.4 W-2i/' )+(2-2m-2C+<7). B, ''*J^ -, - . - .Bo^{''} ^e'y. \sin.(2v - amv - 2cv+^i; + 2\ll - 0). Enfin la fonction  $(-^ - ^ + 5j.y7. | (-t^)--t \gg$  donne par sa variation les termes  $0- . 1 -y-\sin-fou - \hat{O}) 3''' .2-.l(. -m-j)--. |.ii, \ll. (. -|. -)' -''' 1 2(2C - 2+2m) ' ^ ^$  les termes dépendants du cube de la force perturbatrice sont insensibles.$

The text on this page is estimated to be only 9.92% accurate

SECONDE PARTIE, LIVRE SEPTIÈME. 257 13. En rassemblant tous ces termes, la troisième des équations (L) du n\*\* 1 deviendra  $i+2e'-\backslash y^*+\backslash e^* 0=-jT-- +5+ 2^{\wedge},\ll . \text{dis } ,_{\_} . \ll - 1 (3^{-\wedge}'''-g)-(g+')) . g^{\wedge}(.)+ 4^{\wedge\wedge}(.). (^{\wedge}_{\_}|,>J . ''' i_{\_} i (3 + 3in^{-\wedge})B.''' ).c'\gg 4-i(3-m-5).5,w.e'' \text{---} T-m''-\text{---} .<' ' ).y.\sin.\{2v\text{---}2mv\text{---}gv+0) 1\text{---} m s^{\wedge}t -f- v''^* \bullet \text{---} \bullet a. +B.wj.y.\sin.(2\gg-2mr;+^{\wedge}v-\hat{o}) \{L'' ) + -f-m'.\text{---} . jB.W\text{---} 2+(i\text{---} in).(3\text{---} am\text{---}^{\wedge}).B,'*j.cy.sm.(jt?+ci>\text{---} d\text{---} -\hat{o}-\ll i'' ) +1 m'. -^{\wedge}.|3+aB.\ll \sim 2- (3-am^{-\wedge}).B.W-(3-m^{-\wedge}).B,w|.e'y-\sin. (^{\wedge}\gg-c'mw-0-HBr') a B, '''+3B.'*'- ( 1 +g\text{---}m) .B.''' .c'y.\sin . (a w-a mv-gv+c'mv+S^{-\wedge}) lS-.i-.i.B\ll -Ki-H,)+3B.--(i-4H-m).B\ll |.\ll V.\sin. (^{\wedge\wedge\wedge},) TOME III. 33 . . a ii+g a, 1 a$

The text on this page is estimated to be only 24.38% accurate

258 MECANIQUE CÉLESTE.  $+r m . - a j a B, ''')-5-$   
 $ioA.w+4A. ''-(3-2m-2c-f^{\wedge}).B,\sin.(2cr+5fu-2t>+2mt>-21\gg-0) a +ioA.$   
 $(''-44/'''-5\pounds,w +x m'. - .(3+2iJ, ''*)'. -^{\wedge}.y.\sin.(5fv- iH-jnw-0) + 1 m^*.- .(|-f-$   
 $2B, ''').A.7-\sin. (^t;+v- m\ll- 0).$  14. On doit faire sur l'intégration de  
l'équation différentielle précédente des remarques analogues à celles du n°  
10. On considérera donc  $\eta$  et  $\theta$  comme variables en vertu de la variation de  
l'excentricité de l'orbe terrestre; en substituant ensuite pour  $s$  la fonction  
 $y.\sin. [gv - 6) -h- h s,$  et comparant d'abord les sinus et cosinus de  $^{\wedge} V -$   
 $B,$  on aura les équations  $dde dy l d9 \backslash ''=y'lbF-''d^{\wedge}3-dZy p''\backslash -cf.e^{\wedge}$  désignant  
le coefficient de  $y.\sin. [gv - 0)$  dans l'équation différentielle  $[V)$  du  
numéro précédent, où Ton doit observer que  $B\}^{\wedge\wedge}$  et  $A^{\wedge\wedge}$  renferment déjà  
le facteur  $i - \backslash e^{\wedge}$ . La première de ces équations donne en l'intégrant, de 9-  
Tv

SECONDE PARTIE, LIVRE SEPTIÈME. 259 H étant une constante arbitraire. I<sup>^</sup> seconde donne en négligeant -T<sup>^</sup>, ainsi que le carré de q\ e\ de I j ^q\ e" dv ^ "" 1- ^^ \_^^. et par conséquent si Ton regarde f et (f comme constants, ce que l'on peut faire ici sans erreur sensible, on aura ^ "" ^\h7' X étant une arbitraire; ce qui donne sm. [gv — d) = sm.\T^^\v-+' ""\fe\ dv — \L d'où il suit que, conformément aux observations, les nœuds de l'orbite lunaire, sur l'écliptique vraie, ont un mouvement rétrograde égal à j \Ji-\p — i j . t; H — y-^—fe^ .dv : ce mouvement n'est pas uniforme, à raison de la variabilité de e; et l'équation séculaire de la longitude du nœud est à l'équation séculaire du périée comme ^ est à La tangente y de l'inclinaison de l'orbite lunaire à l'écliptique vraie est pareillement variable, puisqu'elle est égale à \_ i \_ \H Ag — -7-| ; mais il est aisé de voir que sa variation est insensible, et c'est la raison pour laquelle les observations les plus anciennes n'indiquent aucun changement dans cette inclinaison, quoique la position de l'écliptique ait varié sensiblement dans l'inten^alle qui nous en sépare. 33.

**The text on this page is estimated to be only 11.03% accurate**

260 MÉCANIQUE CÉLESTE. On aura ensuite les équations  
suivantes,  $1 \ 1 \text{ --- } m / o = o = o = o = o = o = 0 = o = o = 0 = o = o = a \ I \ 2 -$   
 $(2-2m+^{\wedge})|.B.W+|-m^{*}.-. -(5f + c)*j.B.w + |m'A. \{J5.'''-2 + (i-m).(3-am-$   
 $^{\wedge}).B.w|, -(2-2m-^{\wedge} + c)'!.B.'''+|m^{*}.-. \{(i+^{\wedge}).(i-m)-2BW+B.W|, -(2-2m+^{\wedge}-$   
 $c)|.B.w+|m'A.i(^{\wedge}-i).(i+m)+B.W-2i4.'''\}, -(2-2m-^{\wedge}-c)j.B.'''+|m'-.j(n-^{\wedge}).$   
 $(i+m)4-B.w + 2i4.W-2BW\}, -(^{\wedge}+m)'\}.Bw+-f-m'-.j34-2B, ">+|(3-2m-$   
 $^{\wedge}).BW-(3-3m-o).jB.w -(^{\wedge}-m)'\}.B\ll+|m^{*}.-.j3 + 2AW--i(3-2m-^{\wedge}).BW-(3-m-$   
 $^{\wedge}).B. ( \ io+i9m+8m' , ^{\wedge} \ p \ ,.,, ] -(2c+5f-2 + 2m)'j.B.'''+|-m^{*}.-. ^{\wedge} ''^{\wedge}^{\wedge}^{\wedge} !,$



SECONDE PARTIE, LIVRE SEPTIEME. 261 «, 15. Il nous reste  
présentement à déterminer la valeur du temps  $t$  en fonction de  $v$ . Pour cela,  
repreons la première des équations (L) du n° 1,  $\frac{dv}{dt} =$  Il faut, par le n°  
6, y substituer, au lieu de  $a$ , la fonction  $1 - \frac{7}{2} H - e \cdot (i - h e^*) \cdot \cos(a; - \ll) )$   
g » On aura d'abord, en développant le facteur  $-j - j$  un terme indépendant  
de cosinus, et qui par la nature du mouvement elliptique doit être  
(livre 11, n° 16); on aura ensuite  $\frac{+i}{(i + |e^* - i|)} \cdot \cos(2^{\wedge} \ll - 20) - e' \cdot \cos.$   
 $\{3ci; -3'sy) \} + j r^{\wedge} J [w) - \sim^{\wedge}) \setminus - \epsilon y^* \cdot \cos. \{2gv - cv - id + 7s) + \cos. [igv + cv -$   
 $2d - \wedge) \setminus] f_{\_c}^{\wedge\wedge}, ( - \setminus - \wedge' - \cos. [2gv - 20) - jey \setminus \cos. [2gv - cv - 2d + \wedge)) \wedge' - h3o'.$   
 $(5b)^* \cdot j \ 1 - 4e \cdot \cos.(c \ll - ct) \ j \cdot j \ 1 - \text{etc.} \} + \text{etc.}$  La partie non périodique du  
second membre de cette équation est  $y/a \ 64(1 - m)' \ 4(1 - m)^{* \wedge' \wedge'}$

262 MECANIQUE CELESTE. Le coefficient de  $dv$  dans cette fonction n'est pas rigoureusement constant. On a vu dans le n° 10 que l'expression de  $-$  contient le terme  $j - \frac{1}{2}$ ; ce qui donne dans  $a'$  le terme  $\frac{1}{2} \frac{f n}{a} e^*$ ; ainsi  $a' dv$  . i.  $\frac{1}{2}$  la quantité  $' - \frac{1}{2}$ ; = contient le terme  $\frac{1}{2} a \frac{dv}{m} e^*$ ; or on a à très-peu près  $a' = r$ ,  $m' = m$ ; l'expression du temps  $t$  contient donc le terme  $-\frac{1}{2} f e' dv$ ; et par conséquent la valeur de la longitude vraie de la lune, en fonction de sa longitude moyenne, contient le terme  $-\frac{1}{2} m' J e' \frac{1}{v}$  ou  $-\frac{1}{2} m \frac{f n d t}{e} \frac{1}{v}$  d'où il suit que les trois équations séculaires des longitudes moyennes de la lune, de son périégée et de ses nœuds, sont entre elles comme les trois quantités  $3m'$ ,  $-\frac{1}{2} = i$ , A la vérité, les termes dépendants de  $i - p$   $S_j + p$  du carré de la force perturbatrice changent un peu cette valeur de l'équation séculaire de la longitude moyenne; mais il est aisé de voir que les termes de cet ordre, qui ont une influence très-sensible sur l'équation séculaire du périégée, n'en ont qu'une très-petite et insensible sur celle du moyen mouvement. La partie non périodique de  $-j - \frac{1}{2}$  est égale à  $-\frac{1}{2}$ , et si l'on néglige  $a^*$  les quantités de l'ordre  $m^*$ , ce coefficient est  $-\frac{1}{2}$ . On a ensuite. Va, par le n° 10,  $-\frac{1}{2} t - \frac{1}{2}$  . (i  $-\frac{1}{2} r r u$ ) ; ce qui donne  $-\frac{1}{2} i - r - \frac{1}{2} m$  et  $''' - \frac{1}{2} z = \frac{1}{2} z a \frac{1}{i - h - m M}$ . On a de plus, par le n° 16 du second i., livre,  $n - a \frac{1}{y m}$  ; partant

**The text on this page is estimated to be only 7.99% accurate**

SECONDE PARTIE, LIVRE SEPTIEME. 263 d'où Ton tire -, a  
m'=m\ (i — im'), m\—=^m\ Supposons maintenant que Ton ait  
nt+e=v+\m\{e'-K').dv+Q'^. e.sin.(ci;- 'cr) On aura +Co^^. e\ sin.(3cî; —  
Star) +CJ'K y\s\n.[2gv-'2d) +Q'^Key^. sîn.(2^v— cv— 20-f «)  
+Q'^K€Y.sm.[2gv+cv—2d—^ ) 4-Q\*^ .sin-(2i;— smv) +C/'^ e.sin.(2v—  
Q/nv— cv+tsr) -i-C,^^^ .sin.(2v — 2mv+ci; — tar) +C,^^^ .sin.(2t;—  
2mv+cmt;— «' 4-C,^^^ e.sm.[2v—2mv—cmv+^^ +C/'^ ^'. sin.(c'mi;—  
tar') +C/'^ee'. sin. (2 v— 2 mv— cl^fc'mr-f^— 'cr') +Ci^Kee. sin. (2^—2  
mi;— cv— c'mr-Haf-Pcr') +C/'^ee'. sin. (eu + cm V — 'cr — «') +C/'^e'.  
sin. (cv — c mv— tar +'Ct' ) +C/'^ e'.sin.(2ct;— 2v+2mi;— 2'cr)  
+C/'^y'.sin.(2^r— 2r + 2mt;— 20' +C^^^e\sin.(2cmv-2'cr') +C/'^ — . sin.  
(u — mr) a ^' +C/'^ — . ^'. sin. (v— mv + cmv—^' ) .

The text on this page is estimated to be only 6.63% accurate

264 C.'': MECANIQUE CELESTE. j-l-7g'+Ty'-2.4.f'') 2C 1 |  
 (i+Te'— |y')-2i4.'''+3y4.'').e' -1-2^.'') 2-C ' 2(/ + c' 4(1— m) '(2— 2m— c  
 2 — 2m4-cj( -ai.M.(i+|e'-|y') + 3gM.'''+3e'74.''' j 2 — 2m ' 3m'.(i+2e'— |y'-  
 |e'') 3m'.(i+m).} i+le»-- ^-y'- | e''{ 4(i-i«) + 2— 2 m— c C'')- ^''••'^•(^ 0+.  
 9m+8m') \_^^,, (x+^e'-jy') +3i.'''+3.'i.''' 1 8 (2C— 2+2m) i \ 2 4/ // :À—2m  
 —c Sm» 3m'.( 1 -m) \_^ (,^3^ w.g^ 4 (1— "O 2— 2m+c (0 p« 2— am+c  
 3m\* \_\_\_\_à{2—m) -2A,f')+3i/\*^e' 2— m 2 im\* ,\_ 4(2— Sy/Q  
 -24^\*^+34,^'^^^ 2~3m /-3m. j a.^''^+4'^^~i/\*^ - 1 o i/^ e»+ 1 (i/J~i/\*0 ^ +  
 3m\*.yl,

SECONDE PARTIE, LIVRE SEPTIEME.  $3m^* \cdot \{i+m\} 3 m^* 265$   
 $C''' : i_4(2 - m - c) A (2 - m) - 2J.W + 3A. ''' 2 1 m^* \cdot \{i-\backslash-Sm\} "x - m - c 2$   
 $im^* C, ''': i_4(2 - 3m - c) 4^a - 3/n) - 2A.$

266 MÉCANIQUE CELESTE. On a ensuite  $3iw'(a+m)3m'^{\wedge}$   
 (.»)\_i.^ ,.)  $3m'.^{\wedge}.c \gg r(ni\_8(a5-2+m)i6(i-m)' * ' ag-a+am 1^{\wedge}$  ■ ■ • On doit  
 appliquer à cette valeur de  $C,^{\wedge\wedge}$  une remarque analogue à celle que nous  
 venons de faire sur  $C/'^{\wedge}$  Enfin on a m 16. Déterminons présentement les  
 valeurs numériques de ces divers coefficients. Pour cela, nous remarquerons  
 que les observations donnent  $m = 0,0748013$ ,  $c = 0,99154801$ ,  $g$   
 $= 1,00402175$ ,  $e = 0,016814$ , à l'époque de 1760;  $y_1 = 0,0900807$ . Suivant  
 les observations, Targument  $CJ'Ke.sm.[cv - ^)$  est à très-peu près égal à —  
 $69992^{\wedge},3 \cdot \sin.[cv - tar)$ . On a donné dans ]e numéro précédent la valeur  
 analytique de  $C,^{\wedge*^{\wedge}}$ ; en y substituant pour  $A^{\wedge\wedge}$  et  $\hat{A},^{\wedge}$  leurs valeurs qu'une  
 première approximation m'a fait connaître, j'en ai conclu  $6 = 0,05487293$ .  
 Cette valeur a toute la précision nécessaire pour la détermination des  
 coefficients  $A^{\wedge\wedge}\backslash A,^{\wedge}\backslash A^{\wedge\wedge\wedge}\backslash$  etc. Tai supposé, conformément aux  
 phénomènes des marées, la masse de la lune  $^{\wedge\wedge}$  — de celle de

**The text on this page is estimated to be only 15.74% accurate**

SECONDE PARTIE. LIVRE SEPTIÈME. 267 la terre. Cela posé, les équations entre ces coefficients, trouvées dans les n° 10 et 14, deviennent  $A.w = 0,00723508 - 0,005018a.B/' - 5.W$ ,  $i.w = 0,204044 - 0,0660894.i4w - 0,0480577.jB.' - B.wj$ ,  $i4.w = -0,00372953, i.' = -0,00315160 - 0,00449610.B,' \setminus i.w = 0,0289026 - 0,00564793.B, ''$ ,  $y4/' =: -0,193315H - 0,104996.i4, ''H - 0,372796.il, ''$ ,  $i.' = 0,538027 - h0,0334044.i.' - 4-o,i35i44.i.'^i4/' = -0,0908432 - 1-0,139071.i4, '' - 0,280299.il, ''$ ,  $i4, '' = 0,0791193 - f-1,055799.i4,W-i-0,270902.il,w, i(') = 0,00285368 - 0,00415018.B, ^'' \setminus i.(') = 0,366100 - 0,0172338.4w - 0,259744.4 - 1,022473.4.''' - 36,11032.\{B.W - Bw.5.wj, y4.$

**The text on this page is estimated to be only 19.74% accurate**

268 MÉCANIQUE CÉLESTE. 5,4."-+-T5." B.!,'"= 0,202619,  
>4,'" = — 0,008 7 2 968 , i4,'"= — 0,00800427, y4,'\*\*= 0,0284967, 40=—  
0,0698498, ;!.(')=: 0,616761, i4/'^ = — 0,207610, y4,W= 0,274122, i,'"=r  
0,00081066, i4/'"= 0,849068, 4,'"= 0,00266066, i4.(")= 0,0076876, ;4,'"=  
0,0129890, 4'"\*=— 0,742878, i.'"= — 0,041878, y4,'"= — 0,118197,  
.4.'"= 1,08469, i4,'"= 0,001601,



**The text on this page is estimated to be only 27.81% accurate**

SECONDE PARTIE, LIVRE SEPTIÈME. 269 B<sub>w</sub> = 0,02 8383 1, B,<sup>\*</sup> = — 0,00000236395, 5.w = — 0,00550748, ^.<sub>w</sub> = 0,0195530, f<sub>i</sub>.w = 0,00636608, B.w = — 0,00136676, i<sub>5</sub>,<sup>\*</sup> = — 0,0212720, B,<sup>''</sup> = 0,0782400, £.(•) = — 0,0833684, B.c = — 0,0327678, £.(<sup>'</sup>•) = 0,0720448, B.<sup>'''</sup>J = 0.491954. £, = — 2,003974, d'où j'ai conclu g = 0,0548628i, ce qui difi

270 MECANIQUE CELESTE.  $C, \wedge^* \wedge =$  — 0,00919876,  $C,$

**The text on this page is estimated to be only 19.83% accurate**

SECONDE PARTIE, LIVRE SEPTIÈME. -tar) 271 : —

6999a\3o.sin. -h i442\66.sin. — 35\34.sin. -+- 1255^92 .sin. -f- 2o4',86.sin.

— 70^86. sin. — ôSôô^ii.sin. — 14461^28 .sin. -f- 453',58.sin. -K

42^02.sin. — 4 1 5", 1 6 . sin. H- 2 106^09. sin. -h 74^96•sin. — 63 5', 2 6.

sin. -+- 2 1 9", 1 1 . sin. — 362^1 8. sin. -t- 52 1^91. sin. -h 174^74 .sin. -+-

3i\2 5.sin. cv2 CV 2 ^) 3cv — 3^) 2gv — 2 0) 2gv — cv — 2 02gv-i-cv —

2 6' 2 t; — 2 mv) 2v — 2 mV' — cv-tar) -tsr) 2 v2 v2 V2 mV' 2mv2 mvcv

tff) cmi; — tar') cmi; — W) 2 r — 2 mv — cv-hc'mv-h'Uf — W) 2 v — 2

mv — cv — cmv-h'Cf-h'îs') cv-hcmv — "cs — isy') cv Cmv — 1!T-+-tiT')

2CV — 2v-+-2mv — 2tBr) 2gv — 2v-\-2mv — 2 0) 2 cmv — 2 'Ct')

376',586. (i-4-i) .sin. (r — mv) 58^o53 . (n-i) .sin. (v — mv-f-cmv — 'cr').

Les deux derniers termes ont été déterminés, en supposant — = T — . Cette

fraction dépend des parallaxes du soleil et de la lune; elle difiFère très-peu

de -j — ; mais pour plus de généralité, nous Taffectedons du coefficient

indéterminé i-4-i, et en comparant le terme dépendant de sin. (v — mv), au

résultat des observations, nous en conclurons dans la suite la parallaxe

solaire. Il est facile de voir, par ce qui précède, que les perturbations de

lorbe terrestre par la lune introduisent dans A,^^ la quantité

272 MÉCANIQUE CÉLESTE.  $0,25044$ .<sup>(^)</sup>, et par conséquent, dans  $C''^{\wedge}$  la quantité  $-\frac{1}{2} \frac{d^2 S}{dt^2}$ , d'où résulte, dans l'expression de la longitude vraie de la lune, l'inégalité  $0,54139 \cdot (x - \sin(u - mv))$ . L'action directe de la lune sur la terre produit dans le mouvement de cette planète l'inégalité  $-y \cdot jx \cdot \sin(i; - mv)$ ; cette action est donc réfléchiée à la lune par le moyen du soleil, mais affaiblie dans le rapport de  $0,54139$  à l'unité. L'expression précédente de  $nt + e$  renferme les quantités  $c$  et  $^{\wedge}$ , et ces quantités dépendent de l'action du soleil. Nous avons donné leurs valeurs analytiques dans les n<sup>o</sup>s 10 et 14. En les réduisant en nombres, on trouve  $c = 0,991567$ ,  $^{\wedge} = 1,0040105$ . Le mouvement  $(1 - c) \cdot v$  du périhélie lunaire est donc, par la théorie précédente, égal à  $0,008433 \cdot v$ . Ce mouvement, par les observations, est égal à  $0,008452 \cdot v$ ; ce qui ne diffère du précédent que de sa 445<sup>e</sup> partie. Le mouvement du périhélie est assujéti à une équation séculaire dont nous avons donné l'expression analytique dans le n<sup>o</sup> 10. En la réduisant en nombres, elle devient  $3,00062 \cdot 1 \cdot m^{\bullet} / (e^{\bullet} - \epsilon^{\bullet}) \cdot dv$ . Elle a un signe contraire à l'équation séculaire du mouvement moyen, et elle est à fort peu près trois fois plus grande. Le mouvement rétrograde  $[g - i] \cdot v$  du nœud de l'orbite lunaire est, par la théorie précédente,  $0,0040105 \cdot t$ ; Ce mouvement, par les observations, est égal à  $0,00402176 \cdot t$ ; ce qui ne diffère pas du précédent, de sa 360<sup>e</sup> partie. Ce mouvement du nœud est assujéti à une équation sécu

SECONDE PARTIE, LIVRE SEPTIEME. 273 laire, dont nous avons donné l'expression analytique dans le n° 14. En la réduisant en nombres, elle devient  $0,735452 \cdot \frac{m}{f} \{e' - F'\} \cdot dv$ . Elle a un signe contraire à celle de la longitude moyenne de la lune; d'où il suit que les mouvements des nœuds et du périhélie se ralentissent quand celui de la lune s'accélère, et les équations séculaires de ces trois mouvements sont constamment dans le rapport des nombres 3,00052, 0, 735452 et 1. On doit donc, dans l'expression précédente de  $nt - f - e$ , substituer, au lieu des angles  $cv$  et  $gv$ , les quantités  $cv - 3,00052 \cdot \frac{r}{C} \{e^* - E^*\} \cdot dv$ ,  $i; - 0,735452 \cdot \frac{m}{f} \{e' - K'\} \cdot dv$ . L'équation séculaire de l'anomalie moyenne est ainsi,  $- 4,00052 \cdot \frac{m}{f} \{e^* - E^*\} \cdot dv$ , ou a très-peu près quadruple de celle du moyen mouvement. 17. Nous allons présentement déterminer quelques-unes des inégalités les plus sensibles du quatrième ordre. L'une de ces inégalités est relative à l'angle  $2v - 2mv - 2(jv - hcv - h2d - \alpha)$ , et nous avons déterminé précédemment la partie de  $aSa$  qui dépend du cosinus de cet angle. On trouve ensuite, par le n° 15, que l'expression de  $nt - he$  renferme l'inégalité  $8(2, \alpha^2 + 2m) \cdot \frac{r}{C} \cdot \frac{1}{2r - 2m} \cdot 2^{\alpha} \cdot \frac{1}{2} - 2111 - 2(\alpha + 0 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} CV - \frac{1}{2} 20 \cdot \alpha^2 J$ . Cette inégalité réduite en nombres devient  $2 \frac{6}{77} \cdot \sin.(2i; - 2mv - 2gv - hcv - h2d - \alpha)$ . Considérons encore l'inégalité relative à l'angle  $2cv + 2v - 2mV' - 2\alpha$ . TOME m. 35

**The text on this page is estimated to be only 25.75% accurate**

274 MÉCANIQUE CÉLESTE. Si Ton rassemble tous les termes dépendants du cosinus de cet angle, que donne le développement de la seconde des équations (L) du n° 1, et que nous avons déterminés dans le n° 6, cette équation devient, en n ayant égard qu'à ces termes, ddu 3 m' (lo — iQ/ii+8m\*). (2+c--m; , , v o= -j— +u-\ • ^ ^-ri ^ ' . e\*.cos. (2 cv+2 v— a mv— 2 taf; dv^ 2a ^ a {c—m—i) ^ ' en nommant donc i4V\*^^'.cos.(2Cî;- h2v — 2mv — 2©), le terme correspondant de aSn, on aura .(lo — i9m-4-8m').(2 — m-f-c) A ' (0) \_? \_« \_ ' ~ 4(c-m+i). {4(c-m+i)»-il Si Ton nomme ensuite CV\*^^\*.sin.(2cv+2i;— 2mt;— 2'CT), le terme correspondant de l'expression de nf-t-e; on trouve, par le n° 15, 3m\* (lo— igm+Sm\*) 3 m'.(i — m) 9 m' 2 ' 8(c— m + i) 2— 2m+c 16 (1— to)| (— 2i?^-f-3i4, ^J— 3i4.^-J CV^^= 2C— 2m+2 En réduisant ces formules en nombres, on a i4V"= 0,002 G io4i y CV»)=: \_o,oi3o6i8; d'où résulte dans nf-he, l'inégalité — 2 5",o3.sin.(2ci;-f-2i; — imv — 2©). L'expression de dt du n° 15 donne dans nf-he, le terme 3i4, ^\*^ee'.sin.(2T;— 2mv+cî;— c'mv— «r+«r') 2— 3m+c Ce terme est sensible à cause de la grandeur du coefficient i4, ^\*^

**The text on this page is estimated to be only 27.11% accurate**

SECONDE PARTIE. LIVRE SEPTIÈME. 275 il est donc utile de considérer l'inégalité relative à Targument 2v —  $\wedge mv \wedge + \wedge cv$  — cmv — tsT-4-ty'. La seconde des équations (L) du n<sup>o</sup> 1 donne, en n'ayant égard qu'à ces termes que nous avons développés dans le n<sup>o</sup> 6, (2V—2 mv+cv\ dda 2im\*.(2— 3m).(4— 3m+c) , dv\* H (a— 3m+c) Soit i4V\* $\wedge \wedge \wedge$ '.cos.(2t; — 2mv-hcv — cmv — TS-h- $\wedge$ a') la partie de a Ju dépendante de l'argument dont il s'agit; on aura A, (jj 2 1 m\*. (2— 37ii) . (4— 3iii+c) • ~"~ 4(2-3m+c).(2-3iw+c)'-i } \* Si l'on nomme ensuite CV' $\wedge \wedge \wedge$ '.sin. (2 V — 2 mv-hci; — cmv — m-hts') la partie de nf-+-e, relative au même argument; on trouve par le n<sup>o</sup> 15, 2im\ (2-3m) ^ 2im>  $\wedge \wedge$ ., ^ ^ ^ , ^ Qf (,) A(2— 3m+c) 4(2— 3m) [ ^ 2— 3iîi+c £n réduisant ces formules en nombres, on trouve il? $\wedge$ — 0,0134975, CV' $\wedge$ = o,o53448o; ce qui donne dans nt-he, l'inégalité 3 i $\wedge$ jSQ.sin. (2 V — 2 mvH-ci; — cmv — isr-htar'). Les inégalités dépendantes des angles 2cv — 2î;-f-2mî;dbcmt; — 2t«TqF'CT'» semblent devoir être sensibles par les grands diviseurs que les intégrations leur font acquérir; il importe donc de 35.

