

This book was produced in EPUB format by the Internet Archive.

The book pages were scanned and converted to EPUB format automatically. This process relies on optical character recognition, and is somewhat susceptible to errors. The book may not offer the correct reading sequence, and there may be weird characters, non-words, and incorrect guesses at structure. Some page numbers and headers or footers may remain from the scanned page. The process which identifies images might have found stray marks on the page which are not actually images from the book. The hidden page numbering which may be available to your ereader corresponds to the numbered pages in the print edition, but is not an exact match; page numbers will increment at the same rate as the corresponding print edition, but we may have started numbering before the print book's visible page numbers. The Internet Archive is working to improve the scanning process and resulting books, but in the meantime, we hope that this book will be useful to you.

The Internet Archive was founded in 1996 to build an Internet library and to promote universal access to all knowledge. The Archive's purposes include offering permanent access for researchers, historians, scholars, people with disabilities, and the general public to historical collections that exist in digital format. The Internet Archive includes texts, audio, moving images, and software as well as archived web pages, and provides specialized services for information access for the blind and other persons with disabilities.

Created with hocr-to-epub (v.1.0.0)

Google This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online. It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover. Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you. Usage guidelines Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying. We also ask that you:

- + Make non-commercial use of the files We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for Personal, non-commercial purposes.
- + Refrain from automated querying Do not send automated queries of any sort to Google's System: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + Maintain attribution The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + Keep it legal Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe. About Google

Book Search Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>

Google A propos de ce livre Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne. Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public. Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains. Consignes d'utilisation Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées. Nous vous demandons également de: + Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial. + Ne pas procéder à des requêtes automatisées N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter Nous encourageons pour la réalisation de ce type de

travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile. + Ne pas supprimer l'attribution Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas. + Rester dans la légalité Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère. A propos du service Google Recherche de Livres En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse <http://books.google.com>

The text on this page is estimated to be only 1.40% accurate

•^ f\ ■}9 '~\

The text on this page is estimated to be only 8.50% accurate

I 1

The text on this page is estimated to be only 16.45% accurate

JM&ES ENCES DE PARIS CES MATHÉMATIQUES, ARD,
Brest. Mon EUCLIDIENNE. 6k8 par la Faculté. la Commission d'Examen.
PRIMEURS-LIBRAIRES 'école POLYTECHHIQUE, lins, 55.

The text on this page is estimated to be only 21.95% accurate

N° D'ORDRE THÈSES 768. PRÉSENTÉES A U FACULTÉ
DES SCIENCES DE PARIS POUR OBTENIR LE GRADE DE DOCTEUR
EN SCIENCES MATHÉMATIQUES, Par M. L'ÉRARD, Professeur au
Lycée de Brest. Ire THÈSE. — Sur la Géométrie non euclidienne. 2°
THÈSE. — Propositions données par la Faculté. Soutenues le décembre
1892 devant la Commission d'Examen. MM. APPELL, Président.
POINCARÉ, , _ , _ } Examineurs, PÉCARD, PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES DU
BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, Quai
des Grands-Augustins, 55. 1892

G3^ ACADÉMIE DE PARIS. FACULTÉ DES SCIENCES DE
 PARIS. !...« DOYEN PROFSSSBURS ADJOZJSTS. MM. DARBOUX. \
 PASTEUR. j DUCHARTRE. DE LACAZE-DUTHIERS HERMITE
 TROOST. FRIEDEL. N TISSERAND LIPPMANN HAUTEFEUILLE.
 BOUTY APPELL DUCLAUX BOUSSINESQ. .. PICARD. POINGARE
 Yves DELAGE. 1 BONNIER DASTRE DITTE MUNIER-CHALMAS
 GIARD WOLF.. GHATIN JOLY PHILIPPON. Géométrie supérieure.
 Botanique. Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée. Algèbre supérieure.
 Ghimie. Chimie organique. Astronomie. Astronomie. Physique.
 Minéralogie. Physique. Mécanique rationnelle. Ghimie biologique.
 Mécanique physique et expérimentale. Galcul diiiérentiel et Galcul intégral.
 Galcul des probabilités, Physique mathématique. Zoologie, Anatomie,
 Physiologie comparée. Botanique. Physiologie. Ghimie. Géologie.
 Zoologie, Évolution des êtres organisés. Physique céleste. Zoologie,
 Anatomie, Physiologie comparée. Ghimie. 18988 PARIS. —
 IMPRIMERIK GAUTHIER' YILLARS ET FILS, QUAI DES GRANDS-
 AUGUSTINS, 55.

The text on this page is estimated to be only 28.06% accurate

A Monsieur Paul APPELL, MEMBRE DE l'INSTITUT,
PROFESSEUR A LA SORBONNE Hommage de reconnaissance. Louis
GÉRARD

PREMIÈRE THÈSE. SUR LA GÉOMÉTRIE NON
 EUCLIDIENNE. AVANT-PROPOS. Dans la première Partie de ce travail,
 j'expose une méthode nouvelle pour établir les formules fondamentales de
 la Géométrie non euclidienne, en partant de cette remarque que : Si l'on
 désigne par L une longueur arbitraire, il existe un nombre correspondant X
 tel que, dans tout quadrilatère $ABCD$ qui a trois angles droits A, B, C , on ait
 « on en déduit immédiatement la relation qui existe entre les trois côtés d'un
 triangle rectangle et, par suite, toutes les autres formules. c D B Je n'ai pas
 cru devoir employer les procédés du Calcul infinitésimal, qui masqueraient
 l'enchaînement des raisonnements géométriques, sans apporter de
 simplifications notables. En outre, je me suis astreint à la condition de ne
 raisonner que sur des figures que l'on sache construire. i i G. I ^'

(o Cette condition, qu'Euclide s'est imposée comme une règle inflexible, n'est plus guère observée aujourd'hui; on a été jusqu'à dire que c'est une pure règle de jeu indigne de la Géométrie (*). Il semble pourtant qu'elle soit indispensable si l'on veut réduire au minimum le nombre des postulats qu'on est obligé d'admettre sans démonstration. En effet, la possibilité des constructions qu'on effectue avec la règle et le compas repose uniquement sur quatre hypothèses parfaitement définies : 1° Par deux points on peut faire passer une droite; 2° On peut tracer un cercle ayant pour centre un point donné et pour rayon une longueur donnée; 3° Une droite qui rencontre le périmètre d'un polygone en un point autre que l'un des sommets le recoupe en un ou plusieurs autres points; 4° Deux lignes droites, ou deux cercles, ou une ligne droite et un cercle se rencontrent, si l'une de ces deux lignes a des points situés de part et d'autre de l'autre. Au contraire, si, comme Lobatschewsky et Bolyai, on considère des figures que Ton ne sache pas construire, par exemple, des droites parallèles (^), des horicycles, des horisphères, etc., on est obligé ou d'admettre l'existence de toutes ces figures comme autant d'hypothèses distinctes, ou d'en démontrer la possibilité par des considérations de continuité, ce qui revient à invoquer un principe assez mal défini qu'on peut appeler le principe de continuité. A\ est bien difficile d'énoncer ce principe sous une forme assez précise pour servir de base à un raisonnement et assez générale pour embrasser tous les cas; et, quand même on y serait arrivé, on peut toujours se proposer d'établir les relations qui existent entre les éléments d'un triangle indépendamment de ce principe et en s'appuyant seulement sur les quatre hypothèses énoncées plus haut. C'est ce que j'ai essayé de faire. (*) WILSON MA., Euclide comme texte de Géométrie élémentaire. Mémoire lu à la Société mathématique de Londres (Gior/ta/e di Mat., p. 364; 1868). (') Il est vrai que Bolyai indique le moyen de construire des parallèles, mais ce n'est qu'après avoir établi les formules fondamentales.

(3) D'ailleurs, a priori, l'idée qui se présente naturellement à l'esprit pour découvrir la relation qui lie les côtés d'un triangle rectangle, c'est de tracer un réseau de perpendiculaires. Il est permis de croire que Lobatschewsky et Bolyai n'auraient jamais songé à l'horicycle et à l'horisphère s'ils ne s'étaient pas proposé avant tout de trouver une surface k laquelle puissent s'appliquer tous les raisonnements de la Géométrie euclidienne. M. Battaglini (*) détermine directement la relation qui existe entre les deux côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle et l'un des angles aigus; mais sa démonstration, que MM. Rouché et de Comberousse ont reproduite dans leur *Traité de Géométrie*, n'est peut-être pas à l'abri de toute objection. Dans la deuxième Partie, je commence par établir succinctement les formules de la Géométrie analytique non euclidienne en définissant la position d'un point dans le plan par trois coordonnées X, Y, Z liées par la relation $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$. Ce système de coordonnées donne des formules tout à fait analogues à celles de la Géométrie sphérique; il se prête très bien à la considération des points idéaux et permet de distinguer les points situés sur le recto et sur le verso du plan, absolument comme on distingue, en Géométrie sphérique, les points diamétralement opposés : cette distinction paraît nécessaire pour la généralité de certaines théories, par exemple, pour le théorème de Ménélaüs et pour la puissance d'un point par rapport à un cercle. Ensuite, je passe en revue les diverses constructions qu'on peut faire en Géométrie non euclidienne avec la règle et le compas, et je démontre qu'il est impossible de construire la longueur rL , définie plus haut, que Bolyai appelle Y unité naturelle de longueur (^). Enfin, dans la troisième Partie, qui est très courte, je me propose uniquement de montrer qu'on peut présenter d'une manière très simple la mesure des aires des polygones en ne considérant deux poly(1) SuUa *Geometria immaginariti di Lobatschewsky* {Giornale, p. 217). {') Bolyai, Appendix, 11° 33.

(4) gones comme équivalents que dans le cas où ils sont formés de parties superposables chacune à chacune, et en s'affranchissant de l'axiome de non-contradiction. Pour cela, il faut démontrer : 1^o Que deux polygones quelconques A et B sont comparables, c'est-à-dire que l'on peut toujours : Ou bien décomposer A et B en parties superposables chacune à chacune, Ou bien décomposer A en deux parties dont l'une soit équivalente à B, Ou enfin décomposer B en deux parties dont l'une soit équivalente à A; 2^o Que ces trois manières d'être des deux polygones A et B sont incompatibles; par exemple, si l'on a pu décomposer A en deux parties dont l'une soit équivalente à B, il sera impossible de décomposer B en parties avec lesquelles on puisse recouvrir tout le polygone A. Le premier de ces deux théorèmes est indispensable à tous les points de vue; quant au second, on pourrait sans doute l'ériger en axiome s'il était indémontrable; mais il ne l'est pas : il est même susceptible d'une démonstration très simple, aussi bien en Géométrie euclidienne qu'en Géométrie non euclidienne. Ouvrages consultés. Lobatschewsky, Etudes géométriques sur la théorie des parallèles. — Pan^{lo} geometria (traduction italienne, Giornale di Mat.; 1867). Liotta, Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens (traduction italienne, Giornale di Mat. ; 1868). Battaglini, Sulla Geometria immaginaria di Lobatschewsky (Giornale ; 1867). Beltrami, Saggio di interpretazione della Geometria non euclidea {Giornale di Mat.; 1868). Klein, Ueber die sogenannte nicht-euklidische Geometrie {Math. Ann.; 1871). F. Sainte-Marie, Études analytiques sur la théorie des parallèles. Cassanese, Geometria rigorosa. De Tilly, Essai sur les principes fondamentaux de la Géométrie et de la Mécanique {Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux; 1880). Rouché et De Comberousse, Traité de Géométrie (Note II de la sixième édition).

(^>) PRELIMINAIRES 1. On dit que deux portions de droite AU, CD sont égales quand elles sont superposables. En supposant qu'on ait pu faire coïncider CD avec AB en mettant le point C sur le point A, il n'est pas évident qu'on puisse faire coïncider CD avec BA en mettant le point C sur le point B : il faut le démontrer. Pour cela, M. de Tilly {loc. cit., p. 47) considère le milieu 0 de AB, c'est-à-dire, comme il le dit lui-même, un point 0 tel que $OA = OB$; en effet, si l'on admet l'existence de ce point, on pourra faire coïncider Bx\ avec AB et, par suite, avec CD. Mais l'existence de ce point milieu est moins évidente que le théorème que nous voulons démontrer; il convient donc d'éviter la considération de ce point. Supposons qu'on ait transporté le segment CD de façon que le point C coïncide avec le point B {fig. 1), et qu'on le fasse tourner Fig. I. D D' » autour de ce point jusqu'à ce qu'il vienne s'appliquer sur BA : il s'agit de démontrer que le point D tombera sur le point A. En effet, supposons qu'il tombe en un point D' situé entre B et A; alors, en faisant tourner BD'A en sens inverse jusqu'à ce que le point D' revienne en D, le point A viendra se placer en un point A' situé sur le prolongement de CD. D'autre part, si l'on fait glisser le segment CD' jusqu'à ce que l'extrémité D' soit venue se placer en D'' sur le point A, l'origine C

(6) prendra une certaine position C'' entre B et A. Actuellement, transportons le système des deux segments $A'B$, CD sur le système des deux segments CD'' , AB ; comme les segments $A'B$ et $C''D''$ sont la reproduction des segments AB et CD , on peut appliquer, en vertu de l'hypothèse, $A'B$ sur CD'' , le point A' sur le point C et le point B sur le point D'' ; mais alors il arrive que le point C se trouve placé en A, et le point D entre A et C'' , par conséquent entre A et B, ce qui est contre l'hypothèse. Donc il est impossible que le point D' tombe entre B et A. On démontrerait de la même façon qu'il ne peut pas tomber sur le prolongement de BA ; donc il tombe au point A. c. q. f. d. On appelle somme de plusieurs portions de droites la portion de droite obtenue en les portant, à la suite les unes des autres, sur une même ligne droite. On dit qu'une droite A est plus grande qu'une droite B, ou que B est plus petite que A, si l'on peut trouver une troisième droite C telle que $A = B + C$. En s'appuyant sur les définitions et le théorème qui précèdent, on démontre (*) que : 1° L'addition des portions de droites est une opération associative et commutative; 2° Entre deux portions de droites A et B, il existe l'une des trois relations $A = B$, $A > B$, A

(7) On peut trouver un multiple de B qui dépasse A (*) : $iB > A$. On en déduit -A

(«) CHAPITRE L TRIGONOMÉTRIE. 4. On sait (voir Éléments de Legendre ou Géométrie de MM. Rouché et de Gombrousse) que la somme des trois angles d'un triangle ne peut surpasser deux angles droits et que, s'il existe un triangle pour lequel cette somme soit égale à deux angles droits, il en sera de même pour tout autre triangle. Donc il n'y a que deux hypothèses possibles : ou la somme des trois angles est égale à deux angles droits dans tous les triangles, ou bien elle est dans tous moindre que deux angles droits. La première hypothèse conduit à la Géométrie ordinaire. La seconde sert de base à la Géométrie que Gauss a appelée Géométrie non euclidienne, et que je me propose d'établir après Lobatschewsky, Bolyai, etc. Nous supposons donc que la somme des trois angles d'un triangle quelconque est moindre que deux angles droits; par conséquent, la somme des angles d'un polygone de n côtés est moindre que $2/1 - 4$ angles droits. On appelle déficit du polygone ce qui manque à la somme de ses angles pour faire $2/1 - 4$ angles droits. Si l'on décompose un polygone en deux autres, on voit facilement que le déficit du polygone total est la somme des déficits des polygones partiels; par conséquent, le déficit du premier polygone est plus grand que le déficit de chacun des deux autres. 5 . Si, dans un quadrilatère ABCD {fig* 2) qui a deux angles droits A et B, les côtés AD et BC sont égaux, les angles C / D sont aussi égaux. Menons une perpendiculaire à AB en son milieu E : cette perpendiculaire ne pouvant rencontrer ni AD, ni BC coupe CD en un point F. Plions la figure autour de EF, le quadrilatère EBCF vient s'appliquer sur le quadrilatère EADF, et l'angle C coïncide avec l'angle D; donc ces deux angles sont égaux. D'ailleurs, ils sont aigus, puisque la somme

(9) des angles du quadrilatère ABGD est moindre que quatre angles droits. L'égalité des quadrilatères EBCF et EADF montre aussi que EF est perpendiculaire à CD en son milieu. 6. Si, dans un quadrilatère ACoc ($\angle$ 3) qui a deux angles droits a et c, l'angle A est droit ou obtus, le côté Aa est moindre que le côté opposé Ce. Par le milieu b de ac, élevons sur ac une perpendiculaire, qui rencontre AC en un point B situé entre A et G. Comme l'angle A est droit Fig. 3. ou obtus, l'angle AB6 est aigu : donc 6BG est obtus; par conséquent, si l'on plie la figure autour de Bb, BA tombe à l'intérieur de l'angle obtus bBC, et le point A vient en un point A' situé entre c et G : donc $Gc > A'c = Aa$. On voit aussi que, le quadrilatère A'Bbc étant contenu dans le quadrilatère BGcè, le déficit de A'Bbc est moindre que celui de BCci, c'est-à-dire que le déficit de AB ba est moindre que la moitié du déficit du quadrilatère total ACca. Cette remarque sera utilisée plus loin. 7. Dans un quadrilatère ACca ($\angle$ 3 e/ 4) qui a deux angles droits a et c et un angle A droit ou obtus, si d'un point B du côté AG on abaisse G.

(10) $\hat{b}$ perpendiculaire sur $ac^{\wedge}ona Aa \hat{U}Cj$, «jj $a^{\wedge}$ étant le premier à partir de a , oc , le second, etc. Il est aisé de voir que ces segments vont en décroissant ('). Car soient DE , EF deux divisions consécutives de AB , DE étant la plus rapprochée du point A ; et soient de , ζ' leurs projections sur ac . Abaissons DP et FQ perpendiculaires sur Ee ; comme $DE = EF$, les triangles DEP , EFQ sont égaux : donc $DP = FQ$. D'ailleurs, l'angle DEe étant aigu, le point Q tombe sur le prolongement de eE , et le point P entre E et e ; donc la droite DP prolongée pénètre à l'intérieur du quadrilatère ζ/TQ , et, comme elle ne peut rencontrer ni ef , ni FQ , elle coupe (1) Voir, dans l'Ouvrage de M. de Tilly cité plus haut, p. 187, un raisonnement analogue.

