



This book was produced in EPUB format by the Internet Archive.

The book pages were scanned and converted to EPUB format automatically. This process relies on optical character recognition, and is somewhat susceptible to errors. The book may not offer the correct reading sequence, and there may be weird characters, non-words, and incorrect guesses at structure. Some page numbers and headers or footers may remain from the scanned page. The process which identifies images might have found stray marks on the page which are not actually images from the book. The hidden page numbering which may be available to your ereader corresponds to the numbered pages in the print edition, but is not an exact match; page numbers will increment at the same rate as the corresponding print edition, but we may have started numbering before the print book's visible page numbers. The Internet Archive is working to improve the scanning process and resulting books, but in the meantime, we hope that this book will be useful to you.

The Internet Archive was founded in 1996 to build an Internet library and to promote universal access to all knowledge. The Archive's purposes include offering permanent access for researchers, historians, scholars, people with disabilities, and the general public to historical collections that exist in digital format. The Internet Archive includes texts, audio, moving images, and software as well as archived web pages, and provides specialized services for information access for the blind and other persons with disabilities.

Created with hocr-to-epub (v.1.0.0)

Google This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online. It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover. Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you. Usage guidelines Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying. We also ask that you: + Make non-commercial use of the files We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for Personal, non-commercial purposes. + Refrain from automated querying Do not send automated queries of any sort to Google's System: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help. + Maintain attribution The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it. + Keep it legal Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe. About Google

Book Search Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>

Google A propos de ce livre Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne. Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public. Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains. Consignes d'utilisation Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées. Nous vous demandons également de: + Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial. + Ne pas procéder à des requêtes automatisées N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter Nous encourageons pour la réalisation de ce type de

travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile. + Ne pas supprimer l'attribution Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas. + Rester dans la légalité Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère. A propos du service Google Recherche de Livres En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse <http://books.google.com>

**The text on this page is estimated to be only 0.00% accurate**

y

**The text on this page is estimated to be only 26.33% accurate**

'..m. . I



**The text on this page is estimated to be only 22.01% accurate**

!«<> D'ORDRE THESES 9W. PRÉSENTÉES A LA FACULTÉ  
DES SCIENCES DE PARIS POUR OBTENIR LE GRADE DE  
DOCTEUR ES SCIENCES MATHÉMATIQUES, Par m. René BAIBË^  
Professeur au Lycée de Bar-le-Dao. jro THESE. — Sur les fonctions de  
variables réelles. « 2mo THESE. — Propositions données par la Faculté.  
Soutenues le mars 1899 devant la Commission d'Examen. MM.  
DARBOUX, Président. APPELL, r>Tr«ADr\ ' Examinateurs. MILAN,  
IMPBIMEIUE BEKNARDONI DE C. REBESCHINI & C. Bue Bovello,  
14. 1899

\^ ; MAY 29 1901.; j • i ' • . > • > - ^ université' ^ de paris  
 FACULTÉ DES SCIENCES. DOTEPT PBOFESSECB HOHORAIRE  
 PROFESSEURS. PROFEÏLSEIJBS ADJOINTS. MM. DARBOUX  
 HERMITE. DE LACAZE-DUTHIERS\*. TROOST FRIEDEL LIPPMANN  
 HAUTEFEUILLE. BOUTY APPELL DUCLAUX BOUSSINE8Q  
 PICARD... POINCARÉ . DELAGE... BONNIER DA8TRE DITTB  
 MUNIER-CUALMAS GIARD WOLF. . . . EOENIGS VÉLAIN. .  
 GOURSAT. CHATIN. SECRÉTAIRE. PELLAT PUISEUX  
 FOUSSEREAU. Géométrie supérieure. Anatomie» Zoologie, Physiologie  
 comparée. Chimie. Chimie organique. Physique. Minéralogie. Physique.  
 Mécanique rationnelle. Chimie biologique. Physique mathématique et  
 Calcul des probabilités. Analyse supérieure et Algèbre supérieure.  
 Astronomie mathématique et Mécanique céleste. Zoologie, Anatomio,  
 Physiologie comparée. Botanique. Physiologie. Chimie. Géologie.  
 Zoologie, Evolution des êtres organisés. Astronomie physique. Mécanique  
 physique et expérimentale. Géographie physique. Calcul différentiel et  
 Calcul intégral. Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée. Physique.  
 Mécanique et Astronomie. 3464-98 MILAN. — IMPBIM£KI£  
 BEBNABDONI DE G. BEBESCHINI & C.

**The text on this page is estimated to be only 13.12% accurate**

Ttm^m^^rm^--^1 A Monsieur DIN[. Professeur à l'Université de  
Pise. MoNsiEOB VOLTERRA. Professeur 1 l'Université de Turin.

•f, ^

PREMIÈRE THÈSE Sur les fonctions de variables réelles

INTRODUCTION. Le mot fonction<sup>1</sup> qui a servi primitivement à désigner les différentes puissances d'une même quantité<sup>2</sup> a pris une signification de plus en plus étendue, jusqu'à ce que Dirichlet ait donné à ce mot le sens qu'on lui attribue aujourd'hui. Il y a fonction dès qu'on imagine une correspondance entre des nombres, qu'on convient de considérer comme les états de grandeur d'une même variable  $y$ , avec d'autres nombres, tous distincts, qu'on convient de considérer comme les états de grandeur d'une même variable  $x$ . On ne s'occupe pas, dans cette\* définition, de rechercher par quels moyens la correspondance peut être effectivement établie ; on ne cherche même pas s'il est possible de l'établir. La notion de fonction, entendue de cette manière, est entièrement contenue dans la notion de détermination] ce point de vue s'oppose à celui qui consiste à partir de certaines fonctions simples, et à considérer des expressions composées avec ces fonctions simples, en réservant le mot de fonction aux expressions ainsi obtenues. Après avoir défini, d'après Dirichlet, la fonction la plus générale, on est conduit à distinguer les fonctions en différentes catégories, suivant qu'elles possèdent ou ne possèdent pas telle ou telle propriété; c'est ainsi, par exemple, qu'une fonction peut être continue ou discontinue, ponctuellement ou totalement discontinue, intégrable ou non intégrable, posséder ou non une dérivée, etc.

• . . Chacune de ces distinctions conduit à une étude particulière, et toutes ces études présentent le caractère suivant: on recherche si le fait d'imposer à la fonction la plus générale telle ou telle restriction s'exprimant par une définition simple entraîne d'autres conséquences simples. Par exemple, on a reconnu, contrairement à ce qui avait été longtemps admis, qu'il existe des fonctions continues n'admettant pas de dérivée. Ce 1

Baire: Sur les fonctions résultat doit être entendu de la manière suivante: le fait d'imposer à une fonction la continuité n'entraîne pas comme conséquence l'existence d'une dérivée; il en résulte que les fonctions continues qui admettent une dérivée ne forment qu'une classe particulière dans l'ensemble des fonctions continues; autrement dit, c'est 'par exception qu'une fonction continue admet une dérivée. Indiquons un autre exemple: on démontre qu'une fonction continue est uniformément continue] ces deux propriétés, la continuité et la continuité uniforme, sont définies d'une manière différente l'une de l'autre; on pouvait croire a priori que l'une n'entraîne pas l'autre, c'est-à-dire qu'il existe des fonctions continues, mais non uniformément continues; le théorème que je rappelle montre que cela n'est pas. D'une manière générale, étant donné un ensemble de propriétés bien définies qu'on impose à une fonction, il y a lieu d'étudier aussi complètement que possible les propriétés qui sont des conséquences nécessaires des premières. C'est, à ce qu'il me semble, la manière la plus nette d'interpréter les résultats des différents travaux entrepris sur les fonctions de variables réelles; parmi ces travaux, qui sont nombreux, je me contenterai de citer le mémoire de M. Darboux: « Sur les fonctions discontinues », et l'ouvrage de M. Dini: *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali* jj. Le présent travail est conçu dans cet ordre d'idées; je vais indiquer brièvement la nature des questions que je me suis proposé de résoudre. Après avoir, dans le premier chapitre, exposé quelques considérations générales qui s'appliquent à toutes les fonctions, et donné des définitions dont j'ai besoin dans la suite du travail, j'aborde, dans le chapitre II, l'étude des deux problèmes suivants: 1. Une fonction de deux variables  $x$  et  $y$  étant assujettie à être continue par rapport à chacune d'elles, les valeurs qu'elle prend sur une ligne quelconque forment une fonction d'une variable qui peut être discontinue: je me propose d'en déterminer la nature. 2. Quelles sont les fonctions discontinues qu'il est possible de représenter par des séries dont les termes sont des fonctions continues? Je suis parvenu à résoudre complètement ces deux problèmes, qui se trouvent admettre la même solution, ce qui m'a conduit à les traiter simultanément: il existe une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction discontinue puisse être obtenue, soit dans les conditions du premier problème, soit dans les conditions du second; le chapitre II est tout entier consacré à l'établissement de cette condition, que j'ai été conduit à énoncer ainsi: il -^

de variables réelles. faut et il suffit que la fonction donnée soit 'ponctuellement discontinue relative' ment à tout ensemble parfait. Les questions traitées dans les deux chapitres suivants, qui sont- des généralisations en divers sens des questions précédentes, sont loin d'être résolues d'une manière aussi complète. Dans le chapitre III, où il ne s'agit que de fonctions d'une seule variable, je définis, en particulier, les fonctions développables en séries doubles de fonctions continues] n'étant pas parvenu, en ce qui concerne ces fonctions, à trouver une condition caractéristique aussi complète que celle du chapitre II, je me suis contenté d'exposer les résultats partiels que j'ai obtenus sur la question. Dans le chapitre IV, je donne quelques propriétés des fonctions de plusieurs variables, continues par rapport à chacune d'elles. Enfin j'étudie, dans le chapitre V, une question en apparence assez distincte de celles qui précèdent. Je fais remarquer tout d'abord que les raisonnements par lesquels on intègre les équations aux dérivées partielles les plus simples, par exemple l'équation:  $\Delta u = 0$  introduisent l'hypothèse de la continuité des dérivées qu'on emploie. Il est donc légitime de se proposer le problème suivant: rechercher toutes les fonctions assujetties seulement aux conditions indispensables pour que les éléments qui entrent dans l'équation donnée aient un sens et vérifient cette équation. Par exemple, en ce qui concerne l'équation:  $\Delta u = 0$ , on sait que, si l'on assujettit une fonction à «être continue ainsi que ses dérivées, et à satisfaire à l'équation, elle doit être constante sur chaque droite:  $x^2 + y^2 = \text{Constante}$ ; il s'agit de savoir si, lorsqu'on supprime l'hypothèse de la continuité des dérivées, le résultat subsiste ou non. D'une manière générale, il arrive très souvent qu'une question d'analyse étant posée, on introduit, pour traiter cette question, des hypothèses plus restrictives qu'elle n'en comporte par elle-même ; on peut donc dire qu'on laisse inachevée une partie du problème; il s'agirait de traiter, au moins dans quelques cas simples^ cette partie de la question qu'on a, pour ainsi dire, abandonnée en chemin ; c'est ce que j'ai essayé de faire pour l'exemple traité dans le chapitre V; je suis arrivé, comme on le verra, à résoudre en partie la question. Les principaux résultats contenus dans ce travail ont été communiqués à l'Académie des Sciences dans les séances du 8 novembre 1897 , du 21 mars, des 6 et 13 juin 1898,

Baire: Sur les fonctions CHAPITRE I. Généralités sur les fonctions de  $n$  variables. 1. Considérons une fonction quelconque des  $n$  variables  $x^1, x^2, \dots, x^n$  cela veut dire que, dans un certain domaine  $D$  de l'espace à  $n$  dimensions, nous supposons qu'à chaque système  $(a^1, a^2, \dots, a^n)$ , appartenant au domaine  $D$  correspond un nombre, que nous désignons par  $f(x^1, x^2, \dots, x^n)$ . Soit un point  $P$  du domaine  $D$ , de coordonnées  $(a^1, a^2, \dots, a^n)$  considérons la sphère à  $n$  dimensions de centre  $P$  et de rayon  $p$ , c'est-à-dire l'ensemble des points pour lesquels on a : L'ensemble des valeurs de la fonction en tous les points dont les coordonnées satisfont à cette condition a une limite supérieure (ou maximum)  $M_p$ . Prenons une suite décroissante de nombres positifs, tendant vers 0. Soit : On prendra successivement les sphères de centre  $P$  et de rayons  $p_1, p_2, \dots, p_n$ ; soient  $M_1, M_2, \dots, M_n$  les limites supérieures de  $f$  dans ces sphères; chaque sphère étant comprise dans la précédente, on a évidemment la suite d'inégalités :  $M_1 \geq M_2 \geq \dots \geq M_n$  (1) La quantité  $M_n$ , qui ne croît jamais, a une limite déterminée quand  $p$  croît indéfiniment; je désignerai par  $M$   $[(a^1, a^2, \dots, a^n)]$  ou  $M_p$  cette limite, et je dirai que  $M_p$  est le maximum de la fonction au point  $P$ . 2. On sera conduit au même nombre  $M_p$ , si au lieu d'une suite de sphères, on considère une suite de domaines de forme quelconque  $D_1, D_2, \dots, D_n$  pourvu qu'ils satisfassent aux conditions suivantes: 1. Le point  $P$  est intérieur à chacun de ces domaines, en entendant par là qu'il existe une sphère de centre  $P$  et de rayon positif dont tous les points intérieurs font partie du domaine. 2. La plus grande dimension de  $D_q$  tend vers 0, en entendant par là que, si petit que soit  $p$ , il existe une valeur de  $q$  telle que  $D_q$  est contenu tout entier à l'intérieur de la sphère de centre  $P$  et de rayon  $p$ .

de variables réelles. Supposons en effet ces deux conditions remplies, et soient  $M'_q, J'_q, \dots$  les limites supérieures de la fonction dans  $D$ ,  $A_j \dots D_q$ . En vertu des deux propriétés précédentes, il existe pour tout nombre  $M'_q$  deux nombres  $J'_q, M_p$  de la suite (1) tels que l'on a: et de plus,  $p$  et par suite  $p'$  croissent indéfiniment avec  $q$ . Donc  $M'_q$  a pour limite  $M_q$ .

3. Les propriétés fondamentales du nombre  $J_f$ , qui résultent immédiatement de sa définition, sont les suivantes: 1.° Si petit que soit le nombre positif  $\epsilon$ , il existe un nombre positif  $p$  tel que, dans la sphère de centre  $P$  et de rayon  $p$ , on a en tout point:  $f(X_i, a_1, \dots, a_n) < J_f + \epsilon$ . 2.° Si petits que soient  $\epsilon$  et  $p$ , il existe dans la sphère de rayon  $p$  moins un point pour lequel on a: 4. Etant donnée une fonction  $f$ , j'aurai souvent besoin de considérer simultanément, d'une part la limite supérieure de  $f$  dans un certain domaine continu à  $n$  dimensions, d'autre part le maximum en un point  $j$  tel que je viens de le définir. Je préciserai, lorsque cela sera nécessaire, en désignant par  $M[f, D]$  le maximum de  $f$  dans le domaine  $D$ , et par  $M[f, P]$  le maximum de  $f$  au point  $P$ . Remarquons que, d'après nos définitions, si un point  $P$  est à l'intérieur d'un domaine  $D$  (c'est-à-dire s'il existe une sphère de centre  $P$  contenue dans  $D$ ), on a certainement: 5. J'appelle l'attention sur un cas particulier intéressant. Supposons qu'en un point  $P$  on ait:  $M[f, P] = f$ . Alors, si petit que soit le nombre positif  $\epsilon$ , on peut trouver un nombre  $p$  tel que, dans la sphère de centre  $P$  et de rayon  $p$ , on ait en tout point: La fonction possède donc au point  $P$  l'une des deux propriétés dont l'ensemble

Baire: Sur les fonctions constitue la continuité; l'autre serait exprimée par la condition; Nous conviendrons de dire que la fonction possède au point  $P$  la semi-continuité supérieure. Si la propriété a lieu pour tous les points d'un domaine, nous dirons que la fonction, dans ce domaine, est semi-continue supérieurement. On peut dire aussi qu'elle est toujours égale à son maximum. 6, Pour donner tout de suite des exemples de fonctions possédant la propriété précédente, partons d'une fonction quelconque  $f(x)$  sur  $[a, b]$ , et appelons

de variables réelles. D'une manière générale, un domaine ouvert à  $n$  dimensions est tout ensemble de points possédant cette propriété. On voit que l'ensemble  $S$  ne rentre pas dans cette catégorie de domaines. Cela posé, je dis que, dans tout domaine ouvert, les deux fonctions  $f$  et  $f$  ont même limite supérieure; cela tient à ce que,  $X$  étant un nombre quelconque, si l'une des deux fonctions peut dépasser dans le domaine la valeur  $X - \epsilon$ , quel que soit  $\epsilon$ , cela est également vrai pour l'autre fonction. (On voit aisément que le raisonnement ne s'applique plus si le domaine n'est pas ouvert.) Ce point étant établi, pour définir le maximum en un point de  $f$  et de  $y$ , nous pouvons employer une suite de domaines ouverts  $D_1, D_2, \dots, D_n, \dots$ ; les limites supérieures de  $f$  et

8 Baire: Sur les fonctions. Donnons, à titre d'exemple, quelques propriétés simples de ces fonctions. La somme de plusieurs fonctions semi-continues supérieurement, est une fonction semi-continue supérieurement. Si, dans un certain domaine, une fonction semi-continue supérieurement a pour limite supérieure  $X$ , elle atteint, en un certain point du domaine, la valeur 1. Il suffit, pour s'en rendre compte, de reprendre le raisonnement qu'on emploie lorsqu'on suppose la fonction continue : on divise le domaine donné en un nombre fini de domaines partiels; dans l'un au moins de ces domaines la limite supérieure est  $X$ ; on démontre ainsi l'existence d'un point où le maximum de la fonction est  $X$ , et où par suite la fonction est elle-même égale à  $X$ . Indiquons enfin une propriété qui est, en un certain sens, la propriété caractéristique des fonctions semi-continues supérieurement. Soit  $P_0$  un point limite de points  $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$  supposons que la suite  $\{f(P_n)\}$  ait une limite  $a$ , ou, plus généralement, soit  $a$  un nombre tel que, si petit que soit  $\epsilon$  supposé positif, les quantités de la suite précédente surpassent, à partir d'un certain rang,  $a - \epsilon$ ; on peut affirmer que l'on a :  $f(P_0) \geq a$  car si l'on avait  $f(P_0) < a$ , la fonction ne posséderait pas au point  $P_0$  la semi-continuité supérieure. Sous une autre forme, nous pourrions dire que si une fonction  $f$  est semi-continue supérieurement, l'ensemble des points où  $f \geq a$  est toujours un ensemble fermé, c'est-à-dire un ensemble contenant son dérivé. De même, si une fonction est semi-continue inférieurement, l'ensemble des points où  $f \leq a$  est essentiellement fermé.

9. Soit  $f$  une fonction quelconque ( $f$  son maximum,  $m$  son minimum, et soit  $g$  une fonction continue. Je dis que la fonction  $f+g$  a pour maximum  $(f+g)$  et pour minimum  $m+g$ . Démontrons par exemple que  $f+g$  a, au point  $P_0$ , son maximum égal  $h$  ( $f_0 + g_0$ ). En effet, si on se donne un nombre positif  $\epsilon$ , on peut déterminer autour de  $P_0$  un domaine en tout point duquel on aura à la fois :  $f > f_0 - \epsilon$  et :  $g > g_0 - \epsilon$ .

**The text on this page is estimated to be only 28.58% accurate**

de variables réelles. 9 et par suite :  $f^+ + i79_0 \rightarrow I$  • Dans ce domaine, il y a au moins un "point où Ton a : et par suite :  $f + 9 > 9_0 + 9_0 \rightarrow$  ^' ce qui montre que l'on a :  $M[f + 9j P_0] = 9_0 + 9_0$ . 10. Continuons à employer les notations  $f_j$  ç, ^ pour désigner respectivement une fonction quelconque, son maximum et son minimum. On a, en tout point: Chacune des deux fonctions  $9 \rightarrow /"$ ,  $f \rightarrow ^$  est positive ou nulle. ^ Je dis que, dans tout domaine à n dimensions,  $y \rightarrow /"$  a pour limite inférieure 0. Je peux toujours, dans le domaine donné, prendre un domaine ouvert; il me suffit donc de démontrer la chose pour un domaine ouvert. Supposons donc que la limite inférieure de

10 Baire: Sur les fonctions. Donc on aurait:  $M[j, D] \wedge M[f, D] + 1$ , ce qui n'est pas possible, puisque nous savons qu'on a:  $M[\wedge, D] \wedge M[f, D]$ . On reconnaît de même que  $f \in R$  pour minimum 0 dans, tout domaine  $h$   $n$  dimensions. On peut aussi conclure de là que chacune des deux fonctions ( $p \rightarrow /"$ ,  $/ * \rightarrow i //$ ), a pour minimum 0 en tout point. 11. En chaque point  $P$  je pose:  $W(X_1, X^j, \dots, X_n) = (f\{X_i, j, T_j, \dots, X_{fi}\} \vee V^y i T_j, \dots, X_n)$  et je conviens d'appeler  $o$ ) VosciUation au point  $P$ ; c'est aussi, comme on le voit, la limite de l'oscillation de la fonction dans un domaine contenant  $P$  à son intérieur et dont la plus grande dimension tend vers 0. Comme pour  $M$  et  $w$ ?, nous emploierons les notations  $w[/*, D]$  et  $w[/", P]$  pour désigner l'oscillation de  $f$  dans le domaine  $D$  et l'oscillation au point  $P$ . De par sa nature même, la fonction  $w$  est positive ou nulle. En un point où elle est nulle, la fonction  $f$  est continue; au contraire, en un point où elle est positive, il y a une discontinuité pour  $f$ . On peut dire, en quelque sorte, que la fonction  $w$  \f\ relativje à la fonction  $f$  caractérise le degré de discontinuité de  $f$  aux différents points. Je dis que «  $[/*]$  est semi-continue supérieurement. En effet, si on po donne un nombre positif  $c$ , on peut trouver autour de tout point  $P_0$  un domaine où l'on aura partout : et:  $'/ \cdot - |$  inégalités d'où l'on conclut, par soustraction :  $w$

de variables réelles. 11 12. Je vais considérer une catégorie particulière de fonctions, celles pour lesquelles  $f$  a son minimum nul dans tout domaine à  $n$  dimensions, et par suite en tout point. La considération de ces fonctions s'introduit d'une manière naturelle; on peut dire en effet que, pour une fonction de cette nature, il y a, dans tout domaine, des points où elle se rapproche autant qu'on veut d'une fonction continue. Mais nous allons préciser cette idée un peu vague, en montrant qu'il existe effectivement dans tout domaine des points où la fonction est continue. Je vais d'abord établir un théorème qui me sera souvent utile dans la suite. Si une fonction  $f$  est semi-continue supérieurement, et si elle a en tout point son minimum nul, il existe, dans tout domaine, des points où  $x \rightarrow w$ . En effet, prenons un domaine  $D$  quelconque. Puisque, dans ce domaine,  $f$  a son minimum nul, si on se donne un nombre positif, on peut trouver un point  $P$  à l'intérieur de  $D$  où l'on a : Ensuite, à cause de la semi-continuité supérieure, on peut trouver un domaine  $Z$ , entourant  $P$  où l'on aura partout :  $f < \epsilon$ , et quel que soit  $\epsilon$ , on peut trouver un domaine  $D_\epsilon$  où  $f$  a partout : Prenons maintenant une suite décroissante de nombres positifs tendant vers 0, par exemple  $\epsilon_i = \frac{1}{i}$ . Dans  $Z_i$  nous trouverons un domaine  $A_i$  où l'on aura partout :  $f < \epsilon_i$ .