**The text on this page is estimated to be only 14.35% accurate**

276 MÉCANIQUE CÉLESTE. les déterminer avec soin. En suivant Tanalyse exposée précédemment, et en n'ayant égard qu'aux quantités du quatrième ordre, si l'on représente la partie correspondante de  $a^a$  par  $A^{^^}\backslash e^e$ .COS. [icv — sv-hamv-t-cmv — 2© — tar') -t- i4V'^.^'^.cos.(2cv — 2v-f-2mr — cmv — 2tBr-H'cy'), l'équation difflférentielle en u devient 7 (2+1 im+8mV) 7(io+i9m+8m\*)j ddu 3m' ) Te 8(2c— 2+3m) ^^ "# J O/ll ' 1 Af (,j 0=: -j— + UH • { ^ ^ „ ^ ' >,e'g.cos.( , 1 \+cmv— 2tîr-'B ( 2 c— 2+3 m '^ ' 10 + 19 m +8 m\* (2+1 im4-8m\*) 3m\* ] 8(2c— 2+m) TÔ f , , / 2cv — 2v + imv\ ^ ^ ' >.e\*e.cos.( , , h 2C— 2+m I 2C— 2+m \* • on aura donc / 7(2+11 m +8 m') i/(,)\_\_ —3m\* J 16 ' "" 1— jm\*— (2c--2+3m)\* j^ 7(io + i9m + 8m\*)+4oi4,Wj' ( 8(2c— 2+3m) !io+i9m+8m\*— 4o i4,w 8 (2 c— 2+m) (2+iim+8m\*) Te Si Ton désigne la partie correspondante de /if-he, par CV'^^^'-cos.(2ci; — 2i;-h2mv-f-cmt; — 2t«T — ia') -H CV\*^.«'^'.cos. (2 cv — 2 v-t- 2 mv — cmv — 2 tsy-f-tsrf) ,



**The text on this page is estimated to be only 22.73% accurate**

SECONDE PARTIE, LIVRE SEPTIEME. 277 on aura par le n""  
15, I2iin'.(io+i9m+8m\*)+i2om\*. i4i^""^ 2im'.(2+3m) 63m' j i6 (2c— a+3m)  
4(2— 3m--c) 16(2— 3m) 1 ^ . ^, \_ , -2ilV')+3i/-^3i4/-)+3i/'U') ^1 2 c —  
2+om -3m\*. (io+i9m+8m') +iaom\*. i4/'^ 3 m\*. (2+m) gm\* i6(2c— 2+m) 4(2  
— m—c) 16(2— m) ç. j.j^ f--2ilV»)+3>4/->-34

**The text on this page is estimated to be only 26.45% accurate**

1 2 m 278 MÉCANIQUE CÉLESTE. Il est facile de voir, par l'expression de  $dt$  du n° 15, que l'inégalité dépendante de l'argument  $\wedge v - mv - cv - h'O$ , doit être sensible. Pour la déterminer, nommons le terme correspondant de  $ahu$ . Il est clair qu'il ne peut en résulter de semblables, dans l'équation différentielle en  $u$ , que par la variation des termes de la seconde des équations (L) du n° 1, dus à la force perturbatrice. Nous avons développé ces variations dans le n° 8. La première est  $j^{\wedge} - \backslash$  ; et elle ne produit aucun terme du quatrième ordre dépendant de  $\cos. \{ \wedge v - imv - cv - h^{\wedge} \}$ . La seconde variation est  $^{\wedge} . , . dM. \cos. 2r - 2r + \# , , - dv. sm. 2V - iv$  ; elle produit le terme  $-7 - . (3 - l^{\wedge} m) . yl / * ^{\wedge} . \cos. (4t' - \grave{a} rnv - cv - f - 'cr)$ . La troisième variation est  $6m' . tt' * Su du . f , x im. u^{\wedge} d. Su . , , > ; , - . -T . sm. 2l' - iv TT - r^{\wedge} - j - . sm. 2r - iv ) 'irn. u \backslash Sv' du , , s H 77 - :$   $-7 - . \cos. (2i ; - IV$  ; elle produit le terme  $- . - . (2 - ira - c) . A , ^{\wedge} Ke. \cos. [kv - kmv - cv - htar)$ . Enfin la quatrième variation est  $-f | 7^{\wedge} \cos. (25(1 ; - 2 0) \}$  .  $I^{\wedge} - 4^{\wedge} . - . \sin. (2i ; - 2i ; ) - 4 - | 3v' . \cos. (2v - 2 *$

**The text on this page is estimated to be only 13.75% accurate**

SECONDE PARTIE, LIVRE SEPTIÈME. 279 elle produit le  
terme  $3 m^* \text{ fa} - 5m) m$ , ..  $t \text{ § } i \setminus . -f - 7 - . il / \setminus e . \cos. \text{fav} - \text{amv} - \text{cr} + 'CT$   
 $. a^1 l^1 - \lim - c^1$  L'équation différentielle en  $n$  deviendra donc, en  
n'ayant égard qu'à ces différents termes, dda  $3 m' (t^4 (2 - 5m) ) \dots // \# x$   
 $o = -j - +u 7 - . 5 - om - c + 7^{-7} [ .A.^{'}Ke. \text{ces. } 4^{\text{---}} \text{---}^{\text{---}} \text{mv} - \text{cv} + ^{\text{---}}]$ .  
 $dv^* Ixa^{\text{---}} ( 4 - am - c) ^{\text{---}}^{\text{---}}^{\text{---}}$ , y En y substituant  $>4V^{*^{\text{---}}^{\text{---}}^{\text{---}}}\text{-cos.}(4v - kmv$   
 $- cvH\text{-isr})$  pour  $a^n$ , on aura  $4/ (,) A ( 4 - 4w - c)$  Si Ton nomme ensuite  
 $CV^* . e. \sin.(4i' - 4n\ddot{t}; - cv^{-\text{---}}\text{ts})$  le terme correspondant de  $nf H\text{-e}$ ; on  
aura, par le  $n'' 15$ ,  $j 3g^{\text{---}}^{\text{---}} 3m' (i^{\text{---}}m)^{\text{---}} 3^{\text{---}}$ ,  $j^{\text{---}}$ ,  $_{\text{---}}^{\text{---}}$ ,  $^{\text{---}}$ ,  $(,^{\text{---}} | 4(i - m) 4 - 4m -$   
 $>c j' 4 - 4 \gg \gg - c$  En réduisant ces formules en nombres, on trouve  
 $ilV^{*^{\text{---}}} = - 0,000799351$ ,  $CV^{*^{\text{---}}} = 0,00294934$ ; d'où résulte dans  
l'expression de  $nf + - e$  l'inégalité  $1 o3', o 1 . \sin.(4v - kmv - cr - h \text{ tar} )$

280 MÉCANIQUE CELESTE. L'inégalité dépendante de  $4v - 4^w i$ ; — scv-ha<sup>ef</sup> peut encore être sensible : l'expression de ndt du n° 15 contient le terme  $-f - (i4/'^{\wedge}) \backslash e \backslash dv \cdot \cos.(4v - /[mv - 2cv - h^2 \ll)$  ; d'oii résulte dans nt+e le terme  $3 (/4, ^{*})^* . (?^* . \sin.(4i^{\wedge} - 4/wv - 2cv + 2tff) ^{2(4--4'W - 2C)}$  il est aisé de voir que c'est le seul terme du quatrième ordre, dépendant du même argument, qui entre dans l'expression de 111-+-e. En le réduisant en secondes, il devient  $68 \backslash 70. \text{sih} . (4t' - \grave{a} mv - 2cr - f - 2 \ll)$ . On verra ci-après que les tables de Mason et de Burg s'accordent à ne donner que 46" environ, pour le coefficient de cette inégalité; ce qui semble indiquer que ce coefficient est bien déterminé par les observations. Ainsi, la différence de 22" qui existe entre leur résultat et celui de notre analyse vient, en grande partie, des quantités du cinquième ordre, que nous avons négligées dans le calcul. Pour le prouver, et faire voir en même temps qu'une plus grande approximation diminue les différences entre la théorie et les observations, nous allons déterminer ce coefficient, en ayant égard aux quantités du cinquième ordre. Désignons par  $A \backslash ^{\wedge} K c \backslash \cos.(4v - ^{\wedge} mv - 2cv - h^2 \textcircled{R})$  , le terme correspondant de ahi; il est clair qu'il ne peut en résulter de semblables dans l'équation différentielle en «, que par la variation des termes de la seconde des équations (L) du n° 1, dus à la force perturbatrice. Nous venons de donner les quatre variations de ces termes : la première ne produit aucun terme du

**The text on this page is estimated to be only 18.60% accurate**

SECONDE PARTIE, LIVRE SEPTIÈME. 281 cinquième ordre, dépendant de  $\cos.(4v - i^{mv} - 2cr-t-2isr)$ . La seconde variation produit le terme  $o m' -^{\wedge} - . [iA,^{\wedge\wedge} - i4j^{\wedge}Jj.e\backslash\cos.(4v - hmv - 2cv-+^{\wedge}2tar)$ . Les termes du cinquième ordre, dépendants de  $C0S.(4v - \grave{a}^{\wedge}V 2CV-h 2'CT)$ , et produits par la troisième variation, se détruisent mutuellement, aux quantités près du sixième ordre. Enfin, la quatrième variation produit le terme  $3m' (5yl,t>) >\sim 2i4,t'') (i--2m).(3\sim 2a' 2 - 2J\hat{I}I - c .(3^{\wedge}aiii).$   
 $(io+i9m+8m')^{\wedge},)_{-}^{\wedge}All.\backslash e^{\wedge} \cos ( \wedge^{\wedge}{}^{\wedge}mA 4(2c - 2+2in\} ' * 2 - 2m)* '$   
 $'y_{2cr-f-2tsT/ L}$  \*équation différentielle en u devient donc, en n'ayant égard qu'à ces termes.  $/^{\wedge}A (0 - o>1 ('') A (''! 0=-f - + U + m* 1 ' * * 2 - 2m - c$   
 $2 - 2m f , / hv - \grave{a}mv\backslash^{\wedge} y V g'^{\wedge} COS.I )\bullet fl, ' ] , (i - 2m).(3 - 2m).$   
 $(io+i9yw+8m*) i(,)(* \backslash - 2ci;+2\ll/ 4 (2C - 2+2m)$  En substituant  $i4V'^{\wedge} \ll *.cos.(4v - dwt; - 2ci;-h2tar)$  pour  $a5u$ , on aura  $5yl w-2yl.('') >4\gg$

282 MECANIQUE CELESTE. le terme correspondant de  $n\dot{H}-e$ , on aura, par le n° 15,  $3m' \cdot (5i_4, '' - 2i_4, ''')^2 \cdot 7m^* (10 + 19w + 8iw^*) \cdot (I_4(2 - 2in - c) G_4(i - m)' 2c - 2 + 2m' i^3 - 3iV) + \frac{1}{3} \frac{m^3}{m'} \frac{1}{m} V^3 - 3m'$ .  
 $(.o + .9m + 8m') J_4(i - wi)^2 - 2m - c \cdot 8(2c - 24 - 2m)^4 - 4in - 2C$  En réduisant ces formules en nombres, on trouve  $AV^3 = 0,00436374$ ,  $CV^3 = 0,0249067$ ; ce qui donne dans  $nt-he$  l'inégalité  $47^{\circ} 71'. \sin.(4v - \frac{1}{2}mv - 2cv - \frac{1}{2}v^2)$ . La différence entre ce résultat et celui des tables est insensible; et Ton voit par ce calcul que, pour rapprocher entièrement la théorie de l'observation, à l'égard de toutes les inégalités lunaires, il suffirait de porter l'approximation jusqu'aux quantités du cinquième ordre. Cela résulte encore du calcul de l'inégalité dépendante de  $\sin.(t; - mv)$ , dans lequel nous avons eu égard aux quantités de cet ordre; car on verra par la suite que le résultat de notre analyse, comparé à celui des observations, donne à très-peu près la parallaxe du soleil, que l'on a conclue des passages de Vénus sur cet astre. L'inégalité dépendante de l'argument  $cv - v - \frac{1}{2}mv - tar$  peut être sensible, à cause de la petitesse du coefficient de  $v$  dans cet argument. Pour la déterminer, désignons par  $\frac{1}{4}V^3 - \frac{1}{2} \cos.fci; - v - \frac{1}{2}mv - ty$ ,  $a^3 C^3 K - T.e. \sin. (et; - v - \frac{1}{4}mi; - tar)$ ,

SECONDE PARTIE, LIVRE SEPTIÈME. 283 les parties de  $\text{ahu}$  et de  $\text{nt}+e$  qui dépendent de cet argument; on aura, en ayant égard aux perturbations de la terre par la lune,  $(C+I \ll 1)$ .  $j_1 - (c-f-TO - 1)' - Ylîlj' = 3 m c+m-i'^{\wedge}'^{\wedge}'^{\wedge} 8(i\sim m) c-f-zn - 1$  D'où Ton tire  $i4V^{\wedge} = -0,260^{96}$ ,  $CV^{\wedge}z z : -0,293763$ . De là résulte dans  $\text{nt}-e$  l'inégalité  $-25'',65$ . ( $i-hi$ ) . $\sin.(ci; -v--hm v - \odot)$ . L'inégalité dépendante de l'argument  $v - mv-h^{\wedge}cv - tar$  est facile à déterminer par le  $n''' 15$ ; il est aisé de voir qu'elle est égale à  $-.r.^{\wedge}.sm.ii; -mv-hcv - tar), i+c-m a'^{\wedge}$  et par conséquent égale à  $-15\backslash 47-$  ( $1+-O .\sin.(v - mv-h^{\wedge}cv - tar)$ ). En suivant les mêmes procédés, on déterminera les autres inégalités du quatrième ordre; mais comme elles sont au-dessous des erreurs de nos approximations, il ne sera utile de les considérer par la théorie que lorsqu'on voudra porter l'approximation jusqu'aux quantités du cinquième ordre. 36.

**The text on this page is estimated to be only 19.03% accurate**

284 MECANIQUE CELESTE. Maintenant, si Ton rassemble les inégalités du quatrième ordre que nous venons de déterminer, on aura -I- 2 6",77.sin. — 2 5\o3 .sin. -f- 3 1^39. sin. -t- 18^1 5. sin. — o,70.sm. — 9 ',7 5. sin. -\- 13^89. sin. ^-lo3",ol .sin. -h kl\'ji .sin. — 2 5^65. (i-hi) .sin. (ci; — v— i5\47 . (n-0 •sin.(i; — mv 2v — imv — 2^v-+-cî;-h2 0 — tsr) 2CV-+-21; — imv — 2^©) IV — 'imv-\-cv — cmv — ^cTH-tar) 2CV — 2v-\-imv-\-cmv — 2« — 'cr') 2CV — 2v-\-imv — cmv — ^2«-h'Cf) icV'+Cmv — 2tar — tar') 1CV — cmv — 2tar H- W ) liv — kmv — crH-tar) kv — kmv — 2Ci;-f-2'CT) mv — "us) -cv — tar). 18. Considérons le mouvement de la lune, en latitude. Nous avons déterminé précédemment la tangente s de sa latitude; or l'expression de Tare par la tangente s est 5 — y 5'-}- y 5\* — etc.; ainsi la latitude de la lune est à très-peu près, y.(i — y7') .sin.(5fi; — 0)-+-55. {i — -f-y'-h jy\*.cos.(2^t; — 2Ô)} -f- ^y\sin.(3^t; — 30); d'où j'ai conclu , en employant la valeur précédente de y, la latitude égale à 5723o",83.sin. +- 38^,78. sin. f-1621',09 .sin. f- 3",52.sin. — 17 ,20 .sm. +- 6i",2 7.sin. f- i9\95.sin. — 4 ',2 8. sin. gv-e) ^v — 3d) 2v — 2mv — gv-i-d) 2v — 2mv-hgv — 6) gv-hcv — 0 — «) gv — cv — 0H-tar) 2v — 2m V — gv-^cv-hd — tar) 2v — 2mV'-hgv — cv — d-h'ts)



**The text on this page is estimated to be only 26.57% accurate**

SECONDE PARTIE, LIVRE SEPTIEME. 285 (21; — 2mv — gv — ci;-4-0-t-'cr) [gv-hcmv — d — «') [gv — cmv — 0-f-W) [2v — 2mv — gv-hc'mv-\-d — 'cr') (21; — 2mv — gv — cmv-\-0-{'cs') (2 ci; — gv — 2© -h 9) [2cv-hgv — 2v-h-2mv — 2« — 6). 19, Il nous reste à déterminer la troisième coordonnée de la lune, ou sa parallaxe. Le sinus de la parallaxe horizontale de la lune est égal à — ou à ^ , D étant le rayon terrestre. Vu la 66',66. sin.( -f75',i4. sin.( So^oô sin.( 3i",47 . sin.( -f69^,19 • sin.( -h 8r,57 . sin.( ' -+i5\83. sin.( VT^ S S petitesse de cette quantité, on peut la prendre pour l'expression de la parallaxe elle-même. En y substituant pour u sa valeur -. ji+e'+-|-7\*+e.(i+e') .cos.{cv — 'Cs)-'\y\cos.[2gv—2 6) } + 5h, et négligeant les termes de Tordre — . e\ on aura la parallaxe égale à D a D a —.[i+€^).\i+€. [i—\y\*+Yy\*.cos.[2gv—2d)]xos.[cv---'cs)+aBu--sh\ Pour déterminer —, nous observerons que l'on a, par le n\*" 10, i = :^- 0,9978020, et, par le n^ 15, doù Ton tire -^ . i,ooo3o84 = -; I ./ n\*.(i,ooo3o84)\* â y 0,9973020

286 MÉCANIQUE CÉLESTE. Soit  $i$  le double de l'espace que l'attraction terrestre ferait décrire dans le temps  $t$ , sur le parallèle dont le carré du sinus de latitude est  $y$ . Cette attraction est  $\frac{1}{r^2}$  par le n° 35 du livre III, la terre  $M$  étant supposée elliptique. Mais on a fait précédemment  $M-f-m=j$ ,  $m$  étant ici la masse de la lune; on a donc  $M.r \{i\} J+m$ . D' partant a  $\frac{1}{M-hm'}$   $2s^* 0,9973020$  Supposons  $t$  égal à une seconde, et nommons  $T$  le nombre des secondes d'une révolution sidérale de la lune; on aura  $\frac{1}{iz} = \frac{1}{TT}$ ,  $TT$  étant le rapport de la demi-circonférence au rayon. Soit  $l$  la longueur du pendule à secondes, due à la gravité sur le parallèle que nous considérons; on aura, par le n° 15 du premier livre,  $ie=i'nH$ ; ce qui donne  $a y AJ+m^* / ^*$   $o, D (2,0006168)' 9978020$ .  $i^*$  La longueur du pendule à secondes, sur le même parallèle, est, par le n° 42 du troisième livre, égale à  $o^*'^{1/2}, 740905$ ; il faut l'augmenter de sa  $ii34^*$  partie, pour avoir la longueur qui aurait lieu sans la force centrifuge; ce qui donne  $l=o^o', 7426i2$ . La valeur de  $D$  est égale à 6369374 mètres; enfin, on a, par les phénomènes des marées,  $m = Tn^{-1}$ , et les observations donnent  $T= 2732166$ ; on aura ainsi  $\frac{1}{iz} = 0,01655101$ . a

**The text on this page is estimated to be only 9.14% accurate**

SECONDE PARTIE, LIVRE SEPTIÈME. ^ 287 En évaluant en secondes le coefficient —. (i-f-e\*), on le trouve a ^ ' égal à lo568^4l. Cela posé, on trouve pour l'expression de la parallaxe de la lune, sur le parallèle dont il s'agit, io568',4i -t-SyS^GS . cos.(ct; — «j H- 76\i8,cos.(2v — imv) - hi i7\49 .cos.(2v — imv — cv-f-'cr) — 2'',i6.cos.(2i; — 2mv-\-cv — tar) — o^53 .cos.(2i; — awt;-4-cmi; — tar') -h 5\o6\*cos.(2i; — nmv — cmv-htar') — i',o3 .cos.(cmv — 'Ct') — o^68 . COS. (21; — imv — cv-\- cmv h- «y — 'cr') -h 5'',o4.cos.(2r — imv — cv — cmr -h tsT-t-'or') — 2^02 .cos.[cv-\- cmv — « — «') H- 2^,67 .COS. (cr — cmv — «H-'cr') -h o\o3 . cos.(2cv — 2tar) -h 1 i',io.cos.(2ci; — 2v-\-imv — 2©) -H 0',23 .C0S.(2^V 20) — o',54 . COS. [igv — 2v-h2mi; — iB) — o^o4 .cos.(2cmv — 2tar') — 2^92 .cos. (2(/i; — ci; — 20-htar) — o^a o • cos, (21; — 2 mr — 2^ v •+- cv -h 2 6 — « ) — 2^99. (i-f-i) •cos.{v — mv) -h- o^48. (iH-i) .cos.(t; — mv-hc'mi; — «') — o', 1 3 . cos.(2i; — imv -hcv — cmv — ^-r-'us') — o\46.cos.(42^ — 4^1; — cv-i-taf) -H 0\ 1 4 • C0S.(4v kmv 2Ct; H- 2'BT ) -f- o',4o.cos.(2ci; — 2V-+-2mi;-+-cmi; — 2t3r — 'cr') -f- o^o7 • COS. (2 et; -4- 2 V — ami; — 2isr) — o^38 .(n-i).cos.(ci; — v-t-mv — «).

288 MÉCANIQUE CELESTE. CHAPITRE II DES  
 INÉGALITÉS LUNAIRES DUES À LA NON-SPHÉRICITÉ DE LA  
 TERRE ET DE LA LUNE. 20. Nous allons présentement considérer les  
 termes dus à la non-sphéricité de la terre et de la lune. On a vu dans le n° 1  
 que pour y avoir égard il suffit d'augmenter dans l'expression de Q la  
 quantité , de  $\frac{1}{2} \left\{ \frac{M}{m} \left( \frac{a^2}{b^2} - 1 \right) \right\}$  Si Ton nomme  $a$  l'ellipticité de la terre,  $D$  son  
 rayon moyen,  $\alpha$  le rapport de la force centrifuge à la pesanteur, à  
 l'équateur; enfin  $x$  le sinus de la déclinaison de la lune; on a, par le n° 35  
 du livre III, Si la terre n'est pas elliptique, on a, par le n° 32 du livre III,  $M$   
 $n^2 = 7 - \frac{1}{2} \left( \frac{a^2}{b^2} - 1 \right) \left( \frac{f}{l} - 1 \right) \frac{1}{\cos^2 \alpha} \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha} \cdot \cos^2 \alpha \cdot M$ ;  $a$  et  $\alpha$  étant des  
 constantes dépendantes de la figure du sphéroïde terrestre , et  $\alpha$  étant  
 l'angle formé par l'un des deux axes principaux de la terre situés dans le  
 plan de l'équateur, avec le méridien terrestre passant par le centre de la lune.  
 Il est facile de voir par l'analyse suivante, que le terme dépendant de  $\cos$ .  
 $2\alpha$  n'a aucune influence sensible sur le mouvement lunaire, à cause

SECONDE PARTIE, LIVRE SEPTIÈME. 289 de la rapidité avec laquelle l'angle  $\tau$  varie; en sorte que la valeur de  $V$  dont on doit ici faire usage est la même que dans l'hypothèse elliptique et d'une ellipticité égale à  $ap$ ; mais dans le cas général d'un sphéroïde quelconque,  $ctp$  n'exprime plus son aplatissement. On peut donc supposer, dans ce cas général, que la valeur de  $Q$  du  $n^{re}$  s'accroît, par la considération de la nonsphéricité de la terre, de la fonction  $M - h m$  étant pris pour l'unité de masse. Considérons d'abord la variation de l'orbite, ou le mouvement de la lune en latitude, dépendant de cette cause. Si l'on nomme  $X$  l'obliquité de l'écliptique sur l'équateur, et si l'on fixe l'origine de l'angle  $v$ , à l'équinoxe du printemps d'une époque donnée, on aura à très-peu près.  $jx = \sin.X.Y/i$  —  $ss.\sin.fv' + 'S.\cos.\backslash$ ,  $fv$  étant la longitude vraie de la lune, rapportée à l'équinoxe mobile du printemps. Il faut ainsi ajouter à la valeur de  $Q$  la fonction  $\frac{1}{D} (\sin^2.X.\cos^2.\frac{1}{2}v - \frac{1}{2}\sin^2.X.\sin^2.v)$  Cela posé, reprenons la troisième des équations (L) du  $n^{re}$ . Nous avons développé dans les nos 11, 12 et 13, les divers termes de cette équation dus à l'action du soleil : il est facile de voir que la fonction précédente lui ajoute la quantité  $JL \ll ' \wedge .D^* a.\sin.X.\cos.X. \sin./!;-t-(gf^* - i).H.s \backslash n.fv, H.sm.fv$  désignant l'inégalité de  $s$ , dépendante de  $\sin.fv$ . On TOME III. 37

290 MÉCANIQUE CÉLESTE. peut d'ailleurs se convaincre aisément que cette quantité est la seule sensible qui résulte de cette fonction. En l'ajoutant à l'équation différentielle du n° 13, et observant que  $i$  est extrêmement petit par rapport à  $1$ , l'intégration donnera d'où il résulte dans  $s$ , ou dans le mouvement de la lune en latitude, l'inégalité  $\frac{1}{2} \sin 2i - \frac{1}{8} \sin 4i + \dots$ . C'est la seule inégalité sensible du mouvement lunaire en latitude, due à la non-sphéricité de la terre. Cette inégalité revient évidemment à supposer que l'orbite de la lune, au lieu de se mouvoir sur le plan de l'écliptique, avec une inclinaison constante, se meut avec la même condition, sur un plan passant constamment par les équinoxes, entre l'équateur et l'écliptique, et incliné, à ce dernier plan, d'un angle égal à  $i \sin X$ . Nous avons trouvé précédemment  $i = 0,01655101$ ,  $g = 0,00402175$ ; on avait en 1760  $X = 26^\circ 796$ ; enfin,  $\alpha = -g$ ; en supposant donc  $\alpha = i$  l'inégalité précédente devient  $\frac{1}{2} \sin 2i - \frac{1}{8} \sin 4i + \dots$ .