(") F/en un point R situé entre/et F. Il en résulte (6) que RP est moindre que FQ, par conséquent moindre que DP. Dès lors, si l'on plie la figure autour de Pc, le point R tombera sur PD entre P et D et, par conséquent, le point/ tombera sur ec? entre eet d, de sorte que /< éd. Ainsi «1 1> «j I> «1 >> J'en conclus d'abord Ensuite, s'il arrive que BC soit un multiple exact de — > par exemple, $BC = n \cdot AB$, n on voit que donc bc^m — BC ab n AB d'où ac AC ab ^ AB' Mais, en général, BG est compris entre deux multiples consécutifs A AB de — : n - AB < BC < ^î-:tl AB. n n Dans ce cas ôc

(") Pour lever la difficulté, je considère le milieu H de BC, que je projette en h sur ac. D'après ce qu'on vient de voir, «6 = AB ' et donc 6c hh^
 BH _ BC ab^^ ab = ^ AB ~ AB* Autrement. Soiiip un entier tel que ^AB

(i3) abaissons DP et FQ perpendiculaires sur Ee; nous avons déjà dit que le point P tombe entre E et c, et le point Q sur le prolongement de eE. Donc $EP = Ee - Pe$, $EQ = Qe - Ee$; mais $EP = EQ$, donc $Ee - Pe = Qe - Ee$. Or (6) $Pe < Drf$ et $Qc < F/$, donc Ainsi J'en conclus d'abord B6-Aa= ((3,,p,,_)4-...4-(P,-P,-)+-((3,-l3o) 5) rectangle en c, si d'un point B

('4) de l* hypoténuse on abaisse B^e perpendiculaire sur A^c, on a $\sqrt{c^2 - AC^2} < \sqrt{b^2 - AB^2}$ («). Par exemple, si $AC = nAB$, n étant un nombre entier quelconque, on aura $CO < Bb$; par conséquent, étant donné un angle aigu $\angle xAy$ on pourra trouver sur l'un des côtés un point C dont la distance à l'autre côté surpasse Fig. 5. A $i \in i^{\wedge} c^{\wedge} \ll^{\wedge} A / Jcv$ n'importe quelle longueur donnée. C'est Aristote qui a le premier formulé cette proposition. Au contraire, Lobatschewsky a démontré que Ton peut assigner une longueur que la projection de AC ne puisse pas dépasser, quelque grand que soit AC. En effet, d'un point B de Ay abaissons Bb perpendiculaire sur Ax, désignons par co le déficit du triangle ABi, et prenons sur Ax une longueur $A^{\wedge} = 2A\&$; si la perpendiculaire à $A^{\wedge}$ au point d rencontre Ay en un point D, le déficit du triangle AD^ sera plus grand que 20) (6). De même, en faisant $Ae = 2Arf = 4Aft$, si la perpendiculaire à Ax au point e rencontre Ay en un point E, le déficit du triangle AE^ sera plus grand que 4- Et ainsi de suite. Ceci posé, soient A' le complément de l'angle A et /i un entier tel que $2\ll\hat{U}\gg A'$. (i) La première partie de ce théorème se trouve dans l'Ouvrage de M. de Tilly, déjà cité, p. 187.

(i5) Si nous prenons $kh = 2''A6$, il est impossible que la perpendiculaire à kx au point h rencontre $ky^\wedge$ car, en appelant H le point de rencontre, le déficit du triangle $\hat{A}HA$ serait plus grand que $2''()$ i), et par suite plus grand que A' , ce qui est impossible. Il faut en conclure que tous les points de ky se projettent sur kx entre A et A . c. q. f. d. 9. Soient ax et ky (Jig* 6) deux demi-droites perpendiculaires à une même droite Aa ; si, d'un point B de Ay , on abaisse Bi perpendiculaire Fig. 6. B. JL ** $Z \sim \text{---}$. ""ID B' F . ^ "T 1 1 '---^ 1 • I a/ JO AB à $ax^\wedge$ nous savons que le rapport— ^ va en décroissant à mesure que le points se rapproche du point A . Donc, si l'on fait tendre AB vers zéro, le AB rapport —r tend vers une limite, que nous désignerons par $/(aA)$. D'autre part, abaissons AB' perpendiculaire sur $B6$, et voyons comAB' ment varie le rapport—, quand ah diminue. Pour cela, prenons surate deux segments cfe, ç/* consécutifs et égaux de =. efy rfeétantleplus rapproché du pointa; par les trois points $rf,^\wedge$, /élevons des perpendiculaires à ax , et projetons le point A sur ces trois perpendiculaires en D', E', F' . Je dis que $AE' - AD' > AF' - AE'$. En effet, les points A, E' étant de part et d'autre de $D'rf$, la droite AE' rencontre D Ven un point D , et, comme $de = e?/$, elle rencontre aussi $F/$

(i6) en un point F tel que $DE' = E'F$ ou $AE - AD = AF - AE'$. Mais $AD > AD'$ et $AF > AF'$, donc $AE' - AD' > AF - AE'$. En partant de là et en raisonnant comme au n° 7, on démontre que AB' le rapport $\frac{AB}{AB'}$ augmente à mesure que ab diminue. Donc, si Ton fait tendre ab vers zéro, ce rapport tend, lui aussi, vers une limite, qui est nécessairement inférieure ou au plus égale à la limite $\frac{AB}{AB'}$ du rapport $\frac{AB}{AB'}$. Par conséquent, $\frac{AB}{AB'}$ i . De plus $\frac{AB}{AB'}$ augmente ou diminue en même temps que a . Car, prenons sur a une longueur $ak^{\wedge}$. Par conséquent, pour établir que $\frac{AB}{AB'} < \frac{AB}{AB'}$, il suffit de montrer que A,B , finit par devenir moindre que AB' . En effet, si l'on prend AB A,B ,. Nous allons maintenant chercher à déterminer la forme de la fonction $\frac{AB}{AB'}$. 10. Prenons sur le prolongement de ak {fig. 7) un point $A\odot$, par ce

The text on this page is estimated to be only 28.35% accurate

(«7) point menons une perpendiculaire à aA , et d'un point Bq de cette perpendiculaire abaissons Bo perpendiculaire sur ao ; soit B le point où Bq se rencontre la perpendiculaire Aj menée par le point A à la droite Art . Partageons aX en n parties égales, et, par les points de division $a_1, a_2, \dots$, menons des perpendiculaires à aA , qui rencontrent $6B$ en des points $b^1, b^2, \dots$. Abaissons ir et ia^1 perpendiculaires sur a^1b^1 , nous savons (7) que $6^1, 2^1 > **M$ donc il en résulte qu'en appelant 1 et m les points où $2^1, 2^m$ sont rencontrés par le prolongement de ir par la perpendiculaire à $a, 6$, au point $\&,$, on a (7) $ub^1 > tu$ ou $\hat{u}Ti^1$, — $a^1uy^1a^1u$ — a^1t . Mais, comme $aa^1 = a^1a^1$ il est clair que $a.j^1 = ab^1$ et, comme $a, 6, > a^1$, le théorème du n° 7 nous apprend que OU , en posant- 1 donc $= x$. $aj^1, > iXa^1b^1$ — ab . En opérant de même sur $ajfr$, «464, ..., on trouve que les $^1/e$, sont $G. 3$

The text on this page is estimated to be only 12.15% accurate

(,8) liés par les relations « $8^3 > 2Xa, ^{-} aibi$, d'où l'on tire) «, 6, $=^{\wedge}Mb, aibi > 'kaibi-h('k^{\sim} \backslash)ab, o^{\wedge}b^{\wedge} > la^{\wedge}b^{\wedge} -f. (X\ll-- i) (^a,b^{\wedge} 4- lab), a,b, > Xaj^j -4- (>.\ll _ i)(a,6, + X\ll, b, -h X\ll\ll^{\wedge})$, Si donc on pose (i) $I J?2 = 2>.a7, — I, I XiZzi 2X^{\wedge}, — ^{\wedge}, ^{\wedge} \blacklozenge$ ou $/ X, = x, (2)) ^j = Xa7, 4-(X\ll — i), i ^3 = X.r,-+-(X^*-i)(.r, -f-X). ' \gg$ comme $X^{\wedge} - i > o$, on voit que Or, puisque $X > i$, on peut poser en désignant par a un nombre positif; et alors, en substituant dans les formules (1), on trouve $J7j : — — , 2 J?3$ et, en général, $2 ' e'a -f- e'-\ll '/\bullet \blacksquare 2 '$

The text on this page is estimated to be only 29.92% accurate

('9) donc, puisque AB ou $a^{bf^{\wedge}}$ est plus grand que x^{ab} , on en conclut que $AB \ll a-He-\ll a \text{ --- } ;> . ab^2$ Mais, en menant AB' perpendiculaire à $Bè$, nous avons vu dans le numéro précédent que $\wedge/4x$ AB' donc $AB^{\wedge}, , AB \ll a-He-\gg AB''^{ab^2}$ De plus, si nous abaïssons $B' I$ perpendiculaire sur AB , nous savons (8) que, dans les deux triangles $ABB', AB'I$, le rapport $\wedge\wedge$ des hypoténuses est moindre que le rapport des côtés opposés à l'angle commun $A AB BB; AB' \wedge B' 1' '$ et, à plus forte raison (6 et 7), en menant $B'H$ perpendiculaire à Aa , $AB AB' < BB' AH < AA,$, $///i A^{\wedge} e noL -he-'''$ Par conséquent, d'où enfin, en remarquant que $BBo < ABo < AAo -h A^{\wedge} B^{\wedge}, (^{\wedge}) (-^{\wedge}x|f)/(\ll^{\wedge}) > nOL I gt \text{ --- } /lût$ En partant de la relation $\ll 1 6| _ . e^* 4- e-^{\wedge} ab^2$ on trouverait de la même manière (4) $V-^{\wedge}\hat{A}\hat{A}7J-^{\wedge}(\wedge\wedge\ll)>-^{\wedge}\text{---}$

The text on this page is estimated to be only 24.20% accurate

(20) Reste à trouver une limite supérieure de $\angle A$. Pour cela, prenons sur AB une longueur AC = ab et abaissons O perpendiculaire à ab\ en appelant le point de rencontre de Ce avec Uibi, toutes les longueurs a,c, seront moindres que AC, par suite moindres que ab. Menons CjC' et CMP» perpendiculaires à a,c cc^ (7), le théorème du n° 8 nous apprend que d'où, en posant C|_C/ on déduit e,i^< a,c,«P^, ou ou encore a, i> -h fjLj «1 iv < (I +- /Xj) a» Cl . Or a,i' et a^w sont moindres que aô, donc (7) d'oii «jC, -+-/jL,ac

The text on this page is estimated to be only 16.93% accurate

(2') Kn comparant ces relations aux formules (2) qui définissent les a , et en observant que $X^i - i > 0$ et $(j| > i$, on voit que finalement aa , $= Aa^{\wedge}_{-}$, donc $CC| A\hat{a}(|_{-} | AAq$ et, à plus forte raison, $\zeta g/t-i^{\wedge} ABq AqBq$ $cci AAo AAq$ Par conséquent $AC^{\wedge} / ^{\wedge} AqBqX c^{\wedge}\langle -Hg--'\langle$, $ac \setminus AAo / 3^{\wedge}$ mais $/(a A) < - 5$ donc Enfin (6) $/(aa.)$

The text on this page is estimated to be only 25.35% accurate

(22) on a $f(x)$, à chaque valeur de x correspond un nombre positif $f(x)$ tel que D'autre part, en laissant fixe la longueur AA° , on peut déterminer $AqB^\wedge$, de telle sorte que, en désignant par (α) un nombre positif choisi arbitrairement, on ait $14 - \alpha^j$) On peut démontrer plus rapidement cette formule. En effet, comme $\int_{ir;i}^{\cdot}$, on a, en faisant $itat = \alpha^y$ «, 6, < - (ats -4- Cl r)< $\wedge rfQ^\wedge$ et, en général, $\bullet^\wedge i\grave{a}i / (P) < \ll -f-i \wedge -i-i -H rt/-i \hat{o}/_i$;

The text on this page is estimated to be only 20.17% accurate

(23) Ceci posé, soit X une longueur quelconque, et supposons d'abord $A = \text{---} a A =: /n \text{ aaii } n$ il en résulte Supposons maintenant $m X m -h$ $I n \text{ ak } n \text{ ou } maa, < X < (/i \text{ 4- } i) = > -; \hat{1} \blacksquare$ et, en général, $\backslash aiCi(\backslash -f- ji/) >$ $rt, > iC/+, -+- ji/flr/_ , c/_ , ; A \backslash K$ mais $\{x/ < I -h -T^r-\circ;$ donc, si l'on fait tendre $AqBo$ vers zéro, $|x/$ tend vers i , et la relation précédente devient Par conséquent, $2/(\gg?)/(p) = /(['\blacksquare+ ')?] + /(['\blacksquare-\blacksquare)?]$, d'où l'on déduit aisément

(24) qui lui est proportionnel : c'est ce que nous ferons désormais; et alors, en désignant ce nombre par x , nous écrirons $Cp(j7) \text{ zz: } X \text{ OU } f\{^X^ := i\}\backslash\backslash XZ = . a? _L_ \grave{a} > \text{---} x e^{\wedge - \wedge} e$ Il semblerait plus naturel de poser $K =$ et d'écrire $cp(Aa)' / (X) =: ch|^{\wedge} r = ch^{\wedge}$, en désignant par x le nombre qui mesure la longueur X quand on prend pour unité la longueur K , que Bolyai appelle V unité naturelle de longueur. Mais, comme il est impossible de construire exactement la longueur K , il faudrait admettre l'existence de cette longueur : ce qui implique un postulatum que nous avons voulu éviter.

11. Étant donné un angle aigu $j^{\wedge} Ay$ {fig- 8), si d'un point B pris Fig. 8. $J > A$
 $\backslash \backslash 1 - V / 1 \backslash \text{---} 1 / B * 6 / y G / 1 V < 3 \&$ sur l'un des côtés ky on abaisse $B^{\wedge}$ perpendiculaire sur l'autre côté kx , nous savons (8) que le rapport AB

(2.>) diminue en même temps que AB; on pourrait en conclure que ce rapport tend vers une limite lorsque AB tend vers zéro. Mais cette limite n'interviendra pas dans nos raisonnements. Il nous suffit de montrer qu'à tout nombre positif ϵ on peut faire correspondre une longueur δ telle que, si les hypoténuses AB et AC de deux triangles rectangles AB δ , AC ϵ qui ont un angle aigu commun A satisfont à la relation $AC < AB < \delta$, on ait $C\epsilon B\delta C\epsilon, \hat{A}G$

(26) d'où, en vertu de la relation (i), C. Q. P. D. 12. Nous allons maintenant chercher la relation qui existe entre les trois côtés d'un triangle ABC rectangle en A. D'un point B' (Fig. 9) pris sur l'hypoténuse BC, abaissons B'A' perpendiculaire sur AC; puis faisons glisser le triangle ABC le long de AC jusqu'à ce que le point A vienne en A' : le point B viendra en B' sur le prolongement de A'B', et le point C en C', sur le prolongement de AC. Le triangle BB'B, a ses trois angles aigus (5); donc, si nous menons les hauteurs BD, B'D', le point D tombe entre B, et B', et le point D' entre B et B'. De plus, l'angle B'BB, qui est égal à l'angle ABB', est plus grand que B'BB, B'. D'ailleurs on voit sans peine que BB' > AA' = CC'. Ceci posé, dans le quadrilatère ABDA', on a (9) $\angle A'D$

{ 27) Ensuite, comme les angles C et $C^\wedge$ sont égaux, si par le point E milieu de ce , on mène EF perpendiculaire à BC , cette droite EF rencontrera B, C , en un point G tel que $EF = EG$ et sera également perpendiculaire sur $B^\wedge C$; de sorte que, dans le quadrilatère trirectangle B, D, FG , on a (9) $chFD, cnJA$. Or, en supposant $CC^2 = BB' < AC$, on a $JA^2 > AC - BB'$. D'autre part, $B'M > B'A'$ et $B'Aa = B, A'$, donc $A, Mch(AC - BB')$.
Pour trouver une limite supérieure de B, B' , je prends sur le prolongement de $B'A'$ une longueur $A'N = B^\wedge B'$, de sorte que, $B'N$ étant égal à $B'Aa$, le point N tombe dans l'angle $B'CaAj$; donc, si l'on abaisse NP perpendiculaire sur IJ , le point P tombe entre I et J , et, dans le quadrilatère trirectangle $A'NPI$, on a (9) $A'N - pj - < ch PN$

The text on this page is estimated to be only 27.90% accurate

(28) et, à plus forte raison, $\angle A'N < \angle PN$. Mais $A'N = B'B$ et $PN < PI$
 -f IC -h CA' -+- $A'N < AC$ -+- $3 BB'$; donc (4) $\angle B, B'$, on a (8) de même
 HC, qui est la moitié de BB' , est plus grand que $\frac{1}{2}EG$, qui est la moitié de
 AA' ; donc $\angle HI \wedge EF \wedge IJ \wedge FG \wedge HC \wedge EC \wedge BIF > \hat{A}\hat{A}$ De plus, nous avons
 vu dans le numéro précédent qu'à tout nombre positif ϵ on peut faire
 correspondre une longueur δ telle que, si $BB' < \delta$, on ait $BD \wedge B_j D_j \wedge EF, , IJ$
 $FG, , (\wedge) HC$

The text on this page is estimated to be only 25.85% accurate

(29) d'oii, en multipliant membre à membre, $\text{ch}(AB-BB') \text{ch}(AC-BB')$
 $\text{ch}AB \text{ch}(AC-BB') = \text{ch}(AB-BB') \text{ch}AC$
 $\text{ch}AB \text{ch}(AC-BB') = \text{ch}(AB-BB') \text{ch}AC$
 Comme cette relation doit subsister, quelque petits que soient e et BB' , il faut en conclure que $\text{ch}BC = \text{ch}AB \text{ch}AC$. c. q. f. d. Définition du sinus et du cosinus d'un angle. Relations entre les éléments d'un triangle. 13. Nous avons déjà posé 2
 Posons en outre $e^* = e'^{\wedge}$, $\text{sh} r = \text{ch}^{\wedge} \text{sh} a =: \text{th} r^{\wedge} z =: \text{coth} r =: -r = 2$
 en $a = \text{sh} x$ On en déduit $\text{ch}^* a = \text{sh}^* cr = i$, $\text{ch}(d7-+-/) =: \text{ch} x \text{ch} y - \text{sh} x \text{sh} y$,
 $\text{sh}(j? -H/) = \text{sh}^{\wedge} \text{ch} / H - \text{ch}^{\wedge} \text{sh} /$. Ceci posé, soient a : $A/ (y?^{\wedge} . lo)$ un angle aigu,
 Un point de $Aa?$, C un point de Aj ; menons CD perpendiculaire sur AB ; les triangles rectangles ACD , BCD donnent $\text{ch}BC = \text{ch}CD \text{ch}(AB - AD)$, , $^{\wedge}$
 $\text{ch} AC \text{ch}CD = , . , ; \text{ch}AD'$