12 Baire: Sur les fonctions » ■- ■■■■ ■>.-^^■■■^■■^■■^■ ■  
 —■■-■ ■■■■^■b ■■ i » i» ■ ■ ■■■■ I ■ ■ i I |^^^^^^^»^ il » ■ ^ — ■  
 ■ ■-■■■■ ■■■■-■ ■,..-■■-- \*■ — — ^ — Les domaines  $Z>, , A, \dots -D_n$  .  
 étant tels que chacun d'eux est contenu dans le précédent, il existe au moins  
 un point limite contenu à l'intérieur de tous les  $D_n$  On doit avoir, en ce  
 point,  $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = 0$ , ce qui démontre le  
 théorème. Il n'est pas inutile de remarquer que les deux conditions données  
 dans l'énoncé du théorème sont indispensables. En effet, il est bien évident  
 d'une part qu'une fonction peut avoir en tout point son minimum nul, sans  
 jamais atteindre la valeur 0; citons, par exemple, la fonction  $f(x)$  qui est  
 égale à 1 pour  $x$  irrationnel, et à 0 pour les valeurs de la forme  $a/q$ ;  
 D'autre part, une fonction assujettie à être semi-continue supérieurement,  
 peut ne jamais atteindre la valeur 0, et cependant avoir son minimum nul en  
 un point, ou même en tous les points d'un certain domaine à  $n - 1$   
 dimensions, s'il s'agit d'une fonction de  $n$  variables; pour former un tel  
 exemple, prenons dans le plan un arc de courbe  $AB$ , et formons une  
 fonction continue ayant la valeur 0 aux points de cet arc, une valeur positive  
 aux autres points du plan ; remplaçons ensuite les valeurs aux points de l'arc  
 $AB$  par une succession continue de valeurs positives; la nouvelle fonction  
 est semi-continue supérieurement en tout point; elle a, en chaque point de  
 $AB$  son minimum nul, et cependant n'atteint jamais la valeur 0. Je vais  
 maintenant tirer une conséquence du théorème que je viens de démontrer,  
 ou, pour mieux dire, énoncer ce théorème sous une autre forme. Nous  
 reconnaissons que si  $f$  est semi-continue supérieurement, et si l'on a partout  
 $f > 0$ , les points où le minimum de  $f$  est nul ne peuvent pas former un  
 domaine continu à  $n$  dimensions, car alors il existerait, d'après la  
 démonstration que nous venons d'exposer, des points où l'on aurait  $f = 0$ .  
 L'ensemble de ces points est d'ailleurs fermé ; il ne peut donc pas être dense  
 (\*) par rapport à un domaine à  $n$  dimensions; je déduis de cette remarque  
 l'énoncé suivant, qui est une transformation de celui de tout à l'heure: Si une  
 fonction  $f$  est semi-continue supérieurement et est toujours positive y il  
 existe dans tout domaine à  $n$  dimensions un domaine de même nature dans  
 lequel  $f > 0$ , son minimum positif (\*) On dit qu'un ensemble est dense par  
 rapport à un domaine si son ensemble dérivé contient tous les points de ce  
 domaine. Voir, par exemple: Borel, Leçons sur la théorie des fonctions,  
 page 38.

(le variables nielles. 13 Revenons aux fonctions pour lesquelles  $o$  a son minimum nul en tout point; d'après ce que nous venons de voir, il existe dans tout domaine à  $n$  dimensions (autrement dit, au voisinage de tout point) des points en chacun desquels on a  $u = 0$ , et où par suite la fonction est continue. Une telle fonction est dite 'ponctuellement discontinue' toute fonction qui n'est, pas ponctuellement discontinue est dite totalement discontinue. On voit que, si une fonction est totalement discontinue, il existe nécessairement un domaine à  $n$  dimensions dans lequel l'oscillation en chaque point de cette fonction a son minimum positif. Les fonctions ponctuellement discontinues sont caractérisées par ce fait que, en tout point, et dans tout domaine, le minimum de  $u$  est nul. On peut encore dire que l'ensemble des points où  $w < \epsilon$ ,  $\epsilon$  étant un nombre positif, n'est dense dans aucun domaine à  $n$  dimensions. Montrons qu'une fonction semi-continue, supérieurement par exemple, rentre dans cette catégorie de fonctions. Soit en effet  $f$  la fonction considérée ; en reprenant les notations déjà employées aux § 9 et 10, on a, dans le cas actuel : et par suite : or, nous avons montré que, dans tous les cas,  $f$  a son minimum nul partout. Donc  $w$  a son minimum nul en tout point, et  $f$  est ponctuellement discontinue. 13. Pour terminer ce chapitre, je vais donner un théorème sur les fonctions quelconques, qui comprendra comme cas particulier le théorème connu relatif aux fonctions continues : La continuité est uniforme. Soit  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  une fonction quelconque. Considérons un point  $P$ , et une sphère à  $n$  dimensions de centre  $P$  et de rayon  $p$  dans cette sphère (considérons la sphère fermée, par exemple), la fonction a une oscillation déterminée  $w$ ; si je fais varier  $p$  je pourrai considérer  $w$  comme une fonction de  $p$  définie pour les valeurs positives de  $p$ . Pour  $p = 0$ , j'attribuerai à la fonction  $w$  la valeur limite des valeurs qu'elle prend lorsqu'on fait tendre  $p$  vers 0, c'est-à-dire ce que j'ai appelé l'oscillation au point  $P$ . Or, posons, donnons-nous un nombre positif  $X$ ; le seul fait que  $w$  est une fonction de  $p$  non décroissante suffit pour qu'on soit assuré de l'existence d'un nombre  $r$  parfaitement déterminé, tel que : pour  $0 < p < r$  on a :  $w(p) < X$ .

14 Baire: Sur les fonctions Pour  $p = r^{\wedge}$  on peut avoir, soit  $\hat{u}(r) \cdot \rangle \}$ . Nous pouvons définir  $r$  comme la limite supérieure des nombres  $p$  pour lesquels on a:  $(\hat{u}(p)) \in X$ . On peut être conduit, par la définition précédente, à attribuer à  $r$  la valeur  $+\infty$  cela ne créera, d'ailleurs, aucune difficulté dans les applications. On reconnaît tout de suite que si Ton avait pris des sphères ouvertes au lieu de sphères fermées, on aurait trouvé le même nombre limite  $r$ ; il suffit de remarquer que toute sphère ouverte de rayon  $\blacktriangleright r$  contient une sphère fermée de rayon  $\gg r$ . Au lieu de considérer des sphères de centre  $P$  et de rayon variable, on pourrait considérer des domaines de forme quelconque, mais assujettis aux conditions suivantes : l'ensemble des points qui constituent le domaine variable est déterminé par la valeur d'un paramètre unique  $j_0$ , qui prend les valeurs positives et nulle; si l'on a  $p < p_0$  le="" domaine="" d="" qui="" correspond="" h.="" p="" est="" contenu="" tout="" entier="" dans="" enfin="" si="" tend="" vers="" la="" plus="" grande="" dimension="" du="" ces="" conditions="" raisonnement="" pr="" applicable="" il="" existe="" un="" nombre="" r="" tel="" que="" pour="" l="" correspondant="" x="" tandis=""  $> r$ , cette oscillation est  $> X$ . Reprenons le cas où les domaines considérés sont des sphères, et soit  $X$  un nombre positif déterminé, que nous laissons fixe, tandis que nous faisons varier le point  $P$ ;  $r$  devient alors une fonction du point  $P$ ; je vais démontrer que cette fonction est continue^ il suffira, pour s'en rendre compte, de reprendre un raisonnement employé par M. Lûroth dans le cas où  $f$  est une fonction continue {Math. Annalen^ Bd. VI). Il s'agit de démontrer que, au voisinage de  $P_0$ ,  $r(P)$  est aussi voisin qu'on veut de  $r(P_0) = r_0$ . Pour cela, considérons la sphère  $2_0$  de centre  $P_0$  et de rayon  $r_0^*$ , en supposant d'abord  $r_0$  positif, prenons un point  $P$  à l'intérieur de  $2_0$ , et soit  $P \wedge P = d$ . Décrivons de  $P$  comme centre les sphères  $S$ , et  $\wedge 2$  de rayons respectifs  $r \odot — d$  et  $r_0 + \wedge 1$  tous les points de  $S$ , appartiennent à  $2_0$ , et tous les points de  $2_0$  appartiennent à  $8\%$ . Considérons maintenant toutes les sphères  $S$  décrites de  $P$  comme centre, avec le rayon variable  $p$ . Si  $p$

de variables réelles. 15 de là:  $r(P)^{\rho_0} \rightarrow 1$  Si l'on a  $f > \rho_0 + X$ . On a par suite : En réunissant ces deux résultats, on voit que si on se donne un nombre positif  $\epsilon$  quelconque, il suffit de prendre  $P$  à l'intérieur de la sphère de centre  $P_0$  et de rayon  $\epsilon$  pour que l'on ait:  $|r(P) - r(P_0)| \vee$  supérieur à  $X$ . Puisque, en chaque point, on a  $w$

16 Baire: Sur les fonctions Supposons qu'au lieu de considérer un seul nombre  $\alpha$  attaché au point  $(a, \{X_t\})$  on en considère plusieurs, ou même une infinité pouvant former un ensemble d'une nature absolument quelconque. Le seul point essentiel que nous avons besoin d'admettre est que la question suivante ait un sens précis : Un nombre donné  $\epsilon$  est-il, oui ou non, une valeur de la fonction  $f$  au point  $(a, \{X_t\})$  ? Pour une fonction de cette nature, on peut définir, comme pour une fonction uniforme, les limites supérieure et inférieure dans un domaine, puis en partant de là le maximum, le minimum, l'oscillation en un point. Les fonctions  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , qui représentent respectivement ces trois quantités en chaque point, possèdent les propriétés que nous avons étudiées dans ce chapitre, en supposant qu'on était parti d'une fonction uniforme. Enfin, les résultats du §13 sont applicables aux nouvelles fonctions que nous considérons maintenant. J'aurai occasion, dans la suite, de faire usage de cette remarque.

CHAPITRE II « Fonctions discontinues développables en séries de fonctions continues. I. Énoncé des problèmes. 15. Quand on considère, au point de vue de la continuité, une fonction de plusieurs variables, il y a lieu de distinguer la continuité par rapport à l'ensemble de ces variables et la continuité par rapport à ces variables considérées séparément. On sait, en effet, qu'une fonction des deux variables réelles  $x$  et  $y$  peut être, en tout point, continue par rapport à chacune d'elles, sans être toujours continue par rapport à leur ensemble; cette remarque est énoncée depuis longtemps par M. Dini dans ses cours à l'Université de Pise. Citons, comme exemple, la fonction qui est égale à 0 pour l'origine, et à 1 pour les autres points du plan; on voit qu'en tout point distinct de l'origine, la fonction est continue, au sens ordinaire; à l'origine, elle est encore continue par rapport à  $x$  et par rapport à  $y$ , puisqu'elle est nulle sur chacun de ces deux axes; mais elle éprouve une discontinuité si on déplace le point de coordonnées  $(x, y)$  suivant une direction oblique; suivant la direction

de variables réelles. la réaction  $a? = y$ , par exemple, elle saute brusquement de la valeur 0 à la valeur 1. En partant de cet exemple on d'autres exemples analogues, on peut former une fonction qui sera toujours continue par rapport à chacune des deux variables, et telle cependant qu'il n'existe aucune aire où elle soit toujours continue par rapport à leur ensemble. Pour cela, rangeons tous les points du plan dont les deux coordonnées sont rationnelles en une suite simplement infinie  $(\langle i, /Si), (\langle \langle, /S), \dots (\langle n, /3n), \dots$  ce qui peut se faire, puisque ces points forment un ensemble dénombrable. Soit  $\langle \langle \langle /s$ , une fonction telle que la précédente, discontinue par rapport à l'ensemble  $(a, y)$  au seul point  $(\langle n, /3n)$ , où elle est continue par rapport à  $a$  et par rapport à  $y$ , et de plus, inférieure en valeur absolue à un nombre fixe. Si  $S a \rangle$  est une série absolument convergente,  $2anWa \langle /s$ , sera une fonction possédant les propriétés indiquées : elle sera partout continue par rapport à chacune des variables, et dans toute aire il existera des points de discontinuité par rapport à l'ensemble  $(x, y)$ .

16. On est ainsi conduit à se poser les questions suivantes. En premier lieu, si l'on assujettit une fonction de deux variables à être continue par rapport à chacune d'elles, cette condition entraîne-t-elle des conséquences simples relativement à la manière d'être de la fonction ? En particulier, et c'est l'une des questions qui feront l'objet de ce chapitre, la succession de valeurs prises par la fonction sur une courbe du plan, par exemple sur la droite  $x=f=y$  constitue une fonction d'une variable qui, nous venons de le voir, n'est pas nécessairement continue; cette fonction est-elle assujettie à des conditions, et quelles sont ces conditions? En se plaçant au point de vue en quelque sorte réciproque du précédent, on se donnera a priori une succession de valeurs sur  $a? = y$ , et l'on cherchera s'il est possible ou non de former une fonction de  $x$  et  $y$ , toujours continue par rapport à chacune de ces deux variables, et prenant sur la droite  $x = y$  les valeurs données. Ce sera le problème I.

17. Indiquons maintenant une autre question d'analyse dont le rapport avec la précédente est très étroit. Supposons qu'on ait une fonction continue par rapport à  $(a, y)$  à l'intérieur d'une aire  $A$  limitée par un contour  $C$ , et supposons qu'en chaque point de  $C$  il y ait continuité suivant la normale) j'entends par là que, lorsque le point  $M$  se rapproche indéfiniment du point  $M_0$  de  $C$  en suivant la normale

18 Baire: Sur les fonctions à C en  $J_0$ , la fonction  $f(M)$  tend vers une limite déterminée, qui est égale à  $f(M_0)$ . La succession des valeurs  $f(M_0)$  prises par la fonction sur la courbe C peut être discontinue, comme on en trouve des exemples dans des questions classiques d'Analyse; nous nous proposons d'examiner si cette succession de valeurs est assujettie à certaines lois. Je fais remarquer tout de suite que nous n'enlèverons évidemment rien à la généralité de la question en supposant que le contour C est constitué par une portion de l'axe Ox. Nous supposons donc que, dans le rectangle: on a une fonction continue par rapport à l'ensemble  $(a, y)$  en tout point sauf aux points de Ox, où elle est seulement continue par rapport à y. Il s'agira de savoir ce qu'est la fonction sur Ox. Ce sera le problème II. 18. Nous verrons dans la suite qu'il y a lieu de traiter simultanément les deux problèmes I et II. Montrons d'abord qu'on peut les considérer tous deux comme cas particuliers d'un troisième problème, dans lequel les conditions imposées à la fonction sont un peu plus générales. Supposons une fonction  $f(x, y)$  définie dans le rectangle: en tout point, il y a continuité par rapport à y; en ce qui concerne l'autre variable x, nous supposons seulement que, entre deux droites parallèles à Oy,  $y = y_1, y = y_2$  il existe toujours une droite  $y = y^*$  sur laquelle il y a continuité par rapport à x; en d'autres termes, il y a un ensemble de parallèles à Oy sur chacune desquelles la fonction est continue par rapport à x, et cet ensemble est dense par rapport à l'ensemble de toutes les parallèles à Oy. On se propose de voir ce qu'est la fonction sur une courbe du plan. Ce sera le problème III. Il est bien évident que les conditions des problèmes I et II rentrent dans les conditions du problème III. 19. Passons maintenant à un autre ordre de questions, relatives à la théorie des séries. Reprenons le cas du problème II, indiqué au § 17, où l'on suppose que la fonction  $f(x, y)$  n'a de discontinuités qu'aux points de Oy; il y a, en chacun de ces points, continuité par rapport à la variable y.

de variables réelles. 19 Prenons une suite décroissante de quantités positives et tendant vers 0; soit  $\frac{2}{19} i^{tv**} y_n) -- *9$  et traçons dans le plan les parallèles à  $Oo$ ; ayant pour ordonnées ces nombres  $t_{ij} \ t/t_j \dots$   $y_n i^{\wedge}$ » Chacune des fonctions de  $x \setminus f\{x^{\wedge} y, \}, f\{x^{\wedge} y, \}, \dots f\{X_j y_n\} j^{*}$  est une fonction continue de  $x^{\wedge}$  tandis qu'au contraire la fonction  $f\{x^{\wedge} 0\}$  peut être discontinue. D'autre part, si on donne à  $x$  une valeur fixe, la suite  $/(.r, y \gg), / \{x^{\wedge} y t\}^{\wedge***} f_i^{\wedge} j y_n) j^{*}$  a pour limite  $f\{X y 0\}$ . D'une manière générale, nous dirons qu'une fonction  $f\{x\}$  est la limite de la suite de fonctions  $f_i\{x\} y / i(a;), \dots f_n\{x\}^{\wedge} \dots$  dans un certain champ de variation de  $X_j$  si, pour chaque valeur  $X_q$  appartenant à ce champ, la suite de quantités  $f_i\{x^{\wedge} f f i^{\wedge} o l^{\wedge} *' A(^{\wedge} o) r -- ^ P^{\wedge \wedge \wedge}$  limite  $f\{x^{\wedge}$ . On voit, d'après cette définition, que dans la question précédente, la fonction discontinue  $f\{x^{\wedge} 0\}$  est la limite de la suite de fonctions continues  $f\{X_j y, \}, f\{x, y t\} j^{*} \wedge f_i^{\wedge} y y_n)''^{\wedge}$  ou, ce qui revient au même, la somme de la série de fonctions continues :  $f_i^{\wedge} i y d + 1 [f_i^{\wedge} y n^{\wedge} i) - f\{x, y n\}] j$  série qui est convergente pour toute valeur de  $a?$ , au moins dans un certain intervalle de variation. Ces remarques nous conduisent tout naturellement à étudier le problème suivant. Etant donnée une série, dont les termes sont  $^{\wedge}$ es fonctions continues de  $X y$  et que nous supposons convergente pour chaque valeur de  $x$  (dans un certain intervalle de variation) $^{\wedge}$  la somme de cette série est une fonction déterminée de  $X$ ] on sait que, lorsque la convergence est uniforme (ou même uniforme simplement, au sens donné à cette expression par M. Dini (\*)), cette fonction est continue ; mais si on suppose seulement la convergence, la fonction peut être discontinue, comme la théorie des séries trigonométriques en fournit des exemples; il y a donc lieu de rechercher quelle est la nature de cette fonction; en d'autres termes, existe-t-il un critérium précis, caractérisant les fonctions qui peuvent être représentées par des séries de fonctions continues? 20. Je veux montrer ici comment ce problème se ramène complètement au problème II (§ 17). Soit la série :  $W_j(x) + W_f(a;) + \bullet \bullet \bullet + \ll n (iP) H$  Posons :  $S_n(x) = w^{\wedge}(a?) H \setminus - U_n(x) S(x) == t_i, (a;) H h Unix) -^{\wedge} S\{x\}$  est la limite de  $S_n\{x\}$ . (\*) U. Dini, Fondamenti etc., page 103,

**The text on this page is estimated to be only 26.67% accurate**

20 Baire: Sur les fondions Prenons, comme plus haut, une suite décroissante tendant vers 0:  $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ . et traçons dans le plan les droites:  $y = y_1, y = y_2, \dots, y = y_n, \dots$ . En supposant que la série soit convergente quand  $x$  varie de  $a$  à  $1/3$ , considérons le rectangle  $AB A_i B_i$  limité par les droites  $x = a, x = 1/3, y = 0, y = y_i$  (fig. 1)j appelons  $A_i B_i$  etc.,  $A_n B_n, \dots$  les droites  $y = y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ . Je définirai dans cette région une fonction  $f(x, y)$  de la manière suivante. Sur chacune des droites  $y = y_i$  je pose:  $f(x, y_i) = S_n(x)y_i$  et sur l'axe  $Ox$ :  $f(x, 0) = S(x)$ . Cela fait, chacun des points où la fonction n'est pas encore définie se trouve être situé entre deux droites  $y = y_p$  et  $y = y_{p+1}$ . Soit  $(x, y)$  un tel point. En supposant:  $y_p < y < y_{p+1}$  je poserai:  $y - y_p = (y_{p+1} - y_p) \frac{f(x, y_{p+1}) - f(x, y_p)}{y_{p+1} - y_p}$ , (1) c'est-à-dire que, sur le segment parallèle à  $Ox$  qui joint les deux points  $(x, y_p)$  et  $(x, y_{p+1})$  je fais varier la fonction linéairement. D'après cette définition, la fonction sera continue par rapport à l'ensemble  $(a, 1/3)$  dans chacun des rectangles partiels tels que  $A_i B_i, A_{i+1} B_{i+1}, \dots, A_n B_n, \dots$

de variables réelles. 21 AtBi A2B3J etc — En effet, les différents termes qui figurent dans le second membre de la formule (1) sont des fonctions continues de l'ensemble  $(a, y)$ . J'énonce à ce sujet une remarque. J'aurai souvent occasion, dans la suite, de définir une fonction continue dans une aire  $A$  limitée par un contour  $C$ , en supposant que, sur  $C$  ou sur certaines portions de  $C$ , la fonction doive prendre des valeurs formant une succession continue donnée; il est bien évident que la chose peut toujours se faire; j'ajoute qu'on peut s'assujettir à ce que les limites supérieure et inférieure de la fonction dans  $A$  soient les mêmes que les limites supérieure et inférieure de la fonction donnée sur  $C$ . C'est, ce qui a lieu, par exemple, pour chacun des rectangles partiels  $A_i B_i A_{i+1} B_{i+1}$  etc.\*.. d'après la manière dont nous avons défini  $f(x, y)$ . Je dis que  $f(x, y)$ , qui se trouve définie maintenant dans tout le rectangle  $A B A_1 B_1$  satisfait aux conditions du problème II. D'abord, en tout point pour lequel  $y > 0$ , il y a continuité par rapport à l'ensemble  $(a, y)$ , d'après ce que nous venons de voir. Si maintenant nous considérons un point de l'axe  $Ox$  je dis qu'il y a en ce point continuité par rapport à  $y$ . D'une part en effet la suite  $f(x, y_1), f(x, y_2), \dots, f(x, y_n), \dots$  tend vers  $f(x, 0)$ ; d'autre part la quantité  $f(x, y)$ , lorsque  $y$  est compris entre  $y_n$  et  $y_{n+1}$ , est comprise entre  $f(x, y_n)$  et  $f(x, y_{n+1})$ ; il en résulte que, quelle que soit la manière dont  $y$  tende vers 0,  $f(x, y)$  a pour limite  $f(x, 0)$ . 21. Nous voyons en résumé qu'il y a identité complète entre les fonctions discontinues qu'on peut obtenir comme fonctions limites, dans les conditions du problème II, et celles qu'on peut représenter par des séries de fonctions continues. Nous reconnaissons que ces fonctions sont aussi celles qu'on peut obtenir sur la droite  $l: y = 0$ , quand on suppose une fonction continue par rapport à chacune des variables, comme dans le problème I. Je m'occuperai d'abord de trouver des propriétés générales que possèdent les fonctions assujetties aux conditions du problème II[ et a fortiori les fonctions assujetties aux conditions des problèmes I et II; nous obtiendrons ainsi des conditions nécessaires; nous démontrerons ensuite que ces conditions sont suffisantes; nous aurons alors complètement caractérisé ces fonctions.