SECONDE PARTIE, LIVRE SEPTIÈME. 291 Elle serait —  
 4i\47o.sin.yV, si l'aplatissement de la terre était  $-\frac{1}{2}$ , comme dans le cas  
 d'homogénéité de cette planète; cette inégalité bien observée est donc très -  
 propre à faire connaître l'aplatissement de la terre. Considérons  
 présentement les variations du rayon vecteur et de la longitude de la lune,  
 dues à la non-sphéricité de la terre. Nous pouvons les déduire de la  
 première et de la seconde des équations (L) du n° 1; mais il est plus exact  
 et plus simple de faire usage des formules du n° 46 du second livre. Pour  
 cela, nous supposerons que dans ce n° 46, la caractéristique différentielle  
 S se rapporte à la quantité  $\frac{1}{r} \frac{dR}{dt} - P$ . Nous observerons ensuite que la  
 fonction R du même numéro est égale à ce que nous représentons ici par —  
 $Q - \frac{1}{r} \frac{dR}{dt}$ , et que rR est égal à  $\frac{1}{2}(-j-)$ ; ce qui change l'équation (5) du numéro  
 cité, dans la suivante.  $\frac{d}{dt} rS - rS - 2f \frac{dR}{dt} - \frac{1}{r} \frac{dR}{dt} \cdot r \cdot (\frac{1}{r} \frac{dR}{dt} R$  contient le terme  $2 [dp -$   
 $T*9) - \frac{1}{r} \sin. X. \cos. X. \frac{1}{v}$ ; et par conséquent celui-ci,  $(ap - T*9) -$   
 $\frac{1}{2} - \frac{1}{r} \frac{1}{v} - \frac{1}{r} \frac{1}{v} \sin. X. \cos. X. \frac{1}{v}$  eos.  $(\frac{1}{r} \frac{dR}{dt} - fv - d)$ ; en supposant donc que oR  
 représente ce terme, fSdR sera égal à ce même terme; car la caractéristique  
 différentielle d se rapportant aux seules coordonnées de la lune, on aura, en  
 n'ayant égard qu'au terme précédent,  $f \frac{dR}{dt} = \frac{1}{r} \frac{dR}{dt}$ ; on aura ensuite,  $\frac{1}{r} \frac{dR}{dt} - j - \frac{1}{v} =$   
 $- 3[ap - Ya(\frac{1}{r} \frac{dR}{dt}) - \frac{1}{2} \sin. X. \cos. X. y \cos. (\frac{1}{r} \frac{dR}{dt} - fv - d)$ . 37.

292 MÉCANIQUE CÉLESTE. Si l'on substitue ces valeurs de  $\dot{f}$ , et de  $S$ . " $\bullet(\blacksquare j - )$ " dans l'équation différentielle précédente, on verra que l'expression  $Sr$  contient un terme dépendant de  $\cos.[gv - /vH-0]$  mais qui, n'ayant point  $\wedge - i$  pour diviseur, comme le terme correspondant de  $as$ , est insensible. Il n'en est pas de même de l'expression de la longitude. La formule (7<sup>e</sup> du n<sup>o</sup> 46 du second livre donne dans  $dSv$  la fonction  $Ut \backslash fhAR + 'idt \backslash h.r.i\dot{\varphi}^{\wedge} r^{\wedge} dv$  En y substituant pour  $5i\hat{t}$ , le terme qu'il représente, on aura dans  $d.8v$  le terme  $[1 \bullet - 7 - sm. A. COS. A. y. \cos.[gv - Jv - d)]$ . Mais ce terme n'est pas le seul de ce genre qui entre dans l'expression de  $d.8v$ . L'action du soleil donne par le n<sup>o</sup> 3, dans  $Q$ , le terme  $-7-7.(1 - 2 \ 5^*) \bullet$  En y substituant pour  $u$ , , on aura dans  $R$  le terme ce qui donne dans 8 Rie terme  $.SOS, \bullet - T - Jj$  le terme  $2 \ 1 \ m \backslash tt'^* . r^* \wedge - . SOS$ .



SECONDE PARTIE, LIVRE SEPTIÈME. 293 On a à très-peu près  $mn \backslash r' = jn \backslash$  et par le n° 13,  $\wedge^*$  est à fort peu près égal à  $i - h y m'$ , ce qui donne  $g$  égal à  $i - h - fm^*$ ; le terme précédent devient ainsi  $ili [g - i).sSs r$  En substituant pour §5,  $— — — \wedge — \wedge . — \wedge . \sin. X. \cos. X. \sin. fv$ ; et pour  $s, y. \sin. (\wedge i; — 0)$ , on aura le terme  $D^* — 7(ap — Ya^{\wedge}). — j - . \sin. X. \cos. X. y. \cos. (\wedge v — Jv — 6)$ , qui, ajouté au terme que nous venons de trouver pour  $3./S.d/\{ (j n \backslash - 1 — |$ , donne dans d8v, le terme  $iv\_P — i — L/.\_ - . \sin. X. \cos. X. y. \cos. (\wedge i; — fv — 6)$ . On peut dans ce terme substituer  $a$  pour  $r$ , et  $dv$  pour  $ndt$ ; en observant ensuite que  $7i^*a' = i$ , il devient  $— iodv. [(xp — T^{\wedge}ip) - — r - \sin. X. \cos. X. y. \cos. (\wedge i; — fv — 0)$ . Cette valeur de  $d.êv$  est, par le n° 46 du second livre, relative à Tangle compris entre les deux rayons vecteurs consécutifs  $r$  et  $r - hdr$ ; or si l'on nomme  $rfv$  cet angle,  $dv$  représentant alors sa projection sur le plan de Téclip tique, on a, par le numéro cité,  $dv = dv .$  ou à très-peu près,  $' * * dv'$

294 MÉCANIQUE CÉLESTE. En substituant pour  $s$ ,  $y \sin$ . [gv — d) —  $l \ll P \sim T \ll yj$  — ..sin.X-cos.X.sin./v, on aura / ni rfrzzrfi;. i+|(ap — Ya(p). — ; ^7.sin.X,cos.X.cos.(5ft;--/v--0)+etc. . On voit donc que pour avoir la valeur de d.hv, relative à Tangle V formé par la projection du rayon vecteur r sur Técliptique, avec une droite fixe, il faut ajouter à l'expression précédente de d.hv le terme Ydv. {(tp — yaip). — ^sin.X.cos.X.y.cos.(^t; — fv — d); ce qui donne rf.5v= — Y^^- {^P~"2"^^)--^sin.X.cos.X.y.cos-{5fi; — /v— 6); et en intégrant, ^v = — y v^P «^/.,— ,sin.X.cos.X.y.sin.(gft;— /y — d). C'est la seule inégalité sensible du mouvement de la lune en longitude, due à la non-sphéricité de la terre. On doit observer que fv — gv]-d exprime la longitude du nœud ascendant de l'orbite, comptée de Téquinoxe mobile du printemps. Il suit de là que Texpression de la longitude vraie en fonction de la longitude moyenne renferme l'inégalité Y ^—^—j-^ . -7. sin.X.cos.X.y.sin. (longitude du nœud ascendant). Le coefficient de cette inégalité est 17",! 35, si p= t^- il s\*élève à 35^490, si p= -^.

SECONDE PARTIE, LIVRE SEPTIÈME. 295 La Don-sphéricité de la terre influe encore sur les mouvements du péri-gée et des nœuds de l'orbite lunaire. En effet, la valeur de Q étant par là augmentée de la quantité  $\frac{1}{1} \frac{\Delta}{\Delta}$ , «x ( T— (i— ^\*)-sin.\*X.sin.7'r / ^ ^ ' ^ r / \ ^ / (— 25.sm.A.cos.A.sm.yt;— 5'.C0S.\*A) il en résulte dans la seconde des équations (L) du n\*\* 1, le terme -'•^—■:f'-^o'.(-fsin.-M. En y substituant pour u, sa valeur approchée-, j i+e.cos. [cv—^)\y et observant que A\* est à très-peu près égal à a, on aura dans l'équation différentielle [L] du n\*" 9, les termes a a\* ^ ^ ' ^—^ — - — —.—^.[i — Y sm.' Aj.e.cos.(ct; — tar); d'où il est facile de conclure que le mouvement du péri-gée sera augmenté, à très-peu près, de la quantité (ap— |a9). — .v.}i— l-sin.-Xj. Il est aisé de voir, en considérant la troisième des équations (L) du n"" 1 , que le mouvement rétrograde du nœud sera augmenté de la même quantité. En la réduisant en nombres, on trouve 0,00000026384.1^; ce qui est insensible. Nous ferons ici une remarque intéressante sur l'inégalité précédente du mouvement de la lune en latitude. Cette inégalité nest que la réaction de la nutation de l'axe terrestre, observée par Bradley. Pour le démontrer, nommons y l'inclinaison de l'or

296 MÉCANIQUE CÉLESTE. bite lunaire, sur le plan dont nous avons païé, et qui, passant constamment par les équinoxes, est incliné à Técliptique, d'un angle égal à  $\angle P j^r j$  —  $\angle \angle \angle \angle$  L'inclinaison de Forbite lunaire à l'écliptique sera  $y = L \cos i = \sin X \cos X \cos (\alpha - \beta)$ ; or Taire décrite par la lune, autour du centre de gravité de la terre, est  $r^2 dv$  : cette aire projetée sur l'écliptique est diminuée dans le rapport du cosinus de l'inclinaison de l'orbite lunaire à l'écliptique, au rayon; elle est donc égale à  $Y r^2 dv \cos y = Y \sin X \cos X \cos (\alpha - \beta)$ . 9Ainsi l'expression de cette aire renferme l'inégalité  $j^r dv \cos i = 7 \sin X \cos X \cos (\alpha - \beta)$ ; et comme on a  $r^2 dv = a^2 dt$ , à fort peu près, en représentant par  $dt$  le moyen mouvement de la lune; cette inégalité est égale à  $D^2 dt \cos i = P j^r f \sin X \cos X \cos (\alpha - \beta)$ . En la multipliant par la masse de la lune, que nous exprimerons ici par  $L$ , et en la divisant par  $dt^2$  le double de ce quotient sera le moment de la force de la lune par rapport au centre de gravité de la terre, et due à la non-sphéricité de cette planète, ce qui donne pour ce moment,  $L D^2 r^2 \sin X \cos X \cos (\alpha - \beta)$ . [i] En vertu de l'égalité de l'action à la réaction, la même cause

SECONDE PARTIE, LIVRE SEPTIÈME. 297 doit produire dans les molécules de la terre un moment égal et contraire au précédent. Ce moment est indiqué par la nutation de l'axe terrestre : déterminons sa valeur, par les formules du n° 6 du cinquième livre. On a vu dans le numéro cité que si  $\theta$  représente par  $\theta$  l'obliquité de l'écliptique à l'équateur, l'action de la lune sur la terre produit, en vertu de la non-sphéricité de cette planète, un accroissement dans cet angle, égal à  $(\frac{1}{2} \frac{m}{M} \frac{a^3}{r^3} \cos^2 \theta) \sin 2\theta$ , / et  $\theta$  étant les mêmes que dans le numéro cité. L'élément du mouvement de rotation de la terre étant supposé  $n dt$ , la somme des moments des forces qui animent chaque molécule de la terre, multipliées par la masse de cette molécule, est égale  $k n C$ ,  $C$  étant le moment d'inertie de la terre, par rapport à son axe de rotation. Pour rapporter ce moment à l'écliptique, il faut le multiplier par le cosinus de son obliquité, ou par  $\cos \theta$ .  $\frac{1}{2} \frac{m}{M} \frac{a^3}{r^3} \cos^3 \theta \sin 2\theta$  on aura donc dans ce moment l'inégalité  $\frac{1}{2} \frac{m}{M} \frac{a^3}{r^3} \cos^3 \theta \sin 2\theta - \frac{1}{2} \frac{m}{M} \frac{a^3}{r^3} \cos \theta \sin 2\theta$ .  $(\frac{1}{2} \frac{m}{M} \frac{a^3}{r^3} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \frac{m}{M} \frac{a^3}{r^3}) \sin 2\theta$  /  $\frac{1}{2} \frac{m}{M} \frac{a^3}{r^3} \sin 2\theta (\cos^2 \theta - 1)$  On a vu dans le n° 6 du cinquième livre que  $\frac{1}{2} \frac{m}{M} \frac{a^3}{r^3} \sin 2\theta (\cos^2 \theta - 1)$  expriment le moyen mouvement de la terre. De plus, par le n° 5 du même livre,  $\frac{1}{2} \frac{m}{M} \frac{a^3}{r^3} \sin 2\theta (\cos^2 \theta - 1) = \frac{1}{2} \frac{m}{M} \frac{a^3}{r^3} \sin 2\theta (\cos^2 \theta - 1)$ ,  $a$  étant la moyenne distance de la lune à la terre; et puisque nous représentons par  $t$  le moyen mouvement de la lune, et par  $M$  la masse de la terre; on a à fort TOME  $m$ .

298 MECANIQUE CELESTE. peu près  $\frac{1}{2} = i$ , ce qui donne  $m^*$ .  
 $X = -j^{\wedge}$ ; l'inégalité précédente devient ainsi  $\frac{1}{2} T f' \sin K \cos V y \cos$   
 $(\frac{1}{2} t - f v - 6)$ . Par le n° 2 du cinquième livre,  $2C - A - B = 4Tr. \{ap -$   
 $\frac{1}{2} \rho(p). D \frac{1}{R} dR$ ,  $p$  étant l'aplatissement de la terre,  $D$  son demi-diamètre, et  
 $jR$  le rayon d'une de ses molécules, dont  $\rho$  est la densité; enfin,  $i$  étant la  
demi-circonférence dont le rayon est l'unité. La masse  $M$  de la terre est  
 $\frac{1}{2} \rho \pi R^2$ ; ce qui donne pour l'inégalité précédente, en y changeant  $F$  en  
 $X$ , qui dans la formule précédente (i) exprime l'obliquité de l'écliptique,  $\frac{1}{2}$   
 $I; \frac{1}{2} > \frac{1}{2} P \sin X \cos X y \cos$  (jft;  $\frac{1}{2} f v - 0$ ). Cette formule est la  
formule (i), prise avec un signe contraire; d'où il suit que l'inégalité  
précédente du mouvement de la lune en latitude est la réaction de la  
nutation de l'axe terrestre; et il y aurait équilibre autour du centre de gravité  
de la terre, en vertu des forces qui produisent ces deux inégalités, si toutes  
les molécules de la terre et de la lune étaient fixement liées entre elles, la  
lune compensant la petitesse des forces qui l'animent, par la longueur du  
levier auquel elle serait attachée. 21. Pour avoir égard à la non-sphéricité de  
la lune, nous observerons que, par le n° 1, elle introduit dans  $Q$  le terme  
 $(Af - f - m)$ , ou plus simplement,  $\frac{1}{2}$ , parce que nous supposons  $Af - 4 - m = \frac{1}{2}$ . On  
a, par le n° 14 du troisième livre,  $S \ddot{r} = 3 \frac{1}{P} - \frac{1}{2} (I^*)$ .

**The text on this page is estimated to be only 22.87% accurate**

SECONDE PARTIE, LIVRE SEPTIÈME. 290 L'intégrale étant prise depuis  $a=0$  jusqu'à  $a$  égal au demi-diamètre de la lune, que nous désignerons par  $sl$ ; et  $p$  étant ici la densité des couches de la lune. On a de plus,  $m = \frac{rr \cdot fp \cdot d \cdot a^*}{\dots}$ ; on a donc  $m \propto \frac{fp \cdot d \cdot a^*}{\dots}$  Pour déterminer  $fp \cdot d[a^* Y^{**}]y$  nous observerons que Ton a, par le n° 32 du troisième livre, pour  $Y^{**}$  une expression de cette forme,  $Y^{**} = h! \cdot \{ \frac{1}{2} - i\hat{u} \} - 1 - h \{ \frac{1}{2} - i\hat{u} \} \sin. \frac{1}{2} h'' \cdot (i \cdot yj - \{ \frac{1}{2} - i\hat{u} \} \cdot \cos. 'or - \frac{1}{2} h'' \cdot (i - (x'') \cdot \sin. 2'cr - hfc \cdot (i - (X^*) \cdot \cos. 2^{\wedge})$ . Ensuite les propriétés des axes de rotation donnent, par le n° 32 du livre III,  $o = fp \cdot d\{a'h''\}$ ,  $o = fp \cdot d\{a'h'''\}$ ,  $o = fp \cdot d[a'h'']$ ; et, par le n° 2 du livre V, on a  $\frac{1}{2}C - A - B = r'^{\wedge} \cdot (in \cdot fp \cdot d(a'K), B - A = '^{\wedge} \cdot (tTr \cdot fp \cdot d\{a'hr\})$ . Ainsi Ton a On a à très-peu près, par le n° 2 du livre V, partant,  $\frac{1}{2} m \propto \frac{1}{p \cdot rf \cdot a} \gg r^*$ )  $S - A, .. ( \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{h} - \frac{1}{h} \cdot (i - ftj \cdot \cos. a' \odot ! 38.$

300 MÉCANIQUE CÉLESTE. Dans cette dernière expression,  $\hat{\alpha}$  est l'angle que le rayon mené du centre de la terre à celui de la lune fait avec l'axe principal de ce satellite dirigé vers cette planète; ( $x$  est le sinus de la déclinaison de la terre vue de la lune, par rapport à l'équateur lunaire. Il est clair que l'angle  $v$  croissant de  $dv$ , l'angle  $\alpha$  croît de  $dv$ ; on a donc  $d \cos \alpha = -2 dv \sin \alpha$ , la caractéristique différentielle  $d$  se rapportant aux seules coordonnées de la lune; de plus, on a, par le n° 46 du second livre, pour la partie de  $R$  relative à la non-sphéricité de la lune, dans la formule [Y] du n° 46 du second livre, est ainsi, en négligeant le carré de ( $x$ ,  $D^3 \text{ fp.d.a}'$  (5- $\wedge$ )  $j \cdot d / (= -p \text{ — } .V j \text{ .}' - \text{ — } 7T \text{ — } . \text{ av.sm. } 2\text{tar}; 5r' \text{ fp.d.a}^\wedge C$  d'où résulte dans  $h v$ , ou dans la longitude vraie de la lune, par la formule [Y] du n° 46 du second livre, le terme L'angle  $\text{tar}$  est toujours très-petit, par le n° 16 du livre V; en sorte que l'on peut supposer  $\sin. 2\text{tar} = 2\text{tar}$ . De plus, par ce même numéro, l'expression contient un terme de la forme  $— i T \sin. \text{''V'}$  [B-A) Ce terme, pris avec un signe contraire, représente, par le n° 15 du livre V, la libration réelle de la lune. Comme il croît avec beaucoup de lenteur, il semble pouvoir devenir sensible par la



SECONDE PARTIE, LIVRE SEPTIÈME. 301 double intégration : c'est le seul de l'expression de -or auquel il soit nécessaire d'avoir égard. Il produit dans Sv le terme  $\frac{6}{p} \cdot r \cdot f \cdot a' \cdot K \cdot \left( \frac{1}{(B-A)} \cdot \sin^2 j \cdot \frac{y}{3L} \cdot J + FJ \right)$ . La libration  $J \cdot \sin j \cdot \frac{1}{3} \cdot \sin^2 j + F \cdot \sin^2 j$  étant insensible, on ne peut pas supposer qu'elle s'élève à un degré. De plus, le coefficient  $-r$ ;  $\cdot Y \cdot y^3$  est extrêmement petit. Si la lune est homogène, il devient  $\sim 7$   $\hat{u}$  - est le sinus du demi-diamètre apparent de la lune; ainsi le produit de K par ce coefficient est entièrement insensible. Si la lune n'est pas homogène, sa densité croît de la surface au centre : alors ce coefficient est moindre encore; d'où Ton doit conclure que l'inégalité précédente de la longitude de la lune est insensible, et que la non-sphéricité de ce satellite ne produit aucune variation sensible dans son mouvement en longitude. Quant à sa latitude, on doit observer que (x étant le sinus de la déclinaison de la terre vue de la lune, par rapport à l'équateur lunaire, et le nœud ascendant de l'orbite lunaire coïncidant toujours avec le nœud descendant de son équateur, on a  $f \cdot j \cdot t \ll = \{5 - f - X \cdot \sin \{g \cdot v' - d\} \}$  X étant ici l'inclinaison de l'équateur lunaire à l'écliptique; ce qui donne la non - sphéricité de la lune ajoute donc à l'expression de

**The text on this page is estimated to be only 27.43% accurate**

302 MÉCANIQUE CÉLESTE. — -TT-T- ("T^I' ^^^^ ^\* troisième des équations (L) du n° 1, le terme  $\frac{3}{p} \frac{r^2}{a^3} \frac{1}{1-k+y} i^2 C-A-B$ , B-A Sfp.d.a\*' r\* ' y -Q 1 Q- . COS. QtST, OU à cause de cos. 2©=!, à très-peu près, elle lui ajoute le terme  $Gfp.d.a' j_- (X+y) jC-A) \frac{5}{p} \frac{cf.a'' r^* y}{C}$  Il est facile de voir, par le n° 14, que ce terme ajoute au mouvement du nœud la quantité  $Sfp.d.a' v^> (+y) (C-A) \frac{5}{p} \frac{d.a^{\wedge} r^* y}{C} C-A$  Par le n° 18 du cinquième livre, —jr— = 0,000699; ^'^^ ^^ ^^\* facile de voir que la quantité précédente est insensible. On trouve pareillement que la non-sphéricité de la lune ajoute au terme  $Tr^-(T^{\wedge}) \gg ^{\textcircled{R}} ^^$  troisième des équations (L) du n° 1, le terme  $\frac{3}{p} \frac{d.a^{\wedge} j_- (C-2A+B)}{\hat{O}fp.d.a^{\wedge} r^{\wedge} C \bullet^*}$  ce qui ajoute au mouvement du nœud le terme  $\frac{3}{p} \frac{d.a' j_- i^{\wedge} [C^2 A+B)}{lo/p.e/.a'r} \gg^* C$  quantité entièrement insensible.