(3o) d'où on a $\frac{BC}{AB} = \frac{AD}{AC} - \frac{BD}{AC} \cos A$ (car $AD = AC \cos A + BD \cos A$)
 AB ch AC - sh AB sh AC $\cos A$? ' th AG De même, en abaissant BE
 perpendiculaire sur AC, on a $BC = AB \cos A + BE \sin A$. tiiAB
 Donc $\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AC} + \frac{BE}{AC} \sin A$, $\frac{AD}{AC} = \frac{AB \cos A}{AC} + \frac{BE \sin A}{AC}$ comme les longueurs AB et AC sont
 quelconques, il faut en conclure que la valeur du rapport $\frac{BC}{AB}$ ne dépend pas
 de la longueur AC, mais seulement de l'angle A : c'est cette valeur qu'on
 appelle le cosinus de l'angle A et qu'on désigne par $\cos A$, de sorte que $BC = AB \cos A + BE \sin A$. Si l'angle A est obtus, le pied de la
 hauteur CD tombe sur le prolongement de BA; on trouve, dans ce cas,
 $BC = AB \cos A - BE \sin A$; th AC et, en posant, par
 définition, $\cos A = \frac{AD}{AC}$, $\sin A = \frac{BE}{AC}$ (2 droits — A), In AL on retombe sur la
 formule précédente. Ainsi les côtés a, b, c et les angles A, B, C d'un triangle
 sont liés par les trois relations $a = b \cos C + c \cos B$, $b = a \cos C + c \cos A$,
 $c = a \cos B + b \cos A$. Ensuite, en définissant
 le sinus d'un angle A aigu ou obtus comme

The text on this page is estimated to be only 26.37% accurate

(3i) la valeur positive du radical $\sqrt{1 - \cos^2 A}$, et en définissant la tangente et la cotangente par les formules $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$, $\cot A = \frac{\cos A}{\sin A}$. On déduit des trois relations précédentes $\sin A \sin B \sin C = \cos A \cos B \cos C$, $\sin A \cos B = \cos A \sin B$, $\sin A \sin C = \cos A \cos C$. En particulier, si Ton suppose que le triangle ABC est rectangle en A, on a $\sin A = 1$, $\cos A = 0$, $\sin B = \cos C$, $\cos B = \sin C$. Formules d'addition. 14. Soient $\alpha = \angle xOy$, $\beta = \angle yOz$ ($\alpha, \beta > 0$) deux angles aigus; supposons pour fixer les idées $\alpha > \beta$, et d'un point A de Ox abaissons AC perpendiculaire sur Oz; comme $\beta < \alpha$, le prolongement de cette perpendiculaire rencontre nécessairement Oz en un point B. Les trian

The text on this page is estimated to be only 22.20% accurate

(32) gles OAB, OAC, OBC donnent $\sin OA \sin OB \cos(a - P) = \sin OA \sin OB \cos(AC - CB)$, 1 ir- unry $\sin OA \sin OB \cos AC \cos CB =$
 $\sin^2 \omega \cos \theta$ d'où $\sin AC \sin CB = \sin OA \sin OB \sin a \sin p, \cos(a - P) = \cos \theta \cos \omega$
 $\sin^2 \omega \cos \theta = \sin^2 \omega \cos \theta \cos \omega$ Pou CCS (a-h P) zn $\cos a \cos p = \sin a \sin p$. On
trouverait de même ces (gc — (3) = $\cos a \cos p - \sin a \sin p$. Si les angles a et
p sont complémentaires, $\cos(a - p)$ est nul, donc ces a ces (3 = $\sin a \sin p$,
d'où $\sin a \sin p = \cos a \cos p$ • $\cos p = \sin a$ V $\sin p = \cos a$ -h $\cos^2 p = \sin^2 a$ cos
sin puisque a et p sont aigus; donc $\sin p = \cos a$, ou, en désignant par D
l'angle droit, $\sin(D - a) = \cos a$. Toutes ces formules sont établies dans
l'hypothèse où a et p sont aigus; mais, si Ton définit le sinus et le cosinus
d'un angle quelconque A par les formules $\cos A = \cos(A - 2/iT)$, -
 $\sin A = \sin(A - 2/iD)$, en désignant toujours par D l'angle droit, et
par n un entier positif

The text on this page is estimated to be only 26.88% accurate

(33) OU négatif tel que o

The text on this page is estimated to be only 25.46% accurate

(34) En s'aidant des relations $C[09-hi] \ll r:2C(/?a)C(a)-C[(/;-i)a]$, $\cos ip -H l) \text{ --- } = 2C0Sp \text{ --- } \cos \cos(/? \text{ --- } i) \text{ --- } >$ on en déduit $C(/? \ll) = !$ $\cos /?$ et, en particulier, $C\{noL\} = \cos D = :o$. De plus, $/ia o$; donc aucun des termes de la suite $a, 2a, 3a, \dots$, $/i a$ ne peut être compris entre $-$ et i ; et, comme o aucun de ces 2^{n-1} termes ne peut surpasser 2 Ainsi $/ia < -$; donc, puisque $C(/ia) = o$, c'est que $/^a = -$, et, par A 2 conséquent, $\cos \text{ --- } := C) \cdot n$ $\sqrt{2}nJ$ Ceci posé, soit A un angle aigu quelconque. Si le rapport yr est commensurable, soit $rr = \text{ --- } \cdot$ On aura, comme plus haut. 1) $ri'^a \setminus \cos m$ $\text{ --- } r = L // \ll I n \setminus 2 n I$

(35) OU $\cos A = g(\wedge J)$. Si le rapport $\wedge$ est incommensurable, soit $m A / \Pi - h I n \} j n$ on aura $\cos \text{---} D > \cos A > \cos D, n n$ OU, d'après ce qui précède, Mais, comme la fonction $C(a?)$ est décroissante dans l'intervalle de o à i :, on a aussi d'ailleurs la différence entre les quantités $C(\sim -] > Cr^{\wedge} " * " ' -]$ étant moindre que --- peut être rendue inférieure à toute quantité donnée. Donc $\cos A = c(i^{\wedge})$. formule que l'on étendra sans difficulté à toutes les valeurs positives ou négatives de A , et d'où Ton déduit Mais, en posant A TT D 2 rien n'empêche de représenter i angle A par le nombre a : c'est ce que nous ferons désormais. Les formules précédentes deviennent alors cosa $\text{---} C(a) =: 2 \sin a = S(a) = 2i$

The text on this page is estimated to be only 26.61% accurate

(36) On peut, si Ton veut, considérer le nombre a comme le rapport de Tangle A à Tangle U, défini par l'égalité $U_2 J)'''7r'$ mais, pour cela, il faut admettre rexistence de cet angle U. Relations entre les côtés d'un quadrilatère trirectangle ou birectangle. 16. Soit ABCD un quadrilatère (Jig. 12) qui a trois angles droits B, C, D. En joignant AC, on a $shAl) = shACcosACB$, $shBC = shACsinCAB$, $cosACB = sinCABchAB$; d'où Ensuite, d'oii $shAD shBC = chAB$. $tliADzzishCDlangACI)$, $IhBCrrthAC sinACD$, $IhCl) = thAC cosACI)$; $^^^2^chCD$. $IhBC$ Fig. 13. // / Soit ABai {fig. i3) un quadrilatère qui a deux angles droits a et b. Supposons d'abord l'angle A aigu, et abaissons BD perpendiculaire sur Aa : le quadrilatère trirectangle BDaè et le triangle rectangle ABD donnent rh $AR shB6 = shaDchBD = sh(A^ — AD)^{^^}=:chAB(shArt — chAr/UiAD)$;

The text on this page is estimated to be only 23.87% accurate

(37) OU, en remplaçant $ihAD$ par $lliAB\cos A$, $shB\hat{O} = shAa \cdot chAB$
 $\text{---} ch Aa shAB \cos A$ En supposant A obtus, on arriverait au même résultat
 Fig. i3. ay Pour retenir cette formule, il convient de l'écrire $ch^{\hat{B}O} H\text{---}j =$
 $chf Aa\text{---}h \text{---} jchAB \text{---} sh(Aa \text{---} j sh AB \cos A$ et de regarder 1»! $'^{\wedge\wedge} A^{\wedge} AT^*$
 $B^{\wedge}H > AaH$) AB a 2 comme les côtés d'un triangle dans lequel A est l'angle
 opposé au côté a Cela revient à dire, avec Battaglini, que les droites ka et
 $B\hat{e}$, perpendiculaires à une même droite ah y se rencontrent en un point
 idéal C , dont la distance aux deux points a et $\hat{e}$ est égale $k \text{---}$ •

(38) CHAPITRE II. CONSTRUCTIONS Pour voir quelles sont les constructions que l'on peut faire en Géométrie non euclidienne avec la règle et le compas, il faut chercher la forme de l'équation de la ligne droite et du cercle. Coordonnées. 17. Soient P et Q les projections d'un point M sur deux axes rectangulaires Qx, Oy. Fig. 14. J'appelle coordonnées normales du point M, et je désigne par X, Y, Z les trois quantités shQM , shPM , chOM . J'appelle coordonnées homogènes du point M, et je désigne par x, y, z trois nombres proportionnels à X, Y, Z : $X = \text{shQM}$, $Y = \text{shPM}$, $Z = \text{chOM}$, $X^2 + Y^2 - Z^2 = 0$ A Ay X représentant n'importe quel nombre, réel ou imaginaire, autre que zéro.

(39) Soit CD Tangle que fait OM avec Ox; comme $X = \text{shOM} \cos \omega$, $Y = \text{shOM} \sin \omega$, $Z = \text{chOM}$, on voit que X, Y, Z sont liés par la relation D'ailleurs, $Z = \text{chOM}$ est essentiellement positif. Quant aux coordonnées homogènes x, y, z, si elles sont réelles, elles doivent satisfaire à la condition $x^2 - y^2 - z^2 = 5^2 < 0$. Les rapports $\frac{x}{y}, \frac{y}{z}, \frac{z}{x}$ ont une signification géométrique remarquable r je shQM IhQM . ,,,. ,,,. 7^dû)M=^cTÔQ = '*^^^ (^)' y _ shPM _ thPM _ z ""chOM ~chOP -"*^^^'On pourrait prendre ces rapports pour coordonnées du point M : c'est ce que fait Beltrami; mais alors on serait obligé d'attribuer des valeurs infinies aux coordonnées de certains points idéaux. En employant des coordonnées homogènes, on évite cet inconvénient, et, en outre, on arrive à des formules plus symétriques. Transformation des coordonnées. 18. Soient X', Y', Z' les coordonnées normales du point M relativement à un second système rectangulaire x'O'y' de même sens que xOy, c'est-à-dire que, si l'on déplace le système xOy dans le plan de manière que Ox prenne la position O'x\ Oy vient s'appliquer sur O'V et non sur son prolongement. Supposons d'abord que les deux origines 0 et 0' coïncident.

The text on this page is estimated to be only 19.30% accurate

(4o) Soient α (fig. i5) l'angle de Oo' avec Oj , et w' l'angle de OM avec Ox on a $X = \text{sh } OM \cos(w' - \alpha)$, $Y = \text{sh } OM \sin(w' - \alpha)$, $Z = \text{ch } OM = Z'$. Mais par conséquent, $X' = \text{sh } OM \cos w'$, $Y' = \text{sh } OM \sin w'$; $X = X' \cos \alpha - Y' \sin \alpha$, $Y = X' \sin \alpha + Y' \cos \alpha$, $Z = Z'$. Fig. i5. On voit que le déterminant des coefficients de X' , Y' , Z' dans ces formules est égal à -1 , et qu'on a identiquement $X'^2 + Y'^2 - Z'^2 = X^2 + Y^2 - Z^2$. Supposons ensuite que la nouvelle origine O' (fig. i6) se trouve sur Oa , et que la direction $O'a'$ coïncide avec la direction Oar , Soient $X_o = \text{sh } Oo'$, $Y_o = 0$, $Z_o = \text{ch } Oo'$ les coordonnées de la nouvelle origine.

The text on this page is estimated to be only 23.92% accurate

On a d'abord puis, dans le triangle $OO'M$, $(4i) Y = Y'$;
 $\sin \theta \cos \phi = \sin \theta' \cos \phi'$ c'est-à-dire $\sin \theta \cos \phi = \sin \theta' \cos \phi'$; Ainsi les formules de transformation
sont A. $\sin \theta \cos \phi = \sin \theta' \cos \phi'$; Ici encore,
le déterminant des coefficients de X', Y', Z' est égal à 1, et l'on a
identiquement $X'' = X' \cos \theta' + Y' \sin \theta' \cos \phi' + Z' \sin \theta' \sin \phi'$. Considérons enfin le cas
général. Soit $O' a'' (y' \wedge i)$ le prolongement Fig. 17. $\blacktriangleright$ r (le OO' ; pour passer
du système xOy au système $x'O'y$, on peut prendre deux systèmes
intermédiaires $a''Oy, a''O'y$ ayant un axe commun; et alors on voit par ce
qui précède que les formules générales de transformation sont de la forme
 $(i) X = aX' + a'Y' - a''Z', Y = bX' + b'Y' - b''Z', Z = cX' + c'Y' + c''Z', G.$

The text on this page is estimated to be only 21.34% accurate

(42) et $q_i K_i$ les neuf coefficients $a, b, c, \dots$ sont des nombres réels satis faisant à l'identité et à la condition $a' a'' b' b'' c' c'' = -1$. Il est clair que, si les deux systèmes $Ox^i Oy^j$ étaient de sens contraire, le déterminant précédent serait égal à -1 . L'identité $X^i + Y^j - Z^k \sim X'^i + Y'^j - Z'^k$ équivaut aux six conditions (2) $a' a'' - b' b'' = c' c''$, $a' a'' - b' b'' = c' c''$, $a' a'' - b' b'' = c' c''$, $a' a'' - b' b'' = c' c''$, $a' a'' - b' b'' = c' c''$, $a' a'' - b' b'' = c' c''$, qui permettent de résoudre les formules (i) par rapport à X', Y', Z' ; on trouve $X' = \frac{rtX - t\hat{O}Y - cZ}{\dots}$, (3) $Y'z = \frac{rtXH - \dots}{\dots}$, $Z' = \frac{z - a''X - \dots}{\dots}$. Il en résulte que, entre les coordonnées homogènes ce, y, z du point M dans le système $Ox^i Oy^j$ et les coordonnées homogènes x^i, y^j, z^k du même point dans le système $x'O^i y^j$ il existe les relations (4) et par conséquent, $X_j' = ax^i - by^j - C_5$, $iT^i y^j z^k a^i x^i - Vy^j = c'^i$. $X \ll (a' \ll + / * - 5' =) :- \wedge \ll H - 7^* - 5^*$, X désignant un nombre quelconque différent de zéro. En faisant $X'=0, Y'=0, Z'=1$ dans les formules (i), on voit que a^i, b^j, c^k sont les coordonnées nor

(43) maies de la nouvelle origine O' dans l'ancien système. En désignant ces coordonnées par $X_o, Y_o, Z^{\wedge}$, la dernière des formules (3), devient $7J - a''X - b''Y - c''Z$, $chO'M = - X_n X \sim Y_o Y - h Z_o Z$, formule qui donne la distance de deux points quelconques O' et M , et que nous retrouverons plus loin. Distance d'un point à une droite. Coordonnées d'une droite. Équation d'une droite ou d'un point. 19. Soient MP la distance du point M à la droite $DCy^{\wedge}$ (Fig. i8), et OA la Fig. i8. perpendiculaire abaissée de O sur cette droite. Dans le quadrilatère birectangle $OAPM$, on a (16) $shMP = shOA chOM - chOA shOM \cos AOM$. (Considérons un O' fixe B situé sur le prolongement de OA , du côté de A ou du côté de O ; si nous regardons la distance MF comme positive quand les points M et B sont de part et d'autre de la droite D , et comme négative dans le cas contraire, et que nous fassions la même convention pour la distance OA , nous aurons dans tous les cas $shMP = shOA chOM - chOA shOM \cos^{\wedge} OM$, ou, en désignant par ω et P les angles que OM et OB font avec OA , $shMP = shOA chOM - chOA shOM \cos(\omega - P)$,

(44) OU enfin ($>$) $\text{shMP} = \frac{WZ}{VY} \frac{UX}{OX}$, en posant $U = \frac{\text{chOA} \cos \hat{A}}{\text{chOM}}$, $X = \frac{\text{shOM} \cos u}{\text{chOA} \sin \beta}$, $Y = \frac{\text{shOM} \sin u}{\text{chOA}}$, $Z = \frac{\text{shOA}}{\text{chOM}}$. X, Y, Z sont les coordonnées normales du point M ; par analogie, nous dirons que U, V, W sont les coordonnées normales de la droite D . En changeant le sens de la direction OB , on aurait un second système de coordonnées normales $-U, -V, -W$. J'appelle coordonnées homogènes de la droite D trois nombres réels ou imaginaires u, v, w proportionnels à U, V, W . On voit que U, V, W sont liés par la relation et que les coordonnées homogènes u, v, w doivent satisfaire, quand elles sont réelles, à la condition $u^2 + v^2 + w^2 > 0$. Si Ton définit le point M et la droite D par des coordonnées homogènes, la formule (i) devient $\text{shMP} = \frac{V}{U} \frac{1}{\text{sh} i^*} \frac{f v^* \text{sj} z' - y^*}{U^*}$. Ainsi l'équation $UX - h vy - WZ = 0$ peut être regardée soit comme l'équation ponctuelle de la droite D , soit comme l'équation tangentielle du point M .