22 Baire: Sur les fonctions IL Conditions nécessaires. 22. Je suppose donc une fonction  $f(x, y)$  satisfaisant aux conditions du problème III, c'est-à-dire qu'elle est partout continue par rapport à  $y$ , et que, entre deux droites parallèles à  $Ox$ , il en existe toujours une troisième sur laquelle la fonction est continue par rapport à  $x$ . Nous pourrions énoncer cette seconde condition de la manière suivante: si on représente chaque parallèle à  $Ox$  par son point d'intersection avec  $Oy$ , il existe sur  $Oy$  un ensemble de points, dense dans toute portion de  $Oy$ , tel que,  $y$  étant l'ordonnée d'un de ces points, la fonction, en tout point de coordonnées  $(x, y)$ , est continue par rapport à  $x$ . J'appellerai  $E$  l'ensemble des points qui appartiennent aux droites  $y = y'$  ainsi, en tout point de  $E$ , il y a continuité par rapport à  $x$ . Je vais définir, en chaque point, une fonction qui jouera un rôle important dans l'étude que je me propose de faire. Pour cela, prenons un point  $A_0$  de coordonnées  $(x_0, y_0)$ , et considérons, sur la droite  $rc^aJo$ , un segment  $BC$  dont le milieu soit  $M$ , et de longueur variable  $2p$ ; soit donc  $BA = MC = p$ . Appelons  $\omega(p)$  l'oscillation de la fonction dans le segment  $BC$  c'est une fonction non décroissante de  $p$  de plus, puisque la fonction, considérée sur la droite  $x \in Xq^a$  est continue, on a:  $w(0) = 0$  on peut remarquer en outre que  $w(p)$  est fonction continue de  $p$ . Soit maintenant  $a$  un nombre positif; j'appelle  $a^*$ , la limite supérieure des valeurs de  $p$  telles que  $w(p) < a$ . Le nombre  $a^*$  est ainsi complètement caractérisé par ce fait que: pour  $p : a^* - \epsilon$  on a  $\omega(p) < a$  pour  $p > a^* + \epsilon$  on a  $w(p) > a$ . Si dans la première de ces inégalités je peux écrire  $p < \epsilon$  et non pas seulement  $p$

**The text on this page is estimated to be only 25.03% accurate**

de variables réelles. 23 d'après l'hypothèse de la continuité par rapport à  $y$ ,  $a$  en chaque point une valeur positive. Je vais démontrer, en faisant usage de l'autre condition imposée à  $f(x, y)$ , que  $f(x, y)$  est semi-continue supérieurement par rapport à l'ensemble  $\{x, y\}$ . 23. Il faut montrer pour cela que, si je considère un point quelconque  $(x_0, y_0)$  et si je prends un nombre positif quelconque  $\epsilon$ , je peux déterminer autour de  $A(x_0, y_0)$  une aire assez petite pour que,  $A(x, y)$  étant un point quelconque de cette aire, on ait:  $|A(x, y) - A(x_0, y_0)| < \epsilon$ . Prenons (fig. 2): prenons ensuite:  $B, A_0 = A_0 C_1 = \epsilon a(x_0, y_0) + 2 \epsilon$ . D'après la signification de  $\epsilon a(x_0, y_0) + 2 \epsilon$ , (1) De plus, je peux supposer que ces points  $M$  et  $N$  sont situés sur deux parallèles à  $OA$  sur lesquelles il y a continuité par rapport à  $x$ , autrement dit font partie de l'ensemble  $E$ . Nous savons en effet que  $E$  est dense dans toute

24 Baire : Sur les . fonctions portion de  $BtCi]$  si donc le point  $M$  de Tiriégalité (1) ne fait pas partie de  $Ej$  je peux le remplacer par un point  $Jlf$ , faisant partie de  $E$  et suffisamment voisin de  $3f$  pour qu'on ait encore: Je suppose donc que dans (1), les deux points  $M$  et  $N$  soient des points de  $B$ ; considérons maintenant les parallèles  $k$   $Ox$  menées par. ces points  $M$  et  $N$ ] la fonction étant continue sur chacune de ces droites, on peut déterminer deux segments  $M' M'' N' N''$  parallèles à  $Ox$ , ayant pour milieux  $M$  et  $N$ , et de même longueur  $2c$ , tels que, si  $P$  et  $Q$  sont deux points quelconques pris respectivement sur ces segments, on ait:  $IAP) - fWL^$ , (2)  $P$  et  $Q$  étant deux points quelconques pris, le premier sur  $M' M''$  le second sur  $N' N''$ . Prenons maintenant le carré de centre  $A$  et dont les côtés parallèles aux axes sont à une distance de  $A$  égale à  $37$ ,  $\eta$  étant inférieur au plus petit des nombres  $-$  et  $i$ . Dans ces conditions, si  $A$  est un point quelconque pris dans ce carré, la distance de  $A$  à chacune des droites  $M' M'' N' N''$  est moindre que  $adxo_j yo) + e$ . Menons alors par  $A$  la parallèle à  $Oy$ , et prenons sur cette droite le segment dont  $A$  est milieu et dont la. demi-longueur est  $a$ ,  $(iT_o, yo) + \ll$ ; ce segment traversera  $M' M''$  et  $N' N''$  ; il contiendra donc un couple de points  $P$  et  $Q$  satisfaisant à l'inégalité (2) ; par suite, l'oscillation dans ce segment est supérieure à  $a$ ; donc la fonction  $\ll$ , relative au point  $A$  est inférieure à  $aa(J^*o, yo) + c$ ; c'est-à-dire que  $\ll$

de variables réelles. 25 sidère a

26 Baire: Sur les fonctions Sur tout segment tel que PC, parallèle à Oy, et joignant les deux bases du rectangle, l'oscillation de la fonction est  $\epsilon$  contient tout le segment PQ. Je dis maintenant qu'étant donné  $\epsilon$ , on peut trouver une aire autour de A<sub>0</sub> dans laquelle l'oscillation soit  $\epsilon^2$ . Je prends pour cela, sur l'ordonnée de A<sub>0</sub> et dans le rectangle 2 $\epsilon$ , un point -  $\epsilon$  (a<sub>0</sub>, y<sub>0</sub>) où il y ait continuité par rapport à x\ puis, sur la droite y = y<sub>0</sub> un segment B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>  $\parallel$  x<sup>^</sup> — i\*y<sup>^0</sup> +  $\epsilon$ ], où l'oscillation soit 2  $\epsilon$ , on peut affirmer qu'en ce point le minimum de «a p<sub>0</sub>f\* rapport à C est nul. 25. Rapprochons les deux propriétés de la fonction «

de variables réelles. 27 à 2(7, quel que soit quand  $a$  tend vers 0, tendent vers des limites déterminées, que j'appellerai le maximum le minimum^ Voscillation à la fonction en  $A$  relativement à  $Ven^*$  semble parfait  $E$ . On voit que ces définitions sont toutes semblables à celles que nous avons données dans le premier chapitre; la seule différence consiste en ce que nous nous occupons seulement des valeurs de la fonction en certains points, négligeant complètement les autres points. Il est bien évident d'ailleurs que ces mêmes notions peuvent être définies pour un ensemble  $E$  absolument quelconque; si je ne considère que des ensembles parfaits, c'est parce que c'est seulement dans ce cas que ces notions me seront utiles. Lorsqu'il y aura lieu de préciser, je désignerai par  $M[f(t)]_{JE/}$ , « /3] le maximum de  $f(x)$  aux différents points de  $E$  contenus dans l'intervalle  $a/3$ , et par  $M[f(t)]^{Ej P}$  le maximum en  $P$  de  $f(t)$  relativement à  $E$

28 liaire: Sur les fonctions 27. Nous pouvons, grâce aux définitions précédentes, définir la continuité et la discontinuité relativement à l'ensemble  $E$ . Je dirai qu'en, un point  $A$  où l'on a  $w = 0$ ,  $w$  étant l'oscillation en ce point par rapport à  $E$ , la fonction est continue par rapport à  $E$  si au contraire on a  $w > 0$ , nous dirons qu'il y a discontinuité par rapport à cet ensemble. D'une manière générale, trois cas sont possibles :

1. On a, en tout point de  $E$  (dans l'intervalle qu'on considère) :  $w = 0$  ; dans ce cas il y a continuité en chaque point ; nous dirons alors que la fonction est continue relativement à  $E$ .
2. Il existe des points où l'on a  $w > 0$  ; mais, dans tout intervalle  $\Delta$  contenant à son intérieur des points de  $E$  (autrement dit, au voisinage de tout point de  $E$ ), il existe des points de  $E$  pour lesquels  $w = 0$ . Par analogie avec une notion que nous avons déjà étudiée, nous sommes conduits à dire que, dans ce cas, la fonction est ponctuellement discontinue relativement à  $E$ .
3. Si Ton ne se trouve pas dans l'un des deux cas précédents, c'est qu'il existe un intervalle  $\Delta$  contenant à son intérieur des points de  $E$ ,  $w$  étant positif en chacun de ces points; nous dirons alors que la fonction est totalement discontinue relativement à  $E$ , J'emploierai également la notion de fonction semi-continue sur un ensemble parfait.

28. Ces nouvelles notions étant acquises, nous pouvons généraliser un certain nombre de résultats précédemment obtenus. Je commencerai par le suivant, démontré au § 12 : Une fonction positive, semi-continue supérieurement, ne peut pas avoir son minimum nul en tous les points d'un segment. Cet énoncé va devenir un cas particulier du suivant: Une fonction, définie aux points d'un ensemble parfait  $E$  positive et semi-continue supérieurement ne peut pas avoir son minimum (par rapport à  $E$ ) nul en tous les points de  $E$ . Il me suffira de reprendre, avec quelques modifications, la démonstration du théorème qui précède. Supposons d'abord une fonction définie sur  $E$  positive ou nulle, semicontinue supérieurement, et ayant, en tous les points de  $E$  (au moins entre deux limites déterminées), son minimum nul. Je conviendrai, pour abrégé, de dire qu'un intervalle est relatif à  $E$  s'il contient à son intérieur des points de  $E$  ; dans ce qui suit, je considère exclusivement des intervalles satisfaisant à cette condition. D'après la dernière hypothèse faite sur notre fonction, on

de variables réelles. 29 voit que, dans tout intervalle  $I$  relatif à  $E$  et si petit que soit  $\epsilon$ , il existe un point  $x$  de  $J$  tel que  $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ . En vertu de l'hypothèse de la semi-continuité supérieure, on peut déterminer autour de  $A$  un intervalle  $I$  tel que l'on aura partout, c'est-à-dire pour tous les points de  $E$  contenus dans  $I$ ,  $f(x) < f(a) + \epsilon$ . On peut donc trouver dans tout intervalle  $I$  un point  $x$  autre que  $a$  tel que  $f(x) > f(a) - \epsilon$ . On trouvera ainsi de suite chacun des intervalles contenus dans  $I$  contenant tous ses points limites. Il existe au moins un point de ces  $n$  en ce point :  $r = 0$ . d'après que  $s$  est une fonction sur  $I$  est positive ou nulle. La semi-continuité supérieure entretient l'ensemble de cette fonction son minimum nul. L'ensemble qui est essentiellement fermé ne coïncide avec aucune portion du segment. Ceci nous amène à poser quelques nouvelles questions sur les ensembles. Nous dirons qu'une fonction  $f$  est parfaite si elle est continue par rapport à une certaine droite si elle comprend les points situés sur la droite. La condition est remplie pour un segment considéré comme relatif à  $J$  ou  $K$  si aucun des conditions partielles ou plus brièvement non est. On dira que la semi-continuité est maintenue si la

80 Baire: Sur les fonctions est nul est un ensemble non dense par rapport à  $E$ ] sous une forme différente, nous dirons que, dans tout intervalle relatif à  $E$  il existe un intervalle relatif à  $E$  dans lequel le minimum de la fonction par rapport à  $E$  est positif. Comme application immédiate de ce théorème, on reconnaît que si une fonction est totalement discontinue par rapport à un ensemble parfait, il existe certainement un intervalle relatif à cet ensemble, dans lequel on a son minimum positif. 30. Reprenons maintenant la fonction  $f(x)$  assujettie toujours aux conditions du problème III ; soit une courbe  $y = f(x)$  prenons un ensemble parfait  $E$  de points sur cette courbe, ou, ce qui revient au même, un ensemble parfait de valeurs de  $x$ . Remarquons d'abord que, en un point de  $E$  où  $f$  a son minimum par rapport à  $E$  positif, l'oscillation de la fonction par rapport à  $E$  est  $\geq 2a$ . Il suffit, pour le voir, d'appliquer le raisonnement du § 24, en considérant seulement les parallèles à l'axe  $OY$  sur lesquelles se trouvent des points de  $E$ . Cela posé, d'après les propriétés de  $E$ , on peut trouver dans tout intervalle relatif à  $E$  un autre intervalle où  $f$  a son minimum positif, dans celui-ci un autre où  $f$  a son minimum positif, etc.; on démontre ainsi l'existence d'un point de  $E$  où  $f$  a son minimum positif par rapport à  $E$  quel que soit  $\delta$ , et où par suite l'oscillation par rapport à  $E$  est 0. Ainsi, il existe, au voisinage de tout point de  $E$ , des points de continuité par rapport à  $E$  en d'autres termes, la fonction est ponctuellement discontinue relativement à tout ensemble parfait  $E$ . Ce résultat comprend évidemment comme cas particulier celui du § 25, qu'on obtiendra en supposant que  $E$  est une portion de courbe continue. On voit, que, dans les raisonnements que nous avons employés, les propriétés essentielles du continu sur lesquelles nous avons raisonné, sont celles qui appartiennent aux ensembles parfaits en général : le continu n'est qu'une espèce particulière d'ensemble parfait. Tous les résultats obtenus jusqu'à présent sur la question qui fait l'objet essentiel de ce chapitre peuvent se résumer de la manière suivante: Une fonction qui peut être obtenue dans les conditions du problème III (et a fortiori dans les conditions des problèmes I et II) est ponctuellement discontinue relativement à tout ensemble parfait.

de variables réelles. 31 III. Conditions suffisantes, 31. Je vais suivre maintenant la marche inverse de celle que j'ai suivie jusqu'ici. Je me propose d'étudier la nature de la condition que nous venons de trouver, et de montrer que toute fonction qui la remplit, c'est-à-dire qui est 'ponctuellement discontinue relativement à tout ensemble 'parfait' peut être obtenue dans les conditions des problèmes I et II. Pour cela, je m'occuperai d'abord de construire a priori une catégorie de fonctions présentant des discontinuités de plus en plus compliquées, mais satisfaisant à la condition précédente, et je démontrerai pour ces fonctions la possibilité des problèmes. J'aborderai ensuite le cas général, que je parviendrai à traiter complètement en le ramenant à celui des fonctions de cette catégorie particulière. En outre, la méthode que je suivrai nous permettra de transformer la condition fondamentale, et nous donnera un moyen en quelque sorte pratique de reconnaître si une fonction donnée satisfait ou non à cette condition. Je rappelle que les problèmes à étudier sont les suivants:

Problème I. Que doit être la fonction  $y(x)$  définie pour  $a \leq x \leq b$  pour qu'il soit possible de déterminer une fonction  $f(x, y)$  définie dans le carré  $a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x, a)$  continue en tout point par rapport à  $(x, y)$  et par rapport à  $y$ , et égale sur  $x = y$  à  $y$  ( $a \leq y \leq f(x, a)$ )? Je conviendrai de dire qu'une fonction  $y(a; y)$  est représentable dans les conditions du problème I, si le problème précédent est possible pour cette fonction. J'énonce tout de suite à ce sujet une remarque qui me sera souvent utile. Supposons  $y(a; y)$  représentable. Si  $f(x, y)$  est une solution, on en aura d'autres en ajoutant à  $f(x, y)$  une fonction  $\phi(x, y)$  continue partout par rapport à  $(x, y)$ , et égale à 0 sur  $x = y$ . On peut évidemment choisir  $\phi$  de manière que  $f + \phi$  prenne sur le périmètre du carré une succession de valeurs continue donnée  $h$ . Vavance, assujettie seulement aux conditions:  $\phi(a, a) = 0, \phi(b, 0) = 0, \phi(a, f(x, a)) = 0$ .

Problème II. Que doit être  $y(a; y)$  définie pour  $a \leq y \leq b$ , pour qu'il existe une fonction  $f(x, y)$  définie dans le rectangle:  $a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x, a)$  continue par rapport à  $(x, y)$  en tout point pour lequel  $y > 0$ , continue par rapport à  $y$  aux points de  $y = 0$ , et égale sur  $0 \leq y \leq f(x, a)$  à  $y$  ( $a \leq y \leq f(x, a)$ )? Nous dirons que  $y(x)$  est représentable dans les conditions du problème II, si ce problème a une solution.

32 Baire: Sur les fonctions Remarquons, comme dans le cas précédent, que si cela a lieu, on peut se donner arbitrairement les valeurs de  $f(x, y)$  sur le périmètre du rectangle, moins le côté  $y = 0$ . H2. Je vais, comme je l'ai dit plus haut, former a priori des fonctions discontinues représentables. Pour prendre d'abord le cas le plus simple, je considère une fonction  $f(x)$  définie pour  $0 \leq x \leq 1$ , et qui n'a de discontinuité qu'au point  $x = 0$ . Je rappelle à ce propos qu'une telle discontinuité est dite de première ou de seconde espèce (\*) suivant que  $y(x)$  a ou non une limite déterminée quand  $x$  tend vers 0; mais il n'y aura pas lieu, dans la question dont je m'occupe en ce moment, d'insister davantage sur cette distinction. Considérons d'abord le problème I. Je prends le carré  $OACB$  (fig. 4) :  $yA$  X Fig. 5. Je définis d'abord la fonction sur la diagonale  $OC$  par la condition :  $f(x, X) = f(x)$ . Sur l'axe  $Ox$ , c'est-à-dire sur  $Oy$  je place une fonction continue quelconque, assujettie seulement à la condition d'être égale à  $y(0)$  pour  $x = 0$ . Pour les points du triangle  $OAC$  on a :  $y$

de variables réelles. 33 continue en tout point, sauf au point A. Je trace dans ce rectangle une courbe quelconque partant de A par exemple la diagonale AB] je définis, dans l'aire A' A B\ une fonction continue de (a?, y), la seule condition imposée étant que cette fonction prenne en A la valeur donnée; cela fait, sur chaque segment MN reliant AB et A B\ je fais varier la fonction linéairement de f{M) a f{N)] f{Xj y) est alors partout définie, et cette fonction constitue une solution du problème. 33. On conçoit tout de suite que le résultat s'étend à une fonction qui présente un nombre fini quelconque de discontinuités. Je donne à ce sujet le théorème général suivant: Une fonction étant définie dans l'intervalle  $a \leq x \leq y$  si on peut partager cet intervalle en n portions par des points de division  $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = y$  de E H B / ^ C 0 A Fig. 6. G D Fig. 7. telle sorte que, sur chaque portion  $a_{i-1} \leq x \leq a_i$ , la fonction soit représentable ^ la fonction, considérée dans l'intervalle entier, est représentable. Il suffira évidemment de vérifier ce théorème dans le cas de  $n = 2$ . S'il s'agit du problème I, considérons la fig. 6. On suppose que sur chacun des segments OC, (7F, la fonction est représentable; on peut donc définir dans chacun des carrés 0 A C B ^ C G F H ^ une fonction f{Xj y) satisfaisant aux conditions du problème; il suffit alors de définir dans AD O C une fonction continue prenant sur A C et C G une succession continue de valeurs, qui se trouve déterminée par la définition précédente; il en est de même pour BCHE. On voit alors que la fonction donnée, considérée sur 0 F, est représentable. Dans le cas du problème II, je considère la fig. 7. Le problème n'est supposé possible ^ si on considère la fonction, seulement sur A C, ou seulement sur GB. Donnons-nous sur C G' une succession continue de valeurs arbitraire. D'après l'hypothèse et d'après une remarque faite au § 31, on peut achever .>