SECONDE PARTIE, LIVRE SEPTIEME. 303 CHAPITRE III.  
DES INÉGALITÉS DE LA LUNE , DUES À L'ACTION DES  
PLANÈTES. 22. Il nous reste à considérer l'action des planètes sur la lune.  
Si Ton nomme P la masse d'une planète; X, Y, Z, ses coordonnées  
rapportées au centre de la terre;/, sa distance à ce centre; il est visible, par le  
n° 1, que la valeur de Q sera augmentée, par l'action de P, de la quantité P.  
 $\{xX+yY+zZ\} P$  ou  $P \cdot \{xX+yY+zZ\}$  etc Soient X, T, Z' les  
coordonnées de P, rapportées au centre du soleil, X, y, z étant celles de la  
terre; on aura  $x=X-r$ ,  $Y=y+r$ ,  $z=Z-z$  ce qui change la fonction  
précédente dans celle-ci,  $P \cdot \{rx+ry+Z^2-z^2-x^2-y^2-z^2\}$  Prenons pour  
plan fixe celui de Técliptique, ce qui rend z nul; et nommons R le rayon  
vecteur de la planète P, projeté sur ce plan; U l'angle formé par cette  
projection et par une droite fixe prise sur le même plan; et 5 la tangente de  
la latitude héliocen

304 MÉCANIQUE CÉLESTE. trique de P. Nommons encore r le rayon vecteur de la terre; v Tangle formé par ce rayon et par la droite fixe; on aura  $f = \sqrt{R^2 - r^2} - 2Rr \cos. [U - v]$ . La partie de Q relative à l'action de P sur la lune sera donc  $P, P. \frac{1}{3} p \frac{H \cdot \cos. \{v - U\} - r \cos. \{v - v'\} + R s S'}{OU}$  en négligeant le carré de 5,  $P P. (1 - 25^*) 2p \frac{R \cos. \{2V - 2U\} + r \cos. \{2V - 2v'\} - 2Rr' \cos. \{2V - U - t\}}{7} - \frac{3p R s S'. R \cos. \{v - IJ\} - r \cos. \{v - U'\}}{11}$  Le terme  $-r$  ne renfermant ni u, ni t; ni 5, il n'entre point dans y p les équations (L) du n<sup>o</sup> 1. Le terme 7-77; donne par son développement une fonction de la forme  $\frac{jic}{_A(o \cos. (\frac{\pi}{2} - i'))^i (\cos. ([\frac{\pi}{2} - v]) H - etc.)}$ . Le terme — 17 • (T<sup>A</sup>) <sup>^^ ^^</sup> seconde des équations (L) du n<sup>o</sup> 1 donne ainsi la fonction  $_(!\_j|i(o)\_i(o \cos. (f - r)) - A^{ii} \cos. 2^\wedge$  De là il est facile de conclure, par les n<sup>os</sup> 9 et 10, qu'il en résulte dans l'expression de a u la fonction  $\_j^p, iA^K \cos, \{i - m\} v A^K \cos. 2 \{i - m\} v A^K \cos. 3 \{i - m\} v j 5 ^{\bullet \bullet} j, -im^* - (i-m) \ll^{\wedge} i - > \ll - 4(i-m) \ll + i \pm TO \ll - 9(\hat{i}-m) \ll + ^* \wedge f$

SECONDE PARTIE, LIVRE SEPTIÈME. 305  $i$  étant le rapport du moyen mouvement de P à celui de la lune. De là résulte, par le n° 15, dans ndt, la fonction  $ri$ ,  $(i4^{\wedge}\cos.(\hat{i}-m)i; A^{\wedge}*K \cos. 2 (i'-m)v$   
 $i4(*^{\wedge}\cos.3(\hat{i}-m)r 1$  et par conséquent dans nf+-e, la fonction P.a'  
 $iA^{\wedge}'K\sin. \{i-m\}v \wedge A^{\wedge}'K\sin.2 \{i^{\wedge}m\}v |i4^{\wedge}\wedge). \sin.3(i-m)i$ ; Or on a, par ce qui précède, —  $tj- =m \setminus m$  étant la masse du soleil; la fonction précédente devient ainsi ->  $m^* a^{\wedge} m^{\wedge}' iA^{\wedge}'K\sin. \{i-m\}v jA^{\wedge}\wedge Ks \setminus n.2 \{i'-m\}v$   
 $jA^{\wedge}''K\sin.5[i\sim m)v i-m A^{\wedge}'Ks \setminus i\ddot{i}.[i-m)v \setminus A^{\wedge}'K\sin.i[i'-m)v \setminus A^{\wedge}'ls \setminus n.^{i\sim m})v \setminus$   
... Dans le cas d'une planète inférieure à la terre, on a, en nommant  $a$  le rapport de la distance moyenne de la planète au soleil, à celle du soleil à la terre, et conservant les dénominations du chapitre vi du sixième livre,  $d \setminus A^{\wedge}'^{\wedge}=h^{\wedge}' \setminus a \setminus A^{\wedge}*^{\wedge}=b^{\wedge}' \setminus a \setminus A^{\wedge}\wedge\wedge=b^{\wedge}' \setminus$  etc.  $i. i. i.$  « I s ce qui change la fonction [A) dans celle-ci, )  $_1 i \_\_\_\_\_\_ i L 1$  uptr  $i\_m \bullet , \pm TO'-(i-m)^{\wedge}$   
 $, \pm m'-4(i-m)' i-\pm n, '-9(i-m)' \wedge\wedge\wedge . (^{\wedge})$  dans laquelle on peut prendre pour  $(i - m)\hat{i}$ , la longitude moyenne de la planète, moins celle de la terre.  
Relativement à une planète supérieure,  $a$  exprime le rapport TOME III. 39

306 MÉCANIQUE CÉLESTE. de la moyenne distance de la terre au soleil » à celle de la planète; ainsi Ton a  $a^1 w = a^1 \sqrt{6}$ ,  $a^1 . i^4 w = a^1 . i^1$ ,  $a^1 . 4 w = a^1 . 6$ , etc. 1. — i. s 1 t ce qui change la fonction [A] dans celle-ci,  $-7.m^* a^1 (\sqrt{3}^3 - \sin. (\hat{i} - m) v - J - f e^* \sin. 2(1 - m) v j \sqrt{6}^8 \sin. 3(i - m) i; j$  ce sont les seuls termes sensibles qui peuvent résulter de l'action directe de la planète P sur la lune. Mais Taction du soleil sur la lune peut rendre sensibles, dans le mouvement de ce satellite, les perturbations du rayon vecteur de Torbe terrestre, dues à l'action de P sur la terre, et y produire des inégalités du même ordre que celles que nous venons de considérer. Pour le faire voir, considérons le terme qui, par le  $n^{**} 6$ , fait partie de la seconde des équations (L) du p  $n^{**} 1$ . Soit —  $.Z.\cos. (\hat{e}' j i^1 f - \hat{e} w^1 f^1 - B)$ , un terme quelconque de —  $r$ , résultant de l'action de P sur la terre, nt exprimant le moyen mouvement de P, et nt étant celui de la terre; le terme Su' P correspondant de —  $r$  sera  $7 . \hat{A}^1 . \cos. (\hat{e} V f - 6 j i^1 f^1 - B)$  ; ainsi le terme —  $y^1 - \hat{A}$  produit le suivant, Sr' Si Ton ne considère que les inégalités de —  $r$  » indépendantes des excentricités des orbites, et qu'on les représente par la série  $m^1 \cdot l^1 K^1 K \cos. 3 [n^1 t - n t - i - e^1 - c^1) - t - \text{etc. } j^1$

**The text on this page is estimated to be only 23.42% accurate**

SECONDE PARTIE, LIVRE SEPTIÈME. 307 ie tonne , J ^  
 produira dans le second membre de Inéquation (jL') du n\*" 9, la fonction  
 $3m'' P ( Jr^{*^{\cos.(i - m) i}; -h \hat{A}^{''^{\cos. 2(1 - m)v \setminus 2a 'm''|-h^{*^{\cos.3(i$   
 $- m) v H- etc. )' d^*où$  résulte dans a S a, la fonction  $3m^* P (jfiL^{\hat{i}.\cos.fi$   
 $- to)v JC d'où l'on tire, par les formales du n" 49 du second livre, 6(;> =$   
 85,77422, \*';>= 83,40760. T 39.

308 MECANIQUE CELESTE. Les observations donnent  $i - m = 0,0^{\circ}67900$ ; en supposant donc, comme dans le n° 22 du sixième livre,  $P = 1 \text{ m}' \sim 383i3o'$  la fonction [B) réduite en arcs de cercle devient -h  $i'',78i7o6.\sin. [i - m)v -l-o'',746665.\sin.2(i - m)v -f-o\backslash4o575i.\sin.3(i - m) v$  etc. Ce que nous désignons ici par  $-r$  est désigné, dans le n° 29 du sixième livre, par  $8r$  ; on a donc par ce numéro, en vertu de l'action de Vénus,  $-P = 0,0000015553 a - 0,0000060012 \cdot \cos. (i - m)v - H - 0,000017i43i.\cos.2(i - m)v - t - 0,0000027072 \cdot \cos.3(i - m)v - h$  etc. La fonction (D) réduite en arcs devient ainsi -f-  $i'',38524i.\sin. (i - m) v - 1^{\circ}991770.\sin.2(i - m) t; - o'',2i2o5A \cdot \sin.3(i - m)v$  etc. En la réunissant à la précédente, on a pour les inégalités lu



SECONDE PARTIE, LIVRE SEPTIÈME. 309 naires dues aux actions directe et indirecte de Vénus sur la lune,  $-h^3 \sin. (i - m)v - i^{245105} \sin. 2(i - m)v - i^{93697} \sin. 3(i - m)v$  etc. Il faut, par le n° 44 du sixième livre, augmenter ces inégalités, dans le rapport de 1,0743 à l'unité. Relativement à Mars, on a, par le n° 23 du sixième livre,  $a = 0,65630030$ ,  $6^{\wedge} = 6,856336$ ,  $fc^{\wedge} = 5,727893$ ,  $ef^{\wedge} = 4,404530$ ,  $6^{\wedge} = 3,255964$ , s etc.  $6^{\wedge} = 38,00346$ ,  $fc^{\wedge} = 36,20013$ . d'où Ton tire Les observations donnent  $i - m = 0,0350306$ ; en supposant donc, comme dans le n° 22 du sixième livre,  $P = 1846082'$  la fonction (C) devient  $0^{\wedge} 090054 \sin. (i - m)v - 0^{\wedge} 034753 \sin. 2(i - m)V - 0^{\wedge} 017234 \sin. 3(i - m)v$  etc.

310 MÉCANIQUE CÉLESTE. On a ensuite, par le n<sup>o</sup> 29 du sixième livre, en vertu de l'action de Mars, —  $r = -0,0000000478 a - f - 0,0000006487 \cdot \cos. (i - m)v - 0,0000080620 \cdot \cos. 2(i - m)v - 0,0000006475 \cdot \cos. 3(i - m)v$  etc. La formule (D) réduite en arcs devient ainsi  $-f - 0,0000000478 a - f - 0,0000006487 \cdot \cos. (i - m)v - 0,0000080620 \cdot \cos. 2(i - m)v - 0,0000006475 \cdot \cos. 3(i - m)v$  etc. En la réunissant à la précédente, on a pour les inégalités lunaires dues aux actions directe et indirecte de Mars sur la lune,  $-4 - 0,0000000478 a - f - 0,0000006487 \cdot \cos. (i - m)v - 0,0000080620 \cdot \cos. 2(i - m)v - 0,0000006475 \cdot \cos. 3(i - m)v$  etc. Il faut, par le n<sup>o</sup> 44 du sixième livre, diminuer ces inégalités, dans le rapport de 0,726 à l'unité. Relativement à Jupiter, on a, par le n<sup>o</sup> 23 du sixième livre,  $\epsilon = 0,19226461, f \epsilon = 0,176460, T \epsilon = 0,619063, T \epsilon' = 0,18198, T \epsilon'' = 0,032439, T$  etc.

**The text on this page is estimated to be only 27.36% accurate**

SECONDE PARTIE, LIVRE SEPTIÈME. 311 d où i on tire  
 $6^{\wedge *}^{\wedge} = 2,5\ 1906$ , T fe';'=i,i33io. T Les observations donnent i — m= —  
 $0,068^{\wedge}952$ ; en supposant donc, comme dans le n\*\* 22 du sixième livre, m'  
 $1067,09'$  la fonction (C) devient —  $0^{\wedge}2\ 1\ 7267$ . sin. (i — m)v —  $o^{\wedge}o2$   
 $638o$ .sin. a(i — Tn)v —  $0^{\wedge}008936$ . sin.3(i — m)v etc. On a, par le n\*" 29  
du sixième livre, en vertu de Faction de Jupiter, — r = —  $0,000001\ 1\ 58\ 1\ a$   
—  $0,0000\ 159384$ . COS. (i — m)v —  $0,0000090986$ . COS.  $2(1 — m)v$  —  
 $o,000000655o$ .cos.  $3(1 — m)v$  etc. La formule (D) réduite en arcs devient  
ainsi -f-  $2^{\wedge}51\ 9556$ . sin. (i — m)v —  $0^{\wedge}729560$ . sin.  $2(1 — m)v$  —  
 $o\o35879$ .sin.  $3\{i — m\}v$  etc.

312 MÉCANIQUE CELESTE. En la réunissant à la précédente, on a pour les inégalités lunaires dues aux actions directe et indirecte de Jupiter sur la lune,  $-h 2''302 299.\sin. (i - m)v - o'',75594o.\sin. 2(1 - in)v - o'',0398i5.\sin. 3(i - m)v$  etc. Si Ton prend avec un signe contraire toutes ces inégalités résultantes de Faction des planètes sur la lune, on aura les inégalités que cette action produit dans l'expression de la longitude vraie de la lune; on pourra donc les réduire en tables, en observant que  $(i - m) V$  peut être supposé égal à la longitude moyenne de la planète, moins celle de la terre. Il serait utile de les employer dans les tables de la lune, vu la précision à laquelle ces tables ont été portées. Le terme  $\cdot ' ^$  de l'expression de  $— p. (-t— )$  donne, dans l'équation (L') du n° 9, le terme  $3P.a^{(«)} \cdot j .c.\cos. [cv — 'CTj$ ; d'où il est facile de conclure que la valeur de  $c$  est diminuée, par l'action d'une planète inférieure à la terre, de la quantité  $\otimes m$  ii et par l'action d'une planète supérieure, de la quantité  $^{\wedge} m$

SECONDE PARTIE, LIVRE SEPTIÈME. 313 Pareillement, le terme  $\frac{1}{r} \frac{d^2 r}{dt^2}$  donne, dans l'équation (L) du n° 29 du sixième livre, la quantité  $\frac{1}{r} \frac{d^2 r}{dt^2} \cos. [cv^\wedge]$ ,  $qm.u \frac{1}{r} \frac{d^2 r}{dt^2}$  —  $r$  étant ici la partie constante des perturbations du rayon vecteur de l'orbe terrestre, donnée par le n° 29 du sixième livre; la valeur de  $c$  est donc par là diminuée de la quantité  $9m^* Sr$  il est facile de s'assurer que toutes ces quantités sont insensibles. Considérons présentement les perturbations du mouvement lunaire en latitude. La somme des termes  $J_1 \frac{dQ}{dt} (1+55) \frac{dQ}{dt}$  qui font partie de la troisième des équations (L) du n° 1, acquiert, par l'action de  $P$ , la quantité  $3P.5 \frac{1}{r} P.Rr.S.\cos. \{v-v'\} - iP.R'S.\cos. (v'-U)$  Cette fonction contient, relativement à une planète inférieure, le terme  $\frac{1}{a.P} \frac{d^2 a}{dt^2}$ ; — 6

314 MECANIQUE CELESTE, pour une planète supérieure, cette inégalité devient !—! ti. A. sm.lt) {v-d). y—' En réduisant en nombre ces inégalités, on a, en employant les masses du n° 44 du sixième livre, relativement à Vénus,  $-+0",853296.\sin.(v-6')$ , relativement à Mars,  $-0",016966.\sin.(t-0'^\wedge)$ , et relativement à Jupiter,  $-0",017051.\sin.(i-6'^\wedge)$ , B $\backslash$  0' $^\wedge$  et B''' étant les longitudes des nœuds ascendants des orbites de Vénus, Mars et Jupiter. Enfin, il est aisé de voir que la valeur de g est augmentée, par Faction de P, de la quantité  $f—r/n''6'^\wedge$  relativement à une planète inférieure à la terre, et de la quantité  $f—7.m\backslash a'.é'^\wedge$  relativement à une planète supérieure. Le terme  $—'\backslash$ , qui par le n° 11 fait partie de la troisième des équations (L) du n° 1, augmente encore la valeur de  $^f$ , de la quantité  $^y-.$  —7-, — r étant la partie constante des perturbations du rayon vecteur de l'orbe terrestre. Ainsi, la valeur de g est augmentée, par l'action des planètes, de la même quantité dont cette action diminue la valeur de c: mais ces quantités sont insensibles. i

SECONDE PARTIE, LIVRE SEPTIÈME. 315 L'action directe de P sur la lune introduit dans l'équation [IJ) du n° 9 une quantité de la forme  $M \cdot m' \cdot c' - t \cdot i l f' \cdot \wedge \cdot m' \cdot e' e'' - \wedge M' \cdot \wedge m \backslash e \backslash m m m e$  étant le rapport de Texcentricilé au demi-grand axe, dans Torbite de P. Il en résulte dans la longitude moyenne de la lune, une équation séculaire analogue à celle que nous avons trouvée dans le n° 15, égale à  $— \pm m \backslash f \{ e^{\wedge} — E'^{\wedge} \} . dv$ : m .u celle-ci résulte du développement du terme  $-y^{\wedge} — \wedge$ ; elle est incomparablement supérieure à la première, à cause du très-petit facteur  $— r$  qui multiplie cette première équation. Ainsi l'action indirecte de la planète P sur la lune, transmise par le moyen du soleil, l'emporte de beaucoup, à cet égard, sur son action directe, que l'on peut négliger ici sans erreur sensible. /iO.

316 MÉCANIQUE CELESTE. CHAPITRE IV. COMPARAISON  
DE LA THÉORIE PRÉCÉDENTE AVEC LES OBSERVATIONS. 23.

Considérons d'abord les moyens mouvements de la lune, de son périégée et de ses nœuds. L'expression de la longitude moyenne de la lune, en fonction de sa longitude vraie, renferme par le n° 15 l'inégalité séculaire  $\pm m \{ e^* - F' \} . dv$ ; par conséquent l'expression de la longitude vraie en fonction de la longitude moyenne renferme l'inégalité séculaire  $- i . m \{ e' - K' \} . ndt$ . Si l'on représente par  $t$  le nombre des années juliennes écoulées depuis 1760, on a, par le n° 44 du sixième livre,  $2 e = 2 E' - t . o''$ ,  $53\ 02\ 24 - 1 \backslash 0,00002\ 1\ 0474$  ; d'où l'on conclut l'inégalité précédente, égale à  $i$  étant le nombre des siècles écoulés depuis 1760. Les observations avaient fait reconnaître cette équation séculaire, avant que la théorie de la pesanteur m'en eût expliqué la cause. Il est certain, par la comparaison d'un grand nombre d'éclipses observées par les Chaldéens, les Grecs et les Arabes, que le moyen mouvement de la lune s'est accéléré depuis les temps anciens jusqu'à nos jours, et que son accélération est à très-peu près celle qui résulte de la formule précédente. C'est ce que Bouvard a mis



SECONDE PARTIE, LIVRE SEPTIÈME. 317 hors de cloute, par la discussion approfondie des éclipses anciennes déjà connues et de celles qu'il a extraites d'un manuscrit arabe d'Ibn Junis. On a vu dans le n° 16 que le mouvement sidéral du périée lunaire conclu de la théorie précédente ne diffère du véritable que de sa cinq cent soixantième partie. Suivant cette théorie, ce mouvement est assujetti à une équation séculaire égale à —  $3,00062 \cdot k$ ,  $k$  étant celle du moyen mouvement de la lune; en sorte que l'équation séculaire de l'anomalie est  $4,00062 \cdot k$ , ou, à très-peu près, quadruple de celle du moyen mouvement. La théorie de la pesanteur universelle m'a fait connaître cette équation, et j'en avais conclu que le mouvement du périée lunaire se ralentit de siècle en siècle, et qu'il est maintenant plus petit, d'environ quinze minutes par siècle, qu'au temps d'Hipparque. Ce résultat de la théorie a été confirmé par la discussion des observations anciennes et modernes. On a vu dans le n° 16 que le mouvement sidéral du nœud de l'orbite lunaire sur l'écliptique vraie, conclu de l'analyse précédente, ne diffère pas du véritable, de sa trois cent cinquantième partie. L'équation séculaire de la longitude du nœud est, par le même numéro, égale à  $0,736462 \cdot r$ . Les anciennes éclipses la confirment encore. 24. Considérons présentement les inégalités périodiques du mouvement lunaire en longitude. Pour comparer aux observations celles qui ont été trouvées précédemment par la théorie, j'ai regardé comme autant de résultats de l'observation les coefficients des dernières tables lunaires de Mason, et des nouvelles tables de Burg. Les coefficients des tables de Mason ont été déterminés par la comparaison d'un très-grand nombre d'observations de Bradley ; ceux des tables de Burg l'ont été au moyen de plus de trois mille observations de Maskeline. Ces tables sont disposées d'une manière assez commode pour les calculs, et qui dimi

**The text on this page is estimated to be only 20.68% accurate**

318 MÉCANIQUE CÉLESTE. nue le nombre des arguments, en les faisant dépendre les uns des autres. Voici le procédé qui résulte de celles de Mason, pour avoir les équations de la longitude vraie de la lune, procédé que j'ai développé en série de sinus d'angles croissants proportionnellement à V. On forme d'abord les termes suivants dans lesquels je compte les anomalies, du périégée. Coefficients des Coefficienb des tables de Burg. tables de Mason. — 2073",46... — 2o62",58.sin.( anom.moy.©) (M) — i8\52... — 2 7^47. sin. (2 .anom.moy.©) -K i66\36...-f- i72",53.sini'-  

$$\wedge^* \wedge^o \ll^o \wedge^o y - \wedge - " * o " S " \wedge^* \textcircled{R} \backslash ' \backslash + \text{anom.moy.}\textcircled{C} / \backslash - \text{anom.moy.}\textcircled{C} / Q, , , o, , , . / 2 .$$
long. moy.C — 2. long. vraie 0\ — 178,40... — i78,4o.sm.(, \r ] ' ' \ + anom. moy.C / , I r" Q^ . / " / • / 2 . long. moy.C — 2. long. vraie ©\ -f-i4qo5 ,87...-  
+ -iaQ02 ,47.sm.( Z^ 1 ^ ' ^ ^ ' ^ / \ — anom.moy.C / Ma. Q^ • / ^ - long. moy.C — A. long, vraie ©\ -f- 100 ,26. ..-h io8,02.sm.( ^ \ ^ 1 ^ \ — 2 .anom. moy.C / 00 tf r 00 fi -Z^ . long. mov.C^a . long. vraie ©\ ^ 384,57...-+- 38i,i7.sm. ^  
• ^ ^ , ^ ' ' \ — anom.moy.C+ anom.moy.©/ H- a6\9i...-K a3',52.sinY=- ^ o " « -  
" ^ o y 5 - ^ - ^ " " 8. vraie 0\ ^ \ — anom. moy.C" — anom.moy.©/ -h i2i",3o...-4-  
i29",63.sin. ( anom. moy.C — anom.moy.©) \_ 66;o5...- 7o",o6.8in.(  
^ ^ ^ o % ' ^ ^ ^

**The text on this page is estimated to be only 13.28% accurate**

SECONDE PARTIE, LIVRE SEPTIÈME. 319 G>efficient8 des  
G)efficients des taUes de Burg. tables de Mason. -K 35",49 -h 5.",47.sin.L  
^^"^^••"«y-^- ^o^g' --«©) ^ ' \+anoin.moy.0 / H- i5',i. + 9".57.sin.(  
iong.moy.C- long, vraie 0\ ., // / . /2. long. moY.C~2. long. vraie0\ - 3a",72 -  
38;,7.si,,.(^-\*°"g""«yf-^-l«°g-^^^'«®) ' ' \— anom.moyX / ^ " ^ ' ' \nœud  
lunaire — 2 .anom.moy.C / , , ^ rn n • /2 . long. moy. du nœud lunaireX ' ' \  
— Q. long. vraie 0+ an. moy. C / f ^ nu 'jn ' /2 .long. moy. du nœud  
lunaireX ' \— 2 . long, vraie G)— anom. moy.C/ -+- 2o\987...-4-2  
3\765.sin. (long. moy. du nœud lunaire) ^ , n . (2. long. moy.C— 2 . long,  
vraie 0\ -+- 8,02 -f- 0,00. sin. /-N I ' ' \— 2 .anom. moy. 0 / Q,, ; , . / long.  
moy. (C- long, vraie 0\ — 8,02 — o,oo.sm.(, \r ) ' \+ anom. moy.C / ^ , , 0 V  
. /3.anom.moy.C-2.long.moy.C\ -4- 6,48 H" o,oo.sin.( , •'. \_ z>j \ ' \+ 2 .  
long, vraie 0 / ^ , , , . /2 . long. moy.C— 2 .long, vraie 0\ -+- 6 ,7Q -h  
o.oo.sm.i ^ -^ ^ . ° ^1 ^^ Wîf ^^ > \+anom.moy.C+ anom.moy.0/ , , , , • / 2 .  
long. moy.C— 2 . long. vraie0\ -4- 4,01 -H o,oô.sin.( ^ ^ ^ ) -T- ^ ,w -T- , \+  
anom. moy.C— anom.moy.0/ 5.5 . . M. long.moy.C-4.long. vraie0\ -f- 3 ,3q  
H- o.oo.sin.l o >^ ) -r- -r , ^î^ -^ y— 3. anom. moy.C / ^ , , , . (2. long.  
moy.C- 2 . long. vraieOX oir o V . /long. moy.C— long. vraie0 \ ^ - 3,39 -h  
o,oo.sm.( ^ \_ ^^^^/^^y^ \_ ^e^^^^^^y^j>

320 MÉCANIQUE CÉLESTE. On ajoute la somme de tous ces termes à l'anomalie moyenne de la lune, à laquelle on ajoute encore la fonction  $k$  donnée par l'équation Suivant Burg. Suivant Mason.  $i_4 = -4127''^{47} \cdot \sin. (anom. moyen. \odot) - SS''^{g\hat{o}} \cdot \sin. (a.anom.moy. \odot)$ ; et Ton a l'anomalie corrigée de la lune, au moyen de laquelle on forme les termes suivants, Burg. Mason.  $-H''^{70o37^{67}} \cdot \sin. (anom. corrigée c) - h''^{2396,3o} \cdot \sin. (2.anom. corrigée) - t''^{ii5^{i2}} \cdot \sin. (3.anom. corrigée)$

SECONDE PARTIE, LIVRE SEPTIÈME. 321 On a ainsi la distance de la lune au nœud corrigé. On soustrait du double de cette distance l'anomalie corrigée de la lune, et Ton multiplie le sinus de cet argument par  $260''{,}49$ , suivant Burg, et par  $259''{,}56$ , suivant Mason; ce qui donne une nouvelle inégalité que Ton ajoute aux inégalités [M), (iV), (P). Enfin, on ajoute cette même inégalité à la distance précédente de la lune au nœud corrigé, pour former l'argument de latitude, et Ton multiplie le sinus du double de cet argument par  $1258''{,}34$  suivant Mason; ce qui donne une inégalité nommée réduction à l'écliptique, qui doit être ajoutée à toutes les inégalités précédentes, pour avoir la longitude de la lune, comptée de l'équinoxe moyen du printemps. Il faut observer ici que les longitudes moyennes de la lune et de son nœud, et son anomalie moyenne, doivent être corrigées par leurs équations séculaires. J'ai conclu de ce procédé l'expression suivante des inégalités périodiques de la longitude moyenne de la lune, développée en fonction de sa longitude vraie comptée sur l'écliptique; ce qui exige une attention particulière pour n'omettre aucun terme sensible : j'ai négligé les inégalités au-dessous d'une seconde. Une partie des inégalités de cette expression résulte du développement seul de la formule que donne le procédé des tables de Mason, que je viens d'exposer; en sorte qu'elles ne peuvent point être considérées dans ces tables comme des résultats de l'observation. Pour les distinguer, j'ai marqué d'un astérisque celles que Mason a déterminées par la comparaison des observations de Bradley, et qui toutes ont été déterminées de nouveau par Burg, au moyen d'un très-grand nombre d'observations de Maskeline. Je donne d'abord la grande inégalité du premier ordre ; ensuite, les cinq inégalités du second ordre; puis, les quinze inégalités du troisième ordre; ensuite, toutes les inégalités du quatrième ordre et d'un ordre supérieur, qui ont été compa

322 MÉCANIQUE CÉLESTE. rées aux observations ; enfin , toutes les autres inégalités. Je place à côté les résultats de mon analyse, et leur excès sur les coefB\* cients déduits des tables de Mason. Dans une quatrième colonne, je donne l'excès des coefficients des nouvelles tables de Burg, réduites à la forme de ma théorie, sur ceux des tables de Mason. Burg ayant conservé à ses tables la fornxe de celles de Mason, qui lui-même avait adopté celle des tables de Mayer, il suffit, pour les réduire à la forme de ma théorie, d'appliquer aux coefficients des tables de Mason, ainsi réduites, la difiFérence, prise avec un signe contraire, des inégalités correspondantes dans les deux tables primitives. Les fonctions A et B sont un peu différentes dans ces deux tables; j'ai eu égard à cette difiFérence. J'observerai sur cela, qu'en introduisant dans les tables primitives une inégalité pour la longitude, dépendante de sin. (anom. moy. C+ anom. moy. O), et pour la latitude, une inégalité dépendante de sin. (arg. de latitude -f- anom. moy. 0), et en changeant convenablement les coefficients des inégalités dépendantes de sin. (anom. moy.C — anom. moy\*0), et de sin. (arg. de latitude — anom. moy. 0); on pourrait se dispenser d'introduire les fonctions A et JB, ce qui donnerait aux tables plus d'uniformité. Burg a fait entrer dans ses tables du mouvement en longitude, huit inégalités nouvelles, qui ne sont données dans les tables réduites de Mason que par leur développement : je les ai distinguées par un double astérisque. Enfin, il a comparé aux observations plusieurs inégalités qu'il a trouvées insensibles; en sorte que leurs coefficients, donnés par le développement des tables de Mason, peuvent maintenant être considérés comme des résultats de l'observation : je lestai distingués par un triple astérisque. On pourra ainsi reconnaître les inégalités qui restent encore à comparer aux observations. Le peu de difiFérence- qui existe entre les deux tables permet de conclure ainsi le développement de l'une d'elles, du développement de l'autre; et l'on peut, par la

**The text on this page is estimated to be only 10.76% accurate**

SECONDE PARTIE, LIVRE SEPTIÈME. 323 méthode inverse, réduire les inégalités de ma théorie, à la forme des tables de Mayer.