Formules de transformation. 20. Soient X', Y', Z' et U', V, W les coordonnées normales du point M et de la droite D relativement à un second système $oj'OV$. On a aussi $\text{shMP} = \frac{W'Z' - V'Y' - U'X'}{U'X'}$,

The text on this page is estimated to be only 28.35% accurate

(45) d'où $UXh-VY- WZ=:U'X'^{-}V'Y'— W'Z'$; et cette égalité doit devenir une identité quand on y remplace soit X', Y', Z' par leurs valeurs en fonction de X, Y, Z données par les formules (3) du n° 18, soit X, Y, Z par leurs valeurs en fonction de X', Y', Z' . On trouve ainsi (i) $y=blj'-b^{\wedge}'-b''\\ U'— aU+ bV -cW$, (2) $\{ V'z= a'U -f- b' - c'W, W =- - a'U — b'W -h c' W$. Par conséquent, les formules de transformation pour les coordonnées tangentielles sont les mêmes que pour les coordonnées ponctuelles; la raison en est que les coordonnées d'une droite sont, comme nous le verrons plus loin, les coordonnées d'un point «V/ea/qu'on appelle le /?r)/(P de cette droite. Il résulte des formules précédentes que, entre les coordonnées homogènes $w, \wp$ », iv de la droite D dans le système xOy et les coordonnées homogènes $u \setminus v \setminus w'$ de la même droite dans le système $x'O'y \setminus$ on a les relations / "ku' ^=iaU -{- bv — cu% (3) \ Iv^ =: a^ u \setminus - b' {^ — c' < V, d'où $X \gg (1/'* 4- t^{\wedge}* — 11^{\wedge}) I- // * -h 1' \gg — il-'$. Si, dans les formules (i), on fait un voit que les coordonnées normales de $O'x'$ dans le système xOy sont $a', b', c \setminus$ De même, $a, \grave{e}, c$ sont les coordonnées normales de $O'y$. Mais si la droite D passe par la nouvelle origine $0' (^g. 19)$, en menant $O'N$ perpendiculaire sur cette droite, on a, par définition, $V — \sin x'N — \pm: \cos x'D$;

or (46) $V'' \ll 'II-4-^{\wedge}V-c'W$, et nous venons de voir que $a', h \setminus \&$ sont les coordonnées normales de $O'o'?$ dans le système $xOy \setminus$ donc, en désignant ces coordonnées par Uo, Vo, Wo , on a $\pm \cos^{\wedge} = UUo \setminus - VVo - WWo$, formule qui donne l'angle de deux droites et que nous retrouverons plus loin. Droites et points imaginaires, réels, limites ou idéaux. $\hat{a}l$. Soit $.r, j, z$ un système quelconque de trois nombres réels ou imaginaires qui ne soient pas tous nuls, on convient de dire que ces trois nombres sont les coordonnées d'un point. On dit que deux points sont identiques quand leurs coordonnées sont proportionnelles. $.r, j, z$ étant donnés, on considère les nombres $x', y^{\wedge} z'$ définis par les formules (4) du n° 18 comme les coordonnées dans le système $x'O'f$ du point qui a pour coordonnées $j:, j, z$ dans le système $xOj \setminus$ On dit qu'un point est imaginaire quand ses coordonnées x, j, z ne sont pas proportionnelles à trois nombres réels. Si, au contraire, $x, j-, z$ sont proportionnels à trois nombres réels $.ro, joi^{\wedge}o$ on dit que le point $o?, j, z$ est réel si $x\hat{1} -4- yi \hat{2} \hat{1} o$, limite si $\ll o-+-^{\wedge}\hat{O} \text{ — } \ll '? =^{\wedge}o$, idéale si $\ll o-^{\wedge}\hat{1} \text{ — } \ll '5$

(47) Les formules qui déterminent x, y, z en fonction de o, r, j, z montrent d'ailleurs que, si un point est imaginaire dans le système $xOj'y$ il l'est aussi dans le système $x'O'y$. De même, sMl est réel, limite ou idéal. On dit qu'un point x, y, z est sur une droite u^c, w lorsque $ux - vy - wz = G$. Soient j^i, j_i, z^i et r, j, zx deux points d'une droite, tous les autres points de cette droite auront des coordonnées de la forme $z = kZi - [X3j]$. Les formules qui déterminent u, v, w en fonction de u^v, v^w montrent d'ailleurs que, si une droite est imaginaire dans le système xOx , elle l'est aussi dans le système $x'O'j'$. De même, si elle est réelle, limite ou idéale. On dit qu'une droite m, n, w passe par un point a, x, t lorsque $tt.r - h p / - WZ = G$. Soient $\langle i, c^i, w \rangle$ et $\langle j, c_j, w_j \rangle$ deux des droites qui passent par un point, toutes les droites passant par ce point ont des coordonnées de la forme $U = l u_i - f [X_i/t]$, (3n dit qu'un point x, y, z est sur le cercle limite lorsque $j^i - y_i^2 - S y o$; et alors, les coordonnées x, y, z de ce point dans un autre système de coordonnées vérifient aussi la relation $x'^2 - y'^2 - z'^2 = 0$; donc l'équation du cercle limite est $x^2 - y^2 - z^2 = 0$, dans tous les systèmes de coordonnées. On dit qu'une droite w, u, v est tangente au cercle limite quand elle n'a qu'un point commun avec lui, c'est-à-dire quand les deux solutions du système $a: x^2 - y^2 - z^2 = 0$ ou $ux - vy - wz = 0$, sont confondues, ce qui arrive lorsque $w^2 = 0$. ($V^* = 0$; et alors les coordonnées w, u, v de cette droite dans un autre système

(48) de coordonnées vérifient aussi la relation donc l'équation tangentielle du cercle limite est $tt'-hr$ ($V^*=0$ dans tous les systèmes de coordonnées. Rapport anharmonique. ± 2 . Soient A_i, A_s, A_3, A_4 quatre points situés sur une même droite et définis par leurs coordonnées a_i, y_i, z_i . Si les deux premiers points sont distincts, les coordonnées des deux derniers sont de la forme et alors les trois rapports $r_i = \frac{a_i - a_s}{a_3 - a_s} \cdot \frac{a_i - a_4}{a_3 - a_4}$ ont pour valeur commune 2 . $X \cdot X''$ et cette valeur commune ne change pas ni quand on multiplie par un même nombre les coordonnées de l'un des quatre points, ni quand on rapporte ces quatre points à un autre système de coordonnées. D'ailleurs, si les deux premiers points coïncident, nos trois rapports sont évidemment égaux à l'unité. C'est la valeur commune de ces trois rapports qu'on appelle le rapport anharmonique. Soient D_i, D_j, D_s, D_4 quatre droites passant par un même point et définies par leurs coordonnées a_i, p_i, c_i . Si les deux premières sont distinctes, les coordonnées des deux dernières sont de la forme $a_i = Xw_i - t_i$, $a_j = X'w_j - f_j$, $c_i = Xp_i - H_i$, $c_j = X'p_j - H_j$, $a_3 = Xw_3 - t_3$, $a_4 = X'w_4 - f_4$, $c_3 = Xp_3 - H_3$, $c_4 = X'p_4 - H_4$; et alors les trois rapports $r_i = \frac{a_i - a_s}{a_3 - a_s} \cdot \frac{a_i - a_4}{a_3 - a_4}$ ont pour valeur commune 2 . $X \cdot X''$ et cette valeur commune ne change pas ni quand on multiplie par un même nombre les coordonnées de l'une des quatre droites, ni quand on rapporte ces quatre droites à un autre système de coordonnées. D'ailleurs, si les deux premières droites coïncident, nos trois rapports sont évidemment égaux à l'unité. C'est la valeur commune de ces trois rapports qu'on appelle le rapport anharmonique.

(49) nique des quatre points A_i, A_j, A_3, A_4 et qu'on désigne par le symbole $(A_i A_j A_3 A_4^*)$. Pour trouver la signification géométrique du rapport anharmonique de quatre points géométriques, prenons pour axe des x la droite sur laquelle ils sont situés, et alors, en remplaçant les coordonnées x et 2 par leurs valeurs dans $Z \setminus X^\wedge X^\wedge Z^\wedge \wedge Z \setminus X^\wedge X^\wedge Z^\wedge I > Z_x X^\circ - X^\circ Z^\circ Z \setminus X^\wedge - {}^t Z^\wedge$ on trouve $(A_i A_3 A_4) = \text{sh} A_i A_a, \text{sh} A_i A_i \text{sh} A_s A_s * \text{sh} A_j A^\wedge$ nique des quatre droites D_i, D_j, D_3, D_4 et qu'on désigne par le symbole $(D_i D_j D_3 D_4)$. Pour trouver la signification géométrique du rapport anharmonique de quatre droites géométriques, prenons pour origine leur point de concours, et alors, en remplaçant les coordonnées u Q_i v par leurs valeurs dans $M \setminus V_z - V \setminus U_j$. «t ($\bullet - t_i U_f$, on trouve $^\wedge \wedge \text{sm} D_s D_3 \text{sm} D_i D^*$ Le rapport anharmonique de quatre points en ligne droite $A, , A^\wedge, A_3, A_4$ est égale celui des quatre droites qui les joignent à un point extérieur $^0 \gg 7o \gg ^0$ - Car, en désignant les coordonnées des quatre points comme ci-dessus, les équations des deux premières droites sont $D_i^\wedge X y z r=0, D_j^\wedge \propto y z \bullet^0 y o ^0 ^i y t ^j = 0$, et celles des deux autres sont $X D_i - h f x D_j = 0, X' D_i - h f x' D_j =: o$: donc le rapport anharmonique des quatre droites et celui des quatre points ont pour valeur commune $^\wedge I y?$ Dans le cas où $A, , A^\wedge, A_3, A_4$ et le point extérieur 0 sont des points géométriques, en abaissant OH perpendiculaire sur la droite des quatre points, on peut écrire $\text{sh} A, A_3 \text{sh} OH = \text{sh} OA^\wedge \text{sh} OA, \sin A, OA_3$ et trois autres relations analogues. On en déduit $\text{sh} A_i A_j . \text{sh} A_i A_4 \sin A_i O A_j . \sin A_j O A^\wedge \text{sh} A_j A_s * \text{sh} A_j A_4 " \sin A_j \hat{O} A, * \sin A_j O A_4$ G. C. Q. F. 1). 7

(50) Ainsi les raisonnements basés sur la considération du rapport anharmonique, en particulier, la théorie des pôles et polaires et les propriétés harmoniques du quadrangle et du quadrilatère subsistent en Géométrie non euclidienne. Pour abréger, nous appellerons pôle d'une droite ou polaire d'un point le pôle de cette droite ou la polaire de ce point par rapport au cercle limite $x^2 + y^2 + z^2 = 0$. La polaire d'un point réel est une droite idéale, et la polaire d'un point idéal est une droite réelle. Distance de deux points. 23. Soient A et A' , deux points géométriques définis par des coordonnées homogènes x, y, z et x', y', z' ;

(5i) d'où $g(AA, \frac{Q-v}{Q^p-PP})$ ou e «AA, — t . tL p' p'^ en désignant par $j^{\wedge}$ les racines de l'équation Mais cette équation exprime que le point de la droite AA| dont les coordonnées sont appartient au cercle limite $z^{\wedge} - y^{\wedge} - a' = 0$. Donc, si A' et A" sont les points d'intersection de la droite AA, avec le cercle limite, le rapport $\frac{C_7}{C_j}$ est précisément le rapport anharmonique des quatre points A, A|, A', A"; et, par conséquent, $AA_i = \text{ilog}(AA_i A' A'')$. Nous avons supposé que A et A^ sont deux points géométriques; mais, s'il s'agit de deux points quelconques, nous définirons la distance AA| par l'égalité précédente. Ainsi : La distance de deux points est le demi-logarithme du rapport anharmonique formé par ces deux points avec les deux points où la droite qui les joint rencontre le cercle limite (Klein). En partant de cette définition et en refaisant les calculs précédents en sens inverse, on retrouve la formule $\text{ch} AA_i = \frac{A - y y x - X O C \setminus s j z'^{\wedge} - y^{\wedge} - x^{\wedge} \setminus J z \setminus - y \setminus - ^{\wedge} \setminus}{\dots}$ Comme on peut permuter les points A' et A", la distance AA, est susceptible de deux séries de valeurs de la forme

(52) θ étant Tune de ces valeurs. Ces deux séries correspondent aux deux directions que Ton peut considérer sur la droite AA, ; ni est la période, c'est-à-dire la longueur de la droite entière. La distance AA< est égale à une demi-période — quand (AA,A'A')=-i, c'est-à-dire quand les points A et A| sont conjugués par rapport au cercle limite. Enfin la distance AA| est infinie quand l'un des points A ou Af est sur le cercle limite : d'où le nom de cercle de Vinfini qu'on donne habituellement au cercle limite. Angle de deux droites. 24. Soient D et D, (^fig^ 21) deux droites géométriques qui se coupent en un point P ; et soient OA et OA< les perpendiculaires abaissées Fig. ai. de l'origine sur ces deux droites. Désignons par o) et par co^ les angles que OA et OA, font avec Oa?; le triangle PAA, montre que $\pm \cos DD$, a pour valeur — $\sin OAAi \sin OA, A -h \cos OAA, \cos OAi A \text{ ch} AAi$ et, en considérant le triangle OAA|, on voit que cette valeur est égale à $\text{sh} OA \text{ sh} OA, - \text{ch} OA \text{ cli} OAi \cos(\&) - wj$);

(53) donc, en définissant les droites $D, D,$ par des coordonnées homogènes $a =: X \text{chOA} \text{COSCO}, W_i =: X_i \text{chOA}_i \text{COSCi}!$, $c =: X \text{chOA} \sin \alpha, \wedge^1 = \wedge^1 \text{chOA}_i \sin \alpha_i, t_v = X \text{sh OA}, W_j = X_j \text{sh OA}_i$, on a $\cos DD_i = y/a^* - \wedge^1 v^{\wedge} - w^{\wedge} u^{\wedge} - \wedge^1 v] - iv \backslash$ formule déjà trouvée au n° 20. En raisonnant comme au numéro précédent, on trouve que, en appelant D' et D'' les tangentes au cercle limite issues du point P , $DDr =: \wedge^1 \log(DD, iyD'')$, Pour établir cette formule, nous avons supposé que D et $D<$ sont deux droites géométriques concourantes; s'il s'agit de deux droites quelconques, nous définirons l'angle $DD|$ par cette formule même. Ainsi : L'angle de deux droites est le produit de $\wedge^1$ par le logarithme du rapport anharmonique formé par ces deux droites avec les tangentes au cercle limite menées par leur point de concours (Klein). / En partant de cette définition, on retrouve la formule Comme on peut permuter D' et $D^{\wedge}$, l'angle DD , a deux séries de valeurs $\wedge^1 T T_i b a. a$ étant l'une de ces valeurs. La période estir : c'est l'angle que doit décrire une droite en tournant autour de l'un de ses points pour revenir s'appliquer sur elle-même. L'angle DD , est égal à une demi-période - quand $(DD, D'D'') : z = \sim i$,

(54) c'est-à-dire quand les droites D et D , sont conjuguées par rapport au cercle limite. Ainsi toutes les perpendiculaires à une droite passent par son pôle. Deux droites ont toujours une perpendiculaire commune, savoir X^l polaire de leur point de concours, mais cette perpendiculaire commune n'est réelle que si les deux droites se rencontrent en un point idéal. Hauteurs d'un triangle. 25. Les trois hauteurs d'un triangle concourent en un même point RÉEL, LIMITE OU IDÉAL. Ce théorème est vrai, quelle que soit la nature des côtés ou des sommets du triangle, et se démontre comme en Géométrie euclidienne. En effet, soient les équation[^] des trois côtés du triangle; en remarquant que la condition de perpendicularité de deux droites $m, 9y mp'$ et «

(55) qui joignent le point A aux points d'intersection de la droite D avec le cercle limite. Prenons pour axe des x la droite D et pour axe des y la perpendiculaire abaissée du point A sur la droite D, et posons, pour abréger, $Ok = z_0$. L'équation d'une droite passant par le point A et faisant un angle α avec l'axe des y est de la forme $\alpha \cdot y - \text{sh}(\text{tangci}) \cdot \text{ihd} z = 0$; les coordonnées du point où cette droite rencontre l'axe des x satisfont à la relation donc ce point est réel, limite ou idéal, selon que tangco est inférieur, égal ou supérieur à $-\frac{1}{r}$. Mais Bolyai a montré que l'on peut construire un angle dont la tangente soit égale à $-\frac{1}{r}$. En effet, menons BF perpendiculaire à Ox en un point quelconque B, abaissons AC perpendiculaire sur BF, et, du point B comme centre avec AC pour rayon, décrivons un arc de cercle qui rencontre nécessairement OA en un point E, car $AC > BO$: l'angle OEB est l'angle cherché. Car, en désignant cet angle par A, on a (16) $(0 \sin A = \text{sh} OB \text{ sh} AC - 1 \text{ ch} A)$

(56) d'où (2) $\text{lang} A = -T-T'$ c. Q. F. D. Par conséquent, si Ton mène par le point A deux droites AP et AP' faisant avec AO un angle égal à A, ces deux droites AP et AP' passeront par les points d'intersection de la droite D avec le cercle linaite. D'après ce qu'on a vu plus haut, une droite ADi qui passe par le point A et qui fait avec AO un angle o) moindre que A rencontre la droite D en un point réel; mais il n'en résulte pas que ce point ait une existence géométrique : il faut le démontrer. Il ne servirait à rien de dire que, shStango) étant moindre que l'unité, la droite AD, rencontre la droite D en un point M tel que $\text{th}OM = \text{shStango}$); car nous admettons bien qu'il existe un nombre [x tel que $\text{th}[j]L = \text{shStango}$), mais nous n'admettons pas qu'il existe nécessairement une longueur OM qui ait pour mesure ce nombre [x. Pour lever la difficulté, remarquons qu'on peut trouver sur OD un point M' tel que $\text{th}OM' > \text{sh} \text{lang} w$; il en résulte que l'angle OAM' est plus grand que l'angle co, et alors la droite AD^, tombant à l'intérieur de l'angle OAM', rencontre nécessairement OM' en un point M. c. q. f. d. Considérons maintenant une droite AD^ faisant avec AO un angle aigu OAD2 plus grand que A. Au point de vue géométrique, les deux droites D et Dj ne se rencontrent pas; mais on peut construire une perpendiculaire commune à ces deux droites. En effet, nous savons (8) qu'on peut trouver sur ADg un point F dont la distance à la droite AP soit plus grande que AO, et alors, en abaissant FB perpendiculaire sur Ox, on aura, à plus forte raison, $FB > AO$; donc, dans le quadrilatère birectangle AOBf, l'angle F est aigu (6). Mais l'angle OAF est aussi aigu, par hypothèse; par conséquent, les perpendiculaires AC et FG abaissées des points A et F sur BF et sur AO se coupent nécessairement en un point H, et, dans le triangle AHF, la hauteur HJ, issue du point H, passe par le point de concours des deux autres hauteurs AG et FC (25), c'est-à-dire qu'elle est perpendiculaire à OB :