34 Baire: Sur les fonctions la définition de  $f(x, y)$  dans  $A \subset C \subset A'$  et dans  $C \subset B \subset C'$  de manière que, dans chacun de ces deux rectangles, les conditions fondamentales soient vérifiées ; considérons alors la fonction qui se trouve définie dans tout le rectangle  $ABB'A'$  elle constitue une solution du problème proposé. En résumé, nous connaissons, jusqu'à présent<sup>4</sup> comme fonctions représentables, toutes les fonctions dont les discontinuités sont en nombre fini. 34. Pour passer au cas où les discontinuités peuvent être en nombre infini, je vais démontrer un autre théorème général. Supposons qu'on ait, sur le segment où la fonction est définie, une suite de points  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  d'abscisses  $x_1 > a, x_2 > a, \dots, x_n > a, \dots$  ayant pour limite un point  $A$  de telle sorte que, sur chaque portion  $A_n A_{n+1}$ , la fonction soit représentable ; je dis qu'elle sera représentable sur le segment total  $AA_1$ . Problème L Soit  $AB A_1 G$  le carré où il faut définir  $f(x, y)$  (fig. 8); à cause de la symétrie par rapport à  $a = y$ , je considérerai seulement le triangle  $AB A_1$ . La fonction est donnée sur  $AA_1$ ; je me donne sur  $AB$  une fonction continue; puis, je définis  $f(x, y)$  successivement dans les aires suivantes: triangle  $T_1$ , rectangle  $12$ , triangle  $T_2$ , rectangle  $B^1$ , etc. Je peux définir  $f(x, y)$  dans chacun des triangles  $T_1, T_2, \dots$ , en observant, bien entendu, les conditions de continuité, parce que, d'après les hypothèses, la fonction donnée est représentable sur chacun des segments  $AA_1, A_1 A_2, A_2 A_3, \dots$  etc. Si on imagine l'opération prolongée indéfiniment, la fonction  $f(x, y)$  se trouve définie en tous les points du carré et satisfait à toutes les conditions du problème. Problème II Considérons la fig. 9. Je définis d'abord la fonction dans le triangle  $AA'Ax^1$  puis je mène les droites  $AzA'^1, A^1 A'z^1$  etc..., qui relient  $AA_1$  et  $AA'^1$  et je définis la fonction successivement dans chacun des trapèzes formés:  $A_1 A' A'^1 A^1, A^1 A' A'^2 A^2, \dots$  etc.... Il est évident que cha

de variables réelles. 35 cune de ces opérations est possible, puisque, sur chacun des segments  $A_i A^{j+1}$   $A_{i+1} A^j$  etc., la fonction est représentable. En tout point qui n'est pas sur le côté  $A A^1$  y il y aura continuité par rapport à  $(x, y)$ , et en tout point de ce côté, il y aura continuité par rapport à  $y$ . 35. Le théorème est donc démontré; je vais en transformer l'énoncé de la manière suivante. Supposons que nous prenions sur  $A A^1$  un point  $A$  différent de  $A^1$  mais aussi voisin que nous voulons de  $A^1$  si nous considérons alors le segment  $A A^1$  le théorème du § 33 suffit pour nous apprendre que la fonction est représentable sur ce segment, car il est décomposable en un nombre fini de portions sur chacune desquelles la fonction est représentable. On voit alors que nous pouvons donner au théorème que nous venons d'établir la forme suivante : Si une fonction est représentable dans tout segment  $A' B'$  intérieur à  $AB$  elle est représentable sur le segment  $AB$ . Enfin, en combinant ce résultat avec celui du § 33 que je viens de rappeler à l'instant, on obtient l'énoncé suivant, qui résume l'étude que je viens de faire : Théorème I. Etant donnée une fonction définie sur un segment  $AB$ , s'il existe sur  $AB$  un nombre fini de points, tels qu'en entourant ces points d'intervalles aussi petits qu'on veut et en retranchant ces intervalles de  $AB$ , la fonction  $y$  sur chacun des segments qui restent, est représentable y elle est représentable sur le segment  $AB$ . 36. Nous pouvons déjà, à l'aide de ce théorème, obtenir une catégorie étendue de fonctions discontinues représentables. Supposons d'abord que  $f(x)$  ait des discontinuités en nombre infini, mais que l'ensemble  $P$  des points où ces discontinuités ont lieu n'ait qu'un nombre fini de points limites; en adoptant pour les ensembles dérivés les notations de MM. Cantor et Bendixson (\*), nous dirons que  $P'$  se compose d'un nombre fini de points. Dans ces conditions, si nous entourons ces points de  $P'$  d'intervalles très petits que nous retranchons de l'intervalle total, la fonction, sur chacun des segments qui restent, n'a qu'un nombre fini de discontinuités, et est par suite représentable ; donc, d'après le théorème I, elle est représentable sur le segment total. On voit tout de suite comment, en appliquant de nouveau le théorème I, on passera du cas que nous venons d'examiner au cas où il existe un en (\*). Acta Mathematica Tome II,

36 Baire: Sur les fonctions semble  $P''$  composé d'un nombre fini de points, puis au cas où il existe pour  $P$  des ensembles dérivés d'ordre 3, 4, ...  $t$ », etc Pour voir exactement jusqu'où nous pouvons aller dans cette voie, rappelons brièvement les définitions de M. Cantor relatives aux ensembles dérivés d'ordre supérieur (\*). Si un ensemble  $P$  est de telle nature que le dérivé d'ordre  $w$ ,  $P^* \setminus$  existe, quel que soit  $n$ , il y a des points qui appartiennent à  $P^{\wedge j}$  quel que soit  $n$ ; on désigne l'ensemble de ces points par  $P''$ , et l'on convient de dire que  $P^{\wedge}$  est l'ensemble dérivé de  $P$  d'ordre  $w$ . On désigne les ensembles dérivés successifs de  $P''$  par la notation  $P^{\wedge - *}$ ,  $P'' +'$ , ...  $P^{**} \wedge^{**}$ , ...; s'il en existe, quel que soit  $n$ , les points qui appartiennent à tous ces ensembles forment un nouvel ensemble qu'on appelle  $P^{** \wedge}$ , etc.; on est ainsi conduit à la notion d'ensemble dérivé d'ordre «,  $a$  étant un quelconque des symboles définis par M. Cantor et qu'il appelle nombres de la deuxième classe. Je ferai remarquer à ce sujet, une fois pour toutes, que nous n'aurons jamais à nous préoccuper des difficultés que peut comporter en soi la notion abstraite de nombre infini bien que cette expression puisse être employée par nous dans la suite de ce travail. Dans le cas actuel, par exemple, l'ensemble  $P^*$ ,  $a$  étant un nombre déterminé de la deuxième classe de nombres, représente quelque chose de parfaitement déterminé, indépendamment de toute considération abstraite relative aux symboles de M. Cantor; il n'y a donc, dans l'usage que nous pourrons faire de la locution nombre transfini<sup>^</sup> rien de plus que l'emploi d'un langage commode. Il en sera toujours de même dans la suite. Rappelons encore quelques résultats. Il existe des nombres transfinis de deux espèces différentes;  $a$  est un nombre de première ou de seconde espèce, suivant qu'il existe ou non un nombre qui le précède immédiatement. Au point de vue des ensembles dérivés, qui nous intéresse ici, on peut dire que, si  $a$  est de première espèce,  $P^*$  est l'ensemble dérivé de  $P^{* - *}$ ; si « est de seconde espèce,  $P^*$  est par définition l'ensemble des points qui appartiennent à tous les ensembles  $P^{*'}$ ,  $o$  étant un quelconque des nombres inférieurs à  $a$ . Si  $a$  est de seconde espèce, et si  $P^*$  est nul, il existe certainement un nombre  $a!$  de première espèce, inférieur à «, et tel que  $P^{*'}$  est nul. Nous pouvons maintenant étendre les résultats obtenus sur les fonctions représentables. Je dis que, en appelant  $P$  l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction et  $a$  un nombre quelconque de la première ou de la (\*) Voir Acta, Tome II,

de variables réelles, S7 deuxième classe, s'il est démontré que toute fonction pour laquelle  $P^* = 0$  est représentable, une fonction pour laquelle  $P^*$  se compose d'un nombre fini de points est aussi représentable. En effet, j'entoure les points de  $P^*$  d'intervalles très petits que je retranche de l'intervalle total; dans chaque portion qui reste, on a  $P^* = 0$ , la fonction est donc représentable dans cette portion; comme les intervalles retranchés peuvent être pris aussi petits qu'on veut, la fonction, d'après le théorème I, est représentable sur tout l'intervalle donné. Nous savons déjà qu'une fonction est représentable si, en appelant  $a$  le plus petit nombre pour lequel  $P^* = 0$ , on a:  $a = 1$  ou  $a = 2$ . Le théorème qui précède montre que le résultat subsiste si Ton a  $a = 3, 4, \dots n, \dots w, w + 1, 2, \dots$  etc., de sorte qu'on peut énoncer le résultat suivant: Toute fonction 'pour laquelle  $P^*$  est nul, « étant Un nombre quelconque de la première ou de la deuxième classe, est représentable. Il est bon de faire voir qu'il existe effectivement des fonctions représentables pour lesquelles  $P^*$  existe,  $a$  étant un nombre donné arbitrairement. Il suffit de rappeler qu'on sait former un ensemble  $P$  pour lequel  $P^*$  existe (\*) ; si on prend une fonction égale à 1 aux points de  $P$ , à 0 en tous les autres points, les points de discontinuité de cette fonction sont les points de  $P$ ; on a donc là un exemple d'une fonction représentable pour laquelle  $P^*$  existe. On peut dire que les fonctions représentables que nous connaissons jusqu'à présent sont celles pour lesquelles l'ensemble  $P$  des points de discontinuité a son dérivé  $P'$  dénombrable, autrement dit est un ensemble réductible. 37. Nous allons chercher maintenant à construire des exemples de fonctions représentables pour lesquelles l'ensemble des points de discontinuité ne sera pas dénombrable. J'aurai besoin de rappeler d'abord quelques résultats sur les ensembles parfaits linéaires qui ne sont denses dans aucun intervalle. Soit donc  $P$  un ensemble parfait non dense par rapport au continu; cela veut dire que, dans toute portion de segment, on peut trouver une autre portion qui ne contienne aucun point de  $P$ . Soit  $M$  un point ne faisant pas partie de  $P$ ; il n'est pas non plus point-limite de  $P$ , puisque  $P$  est parfait; donc on peut trouver un intervalle contenant  $M$  à son intérieur, et dont aucun point intérieur ne fait partie de  $P$ ; si les points extrêmes de cet intervalle ne sont pas des points de  $P$ , on peut reculer les limites de l'intervalle d'une longueur finie; on voit donc qu'on peut attribuer un sens précis à l'expression; (\*) Voir Cantor, Acta Mathematica, Tome II, page 360,

38 Baire: Sur les fonctions 'prendre  $V$  intervalle précédent aussi grand que possible; ce sera déterminer un intervalle  $A B$  contenant  $3f$ , et ne contenant aucun point de  $P$  si ce n'est  $A$  et  $B$ , qui devront être des points de cet ensemble. On reconnaît ainsi que l'ensemble parfait  $P$  peut être défini de la manière suivante: Il existe, sur le segment de droite qu'on considère, une infinité dénombrable d'intervalles  $A_1 B_1, A_2 B_2, \dots, A_n B_n, \dots$  tels que deux quelconques de ces intervalles n'ont aucun point commun, et tels que toute portion de droite contient un de ces intervalles ou fait partie de l'un d'eux; l'ensemble complémentaire de  $P$  est constitué par les points intérieurs aux intervalles; l'ensemble  $P$  comprend des points de deux espèces distinctes: en premier lieu, les points  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  et  $B_1, B_2, \dots, B_n, \dots$  qui sont les extrémités des intervalles précédents, et qui forment un ensemble dénombrable; en second lieu, l'ensemble non dénombrable des points  $C$  tels que chacun d'eux est intérieur à tous les intervalles  $A_n B_n$ . Etant donné un ensemble parfait non dense, nous imaginerons que les intervalles  $A_n B_n$  dont nous venons de rappeler la définition, et qu'on peut appeler intervalles contigus à  $P$ , sont rangés dans un ordre déterminé, par exemple dans un ordre tel que chacun d'eux ne surpasse en longueur aucun de ceux qui le précèdent. Concevons que, de l'intervalle total, on retranche successivement  $A_1 B_1$ , puis  $A_2 B_2$ ,  $A_3 B_3$  etc ; au bout de  $n$  opérations, l'intervalle total se trouve partagé en intervalles partiels, les uns retranchés, ce sont précisément  $A_1, B_1, A_2, B_2, \dots, A_n, B_n$  les autres conservés; soit  $I_n$  la plus grande longueur d'un segment conservé; je dis que, si  $n$  croît indéfiniment,  $I_n$  tend vers 0; si en effet cela n'était pas,  $I_n$  aurait une limite positive  $X$ ; on démontrerait l'existence d'une portion de droite de longueur  $X$  dans laquelle il n'y aurait jamais de segments à retrancher, par suite dont tous les points feraient partie de  $P$ ; cela est impossible, puisque  $P$  est non dense. Remarquons aussi que, si l'on effectue l'opération précédente, les points de  $P$  de la deuxième espèce sont ceux qui se trouvent, quel que soit  $n$ , à l'intérieur d'un intervalle conservé. Comme type d'ensemble parfait non dense, citons celui qui est obtenu comme il suit: on retranche de l'intervalle  $(0, 1)$  l'intervalle  $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ , puis on opère sur chacun des deux intervalles restants comme on vient d'opérer sur  $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$  et ainsi de suite d'une manière générale, après un nombre quelconque d'opérations analogues, on opère sur chacun des intervalles conservés comme on a opéré sur  $(0, 1)$ . Tous les

de variables réelles. 39 points de l'ensemble  $P$  ainsi défini sont ceux qui correspondent à une valeur de  $X$  donnée par la formule :  $a_i = \frac{1}{2} + \frac{f_{ij}}{2} - \dots$  le nombre des fractions étant fini ou infini, et chaque quantité  $c$  pouvant prendre l'une des valeurs 0 ou 2. 38. Ces notions étant rappelées, considérons un ensemble parfait non dense  $P$  situé sur un segment  $AB$ , en supposant, pour plus de commodité, que  $A$  et  $B$  appartiennent à cet ensemble. Imaginons une fonction définie sur  $AB$  et satisfaisant aux deux conditions suivantes: d'une part, les discontinuités n'ont lieu qu'en des points faisant partie de  $P$  ; d'autre part, la fonction, considérée sur l'ensemble  $P$ , est continue. Un exemple de ce cas nous sera fourni par la fonction qui est égale à 1 aux points de  $P$ , à 0 aux autres points. Je me propose de montrer qu'une fonction qui satisfait aux deux conditions précédentes est représentable. Cela résultera, comme cas particulier, du théorème général suivant: Théorème II. Si il existe un ensemble parfait non dense  $P$  sur lequel la fonction est continue et si, sur tout segment contigu à  $P$ , la fonction est représentable, elle est représentable sur l'intervalle total. Je ferai une remarque générale très simple au sujet de la notion de fonction continue relativement à un ensemble parfait non dense. Soit  $f(x)$  une telle fonction, que nous supposons continue sur  $P$ . Je dis qu'on peut trouver une fonction  $\phi(x)$ , définie en tous les points de l'intervalle, égale à

40 Baire: Sur les fonctions quelconque, il se trouve sur un segment  $A_n B_n$  contigu à  $P$ , et  $i/(H)$  est compris entre  $\wedge\{A_n\}$  et  $\wedge\{B_n\}$  c'est-à-dire entre  $\wedge\{A_n\}$  et  $f(B_n)$ . On a donc, pour tous les points de l'intervalle: ce qui exprime la continuité de  $\wedge(x)$ . Reprenons maintenant la fonction assujettie aux conditions du théorème II qu'il s'agit d'établir; soit  $f(x)$  cette fonction; nous pouvons, d'après ce qui précède, définir une fonction  $i p \{x\}$  continue partout, et égale à  $v(x)$  aux points de  $P$ . Posons alors:

de variables réelles. 41 Je suppose, comme plus haut, que les segments  $A_n B_n$  contigus à  $P$  sont rangés dans un ordre déterminé; soit  $J_1, J_2, \dots, J_n$ , le premier d'entre eux. Menons par  $A_i$  et  $J_1$ , les parallèles à  $Ox$  et à  $Oy$ ; nous divisons ainsi le carré donné en plusieurs aires partielles, que je distingue en trois catégories : 1. Le carré  $A_i B_i J_1 H_i$ , qui a pour diagonale  $A_i B_i$  sur le périmètre de ce carré je donne à la fonction la valeur 0, et je définis, à l'intérieur, une fonction continue par rapport à chaque variable, ce qui est possible, puisque d'après l'hypothèse la fonction est représentable sur  $J_1$ . 2. Les carrés  $A_i A_j B_j B_i$  qui ont pour diagonales  $A_i B_i$  et  $A_j B_j$  pour le moment, je me borne à définir la fonction sur le contour de chacun de ces carrés: je lui attribue la valeur 0. 3. Il reste les deux aires  $DE A_i H_i B_i L_i$  et  $A_j K_j C_j B_j F_j$  sur chacun des deux contours de ces aires, la fonction a la valeur 0; je lui attribue la valeur 0 en tous les points intérieurs. Cette première opération étant effectuée, la fonction se trouve définie partout, sauf à l'intérieur des carrés qui ont pour diagonales  $A_i B_i$  et  $A_j B_j$  et on reconnaît que chacun de ces carrés se trouve exactement dans les mêmes conditions que le carré primitif  $A B C D$ . Supposons que le second segment contigu à  $P$ ,  $J_2$  se trouve sur la portion  $A_i A_j$ . On répétera l'opération précédente,  $A_j B_j$  jouant dans le carré de diagonale  $A_i A_j$  le même rôle que  $A_i B_i$  dans le carré  $A B C D$ . On continuera ensuite de la même manière, en opérant successivement sur  $A_i B_i, A_j B_j, \dots, A_n B_n$ . Quand on a enlevé de  $A B$  les segments  $J_1, J_2, \dots, J_n$ , il reste sur  $AB$  des segments conservés; les seuls points où la fonction ne se trouve pas définie sont ceux qui sont à l'intérieur d'un carré ayant pour diagonale un segment conservé. Il résulte de là qu'en répétant l'opération précédente indéfiniment, la fonction se trouvera définie en tous les points qui ne se trouvent pas sur la diagonale  $AB$  en effet, la distance d'un tel point à  $J_1$  est un nombre positif  $> 0$ , et il existe un entier  $n$  tel que, après  $n$  opérations, la plus grande longueur des segments conservés est inférieure à  $2X$ ; à ce moment, il est certain que la fonction se trouve définie au point considéré. D'autre part la fonction est donnée sur  $AB$  elle est donc définie dans toute la région  $A B C D$ . Démontrons maintenant que les conditions de continuité sont remplies. La chose est évidente pour tous les points situés en dehors de  $A B$ , car la fonction est définie en un quelconque de ces points au bout d'un nombre fini d'opérations; et d'après la construction, elle est continue par rapport à  $x$  et  $y$ .

42 Baire: Sur les fonctions par rapport à  $y$ . Pour un point de  $A$   $B$  ne faisant pas partie de  $P$ , le fait est aussi certain, car un tel point se trouve à l'intérieur d'un carré ayant pour diagonale un segment  $A_n B_n$ . Il reste à étudier les points de  $P$ , Remarquons que, d'après la construction, les seuls points où la fonction n'a pas la valeur 0 sont ceux qui sont à l'intérieur d'un carré ayant pour diagonale un segment  $A_n B_n$ . Si donc  $M$  est un point de  $P$ , et si l'on mène par  $M$  les parallèles à  $Ox$  et à  $Oy$ , la fonction  $f$ , en tous les points de ces droites, la valeur 0; il y a donc continuité en  $M$  par rapport à  $x$  et à  $y$ , ce qui achève de démontrer la proposition. On peut résumer la construction de  $f(x, y)$  dans le carré  $ACBD$  de la manière suivante: on prend les carrés  $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$  --  $V \subset P \subset \text{diagonale } A_1 B_1 \cup A_2 B_2 \cup \dots$ ;  $A_1 B_1, A_2 B_2, A_3 B_3, \dots$  sur les périmètres de ces carrés, on pose  $f=0$ , et on définit  $f$  à l'intérieur de chacun d'eux en observant les conditions de continuité; enfin, en tous les autres points du carré  $ACBD$  on pose  $f=0$ . Problème II Soit (fig. 11) le rectangle  $ABA'B'$ :  $a \leq x \leq a', 0 \leq y \leq b'$ . Imaginons qu'on trace toutes les parallèles à  $Oy$  menées par les points de  $P$ ; sur chacune de ces droites, j'attribue à la fonction la valeur 0, ainsi que sur  $A'B'$  de cette manière, il y aura certainement, en tout point de  $P$ , continuité par rapport à  $y$ . Considérons le rectangle  $A_i B_i A'_i B'_i$  correspondant au segment  $A_i B_i$  puisque, par hypothèse, la fonction donnée  $f(x)$  est représentable sur  $[a, a']$ , je peux, dans ce rectangle, définir  $f(x, y)$  continue par rapport à  $x$  en tout point, sauf en ceux de  $A_i B_i$ , où il y aura seulement continuité par rapport à  $y$ .

de variables réelles. 43 Traçons maintenant la droite  $l'' : y = -x$ ; si nous considérons le rectangle  $A'B'A''B''$  la fonction se trouve actuellement définie, d'une part dans la portion  $A'B'$  d'autre part sur toutes les parallèles à  $Ot'$  dont le point d'intersection avec  $AB$  est un point de  $P$ ; j'achève la définition de  $f(x, y)$  dans ce rectangle, en donnant à  $f$  la valeur 0 en tous les points où elle n'est pas encore définie; on voit alors que  $f$  aura la valeur 0 en tous les points de chacun des deux rectangles  $A'B'A''B''$  et, dans tout le rectangle  $A'B'A''B''$  ce sera une fonction continue. Prenons maintenant le segment  $AtB''$  supposons qu'il soit sur  $AA''$  par exemple; considérons le rectangle  $A''B''A'B'$  limité supérieurement à la droite  $l'' : y = -x$ ; dans ce rectangle, je peux définir  $f(x, y)$  puisque la fonction  $(f(x))$  est représentable sur  $A''B''$  je trace ensuite la droite  $A''B'' : y = -x$  et j'achève la définition de  $f(x, y)$  dans le rectangle  $A''B''A'B'$  en donnant à  $f$  la valeur 0 en tous les points où elle ne se trouve pas encore définie. On voit aisément comment le procédé de définition se généralise pour ce qui concerne les segments  $A''B'', \dots, A_nB_n$ . En tout point où l'on a  $2/\epsilon > 0$ , la fonction se trouve définie au bout d'un nombre fini d'opérations, et par conséquent, d'après la construction de  $l''$ , il y a continuité en ce point par rapport à  $(a, y)$  nous avons remarqué en commençant qu'aux points de  $P$  il y avait continuité par rapport à  $y$ ; il reste à considérer les points à l'extérieur de  $AB$  qui ne font pas partie de  $P$ : chacun d'eux est intérieur à un segment  $A_nB_n$  d'après la construction précédente, il y a encore, en un tel point, continuité par rapport à  $y$ . En résumé, le théorème II est établi d'une manière complète; on voit que c'est pour une simple raison de commodité que j'ai ramené le cas général à celui de la fonction qui est nulle en tous les points de  $P$ ; on aurait pu faire la démonstration directement pour le cas général. 40. Appelons toujours  $P$  l'ensemble des points de discontinuité de la fonction donnée  $f(x)$ ; je supposerai toujours, dans ce qui suit, que  $P$  est un ensemble fermé; si cela n'était pas, il suffirait d'adjoindre à  $P$  ses points limites; autrement dit, on remplacerait la considération de  $P$  par la considération de l'ensemble formé par la réunion de  $P$  et de  $P'$ . Il résulte des raisonnements de M. Bendixson exposés dans les Acta Mathematica (Tome II) que, si  $P$  est un ensemble fermé non dense il peut se présenter deux cas :