In<sup>galit</sup>dMoitM en iêhlma<sup>9</sup> Maton. Excès dM codEcMoU Excès des coefferdeots Gocffcisols sur e«iix dMaits des dMoils d«« taklss ds 6ê m\* tUori«. \*... ^ MssoB. Bofg, snr etaz droits d«s tsbics de M ason.

Inégalité du premier ordre. —  $69992^{30} \sin. (ci; — tar)^{\wedge} — 69992^{30}.. + o\backslash oo$ . Inégalités du second ordre.  $(2C1; — s'ct)^{*} + 1442^{66}.. + i5\backslash 25. [2v — 2mv)^{*} — 5856^{1,1}.. + i8\backslash 59. (2r — 2mv — cv + tff)^{*} — i446i\backslash 28.. — i2\backslash o9. [cmv — ^')^{*} 4- 2io6\backslash o9.. + 3o^{38}. \{2gv — 26)t 4- i255\backslash 92.. — o\backslash b5$ . Inégalités du troisième ordre.  $(3cr — 3t\hat{T})^{*} — 36',34^{*}.. — 2'^{i6}. [2gv — cV' - '2d + ^)^{*} + 2o4^{86}.. + 16^{19}. i^{ay}^{Ai} \sin, \hat{O}SyA'iy o. \sin. - 144^{9^{1,9}} \sin. - 2075^{7} i. \sin. - i256',47. \hat{s}in. - 33^{19} \sin. - T- 188^{67} \sin. - 69^{16} \sin. - h450',56. \sin, - f44^{77} \sin. - 42i^{37} \sin. - ^{67} ll.5in. - 635^{09} \sin, + 2ii',84. \sin. - 36o',5o. \sin. + 55i^{3i} \sin, + 172^{28} \hat{s}in. + 27^{47} \sin. + 36o\backslash i2. \sin. -- 58',6o. \sin. (i)Le , cet égard  $2gV\backslash -cv - '20 — 'ts)^{*} t^{*} — 2V' - 2mV + CV — ^)^{*} + 21; — 2mv + cmr — tzf)^{*} - h2v — 2mv — cmv + 'cs)^{\wedge} — 2t; — 21111; — c^{^^} - c'm^; + \odot -- \odot')^{\wedge} + 2t; — 2mi; — cr — c/niH^{cf} - MBr^{*}.. — cv + cTriv — TS — ta')^{*} 4cv — cmv — ^{h^{\wedge}})^{\wedge} — 2CV — 2V + 2mV — 2'&)^{\wedge} 42^t; — 2i; 4- 2mr — 20)^{*} 42cmi; — 2'Bt')^{*} 4 — mv)^{*} v — mv + cmv — 'cs')^{*}.. 70^{86}.. 453\backslash 58. . 42\backslash 02.. 4i5\backslash i6. . 74';96. . 635'',26. . 219^{11}.. 362',i8.. 52i'',9i. . i74',74.. 31^{25}.. 376\backslash 586. \{i4-i) 58>5.(i+i)- 1,70. + 3>2. - 2\backslash 75. 4- 6^{2} 1. - g', 17. 4- 7^{2} 7. - 1^{68}. - 29',4o. + 2\backslash à6. 4- 3^{78}. coefficient de cette inégalité est une des arbitraires de la théorie, et je pense il convient d'adopter le résultat de Barg.  $41. + 9'.57 (0 + 1.79 - i',85 - 3',4o - 3'.78 \bullet - o\backslash à7, \bullet + o',93 . + o'.oo . - h o',00 . + 6',i7 . — 3', 70 . - 3',4o . - 3',39 . + 5',96 . 4- 2',37 . — 3',70 . + 6',48 . - \ll'.95 . + i7',69 . + i6',98$$$

The text on this page is estimated to be only 6.45% accurate

324 MÉCANIQUE CÉLESTE. Inégalité dMniUs dtsiablt de  
Maton. Coefficients de ne théorie. Excès de ces eoeffieieu Excès des  
cefcicisM su oe«x dddviu des dMnits des tiUti é taU« de Mesœ. Bnrg,  
sveendiM Inégalités du quatrième ordre et d'un ordre supérieur qui ont été  
comparées aux observations. —  $i \backslash o3. \sin - 6 \backslash io. \sin + 23^{765}. \sin -$   
 $2i \backslash 67. \sin. ^{-17} 5o. \sin. + 2^{38}. \sin. - 2^{38}. \sin. ^{-89} 34. \sin. 4-46 \backslash 79. \sin. -$   
 $52'', 6i. \sin. - 3 \backslash 53. \sin. + 2 \backslash 9 \backslash 45. \sin. + 3^{73}. \sin. - 10^{87}. \sin. - i8 \backslash i2. \sin.$   
 $+ 3^{o8}. \sin. + 1^{82}. \sin. + 39^{38}. \sin. + 2^{36}. \sin. + 3 \backslash o4. \sin. + 4'' \backslash o5. \sin.$   
 $+ 19^{72}. \sin. - 3^{73}. \sin. 4- o \backslash 56. \sin. - i2 \backslash o6. \sin. \pm 3 \backslash 36. \sin. \sim 1 \text{ yOO.SID.} \pm$   
 $6 \backslash 26. \sin. 4ci; - 4 \textcircled{R})^* - + \blacksquare o \backslash o9 \text{ 2gV} - 2CV - 20 + 2iSS)^* + 0^{31} .[gv - v -$   
 $d)^* + i7', i35. \dots - 6 \backslash 63. . - a'jyS \text{ 3t; } - 3mt;)^* + 5', 86 \text{ 4v} - 4wv)^* - f \text{ 4'i63}$   
 $cv + 2cmv - ^{-2} \wedge)^* - o^*, 5i \text{ CV} - 2Cmt; - t \hat{i}T + 2'BT')^* H- o', 5i \text{ 2ci; } + 2i; -$   
 $2mr - 21 \wedge)^* - 25 \backslash o3 + i \backslash 66. . - h \text{ 2'78 } \wedge v - \wedge mv - cv + is) \wedge + io3 \backslash oi + 13^{67}.$   
 $. + 5', 55 \wedge v - \wedge mv - 2cv + 2 \wedge)^* + A7^{71} + o^{92}. . - ^M \text{ cv} - v + mv - \wedge)^*$   
 $- 25^{65}. (i+i) + 4^{ol} r - mr - c'mr + tff)^* - 5', 55 \text{ 2!; } - 2mv - 2^{t; } + ct; + 2$   
 $0 - izr)^* . . + 26 \backslash 77 - 2', 68. . + i', 5li \text{ 2gv} + cv - 2v - + 2mv - 2d - \wedge)^* + 4^{94}$   
 $2v - 2mv - 2cmv + 2 \wedge)^* \wedge - 8', 02 \text{ cv} + v - mv - \wedge)^* \wedge - i5 \backslash 47. (i+i) + 8 \backslash oa \text{ 3ct;}$   
 $- 2 \hat{i}; + 2mt; - 2 \hat{t}iT)^** - 6'M \text{ 2V' } - 2mv + cv + cmv - \wedge - \wedge)^* \wedge - 6j9 \text{ 2v} -$   
 $2mt; + ct; - cmv - tff + tff)^** . . + 31^{39} - 7 \backslash 99. . - h \backslash oi \wedge v - hmv -$   
 $icv + 3'0) \wedge \wedge - 3', 39 \text{ 2ct; } - 2t; + 2mt; - cmt; - 2'Br + 'cr')' \gg c^{\wedge}. - o \backslash j6 - 3 \backslash 8o.$   
 $. + 3', 70 \text{ cv} - v + mv - cmv - \wedge + iss') \wedge \wedge + 3', 39 \text{ 2CV} - 2l; + 2m \wedge \wedge 4 - c'ml; -$   
 $215 - tar')^* t^* . + 18^{15} - 1^{67} \text{ 4} \wedge \wedge - 4yw^{\wedge}; 4 \blacksquare c^{\wedge}; - tiTJ \wedge \wedge t \text{ 4ci; } - 4v + 4wv -$   
 $4 \textcircled{R})^{***} \text{ 2v} - 2mv + 2^{i; } - 2 \text{ 0})^{***} \text{ 2 gv} \pm cmv - 2d^{\wedge} its')^* y \text{ \text{ } }^* \text{ 2gV} + 2CV -$   
 $2V + 2mv - 20 - 2 \wedge)^{\wedge \wedge} \text{ 2gv} - 2v + 2mv \pm cmv - 20^{\wedge: \wedge})^* \wedge$



SECONDE PARTIE, LIVRE SEPTIEME. 325 Inégalités du quatrième ordre et d'un ordre supérieur, déduites des tables de Mason, et qui n'ont point été comparées aux observations. .... « - . Exeïs de cm coeffila<sup>g</sup>diUi dMaïtes CodEa«nU «j<sup>^^</sup> „, <sup>^^^</sup> <sup>^^</sup> àM taUtidt Muon. de ma théorie. dñiu des Ublcs de '+i5\32.sin.(2cv--cmt;— 2«+«') +i3",89. . . — 1",43 — 8<sup>^</sup>71 .sin.(2Cî;+cmt;— 2tîT— tsr') — g<sup>^</sup>yS. . . — i",o4 +i4',52.sin. (4t;— <sup>^</sup>mv— et;— cmv+<sup>^</sup>+tff') — 13<sup>^</sup>78•sin.(2t;— Q/nv+a<sup>^</sup>v— eu— aô+tff) — i\iS.sm.[2v-'2mv—2gv+2cv+id'-2<sup>^</sup>) + 5<sup>^</sup>99.sin.(4v— Amv— acv+cmv+atîT— izr') — 3\63.sin.(3t;— 3mt;— cv+tff) + 9\36 . sin. (2 v— 2 mv— ct;+ 2 c mu+tff— 2izr') — 1 7<sup>^</sup>,88 .sin. (2 v- 2 mV'-cv— 2cmv+'cs+2<sup>^</sup>) + i\6g.sm. {<sup>^</sup>v—<sup>^</sup>mv—2gv-'Cv+2d+'îs) — i\3g.sm.[<sup>^</sup>v—<sup>^</sup>mv—cmv+<sup>^</sup>) + 2\o5.sin.(6t;— 6mi;— 3ct;+3îr) — i\20.sm.[cV'-v+mv+cmv—<sup>^</sup>—<sup>^</sup>) + i\o3.sm.(4v— 4<sup>^</sup>v+cmt;— tff'). On voit par ce tableau, que la plus grande différence entre les coefficients des tables de Mason, et ceux de notre théorie, n'est que de 3o"; et quelle n'est que de 26" entre notre théorie et les tables de Burg. On la ferait sans doute disparaître, en portant plus loin encore les approximations; mais la comparaison précédente suffit pour établir incontestablement que la gravitation universelle est Tunique cause de toutes les inégalités de la lune. Deux de ces inégalités méritent par leur importance d'être déterminées avec un soin particulier. La première est celle que Ton a nommée inégalité parallactique, et dont l'argument est

326 MÉCANIQUE CÉLESTE. V — mv. Elle dépend de la parallaxe du soleil. Je l'ai déterminée en portant l'approximation jusqu'aux quantités du cinquième ordre inclusivement; j'ai donc lieu de croire la valeur à laquelle je suis parvenu très-exacte. Suivant les tables de Mason, réduites à la forme de ma théorie, cette inégalité est égale à  $360''^2$ ; mais Burg, qui vient de la déterminer par la comparaison d'un très-grand nombre d'observations, la trouve plus grande de  $17''^{59}$ , et par conséquent égale à  $377''^{71}$ . En égalant à ce dernier résultat le coefficient (i-f-/)  $.376''^{586}$ , donné par mon analyse, on a i-f-r=i,  $.002986$ ; partant  $1,002986''^4$  ou la parallaxe solaire est  $7''$  ou — ; cette parallaxe est donc égale à  $D 1,002985''^4$ . En substituant pour —, sa valeur  $0,01655101$ , trouvée dans le n° 19, on a  $26''^{4205}$  pour la parallaxe moyenne du soleil, sur le parallèle dont le carré du sinus de latitude est y; ce qui est à très-peu près celle que plusieurs astronomes ont conclue du dernier passage de Vénus sur le Soleil; la théorie de la Lune offre donc un moyen fort exact pour déterminer cette\* parallaxe. La seconde inégalité est celle qui dépend de la longitude du nœud de l'orbite lunaire, ou de l'argument  $gfv - r-H0$ . Son coefficient, suivant Mason, est  $23''^{765}$ ; mais Burg, qui vient de le déterminer par un très-grand nombre d'observations, le réduit à  $20''^{987}$ . La théorie donne par le n° 20,  $17''^{135}$ , en supposant

SECONDE PARTIE, LIVRE SEPTIÈME. 327 raplatissement de la terre  $-5^{\circ}$ , et  $35''$ ,490, en supposant cet aplatissement  $-5^{\circ}$ ; dou il est facile de conclure que la détermination de Burg répond à  $-5^{\circ}$  — p d'aplatissement. Cette inégalité est déterminée, avec beaucoup de précision, par la théorie: on n'a point à craindre à son égard, l'incertitude que le peu de convergence des approximations laisse sur les coefficients de la plupart des inégalités lunaires; et comme elle est liée à l'aplatissement de la terre, sa détermination exacte par les observations mérite toute l'attention des astronomes. Il résulte, sans aucun doute, des valeurs que Mason et Burg lui ont assignées, que la terre est moins aplatie que dans le cas de l'homogénéité, ce qui est conforme à ce que nous avons trouvé, par d'autres phénomènes, dans les livres III, IV et V. 25. Considérons présentement le mouvement de la lune en latitude. On le détermine par les tables de la manière suivante. Si l'on nomme longitude corrigée de la lune, la longitude moyenne à laquelle on applique toutes les inégalités, à l'exception de la réduction, la latitude de la lune est égale à Burg.  $+57^{\circ}63''$ ,03.  $- 5''$ ,43.  $+ 63^{\circ}$ ,86.  $+ 54^{\circ}32'$ .  $+ 5^{\circ}86'$ .  $+ 27^{\circ}78'$ . Mflffion.  $+67^{\circ}174''$ ,40.sin. (argument de la latitude)  $- 1^{\circ}3'$ , 58 . sin . ( 3 . arg. de latitude) \vraie © — arg. de latitude /  $- 9''$ ,57.sin. (arg. de lat. — anom. moy. 0)  $+ 54^{\circ}32'$ .sin. (arg. de lat. — anom. moy. c)  $77^{\circ}47'$ .sin. (2 . anom. moy. C — arg; de lat.)  $5^{\circ}$ ,86.sin. (3 . anom. moy. C ~ arg. delat.) / , o . /2. loi<sup>^</sup>.corrig.C—ÿ- long, vraie 0\ ' ^ \* \ — arg.delat.+anom.moy.0 / + + +

**The text on this page is estimated to be only 12.83% accurate**

328 Burg. MECANIQUE CELESTE. Mason. (2 . long. corrig.C  
 — a • long, vraie Q\ — arg. de lat. — anoœ. moy.0 / ^,, ^n . /2 . long.  
 corrig.C— a • long, vraie 0\ 4- 6,79... + 6,79.sm. Al\*. ^ I ' ^ ' ^ \ — arg. delat.  
 + anom.moy.C / . ;, / /r • /arc. de lat. + an. moy. C— a . loneA ^ ' ' V ^ I  
 ycorrig.C+ 2 . long, vraie 0 / - .6",o5... + i6\o5.sinY^^g;^^\*' ^\* \_ ^; \_ \*T\*"" ^ \_  
 ^;; ^ \ 2 . long. coît. C + 2 . long, vraie 0/ — 2 4^691 4. — o\oo.sin. (long,  
 corrigée c)En réduisant ces formules en sinus d'angles croissants  
 proportionnellement à Vy j'ai obtenu les résultats suivants, Tables de Maton.  
 . - . Enès de cet eo«IE- Each dei Goefficiento ^j^j, ,, «eux d^ déduits de ma  
 théorie. daiu des tablée de Barg,si>c

SECONDE PARTIE, LIVRE SEPTIÈME. 329  $\wedge \wedge$ . Excès de ces  
cotffi- Exeès des cotfficienU M 6ê Maaon. l/oefficiwnU çî $\wedge \wedge$ j, „„ $\wedge \wedge \wedge \wedge$ j $\wedge$ .  
dWaiU de\* tables de de me théorie. daiu des tables de Burg, sur eeoZ  
dédoits Mason, des tables de Meson. 3\35-siD.(Qci;+ $\wedge$ i;— 2t;+2mv-2«—  
0)\*. . . + i5\83. + 2",48. + o",oo 2\6B.sm.[3cv—gv— 3 $\wedge$ 0+6)\* — o\oo 3\2  
2.sin.(3 $\wedge$ i;— 2 $\wedge$ i;+2mr— 3 $\hat{O}$ ) + o",oo i\i3.sin.( $\wedge \wedge$ v— $\wedge$ mv-'gv+6) + o",oo  
2\j6.s\N.[3cv—gV'-2v+2mv—3'0+d) + o\oo i\72.sîn. {a\*+ $\wedge$ r--2i;+2mid=cmr  
— t2f--0qFt!T') + o\oo 1 \ 7 7 . sin . (2 cv+gV'-2 v+2 mv±cv-'i tar-ôzptff)  
2\77.sin.(4v— Awiv— $\wedge$ r— cv+ô+tar) + o",oo o\oo. sin. (long, vraie C)\*\*  
— 2o\o23 —2 $\wedge \wedge$ 6914. Ici, la théorie se rapproche encore plus de  
l'observation que relativement au mouvement de la lune en longitude; ce qui  
vient de ce que les approximations de son mouvement en latitude sont plus  
simples, et par conséquent plus exactes. Je pense donc qu'il convient de  
former les tables de ce mouvement, par la théorie, afin de ramener, autant  
qu'il est possible, toute l'astronomie au seul principe de la pesanteur  
universelle. L'inégalité —2 o $\wedge$ o 2 3 .sin.(long. vraie C) n'existe point dans  
les tables de Mason. C'est la théorie qui me l'a fait connaître, et toutes les  
observations la confirment d'une manière incontestable. Burg l'a trouvée  
égale à — 2 4\69i4.sin.(long. vraie C), par la comparaison d'un trèsgrand  
nombre d'observations de Maskeline. Son coefficient est, par le n\*" 20, égal  
à — 20 $\wedge$ ,023, en supposant l'aplatissement de la terre -tttÛ s'élèverait à —4  
1 $\wedge$ 70, si cet aplatissement était —5— 334  $\wedge$  w ' r 23o comme dans le cas de  
l'homogénéité de cette planète; d'où il est facile de conclure que le  
coefficient — 2 4\69i4 trouvé par Burg répond à l'aplatissement  $\wedge$  .  $\wedge$ . Il est  
très-remarquable que cette inégalité conduise au même aplatissement que  
l'inégalité du TOME m. 42

The text on this page is estimated to be only 24.47% accurate

330 MÉCANIQUE CÉLESTE. mouvement en longitude, dépendante du sinus de la longitude du nœud, que nous avons donnée dans le n<sup>o</sup> 20. Ces deux inégalités qui, par la lumière qu'elles répandent sur la figure de la terre, méritent toute l'attention des observateurs, se réunissent pour exclure son homogénéité. 26. Il nous reste à considérer la parallaxe horizontale de la lune. Voici l'expression de cette parallaxe à Téquateur, suivant les tables de Burg et de Mason. Burg. Mason et Mayer. -

$$\begin{aligned} & \text{Mo} 558^{\wedge} 64 \dots + 10590^{\wedge} 74 - o',93 \dots - o',93.\cos. ( \text{anom. moy. } O) \backslash + \text{anom.} \\ & \text{moy. } \odot / + 2'',47 \dots + ,'',4 \text{ eos } Y^{\wedge}. \text{ long. moy. } C - ^{\wedge}. \text{ long, vraie } 0 \backslash ^{\wedge} ' ' \backslash - \text{anom.} \\ & \text{moy. } \odot / \backslash + \text{anom. moy. } C / \backslash - \text{anom. moy. } C / + o',93 \dots + o',93.\cos. / ^{\wedge} \bullet \\ & *^{\circ} S - ''^{\circ} y - ^{\wedge} - ^{\wedge} \bullet *^{\wedge} S - '^ ' \textcircled{R}) ^{\wedge} \backslash - 2 . \text{anom. moy. } C / ^{\wedge}, ^{\wedge}, (1 . \text{lonff. moy.} \\ & C - 2 . \text{ long, vraie } \odot \backslash + 3 ,00. \dots + 3 ,0q.\cos. ( ^{\wedge} - ^{\wedge} \backslash . ^{\wedge} \backslash ) ^{\wedge} \backslash - \text{anom.} \\ & \text{moy. } (C + \text{anom. moy. } \odot / \backslash - \text{anom. moy. } (C - \text{anom. moy. } \odot / + o^{\wedge} 62 \dots \\ & + 0^{\wedge} 62 . \text{COS. } ( \text{anom. moy. } C - \text{anom. moy. } \odot) + 0^{\wedge} 62 \dots + o',62.\cos. ( 1^{\circ} g - \\ & ''oy - J - \text{ long, vraie } 0 \backslash y - \text{anom. moy. } C / ' ' \backslash - 2 . \text{anom. moy. } C / , , ^{\wedge} // ^{\wedge} \text{ II} . \\ & \text{ long. moy. du nœud lunaire } \backslash - f' 1 \bullet 20 \dots ''T' 1 \ll 20. \text{COS. II} \bullet - . \text{IV } I' \backslash - 2 \\ & . \text{ long. vraie } \odot / + 578 \backslash o 9 \dots + 579^{\wedge} 32. \text{COS. (anom. corrigée } C) \end{aligned}$$

**The text on this page is estimated to be only 18.50% accurate**

SECONDE PARTIE. LIVRE SEPTIÈME. 331 Barg. M ason et Mayer. + 3o<sup>86</sup>... + 3o<sup>86</sup>. COS. (2 -anom. corrigée C) 4- o',6q ... + o'^gS.cos. (3 . anom. corrigée C) -^ 8o<sup>25</sup>... 4- 8o',Q5.cos.(a.long.comg.C — 2.1ong.Yraîe0) — 3',o9... — 3',09.cos. (long, corrigée C— long, vraie 0) -J- o',62... 4- o',62.cos. (2. long. comg.C--3. long. vraie©) n , n t /distance vraie de C au nœud\ ' ' \— anom. corrigée C / Pour avoir la parallaxe horizontale à une hauteur quelconque du pôle, Burg suppose Tellipticité de la terre tôte Mayer la suppose "-^ . Je la supposerai, conformément à la détermination du numéro précédent, ^— ^ . On multiplie ensuite les coefficients de cette table, par Tunité moins le produit de Tellipticité de la terre par le carré du sinus de la latitude. Cela posé, on a pour la parallaxe horizontale de la lune à Téquateur, réduite en cosinus d'angles croissants proportionnellement à Tangle v , . Bteèi é« «M co«li- Bxckd«tco«ftciwto HiMm tt UtTtr. CoffEci«iU ^^^^ ^^ ^ ^ ^,, j, 3^^ ^^ ,,,, da^alUorit. uU«id«HMM. dt Mtaoa. +io624',8i\* +io58o',o3. . -44\78. . . -32',io +58i\66\*cos.(cv— w) + 579\26. . — 2\4o. . . — i',23 — i\6i.cos.(2cr— 2«) + o\o3. . + i\64. • . 4- o',oo — o",95.cos.(3c!)— 3«) 4- o',oo + o",3o.cos. (4cî;— 4w) 4- o',oo + 74^8lxos.(2î;— 2ÏIII?) 4- 76\i8. . + i\37. . . + o',oo 4- 1 i8",55.cos.(2t;— 2mr— cr4-«) 4- 1 17\62. . — 0^93. . . 4- o',oo — 3",62.cos.(2v— 2mi;4-cv— «) — 2',i6. . + i',46. . • + o^oo — o\54.cos.(2i; — 2mr4-cmv--t»') ~ o",63. . 4\* o\oi. . . 4- o',oo 4- 5",i 7. cosv (av— 2 mr— cmr+izr') + 5',o6. • — o\x\ . . + o\oo — o\93.cos.(cini;— lar') — i\o3, . — o\io. . . 4- o',oo — o\8.cos-(2v— 2mv— ci;4-c'mt;4-iBr— 10')\*..— o\68. . — o',4o, . . + o',oo 42.