(57) ainsi cette hauteur HJ est à la fois perpendiculaire aux deux droites D et D'. D'ailleurs on peut le vérifier. En effet, abaissons HI perpendiculaire sur OB. On a (16) $\text{thOA} \cdot \text{chOB} = \text{thIH} \cdot \text{chIB}$; $\text{thBF} \cdot \text{chOB} = \text{thIH} \cdot \text{chOB}$; ensuite, en abaissant AJ et FJ' perpendiculaires sur IH, $\text{thOA} \cdot \text{thBJ} = \text{chOI} \cdot \text{thBF}$; $\text{thBF} = \text{thIJ}$; d'où $\text{IJ} = \text{IJ}'$; donc les points J, J' coïncident. c. q. f. d. Ainsi, étant donné un point A et une droite D, nous avons pu construire deux droites AP et AP' telles qu'une droite passant par le point A rencontre ou ne rencontre pas la droite D, selon qu'elle est ou n'est pas située dans l'angle PAP'. Lobatschewsky exprime ce fait en disant que les deux droites AP et AP' sont parallèles à D, l'une dans un sens, l'autre dans l'autre. A notre point de vue, deux droites sont parallèles quand elles se coupent sur le cercle de l'infini ; il en résulte immédiatement que deux droites parallèles à une troisième sont parallèles entre elles. L'angle A, que nous avons appris à construire, s'appelle l'angle de parallélisme correspondant à la distance S ; Lobatschewsky le désigne par $\Pi(\hat{S})$: $A = \Pi(\hat{S})$. il est défini par les formules (i) et (2), ou encore par (3) $\cos A = \frac{1}{\cosh S}$. Cette dernière formule permet de démontrer que deux parallèles sont asymptotes l'une à l'autre. En effet, d'un point N de AP abaissons NB perpendiculaire sur Ox ; le quadrilatère birectangle OANB donne (16) $\sinh BN = r \sinh$

(58) d'où, en remplaçant $\cos A$ par $\tanh$, donc NB tend vers zéro lorsque AN augmente indéfiniment. En résumé, deux droites étant données, ou bien elles se coupent, ou bien elles ont une perpendiculaire commune, ou bien elles se rapprochent indéfiniment sans jamais se rencontrer. Cette proposition était connue longtemps avant Lobatschewsky (voir Saccherii *Euclides ab omni errore vindicatus*, Mediolani ; 1723). Triangles polaires.

27. Soient D et D' , deux droites, A et A' , leurs pôles, D'' et D''' les tangentes au cercle limite menées par leur point de concours; les points de contact A'' et A''' de ces tangentes sont situés sur la droite AA' , et $(DD', \text{Vir}) = (AA', A''A''')$, par conséquent, $DD' = -AA'$; l'angle de deux droites est égal au produit de $-$ par la distance de leurs pôles. Donc on peut dire, dans un certain sens, que, si Ton a deux triangles tels que les sommets de l'un soient les pôles de l'autre, les angles de l'un sont égaux aux côtés de l'autre multipliés par $-$. Mais, comme l'angle de deux droites et la distance de deux points sont susceptibles chacun de deux séries de valeurs, si l'on veut arriver à un énoncé précis, il faut auparavant définir ce qu'on entend par côtés et par angles d'un triangle. Soient A_1, A_2, A_3 , trois points définis par leurs coordonnées x^i, y^i, z^i . Les coordonnées des trois droites A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 sont les mineurs du déterminant $\Delta = \begin{vmatrix} x^1 & y^1 & z^1 \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix}$.

The text on this page is estimated to be only 16.59% accurate

(59) el ces mineurs, que je désigne par $x^{\wedge} y^{\wedge}, z^{\wedge}$, sont aussi les coordonnées des pôles $A', A^{\wedge}, A_3$ de ces trois droites. Les distances $A_j A', A_j A^{\wedge}, A^{\wedge} A^{\wedge}$ et les angles $A_j A_i A_j, A^{\wedge} A^{\wedge} A_j, A_j A_j A_j$ sont susceptibles chacun d'une infinité de valeurs. Désignons par «I» «î, ûfa, A|, A_j, A_5 un système de valeurs de ces six quantités, et posons, pour abréger, $V_{ij} = Z_i Z_j - y_{ij}^2 - X_i X_j$, nous aurons $p_j P^* P' \cos \angle i = T T' F' \cos \angle a, = p^{\wedge} \cos \angle a, \wedge p^{\wedge} f; p^{\wedge} p^{\wedge} p^{\wedge} \cos \angle A_i Z Z', , \cos \angle A a - ^{\wedge}, , \cos \angle A, = -11;-;$ d'où, en s'aidant des identités et autres analogues, on déduit d'abord, $\dots$ (PuPu-PiiP») $\dots$ (cha,cha,-£cha,) $\cos A, \dots (p, p, ^{\wedge} \langle p; ^{\wedge}) (P^{\wedge} p, \dots p_{jj} - sh \rangle a, sh \langle a, (0 \setminus$ avec $\mathbb{E} = \text{ch flichajchas } p p^{\wedge} = \pm i; * \hat{I}^3 * ^3 1 * \hat{l}$ puis, $\dots, (\cos A_j \cos A, \dots e' \cos A,) * \text{Ch}^* a_i = 7^{\wedge}. r - -: -T > \sin^{\wedge} A_s \sin^{\wedge} A_j (2) \{$ avec $P' P' P' t' = \cos A_i \cos A^{\wedge} \cos A \rangle p / ' p^{\wedge} p^{\wedge} = z h i; * - 18 " 31 \blacksquare 1 \hat{i}$

The text on this page is estimated to be only 14.12% accurate

(60) ensuite par conséquent sn «, — p p _ — - p p > !>' P' p'i p
 *t«'33 *^H* SJ sin*Ai _ sin-Aj _ sin'As sh'^i ~ sh*a* sh'flr. (Jeci posé, nous
 dirons que a,, a^, a^ . A,, A2, A., sont les côtés et les angles de l'un des
 triangles A, AjA,, si ces six quantités vérifient les neuf relations pî pî 13İ 1
 22 cil- «1 = D-ij- > ch* a, = 15-77- > ch* ri, = 15— L *^22A 33 *^38* II *
 II ■ I r 1 * 23* 31 * 12 cha, cha,cha3 z= 4- .^ > * II* 22^38 (3) < cosAiSha,
 shara= cha, chaa— cha,, cosAsShas shai=:cha3cha, — cha,, cosAjsha,
 sha,=r ch^i cha, — chas, sinAi sinAj _ sinAj sh^i sha, shfi] Mais si ces neuf
 relations sont vérifiées, on en déduit, en comparant les sept premières à la
 relation (t), p'2 |>'2 p'2 (4) cos'Ai— , " , cos'A,= " , (;os^3— , '* ; *^22*^53
 '33*11 '11*22 puis, des cinq dernières, on tire, par un calcul direct, cha,
 sinAtSinAs= cosAjCosAj-f- cosA,, cha, sinA3sinAi = cosA, cosA,-+-
 cosA,, (5) ; cha, sinA, sinA,=^cosA, cosA,-h rosAs, sha, sha, _ sha, ^ sinA,
 sinAi sinAa' après quoi la formule (2) montre que P' P' P' (6) cosAi
 cosA,cosA,= — p>"pf \>/' * 11 * 22* 33

The text on this page is estimated to be only 27.40% accurate

(6i) On a ainsi neuf relations nouvelles (4)f (5), (6) : en y faisant $a_i = r_i \sin A_i$, $A_i = \pi - 2r_i$ (7) C «: $a_i^2 \sin^2 A_i = A_j^2 \sin^2 A_j$, $A_i = \pi - 2r_i$ y on a neuf relations de la forme (3) entre les six nouvelles quantités $a_i^2 \sin^2 A_i$, A_i , A_j , A_j ; donc ces six quantités sont les côtés et les angles d'un triangle A_i, A_j, A_k , qui est dit le triangle polaire du triangle A_i, A_j, A_k dont les éléments sont a_i, a_j, a_k opposés, comme situés, l'un sur le recto, l'autre sur le verso du plan.

(62) En regardant toujours les nombres X', Y', Z' définis par les formules $X' = aX - bY - cZ$, $Y' = a'X - b'Y - c'Z$, $Z' = -a''X - b''Y - c''Z$, comme les coordonnées normales dans le système $x'Oy$ du point qui a pour coordonnées X, Y, Z dans le système xOy , on voit que deux points qui sont opposés dans le système xOy le sont aussi dans le système $x'Oy$. Les formules précédentes montrent que la valeur de $-X, X, -Y, Y, +Z, Z$, ne change pas quand on passe d'un système de coordonnées à un autre ; donc on peut définir chA, A_2 par la formule $chA, A_2 = -X, X, -Y, Y, -4-Z, Z$. Au point de vue actuel, toute droite $UX - hVY - WZ = 0$ a deux pôles opposés $U/, V/, W$ et $-U/, -V/, -W$. En appelant i celui des pôles de Oy qui a pour coordonnées $i, 0, 0$, et Q celui des pôles de Ox qui a pour coordonnées $0, i, 0$, on a $chPA, = -iX$, $chQA, = -jY$. De même, en prenant $0, 0, 1$ pour coordonnées du point o , $chOA, = Zi$; par conséquent, la formule qui définit $chAA,$ peut s'écrire $chA, A, = chPA, chPA, - hchQA, chQA, - hchOA, chOA,$. Ensuite, soit P' celui des pôles de $O'y$ qui a pour coordonnées $1, 0, 0$ dans le système $x'Oy$, Q' celui des pôles de O'^x qui a pour coordonnées $0, 1, 0$, et soient $0, 0, 1$ les coordonnées de l'origine $0'$. Les coordonnées des trois points $P', Q', 0'$ dans le système xOy sont a, b, c ; a', b', c' ; a'', b'', c'' ;

(63) de sorte que, en désignant par A un point quelconque, les formules de transformation prennent la forme $\text{chP'A} = \text{chPP'chPA} \wedge \text{chQP'chQA} - 4 - \text{chOP'chOA}$, $\text{chQ'A} = \text{chPQ'chPA} - \text{h chQQ' chQA} - \text{h chOQ'chOA}$, $\text{chO'A} = -\text{chPO} \wedge \text{chPA} - \text{f chQO'chQA} - + - \text{cliO}() \text{chOA}$; ces formules subsistent d'ailleurs quel que soit le triangle P'Q'O' pourvu que le triangle PQO soit trirectangle. On pourrait prendre chP'A , chQ'A , chO'A pour coordonnées du point A relativement au triangle P'Q'O'; mais il est inutile de multiplier les systèmes de coordonnées. Nous remarquerons seulement qu'on a une image très nette de la manière dont nous envisageons actuellement la Géométrie non euclidienne, en considérant sur une sphère un triangle trirectangle OPQ, et un petit cercle ayant pour centre le point O Fig. 23. et pour rayon sphérique la huitième partie d'une circonférence de grand cercle. Nous ferons jouer à ce petit cercle le rôle du cercle limite en définissant la distance $\text{AA}, (y? \ll ^\wedge. 28)$ de deux points de la sphère comme le demi-logarithme du rapport anharmonique formé par ces deux points A et A, avec les points A' et A" où le grand cercle AA, rencontre le petit cercle $0 : . , I , \sin \text{AA}' \sin \text{A}, \text{A}' \text{AA}, = - \log \frac{\sin \text{AA}' \sin \text{A}, \text{A}' \text{AA},}{\sin \text{AA}'' \sin \text{A}, \text{A}''}$ 2 ensuite, en prenant pour coordonnées du point A les trois quantités $X = \text{echPA}$, $Y = \text{fchQA}$, $Z = \text{chOA}$,

The text on this page is estimated to be only 27.96% accurate

C «4) on retrouve sans peine toutes les formules précédentes, et Ton voit que, pour distinguer deux points opposés, on est obligé de leur attribuer des coordonnées égales et de signes contraires. Revenons à la formule $chA, A, =: Z, Z, -Y, Y, -X, X,$ qui définit la distance A, A_j de deux points du plan. Si l'on se donne pour cette distance une valeur déterminée a satisfaisant à la relation précédente, les points A', A'' où la droite $A, A^.$ rencontre le cercle limite sont déterminés par l'égalité On trouve que les coordonnées du point A' sont $X, -c \ll X,, Yt-e \ll Y,, Z, -e^Z,,$ et celles du point A'' $X, -e- \ll X,, Yi-e- \ll Y,, Z, -e \ll Z,.$ Par conséquent, la distance de deux autres points $A,$ et A_4 situés sur la droite $A, A^.$ est déterminée à $2/11:1$ près par les deux formules $chAaAv^{\wedge\wedge}ZjZ^* - Y^3Y^4 - XaX^4, A^3A^4 = \text{ilog}(A^3A^4A'A^{\wedge}).$ Il en résulte que, si Ton considère sur la droite $\dot{A}.Aa$ un point A tel que $A|A = p,$ $AA_j =: a - p,$ les coordonnées $X, Y \setminus Z$ de ce point sont définies par les égalités $IXsha = r X, sh(a - p) -+- Xjshp, Ysha = Y, sh(a - p) -h Yjshp, Z sh a = r Zi sh (a - p) -h Z, sh p.$ Kn particulier, les coordonnées normales du milieu de $A, A^.$ sont $V Xi^4 - Xa y$ Il "t~ 1« y Z| - h /a 3 ch - 2 ch - 2 ch 2 2 2

The text on this page is estimated to be only 21.99% accurate

(65) Inversement, si l'on donne les coordonnées normales d'un point A de la droite $\hat{A}$. A» sous la forme $I^2 \cdot X - h \cdot Y^2$, $Y^2 - 4 \cdot |u|Y$, $Z = XZ \cdot \pm \sqrt{xZ}$, la distance A, A = p est déterminée k im:i près par les égalités $X \sin(a - p)$, $\sin a := \sin p$, d'où $\sin A$, A Dans le cas où les points A, A, sont conjugués, en faisant $i \triangle -tu/ a = A|Aii=H$ on trouve que les coordonnées du point A situé sur A, A_j et tel que A, A = p sont $IX = X \sin p - \sin p X$, $Y = Y$, $\sin p - \sin p Y$, $Z := Z \sin p - \sin p Z$. Transversales. 29. Soient A, A[^], A, les trois sommets d'un triangle définis par leurs coordonnées normales X, Y, Z, et $ux - h \cdot ry^2 = 0$ l'équation d'une droite D. Cette droite rencontre le côté A[^] A_j en deux points opposés : soit B, l'un de ces deux points; on a, en vertu des formules du numéro précédent, $\sin B|A, D$, $\sin B^A^D$, en posant De même, soient B[^] Tun des points d'intersection de la droite P avec A₃ A, et B₃ l'un des points d'intersection de cette même droite, avec G. 9

The text on this page is estimated to be only 29.63% accurate

(66) A, A_o, on a shBgA, shB.A, shB.A, 1)/ d*où, en multipliant membre a membre, shBiAg shBjA, sh(V)Ai shBiA} shBjAi shBjAi -h I C'est le théorème de Ménélaüs. Il est bon de remarquer que ce théorème n'a de sens qu'autant qu'on regarde deux points opposés comme distincts; car, autrement, chaque distance telle que B^Aj ne serait déterminée qu'à /i ire près et, par conséquent, chacun des trois rapports serait susceptible de deux valeurs égales et de signes contraires. Soit A_o un quatrième point, X_o, Y_p, Z_q ses coordonnées; désignons par C< l'un des deux points d'intersection de A,, A, avec le côté A^ A,, et posons nous aurons, comme plus haut, shC|Aî (o v'i) shC,A, ~ (ôî 3)' De même, en appelant C^ l'un des points d'intersection de A^^A^ avec A, A, el C3 l'un des points d'intersection de A^Aj avec A, A..., on a shCjAs (028) shCjA, shCsA, (02 i) (o3i) shCaAj ' * (o3 2)' d'où, en multipliant membre à membre, shC,Aj shCsAa sh(],A i^hCiAs shdjA, sliC^tAo =: — I.

(67) Ce dernier théorème montre que les trois médianes d'un triangle concourent en un même point. Cercles, horicycles et hypercycles.

30. J'appelle cycle le lieu des points équidistants d'un point fixe appelé centre et, par conséquent, aussi équidistants de la polaire du centre, que j'appellerai Vaxe du cycle. Je réserve le nom de cercle pour les cycles qui ont pour centre un point reW ; quant aux cycles qui ont pour centre un point $zrfo$, à laquelle Lobatschewsky a donné le nom (Vhoricycle, et que l'on peut regarder comme un cycle de rayon infini, puisque la distance du point $-^0$ à tout point du plan est alors infinie. Pour trouver une propriété géométrique de cette courbe que l'on puisse prendre pour définition, il convient de remplacer les coordonnées homogènes $.x, y, z$

(68) par des coordonnées normales X, Y, Z liées par la relation l'équation (j) devient alors Considérons deux points quelconques de la courbe A , et $A^\wedge$ définis par leurs coordonnées X, Y, Z , et $X_j, Y^\wedge, Z_j$: $A_i - S_j - 1 i J) 'o - X_j J T q^\wedge^\wedge I, f - \hat{a} t^\wedge Q - \hat{2}^\wedge 0 - A^2 .270 \text{ im: } I$, et formons l'équation $ZZ, - YY, - XX_i = ZZ, - YY^\wedge - XX$, de la perpendiculaire au milieu de $A_j A^\wedge$: on voit que cette perpendiculaire passe par le point limite $x^\wedge, y^\wedge, Z_q$, c'est-à-dire qu'elle est parallèle à n'importe quelle droite passant par ce même point $a?o, j \ll \rangle^\wedge o$ Ainsi on peut définir un horicycle comme le lieu des symétriques d'un point $^\wedge x$ A , par rapport à toutes les droites parallèles à une droite fixe D ($^\wedge g. 2/4$). Fig. 2i. En partant de cette définition, on pourra construire autant de points de riioricycle qu'on voudra, puisqu'on sait mener une infinité de parallèles à la droite D (26). Il résulte encore de cette définition que, si l'on considère deux points quelconques de l'horicycle A , et $A^\wedge$, les rayons $A, B|, A_2 B_2$, c'est-à-dire les parallèles à la droite D menées par les deux points A_4 et A_2 , sont également inclinés sur la corde A, A_2 : c'est cette propriété que Lobatschewsky et Bolyai prennent pour définition de l'horicycle.