44 Baire: Sur les fonctions 1."  $P$  est dénombrable ; alors il existe un nombre  $a$  de la première ou de la deuxième classe, tel que  $P^* = 0$ . 2.°  $P$  n'est pas dénombrable; la condition précédente n'est remplie pour aucun nombre  $a$  ; mais il existe un nombre  $a$  tel que :  $p^* = p^*f_i = \dots$ . On est conduit à dire qu'il existe dans tous les cas un ensemble  $P \setminus$  dérive d'ordre  $\alpha$  de  $P$ ,  $12$  représentant le premier nombre transfini de la troisième classe de nombres; dans le premier cas, on a  $P^- = 0$ ; dans le second:  $P^* = p_{\ll +}^* = \dots, = p_{-}^*$  L'équation  $P^- = 0$  caractérise les ensembles pour lesquels  $P$  est dénombrable; on dit encore dans ce cas que  $P$  est réductible. Dans le second cas,  $P^-$  est un ensemble parfait, et  $P$  est constitué de la manière suivante: dans chaque intervalle contigü à  $P^-$ ,  $P$  forme un ensemble réductible (\*). Nous avons appris jusqu'ici à former des fonctions discontinues représentables de deux sortes: celles pour lesquelles  $P$  est réductible<sup>^</sup> et celles pour lesquelles  $P$  est 'parfait'<sup>^</sup> la fonction étant continue sur  $P$ ; nous pouvons tout de suite en former une troisième catégorie, comprenant les deux premières. Supposons que  $P$  soit un ensemble non dense, et qu'il existe un dérivé d'ordre  $\alpha$ ,  $P^-$ ; nous prendrons une fonction continue sur  $P^-$ , et, dans chaque intervalle contigü  $h$   $P^-$ , nous définirons la fonction de manière qu'il y ait des discontinuités aux points de  $P$  (qui forment, dans un tel intervalle, un ensemble réductible). Le théorème II montre que la fonction ainsi définie sera représentable, car elle est continue sur l'ensemble parfait  $P^-$ , et elle est représentable sur tout segment contigü à  $P^-$ . 41. Nous sommes conduits à une extension des remarques faites au § 37 sur les ensembles. Etant donné sur  $A B$  un ensemble  $P$  fermé et non dense<sup>^</sup> il existe sur  $A B$  des intervalles parfaitement déterminés, dont les points extrêmes sont des points de  $P$ , et dont aucun point intérieur ne fait partie de  $P$ ; deux quelconques de ces segments n'empiètent pas l'un sur l'autre, mais ils peuvent avoir une extrémité commune; comme cas particulier, on voit que si cette dernière condition n'est jamais remplie, l'ensemble  $P$  est (\*) Les démonstrations de ces théorèmes se trouvent dans le Mémoire de M. BknDixson (Acta T. II). J'aurai d'ailleurs occasion plus loin (§ 47), d'établir sur les ensembles des théorèmes qui comprendront ceux-ci comme cas particuliers.

de variables réelles. 45 parfait; au contraire, si un quelconque des segments en touche deux autres par ses points extrêmes, l'ensemble  $P$  est réductible. Réciproquement, si, par un moyen quelconque, on arrive à décrire sur une droite une infinité dénombrable d'intervalles, dont deux quelconques n'empiètent jamais l'un sur l'autre, et tels que, dans toute portion de la droite, il y ait des points appartenant à ces segments, l'ensemble  $P$  formé par leurs extrémités et par les points limites de ces extrémités est un ensemble fermé non dense. Nous dirons encore que chacun de ces intervalles est contigu à  $P$ . Le dernier résultat obtenu sur les fonctions représentables est celui du § 40, qu'on peut énoncer ainsi: S'il existe un ensemble  $P$  fermé et non dense, tel que la fonction est continue sur  $P$  et continue dans tout segment intérieur à un segment contigu à  $P$ , elle est représentable. Ce résultat n'est qu'un cas particulier d'un théorème général, qui sera une combinaison des théorèmes I et II et qui résumera tout ce qui précède. Généralisons d'abord les résultats obtenus au § 36; nous y avons reconnu que si, en dehors de tout point d'un ensemble  $P$  pour lequel  $P^* = 0$ , la fonction est continue, elle est représentable. Cet énoncé peut être considéré comme cas particulier du suivant: Si, dans tout segment contigu à  $P$  (en supposant  $P$  réductible, c'est-à-dire  $P^* = 0$  pour une certaine valeur de  $a$ ), la fonction est représentable, elle est représentable dans tout le segment. La démonstration est identique à celle du § 36; le théorème a déjà été démontré pour le cas de  $a = 1$ ,  $a = 2$ ; on a, dans ces cas, les propositions des § 33 et 34. Il suffit de montrer que si le théorème est vrai quand  $P$  est de telle nature que  $P^* = 0$ , il est encore vrai si  $P$  comprend un nombre fini de points; en effet, si on entoure ces points d'intervalles très petits qu'on retranche de l'intervalle total, la fonction, dans chaque intervalle restant, où l'on a  $P^* = 0$ , est représentable; le théorème I montre alors qu'elle est représentable sur tout le segment. Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le théorème général suivant: Théorème III. S'il existe un ensemble  $P$ , fermé et non dense, tel que la fonction est continue sur  $P$  et est représentable sur tout segment contigu à  $P$ , elle est représentable sur le segment total. En effet, dans tout intervalle contigu à  $P$ , la fonction est représentable, d'après ce que nous venons de voir; le théorème II nous montre qu'elle l'est sur l'intervalle total. Pour que le théorème III résume tout ce qui a été démontré jusqu'ici, nous conviendrons de faire rentrer le

cas de  $P_{--} = 0$  dans celui où,  $P_-$  existant effectivement, la fonction est continue sur cet ensemble.

46 liaire: Sur les fondions 42. GrAce au th(3orèrae III, nous allons pouvoir donner une extension considérable aux résultats acquis. Supposons que l'ensemble des points de discontinuité  $P$  (complété, s'il y a lieu, par ses points-liraites) soit non dense, contienne un ensemble  $P^{--}$ , mais qu'il existe sur  $P^{\wedge}$  un nombre fini de points qui soient points de discontinuité par rapport à  $P^{--}$ ; le théorème I suffit pour montrer que la fonction est représentable, car en isolant ces points de discontinuité par de petits intervalles, la fonction est représentable sur chaque portion restante. Nous avons donc là un nouvel exemple de fonction représentable que nous n'avions pas obtenu jusqu'ici; mais on peut tout de suite donner à cette remarque toute sa portée, en introduisant d'une manière systématique la considération des points de discontinuité par rapport à  $P^{--}$ . J'appellerai d'une manière générale  $P_i$  l'ensemble des points de  $P^{--}$  qui sont points de discontinuité par rapport à  $P^-$ , ou qui sont points\* limites de points de discontinuité, de telle sorte que  $P^{\wedge}$  sera essentiellement fermé. Nous venons de voir que si  $P_i$  est fini, la fonction est représentable. D'une manière plus générale, supposons que  $P_i$  soit, ou bien un ensemble réductible, ou bien un ensemble non réductible, mais tel que, sur  $P_i^f$  (dérivé d'ordre  $i$  de  $P_i$ ) la fonction soit continue. Nous pouvons, dans ces conditions, appliquer le théorème III, en faisant jouer  $h$  l'ensemble  $P_i$ , que nous venons de définir le rôle de l'ensemble  $P$  dont il est parlé dans ce théorème; en effet,  $P_i$ , d'après sa définition même, est d'une nature telle que, dans tout intervalle contigu à  $P_i$ , la fonction est représentable, puisque, si dans cet intervalle il existe une portion de  $P^-$ , il y a, en chaque point de  $P^{--}$  intérieur à l'intervalle, continuité par rapport à  $P^{\wedge}$ . On reconnaît ainsi que le théorème III est applicable à l'ensemble  $P_i$ ; il en résulte que la fonction est représentable. Montrons comment on pourra effectivement former des exemples de fonctions pour lesquelles  $P_i$  existe. Prenons un point  $A_j$  juxtaposons des segments qui auront ce point pour limite, soient  $A_i A_t^{\wedge} A_f A_s^{\wedge} \dots^{\wedge} A_{-4n-i} A_{-4n}$ , . . . ; dans chacun des segments de rang impair, je placerai un ensemble parfait  $y$  où je donnerai à  $y$  la valeur 1, tandis que je donnerai à  $y$  la valeur 0 aux autres points du segment; au contraire, dans chacun des segments de rang pair, je donnerai à  $y$  la valeur 0 aux points d'un certain ensemble parfait, et la valeur 1 aux autres points; en chacun des points  $A_i^{\wedge} A_t^{\wedge} \dots A_i^{\wedge} A_t^{\wedge} A_y$  je donne arbitrairement à la fonction l'une des valeurs 0 ou 1. On voit que, dans un

tel exemple, il y a pour la fonction des points de discontinuité formant un ensemble parfait  $P$ , identique à  $P^-$ ; de plus, il y a des points

de variables réelles. 47 de  $P$ - qui sont joints de discontinuité par rapport à  $P^-$ : ce sont les points  $A_i \wedge A_i \dots -4n, \dots, A]$  dans le cas actuel,  $P_i$  se compose donc d'une infinité de points ayant un point limite. On conçoit tout de suite comment, en partant des mêmes principes, on pourra construire des exemples où  $P$ , aura des ensembles dérivés jusqu'à l'ordre 2, 3, ...  $n, \dots \&)$ ,  $w + 1, \dots 2a), \dots \ll, \dots$ , en d'autres termes, sera un ensemble réductible quelconque. Enfin, pour former un exemple où  $Pf^*$  existe, prenons a priori un ensemble parfait, qui sera  $Pf^-$ ; dans chacun des intervalles contigus à  $Pf^-$ , plaçons une fonction de la catégorie précédente, en ayant soin que les points extrêmes de ces intervalles soient effectivement des points limites de points de discontinuité relatifs à  $P^-$ ; de plus, prenons la fonction continue sur  $Pf^+$ : on aura ainsi une fonction représentable. Il est utile de remarquer que, dans tous ces exemples, l'ensemble  $P_i$  est non dense par rapport à  $P^+$ % 43. Les notions nouvelles introduites par la considération de  $P_t$  se prêtent à une généralisation immédiate. Etant donnée une fonction  $\wedge [x)^$  nous appellerons  $P$ , l'ensemble des points de  $Pf^+$  qui sont, par rapport à  $Pf^-$ , points de discontinuité ou points limites de tels points. Nous définirons ainsi successivement  $P_1, P_3, \dots P_w, \dots$ , chacun de ces ensembles se déduisant du précédent exactement comme  $P$ , se déduit de  $P$ . Nous serons conduit à dire que, si  $P_{n-i}$  est réductible, ou bien si  $P_{fii}$ , son dérivé d'ordre  $i$ , existe, mais si la fonction est continue sur  $P_{fij}$ , on a  $P_n = 0$ . L'application du théorème III montre que toute fonction pour laquelle un nombre entier  $n$  existe, tel que  $F_n = 0$ , est représentable. On reconnaîtra d'ailleurs facilement qu'il existe des fonctions pour lesquelles  $P_n$  comprend effectivement des points. Je conviendrai d'appeler fonctions représentables d'ordre  $w$ , celles pour lesquelles  $P_{n-i}$  existe, tandis que  $P_n$  est nul. Par exemple, les fonctions dont nous nous sommes occupés en premier lieu, celles pour lesquelles  $P$  est réductible, ou bien pour lesquelles  $P^-$  existe, la fonction étant continue sur cet ensemble, seront des fonctions d'ordre 1. 44. Imaginons maintenant que la formation des ensembles  $P_i, P_s, \dots P_{n'i}^{\wedge}$  puisse se prolonger indéfiniment, sans qu'on rencontre jamais d'ensemble nul. On est conduit à introduire une notion analogue à celle que M. Cantor a introduite dans la considération des ensembles dérivés, sous le nom d'ensemble dérivé d'ordre  $w$ .

48 Baire: Sur les fonctions Nous avons une suite d'ensembles fermés, tels que:  $P_1 \supset P_2 \supset \dots \supset P_n \supset \dots$  j'exprime, par cette suite d'inégalités, que chaque ensemble est tout entier contenu dans le précédent. Je dis qu'il existe au moins un point appartenant à tous les  $P_n$  en effet, si on décompose le segment donné en plusieurs portions, il y a au moins un de ces segments partiels dans lequel  $P_n$  renferme des points, quel que soit  $n$ ; prenons l'un d'eux, décomposons-le à son tour, et répétons cette opération indéfiniment en faisant tendre vers 0 la dimension du segment, nous avons ainsi une suite de segments dont chacun est contenu dans le précédent et contient des points de  $P_n$  quel que soit  $n$ ; il y a un point intérieur à tous ces segments, il est donc point limite de  $P_n$  et par suite fait partie de  $P$ , quel que soit  $n$ . Pour conserver les analogies avec la théorie des ensembles dérivés, nous appellerons  $P$ , l'ensemble des points qui appartiennent à tous les ensembles  $P_n$ .  $P$  est un ensemble fermé. On peut former une fonction pour laquelle  $P$  se composera d'un point  $A$  donné d'avance; je prendrai une suite de points  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  tendant vers  $A$  et dans le segment  $Ax_n$  je placerai une fonction d'ordre  $n$ . Dans ces conditions, il existe, quel que soit  $n$ , un ensemble  $P_n$ , qui comprend toujours le point  $A$ . Cette fonction sera évidemment représentable. 45. On définira de même l'ensemble  $P_n$  déduit de  $P_{n+1}$  comme  $P_n$  de  $P$ , puis les ensembles  $P_1, P_2, \dots, P_m, \dots, P_\infty$ . D'une manière générale, soit  $a$  un nombre de la première ou de la deuxième classe de nombres. Si  $a$  est de première espèce, c'est-à-dire si  $a = \frac{1}{n}$  existe,  $Z_n$  sera l'ensemble des points de discontinuité de  $P_n$ , par rapport à  $P_{n+1}$  (complété par ses points limites); dans le cas où  $P_n$  n'existe pas, ou dans le cas où la fonction est continue sur cet ensemble, nous dirons que  $P_n$  est nul. Si  $a$  est de seconde espèce,  $P_a$  est par définition l'ensemble de tous les points communs à tous les ensembles  $P_n$ , « $a$ » représentant un nombre quelconque inférieur à  $a$ ; si l'on a  $P_a = 0$ , il existe certainement un nombre  $a'$  inférieur à  $a$ , et de première espèce, pour lequel on a  $P_{a'} \neq 0$ . Nous pouvons maintenant démontrer la proposition suivante : S'il est démontré qu'une fonction pour laquelle  $P_a$  est nul est représentable, la chose est encore vraie d'une fonction pour laquelle  $P$  est nul. En effet, puisque  $P$  est nul, c'est que, ou bien  $P_n = 0$ , est réductible, ou bien  $P_n$  existe, mais la fonction est continue sur cet ensemble; de plus, si on considère un intervalle

de variables réelles. 49 contigu à  $P_{\leftarrow}$ , comme il n'y a aucun point de  $P^{\wedge}$  à l'intérieur de cet intervalle, la fonction, d'après l'hypothèse, est représentable dans tout segment contenu à l'intérieur de cet intervalle, et par suite dans cet intervalle lui-même; on peut donc appliquer le théorème III, ce qui montre que la fonction est représentable encore dans le cas où  $P_{\leftarrow}$  est nul. On conclut de là que, en formant pour une fonction  $y(x)$  la suite d'ensembles : si  $\alpha$  pour un certain nombre  $a$  de la première ou de la deuxième classe, on a  $P_a = 0$ , on peut affirmer que la fonction est représentable. 46. Nous avons, dans ce qui précède, obtenu une première catégorie de résultats dans la voie que nous nous étions tracée, en ce sens que nous avons démontré, pour certaines fonctions, la possibilité d'être représentées dans les conditions des problèmes I et II. Notre but, est, je le rappelle, de démontrer que toute fonction qui est ponctuellement discontinue relativement à tout ensemble parfait, est représentable. Avant d'aborder le cas général, je commencerai par traiter complètement un cas particulier; on pourra se rendre compte d'une manière nette sur ce cas particulier de la méthode que j'emploierai et qui est fondée sur la considération des ensembles à indices inférieurs, définis précédemment. Ce cas particulier est le suivant : on considère une fonction  $y(x)$  qui ne peut prendre que l'une des deux valeurs 0 ou 1. Il s'agit de savoir quelles sont les fonctions de cette nature qui sont représentables, de sorte que la question pourrait se poser dans les termes suivants : Décomposer le continu en deux ensembles, de telle sorte qu'en attribuant à une fonction la valeur 0 aux points de l'un, la valeur 1 aux points de l'autre, cette fonction soit représentable. D'après la nature même de la fonction  $y(x)$  l'oscillation en chaque point (par rapport au continu, ou par rapport à un ensemble parfait quelconque), ne peut être que l'un des deux nombres 0 ou 1 ; si, dans un intervalle continu, la fonction est continue, elle est nécessairement constante dans cet intervalle. Une première condition que doit remplir  $y(x)$  est d'être ponctuellement discontinue; dans le cas général, cela veut dire que l'ensemble des points où l'oscillation est  $\geq \alpha$  est non dense,  $\alpha$  étant un nombre positif quelconque; dans le cas actuel, cela veut dire que l'ensemble de tous les points de discontinuité est non dense. On reconnaît, par exemple, qu'une fonction égale

50 Baire: Sur les fonctions à 0 pour  $x$  rationnel, à 1 pour  $x$  irrationnel, n'est pas représentable, car en tout point l'oscillation est égale à 1: la fonction est totalement discontinue. Supposons donc que  $g^{\wedge}(x)$  remplisse cette première condition, et soit  $P$  l'ensemble des points de discontinuité. Formons, s'il y a lieu,  $P^{--}$ , et soit  $P^{\wedge}$  l'ensemble des points de discontinuité par rapport à  $P^{\wedge}$ . L'ensemble  $P$ , comme  $P^{\wedge}$ , est essentiellement fermé, car en chacun de ses points l'oscillation par rapport à  $P^{\wedge}$  est égale à 1. Si, dans un certain intervalle,  $P$  est dense par rapport à  $P^{--}$  (par suite coïncide avec  $P^{\wedge}$ ), la fonction n'est pas représentable, car alors elle est totalement discontinue relativement à  $P^{\wedge}$ , puisque, dans l'intervalle considéré, en chaque point de  $P$  l'oscillation par rapport à  $P^{--}$  est 1. Construisons un exemple où cela a lieu: pour cela, prenons un ensemble parfait non dense  $P$ ; les points de  $P$  sont de trois sortes: 1.° les points  $J_i$ , extrémités gauches des intervalles contigus à  $P$ ; 2.° les points  $P_i$ , extrémités droites des mêmes intervalles; 3.° les points  $C_i$ , points extérieurs à tous ces intervalles; chaque point de l'ensemble, qu'il soit  $J$ ,  $P$ , ou  $C$ , est point limite de points des trois catégories; nous attribuons à  $f(x)$  la valeur 0 en tout point, sauf aux points  $A$  où nous lui attribuons la valeur 1; dans ces conditions, la fonction est discontinue en tous les points de  $P$ , et de plus, si on considère cet ensemble, chaque point de  $P$  est point de discontinuité par rapport à  $P$ , l'oscillation étant 1; la fonction est donc totalement discontinue sur  $P$ . On voit donc que, pour que  $y(a)$  soit représentable, il est nécessaire que  $P$  soit non dense par rapport à  $P^{--}$ . D'une manière générale, appelons, comme plus haut,  $P^{+t}$  l'ensemble des points de discontinuité de  $P^{\wedge}$  par rapport à  $P^{\wedge-t}$ ; nous reconnaissons que si la fonction est ponctuellement discontinue relativement à tout ensemble parfait,  $P^{+a}$ , est non dense par rapport à  $P^{\wedge-a}$ . Bien entendu, si  $a$  est un nombre de seconde espèce,  $P^{+a}$  se compose des points qui appartiennent à tous les ensembles  $P^{+a'}$  dont l'indice est inférieur à  $a$ , de sorte qu'on peut écrire :  $P = \bigcap_{a' < a} P^{+a'}$

de variables réelles. 51 D'une manière générale, supposons qu'on ait des ensembles correspondants aux différents nombres de la première et de la deuxième classe, satisfaisants aux conditions suivantes : 1.  $\wedge$  Chacun de ces ensembles est fermé, 2. " Si  $a_i$  tendant vers  $A_j$  dans chacun des segments  $A_n A_n^{\wedge} x_j$  comme il n'y a aucun point de P.o, il existe un nombre  $\ll^{\wedge}$  tel que  $P a_{,,}$  est nul dans ce segment.