**The text on this page is estimated to be only 26.79% accurate**

332 MECANIQUE CELESTE. r fc • é. Excic d« eet co«IB-  
EM^dMcoeffici«au Maioii et M.yep. . l-oeiiiie,«u ^,, ^^ ^ ^^ ^ ^^ ' d« nu  
Ihion: tabltis d« M uon. de llaon. + b\22.cos.[2v—2mv—cv—  
cmv+^+'îs')...+ b\oà. . — o\i8. ., + o^oo — o\Sg.cos.[cv+cmv—^—'rs') —  
2^02. . — i^i3. . . + o\oo + 1 ", 5o. COS. (cv—c m v—tsT+W) + 2\67. . +  
l^17. • . + o^oo +ii\g3.cos.[2cv—2v+2mv—2^) 4-ll^lo. . — o^83. . . 4- o',oo  
-f- i\23.cos.[9.gV'-2v+2mv—2d) — o^58. . + i\8i... 4- o\oo — 3^o9.cos.(l;  
— mv) — 2',99.(i+i) + o^oo — o\2 2.cos.[^v—^mv) : + o',oo — o\20.cos.  
[^v—^mv—2cv+2^)+ o^i4. . + o\34- . . + o\oo — o",46.cos.(4v— ^wir—  
cv+tff) — o",46. . + o\oo. . . + o^oo ~ o\6S.cos.[^cv—2v+2mv—S^)+ o^oo  
— 3",o4.cos.(2(/i;— cv— 2 0+t!r) — s^jQ^ . . + 0^12. . . + o\*,oo +  
o\5'j.cos.[2gv+cv-'2d—^)+ o',oo — o\62.cos.[cv—v+mv—'uij — o^38.  
(1+l) + o^oc^ — o",32.cos.(2ci;+2i;— 2mt;— 2t!r) + 0^07. . + 0^,39. . . +  
o^oc^ Les inégalités de la parallaxe des tables de Mayer, Mason et Burg,  
sont dérivées de la théorie de Mayer, et Ton voit par le tableau précédent,  
qu'il y a très-peu de différence entre les coefficients de ces inégalités et  
ceux de mon analyse; cependant j'ai lieu de croire ceux-ci plus exacts,  
puisque ma théorie représente mieux que celle de Mayer le mouvement de  
la lune en longitude. Cest un point de pure analyse; car les observations ne  
seront jamais assez précises pour déterminer d'aussi petites difflPérences. A  
l'égard delà constante de la parallaxe, Mayer et Burg l'ont déterminée par  
les observations. Ce dernier astronome a principalement fait usage d'un très-  
grand nombre d'observations de Maskeline, et il a trouvé cette constante  
plus petite que celle de Mayer, de 32",io, J'ai déduit dans le n° 19 cette  
constante, des expériences sur la longueur du pendule à secondes, et des  
mesures des degrés terrestres; et



SECONDE PARTIE, LIVRE SEPTIÈME. 333 j'ai trouvé qu'il faut diminuer encore de  $12''{,}7$  la constante déterminée par Burg. Cette différence dépend-elle des erreurs des observations, ou des éléments que j'ai employés dans mon calcul? C'est ce que la suite des observations fera connaître. Le seul élément qui me paraisse susceptible de quelque incertitude est la masse de la lune. On a vu dans le chapitre xvi du sixième livre, que pour faire coïncider le résultat de la théorie avec celui de Burg il faut diminuer la masse de la lune, et la réduire de  $r^{\wedge}$  à  $\text{---}^{\wedge}\text{---}$ . Cette diminution paraît un peu trop forte d'après les phénomènes des marées et de la nutation de l'axe terrestre, et d'après l'équation lunaire des tables du soleil. Il paraît donc qu'il faut encore diminuer de deux ou trois secondes la constante de la parallaxe de la lune déterminée par cet astronome qui, par la comparaison d'un très-grand nombre d'observations, a déjà diminué la constante adoptée par les autres astronomes, et s'est ainsi fort rapproché de sa véritable valeur.

334 MÉCANIQUE CELESTE. CHAPITRE V. SUR UNE  
 INÉGALITÉ À LONGUE PÉRIODE, QUI PARAÎT EXISTER DANS LE  
 MOUVEMENT DE LA LUNE. 27. Nous avons remarqué dans le  
 commencement de ce livre que le moyen mouvement de la lune, conclu par  
 la comparaison des observations de Flamsteed et de Bradley, est  
 sensiblement plus grand que celui qui résulte des observations de Bradley  
 comparées aux observations de Maskeline; et que les observations faites  
 depuis quinze à vingt ans indiquent dans ce mouvement une diminution  
 plus grande encore. Cela semble prouver qu'il existe dans la théorie de ce  
 satellite une ou plusieurs inégalités à longues périodes, dont il est important  
 de connaître la loi. En examinant avec la plus scrupuleuse attention cette  
 théorie, on voit que l'action des planètes ne produit aucune inégalité  
 semblable, comme on peut s'en convaincre par l'analyse exposée dans le  
 n° 21; mais l'attraction du soleil produit dans l'expression de  $n + e$ , une  
 inégalité proportionnelle au sinus de l'angle  $3r - 3mr + 3cmr - 2^v - cv + 2$   
 $0 + tar - 3\epsilon$ . Les termes qui composent cette inégalité sont très-petits dans  
 les équations différentielles ; mais quelques-uns d'eux acquièrent par les  
 intégrations successives, le diviseur  $(3 - 3m + 3cn - 2j - c)^*$ , et ce  
 diviseur peut les rendre sensibles, par son excessive petitesse. Pour  
 déterminer ce diviseur, nous observerons que l'on a, par le n° 6,  $3 - 1(j -$   
 $c = 0,00040859$ .

SECONDE PARTIE, LIVRE SEPTIÈME. 335 De plus, le mouvement annuel du périhélie solaire étant, par le n° 25 du sixième livre, égal à  $36'',8843$ , on a  $1 - c' = 0,00000922035$ ; d'où Ton tire  $3 - 3m - f - 3c/ii - 2g - c = 0,00040652$ ; et par conséquent  $(3 - 3m - f - 3c - 2g - c)^* = 0,00000016626$ . A la vérité, on a vu dans le n° 5, que le carré du coefficient de l'angle  $v$  ne peut pas, en vertu des intégrations successives, être diviseur de l'inégalité correspondante, lorsque l'on n'a égard qu'à la première puissance de la force perturbatrice; mais cela cesse d'avoir lieu pour les termes dépendants du carré de cette force, et l'inégalité dépendante de  $3v - 3mi; + 3cmt; - 2^1; - cv + a\hat{o} + tar - 3^1 7'$  ne peut résulter que de ces termes. Pour le faire voir, considérons le terme  $3affndt.dR$  de l'expression de  $Sv$ , donnée par la formule [Y] du n° 46 du second livre: ce terme paraît être celui dont l'inégalité que nous considérons doit principalement dépendre. Le développement de  $R$  donne des termes de la forme  $fl^{\wedge}. \cos$ ,  $(37if - 37i'fH - 3cVt - 2gnt - c/i(H - 20 - h2tff - 3^{\wedge}R'))$ . Si ces termes ne résultent que de la première puissance de la force perturbatrice,  $nt$  et  $cnt$  se rapportent aux coordonnées du soleil, et alors la différentielle à  $R$ , qui ne se rapporte qu'aux coordonnées de la lune, devient  $*Ji\&\sim(3 - 2^{\wedge} - c).n(/^{\wedge}ff.\sin.(3nf - 3n74 - 3c7i'f - 2^{\wedge}nf \sim cnf + 20 + \ll - 3t\hat{t}T'))$ . La double intégrale  $Saffndt.dR$  acquiert le diviseur  $(3 - 3m - f - 3c - 2g - c)^*$ ,

336 MÉCANIQUE CÉLESTE.  $m$  étant par le  $n^{**} 4$  égal à — ; mais elle a pour facteur,  $3 — q^{\wedge} — c$ , qui est à très-peu près égal à  $3 — 3m - + - 3cm — 2 g — c$ ; ainsi elle doit être considérée comme n'ayant que le diviseur  $3 — 3m - + - 3c'm — 2g — c$ , ce qui ne paraît pas suffire pour la rendre sensible. Si le terme précédent de l'expression de  $jR$  résulte du carré de la force perturbatrice, c'est-à-dire, de la substitution des termes de  $r$  et de  $V$ , dépendants de cette force; alors les coordonnées de la lune renferment les angles  $nt$  et  $en t$ . Supposons, par exemple, que la partie  $— 2nt$  de l'angle  $— 3nt$  dans ce terme de  $JR$ , dépende des coordonnées de la lune; on a dans ce cas  $dJR = — (3 — 2 m — 2 g — c) xifncZt.\sin.(3fif — 37i'f4-3cVf— 2^{\wedge}/if — c/if+2\hat{O}+t\hat{T}— 3^{\wedge}\odot')$ , et le terme  $Za.ffndt.\grave{a}R$  donne dans l'expression de la longitude de la lune, le suivant,  $3a.(3 — 27W — 2(/ — c).7i^{*}//.\sin.(3nf — 3n'/+3c'7i'/ — 2^{\wedge}nf — cn^{\wedge}+2\hat{O}-hBr — 3flr')$   $(3 — 3w+3c'm- 2(j — cY$  qui peut devenir sensible par l'extrême petitesse de son diviseur. Les termes de ce genre sont en très-grand nombre, et il est difficile de les déterminer avec exactitude; mais il suffit d'être averti de la possibilité de l'inégalité qui en résulte, pour suivre sous ce point de vue les observations. Cette inégalité doit être appliquée au moyen mouvement, et par conséquent à l'anomalie moyenne. La théorie indique encore une inégalité dont la période est à très-peu près la même que celle de l'inégalité précédente , et qui dépend de l'aplatissement de la terre. On a vu dans le  $n^{**} 20$  que l'expression de  $Q$  contient le terme  $(i\ll-\langle p)-^{\wedge}-(K-;)\hat{i}$

SECONDE PARTIE, LIVRE SEPTIÈME. 337 or on a par le même numéro ( $i=s$ .  $\cos. X H- y 1 - ss. \sin. X. \sin.fv$ ; de plus on a -55 U ce qui donne dans Q ou dans — R, la fonction ( $i^9 - *P$ )- — •  $\textcircled{R}$ '- ( $^{\wedge} - i^{\wedge}$ )-  $s\hat{i}^*- \wedge- \wedge s. 2/1$ ; Cette fonction produit, par son développement, des termes dépendants de Tangle  $ifnt-^nt - nt-hcnt - 2gnt - C7if-h2 0-h\ll - tff$ ; ils sont analogues à ceux que donne la fonction R, relative à l'action du soleil, et qui dépendent de Tangle  $3nf - 37i'f-t-3c7if - igt - cnt-h^O-h'Cf - 3\ll$ ; le coefficient du temps t est à très-peu près le même dans ces deux angles qui, maintenant, vu la position du périhélie solaire  $^{\wedge}$  diffèrent peu de 200 degrés. Tous les termes de R se rapportant ici aux seules coordonnées de la lune, si l'on représente par  $K.sm.[i\grave{a}fnt-hnt - nt - ont - 2gnt - cnf+20-t-t\grave{i}T - tff)$ , le terme dépendant de l'angle précédent, que donne le développement de  $jR$ ; ce terme acquerra dans la différentielle  $dR$ , le facteur  $(2/-hi - m-hc'm - ig - c).n$ ; et par conséquent il n'aura pour diviseur, dans la double intégrale  $Za.ffndt d/\hat{i}$ , que la première puissance et non le carré de cette quantité : l'inégalité correspondante à ce terme ne paraît donc pas devoir être sensible. Le terme de la forme  $Y^{\wedge\wedge}$  qui, comme on l'a vu dans le troi

TOME m. 43

338 MÉCANIQUE CÉLESTE. sième livre, peut exister dans l'expression du rayon vecteur du sphéroïde terrestre, peut encore introduire dans l'expression de la longitude vraie de la lune une inégalité dépendante du cosinus de  $3fnt - igt - en f H - 20 H - tzt$ , et qui maintenant se confond à peu près avec les deux précédentes. Si cette inégalité devenait sensible, il en résulterait de nouvelles lumières sur la figure de la terre; mais quelques calculs que j'ai faits sur cet objet me portent à croire que cette inégalité est insensible, comme la précédente. La suite des siècles, et de nouveaux progrès dans l'analyse, éclairciront ce point délicat et important de la théorie lunaire. 28. Nous allons maintenant établir par les observations l'existence de l'inégalité dépendante du sinus de l'angle  $5nt - 3nf - f - 3cVf - 2gnt - cnt - 2d - h^2 - 3tzt$ . Cet angle est évidemment le double de la longitude du nœud de l'orbite lunaire, plus la longitude de son périégée, moins trois fois la longitude du périégée du soleil; nous le désignerons par  $E$ , et nous allons faire voir que la loi des variations de  $\sin.E$ , est la même que celle des anomalies observées dans le moyen mouvement de la lune. Les tables lunaires insérées dans la troisième édition de l'Astronomie de Lalande supposent que dans l'intervalle de cent années juliennes le mouvement de la lune par rapport aux équinoxes surpasse un nombre entier de circonférences, de  $342^{\circ} 9'$ ; et que l'époque de  $\gamma$  So est de  $209^{\circ} 20' 20''$ . La correction de l'époque de ces tables pour 1691 a été déterminée par Bouvard et Burg, au moyen de plus de deux cents observations de Lahire et de Flamsteed; ils ont trouvé l'un et l'autre cette correction égale à  $-1^{\circ} 3', 58''$ . La correction de l'époque des mêmes tables pour 1766 a été déterminée par Mason et Bouvard, au moyen d'un très-grand

SECONDE PARTIE, LIVRE SEPTIÈME. 339 nombre d'observations de Bradley, et ils l'ont trouvée nulle. Ainsi, dans l'intervalle de 1691 à 1766, le moyen mouvement de la lune a été de  $13^{\circ}58'$  plus grand que par ces tables; ce qui donne  $20''^9$  pour l'accroissement du moyen mouvement séculaire des mêmes tables. Burg a trouvé, par un grand nombre d'observations de Maskeline, la correction de l'époque de ces tables égale à  $-9^{\circ}26'$  pour 1766, et égale à  $-2^{\circ}50'$  pour 1779. Bouvard a trouvé, par un grand nombre d'observations de Maskeline,  $-5^{\circ}43'2''$  pour la correction de l'époque de ces tables en 1789. Enfin, par un nombre considérable d'observations faites à Greenwich, à Paris et à Gotha, on trouve  $-87''^96$  pour la correction des époques des mêmes tables en 1801. De là il suit que depuis 1766 jusqu'à ce jour le moyen mouvement de la lune a diminué d'une manière sensible, et que cette diminution est maintenant croissante; car de 1766 à 1779, c'est-à-dire dans un intervalle de vingt-trois ans, ce mouvement a été plus petit que par les tables, de  $28^{\circ}09'$ ; et de 1779 à 1801, c'est-à-dire en vingt-deux ans, il a été plus petit de  $59''^97$ . L'époque de 1766, comparée à celle de 1779, donne  $126''$  pour la diminution du mouvement séculaire des tables, tandis que l'époque de 1766 à 1801 donne  $172''^5$  pour cette diminution. L'ensemble des observations indique donc évidemment ces trois résultats : 1<sup>re</sup> un mouvement moyen plus grand que celui de ces tables, depuis 1691 jusqu'en 1756; 2<sup>de</sup> un mouvement moyen plus petit, depuis 1756 jusqu'à ce jour; 3<sup>e</sup> une diminution de plus en plus rapide. Ces résultats sont conformes à la marche de l'inégalité précédente; car à l'époque de 1691 le sinus de E était négatif; il était positif en 1766; cette inégalité a donc augmenté dans cet intervalle le moyen mouvement de la lune. En 1766, ce sinus était 43.

340 MÉCANIQUE CÉLESTE, positif et vers son maximum, et depuis cette époque il a toujours été en diminuant; l'inégalité a donc diminué le moyen mouvement de la lune. Enfin ce sinus était presque nul en 1801, et alors sa diminution est la plus grande; la diminution du moyen mouvement a dû par conséquent être plus considérable dans ces dernières années. Déterminons présentement le coefficient de cette inégalité. Il est visible qu'elle doit produire un changement, soit dans l'époque des tables pour 1760, soit dans le moyen mouvement séculaire de ces tables. Donnons  $e$  la correction de l'époque des tables en 1760,  $x$  la diminution de leur moyen mouvement séculaire, et  $y$  le coefficient de l'inégalité précédente. La formule de correction des époques des tables sera en nommant  $i$  le nombre des siècles écoulés depuis 1760,  $e = X. i - hy. \sin. E.$  Pour déterminer les trois inconnues  $e$ ,  $x$  et  $y$ , j'ai comparé cette formule aux trois époques de 1691, 1766 et 1801, déterminées par les observations; ce qui m'a donné les trois équations suivantes,  $e - x. 0,69 - y. 0,63660 = - 13^{\circ}58'$ ,  $e - x. 0,064 - y. 0,99898 = 0$ ,  $e - x. 0,51 - y. 0,08199 = - 87^{\circ}96'$ . Ces trois équations donnent  $e = - 4^{\circ}54'$ ,  $x = - 98^{\circ}654'$ ,  $y = HfjSi$ . Au moyen de ces valeurs, on trouve  $- 13^{\circ}58'$ ;  $- 0^{\circ}00'$ ;  $- 1^{\circ}164'$ ;  $- 35''03$ ;  $- 57^{\circ}62'$ , et  $- 87^{\circ}96'$ , pour les corrections des six époques de 1691, 1756, 1766, 1779, 1789 et 1801. La somme



**The text on this page is estimated to be only 20.59% accurate**

SECONDE PARTIE. LIVRE SEPTIÈME. 541 de ces six coirecdons est —  $ao5\backslash83$ ; et la somme des six coneo tions déterminées par les observations est —  $i93\backslash a\ i$ ; Tensemble de ces corrections indique par conséquent qn il faut augmenter de —  $a\ ',10$ , la valeur précédente de e, et alors la formule de correction des tables devient —  $39\backslash44$  —  $98\backslash654$  . t h-  $47\backslash5\ 1$  .  $\sin^* E$ . En calculant par cette formule les corrections pour les six époques, on a CsN» Jk» «M «tnvrtvM» 1691 1756 1766 1779 1789 1801 —  $i3\ ,58$  —  $1\ 1\ ,48$  -f- a H- o',oo H- 2',io -f- a —  $9',26$  —  $9',54$  — o —  $a8',o9$  —  $32^*,93$  — 4 —  $54',3a$  —  $55',5a$  — —  $87',96$  —  $85',86$  -h ,io; ,io; ,a8î .84; ,ao; ,io. Les difPérences entre les résultats des observations et ceux de la formule sont dans les limites des erreurs dont ces derniers résultats sont suscq)tibles : elles peuvent dépendre en partie de la formule dle-même, que Ion rectifiera par de nouvelles observations.

342 MÉCANIQUE CÉLESTE. CHAPITRE VI. Di:s  
 VARIATIONS SECULAIRES DES MOUVEMENTS DE LA LUNE ET  
 DE LA TERRE, QUI PEUVENT ÊTRE PRODUITES PAR LA  
 RESISTANCE D'UN FLUIDE ÉTHÉRÉ RÉPANDU AUTOUR DU  
 SOLEIL. 29. Il est possible qu'il y ait autour du soleil un fluide  
 extrêmement rare qui altère les moyens mouvements des planètes et des  
 satellites; il est donc intéressant de connaître son influence sur les  
 mouvements de la lune et de la terre. Pour la déterminer, nommons  $X, y, z$ ,  
 les coordonnées de la lune, rapportées au centre de gravité de la terre; et oc  
 $x, y, z$ , celles de la terre, rapportées au centre du soleil. La vitesse absolue de  
 la lune autour du soleil sera Supposons la résistance que la lune éprouve  
 égale au carré de cette vitesse, multiplié par un coefficient  $K$  qui dépend de  
 la densité de Téthér, de la surface et de la densité de la lune. En la  
 décomposant parallèlement aux axes des  $X, y$  et des  $z$ , elle produit les  
 trois forces suivantes, —  $-\frac{1}{2}K(dx^2 + dy^2 + dz^2)$  —  
 $-\frac{1}{2}K(dx^2 + dy^2 + dz^2)$  Mais la  
 terre étant supposée immobile, dans la théorie lunaire, il

SECONDE PARTIE, LIVRE SEPTIÈME. 343 faut transporter en sens contraire à la lune la résistance qu'elle éprouve, et qui, décomposée parallèlement aux mêmes axes, donne les trois forces  $-K \cdot \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ ,  $-K' \cdot \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$   $K'$  étant un coefficient différent de  $JST$ , et qui dépend de la résistance éprouvée par la terre. Ayant donc représenté par  $(x, y, z)$  les forces qui sollicitent la lune parallèlement aux axes des  $x$ , des  $y$  et des  $z$ , on aura, en n'ayant égard qu'aux forces précédentes, -  $K \cdot \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ ,  $-K' \cdot \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ ,  $-g \cdot \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ . Maintenant on a, en ne faisant varier que les coordonnées de la lune,

344 MÉCANIQUE CELESTE. En substituant pour  $x, y, z$ , leurs valeurs  $— —^ — '—^ -$ , données dans le n° 2, on aura or on a  $*-(S)-^{\circ}-$   $(^)+-(w)t$  en comparant ces deux valeurs de  $dQ$ , on aura  $\backslash ds) u\backslash dz)'$  d'où l'on tire On a par le n° 2,  $\cos.i;'$ ,  $\sin.i;'$ ,  $s' x — —^, j_-p-, ^ — F' V$  étant ici la longitude de la terre vue du soleil. Si Ton prend pour plan fixe celui de Técliptique en 1760, on pourra supposer  $5=0$ . Représentons par  $rdq'$  le petit arc décrit par la terre dans Tinstant  $dt$ , et qui est égal à  $\backslash Jdx*-\backslash dy^{\wedge}-^{\wedge}-dz^{\wedge}$  : cet arc est à celui

**The text on this page is estimated to be only 24.39% accurate**

SECONDE PARTIE, LIVRE SEPTIÈME. 345 que la lune décrit par son mouvement relatif autour de la terre, à très-peu près, dans le rapport de — à Tunité, et, par conséquent, trente fois au moins plus considérable ; on a donc à fort peu près  $S/\{dx'^{\wedge}d\epsilon Y^{\wedge}\{dy-i-dyY^{-\wedge}\{dz'^{\wedge}dzy=rd$

**The text on this page is estimated to be only 24.54% accurate**

346 MÉCANIQUE CÉLESTE.  $\int dQ \sqrt{du^2 - jK' - K} \cdot m' du, \sqrt{\dots}$   
 $SK.m \int dv j'u^* dv \ll '* \ll '* ' (\sqrt{v' } ^ ' 2u.u^' dv K.m du / M r - T. j--.cos.(2V$   
 $— 21; . 2tt.u^* dv ^ ' La valeur de K n'est pas constante : si Ton suppose la$   
densité de Téther, proportionnelle à une fonction de la distance du soleil, en  
désignant par  $^ (u )$  cette fonction, elle sera, relativement à  $a^*$  la lune, pour  
laquelle  $ù$  devient  $v_l .cos. (t; — v)$ ,

**The text on this page is estimated to be only 27.67% accurate**

SECONDE PARTIE, LIVRE SEPTIEME. 347 Soit donc  $a = g$ .  
 $m \cdot o^* \cdot !^* \text{ — } m \cdot !^* u; j$ , il faudra ajouter au second membre de la seconde  
des équations (L) du n° 1, et par conséquent au second membre de  
l'équation (L) du n° 9, la fonction 1-5. — .sm. (et; — «). La valeur de  $\delta$  sera  
ainsi, par le n° 10, augmentée de la quantité — , et conséquemment la  
valeur de  $a$  sera diminuée de  $aa \cdot v$ ; on aura ensuite à très-peu près, par le  
même numéro,  $\delta \approx 5 h_6, \text{ — } = 0$ ; ce qui donne  $\delta = \text{constante}$ . {  $iH-4-6 r j$  ; et  
, par conséquent,  $e = \text{constante}$ . {  $1 \text{ — } (a \text{ — } t^{\wedge}) \cdot \text{ — } ^{\wedge}$  } Le rapport de  
l'excentricité au demi-grand axe est donc assujetti, par la résistance de  
l'éther, à une équation séculaire; mais elle est insensible par rapporta  
l'accélération correspondante du moyen mouvement de la lune, parce que  
cette dernière accélération est, comme on va le voir, multipliée par le carré  
de  $v$ . Cette résistance ne produit aucune équation séculaire dans le  
mouvement du périhélie. 4A.