(69) Deux horicycles sont superposables, car ils coïncident aussitôt qu'ils ont un point et un rayon commun. Axes radicaux. 31 .

J'appelle axes radicaux de deux cycles $(-I - yy' - \frac{1}{r^2}) = -\frac{1}{r^2}$ les deux cordes communes qui passent par le point de concours des axes $-I - \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2} = 0$ des deux cycles, et forment avec ces deux axes un faisceau harmonique. Les six axes radicaux de trois cycles pris deux à deux forment quatre systèmes de trois droites concourantes, savoir : $l) o = \pm D_p$ $Do = \pm l)$., $dbD, = \pm D,$, en représentant par $Do = o$, $D, = o$, $0^{\wedge} = 0$ les axes des trois cycles. Pour distinguer géométriquement ces quatre systèmes, il convient de considérer le lieu représenté par l'équation comme se composant de deux cycles opposés $Co = Z^5 o - Y_j^{\wedge} o - X_j^? o - 1 = 0$, $C'o = Zso - Y/o - X^{\wedge} o - 1 = 0$, que nous regarderons comme distincts quoique coïncidents. Si le centre $x^{\wedge} y^{\circ} \gg \wedge^0 \wedge^t \wedge^H \wedge^s$ considérerons les deux cercles Co et CJ , comme tracés l'un sur le recto, l'autre sur le verso du plan.

(70) Nous ferons la même convention si le centre est sur le cercle limite, c'est-à-dire si C_∞ et C_0 , sont des horicycles. Mais si le centre est un point idéal, l'équation exige que les deux branches de l'hypercycle C_0 soient situées, Tune A, sur le recto et l'autre, B, sur le tyerso du plan ; de même, l'hypercycle C_∞ , a une branche A' tracée sur le verso et coïncidant avec A, et l'autre branche B' tracée sur le recto et coïncidant avec B. A ce point de vue, deux cycles $0^\wedge = o$, $C_\infty = o$ ne se rencontrent plus qu'en deux points et n'ont plus qu'un seul axe radical $C_0 - C_\infty = o$; de sorte qu'on peut dire sans ambiguïté que les axes radicaux de trois cycles considérés deux à deux concourent en un même point. Hemarque. — On peut considérer une droite comme un cycle ayant pour centre le pôle de cette droite et pour rayon — • L'axe radical d'une droite et d'un cycle quelconque est cette droite elle-même. L'axe radical de deux droites est indéterminé. Puissance d'un point par rapport à un cycle. 3-2. Soit l'équation d'un cycle et $X, Y, Z^\wedge$ les coordonnées normales d'un point A,. Menons par ce point une droite quelconque qui coupe le cycle en deux points A' et A"; soit Aa l'un des deux points opposés où cette même droite rencontre la polaire du point A, par rapport au cercle de l'infini. Nous savons (28) que, en faisant $A, A^\wedge = -h$ — > les 1 distances $p'=A,A', p''=A,A''$ sont déterminées à im:i près, et qu'en désignant par X_2, Y_j, Z_j les

(71) coordonnées normales du point A_j , celles du point A' sont $X = X_j \cos \theta_j / \sin \theta_j$, $Y = Y_j \cos \theta_j / \sin \theta_j$, $Z = Z_j \cos \theta_j / \sin \theta_j$. En écrivant que ces coordonnées vérifient l'équation du cycle et en posant $\theta_j = \theta_j^0 + \theta_j^1 + \theta_j^2 + \dots$ on trouve $P_j \cos \theta_j = \sin \theta_j$. De même $P_j \cos \theta_j = \sin \theta_j$; d'où, en éliminant P_j on a $\cos(\theta_j - \theta_j^0) = \sin \theta_j^0$ ou $\theta_j = \theta_j^0 + \theta_j^1$. Par conséquent, le produit $\sin \theta_j - \cos \theta_j$ reste constant quand la sécante tourne autour du point A , : c'est ce produit constant que nous appellerons la puissance du point A , . Ainsi la puissance d'un point X, Y, Z par rapport à un cycle $C_0 - O$, c'est r Il en résulte que le lieu des points d'égales puissances, par rapport à deux cycles $C^0 = O, C_1 = O$, est l'axe radical de ces deux cycles. Par conséquent, les propriétés des cercles orthogonaux subsistent en Géométrie non euclidienne. il importe de remarquer que la généralité de nos formules suppose que, dans le cas d'un hypercycle, on regarde les deux branches comme tracées l'une sur le recto, l'autre sur le verso du plan; c'est-à-dire que, si la sécante issue du point A , rencontre l'une des branches en un point A' (Fig, 25) et l'autre branche en un point A'' , les distances

(70 $p' = A, A'$ et $p'' = A, A''$ sont l'une réelle, l'autre égale à une quantité Fig. 25. réelle augmentée de it /. Si Ton ne voulait pas faire cette convention, on aurait tantôt $G, -t-2$ tantôt $C, 3/2$ selon que les points A', A'' seraient ou non sur la même branche. Comme application, considérons un hypercycle défini par son axe AB (Fig. 26) et par l'un de ses points C ; abaissons CA perpendiculaire sur AB , et proposons-nous de déterminer les points d'intersection M

(73) et M' de l'hypercycle avec une droite DE perpendiculaire à AC au point D . Nous savons qu'on peut trouver sur DE un point F tel que la perpendiculaire FG , abaissée de ce point sur AB , soit plus grande que AC ; prenons sur GF une longueur $GH = AC$; le point H appartiendra à l'hypercycle, et la tangente en ce point, qui est perpendiculaire à GH , rencontre la droite DE en un point I , car nous supposons $GH = AC > AD$. Le cercle décrit de I comme centre avec IH pour rayon coupe orthogonalement l'hypercycle, ainsi que tous les cycles passant par M et M' , et, en particulier, le cercle décrit sur MM' comme diamètre; donc le rayon DM de ce dernier cercle est égal à la tangente menée du point D au cercle I , ce qui permet de le déterminer.

Problèmes sur la ligne droite. 33. Construire une droite passant par deux points donnés réels, idéaux ou à l'infini. Dire qu'une droite passe par un point idéal donné, c'est dire qu'elle est perpendiculaire à une droite donnée; et dire qu'une droite passe par un point donné à l'infini, c'est dire qu'elle est parallèle à une droite donnée (26). Donc, en écartant le cas où les deux points donnés sont réels et le cas où ils sont l'un réel, l'autre idéal, ce qui revient à mener par un point une perpendiculaire à une droite, nous avons à résoudre les quatre problèmes suivants :

I® Mener par un point une parallèle à une droite donnée. 1[^] Mener une perpendiculaire commune à deux droites données. Ces deux problèmes ont été traités au n° 26. 3** Mener une droite parallèle à une droite D et perpendiculaire à une droite D' (fig* 27). Bolyai donne une solution de ce problème ; mais on arrive à une construction plus simple que la sienne en s'appuyant sur ce que les trois hauteurs d'un triangle concourent en un même point. G. 10

(74) En effet, supposons d'abord que les droites D et D' se coupent en un point A , et soit DAD' l'angle aigu formé par ces deux droites. Nous savons qu'on peut trouver sur AD' un point B assez éloigné du point A pour que la perpendiculaire menée par ce point à la droite D' ne rencontre pas la droite D ; donc, en menant BC parallèle à AD , l'angle ABC Fig. 37. 0 $D' H$ sera aigu, lui aussi. Dans ces conditions, les perpendiculaires AF et BE abaissées des points A et B sur BC et AD respectivement se coupent en un point O et, dans le triangle OAB , la hauteur OH issue du point O est la droite demandée, car elle passe par le point de concours des deux autres hauteurs AD et BC , c'est-à-dire qu'elle leur est parallèle. Si maintenant les deux droites données D et D' ne se rencontrent pas, il n'y a qu'à mener par un point de D' une parallèle à D pour être ramené au cas précédent. 4** Mener une parallèle à deux droites données H et D' . Il faut distinguer trois cas selon que les droites D et D' se rencontrent, admettent une perpendiculaire commune, ou sont parallèles. Si D et D' se rencontrent, en menant la bissectrice de l'un des angles qu'elles forment, la droite menée perpendiculairement à cette bissectrice et parallèlement à D sera aussi parallèle à D' par raison de symétrie. Il y a donc quatre solutions. Si les droites D et D' admettent une perpendiculaire commune AA' , en remplaçant, dans la construction précédente, la bissectrice par la perpendiculaire au milieu de AA' , on a deux solutions. Il y en a deux autres, car les parallèles à D , menées par le milieu de AA' , sont aussi parallèles à D' . Enfm, si les droites D et D' sont parallèles {fig* 28), soit C un point

(75) de l'une et C un point de l'autre; nous savons que toute droite issue du point C et située dans l'angle DCC coupe la droite D'; donc la bissectrice de l'angle EfCC rencontre la bissectrice de l'angle D'CC en un point O. Les distances OP, OP' de ce point aux deux droites D et D' étant égales, ces deux droites sont symétriques par rapport à la hauteur OH du triangle isocèle OPP'; par conséquent, la droite BAB', menée perpendiculairement à OH et parallèlement à D, sera aussi parallèle à D'. Remarque, — Quelle que soit la position des deux droites D et D', on voit qu'il est toujours possible de construire une droite équidistante de D et de D'. Quadrilatère trirectangle et triangle rectangle. 34. Les éléments d'un quadrilatère ABCD (^g. 29) qui a trois angles droits B, C, D sont liés par les relations $\sin AD \cos \gamma = \sin AB \cos \alpha$, $\sin AD \cos \gamma = \sin AB \cos \alpha$, $\sin AD \cos \gamma = \sin AB \cos \alpha$ — t. $r = \sin AB = \sin \alpha$ — t. $\rightarrow CL$, Y étant les angles aigus du triangle rectangle ABC, et A l'angle de parallélisme correspondant à la distance AB $A = n(AB)$. Nous avons vu (26) que, étant donné AB, en décrivant de C comme centre, avec AD pour rayon, un arc de cercle qui coupe AB en E, on a

(7«) Réciproquement, A étant donné, on pourra faire un angle BAF égal à A, et Ton obtiendra la distance AB en menant BH perpendiculaire à AB et parallèle à AF. Donc : 1^ Si Ton donne BC et A, on peut construire AB et par suite AD; en prenant sur BA un point E tel que CE = AD, on aura BEC = A; donc on aura construit un triangle rectangle BEC, connaissant un côté et l'angle droit BC et l'angle A opposé à ce côté. Fig. 29. 2^ Si Ton donne AD et BC, on peut construire le triangle BEC, ce qui donne A, et par suite AB; donc on peut construire le quadrilatère trirectangle ABCD, connaissant deux côtés opposés AD et BC. 3** Si Ton donne a et y, en faisant deux angles égaux à a et à - — y» qui aient le sommet et un côté communs, et en abaissant d'un point du côté commun des perpendiculaires sur les deux autres côtés, les longueurs a et c de ces perpendiculaires satisfont à la relation $\sin a \cos y = \sin A$. En construisant un triangle rectangle qui ait c pour hypoténuse et a pour côté de l'angle droit, l'angle opposé à a sera égal à A; donc on pourra déterminer AB, et l'on aura construit un triangle rectangle ABC, connaissant les deux angles aigus a et y. Intersection d'une droite et d'un hypercycle. 35. Nous supposons l'hypercycle défini par son axe xy et par la distance d de l'un de ses points à l'axe. Si la droite donnée D rencontre l'axe xy en un point réel, on a à

(77) construire un triangle rectangle, connaissant un côté de l'angle droit, 5, et l'angle opposé, savoir l'angle de D avec xy . Si la droite D rencontre l'axe xy en un point idéal, on a à construire un quadrilatère trirectangle, connaissant deux côtés opposés, savoir c et la perpendiculaire commune aux deux droites D et xy . D'ailleurs, nous avons traité ce cas directement au n° 32. Enfin, supposons que la droite D soit parallèle à l'axe oxy (fig. 30); d'un point A de cette droite abaissons AB perpendiculaire sur xy , et Fig. 30. prenons sur BA une longueur $BC = S$; si nous menons CD' parallèle à xy du côté opposé à AD, cette droite CD' rencontre nécessairement AD en un point E. Comme la figure est symétrique par rapport à la perpendiculaire EF abaissée du point E sur xy . en prenant sur ED une longueur $EH = EC$, on aura le point H où la droite AD rencontre l'hypercycle. Intersection d'un horicycle et d'une droite. 36. Nous supposons l'horicycle défini par un de ses points A et par le rayon AB qui passe par ce point. I® Si la droite donnée D est elle-même un rayon, c'est-à-dire si elle est parallèle à AB, le point où elle rencontre l'horicycle est symétrique de A par rapport à la droite équidistante des deux droites D et AB {Remarque du n° 33). On trouve dans Bolyai une autre solution, qui est compliquée et exige des constructions dans l'espace. 2** Si la droite D passe par le point A, elle rencontre l'horicycle en un second point qui est symétrique de A par rapport au rayon perpendiculaire à D. 3^ Enfin, si la droite D est quelconque, les deux points M et M'

(78) {fig. 3i) où elle coupe rhoricycle sont symétriques par rapport au point C 011 elle est rencontrée par le rayon CE qui lui est perpendiculaire. Menons la droite AC qui rencontre Thoricycle en un second point A' que nous savons déterminer ($2^\wedge$), et décrivons un demi-cercle sur AA' comme diamètre; le point C ayant même puissance par rapport à ce cercle et par rapport à l'horicycle, en menant par le point C une perpendiculaire à AA' qui rencontre le cercle en N, nous aurons $CN = CM = CM'$. Intersection de deux cycles. 37. Quelle que soit la nature des deux cycles, il est facile de reconnaître si leurs points d'intersection sont réels ou imaginaires en construisant les points où ils sont rencontrés par la droite qui joint leurs centres; ensuite, on détermine leur axe radical par la méthode ordinaire, en les coupant par un cercle auxiliaire que Ton fera passer par un point de chacun d'eux. Considérons en particulier deux hypercycles $ZZo — YYo — XXo =: sh d, ZZ, -YYi -XX, = sh(\hat{i}, S$ et S , étant les distances des deux hypercycles à leurs axes respectifs.

(79) L'axe radical a pour équation $ZZ_o - YY_o - XX_o = \text{sha } ZZ_i - YY_i - XX_i$, c'est le lieu des points tels que le rapport des sinus hyperboliques de leurs distances aux axes des deux cycles soit égal à $-r_y$. Cette propriété, qui est évidente géométriquement quand les deux hypercycles se coupent, fournit une construction de l'axe radical plus simple que la construction générale indiquée plus haut. Distinguons trois cas. 1° Les axes xy et o^xy sont parallèles (fig. 32). — Construisons le point A où le premier hypercycle coupe x^y et le point A' où le second hypercycle coupe xy . Considérons le milieu M de AA' et menons MP et AB perpendiculaires sur xy , puis MP' et A'B, perpendiculaires sur o^xy , j, ; comme $MP = MP'$ et $AB = A'B$, l'axe radical demandé est la parallèle à xy menée par le point M. 2° Les axes xy et x^y se coupent en un point O (fig. 33). — On pourrait faire la même construction que dans le cas précédent; mais il

(80) est plus simple de prendre sur Ox et sur Oy, des longueurs $OA = a$, $OB = b$, et alors l'axe radical demandé est la médiane OM du triangle OAB ; car, en abaissant MP et MP' perpendiculaires sur les axes, on a $MP^2 - OA^2 = MP'^2 - OB^2$. Les axes Ox et Oy ont une perpendiculaire commune AB (fig. 34). — Je prends sur Oy un point quelconque C et, sur le prolongement de BA, une longueur $OA' = a$, puis $OA' = S^2$, et, par le point A' , je mène une perpendiculaire à OA qui rencontre OC en un point C', en sorte que $AC' = OA = a$ et $A'C' = S^2$.