52 Baire: Sur les fonctions On peut de même déterminer à gauche de A une suite de segments  $A \setminus A^{(1)} \dots A^{(n)}$  tendant vers  $A$ ; il y a, pour chacun d'eux, un nombre  $a_n$  tel que  $P_{a_n}$  est nul dans  $A^{(n)}$ . Servons-nous maintenant du théorème de M. Cantor : Une suite dénombrable de nombres appartenant à une des classes 1 ou 2 a une limite supérieure qui est un nombre appartenant à une de ces mêmes classes (\*). On voit alors que les nombres  $a_n$  et  $c_n$  ont une limite supérieure  $a$ ; dans l'intervalle  $BC$  l'ensemble  $P^a$  ne peut pas contenir d'autre point que  $A$ ; par suite,  $P_{a+}$  est nul, le point  $A$  ne peut donc pas faire partie de  $P_n$ . La démonstration fait voir en outre que, si  $BC$  est un intervalle ne contenant à son intérieur aucun point de  $P_0$ , les points extrêmes pouvant faire partie de  $P^a$  il existe un  $a$  tel que  $P_a = 0$  dans l'intérieur de l'intervalle. Il résulte de là que  $P_n$ , qui ne peut pas contenir de points isolés est un ensemble dense en lui-même] il est d'ailleurs fermé car si un point est limite d'une suite de points dont chacun appartient à tous les  $P^a$ , il a lui-même cette propriété. En résumé, l'ensemble  $P_0$  est parfait. Considérons alors un intervalle contigu à  $P_n$  (dont aucun point intérieur n'appartient à  $P_0$ , les points extrêmes seuls en faisant partie). Dans cet intervalle, il existe un nombre  $\frac{1}{3}$  tel que  $P^a$  ne contient aucun point intérieur à l'intervalle. Il y a une infinité dénombrable d'intervalles analogues, et les points intérieurs à ces intervalles forment l'ensemble complémentaire de  $P_0$ ; les différents nombres  $a$  qui correspondent à tous ces intervalles ont une limite supérieure  $a$ , qui est un nombre de la première ou de la deuxième classe, et l'on voit que l'ensemble  $P_a$  ne peut pas contenir d'autres points que ceux de  $P_0$ ; il les contient d'ailleurs tous, de sorte qu'on a :  $1 \leq a = P_0 \leq a = P_n$ , et cet ensemble est essentiellement parfait.

48. Revenons maintenant à la fonction  $y(a)$ , qui ne peut prendre que l'une des deux valeurs 0 ou 1 ; imaginons qu'on forme les ensembles  $P, P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$  que nous avons définis. Il ne peut se présenter que deux cas: Ou bien il existe un ensemble  $P$  qui est nul. Dans ce cas, la fonction est représentable, d'après la conclusion qui termine le § 45. Ou bien il n'existe pas d'ensemble de cette nature. Alors il existe un nombre « tel qu'on a : »

Acta, Tome II, page 388.

de variables réelles. 53 d'où je déduis, comme on a toujours:  $\sum_{i=1}^n \omega_i$ : ce qui exprime que tous les points de l'ensemble parfait  $P_f$  sont points de discontinuité par rapport à cet ensemble, l'oscillation étant égale à 1; autrement dit, la fonction est totalement discontinue par rapport à  $V$  ensemble parfait  $P_i$ . Elle n'est donc pas représentable. On peut exprimer le résultat d'une manière différente; convenons d'appeler, dans tous les cas,  $P_n$  l'ensemble des points qui appartiennent à tous les  $P_c$ , . La condition nécessaire et suffisante pour que la fonction  $y = f(x)$  soit représentable est que :  $P_n = 0$ . Le problème que nous nous sommes proposé est ainsi complètement résolu dans le cas particulier que nous venons d'examiner.

49. Pour passer à l'étude du cas général, j'aurai besoin de quelques théorèmes auxiliaires sur les fonctions discontinues d'une variable. Soit une fonction  $f(x)$  définie sur le segment  $A_5$ , les extrêmes compris; supposons que 'le maximum de l'oscillation de  $f(x)$  en chaque point, dans cet intervalle, soit  $X$ , et prenons  $X' > X$ . Je dis qu'on peut poser:  $f(x) = g(x) + \phi(x)$ ,  $g(x)$  étant une fonction continue, et  $\phi(x)$  une fonction dont la valeur en chaque point est comprise entre 0 et  $X'$ . D'après ce que nous avons vu au § 13, puisque l'oscillation en chaque point est inférieure à  $X'$ , on peut trouver un nombre  $p$  tel que, dans toute portion du segment dont la longueur ne surpasse pas  $p$ , l'oscillation relative à cette portion soit  $< X'$ . Partageons le segment en portions dont chacune ait une longueur inférieure à  $p$ ; soit  $a_1, a_2, a_3, \dots$  la suite de points de division ainsi obtenue, à partir de l'extrémité  $a_1$ , que je désigne par  $a_1$ ,. Considérons d'abord les segments suivants:  $A_1 a_1, a_1 a_2, a_2 a_3, \dots$  La longueur de chacun de ces segments étant inférieure à  $p$ , on peut certainement, dans chacun d'eux, déterminer un nombre  $m$  tel que la fonction soit, dans toute l'étendue du segment partiel considéré, comprise entre  $m$  et  $m + X'$ ; on peut par exemple prendre pour  $w$  le minimum de la fonction dans l'intervalle; (mais il n'est pas toujours indispensable de choisir  $m$  de cette manière). Soient  $m_1, m_2, m_3, \dots$  les quantités ainsi choisies, relatives aux segments  $A_1 a_1, a_1 a_2, a_2 a_3, \dots$ . Je représenterai géométriquement les choses en traçant dans

54 Baire: Sur les fonctions le plan  $xy$  (fig. 12) les segments  $JB$ ,  $JBg$ ,  $B \setminus B^\wedge$  d'ordonnées  $m$ , et  $w_i | + )/$  et correspondant à  $A, \wedge^3$ , les segments  $C_3 C_5$ ,  $C \setminus C_j$  d'ordonnées  $Wg$  et  $W_3 + A'$ , correspondant à  $\wedge^3 \wedge^5$ , etc.... Je prends maintenant les segments  $At Ai^\wedge AiAa^\wedge \dots$  dont chacun empiète sur deux des précédents. Considérons, par exemple,  $At Ai]$  si nous supposons, pour fixer les idées,  $m$ , d'autre part entre  $m^\wedge$  et  $m^\wedge + X'$ , par suite entre  $m^\wedge$  et  $m^\wedge + ^j$  représentés par les segments  $E^\wedge E^j B \setminus B]$  elle est donc a fortiori comprise entre les fonctions représentées par  $B^\wedge E^\wedge$  et  $B \setminus E \setminus$ , c'est-à-dire entre  $g\{x\}$  et  $g\{x\} - \setminus X$ . On voit de même que, dans le segment  $A^\wedge A^\wedge$ , elle est comprise aussi entre  $g\{x\}$  et  $gix\} - ^!^\wedge$  qui sont représentés par  $\wedge^3 \wedge^4$ ,  $E^\wedge C^\wedge$ , Pour prolonger la fonction  $g\{x\}$  au delà de  $A^\wedge \wedge^\wedge$  on prendra le segment  $AiA^\wedge \wedge^\wedge$  qui empiète sur  $A^\wedge A^\wedge \wedge^\wedge$  et sur  $A^\wedge At^\wedge$  on opérera sur lui comme on vient

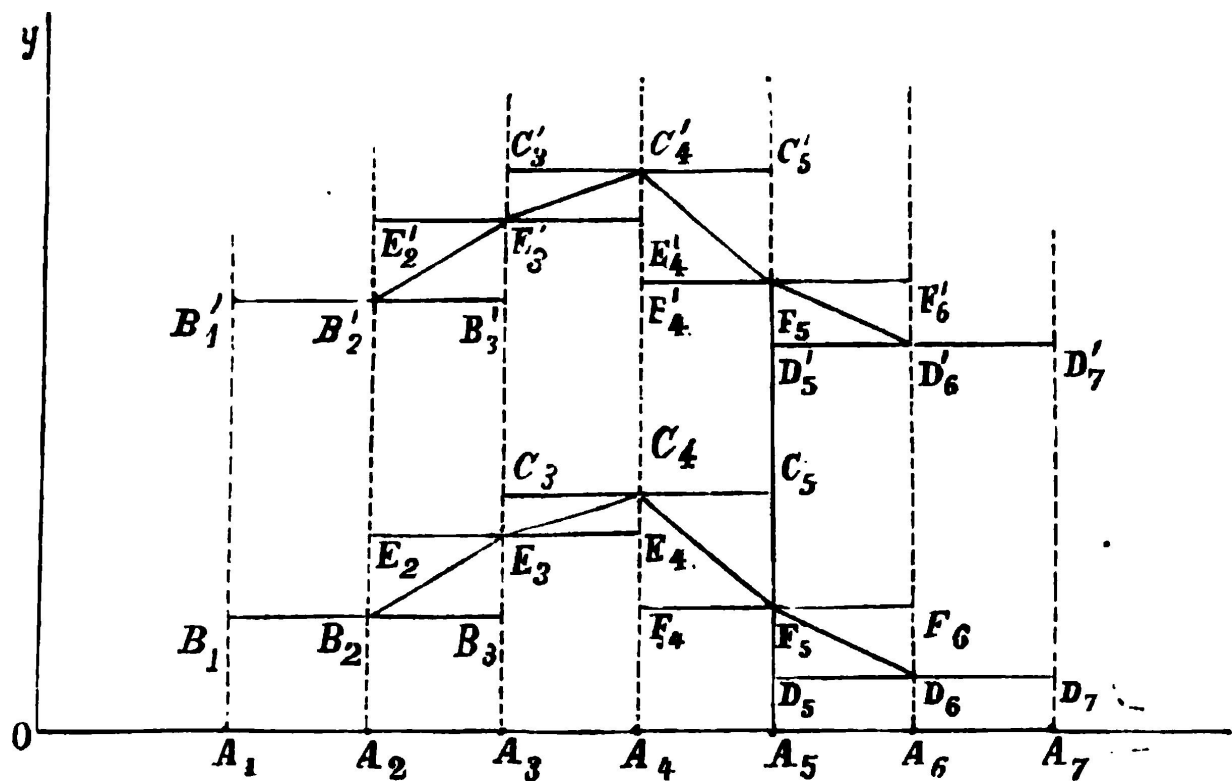


Fig. 12.

de variables réelles. 55 d'opérer sur  $A$  la fonction  $g(x)$  sera, dans ce segment, représentée par une ligne brisée telle que  $d F^A D$  ; on continuera l'application de la méthode jusqu'à ce que  $g(x)$  soit définie dans tout l'intervalle donné; nous aurons alors, en tout point; ce qui démontre qu'on peut poser: 0 ; en chaque point où  $a; > 0$  la fonction est continue, mais, dans un intervalle comprenant le point  $x$  — Oj la continuité n'est pas uniforme. Voici comment il convient de modifier la méthode précédente, dans le cas où le point  $-4$ , par exemple, est exclu. Si on remplaçait le point  $A$  par un point  $A'$  voisin, si petit que soit  $A A'$  les raisonnements que nous avons faits s'appliqueraient au segment  $A' B$ . Il résulte de là qu'on peut déterminer une suite infinie de points  $A^1, A^2, \dots, A^n$  tendant vers  $-4$ , et tels que dans tout segment  $A^k A^{k+1}$  l'oscillation de la fonction soit inférieure à  $X$ . En imaginant que la méthode indiquée dans le numéro précédent soit appliquée à  $A^1 A^2 A^3 \dots$  indéfiniment, on définira ainsi une fonction  $g(x)$  en tous les points intérieurs au segment considéré, qui sera continue en chacun de ces points, et l'on aura:  $(f(x) - g(x)) \leq \epsilon$  ( $\epsilon$  étant compris entre 0 et  $X$  en chaque point intérieur). 51. Ces résultats suffiraient pour les applications que je me propose de faire; mais il n'est pas sans intérêt de montrer qu'on peut aller plus loin, et s'arranger de manière que, dans la décomposition de  $f$  en  $g + \phi$  la fonction  $\phi$  soit toujours comprise entre 0 et  $X$ .

56 Baire: Sur les fonctions Soit donc  $y(x)$  la fonction donnée, définie, soit sur tout le segment  $AB$  comme au § 49, soit seulement aux points intérieurs, comme au § 50; les raisonnements seront les mêmes dans les deux cas; si  $X$  est le maximum de l'oscillation en chaque point, je prends  $X' = X - f'$

de variables réelles. 57 Imaginons qu'on répète l'opération indéfiniment; la série de fonctions continues :  $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(x)}{2^j}$  est uniformément convergente, puisque les termes, à partir du second, sont positifs et respectivement inférieurs à ceux de la série :  $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j}$ . Cette série représente donc une fonction continue  $g(x)$ . Posons :  $f(x) - g(x) = p(x)$ . Il est facile de déduire de l'égalité (1) que, pour chaque valeur de  $a$ , on a, quel que soit  $n$  :  $0 \leq p^{(n)}(x) \leq \frac{1}{2^n}$ . Par suite,  $p(x)$  est une fonction déterminée de  $x$  qui est comprise entre  $0$  et  $\frac{1}{2^n}$  quel que soit  $n$ , par suite entre  $0$  et  $X$ . Il est ainsi démontré qu'on peut effectuer la décomposition :  $f(x)$  étant continue, et  $p(x)$  compris entre  $0$  et  $X$ . 52. Ajoutons une remarque. Si, au lieu de supposer une fonction définie pour tous les points d'un intervalle continu (les extrêmes étant compris ou non), on suppose qu'elle n'est définie que pour les points d'un certain ensemble parfait (les points extrêmes pouvant être exceptés), des considérations analogues aux précédentes s'appliquent, et l'on peut énoncer le théorème suivant : Si  $X$  est le maximum de l'oscillation en un point de la fonction par rapport à  $h$  sur l'ensemble  $E$  on peut poser :  $f(x) = g(x) + p(x)$ ,  $g$  étant une fonction continue relativement à l'ensemble donné, du moins en tout point où  $f$  est définie et  $p$  étant compris entre  $0$  et  $X$ . On peut d'ailleurs ramener cette question à la précédente ; soit

58 Baire: Sur les fonctions linéairement (f depuis (f {An) jusqu'à

de variables réelles. 59 § 51, on peut, dans chacun de ces intervalles, effectuer la décomposition:  $\varphi(a) = \rho(a) + p(a)$ . ( $\rho$  et  $p$  seront ainsi définis en tous les points du continu, que je représente par  $E$  sauf en ceux de  $P$ , autrement dit aux points de  $E - P$ . En tout point de  $E - P$ ,  $f$  est continue, et  $p$  a une valeur comprise entre 0 et  $a$ . Il reste à définir  $\rho$  et  $p$  aux points de  $P$ . Considérons, en supposant que  $P$  ne soit pas réductible, l'ensemble  $P - F$ ; cet ensemble est constitué par les points de  $P$  qui sont à l'intérieur des intervalles contigus à  $V$  ensemble parfait  $P'$ ; aux points de  $P - P'$  je pose:  $\rho(x) = 0$ . Si  $I_p$  est l'un quelconque des intervalles contigus à  $P'$ ,  $P$  forme dans cet intervalle un ensemble réductible; il en résulte que  $\rho$ , qui, dans chaque intervalle contigu à  $P$ , est représentable, sera représentable dans toute l'étendue de l'intervalle  $A P$ , (ou, plus exactement, dans tout intervalle compris dans  $A B$  puisque  $\rho$  n'est pas encore définie aux points  $A$  et  $B$ ). La définition de  $\rho$  et  $p$  est maintenant faite partout, sauf aux points de  $P$ ; j'ai appelé  $P_j$  l'ensemble des points de  $P''$  où  $V$  oscillation par rapport à  $P'$  est  $> J$ ;  $P_i$  est non dense par rapport à  $P'$ . Soit  $I_P$  un intervalle contigu à  $P$ ; cet intervalle peut contenir à son intérieur des points de  $P''$ , mais nous savons qu'en chacun de ces points, l'oscillation par rapport à  $P'$  est  $< J$ . Il en résulte que dans l'intervalle  $I_P$  nous pourrions définir  $\rho$  et  $p$  comme nous le faisons aux points de  $P'$  qui sont à l'intérieur des intervalles contigus à  $V$ . On voit donc que  $\rho$  et  $p$  sont définies sur tout intervalle contigu à  $P$ ; cela suffit pour représenter  $f$  sur tout intervalle contigu à  $P$ . On voit aussi que  $f$  est continue sur tout intervalle contigu à  $P$ . On voit enfin que  $f$  est continue sur tout intervalle contigu à  $P$ .

60 Baire: Sur les fonctions tervalle contigu à Pej, la fonction  $\phi$  sera représentable. On continuera ensuite de la même manière, c'est-à-dire qu'on définira  $\phi$  et  $\psi$  sur  $P^{\wedge} - P^f$ , puis sur  $P^{\wedge} - P^{n-i}$ , etc ; après avoir appliqué cette méthode une infinité de fois, on aura défini  $\phi$  et  $\psi$  sur  $E - P^m$ . Pour justifier d'une manière complète et rigoureuse ce que je viens de dire, je suppose, d'une manière générale, que la décomposition soit effectuée sur l'ensemble  $E - P^j$ , et que, dans chaque intervalle contigu à  $P^{i-i}$ , la fonction  $\phi$  soit représentable. Considérons l'ensemble  $P^{i-i}$ , dans tout intervalle contigu à  $P^{i-i}$ , l'ensemble des points de  $P^{i-i}$  qui s'y trouvent est réductible; en ces points je pose: la fonction  $\phi$  qui par hypothèse est représentable dans chaque intervalle contigu à  $P^i$ , est encore représentable dans tout segment contigu à  $P^i$ . Prenons maintenant  $P^i$ , qui est l'ensemble des points de  $P^i$ , où l'oscillation par rapport à cet ensemble est  $\epsilon$ . Dans un intervalle contigu à  $P^i$ , on peut, aux points de  $P^i$  qui s'y trouvent, effectuer la décomposition, de manière que  $\phi$  soit représentable dans tout cet intervalle. Il est ainsi démontré que, si  $\phi$  et  $\psi$  sont définies sur l'ensemble  $E - P^i$ , elles peuvent être définies sur l'ensemble  $E - P^i$ , les conditions fondamentales étant encore observées. Si maintenant  $a$  est un nombre de deuxième espèce, on peut toujours le considérer comme la limite supérieure d'une suite dénombrable de nombres:  $a_1, a_2, \dots, a_n$  de telle sorte que  $a$  joue par rapport à cette suite le même rôle que  $w$  par rapport à la suite: Imaginons qu'il soit possible de définir  $\phi$  et  $\psi$  sur  $E - P^i$ , sur  $E - P^{a_1}$  et généralement sur  $E - P^{a_n}$ , si on suppose cette suite d'opérations prolongée indéfiniment, la décomposition se trouvera effectuée sur tout l'ensemble  $E - P^a$ . Dans toute portion contenue à l'intérieur d'un intervalle contigu à  $P^a$ , il existe un nombre  $n$  déterminé tel que  $P^{a_n}$  est nul dans cette portion;  $\phi$  est donc représentable dans cette portion, et par suite, dans tout intervalle contigu à  $P^a$ .

de variables réelles. 61 On voit ainsi que, quel que soit  $a$ , il est possible d'effectuer la décomposition sur l'ensemble  $E = P \cup Y$  de telle sorte que sur tout intervalle contigu à  $P$  la fonction  $\phi$  soit représentable. Or, il existe un nombre  $\delta$  tel que  $P^\delta$  est nul. Quand la décomposition se trouvera effectuée sur  $E = P \cup Y$ , qui est identique à  $E_Y$  on aura, en tous les points du segment donné:  $\phi(x) = \phi(x)$  étant représentable dans toute l'étendue du segment, et  $\phi(x)$  ayant en chaque point une valeur comprise entre 0 et  $a$ .

54. J'arrive maintenant à la démonstration du théorème général. En supposant  $\phi(x)$  ponctuellement discontinue relativement à tout ensemble parfait et en prenant arbitrairement un nombre positif  $a$ , nous venons d'obtenir l'égalité (2). Appliquons maintenant la même méthode à la fonction  $\phi(x)$  de cette égalité, en remplaçant  $a$  par  $-$ ; remarquons en outre que, comme on a:  $0 \leq \phi(x) \leq a$ ,  $\phi(x) +$

62 Baire: Sur les fonctions avec :  $G$  et  $(f_n(x))$  étant une fonction représentable. Quand  $n$  croît indéfiniment, la fonction  $(f_n(x))$  tend uniformément vers 0; on peut donc écrire :  $f(x) = y_0(x) + \varphi_1(x) + f_1(x) - h_1(x) + \dots$  (3) la série étant uniformément convergente. Chacune des fonctions qui figurent dans le second membre de l'égalité (3) est représentable dans les conditions des problèmes I et II. Considérons, pour fixer les idées, le problème I; il correspond à  $(f_n(x))$  une fonction  $f_n(x, y)$ , continue en tout point par rapport à chacune des variables, et égale sur  $x = y$  à  $f(x)$ ; cela résulte de ce que  $(f_n(x))$  fait partie de la catégorie de fonctions que nous avons appris à construire dans les § 33 à 45; ce qui distingue ces fonctions, c'est que l'ensemble de tous les points de discontinuité relatifs à un ensemble parfait quelconque est non dense par rapport à cet ensemble. On reconnaît aisément que, dans tous les théorèmes qui ont été démontrés pour établir que ces fonctions sont représentables, on peut s'astreindre à ce que la fonction  $f(x, y)$  que l'on définit, ait pour limites supérieure et inférieure dans toute l'aire les limites supérieure et inférieure de  $f(x)$ . Nous supposons donc que la fonction  $f_n(x, y)$  qui correspond à  $f(x)$  compris entre 0 et  $\infty$  est elle-même comprise entre 0 et  $\infty$ . Nous pouvons alors poser :  $f_n(x, y) = f_0(x, y) + f_1(x, y) + h_1(x, y) + \dots$  le second membre est une série uniformément convergente. Il en résulte que  $f(x, y)$  est une fonction parfaitement déterminée, qui possède tous les caractères de continuité des fonctions  $f_n(x, y)$ , et qui, pour  $x = y$ , se réduit à  $f(x)$ . Il est ainsi démontré que  $f(x)$  est une fonction représentable dans les conditions du problème I. La démonstration est évidemment analogue pour le problème II. En résumé, nous avons prouvé que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit représentable, est qu'elle soit ponctuellement discontinue relativement à tout ensemble parfait.

de variables réelles. 63 Nous avons aussi donné un moyen de reconnaître si cette condition est remplie ou non. Etant donné un nombre positif  $\epsilon$ , on forme la suite d'ensembles  $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$  où  $P_n$  est l'ensemble des points qui correspondent à cette valeur de  $a$ . Soit  $P_a$  l'ensemble des points qui appartiennent à tous les  $P_n$ . Il faut et il suffit, pour que la fonction soit représentable, qu'on ait, quel que soit  $a$ :  $P_a \neq \emptyset$ . Si, pour une certaine valeur de  $a$ , on a  $P_a = \emptyset$ , la fonction est totalement discontinue sur cet ensemble parfait, et par suite, n'est pas représentable. IV. Propriétés générales. 55. Nous avons, dans ce qui précède, caractérisé une catégorie parfaitement déterminée de fonctions discontinues, qui, entre autres propriétés, possèdent la suivante: Une quelconque de ces fonctions est représentable par une série qui a pour termes des fonctions continues, et qui est convergente pour chaque valeur de  $x$ . Nous avons déjà fait observer que cet énoncé revenait au suivant: la fonction est limite d'une suite de fonctions continues. Servons-nous maintenant du théorème de Weierstrass (\*) : si une fonction est continue, et si on se donne un nombre  $\epsilon$ , aussi petit qu'on veut, il est possible de trouver un polynôme qui diffère de la fonction en chaque point de moins de  $\epsilon$ . Soit  $f(x)$  une fonction discontinue limite d'une suite de fonctions continues  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ . Prenons une suite de quantités tendant vers 0:  $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n, \dots$ . Nous pouvons, d'une manière générale, faire correspondre à la fonction  $f(x)$  un polynôme  $P_n(x)$  qui en diffère de moins de  $\epsilon_n$ . Dans ces conditions, la suite de polynômes  $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ , a pour limite  $f(x)$  comme la suite des fonctions  $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ . Ainsi, une fonction qui est limite d'une suite de fonctions continues peut aussi être considérée comme limite d'une suite de polynômes, et par suite peut être développée en série de polynômes. Nous pouvons donc énoncer ce théorème: (\*) Une démonstration très simple du théorème de Weierstrass a été donnée par M. Lebesgue dans une Note : Sur rapprochement des fonctions. (Bulletin des sciences mathématiques, novembre 1898.)