348 MECANIQUE CELESTE. L'expression de  $dt$  du  $n^{**} 15$  donne, dans l'expression de  $f$ -he, la fonction  $— f av^* -! - (5 a — \hat{e}) . V . e . \sin . \{cv — ^\}$ . En substituant au lieu  $\hat{e}$ ,  $t - \backslash - e - hae . \sin .$  [et  $— 'cy$ ), on aura dans l'expression de  $v$  l'équation séculaire  $\backslash aV — (2 a — \hat{e}) . f . ^ . \sin .$  (cf  $— ^$ ). La résistance de l'éther produit donc dans le moyen mouvement de la lune une équation séculaire qui accélère ce moyen mouvement, sans en produire aucune sur le mouvement du périhélie. On s'assurera de la même manière que la résistance de l'éther ne produit aucune équation séculaire sensible, ni dans le mouvement des nœuds, ni dans l'inclinaison de l'orbite lunaire à l'écliptique. De là il suit que la résistance de l'éther ne peut être sensible que dans le moyen mouvement de la lune. Les observations anciennes et modernes prouvent évidemment que les moyens mouvements de son périhélie et de ses nœuds sont assujettis à des équations séculaires très-sensibles. Le mouvement séculaire du périhélie conclu par la comparaison des observations anciennes et modernes est plus petit de quinze à seize minutes que celui qui résulte de la comparaison des observations faites depuis un siècle; ce phénomène incontestable indique donc une autre cause que la résistance de l'éther. On a vu précédemment qu'il dépend de la variation de l'excentricité de l'orbite terrestre; et, comme les équations séculaires résultantes de cette variation satisfont exactement à l'ensemble de toutes les observations anciennes et modernes, on doit en conclure que l'accélération produite par la résistance d'un fluide éthéré, dans le moyen mouvement de la lune, est jusqu'à présent insensible.



SECONDE PARTIE, LIVRE SEPTIÈME. 349 30. L'accélération produite par cette résistance dans le moyen mouvement de la terre est beaucoup plus petite que l'accélération correspondante du moyen mouvement de la lune. Pour le faire voir, reprenons la formule [Y] du n° 46 du second livre. Cette formule, appliquée à la terre, donne dans l'expression de  $\ddot{v}$  le terme  $S$  étant la masse du soleil, la somme des masses de la terre et de la lune étant prise pour unité;  $Q$  correspondant, pour la terre, à ce que nous avons désigné par  $Q$ , pour la lune; et la caractéristique différentielle  $d'$  se rapportant aux coordonnées du soleil. On a  $(\frac{d^4}{dt^4}x, \frac{d^4}{dt^4}y)$  et  $(\frac{d^4}{dt^4}z)$  étant les forces dont la terre est animée parallèlement aux axes des  $x$ , des  $y$ , et des  $z$ , en vertu de la résistance de l'éther. Ces forces sont par le numéro précédent, en négligeant l'excentricité de l'orbe terrestre, et en représentant l'élément  $dt$  du temps, par la différentielle du moyen mouvement lunaire, des  $K \frac{a}{m} \sin. v$ , —  $K' \frac{a}{m} \cos. v$ , —  $K \frac{a}{m} r$ ; et en négligeant donc le carré de  $r$ , on aura  $d'Q = -K \frac{a}{m} \frac{dr}{dt}$ ; ce qui donne

350 MÉCANIQUE CÉLESTE.  $A'$  doit être supposé égal à  $H \sqrt{\frac{g}{R}}$  ( $\frac{g}{R}$  étant une constante dépendante de la surface et de la masse de la terre; ainsi l'équation séculaire produite par la résistance de l'éther, dans le moyen mouvement de la terre, est  $S$  L'accélération correspondante du moyen mouvement de la lune est, par ce qui précède,  $\{H' \cdot a^3 \frac{d}{dt} \frac{m}{m'}\} \cdot$  De plus, on a  $\frac{a^3}{m} = \frac{a^3}{m'}$ ; l'accélération du moyen mouvement de la lune est donc à l'accélération correspondante du moyen mouvement de la terre comme l'unité est à  $\frac{H}{H'}$  et conséquemment, comme l'unité est à  $\frac{H}{H'}$ , en négligeant le terme  $-\frac{1}{2} \frac{d^2 a}{dt^2}$  facile de voir que  $H'$  masse de la lune, carré de la parallaxe lunaire.  $H$  masse de la terre.  $a$  carré du demi-diamètre apparent de la lune. Les observations donnent demi-diamètre apparent de la lune  $= 29' 1''$ , parallaxe lunaire  $= 1''$

SECONDE PARTIE, LIVRE SEPTIÈME. 351 et par le n° 44 du sixième livre, la masse de la lune est  $\frac{1}{81}$  de celle de la terre; on aura ainsi  $\frac{1}{81}=0,012345679$ ; d'où il suit que l'accélération du moyen mouvement de la terre, produite par la résistance de Téther, est égale à l'accélération correspondante du moyen mouvement de la lune, multipliée par  $0,00976^2$ , ou environ cent fois plus petite que cette accélération.

SUPPLÉMENT AU TRAITÉ DE MÉCANIQUE CÉLESTE,  
PRÉSENTÉ AU BUREAU DES LONGITUDES LE 17 AOÛT 1808. Mon  
objet, dans ce supplément, est de perfectionner la théorie des perturbations  
planétaires, que j'ai présentée dans les second et sixième livres de mon  
Traité de Mécanique céleste. En cherchant à donner aux expressions des  
éléments des orbites la forme la plus simple dont elles sont susceptibles, je  
suis parvenu à ne les faire dépendre que des différences partielles d'une  
même fonction, prises par rapport à ces éléments; et, ce qui est  
remarquable, les coefficients de ces différences ne sont fonctions que des  
éléments eux-mêmes. Ces éléments sont les six arbitraires des trois  
équations différentielles du second ordre, qui déterminent le mouvement de  
chaque planète. En regardant son orbite comme une ellipse variable à  
chaque instant, ils sont représentés, 1<sup>o</sup> par le demi-grand axe, dont dépend le  
moyen mouvement de la planète; 2<sup>o</sup> par l'époque de la longitude moyenne;  
3<sup>o</sup> par l'excentricité de l'orbite; 4<sup>o</sup> par la longitude du périhélie; 5<sup>o</sup> par  
l'inclinaison de l'orbite à un plan fixe; 6<sup>o</sup> enfin, par la longitude de ses  
TOME III. 45

354 MÉCANIQUE CELESTE. nœuds. M, Lagrange a donné depuis longtemps à l'expression différentielle du grand axe la forme dont je viens de parler, et il en a conclu d'une manière très-heureuse l'invariabilité des moyens mouvements, lorsque Ton n'a égard qu'à la première puissance des masses perturbatrices; invariabilité que j'ai reconnue le premier, en ne rejetant que les quatrièmes puissances des excentricités et des inclinaisons, ce qui suffit aux besoins de l'astronomie. J'ai donné dans le second livre de la Mécanique céleste la même forme aux expressions différentielles de l'excentricité de l'orbite, de son inclinaison et de la longitude de ses nœuds. Il ne restait donc qu'à donner la même forme aux expressions différentielles des longitudes de l'époque et du périhélie : c'est ce que je fais ici. Le principal avantage de cette forme des expressions différentielles des éléments est de donner leurs variations finies, par le développement seul de la fonction que j'ai nommée R dans le second livre de la Mécanique céleste. En réduisant cette fonction, dans une série de cosinus d'angles croissants proportionnellement au temps, on obtient par la différentiation de chaque terme les termes correspondants des variations des éléments. Je m'étais attaché à remplir cette condition, dans le second livre de la Mécanique céleste; mais on y satisfait d'une manière encore plus générale et plus simple, au moyen des nouvelles expressions de ces variations. Elles ont de plus l'avantage de mettre en évidence le beau théorème auquel M. Poisson est parvenu sur l'invariabilité des moyens mouvements, en ayant égard au carré des masses perturbatrices. Dans le sixième livre de la Mécanique céleste, j'ai prouvé, au moyen d'expressions analogues, que cette uniformité n'est point altérée par les grandes inégalités de Jupiter et de Saturne; ce qui était d'autant plus important que j'ai fait voir dans le même livre que ces grandes inégalités ont une influence considérable sur les variations séculaires des orbites de ces deux

SUPPLEMENT AU TROISIÈME VOLUME. 355 planètes. La substitution des nouvelles expressions dont je viens de parler montre que l'uniformité des moyens mouvements planétaires n'est troublée par aucune autre inégalité périodique ou séculaire. Ces expressions me conduisent encore à la solution la plus générale et la plus simple des variations séculaires des éléments des orbes planétaires. Enfin elles donnent avec une extrême facilité les deux inégalités du mouvement lunaire en longitude et en latitude, qui dépendent de l'aplatissement de la terre, et que j'ai déterminées dans le second chapitre du septième livre. Cette confirmation des résultats auxquels je suis parvenu sur cet objet me paraît intéressante, en ce que leur comparaison avec les observations donne l'ellipticité de la terre, d'une manière au moins aussi précise que les mesures directes, avec lesquelles ils sont aussi bien d'accord qu'il est possible de l'espérer, vu les irrégularités de la surface de la terre. Dans la théorie des deux grandes inégalités de Jupiter et de Saturne, que j'ai donnée dans le livre VII, j'ai eu égard aux cinquièmes puissances des excentricités et des inclinaisons des orbites. M. Burckhardt avait calculé les termes dépendants de ces puissances; mais j'ai reconnu depuis que l'inégalité résultante de ces termes avait été prise avec un signe contraire. Je rectifie donc à la fin de ces recherches les formules des mouvements de Jupiter et de Saturne, que j'ai présentées dans le chapitre viii du dixième livre. Il en résulte un léger changement dans les moyens mouvements et les époques de ces deux planètes; et ce changement satisfait à l'observation qu'Ebn-Junis fit au Caire, en l'an 1007, de leur conjonction mutuelle, observation qui ne s'écarte plus des formules que d'une quantité beaucoup moindre que l'erreur dont elle est susceptible. Les observations anciennes citées par Ptolémée sont également représentées par mes formules. Cet accord prouve que les moyens mouvements des deux plus grosses planètes du système solaire sont maintenant bien connus, et n'ont

356 MÉCANIQUE CÉLESTE. point éprouvé, depuis Hipparque, d'altération sensible: il garantît pour longtemps l'exactitude des tables que M. Bouvard a construites d'après ma théorie, et que le Bureau des longitudes vient de publier. Dans la même séance où j'ai présenté ces recherches au Bureau des longitudes, M. Lagrange lui a pareillement communiqué de savantes recherches qui ont rapport à leur objet. Il y parvient, par une analyse très-élégante, à exprimer la différence partielle de  $R$ , prise par rapport à chaque élément, par une fonction linéaire des différences infiniment petites de ces éléments, et dans laquelle les coefficients de ces différences ne sont fonctions que des éléments eux-mêmes. En déterminant au moyen de ces expressions les différences de chaque élément, on doit, après les réductions convenables, retrouver les expressions très-simples auxquelles je suis parvenu, et qui, tirées de méthodes aussi différentes, seront par là confirmées. 1. Je reprends l'expression de  $e$ , donnée dans le n° 67 du second livre du traité de Mécanique céleste. En faisant pour simplifier, ( $x=i$ , elle devient  $e = 2 \sin \frac{1}{2} \sqrt{a} \left[ i - e^* \right] \frac{d}{dt}$ : dans cette équation, ( $t$  est le temps;  $n$  est le moyen mouvement de la planète  $m$ ;  $a$  est le demi-grand axe de son orbite;  $e$  en est l'excentricité;  $v$  est la longitude vraie de la planète;  $R$  est une fonction des coordonnées des deux planètes  $m$  et  $m'$ , telle qu'en nommant  $x, y, z, x', y', z'$  ces coordonnées, on a  $p$  étant la distance mutuelle des deux planètes, et par conséquent étant égal à  $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2}$  est le rayon vec

**The text on this page is estimated to be only 22.69% accurate**

358 MÉCANIQUE CELESTE. L'anomalie  $u$  de l'excentrique est donnée en fonction de l'anomalie vraie  $r - \tau$ , au moyen des équations d'où Ton tire  $\frac{r - \tau}{a} = \frac{1 - e \cos u}{1 - e \cos \tau}$ .  $\cos M = \frac{1 - e \cos u}{1 - e \cos \tau}$ ;  $i + e \cos (v - \tau) = e + \cos (v - \tau) \cos u$ ,  $1 + e \cos (v - \tau) = \frac{V}{i - c} \sin (i - \tau)$  sm.  $11 = -I \cos i$ ;  $1 + \cos (v - \tau)$  par conséquent  $ed'o$  de  $\sin a$ , ...  $2 \cos u = e \cos' u \cdot \sqrt{2} = e' - e \cos u$   $j + c \cos (v - \tau) = 2 + e \cos (v - \tau)$   $i \cdot X = f^* \cdot yTZ$  de  $\sin (v - \tau) = i + e \cos (i - \tau)$   $j^2$  Substituant pour  $ed^e$  et  $(/e$ , leurs valeurs données à la fin de la page 397 du premier volume de la Mécanique céleste; le second membre de cette équation se réduit à  $\frac{r}{a} \sqrt{1 - e^2}$ , et comme on a  $\frac{r}{a} \sqrt{1 - e^2} = \frac{r}{a} \sqrt{1 - e^2}$  devient l'expression précédente de  $\frac{dr}{dt}$  donne ainsi cette équation fort simple, que M. Poisson a trouvée le premier,  $\frac{dr}{dt} = \frac{1}{a} \sqrt{1 - e^2} \cdot \frac{dr}{du}$ .



**The text on this page is estimated to be only 29.95% accurate**

SUPPLÉMENT AU TROISIÈME VOLUME. 359 Si l'on rapporte, comme on l'a fait dans le second livre de la Mécanique céleste, le mouvement de la planète m au plan de son orbite primitive, et que l'on fasse, comme dans le même ouvrage,  $yj = \tan. \theta \cdot \sin. \theta$ ,  $\theta = \tan. (\theta \cdot \cos. \phi$ , ( $\theta$  étant l'inclinaison de l'orbite, et  $\theta$  étant la longitude de son nœud ascendant; on aura, par le n° 71 du second livre,  $\frac{dR}{dt} = \frac{V}{a} \cdot (i - e) \cdot \frac{dP}{dt}$  I  
Maintenant on a, par le n° 44 du second livre, de plus, on a, par le n° 64 du même livre,  $da = \frac{1}{2} a^2 \cdot \frac{dT}{dt}$ , et  $1 - \frac{1}{2} T = -T$ , parce que l'angle nt est toujours accompagné de l'angle  $-l - e$ ; en substituant donc au lieu de  $da$ ,  $de$ ,  $dp$  et  $dq$  leurs valeurs précédentes, on aura cette équation très-simple,  $\frac{dP}{dt} = \frac{V}{a} \cdot (i - e) \cdot \frac{dT}{dt}$ , ce qui donne  $\frac{dT}{dt} = \frac{V}{a} \cdot (i - e) \cdot \frac{dP}{dt}$ .  $\frac{dT}{dt} = \frac{V}{a} \cdot (i - e) \cdot \frac{dP}{dt}$ .

360 MÉCANIQUE CÉLESTE. En réunissant ces diverses équations, on aura, en observant que  $n = a'$ ,  $da = -2a \hat{a}.R$ , (i), and  $dt.yJi-e', , -> /dR\ , fdR\ , \bullet , v de = \} .(i_v/i_.,.) .^j_Haa'.^j. \ll rft, (a) de = \pm \} l^i.i-y/Tr?).^R^{VEl,ndt. \{ \S y (3) \}$  et par là réduire les expressions précédentes à ne renfermer que des différences partielles des éléments; mais il est aussi simple de conserver la différentielle à  $R$ . Dans le mouvement considéré comme elliptique, on doit rigoureusement substituer  $fn dt$ , au lieu de  $n f$ ; or  $n = a'$ ; on a donc, en nommant  $\wedge$  le moyen mouvement de la planète  $m$ ,  $\wedge = .fndt = 'dffandt.dR$ . (7) 2. Ces équations mettent en évidence le résultat auquel M. Poisson est parvenu, sur l'invariabilité des moyens mouvements planétaires, en ayant même égard au carré de la force

# SUPPLÉMENT AU TROISIÈME VOLUME. 361 perturbatrice.

En désignant par la caractéristique S les variations finies, on aura, en ne faisant varier dans jR que ce qui est relatif à la planète m, et en observant que  $(-t—) = —j-.j$  En substituant pour 5a, 8e, Star, etc. les intégrales des valeurs précédentes de da, de, rftar, etc. on aura  $s\ll=i\ll,ja\gg^*)+,,,..|^{\wedge},/w,.(^{\wedge})-(^{\wedge})./d\ll|^{\wedge\wedge}c-v/^{\wedge})|(\S)/$

362 MÉCANIQUE CÉLESTE.  $k' \cos. \{ \text{int} - \text{int} - hA' \}$  soit le terme correspondant de N. Il faut combiner ces deux termes ensemble, pour avoir des quantités non périodiques dans  $\int [M \cdot f \cdot N dt - N / M dt]$ ; cette fonction devient alors  $k \cdot \text{indt} \cdot \sin. [ \text{int} - \text{int} - f - A ] \cdot f \cdot k dt \cdot \cos. ( \text{int} - \text{int} - t - A' ) - k \cdot \text{indt} \cdot \sin. [ \text{int} - \text{int} - A' ] \cdot f \cdot k dt \cdot \cos. [ \text{int} - \text{int} - A ]$ , fonction qui, en effectuant les intégrations, se réduit à zéro; ce qui est conforme à ce que j'ai démontré dans le n° 12 du sixième livre, relativement aux grandes inégalités de Jupiter et de Saturne. L'expression de  $d \cdot \int -r \cdot h \cdot f \cdot ndt$  est donc une fonction périodique. L'expression de  $\int -r \cdot l \cdot f \cdot ndt$  ne renferme que des quantités périodiques; car on a  $\int A' - h \cdot f \cdot ndt = \int -j \cdot S \cdot / \cdot \text{irf} / H - j \cdot dt \cdot \text{hn} \cdot [ \text{ndt} - \text{ndt} ]$  Substituant pour  $S_n$ , sa valeur  $3 \cdot \text{fan} \cdot dR$ , on aura  $d \cdot \int h \cdot J \cdot ndt = \text{ian} \cdot \int f \cdot A$  On peut réunir dans un seul terme tous ceux du développement de R, qui dépendent d'un même angle  $\text{int} - \text{int}$ , et il devient de la forme  $f \cdot \cos. [ \text{int} - \text{int} - h A ]$ . En le substituant pour R dans les fonctions  $\int j \cdot f \cdot f \cdot R \cdot dt$ , et  $\int -j \cdot f \cdot R$ , on voit qu'elles se réduisent à des sinus du double de l'angle  $\text{int} - \text{int} - h A$ ; ainsi la différentielle  $d( \int y \cdot f \cdot ndt )$  ne renferme que des quantités périodiques; d'où il suit que  $d \cdot S \cdot A$  ne renferme pareillement que des quantités périodiques, lorsque l'on ne fait varier dans  $R$  que les quantités relatives à la planète m.

SUPPLÉMENT AU TROISIÈME VOLUME. 363 Pour avoir la valeur complète de  $d. S$  ft, il faut encore faire varier dans  $5jR$  ce qui est relatif à la planète  $m$ . Pour cela, nommons  $K$  ce que devient  $R$  relativement à la planète  $m$  troublée par l'action de  $m$ ; on aura  $n/m \cdot [xx + yy' + zz'] m - \wedge - y$ ; ainsi la variation de  $R$  relative aux variations de ce qui se rapporte à la planète  $m$  est donc égale à la variation du second membre de cette équation, relative aux variations des coordonnées de  $m$ . Désignons par  $5'$  les variations qui se rapportent à ces coordonnées. On voit évidemment par l'analyse précédente que  $m \cdot m \cdot i \setminus n \cdot at \wedge J$  se décompose en termes de la forme  $M \cdot fNdt - N./Mdt$ . Pour avoir leur différentielle par rapport à la caractéristique  $d$ , il faut ne faire varier que les quantités hors du signe intégral, parce que les quantités enveloppées par le signe intégral sont relatives aux éléments de la planète  $m$ . Soit donc  $k \cdot \cos. [int - int-hA)$ , un terme de  $M$ , et  $k' \cdot \cos. \{i'nt - int-hA'\}$  le terme correspondant de  $iV$ ; il faut combiner ces termes ensemble, pour avoir des quantités non périodiques dans  $d.[M \cdot fNdt - N./Mdt) - \wedge$  et alors il est facile de voir que cette fonction différentielle n'en renferme point. On s'assurera facilement que  $d. | - rj7.5'./i'rfn$  n'en contient aucune,  $\wedge. J. /àR \setminus$  par le même raisonnement qui nous a fait voir que  $d. l - \wedge. S. yhe/n$  ne renferme que des quantités périodiques; ainsi  $d. S'Jfi'$  ne contient que des quantités semblables. 46.

364 MÉCANIQUE CÉLESTE. H nous reste à considérer la variation de nommons P cette fonction. On a, par le n\*\* 46 du second livre,  $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mu}{r^3} x$  (dR\ lîF ~ WT'~ M'd^)' M étant la masse du soleil. On a pareillement  $\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\mu}{r^3} y$  et  $\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{\mu}{r^3} z$  les coordonnées j, z, y, z fournissent des équations semblables, et il est facile d'en conclure p m d[x dx—xdx+y dy—y dy'+z' dz—z d/) ^ Q étant une fonction en x, y, z, x, y, z, de Tordre du carré des masses m et m. Il est clair que la variation m' d. S' [x dx—xdx+y dy—ydy+z dz—zdz') M' di^ '' étant une diffl'érence exacte, on aura/d5'P, en y changeant la caractéristique ci en d; et alors il est visible qu'elle ne renferme dans l'ordre m que des quantités périodiques. Le terme Q donnera dans JAP celui-ci /dQ: en n'ayant égard qu'aux quantités de l'ordre m\* dans dQ, il suffit de substituer dans Q, au lieu des coordonnées leurs valeurs elliptiques, et alors /dQ ^e contient que des quantités périodiques. Ainsi /d. 5' P ne renferme que de semblables quantités. Il suit de là que JA.hR ne contient dans l'ordre m que des quantités périodiques, en faisant varier dans R les coordonnées des deux planètes m et m. S'il y a une troisième planète m, elle ajoute à fi la fonction  $m\sqrt{xx''-yy''+zz''}$  m^ Z^ 7 '

SUPPLEMENT AU TROISIEME VOLUME. 365 ç! étant la  
 distance de  $m$  à  $m$ . La partie de  $f_i$ , relative à l'action de  $m$  sur  $m$ , reçoit alors  
 une variation dépendante de l'action de  $m$  sur  $m$ . Cette partie de  $K$  est  $\wedge^7$   
 la variation des coordonnées  $X_j y, z$  par l'action de  $m''$ ,  $y$  produit des termes  
 multipliés par  $m$  ni  $y$  et qui sont fonctions des coordonnées elliptiques  $\wedge, j,$   
 $z$ , et des angles  $r\hat{t}$  et  $nt$ . Mais ces angles devant disparaître dans la partie  
 non périodique de  $d/\hat{i}$ , et ne pouvant être détruits par l'angle  $nty$   
 qu'introduisent les valeurs de  $X_j y$  et  $Zy$  il faut n'avoir égard, dans le  
 développement de la variation de  $Ry$  qu'aux termes indépendants de  $nt$  et de  
 $nt$ . Ces termes seront de la forme  $m'rn'X_j X$  étant fonction des coordonnées  
 de la planète  $m$ ; ils introduisent dans  $d/\hat{i}$ , des termes de la forme  $mrnf\wedge X$ ,  
 ou  $m'mXy$  qui ne peuvent donner que des quantités non périodiques de  
 l'ordre  $mm$   $y$  quantités que nous avons négligées dans  $d/\hat{i}$ . Pareillement, la  
 variation des coordonnées  $Xy yyZy$  par l'action de  $m\backslash$  ne peut introduire  
 dans la partie précédente de  $jR$  que les angles  $nt$  et  $nt$ ; il ne faut donc  
 considérer dans cette partie que les termes indépendants de  $nt$ , et par  
 conséquent de la forme  $mm\wedge Xy X$  étant fonction des seules coordonnées  
 $Xy yy z$ ; ce qui, comme on vient de le voir, ne peut produire que des  
 quantités négligeables. Ainsi, en n'ayant égard qu'aux quantités non  
 périodiques de l'ordre  $m$ , dans  $d/jR$ , on peut supposer que  $m''$  est nul,  
 lorsque l'on considère la partie de  $R$  relative à l'action de  $m$  sur  $m$ ; et Ton  
 peut supposer  $m'$  nul, lorsque l'on considère la partie de  $jR$  relative à l'action  
 de  $m''$  sur  $m$  : on vient de voir que dans ces deux cas la variation séculaire  
 de  $J\wedge R$  est nulle. Cette variation est donc généralement nulle, lorsque l'on  
 considère les actions réciproques de trois, ou d'un nombre quelconque de  
 planètes, si

366 MECANIQUE CELESTE. Ton n'a égard qu'aux carrés et aux produits des masses perturbatrices, dans la valeur de àR. Reprenons maintenant l'équation (7) du n° 1, ^ = i. ffandLàR. Sa variation est è^ = 3an. ffc.lt.d.hR-^-3a\ff{ndt.dR.f dR). On vient de voir que dSft est nul, lorsque Ton n a égard qu'aux quantités séculaires de l'ordre du carré des masses planétaires ; on a vu pareillement que dRfdR est nul, eu égard à ces quantités. En ne considérant donc que les quantités séculaires qui, par la double intégration , acquièrent un dénominateur de Tordre du carré des masses planétaires, on voit que la variation SC est nulle. Ainsi Ton peut assurer que cette variation, en ayant égard soit aux quantités séculaires, soit aux quantités périodiques, ne peut être que de l'ordre des masses perturbatrices ; résultat important auquel M. Poisson est parvenu le premier.