(8') On peut aussi trouver pour chaque cas une méthode particulière. Par exemple, si l'on veut mener une tangente à un cercle perpendiculaire à une droite donnée, on aura à construire un quadrilatère trirectangle dans lequel on connaît deux côtés, le rayon du cercle et la distance du centre à la droite donnée. Dans le cas où le point donné est réel on à Vinfini, on obtient la tangente demandée en menant une tangente quelconque, que l'on fait tourner autour du centre du cycle jusqu'à la faire passer par le point donné. La construction réussit pour un horicycle ou un hypercycle aussi bien que pour un cercle proprement dit. Quatrième proportionnelle. 39. Étant données trois longueurs a, A, c , on peut toujours construire une longueur x telle que $\frac{a}{b} = \frac{A}{c} = \frac{x}{r}$; . slia En effet, si l'une des longueurs b ou c est moindre que a , par exemple b

(82) et, comme on peut prendre OB' assez grand pour que $A'B'$ soit supérieur à c , on sera ramené au cas précédent. On peut employer la même méthode pour construire un triangle rectangle OAB , connaissant l'angle O et le côté opposé AB , problème déjà traité au n° 34. En effet, puisqu'on donne l'angle O , on peut trouver deux longueurs OB' et $A'B'$ plus grandes que la longueur donnée AB , et telles que et, par conséquent, construire l'hypoténuse OB du triangle demandé en vertu de la relation $\text{sh} OB' \text{sh} AB = \text{sh} OB \text{sh} A'B'$. Construction des formules $\text{sh} y \text{sh} x = \text{sh} a \text{sh} b$, $\text{sh} x = \frac{\text{sh} a}{\text{sh} b}$. — $\text{sh} a, n^\circ h \} x^\circ = \text{sh} a \text{sh} 60^\circ$. 40. Remarquons d'abord que, sur un horicycle défini par un de ses points, le point O (fig* 36), et par le rayon OB qui passe par ce point, on peut trouver un point A tel que OA soit égal à une longueur donnée a ; pour cela, il suffit de faire un angle BOA égal à l'angle de parallélisme correspondant à la distance a . De même, on peut trouver sur l'horicycle un point A dont la distance au rayon OB soit égale à une longueur donnée a ; car, si par le point O on mène une droite OQ de longueur égale à a et faisant avec le rayon OB un angle égal à l'angle de parallélisme correspondant à la distance a , la perpendiculaire à la droite OQ au point Q rencontrera l'horicycle au point cherché A . Prenons pour origine le point O , et pour axe des y le rayon OB ; l'équation de l'horicycle est

The text on this page is estimated to be only 23.42% accurate

avec d'où (83) $Z^2 - Y^2 - X^2 = 1$; $X'^2 = 2Y$, équation qui rappelle celle de la parabole en Géométrie euclidienne Fig. 3. Ainsi les coordonnées d'un point A de Thoricycle ont pour valeurs $Z = \cosh OA$, $Y = \pm \sinh^2 OA$, $X = \pm 2 \sinh OA$ par conséquent, la distance de deux points quelconques A, A' de Thoricycle est donnée par la formule (14) $OA' - OA = \cosh AA' - \cosh ZZ' - YY' - XX' = \cosh OA \cosh OA' - 4 \sinh^2 OA \sinh^2 OA' - 4 \sinh OA \sinh OA'$, d'où $2 \cosh^2 AA' = 0$, $OA \sinh OA = \sinh OA \sinh OA'$, $2 \sinh^2 OA = 2 \sinh^2 OA'$

(84) si les points A et A' sont du même côté de Oy; et $\frac{AA'}{OA} = \frac{OA'}{sh} = \frac{sh}{h} = \frac{sh}{h} = \frac{sh}{h}$ si les points A et A' sont de part et d'autre de Oy. Or on peut déterminer les points A et A' de façon que $\frac{AA'}{OA}$ et $\frac{OA'}{sh}$ soient égales à des longueurs données a et a'; donc on peut construire une longueur x telle que $sh^2 = sh \cdot a' \cdot x$. Ensuite, si Ton considère sur Thoricycle, à partir du point 0, une série de points équidistants 0, A, A', ..., on a $2 \cdot sh \cdot i^2$ Il en résulte que, étant donnée une longueur a, on peut construire une longueur x telle que $sh \cdot r \cdot m \cdot sha \cdot n$ En particulier, on peut partager un arc d'horicycle OA en n parties égales; il suffit pour cela de construire une longueur OA telle que $OA, I \cdot OA \cdot sh = -sh^2/12$ D'ailleurs, il est aisé d'évaluer la longueur de l'arc d'horicycle OA. En effet, soit 4 'a longueur d'une ligne brisée 0A, A2...A;_, A inscrite dans cet arc, la différence $\frac{OA}{OA}, A, At, A,_, A \setminus / \ll - 2sh - - h^2sh -' -^4 - . . - H^2sh) \setminus 2 2 2 y$ tend vers zéro si le nombre des côtés de la ligne brisée augmente indéfiniment en même temps que chacun des côtés tend vers zéro.

(85) Mais . OA, , A,A, , .uA"-'^ cK^^. sh — ' -+- sh -^—=- 4- . . .
 4- sh ■ = sh — 2 2 2 2 donc I- / kOA liin/,— 2sn — • C'est cette limite qui
 est, par définition, la mesure de la longueur de Tare OA. Ainsi ni kOA
 arcOA=i2sh 2 Considérons maintenant un point fixe B situé surO/et défini
 par ses coordonnées o, Y,Z,. L'équation d'une droite passant par ce point est
 de la forme XX4-Z,Y-Y,Z = o; et, en formant l'équation aux X'des points
 d'intersection A et A' de cette droite avec l'horicycle, on trouve 2XX 4-
 Z,X»— Y,(X«4- 2) — o. Le produit des racines de cette équation reste
 constant quand la sécante tourne autour du point B. Ainsi
 shAPshA'P'=const., ou . OA , OA' sh — sh ^ = const. 2 2 Par conséquent,
 étant données deux longueurs a et a', on peut construire une longueur x telle
 que sh'^ = shasha'. Car, sur l'horicycle déterminé par le point 0 et le rayon
 Oj, on peut trouver deux points A et A' situés de part et d'autre de 0/ et à des
 distances de Oy respectivement égales à a et à a' Menons AA' qui rencontre
 Oy en un point B, et, par ce point B, me

(86) nous une perpendiculaire à Oj qui rencontre Thoricycle en un point M : nous aurons $sh^*BM = shAPshA'P'$, d'où $BM = X$. D'ailleurs on peut se dispenser de construire le point M en remarquant que le point B a même puissance par rapport à tous les cycles passant par A et A' ; donc, en décrivant un demi-cercle sur AA' comme diamètre et en menant par le point B une perpendiculaire à AA' qui rencontre ce demi-cercle en un point N , on a $BN = BM = a$. On aurait pu déterminer les points A et A' de façon que $OA^2 - OA'^2 = OM^2$ et alors on aurait eu l'Expression générale des longueurs que Ton peut construire avec la règle et le compas. 41. Désignons par F une fonction algébrique qui ne contienne pas d'autres symboles irrationnels que des radicaux d'indice égal à 2. Il résulte du numéro précédent que, étant donnés des longueurs $a, a^2, a^3, \dots$ et des nombres entiers $i, j, k, \dots$, on peut construire une longueur x telle que $sh^x = F(sh^a, sh^{a^2}, \dots, sh^{a^k}, sh^i, sh^j, \dots)$, pourvu que la fonction F soit homogène et du premier degré par rapport aux quantités $sh^a, sh^{a^2}, \dots$. Il est aisé d'en conclure qu'on ne peut construire une longueur x telle que (i) $e^x = F(e^{a^i}, e^{a^{2i}}, \dots, e^{a^{ni}}, e^{a^j}, \dots)$. En effet, cette égalité peut s'écrire

(87) Or, si l'on remplace c'' par $\frac{2sh\,ai}{sh^2\,ai + y^2 sh^2 a}$, $- \frac{1}{i}$ ($F - h^j$ devient une fonction homogène et du degré 0 des quantités $sh^2 a$, et $sh\,a$); donc, en se donnant une longueur arbitraire b , on peut construire une longueur j telle que $sh\,j = \frac{2}{F}$ ensuite, en supposant $j > 6$, on construira un angle A tel que $Sh\,j = I^A$ et alors on sera ramené à construire une longueur x telle que $ch\,x = z - r$, c'est ce que Ton sait faire (26). On abrège notablement les constructions en s'appuyant sur la relation qui existe entre la corde AA' et la flèche BC d'un arc d'horicycle (fig. 3j). Pour établir cette relation, prenons la corde AA' pour axe des X et la flèche BC pour axe des y ; l'équation de l'horicycle est $Z^2 - Y \cdot ch\,CA = 0$. En écrivant que cette équation est vérifiée par les coordonnées du point B , on a $ch\,CB - h\,sh\,CB - ch\,CA = 0$ ou « $ch\,CB - h\,sh\,CB = ch\,CA$ ». C. Q. F. D.

(88) On voit d'ailleurs que, étant donnée Tune des longueurs CA ou CB, on peut construire l'autre. Ceci posé, si Ton veut construire œ de façon que on commencera par déterminer des longueurs 6/ telles que , , Sh2Ô, e*. — ch bi = — r-r > de sorte que, la fonction F devenant homogène et de degré o par rapport aux quantités shsfr/ et sh6/, en se donnant une longueur arbitraire k, on pourra construire une longueur j telle que shx shX: = F; après quoi on construit, comme plus haut, une longueur js telle que chz = sh.r shX:' et enfin x de façon que e' = ichz. Pour se convaincre que la formule (i) donne bien l'expression générale des longueurs que l'on peut construire avec la règle et le compas, il suffit de remarquer que l'équation d'un cercle est de la forme et que l'équation d'une droite passant par deux points est de la forme $\sum_{i=1}^n y_i \sum_{j=1}^n y_j = 0$. Si donc on considère une série de points déterminés par l'intersection d'une série de droites et de cercles, le premier cercle ayant pour centre un point arbitraire de la première droite, tous les autres cercles ayant pour centre un des points déjà obtenus, et toutes les autres droites passant par deux des points déjà obtenus, il est clair que, en dé

(89) signant par $Tf, r^{\wedge}, \dots$ le\$ rayons des cercles successifs, la distance è de deux points quelconques de la série sera donnée par une équation de la forme F représentant une fonction algébrique qui ne contient pas d'autres symboles irrationnels que des radicaux d'indice égal à 2. Comme cas particulier, il peut arriver qu'un certain nombre des rayons $r^{\wedge}$ aient une valeur arbitraire qui n'influe pas sur la distance B des deux points que Ton considère et que tous les autres rayons soient égaux à la distance de deux points déjà obtenus : dans ce cas, on a $e5 = F(/i,, /ij, /i,, \dots)$ » F désignant toujours une fonction de même forme que précédemment, et w

(9o) Constructions particulières. 42. Étant données deux longueurs a et b construire deux longueurs X et y telles que $i \text{ shj}^7 4\text{-shr} = \text{sha}$, Soient OA et OA' deux cordes d'un horicycle H {fig[^] v[^]6) ayant pour longueurs respectives $q.x$ et $2y$; nous savons que $\wedge AA' \wedge OA$, $OA' \text{ sh} = \text{sh} h \text{ sh} : 2 \ 2 \ 2$ donc la corde AA' sera égale à aa , et, par suite, cette corde sera tangente à un horicycle H' concentrique à H et facile à déterminer. Ensuite, par le point B où AA' rencontre le rayon Oj , menons une perpendiculaire à Oj qui rencontre l'horicycle H en un point M : nous aurons , , $OM . OA$, $OA' \text{ sir} = \text{sh} \text{ sh} ; 2 \ 2 \ 2$ donc $OM = 26$. On pourra donc déterminer le point M et, par suite, le point B ; en menant par le point B une tangente à l'horicycle H' , et en cherchant les points A et A' où cette tangente rencontre l'horicycle H , on obtiendra les longueurs demandées $OA = ix$, $OA' = 2j$. On traite de même le système $l \text{ shr} — \text{shj}^{\wedge} = : \text{sha}$, ($\text{shxshj}' = \text{sh}'6$; mais on peut trouver, pour chacun de ces deux systèmes, d'autres constructions plus simples que la précédente. D'abord pour le système (i). Considérons $x \text{ ç} X \ y$ comme les distances de deux points A, A' de l'horicycle H (Jîg. 36) au rayon Oy En abaissant $A'R$ perpendiculaire sur le rayon qui passe par le point A , on a $\text{sh}A'R \text{ msh}AP\text{-t-sh}A'P'$;

(91) donc $A'R = a$, ce qui permet de placer la corde AA' dans l'horicycle. Ensuite, en appelant toujours B le point de rencontre de AA' avec Oj et N le point du demi-cercle décrit sur AA' comme diamètre qui se projette en B sur AA' , nous avons vu au n° 40 que $sh*BN = shAPshA'P'$; donc $BN = A$, ce qui permet de construire le point N et, par suite, le point B ; il ne reste plus qu'à abaisser AP et $A'P'$ perpendiculaires sur le rayon qui passe par le point B . Passons au système (2), et considérons $2a$: et $2j$ comme les longueurs de deux cordes AB et AC d'un horicycle situées du même côté du rayon AD qui passe par le point A (^{fig} 38). On a d'abord, BC , $AB \wedge AC \text{ sh } \frac{BC}{2} = 1 \text{ sh } \frac{AB}{2} \text{ sh } \frac{AC}{2}$; d'où $BC = 2a$, ce qui permet de placer la corde BC dans l'horicycle. Fig. 38. Ensuite, en abaissant AH perpendiculaire sur BC , on a $shAH = shABshAC \sin BAC \text{ sh } \frac{BC}{2}$ d'où, en remplaçant BAC par $DAC - DAB$ et en remarquant (26) que $\sin DAC = \cos DAC \sin AC = \frac{AC}{2} \text{ sh } \frac{AC}{2}$, $\sin DAB = \frac{ch \cos DAB \wedge Ih \hat{A}B}{2 AB}$

(92) on déduit $\hat{sh} - \hat{\alpha} \hat{\alpha}$ $\hat{sh} - \hat{\alpha}$ ($\hat{sh} — \hat{sh}_{AH} : \hat{\alpha} AB^2 AC^2 \setminus sh$
 $AC uAB^2 AC^2 sh — sh — 2 2 shBC ch BC$ expression remarquable de la
hauteur d'un triangle inscrit dans un horicycle. Ensuite, si nous construisons
une corde CM de Thoricycle égale à iby en abaissant CP perpendiculaire
sur la tangente en M, nous aurons de même $sh CP = 2 sh' b$, d'où $sh AH^2$
— $S_5 = shCP \sin A$, $ch BG BC A$ étant l'angle de parallélisme
correspondant à la distance- $\hat{\alpha}$; donc, en prenant sur le rayon qui passe par le
point C une longueur $CQ = CP$ et en abaissant QR perpendiculaire sur BC,
on aura enfin $QR = AH$, ce qui permettra de construire le point A. 43.
Construire une longueur x telle que $\%h\}x = sh'a - h sh'a'$. Soient OA et OA'
(Jig. 3g) deux cordes d'un horicycle ayant pour IonFig . 39. af $M \setminus p' v^\wedge Xi$
 $\wedge''\wedge_\wedge_^\wedge Q' <) « R^\wedge$ gueurs respectives ia et 2a', et considérons la
longueur inconnue ix comme une corde OM du même horicycle, de sorte
que $2 2 sh' OA'$

(93) d'où, en abaissant AQ, A'Q', MR perpendiculaires sur la tangente en O, $\text{shMR} = \text{shAQ} + \text{shA'Q'}$. Connaissant AQ et A'Q', on pourra construire une longueur MR satisfaisant à cette relation et, par suite, déterminer le point M. On peut aussi remarquer que, en abaissant iVP et A'P' perpendiculaires sur le rayon Oj, on a $\text{shAP} = 2\text{sh} \frac{1}{2} \text{OA} = \text{shOA}$. D'autre part, d'où $\text{OA}' \text{ shA'P}' = 2\text{sh} \frac{1}{2} \text{OA}' = \text{shOA}'$. 2 $\text{eOP} = \text{ichAP}$, $\text{e} \angle \text{p}' = \text{chA'P}'$, 1 $\text{nnr I} / \text{chAP} \text{ chA'P}' \text{ ch PP}' = - \text{I} \dots$, $-\text{h}^2 \text{chA'P}' \text{ chAP}$ ou $2\text{chPP}' \text{ chAP} \text{ ch A'P}' = \text{sh'AP} - \text{sh} \ll \text{A'P}' - \text{h}^2$; donc, en appelant P l'hypoténuse du triangle rectangle qui aurait pour côtés de l'angle droit AP et PA', on a $2\text{chp} = 4\text{sh}'a + \blacksquare 4\text{sh}^*a' - \text{h}^2$, d'où 2 Cela revient à dire que, si l'on fait tourner le demi-horicycle OA' autour de Oy jusqu'à ce qu'il vienne se placer dans un plan perpendiculaire au plan jOA, les trois arcs d'horicycles OA, OA', AA' seront liés par la relation $(\text{arcAA}')^* = (\text{arcOA}) \gg \text{H} - (\text{arcOA}')$. On sait d'ailleurs, depuis Lobatschewsky, qu'on peut faire toutes les constructions de la Géométrie euclidienne sur la surface, appelée horisphère, qui est engendrée par un horicycle tournant autour d'un de ses rayons. Si nous avons évité la considération de cette surface, c'est pour montrer que la Géométrie plane se suffit à elle-même.

(94) Polygones réguliers. 44. Le côté a d'un polygone régulier de n côtés inscrit dans un cercle de rayon r satisfait à la relation $\sin \frac{\pi}{n} = \frac{a}{2r}$. Donc on peut construire à toutes les fois que la valeur de $\sin \frac{\pi}{n}$ peut s'obtenir en résolvant une ou plusieurs équations du second degré à coefficients entiers, c'est-à-dire pour $n = 4, 5, 6, 8, \dots$. Ainsi on peut construire en Géométrie non euclidienne les mêmes polygones réguliers qu'en Géométrie euclidienne. Par exemple, pour $n = 6$, $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$. Or, si par les extrémités d'un diamètre AB (fig. 40) du cercle on considère on fait passer un horicycle qui rencontre en M le diamètre perpendiculaire à AB , on a, $AM = r$, $AB = 2r$ donc AM est le côté de l'hexagone régulier inscrit dans le cercle de diamètre AB . Cette construction est due à Bolyai, qui y est arrivé par la considération de l'horisphère.

(95) Déplacement d'une figure dans le plan. 45. Nous avons admis au n° 38 que tout déplacement d'une figure dans le plan équivaut à une rotation autour d'un point fixe réel, idéal ou à l'infini. Pour établir cette proposition, désignons par X, Y, Z les coordonnées normales d'un point M réel ou idéal relativement à deux axes rectangulaires Oa, Oj . Supposons que, après le déplacement, le point M soit venu en M' et que le système xOy soit venu en $x'O'y'$; les coordonnées du point M' dans le système $x'O'y'$ sont toujours X, Y, Z ; donc les coordonnées de ce point dans le système $arOj$ sont $(0 \ X' = aX - ha'Y - a''Z, \ Y' = bX - 6Y - 6^{\wedge}Z, \ Z' = cX - hc'Y - c'Z,$ les neuf coefficients $a, b, c, \dots$ étant liés par les relations (2) du n° 18. Pour que le point M soit resté fixe, il faut que $X' = X, Y' = Y, Z' = Z$, c'est-à-dire que le point M doit appartenir aux trois droites (2) $I^{\wedge}X - f(6' - i)Y + h'Z = 0$, Or le déterminant $a \begin{vmatrix} I & a' & a'' \\ h & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} - 1$ est nul en vertu des relations $a \begin{vmatrix} a' & a'' \\ b' & b'' \end{vmatrix} = +i, b'c^{\wedge} - db^{\wedge} = ay, c''a - a''c = .b'y \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} - ba' = c''$; donc les trois droites (2) concourent en un même point.