64 Baire: Sur les fonctions La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit représentable par une série convergente de polynômes est qu'elle soit ponctuellement discontinue relativement à tout ensemble parfait. 56. Indiquons quelques exemples de fonctions représentables ; je dis que toute fonction semi-continue est représentable; nous avons vu au § 12 qu'une fonction qui possède en tout point la semi-continuité supérieure, par exemple, est ponctuellement discontinue ; on démontrera par la même, méthode cet énoncé plus général: une fonction semi-continue par rapport à un ensemble parfait, est ponctuellement discontinue sur cet ensemble. Il résulte de là que toute fonction semi-continue satisfait à la condition d'être ponctuellement discontinue relativement à tout ensemble parfait, et par suite peut être considérée comme limite d'une suite de fonctions continues, ou de polynômes, 57. Donnons une autre application dans un ordre d'idées différent. Supposons qu'une fonction continue  $f(x)$  ait en tout point une dérivée déterminée  $f'(x)$ . Cela veut dire que la quantité :  $\frac{f(x+y) - f(x)}{y}$  tend vers une limite déterminée, qui est  $f'(x)$  lorsque  $y$  tend vers 0, tend vers une limite déterminée, qui est  $f'(x)$ . Considérons alors la fonction  $\phi(a, y)$  définie de la manière suivante : •pour  $y \neq 0$  on a :  $\phi(a, y) = \frac{f(a+y) - f(a)}{y}$ , pour  $y = 0$  on a :

de variables réelles. 65 il existe au moins un point où la fonction est continue; nous en avons déduit que l'ensemble des points où l'oscillation est  $\leq \frac{1}{n}$ , est un ensemble non dense. Prenons maintenant une suite décroissante de nombres positifs tendant vers 0, par exemple:  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$  J'appelle d'une manière générale  $P_n$  l'ensemble des points où l'oscillation est  $\leq \frac{1}{n}$ . Si  $A$  est un point de discontinuité pour  $f(x)$  il existe un entier  $p$  tel que  $A$  fait partie de l'ensemble  $P_n$  dès que  $n$  est égal ou supérieur à  $p$ . En appelant  $P$  l'ensemble de tous les points de discontinuité, nous sommes conduits à dire que  $P$  est limite de  $V$  ensemble  $P_n$  quand  $n$  croît indéfiniment. L'ensemble  $P$  peut évidemment être d'une nature tout à fait différente de celle des ensembles  $P_n$ ; en particulier, il peut être dense dans tout un intervalle; de plus, il n'est pas nécessairement fermé car ses points limites peuvent être des points de continuité pour la fonction. 59. Mais on voit que ces remarques conduisent tout naturellement à étudier les propriétés d'un ensemble linéaire  $P$  satisfaisant à la condition suivante: Il existe une infinité dénombrable d'ensembles  $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$  chacun est non dense, et tels que tout point de  $P$  fait partie de l'un au moins des ensembles  $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ . Je dirai qu'un ensemble de cette nature est de première catégorie. Tout ensemble qui ne possède pas cette propriété sera dit de deuxième catégorie. Je commence par démontrer la proposition suivante: Si  $P$  est un ensemble de première catégorie, il existe, dans toute portion  $\frac{a}{3}$  du segment sur lequel il est défini, au moins un point (et par suite une infinité) n'appartenant pas à  $P$ . En effet, d'après les hypothèses, on peut déterminer dans  $\frac{a}{3}$  un intervalle fini  $a_1$  qui ne contenant aucun point de  $P_1$ ; dans  $\frac{a_1}{3}$ , un intervalle  $a_2$  ne contenant aucun point de  $P_2$ , etc....; dans  $\frac{a_{n-1}}{3}$ , un intervalle  $a_n$  ne contenant aucun point des  $n$  premiers ensembles  $P_1, P_2, \dots, P_n$  il existe au moins un point  $M$  compris à l'intérieur de tous les segments  $a_n$ ; ce point  $M$  ne fait partie d'aucun ensemble  $P_n$  et par suite ne fait pas partie de  $P$ . Il résulte immédiatement de là que le continu constitue un ensemble de deuxième catégorie; nous venons en effet de démontrer qu'on ne peut pas obtenir tous les points, d'un intervalle continu au moyen d'une infinité dénombrable d'ensembles non denses. 9

66 Baire: Sur les fonctions L'ensemble formé par la réunion d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles de première catégorie est encore un ensemble de première catégorie; cela résulte de la définition même. Le continu, dont on a retranché un ensemble de première catégorie, autrement dit, l'ensemble complémentaire d'un ensemble de première catégorie, est de seconde catégorie. Si on a, d'une part, un ensemble  $E$ , —  $P$ , complémentaire par rapport au continu  $E$  d'un ensemble de première catégorie, et d'autre part un ensemble  $Q$  qu'on sait être de deuxième catégorie, on peut affirmer que  $E - P$  et  $Q$  ont des points communs. Si en effet cela n'était pas, c'est que tous les points de  $Q$  appartiendraient à  $P$ , et  $Q$  serait alors de première catégorie. On voit la différence profonde qui existe entre les ensembles des deux catégories; cette différence ne réside, ni dans la dénombrabilité, ni dans la condensation dans un intervalle continu, puisqu'un ensemble de première catégorie peut avoir la puissance du continu, et peut aussi être dense dans toute l'étendue du segment qu'on considère; mais elle est en quelque sorte une combinaison des deux notions précédentes. 60. Revenons aux fonctions ponctuellement discontinues; on voit que, pour une telle fonction, l'ensemble des points de discontinuité est de première catégorie, tandis que l'ensemble des points de continuité est au contraire de deuxième catégorie. Je déduis maintenant de l'étude précédente un théorème donné par M. VoLTERRA en 1881 (\*). Considérons un nombre fini, ou même une infinité dénombrable de fonctions ponctuellement discontinues, définies dans un même intervalle de variation de  $x$ . L'ensemble  $P$  des points où l'une au moins des fonctions est discontinue, est formé par la réunion des ensembles  $P_1, P_2, \dots, P_n$  étant l'ensemble des points de discontinuité de  $f_n(x)$ . Donc, d'après ce que nous avons vu,  $P$  est un ensemble de première catégorie. On en déduit que, dans tout intervalle il y a des points où toutes les fonctions considérées sont continues. Tirons une conséquence de la proposition qui précède. Supposons qu'une suite de fonctions ponctuellement discontinues  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ , tende uniformément vers une limite  $f(x)$  c'est-à-dire que  $|f(x) - f_n(x)|$  devienne inférieur à  $\epsilon$ , si petit que soit  $\epsilon$ , indépendamment de  $x$ , quand  $n$  est suffisamment grand. VoLTERRA, Alcune osservazioni sulle funzioni iperleggerie discontinue. (Giornale di Battaglini, 1881.)

de variables réelles. 67 satnment grand. Dans ces conditions, je dis que  $f(x)$  est ponctuellement discontinue; il suffit de montrer que si  $A[x_0]$  est un point de continuité commun à tous les  $f_n(x)$  c'est encore un point de continuité pour  $f(x)$ . En effet, e étant donné, prenons d'abord  $n$  assez grand pour qu'on ait en tout point: On aura en particulier :  $|f(x) - f_n(x)| < \epsilon$

68 Baire: Sur les fonctions ment diacontinue sur cet ensemble parfait; il en résulte que  $f\{x\}$  est représentable. Nous obtenons donc ainsi un résultat qui est à rapprocher du théorème connu : Une série uniformément convergente de fonctions continues représente une fonction continue<sup>^</sup> et qu'on peut énoncer sous la forme suivante : Une série uniformément convergente, dont les termes sont des fonctions représentables, est une fonction représentée.

CHAPITRE III. Fonctions discontinues développables en séries multiples de fonctions continues.

L Définition de eus fonctions.

62. Je me propose de définir et d'étudier dans ce chapitre, certaines catégories de fonctions discontinues, dont on peut dire qu'elles se rattachent, en un certain sens, aux fonctions continues. Je prendrai pour point de départ la notion de fonction limite d'une suite de fonctions. Nous venons de voir, dans le chapitre précédent, qu'il y a des fonctions discontinues d'une variable réelle qu'on peut obtenir comme limites de fonctions continues, et nous avons déterminé la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction possède cette propriété. Je conviendrai de dire que les fonctions continues forment la classe 0, et que les fonctions discontinues limites de fonctions continues forment la classe 1. D'après cela, les fonctions de la première classe sont les fonctions discontinues qui sont représentables par des séries convergentes de fonctions continues, et par suite, comme nous l'avons montré, par des séries convergentes de polynômes.

63. Supposons maintenant qu'on ait une suite de fonctions appartenant aux classes 0 ou 1, et possédant une' fonction limite n'appartenant à aucune de ces deux classes. Je dirai que cette fonction limite est une fonction de la seconde classe, et l'ensemble de toutes les fonctions qu'on peut obtenir de cette manière formera la classe 2. On voit d'après cela qu'une fonction de la classe 2 est développable en une série, convergente pour chaque valeur de  $x$ , et dont tous les termes sont des fonctions de classe 1; en remplaçant

de variables réelles. 69 chacun de ces termes par la série de polynômes qui le représente, on reconnaît qu'une fonction de classe 2 peut être représentée par une série double dont les termes sont des polynômes. J'indique tout de suite un exemple simple de fonction de classe 2. Il suffit de considérer la fonction  $f(x)$  qui, dans un certain intervalle,  $0 \leq x \leq 1$  par exemple, prend la valeur 0 quand  $x$  est rationnel et la valeur 1 quand  $x$  est irrationnel. En effet, considérons la fonction  $f_n(x)$  définie de la manière suivante: pour  $a; = - \infty$  » si  $q^n$  et si  $-$  est irréductible, on a  $y^n(x) = 0$ , pour toutes les autres valeurs de  $a$ , on a  $9n(x) = 1$  « On voit que

70 **Bairé**: Sur les fonctions Pour donner une définition générale, supposons qu'on ait défini les classes de fonctions marquées par tous les nombres  $\alpha$  inférieurs à un nombre  $\alpha$ . Si une suite de fonctions dont chacune appartient à une classe marquée par un nombre  $\alpha$  a une limite, et si cette fonction limite n'appartient à aucune de ces classes, nous dirons qu'elle appartient à la classe  $\alpha$ . 65. Il est naturel de chercher à voir jusqu'où peut s'étendre cette formation, ou tout au moins cette conception logique de fonctions discontinues de plus en plus compliquées, mais pourtant se rattachant toujours d'une manière très précise aux fonctions continues. Nous allons tout de suite montrer que le procédé précédent s'applique seulement pour les nombres transfinis de la première et de la deuxième classe; cela résultera du théorème suivant: Considérons l'ensemble  $E$  des fonctions appartenant aux classes marquées par un nombre de la première ou de la deuxième classe de nombres. Si une suite de fonctions appartenant à l'ensemble  $E$  a une limite, cette fonction limite appartient aussi à l'ensemble  $E$ . La démonstration de ce théorème résulte très simplement du théorème de M. Cantor dont j'ai déjà eu l'occasion de me servir : Une suite dénombrable de nombres de la première ou de la deuxième classe a une limite supérieure, qui est un nombre appartenant à l'une de ces mêmes classes. Soit:  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$  la suite de fonctions; soient: les nombres qui marquent les classes auxquelles elles appartiennent; d'après le théorème de M. Cantor, il existe un nombre  $\beta$ , de la première ou de la deuxième classe, tel qu'on a, pour toute valeur de  $n$  : Donc, d'après la définition des fonctions de classe  $\beta$ , la fonction  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  appartient certainement, soit à la classe  $\beta$ , soit à une classe inférieure; c'est donc une fonction faisant partie de l'ensemble  $E$ . Nous sommes ainsi parvenus à la définition logique d'un ensemble  $E$  de fonctions qui contient toutes ses fonctions limites^ propriété que l'ensemble des fonctions continues, par exemple, ne possède pas. Ajoutons que chacune des fonctions qui font partie de l'ensemble  $E$  peut être définie par une infinité dénombrable de conditions (\*); en effet, une fonction de première classe, par (\*) Voir à CG sujet: Borel: Leçons sur la théorie des fonctions, Notes I et III.

de variables réelles. 71 exemple, est définie si on connaît la suite dénombrable de fonctions continues qui l'admet pour limite, et chacune de ces fonctions continues est définie au moyen d'une infinité dénombrable de conditions. Le théorème s'étend facilement, par voie de récurrence, à toutes les fonctions de  $E$ . Il résulte également de là que l'ensemble  ${}^\omega E$  a la puissance du continu; on sait d'autre part que l'ensemble de toutes les fonctions discontinues a une puissance supérieure; on voit donc que l'ensemble de fonctions  $J^5J$ , tout en étant beaucoup plus étendu que l'ensemble des fonctions continues, ne forme qu'une catégorie très particulière par rapport à l'ensemble de toutes les fonctions qu'on peut concevoir. Il serait intéressant d'arriver à démontrer l'existence effective de fonctions appartenant aux différentes classes que nous avons définies logiquement, et de caractériser chacune de ces classes, comme nous sommes parvenus, dans le chapitre précédent, à caractériser les fonctions de classe 1. Les difficultés deviennent très grandes dès qu'on aborde l'étude des fonctions de classe 2; je vais exposer les résultats obtenus en ce qui concerne les fonctions de cette classe.

### Fonctions de la deuxième classe.

66. Il me sera utile, pour étudier les fonctions de deuxième classe, d'énoncer quelques remarques au sujet des fonctions de première classe; ces remarques résultent immédiatement des théorèmes généraux qui nous ont permis, dans le chapitre précédent, de caractériser complètement ces fonctions. Supposons que le segment  $AB$  puisse être divisé en un nombre fini de segments sur chacun desquels la fonction soit de première classe; elle est alors de première classe sur  $AB$ . Si l'on sait que, sur tout segment  $A'B'$  intérieur à  $AB$ , si voisins que soient  $A'$  et  $B'$  de  $A$  et  $B$ , la fonction est de première classe, elle l'est encore sur  $AB$ . Il est bien évident que ces énoncés subsistent, si l'on y remplace l'expression: fonction de première classe, par celle-ci: fonction de deuxième classe. Si une fonction est de première classe, on peut changer ses valeurs en un nombre fini de points d'une manière arbitraire, sans qu'elle cesse d'être de première classe; on peut de même modifier d'une manière absolument quelconque les valeurs de la fonction aux points d'un ensemble réductible.

67. Indiquons maintenant un moyen d'obtenir une catégorie étendue de fonctions de deuxième classe.

72 Baire: Sur les fonctions Partons d'une fonction de première classe, et remplaçons par des valeurs arbitraires les valeurs de cette fonction aux points d'un certain ensemble  $E$  dénombrable : je dis que la fonction ainsi obtenue est de deuxième classe au plus. Soit en effet  $f(x)$  la fonction primitive,  $y(a?)$  la fonction modifiée; nous supposons que  $^$ , est de première classe, comme  $f(x)$ . D'ailleurs il est évident que  $f_n(x)$  a pour limite  $\phi(x)$ ; donc  $y(a?)$  est de la deuxième classe. Je vais m'occuper en premier lieu de cette catégorie particulière de fonctions, et je vais poser de nouvelles définitions qui me permettront de donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction ne diffère d'une fonction de première classe qu'en un ensemble dénombrable de points. 68. Considérons une fonction quelconque; soit  $\alpha$  une portion de l'intervalle dans lequel cette fonction est définie; je désignerai par  $M^{\alpha}$  et  $m^{\alpha}$  les limites supérieure et inférieure de la fonction dans  $\alpha$ . Soit  $\epsilon$  un nombre quelconque inférieur à  $1/2$ ; il existe dans  $\alpha$  un ensemble bien déterminé de points où l'on a:  $f(x) \in I^{\epsilon}$  cet ensemble contenant au moins un point; il peut se présenter deux cas: ou bien cet ensemble est dénombrable (ou fini), et alors la même chose a lieu pour tous les nombres compris entre  $X$  et  $m^{\alpha}$  ou bien au contraire cet ensemble est non dénombrable, et la chose est vraie pour tous les nombres inférieurs à  $X$ . Cela suffit pour qu'on soit assuré de l'existence d'un nombre que je désignerai par  $J_f$ , ( $\alpha \in S$ ), qui sépare les nombres en deux catégories de telle manière que: si  $X > M^{\alpha}$ , l'ensemble des points où l'on a  $f(x) \in I^{\epsilon}$  (ou  $f(x) > X$ ) est dénombrable ; si  $X < m^{\alpha}$  n'est pas dénombrable. Il y a d'ailleurs doute pour  $X = M^{\alpha}$ . On peut dire que  $J_f$ , ( $\alpha \in S$ ) est la limite supérieure des nombres  $X$  tels que les points où  $f(x) \in I^{\epsilon}$  forment un

de variables réelles. 73 ensemble non dénombrable, et la limite inférieure des nombres  $X$  tels que ces points forment un ensemble dénombrable. De la même manière nous appellerons  $m(a/3)$  la limite inférieure des nombres  $X$  tels que les points où  $f(x) \leq X$  forment un ensemble non dénombrable. Il résulte de ces définitions qu'on a certainement :  $3f(a/3) \leq m(a/3) \leq M(a/3)$ . Pour montrer qu'on a :  $M(a/3) \leq m(a/3)$ , il suffit de faire voir que tout nombre qui est supérieur à  $M(a/3)$  est aussi supérieur à  $m(a/3)$  ; soit donc  $X > M(a/3)$  ; l'ensemble des points où  $f(x) > X$  est dénombrable, d'après la définition de  $M(a/3)$  ; par suite, l'ensemble des points où  $f(x) \leq X$ , qui est le complémentaire du précédent, est non dénombrable ; donc, d'après la définition de  $m(a/3)$ , on a  $m(a/3) \leq X$ . Faisons une remarque importante. Si  $E$  est un ensemble dénombrable quelconque, mais déterminé, on peut, pour définir  $M(a/3)$  et  $m(a/3)$ , faire complètement abstraction des valeurs de la fonction aux points de  $E$  ; cela résulte de la propriété fondamentale qui caractérise ces nombres. Je poserai :  $M(a/3) = \sup \{ f(x) \mid x \in [a, a+3] \setminus E \}$  et je dirai que  $M(a/3)$ ,  $m(a/3)$ ,  $w(a/3)$ , sont respectivement le maximum, le minimum, l'oscillation de  $f(x)$  dans l'intervalle  $a/3$ , quand on néglige les ensembles dénombrables. Si maintenant, au lieu de considérer un intervalle fini nous considérons un point  $x_0$  nous commencerons par prendre un intervalle autour de ce point, soit  $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$  ; prenons, dans cet intervalle, les trois nombres que je viens de définir, et désignons-les par  $M(x_0)$ ,  $m(x_0)$ ,  $w(x_0)$  ; ils forment un ensemble dénombrable. 10

74 Baire: Sur les fonctions 2. Si petits que soient  $\epsilon$  et  $\delta$ , dans  
 l'intervalle  $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ , les points où  $f'(x) > 3\epsilon$  forment  
 un ensemble non dénombrable. On aurait des propositions analogues pour  
 $m, (x_0)$  et  $w, (x_0)$ ; l'analogie des nouveaux nombres avec les quantités  $i, f, w$ ,  
 $w, \epsilon$ , est évidente; citons encore une propriété qui nous sera utile. La  
 fonction  $M(x)$  est semi-continue supérieurement. Pour démontrer cette  
 proposition, remarquons d'abord que si un point  $x$  se trouve à l'intérieur d'un  
 intervalle  $a, b$ , on a certainement :  $f, ((r)^\delta, \epsilon/3)$ . Cela posé, si on  
 considère un point  $x_0$  et si on se donne un nombre  $\epsilon$ , on peut trouver  
 autour de  $x_0$  un intervalle  $a, b$  dans lequel on aura :  $M, \{pL^\delta\}$

de variables réelles. 75 On a donc: D'ailleurs on Rj pont ( $f\{x\}$ ): Comme, par hypothèse,  $y(x)$  est de première classe, c'est-à-dire développable en série de fonctions continues, elle est ponctuellement discontinue, ce qu'on peut exprimer en disant que la fonction  $w_0\{x\}$  a son minimum nul en tout point; la fonction  $w_i\{a\}$ , égale ou inférieure à la précédente, possède a fortiori la même propriété ; on peut donc dire que  $f\{x\}$  est une fonction telle que  $w_i\{f\{x\}\}$  a son minimum nul en tout point. Le raisonnement est valable, soit quand  $\hat{u}_i$  est relatif au continu, soit (quand  $\hat{u}_i$  est relatif à un ensemble parfait quelconque. Ainsi on peut dire que  $\hat{u}_i$  étant un ensemble parfait, la quantité  $\hat{u}_i\{f\{x\}\} G$  a son minimum nul en tout point de  $G$ . 70. Je me propose de démontrer la réciproque de ce théorème, c'est-à-dire que si  $\hat{u}_i\{f\{x\}\} G$  a son minimum nul en tout point de  $G$ , quel que soit l'ensemble parfait  $G$ , la fonction  $f\{x\}$  peut être obtenue en modifiant les valeurs d'une fonction de première classe aux points d'un ensemble dénombrable. . Je commencerai par démontrer le théorème suivant: Si, en tout point d'un intervalle continu, on a:  $w_i\{x\} = 0$ , la fonction  $f\{x\}$  peut s'obtenir en partant d'une certaine fonction continue, et en changeant les valeurs de cette fonction aux points d'un ensemble dénombrable. En effet, on a, d'après l'hypothèse:  $w_i\{x\} = M_i(x) - m_i(x) = 0$ . Nous pouvons donc poser:  $M_i(x) = m_i(x) = g(x)$ . La fonction  $g\{x\}$  étant identique à  $M_i(x)$  et à  $w_i\{a\}$ , se trouve être à la fois semi-continue supérieurement et inférieurement ; c'est donc une fonction continue. Soit  $\epsilon$  un nombre positif; je dis que l'ensemble des points où l'on a:  $f(x) > g(x) + \epsilon$  ou  $f(x) < g(x) - \epsilon$ ,