3. Considérons deux planètes m et m, en mouvement autour du soleil, dont nous prendrons la masse pour unité. Nommons v la distance angulaire de la planète m à la ligne d'intersection des deux orbites, v la distance angulaire de la planète m à la même droite; nommons encore y l'inclinaison mutuelle des orbites. En prenant pour plan des coordonnées l'orbite de m, et la ligne des nœuds des orbites pour axe des .r, on aura x = r.cos.v, j = r.sin.v, z = o, x = r . COS. Vy y= r. sin. v cos. y, z = r . sin. y . sin. v'; ce qui donne en faisant 1 — cos.y ^=i 2 .s\n\ \^y=e ; =z — rr.jcos. [v —v) -b.sm.v.sm.v (— — ; ^' " Y/r\*+r"— 3 rr' COS. (w'—v) +2 6. rr'. sin. w.sÎP\*



SUPPLÉMENT AU TROISIÈME VOLUME. 367 R, sous cette forme, devient indépendant du plan auquel on a rapporté les coordonnées. En le développant en sinus et cosinus d'angles croissants proportionnellement au temps  $f$ , par la substitution des valeurs elliptiques de  $r, r', v, v'$ , il devient fonction des distances moyennes  $a, a'$ , des planètes à la ligne des nœuds; des distances des périhélie à la même ligne; des demigrands axes  $a$  et  $a'$ ; des excentricités  $e$  et  $e'$ ; et de  $\delta$  ou de l'inclinaison mutuelle des orbites,  $\delta$  étant très-petit et de l'ordre du carré de cette inclinaison. Sous cette forme  $R$  ne renferme point explicitement les variables  $p$  et  $q$ ; mais on peut les y faire naître de la manière suivante. Si au lieu de rapporter les mouvements des planètes à leurs orbites, on les rapporte au plan fixe de l'orbite primitive de  $m$ , alors  $z$  ne sera point nul, et il sera égal à  $rs$ ,  $s$  étant le sinus de la latitude de  $m$ , au-dessus de ce plan: en négligeant le carré des forces perturbatrices, on pourra négliger le carré de  $s$ ; on aura ainsi, au lieu de  $R$ , la fonction suivante, que nous désignerons par  $R_1$ , —  $\frac{1}{2} \cos. (v - V) - \frac{1}{2} \sin. v \sin. v' + s \sin. y \sin. v \sqrt{r^* + r''} - 2 r r' \cos. (v' - v) - \frac{1}{2} r r' \sin. u \sin. w - 2 r r' s \sin. y \sin. v$  Retranchons de  $v$  et de  $v'$ , tant dans  $R$  que dans  $R_1$ , la longitude  $d'$  du nœud de l'orbite de  $m$  avec  $m$ , cette longitude étant comptée sur l'orbite de  $m$ , ce qui revient à changer les origines des  $v$  et des  $v'$ , et supposons  $\delta = \frac{1}{2} \sin. (v - 0') - p \cos. [v - 0']$ ;

**The text on this page is estimated to be only 24.31% accurate**

368 MECANIQUE CELESTE, on aura  $m r i \{ = 1 l^{\wedge} . j ( l - i g j . c O S .$   
 $(\ll '-v)+|\hat{e} . C O S . (\ll '+V-20') j m^{\wedge} m' r ((i — Y e + 77 . \sin . y) . \cos . (v \sim v) + (7 e —$   
 $77 . \sin . y) . \cos . (u + w -- 2 d^{\wedge} | "" * I — Y p . \sin . y . \sin . (u — u) — 7 p . s i u . y . 8 i n .$   
 $(u + u \sim 2 \hat{O}') m' v / \backslash — 7 p . \sin . y . \sin . (w — u j — 7 p . s m . y . 8 i n . (u + t ; — 2 \hat{O} )$   
Maintenant, il est visible que Ton changera jR dans R, si Ton fait varier  
dans R,  $\hat{e}$  de J' $\hat{e}$ , v de J $\wedge$ v, et 0' de 5  $\hat{O}'$ , de manière que Ton ait  $5 \hat{e} = —^{\wedge} .$   
 $\sin . y , ( 1 — -j \hat{e} ) . h \backslash j = :: \cos \backslash \backslash y . S \backslash ) = ^{\wedge} — Y p . \sin . y , \hat{e} . 5 \hat{O}' — y \hat{e} . S v = — y / ) ,$   
 $\sin . y .$  On aura ainsi  $^{\wedge} = / ? - 9 . \sin . y . ( ^{\wedge} ) - p a a n g . i y . ( ^{\wedge} ) - ^{\wedge} . ( ^{\wedge} , , , / d i \hat{X} r f i \hat{t} ( d R \backslash , . 1$   
X . • on a par le  $n^{**} 1 , 1^{\wedge} — ) = — t . - h ( - j — l i c^{\wedge} l^{\wedge}$  pose, les équations (5) et  
(6) donneront les deux suivantes : , andt . /dR\ /qx En réunissant ces  
équations aux équations (i), (2), (3), (4), (7) du  $n^{**} 1$ , on aura, par la seule  
différentiation des termes du développement de / $\hat{i}$ , les termes  
correspondants de chacun des

**The text on this page is estimated to be only 23.20% accurate**

SUPPLEMENT AU TROISIEME VOLUME. 369 éléments du mouvement de m; ce qui facilite extrêmement le calcul de ces différents termes. Soit  $mk \cdot \cos. [i'nt - int - i'e' - le - g^{\wedge} - g'^{\wedge} - 2 g'' 0']$  un des termes du développement de R; le terme correspondant du demi-grand axe sera  $-rj - , - : - . / c . \cos. [int - i / if - f - ie - le - gts - g^{\wedge} m - 2^{\wedge} 0]$ ; le terme correspondant du mouvement moyen sera  $-rn - f - r - T . a / c . sm.$  Unt  $- iTif - hie - le - q^{\wedge} - ans - 20 0$ ;  $[i n - inf^{\wedge} j j j /$  le terme correspondant de Tépoque sera le terme correspondant de Texcentricité sera  $m'n.V/i - \bullet , jfl + i (1 - \sqrt{T^{\wedge} M} / v / ^{\wedge} . , , , , , , , ^{\wedge} . ^{\wedge} . afc. '^ ! ; ; \ ^{\wedge} . \cos. (i / if - mf + ie - le - ^{\wedge} ftsy - ^{\wedge} lar - 2^{\wedge} 0 )$ ; celui de la longitude du périhélie sera le terme correspondant de p sera TOME III.  $^{\wedge} 7$

370 MECANIQUE CELESTE, enfin le terme correspondant de (]  
sera  $2m'n.ak [i'n - in). s \backslash n, y. \sqrt{i - e' \backslash g'' + [in + g) \sin \backslash \backslash y. j. \cos. [int - int + ie -$   
 $ie - g^{\wedge} - g^{\wedge'} - g^{\wedge'}$  Ces résultats sont conformes à ceux que Ton a trouvés  
dans le chapitre viii du second livre de la Mécanique céleste; mais ils ont  
sur eux l'avantage de s'étendre à toutes les puissances des excentricités et  
des inclinaisons. On aura les variations séculaires des éléments de l'orbite  
de m, en réduisant i $\hat{t}$  à sa partie non périodique, que nous désignerons par m  
F. Alors à R est nul, ainsi que da, et l'on a d e:  $i \sim c > , ^{\wedge} J d F \backslash a \backslash ! -- < fe = -$   
 $''' \circ '''' V' - f. (j \pounds V e \backslash de 1 , ^{\wedge} am'ndt. \backslash J - e' . , -. [dF \backslash . (dF \backslash , , , am'ndt / dF \backslash j$   
 $am'ndt / dF \backslash$  ou  $j am'ndt . / dF \backslash$  On peut observer ici que R étant égal à  
 $\{xx' + yy + zz\} m' M . J ,$

SUPPLEMENT AU TROISIÈME VOLUME. 371 il est, aux quantités près de Tordre  $rn$  égal à ,  $[x.ddx+y.ddy'-i-z.ddz) m — ^' 5r 7'$  sa partie non périodique ne dépend donc que de la partie non périodique de ; F est donc égal à la partie non périodique de , développé en série de cosinus d'angles croissants proportionnellement au temps t; en sorte qu'il est le même pour les deux planètes. En faisant varier dans F les éléments de l'orbite de m, et substituant pour Se, ha, hp, hq, leurs valeurs données par les intégrales des équations différentielles précédentes , on voit que SF se réduit à zéro; et la même égalité a lieu relativement aux éléments de l'orbite de m ; ce que j'ai démontré dans le n° 5 du sixième livre de la Mécanique céleste, en ne portant l'approximation que jusqu'aux termes de l'ordre des quatrièmes puissances des excentricités exclusivement. On a par ce qui précède,  $S\hat{e} = — g\text{-sin-}y$ ,  $SB'= r \text{ sm. } 7$  Supposons que  $h^{\wedge}$  et  $Zff$  croissent respectivement des quantités de et  $dB'$  ; on aura  $(/€ = — c?g. \text{ sin.}y$ ,  $dB'=\wedge r-$  ; substituant pour dp et dq leurs valeurs, on aura

372 MÉCANIQUE CÉLESTE. On a  $(dF)_{\theta} = (dF)_{\theta} (d\theta) \sim [d\theta]$  parce que  $F$  étant développé en cosinus de la forme  $H \cos \theta$ .

SUPPLÉMENT AU TROISIÈME VOLUME. 373 section des  
deux orbites, produit par l'action de  $n$  et rapporté à l'orbite de  $m$ .  
Concevons un plan intermédiaire entre ceux des deux orbites, et qui passe  
par leur intersection mutuelle. Nommons  $^{\wedge}$  l'inclinaison de l'orbite de  $m$  à ce  
plan. Pour avoir le mouvement différentiel du nœud de l'orbite de  $m$  sur ce  
plan, produit par l'action de  $m$ , il faut multiplier la valeur précédente de  $dB'$   
par  $\cdot ^{\wedge}$ . En nommant donc  $dQ$  ce mouvement, on aura  $^{\wedge} sm$ .

374 MÉCANIQUE CELESTE. Ces deux équations donnent encore les suivantes :  $\frac{dm}{dt} \sin. y \cdot \frac{1}{r^2} \frac{dr}{dt} \sin. y \sin. \theta = - \frac{d\theta}{dt} \sin. (p - \theta)$ ,  $c \cos. (p - \theta) = J, -f$ , Désignons par  $r$ , et  $r'$ , les distances des périhélies de  $m$  et de  $m'$ , à la ligne d'intersection mutuelle des orbites; on aura  $dm$  en retranchant de la différentielle ( $\frac{d}{dt}$ , le mouvement  $dO$  de cette intersection rapporté à l'orbite de  $m$ ; et il est visible qu'il suffit pour cela de le multiplier par  $\cos.$



SUPPLEMENT AU TROISIÈME VOLUME. 375  $e, e \sin \tau$  et  $lar$ . On pourra même leur donner une forme plus simple encore, en faisant  $h = e \sin \tau$ ,  $l = e \cos \tau$ ,  $h = e \sin \tau$ ,  $l = e \cos \tau$ , ce qui les rend linéaires, lorsque Ton néglige les puissances supérieures des excentricités, et ce qui facilite leur intégration, étendue par approximation à des puissances quelconques des excentricités. On aura ainsi que la position des orbites relative à la position variable de la ligne de leur intersection mutuelle. On aura ensuite leur inclinaison respective, au moyen de la valeur précédente de  $\tau$ , et l'on en conclura leurs inclinaisons sur le plan du maximum des aires, au moyen des valeurs précédentes de  $\sin \tau$  et de  $\sin \tau$ . Enfin on aura le mouvement de l'intersection des deux orbites sur ce plan, en intégrant l'expression précédente de  $d\tau$ . Telle est, si je ne me trompe, la solution la plus générale et la plus simple du problème des variations séculaires des éléments des orbites planétaires. Reprenons l'équation  $c \cdot \frac{m}{m-t-m} \ll -2mmy/\hat{e}$ . Si l'on néglige les quantités de l'ordre des quatrièmes puissances des excentricités et des inclinaisons, elle donnera  $\frac{1}{m} \frac{dm}{dt} = -\frac{m}{a} \frac{da}{dt}$ ,  $S \text{ const.} = 7uya \cdot \frac{1}{a} \frac{da}{dt} = -\frac{m}{a} \frac{da}{dt}$ ;  $m \frac{da}{dt} + m' \frac{da'}{dt}$  ainsi  $a$  et  $a'$  étant, par ce qui précède, constants même en ayant égard au carré de la force perturbatrice, on aura  $o = zmya \cdot \frac{1}{a} \frac{da}{dt} = -\frac{m}{a} \frac{da}{dt}$ ;  $m \frac{da}{dt} + m' \frac{da'}{dt}$

376 MÉCANIQUE CÉLESTE. équation à laquelle je suis parvenu dans le n° 5 du sixième livre, en n'ayant égard qu'aux grandes inégalités de Jupiter et de Saturne. Il en résulte que le plan invariable déterminé dans le n° 62 du second livre reste invariable, en ayant même égard au carré de la force perturbatrice. 4. On peut, au moyen des expressions différentielles des éléments, déterminer d'une manière fort simple l'influence de la figure de la terre sur les mouvements de la lune. On a vu dans le second chapitre du septième livre que cette action ajoute à la valeur de R la fonction  $(\frac{p}{D}) \cdot (f' - f)$ :  $\frac{p}{D}$  est l'aplatissement de la terre;  $\frac{p}{D}$  est le rapport de la force centrifuge, à la pesanteur, à l'équateur; D est le rayon moyen du sphéroïde terrestre; et  $f$  est le sinus de la déclinaison de la lune, sinus qui par le numéro cité est à fort peu près  $\sin \lambda \cdot \sin \nu - \frac{1}{2} \cos X$ , ou exactement  $\sin \lambda \cdot \sin \nu + \frac{1}{2} \cos X$ ,  $f'$  étant la longitude vraie de la lune, comptée de l'équinoxe du printemps, X étant l'obliquité de l'écliptique, et  $\nu$  étant la tangente de la latitude de la lune. La partie de R dépendante de l'action du soleil est de la forme  $r^2 Q$ , en négligeant les termes qui, dépendant de la parallaxe du soleil, sont très-petits. On aura ainsi à fort peu près  $R = r^2 Q + \frac{p}{D} \cdot \frac{1}{2} \cdot (\sin^2 \lambda \cdot \sin \nu + \cos X)$ ; ce qui donne

# SUPPLEMENT AU TROISIEME VOLUME. 377 Ne

considérons ici que les inégalités dépendantes de Tangle  $g^{\wedge} - f o^{\wedge} g v$  étant ce que l'on nomme Y argument de latitude; en sorte que Ton a à fort peu près  $s = y . s m . g v$ , y étant Tinclinaison de Torbe lunaire à Técliptique. On aura ainsi  $R = r^{\wedge} Q^{\wedge} [ \% p - Y a (^{\wedge}) . - y . \sin . X . \cos . X . y . \cos . (9 V - f u ) , 2 a M - - 7 - j = : 4 a . r^{\wedge} Q - 6 (a p - y a^{\wedge}) . - j . \sin . X . \cos . X . y . \cos . \{ g \setminus j - f u \} .$  On a vu dans le n<sup>o</sup> 1 que la variation de dR est nulle, en ayant même égard au carré de la force perturbatrice ; le coefficient de  $\cos . [ g v - f v )$  dans R doit donc être nul. Désignons par la caractéristique 5 placé devant une fonction, la partie de cette fonction qui dépend de Taplailissement de la terre; nous aurons  $o = 5 . r^{\wedge} Q H - (a p - y a^{\wedge}) . - ^{\wedge} . \sin . X . \cos , X . y . \cos . (5 f v - f v ) ;$  d'où l'on tire 2  $5 . a M^{\wedge} - 1 = - l o . [ a p - Y a ( p ) . - Y . \sin . X . \cos . X . y . \cos . (9 V - f u ) .$  Reprenons maintenant l'expression de tZe, du n<sup>o</sup> 1, , andt.yJi — e' , , / - . /dR\ , fdR\ . Il est facile de voir que si l'on né^ige Texcentricité de l'orbite, on aura de = '2a\ l-^\.ndt; et par conséquent, en n'ayant égard qu'au cosinus de l'angle  $g v - f v$ , et substituant dv pour ndt, on aura de= — io {ap — Ya(p).— 7.sin. X. cos.X.y.e/u.cos.^v — fu). TOME III. 48

378 MÉCANIQUE CÉLESTE. La valeur de  $\delta$  est ici rapportée au plan de Torbite lunaire : pour la rapporter à Téquiptique, il faut, par le n° 5 du sixième livre, lui ajouter la quantité  $\delta \cos \epsilon$ . Déterminons présentement  $\delta$  et  $\eta$ . L'équation  $\delta = y \sin \alpha \cos \beta$  peut être mise sous cette forme :  $\delta = y \cos \alpha \sin \beta - y \sin \alpha \cos \beta$  ; en la comparant à celle-ci :  $\delta = z(j \sin \alpha \cos \beta - p \cos \alpha \sin \beta)$  ; on aura  $p = -y \sin \alpha \cos \beta / (j \sin \alpha \cos \beta - p \cos \alpha \sin \beta)$ ,  $cj = y \cos \alpha \sin \beta / (j \sin \alpha \cos \beta - p \cos \alpha \sin \beta)$  ; ce qui donne  $cj = \{g - f\} p dv$ . La valeur de  $jK$  renfermant le terme  $(ap - a(p) \cos \alpha) \sin \alpha \cos \beta$  ; elle ajoute, par les équations (5) et (6) du n° 1, à la valeur de  $dp$ , le terme  $-(ap - a(p) \cos \alpha) \sin \alpha \cos \beta$  ; on a ainsi les deux équations  $dp = -[g - f] \cdot 9 \cdot dv - (ap - a(p) \cos \alpha) \sin \alpha \cos \beta$  ; Ces équations donnent dans l'expression de  $q$  le terme constant  $9 - f$  «'

SUPPLEMENT AU TROISIÈME VOLUME. 379 d où résulte dans la latitude s l'inégalité  $\frac{d^2 s}{dt^2} = S \sin A \cos A y \sin f_v$ , ce qui est conforme au résultat du chapitre ii du septième livre. Le terme constant de  $c_j$  donne, dans la fonction  $P$  le terme  $Y (ap - Ya)$ . —  $\frac{d^2 s}{dt^2} \sin X \cos X y dv \cos [gv - fv]$ ; en nommant donc  $J_e$ , la valeur précédente de  $de$ , rapportée à l'écliptique, on aura  $J_e = -y (ap - t^*) - r \frac{d^2 X}{dt^2} \cos X y dv \cos [gv - fu]$ , ce qui donne dans  $e^y$  et par conséquent dans le mouvement de la lune en longitude, l'inégalité  $Y \frac{d^2 s}{dt^2} - Y \sin X \cos X y \sin [gv - fu]$ ; résultat entièrement conforme à celui du second chapitre du septième livre. Enfin, la fonction  $R$  étant indéterminée, les expressions différentielles précédentes des éléments des orbites peuvent également servir à déterminer les variations qu'ils reçoivent, soit par la résistance de milieux éthérés, soit par l'impulsion de la lumière solaire, soit par les changements que la suite des temps peut apporter dans les masses du soleil et des planètes. Il suffit pour cela de déterminer la fonction  $R$  qui en résulte, par les considérations exposées dans le chapitre vu du dixième livre. 48.

380 MECANIQUE CELESTE. Sur les deux grandes inégalités de Jupiter et de Saturne. 5. Dans la théorie de ces inégalités, exposée dans le sixième livre, j'ai eu égard aux cinquièmes puissances des excentricités et des inclinaisons des orbites. Mais j'ai reconnu que les valeurs de  $N^{\wedge} 1 S^{\wedge}$  etc. du n° 7 du sixième livre, avaient été prises avec un signe contraire, et qu'ainsi la partie de ces inégalités dépendante de ces valeurs doit changer de signe. Il faut donc ajouter aux expressions des longitudes moyennes, que j'ai données dans le huitième chapitre du dixième livre, le double de cette partie prise avec un signe contraire. Cette partie pour Jupiter est par le n° 33 du sixième livre,  $(38'',69257i - f.o'',0054i8). \sin. [bnt - 27i''^{\wedge} f-f-5e'^{\wedge} - 2e'') - (2 \hat{o}^o G d y o 1 - h t. o^o 1 807 6). \cos. [Snt - 2 7i'7- \} - \hat{o}e'^{\wedge} - 2 e'') ;$  et pour Saturne, elle est, par le n° 35 du même livre, —  $(89',95244o - t. o'',oi2 596). \sin. [Snt - 2n''^{\wedge} M-5e'^{\wedge} - 2^{\wedge} ) - i-(58'',2 7o353 - f-^{\wedge} o \backslash o35o48). \cos. (571^{**} - 27i''^{\wedge} f-h5e'^{\wedge} - 2e'^{\wedge}).$  L'addition aux longitudes moyennes de Jupiter et de Saturne, du double de ces inégalités prises avec un signe contraire, ne doit changer que les moyens mouvements et les époques de ces deux planètes : elle ne peut altérer que d'une manière insensible les autres éléments elliptiques conclus des observations faites depuis 1760 jusqu'en 1800; parce que dans cet intervalle les variations de ces inégalités sont à fort peu près proportionnelles aux temps : on peut donc déterminer les corrections des moyens mouvements de manière qu'elles rendent le double de ces inégalités affectées d'un signe contraire, nul en 1760 où  $t$  est nul, et en 1800 où  $t=b_o$ . On trouve ainsi, en ayant égard à la correction de la masse de Saturne, trouvée dans le chapitre viii du livre X,

SUPPLEMENT AU TROISIEME VOLUME. 381 qu'il faut ajouter à la longitude moyenne  $9''$  de Jupiter, donnée dans le même chapitre, la fonction  $5r,98-f.f.o',4i56 - (73'',58 -f. o^{\circ}lo3o).sin. [bnt - an'^t-f-ôe'^ - 2e'') -t- (47\backslash65 -h f. 0^{\circ}02870). COS. (57i''f - 27i'''f-f-5e'' - 2e'')$ ; et à la longitude moyenne  $9''$  de Saturne, donnée dans le même chapitre, la fonction  $127',l3 t. 1^{\circ}0212 -f-(i79',952 - f. o^{\circ}o25i92).sin. [5nt - 27i'''^f-t-5e'' - 2e'') - (11 6'',54 1 H- 1. o^{\circ}o70 1 96) . COS. (571^{*} - 27i'''< -h 5e'' - 2 e'') .$  Ces corrections ont Tavantage de rapprocher les formules des mouvements de Jupiter et de Saturne, données dans le chapitre cité, d'une observation très-précieuse d'Ebn-Junis, et qui, réduite au méridien de Paris, eut lieu le 3i octobre 1007, à oJ,i6. Les formules citées donnent  $2 25i''$  pour l'excès de la longitude géocentrique de Saturne sur celle de Jupiter à cet instant, et l'astronome arabe la trouva par son observation, de  $4444''$ ; la différence est  $2193''$ ; mais les corrections précédentes augmentent de  $1198''$  l'excès de la longitude de Jupiter sur celle de Saturne, et rapprochent conséquemment de cette quantité les formules de l'observation, qui n'en diffère plus que de  $995''$ , ou d'environ cinq minutes sexagésimales; ce qui est bien inférieur à l'erreur dont cette observation est susceptible. FIN DU TOME TROISIEME.

**The text on this page is estimated to be only 0.00% accurate**

// 9W

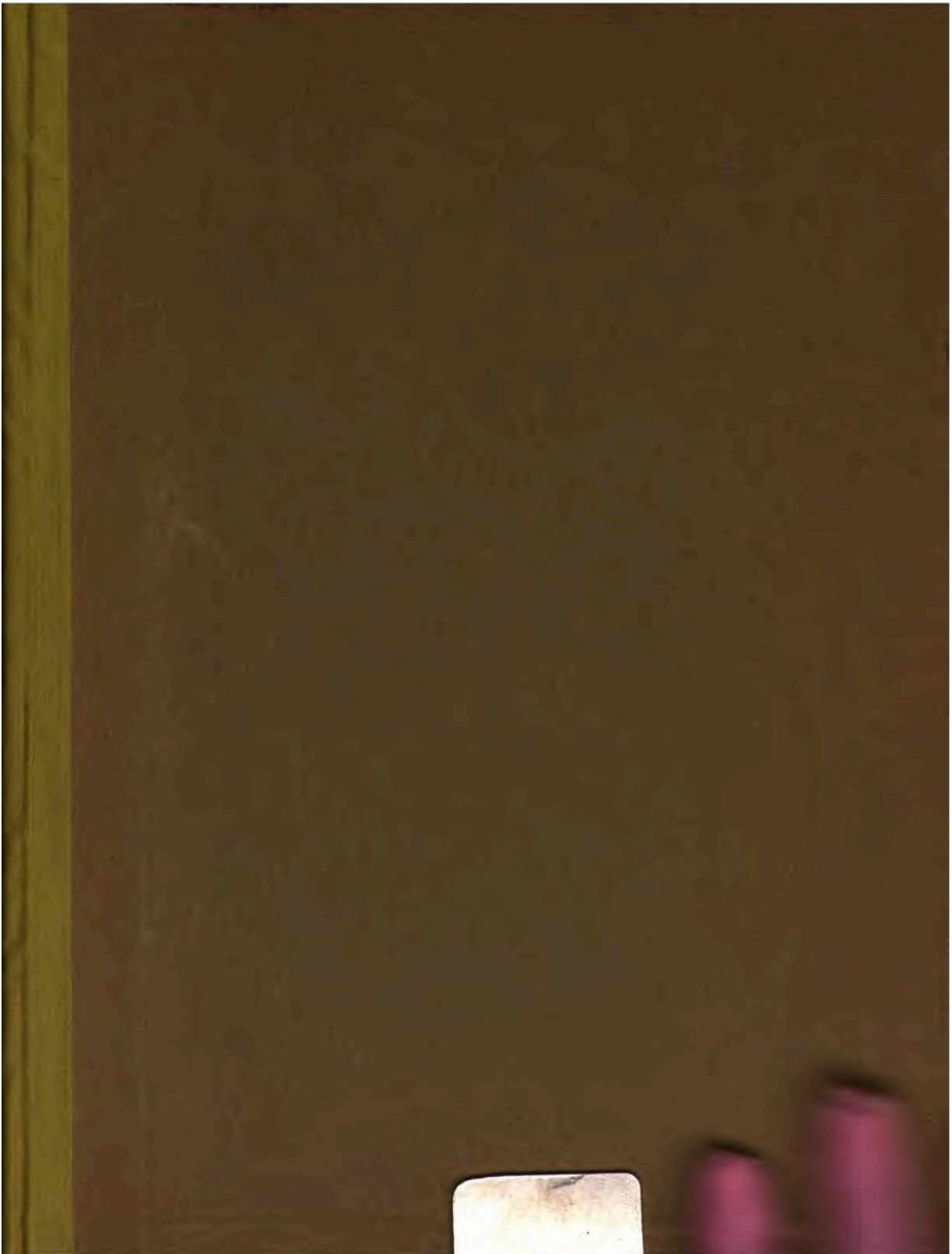


**The text on this page is estimated to be only 0.00% accurate**

5;] -À







**The text on this page is estimated to be only 0.00% accurate**

$$5^{\wedge}7\ c^{\wedge}4\bullet:rW$$