(96) Soit I ce point : trois cas peuvent se présenter. 1** Le point I est réel. — En prenant ce point pour origine des coordonnées, les formules (i) se présentent sous la forme $X' = X \cos a - Y \sin a$, $Y' = X \sin a + Y \cos a$, $Z' = Z$; donc tous les points du plan tournent autour du point I d'un angle a . 2® Le point I est idéal. — Alors sa polaire P est réelle. En prenant cette polaire pour axe des x, les formules (i) prennent la forme $X' = X \cosh a - Y \sinh a$, $Y' = Y \cosh a + X \sinh a$, $Z' = Z$; donc tous les points du plan décrivent des hypercycles ayant pour axe la droite P, et leurs projections sur cette droite parcourent des chemins égaux à a . Remarque. — Que le point I soit réel ou idéal, sa polaire rencontre le cercle de l'infini en deux points V et T qui restent immobiles : ainsi il y a dans le plan trois points fixes I, V, T (Klein). Si le calcul précédent ne nous en a donné qu'un, cela tient à ce que les points I et I' n'ont pas de coordonnées normales. Mais rien n'empêche de convenir que, dans les formules (i), X, Y, Z et X', Y', Z' désignent les coordonnées homogènes des deux points M et M'; alors, pour que ces deux points coïncident, il suffit que ce qui donne $X' = X$, $Y' = Y$, $Z' = Z$: a — i. $a' a' b' b' - h' c' c' - ! = 0$, ou, en développant, $(a^2 - b^2 - c^2) X (X - i) = 0$.

^97) En prenant la racine $X = i$, on retrouve le point I; les deux autres racines donnent les points V et F. 3** Le point I est à V infini. — En faisant passer l'axe des y par ce point, les formules (i) deviennent On en déduit d'abord $X - 6Y - h6Z$, $Z' - Y' = Z - Y$, ce qui montre que les points M et M' dont les coordonnées sont $X, Y^{\wedge} Z$ et X', Y', Z' se trouvent sur un même horicycle ayant pour centre le point I. Ensuite considérons l'horicycle H qui a pour centre le point I et qui passe par l'origine; et projetons les points M et M' sur cet horicycle en N et en N' {fig- ^\), c'est-à-dire menons par les points M et M' des parallèles k Oy qui rencontrent l'horicycle H en N et en N'. Désignons par S et par S' les arcs d'horicycle ON, O'N' considérés comme positifs à droite de Oy et comme négatifs à gauche ON — $\ddot{r}^2$ ON' $\wedge$ =1 2sh ?'=2sh et par yj, r\ les distances MN, M'N' considérées comme positives du côté de Oy et comme négatives du côté opposé. G. j3

The text on this page is estimated to be only 29.81% accurate

(98) Les quantités H, y , qu'on peut appeler les coordonnées horicycliques (lu point M , définissent la position de ce point par rapport à l'horicycle H . Or nous savons (40) que les coordonnées normales du point N ont pour valeurs $V_1 = t X, z_3 = sh = \xi, i ON Y = 2sh^* = i \in S Z, =: ch ON = i4-i$?; on en déduit sans peine que celles du point M sont données par les formules $Y := Y_i e^{-h sh Y} = \{l^e e^{-h sh y}\}$, $Z = Z, e^{-h sh Y} = (i 4-H^*)e^{-4 sh Y}$, et celles du point M' par des formules analogues. En substituant dans les relations $Z'-Y' = Z - Y, \sqrt{-X} = A(Z-Y)$, on trouve d'abord d'où $Y' = Y$, ce qui montre à nouveau que les points M et M' sont sur un même horicycle concentrique à H ; ensuite donc l'aire d'horicycle $NN' = S - S$ est constant et égal à b . Ainsi» tous les points du plan restent à une distance constante de l'horicycle H , et leurs projections sur cet horicycle parcourent des chemins égaux à b . On pourrait d'ailleurs démontrer tout ce qui précède par des raisonnements géométriques analogues à ceux qu'on fait en Géométrie euclidienne.

(99) Les coordonnées horicycliques que nous avons définies plus haut ont été introduites par Beltrami et par M. Flye Sainte-Marie. Les formules précédentes montrent que, dans ce système de coordonnées, l'équation d'une droite est de la forme $f = m$

('«<>) CHAPITRE IIL MESURE DES AIRES 46. On appelle polygone une portion de plan limitée par une ligne brisée fermée dont les côtés ne s'entrecoupent pas : $i^{\wedge}$ On dit que deux polygones sont équivalents quand ils sont ou superposables ou composés d'un même nombre de polygones superposables chacun à chacun. Il en résulte que deux polygones formés d'un même nombre de polygones équivalents chacun à chacun sont eux-mêmes équivalents. De plus, il est facile de montrer que deux polygones A et B équivalents à un troisième polygone C sont équivalents. En effet, par hypothèse, on peut décomposer C en parties $a^{\wedge}$ avec lesquelles on peut former A, et en parties p , avec lesquelles on peut former B. Mais, si l'on trace à la fois dans le polygone C les lignes qui limitent les $a^{\wedge}$ et celles qui limitent les p , le polygone C se trouvera décomposé en parties Y_i avec lesquelles on pourra former soit A, soit B. Donc A et B sont équivalents. Cette démonstration est d'ailleurs connue depuis longtemps, bien qu'elle soit assez peu répandue. 2** On dit qu'un polygone A est la somme de plusieurs polygones B, C, D quand il est formé de polygones partiels respectivement équivalents à B, C, D. 3* $^{\wedge}$ On dit qu'un polygone A est plus grand qu'un polygone B, ou que B est plus petit que A, quand on peut trouver un troisième polygone C tel que A soit la somme de B et de C. 47. Comme on peut décomposer un polygone en plusieurs autres d'une infinité de manières, il y a lieu de démontrer que chacune des

(loi) trois relations $A = B$, $A > B$, $A < B$ exclut les autres.

Pour peu qu'on réfléchisse à cette proposition, on reconnaîtra qu'elle n'est rien moins qu'évidente. Pour la démontrer, M. Flye SainteMarie propose de décomposer le plan en zones identiques par une suite illimitée d'horicycles concentriques et équidistants, puis de partager toutes ces zones en cases identiques par des normales communes limitées à deux horicycles successifs; après quoi, en désignant par n le nombre des cases situées à l'intérieur d'une surface A , et par n' le nombre des cases situées à l'intérieur d'une autre surface B , on démontrerait :

1° Que, si A et B sont équivalentes, c'est-à-dire formées de parties superposables, à tout nombre positif ϵ on peut faire correspondre une longueur d telle que, si les dimensions des cases sont inférieures à d , on ait $|n - n'| < \epsilon$, quelle que soit la position des surfaces A et B dans le plan ;

2° Que, si $A > B$, on peut trouver un nombre positif ϵ' et une longueur d' tels que, si les dimensions des cases sont moindres que d' , on ait $n - n' > \epsilon'$.

Il en résulte évidemment que les hypothèses $A = B$, $A > B$ sont incompatibles. Mais, en se bornant, comme nous le faisons, à la considération des polygones, l'incompatibilité des hypothèses $A = B$ et $A > B$ résulte immédiatement de la comparaison des déficits de A et de B . En effet, nous avons appelé déficit d'un polygone de n côtés (4) ce qui manque à la somme de ses angles pour faire $(n - 2)180^\circ$, en supposant, bien entendu, que, s'il y a des angles rentrants on attribue à chacun d'eux une valeur comprise entre 180° et 360° . Or on voit aisément que, si à un polygone P on ajoute un triangle T , de quelque manière que se fasse la juxtaposition, le déficit du polygone ainsi formé est la

(102) somme des déficits de P et de T ; on en déduit que, si un polygone est la somme de plusieurs autres, son déficit est la somme des déficits des polygones partiels. Donc : 1° Si les polygones A, B sont équivalents, c'est-à-dire formés des mêmes polygones partiels, leurs déficits sont égaux. 2° Si $A > B$, c'est-à-dire si l'on peut trouver un troisième polygone C tel que $A = B + C$, le déficit de A est plus grand que celui de B. Comme le déficit de A ne peut pas être en même temps égal et supérieur à celui de B (2), il faut en conclure que les relations $A = B$, $A > B$ s'excluent mutuellement. Le raisonnement qu'on vient de faire s'applique à la Géométrie sphérique, en remplaçant la considération du déficit par la considération de l'excès sphérique. Nous allons montrer que, en Géométrie euclidienne, on peut trouver quelque chose d'analogue. Traçons dans le plan deux axes rectangulaires Ox et Oy et désignons par $A_1, A_2, \dots, A_n$ les sommets d'un polygone, tels qu'ils se présentent en parcourant le périmètre du polygone dans le sens dit positif, c'est-à-dire, en supposant les axes disposés comme l'indique la figure (fig. 42), dans un sens tel qu'on ait constamment à sa gauche l'intérieur du polygone. Fig. 4a. Désignons par x_i, y_i les coordonnées de A_i et considérons l'expression $\sum_{i=1}^n x_i y_{i+1} - y_i x_{i+1}$

The text on this page is estimated to be only 28.20% accurate

(loi) Il est aisé de voir, en considérant les formules de transformation ./ et $J_7 \rightarrow \dots$ 27u "t" o. Ensuite, s'il s'agit d'un quadrilatère $A, A_j A_3 A$ », en posant $\bullet \bullet X_i X_j (/ = i i y_j$ l'identité $12 \ 4- \ 23 \ -H \ 34 \ -H \ 4i = (12 \ -h \ 23 \ -f- \ 3r) \ 4- \ (i3 \ H- \ 34 \ -i- \ 40$ montre que la S du quadrilatère $A^A^A_j A$, est la somme des S des triangles $A, A_2 A_3, A, A_3 A_4$. En général, si un polygone est la somme de plusieurs autres, sa S est la somme des S des polygones partiels. En particulier, comme tout polygone peut se décomposer en triangles, la S d'un polygone est un nombre essentiellement positif ,

(104) Ceci posé, I** Si deux polygones A et B sont équivalents, c'est-à-dire formés des mêmes polygones partiels, ils ont même S; 2° Si $A > B$, c'est-à-dire si l'on peut trouver un troisième polygone C tel que $A = B + C$, la S de A est plus grande que celle de B. Comme la S de A ne peut pas être à la fois égale et supérieure à celle de B, il faut en conclure que les hypothèses $A = B$, $A > B$ sont incompatibles. On voit que la démonstration précédente repose tout entière sur la distinction des deux sens dans lesquels on peut parcourir le périmètre d'un polygone ABCDE (y? g-. 42); il importe donc de définir le sens positif d'une façon aussi précise que possible. A cet effet, imaginons qu'on déplace l'angle droit dans le plan, de manière que le point O vienne en B et que Oy se place sur la bissectrice de l'angle ABC à l'intérieur du polygone : OiT tombera d'un côté ou de l'autre. Supposons qu'il tombe du côté de BC : c'est le sens de B vers C qui sera le sens positif sur le côté BC. Or, en déplaçant de nouveau l'angle xQy de manière que le point O vienne en C et que Oy se place sur la bissectrice de l'angle BCD et toujours à l'intérieur du polygone, on voit que Ox tombe nécessairement du côté de CD : c'est donc le sens de C vers D qu'il faudra prendre pour sens positif sur le côté CD. Et ainsi de suite. 48. Revenons à la Géométrie non euclidienne, et montrons que deux polygones quelconques sont comparables, c'est-à-dire qu'entre deux polygones A et B, il existe toujours l'une des trois relations $A = B$, $A > B$, $A < B$.

(to5) sont égaux : Bolyai en conclut que les quadrilatères ABFD et ABGH, qui s'obtiennent en retranchant ces deux triangles de la figure totale ABFH, sont équivalents. Mais, à notre point de vue, pour établir l'équivalence de ces deux quadrilatères, il faut montrer qu'on peut les décomposer en parties superposables chacune à chacune. Fig. 43. Cela est évident si les deux segments égaux HD, GF n'empiètent pas l'un sur l'autre. Dans le cas contraire, partageons ces deux segments HD, GF en un même nombre n de parties égales qui soient chacune moindres que HG, et, par les points de division, menons $H_1A_1, H_2A_2, \dots, G_1B_1, G_2B_2, \dots$ perpendiculaires à HF, de manière à décomposer les triangles AHD, BGF en parties respectivement égales chacune à chacune. Le quadrilatère $AH_1H_1A_1$ est contenu tout entier dans AHGB, puisque $HH_1 <$

(10G) Inversement, si sur la droite HF on prend un point quelconque D', en menant la droite AD' et en la prolongeant d'une longueur D'C' = AD', on aura un triangle ABC équivalent à AHGB, et par conséquent (46) équivalent au triangle ABC. De plus, on peut faire en sorte que le côté AC du nouveau triangle soit égal à une longueur donnée / plus grande que AC : il suffit pour cela de prendre AD' = ... Ainsi, étant donnés deux triangles quelconques T et T', on pourra construire deux triangles ABC, ABC (fig. 14) de même base AB, respectivement équivalents à T et à T'. Joignons les milieux D, E et D', E' des côtés CA, CB et C'A, C'B; et abaissons BG et AH perpendiculaires sur DE; le quadrilatère ABGH ainsi obtenu étant rectangle et isocèle, la perpendiculaire k AB en son milieu O est aussi perpendiculaire à DE OM'; alors D'E' rencontre BC en un point E'', et, en prenant sur BC une longueur E''C' = BE'', on obtient un triangle ABC équivalent à ABC et contenu tout entier dans ABC : donc T = T - hACC > T'; Ou OM' > OM; alors on trouve un triangle T'' tel que d'oij r > T.

(I07) Soient maintenant deux polygones quelconques A et B; décomposons-les en triangles $a/$ et $b^{\wedge}$ $A = \text{flTj} -H^{\wedge}j 4- \dots$, $B = :^{\wedge}, -h^{\wedge}, -f- .$. . . Comparons les triangles a , et $b^{\wedge}$ comme on vient de Texpliquer; nous trouverons, par exemple, $a, —^{\wedge}, 4-a;$; comparons ensuite a , et $b.^{\wedge}$ nous trouverons, par exemple, $^{\wedge}, rr: a, -+. Pi$; comparons «2 et $\text{fl}^{\wedge}$, et ainsi de suite. Finalement, Ou les deux polygones A, B seront épuisés en même temps, et alors $A = B$, Ou B sera épuisé avant A; alors, en appelant A' ce qui reste de A, on a $A=:B- \} -A'>B$; Ou A sera épuisé avant B; alors, en appelant B' ce qui reste de B, on a $B = A -h B' > A$. Dans le premier cas, le déficit de A sera égal à celui de B; dans le second cas, il sera plus grand, et, dans le troisième, plus petit. Donc, réciproquement, selon que le déficit de A sera égal, supérieur ou inférieur à celui de B, on en conclura que A est lui-même équivalent, supérieur ou inférieur à B. Corollaires. 1* $^{\wedge}$ Si le déficit de A est égal à la somme des déficits de B et de C, on a $A = B 4- C$. 2? Si $A > B$, il y a une infinité de polygones X qui vérifient l'équation $B-hX = A$;

(108) mais ils sont tous équivalents puisqu'ils ont même déficit, savoir déficit A — déficit B ; on peut donc désigner l'un quelconque d'entre eux par le symbole A - B. 3** Si $A > B$, on peut trouver un entier m tel que $\frac{A}{nB} > A$; cela résulte de ce qu'on peut déterminer m de façon que m déficit B $>$ déficit A. ff A et B étant deux polygones quelconques, à chaque entier n, on peut faire correspondre un entier m tel que $mH^i A < (a^h - i)B$. La fraction — ainsi déterminée s'appelle la i^{e} valeur approchée à près du rapporter; et l'on définit le rapport 't lui-même, comme un nombre supérieur ou égal à tous les — et inférieur aux Mais, pour tous les systèmes de valeurs de $\frac{H}{i}$ et de $\frac{A}{z}$ satisfaisant aux relations précédentes, on a aussi m déficit H $\frac{1}{j}$ déficit A $< (\frac{A}{j} - h i)$ déficit B. 11 en résulte A déficit A B "" déficit B' Le rapport de deux polygones est égal au rapport de leurs déficits. C'est le théorème que nous voulions établir. On voit que, à la rigueur, il n'est pas nécessaire de savoir diviser B en n parties équivalentes. Néanmoins, pour ne rien laisser à désirer, nous allons montrer que cette division est possible toutes les fois que n est une puissance de 2, Soit $n = 2.^y$ et désignons par $^$ le déficit de B. On peut choisir un

(I09) entier q de façon à satisfaire aux relations

(" le déficit de Q, on peut déterminer le point M de façon que - -
 $\angle AMP < 03.2$ En effet, construisons un triangle rectangle dont l'un des
angles aigus soit égal à $\angle - \text{co } j$, et soit S le côté de l'angle droit de ce
triangle qui est adjacent à l'angle (- • — co); nous pourrions déterminer le
point M de façon que $MP = S$ (35), et alors l'angle AMP, qui est l'angle de
parallélisme correspondant à la distance S, sera manifestement plus grand
que (— 0)). c. q. f. d. Ainsi le quadrilatère OMPF a pour limite ODEB, et
l'on peut dire, dans un certain sens, que l'aire illimitée AOFG est
équivalente à ODEB. Vu et approuvé : Paris, le 13 septembre 1892. Le
Doyen de la Faculté des Sciences, G. DARBOUX. Vu et permis d'imprimer
: Paris, le 13 septembre 1892. Le Vice-Recteur de l'Académie de Paris,
GRÉARD.

The text on this page is estimated to be only 22.78% accurate

SECONDE THÈSE. PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA
FACULTÉ. Fonctions doublement périodiques de troisième espèce. Vu et
approuvé : Paris, le 13 septembre 1891. Le Docteur de la Faculté des
Sciences, G. DARBOUX. Vu et permis d'imprimer : Paris, le 13 septembre
1891. Le Vice-Recteur de l'Académie de Paris, GRÉARD. 1893 Paris. —
Imprimerie Gautbibr-Villars et fils, quai des Grands-Augustins, 55.

SUPPLÉMENT AU N° 10. Pour déterminer la forme de la fonction $f(x)$, il suffit de montrer qu'elle satisfait à l'équation fonctionnelle $f(x + h) + f(x - h) = 2f(x) + f(h)$. Pour cela, sur le côté AY d'un angle droit XAY , prenons trois longueurs $AB = x - h$, $AC = x$, $AD = x + h$; menons la perpendiculaire à AY au point D , et, d'un point D' de cette perpendiculaire, abaissons $D'A'$ perpendiculaire sur AX ; soient B', C les points de rencontre de $A'D'$ avec les perpendiculaires à AY aux points B et C ; enfin abaissons $B'E, D'F$ perpendiculaires sur la droite $B'C$

The text on this page is estimated to be only 5.78% accurate

6444 UNO »'««fV, ^^if^ UNIVERSmr OF MICHIOAN V 3001606024