76 Baire: Sur les fonctions est dénombrable. Si en effet cet ensemble n'était pas dénombrable, il y aurait au moins un point  $X_0$  tel que, dans tout intervalle entourant ce point, l'ensemble ne serait pas dénombrable. On peut choisir l'intervalle  $(X_0 - \delta, X_0 + \delta)$  assez petit, pour qu'on ait à son intérieur:  $f(x) > g(x) - \delta$  et on aura, dans cet intervalle, et dans tout intervalle plus petit entourant  $X_0$ , un ensemble non dénombrable de points pour lesquels:  $f(x) > g(x) + \delta - \delta$ , c'est-à-dire:  $f(x) > g(x)$ . Par suite, la quantité  $M_i \{x\}$  serait au moins égale à  $g(X_i) + 0$  impossible, puisqu'elle est identique à  $f(X_i)$ . Ainsi l'ensemble des points où l'on a:  $f(x) > g(x) + \delta$ , est dénombrable, quel que soit le nombre positif  $\delta$ . Il en résulte que l'ensemble des points où l'on a:  $f(x) > g(x)$  qui est limite du précédent, lorsqu'on donne à  $\delta$  une suite de valeurs tendant vers 0, est aussi dénombrable. Il en est évidemment de même pour l'ensemble des points où  $f(x) = g(x)$ .

de variables réelles. 77 condition d'avoir en chaque point deux valeurs, celle de  $M_i$  et celle de  $m_i$ , l'oscillation de cette fonction en chaque point (au sens du § 14) sera précisément égale à 0), On en déduit, d'après l'extension faite du théorème du § 51 aux fonctions multiformes (§ 52), qu'il est possible de déterminer une fonction continue  $g\{x\}$  telle que, en chaque point, les deux nombres  $3f_i$  et  $m_i$  soient compris entre  $g(x)$  et  $g\{x\} + X$ . D'autre part, en faisant un raisonnement analogue à celui que nous venons de faire dans le § précédent, on voit que l'ensemble des points où l'on a :

$$f\{x\} > g\{x\} + 1^\wedge$$

78 Baire: Sur les fonctions J'ai supposé, dans ce qui précède, que l'on considérait une fonction définie sur un segment, en y comprenant les extrêmes. L'extension se fera, comme au § 50, si l'on considère seulement les points intérieurs au segment. Enfin, une autre extension, analogue à celle du § 52, peut se faire, si on remplace le continu par un ensemble parfait quelconque. On peut ainsi résumer tous les résultats que nous venons d'obtenir dans l'énoncé suivant : Si  $G$  est un ensemble parfait sur lequel la fonction  $f(x)$  est définie^ les points extrêmes pouvant être exceptés, et si le maximum de  $w$ ,  $[f(x)]$  ( $?, x$ ] est  $X$ , on peut poser:  $f(x) =$

de variables réelles. 19 D'après l'hypothèse faite sur  $f(x) \in P$ , est non dense par rapport à  $P^{\wedge\wedge}$  et dans tout intervalle contigu à  $P$ , on a: Nous opérons la décomposition de  $f$  en  $y + \phi$  aux points de  $P^{\wedge}$  qui se trouvent dans un tel intervalle;  $\phi$  sera identique à une fonction continue sur cette portion de  $P^{\wedge}$ , que je désignerai par  $g$  sauf un ensemble dénombrable; de sorte que si nous considérons  $\phi$  et  $g$  dans tout l'intervalle continu contigu à  $P_j$  (sauf les extrêmes),  $g$  est de première classe, et  $\phi$  n'en diffère qu'aux points d'un ensemble dénombrable. On voit en résumé qu'en suivant une marche tout à fait analogue à celle que nous avons suivie au § 53, on arrive à mettre  $f(x)$  sous la forme suivante :  $f(x) = (f_0(x) + \phi(x))$ , ( $f_0(x)$  ne différant d'une fonction de première classe  $g_0(x)$  qu'en un ensemble dénombrable de points, et  $\phi(x)$  satisfaisant en tout point à la condition : Nous appliquerons ensuite la même méthode à  $\phi(x)$ , en remplaçant  $a$  par  $a^*$ .

' Il faut montrer d'abord que  $\phi(x)$  satisfait à la condition que nous avons supposée être remplie par  $f(x)$  c'est-à-dire que  $w_n(t/(ir). G]$  a son minimum nul en tout point de  $G]$  cela résulte de ce que  $M/(a:)$  est la différence de deux fonctions  $f(x)$  et  $(f_0(x))$  pour chacune desquelles la condition est remplie. On peut donc poser:  $\phi(x) = ?$ ,  $(rc) +$

80 Baire: Sur Us fonctions On répétera la même opération pour  $\wedge$  en remplaçant  $\wedge$  par  $j >$  et ainsi de suite indéfiniment. On arrive ainsi à la formule suivante:  $f(x) = y_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} t_n(a_n) \cdot \hat{t}_n(a_n) \cdot H(V_n) \sim$  le nombre des fractions étant fini ou infini, et chaque nombre  $c$  pouvant prendre la valeur 0 ou la valeur 2. Je formerai ensuite un ensemble  $E_t$  de la manière suivante: dans chaque intervalle contigu à  $j \in I_i$ , je formerai l'ensemble qui, par rapport à cet intervalle, a la même situation que  $E_t$  par rapport à l'intervalle  $(0, 1)$ ; l'opération étant supposée effectuée dans tous les intervalles contigus à  $-B$ , je désigne l'ensemble total par  $E_f$ . Je déduirai  $E_s$  de  $E_t$  par le même procédé, c'est-à-dire que dans tout intervalle contigu à  $-E$ , j'introduis un ensemble jouant le même rôle par rapport à cet intervalle que  $E_t$  par rapport à  $(0, 1)$ .

de variables réelles. 81 Je définis ainsi  $T^{\alpha}_j, j \in \mathbb{N}$ ,...  $E_n, n \in \mathbb{N}$ . Chacun de ces ensembles contient les précédents, et est non dense par rapport au continu; mais si nous désignons par  $E$  l'ensemble limite de  $E_n$  il est facile de voir que  $E$  est dense dans toute portion du continu; il suffit de s'assurer, par exemple, qu'en désignant par  $a_n$  le maximum de la longueur des segments contigus à  $E_n$  « $a_n$  tend vers 0 quand  $n$  croît indéfiniment. L'ensemble  $E$  est ce que j'ai appelé au § 59 un ensemble de première catégorie. Considérons alors la fonction  $f(x)$  qui a la valeur 1 pour les points de  $E$  la valeur 0 aux autres points; je dis que  $f(x)$  est de deuxième classe. Pour cela, je prends  $f_n(x)$ , définie par la condition d'être égale à 1 aux points de  $E_n$ , à 0 aux autres points. Il est bien évident que  $f_n(x)$  a pour limite  $f(x)$  d'ailleurs  $f_n(x)$  est une fonction de première classe, car elle n'a de discontinuités que sur l'ensemble parfait  $E_n$  et elle est continue sur cet ensemble; donc  $f(x)$  est de la deuxième classe. D'autre part, si nous appliquons à cet exemple les définitions que nous avons données des nombres  $M, m, w$ , (relatifs au continu), nous reconnaissons qu'on a, en tout point :  $\lim_{j \rightarrow \infty} M_j = 1, m = 0, W_j = 1$ , ce qui montre que la condition du numéro précédent n'est pas remplie par cette fonction. 74. Je vais maintenant indiquer des conditions nécessaires auxquelles satisfont les fonctions de deuxième classe; il me faudra pour cela poser de nouvelles définitions. Je rappelle qu'au § 59 j'ai appelé ensemble de première catégorie tout ensemble formé par la réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles non denses. Considérons maintenant une fonction  $f(x)$  définie dans l'intervalle  $a$  à  $b$ . Il existe un nombre  $\alpha$ ,  $(a, b)$  qui est la limite inférieure des nombres 1 tels que les points où  $f(x) \geq \alpha$  forment un ensemble de première catégorie, et ce nombre est en même temps la limite supérieure des nombres  $\alpha$  tels que les points où  $f(x) > \alpha$  forment un ensemble de deuxième catégorie. De même, il existe un nombre  $m$ ,  $(a, b)$  tel que, suivant qu'on a  $X > m$ , ou  $X$

82 Baire: Sur les fondions On a d'ailleurs :  $M_0(a_j S) \wedge M, (a/3) \wedge$   
 $M, (a/3) \wedge m^{\wedge} (a/3)^{\wedge} m, (a i3)^{\wedge} mo \{$

de variables réelles. 83 valeurs en ces deux points, c'est-à-dire que je pose :  $y_n - y_{n+1} = y_n - y_{n+1}$  C'est le procédé que j'ai déjà employé au § 20; on reconnaît que la fonction ainsi définie est, en tout point de  $x = X_0$  continue par rapport à  $y$ . Si maintenant on considère une droite parallèle à  $Ox$ , et d'ordonnée positive, la fonction, considérée sur cette droite comme fonction de  $Xy$  est de première classe; cela a lieu, d'après les hypothèses, sur les droites  $y = y_n$  et aussi sur les autres droites parallèles à  $Ox$  (sauf  $y = 0$ ), où  $f(x, y)$  est, d'après la formule (1), une combinaison linéaire de fonctions de première classe. Rappelons un résultat obtenu au chapitre II : si on considère la suite de fonctions : l'ensemble  $P$  des points en chacun desquels une au moins des fonctions est discontinue, est un ensemble de première catégorie; en chaque point de l'ensemble complémentaire  $E = P$  ( $E$  représentant le continu), toutes les fonctions sont continues par rapport à  $x$ . Soit  $A(x_0)$  un point quelconque de cet ensemble  $E = P$ ; je dis que, quel que soit  $y$ , pourvu qu'il soit positif,  $f(x_0, y)$  est continue au point  $(x_0, y)$  par rapport à  $x$ . Cela a lieu, d'après l'hypothèse, quand  $y$  fait partie de la suite:  $y^1, y^2, \dots, y^n, \dots$   $P$  suite, cela a lieu aux autres points de la droite  $x = X_0$  en vertu de la formule (1). Mon but est donc d'étudier la fonction:  $y(x) = f(x, 0)$ , sachant que  $f(x, y)$  est en tout point continue par rapport à  $y$ , que, pour  $y_0 > 0$ ,  $f(x, y_0)$  est de première classe par rapport à  $Xy$  et que, pour toute valeur  $x^0$  qui n'appartient pas à un certain ensemble de première catégorie  $P$ ,  $f(x^0, y)$  est continue par rapport à  $a$ ; au point  $(x^0, y)$  si  $y$  est positif. 76. Prenons sur  $Oa$  un point quelconque  $a^0$ , et considérons la droite  $a = a^0$ . La fonction est continue sur cette droite; si donc on se donne un nombre positif  $\epsilon$ , il existe un segment  $A^0B^0$  (fig. 13) de longueur  $\epsilon$  qui possède la double propriété suivante : dans  $a^0B^0$ , l'oscillation de la fonction est  $\epsilon$ ; dans un segment  $A^0B^0$ , de longueur supérieure à  $\epsilon$ , l'oscillation est supérieure à  $\epsilon$ . La quantité «

**The text on this page is estimated to be only 28.62% accurate**

84 Baire: Sur les fonctions Je prends:  $AoBi = a9\{Xo\} + e$ . Dans le segment  $AoBi^{\wedge}$  roscillation est un nombre supérieur à  $a$ ; soit  $a + ^{\wedge}$  Si je prends  $ki < k^{\wedge}$  je peux trouver, entre  $A$  et  $Bi^{\wedge}$  deux points  $P$  et  $Q$  tels que : Comme, en chacun des deux points  $P$  et  $Ç$ , il y a continuité par rapport à  $Xj$  on peut déterminer deux segments  $P' P''$  et  $Q' Q''$  parallèles à  $Ox$ ,  $B' Bi A$  Ao Fig. 13. ayant pour milieux  $P$  et  $Ç$ , de même longueur  $2 cJ$ , tels que, si  $Pi$  et  $Ç$ , sont deux points quelconques pris respectivement sur ces segments, on a :  $\{f(p,)-f(P)\} < \{f(Q)-f(Q')\} < kl$  Des trois inégalités écrites on déduit :  $IAP.-A.)I > ^{\wedge}$ ,  $P$ , et  $Qi$  étant deux points quelconques pris, le premier sur  $P' P''$  le second sur  $Q' Q''$ . Si alors on prend un point  $A(x)$  d'abscisse comprise entre  $Xo - i$  et  $Xo 4- \hat{y}$  et si on considère le segment  $A B'$  correspondant à  $i4$  et de longueur  $\ll ff(^{\wedge}o) + \hat{E}$ , on voit que dans ce segment Toscillation est  $>$  ( $?$ , puisqu'il ren

de variables réelles. 85 ferme un couple de points  $P$  et  $Q$ . Donc, toutes les fois que : on a : ce qui exprime la propriété que je voulais établir. Considérons maintenant la fonction  $n$  relative à  $a$ , c'est-à-dire le minimum de «ff lorsq<sup>i</sup> on néglige les ensembles de première catégorie. Je dis que  $m(a)$  ne peut pas être nul pour tous les points d'un intervalle continu  $A B$ . Supposons pour un instant que cela ait lieu, c'est-à-dire que, dans toute portion de l'intervalle, et si petit que soit  $\epsilon$ , les points où  $n < \epsilon$ . On peut aussi conclure de là qu'il existe dans tout intervalle un point  $x$  où  $n = 0$  [«

86 Baire: Sur les fonctions de  $A$  à  $B$  n'appartenant pas à  $Q^\wedge$  on a en ce point: Par suite, dans le segment  $MM'$  parallèle à  $O^\wedge$  et qui joint les deux bases du rectangle  $ABBA'$  l'oscillation est  $< a$ . Soit  $R$  l'ensemble formé par la réunion de  $P$  et de  $C$ ,  $P$  désignant toujours, comme plus haut, l'ensemble des points  $X$  tels que, sur les points de  $x = Xq$  il y a continuité par rapport à  $x$ . L'ensemble  $E - B$  possède à la fois les propriétés de  $E - P$  et de  $E - Q$  c'est-à-dire que si  $M$  appartient à  $E - B$  par l'oscillation sur  $MM'$  est  $< a$ , et en tout point de  $MM'$  distinct de  $M$ , il y a continuité par rapport à  $x$ .  $M^\wedge MMa$  B Fig. 14. Je dis que, si  $M(Xt)$  est un point de  $AB$  appartenant à  $E - B$ , l'oscillation de la fonction en ce point par rapport aux points de  $E - R$  est  $< 2a$ . En effet, donnons-nous un nombre positif  $\epsilon$ ; prenons sur  $MM'$  un point quelconque  $P(Xoj \hat{o})$ ; nous pouvons déterminer un nombre  $\delta$  assez petit pour que, sur le segment  $P'P''$   $\{Xo - (3^\wedge x^\wedge Xo - (i^\wedge y = y^\wedge^\wedge$  l'oscillation soit  $< \epsilon$ . Si  $M_i$  et  $M^\wedge$  sont deux points de  $AB$  appartenant à  $E - B$  et pris dans l'intervalle  $x^\wedge - i^\wedge x^\wedge x + i^\wedge$  et si  $P$ , et  $P^\wedge$  sont les projections de ces points sur  $P'P''$ , on a:  $|f(M_i) - f(P)| < a$ ,  $|f(M_i) - f(P)| < a$ ,  $|f(P) - f(P^\wedge)| < a$

4e variables réelles. 87 Ainsi, dans toute portion de l'intervalle considéré, et si petit que soit  $\delta$ , il y a un intervalle en chaque point duquel on a :  $\delta^2 < \epsilon$ . Il en résulte que, dans toute portion de l'intervalle, il existe des points où  $\lim_{x \rightarrow a} w_x = 0$ . Autrement dit, si une fonction  $y(x)$  est de deuxième classe, la fonction  $\omega[y(x)]$  a son minimum nul en tout point. 77. On peut refaire une théorie analogue à celle que je viens d'exposer en partant d'un ensemble parfait quelconque  $(r, \dots)$ , qui jouera le rôle du continu dans les considérations qui précèdent. Nous définirons, dans tout intervalle  $a/S$  contenant des points de  $G$ , et en chaque point de  $G$ , les nombres :  $Mt[(f(x))^\alpha(a, S)]$ ,  $Mt[(f(x))^\alpha(a, x_0)]$  etc.... . Par exemple,  $M^\alpha[y(x), G, a, 0]$  sera la limite supérieure des nombres  $X$  tels que les points de  $G$  situés dans l'intervalle  $a/3$  où l'on a :  $f(a; X) > X$ , forment un ensemble de deuxième catégorie par rapport à  $G$ . Les raisonnements du numéro précédent s'appliquent quand on remplace le continu par un ensemble parfait  $G$  on en déduit l'énoncé suivant: Si une fonction est de deuxième classe, et si on considère un ensemble parfait quelconque  $(\hat{r}, \dots)$ , la fonction  $\omega$ , [

88 Baire: Sur les fonctions de classe I. On conçoit tout de suite que cette étude serait plus difficile que l'étude des fonctions d'une seule variable ; supposons, pour prendre le premier problème qui se pose, qu'on cherche la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction  $f(x, y)$  soit la limite d'une suite de fonctions  $f_n(x, y)$  ; si  $f_n(x, y)$  est continue par rapport à l'ensemble  $(a, y)$  ; les résultats que nous avons démontrés dans le chapitre II nous donneront bien aisément des conditions nécessaires, mais si nous cherchons des conditions suffisantes, nous serons amenés à considérer des ensembles parfaits de points dans le plan ; or, il est plus difficile de raisonner sur ces ensembles que sur les ensembles parfaits linéaires. On peut dire que la théorie de ces derniers est complète: tous les points qui ne font pas partie de l'ensemble sont constitués par les points intérieurs à une infinité d'intervalles parfaitement déterminés qui sont les intervalles contigus à l'ensemble. Dans le cas du plan, les choses sont loin de se présenter d'une manière aussi nette; il faudrait donc en premier lieu chercher ce qui, dans le plan, remplacera la notion d'intervalle contigu à l'ensemble. Dans tous les cas, il faudrait faire, à un point de vue en quelque sorte géométrique, une étude de l'ensemble parfait à deux dimensions le plus général ; c'est seulement alors qu'on pourrait aborder le problème relatif aux fonctions. En ce qui concerne les fonctions de plusieurs variables en général, je me bornerai donc à ces indications; je vais, dans ce chapitre, donner quelques résultats sur les fonctions de plusieurs variables continues par rapport à chacune d'elles. I. Fonctions de deux variables, continues par rapport à chacune d'elles. 79. Nous avons déjà obtenu, dans le chapitre II, des résultats importants sur les fonctions de deux variables, continues par rapport à chacune d'elles; je me propose de compléter ces résultats. Soit  $f(x, y)$  une telle fonction; nous avons reconnu (§ 25) que l'ensemble des points où l'oscillation par rapport à  $(x, y)$  est  $\leq \alpha$  est un- ensemble qui n'est dense nulle part par rapport au continu, et qui n'est dense non plus par rapport à aucune portion de la courbe:  $y = f(x)$ ,  $f(x)$  étant une fonction continue. Posons-nous maintenant la question suivante: soit un rectangle parallèle aux axes:  $x \in [a, a + \delta], y \in [b, b + \delta]$ ,

de variables réelles. 89 Parmi les segments parallèles à  $Oy$  et contenus dans ce rectangle, c'est-à-dire parmi les segments: en supposant  $Xq$  compris entre  $a$  et  $By$  considérons ceux qui contiennent un point où l'oscillation est  $\wedge a$ , et prenons leurs points d'intersection avec  $Qx$ ] ces points peuvent-ils former sur  $Ox$  un ensemble dense par rapport au continu? En d'autres termes, les segments en question peuvent-ils former un faisceau dense par rapport au faisceau de tous les segments parallèles à  $Oy$ ? C'est la question que je me propose de traiter, et qui m'amène tout naturellement à de nouvelles études sur la théorie des ensembles. 80. Supposons que, dans le rectangle: il existe un ensemble de points  $E$  réparti de telle manière que, entre deux droites parallèles à  $Oy$ :  $a: = rt$ ,  $x = bj$  (supposées limitées aux bases du rectangle), il existe toujours une droite  $a; = c$  contenant un point de  $E$ ] je suppose de plus que  $E$  est fermé. Remarquons d'abord que ces deux conditions entraînent la suivante : Sur toute parallèle à  $Oy$ , il y a au moins un point de  $E$ , Cela résulte du théorème suivant: Si une droite  $rr \gg a$  est limite d'une suite de droites  $oE^{\wedge}a,, x := a,, ..., a: = an \dots$ , dont chacune contient un point de  $Ey$  supposé fermé, elle contient un point de  $E$  au moins. Soit en effet  $PQ(x = ay \wedge y^{\wedge} a)$  le segment limite de la suite de segments  $Pi \text{ } \text{Çi}, Pi \text{ } \text{Ç}, , \dots PnQn[{}^{\wedge} cin^{\wedge} y :^{\wedge} y^{\wedge} (>], \dots$ ; chacun de ces segments contient un point de  $E$  au moins. Partageons tous  $Y 4- 8$  ces segments en deux par la droite  $fit^{\wedge}, \dots JS^{\wedge}, \dots B$ , d'ordonnée  $y = -^{\wedge} -^{\wedge} \text{ — } \bullet$ . Je dis qu'un au moins des deux segments  $Pfi, BQy$  a la propriété que nous supposons appartenir à  $PQ \setminus$  en effet, ou bien, parmi les segments  $P|fii, PfRfy \dots PnBnj -^{\wedge}$  il y en a une infinité contenant des points de  $E$  et admettant  $Pfi$  comme limite, ou bien la chose a lieu pour  $BQ$ ; car si la propriété n'avait lieu ni pour  $PBy$  ni pour  $BQy$  elle n'aurait pas lieu non plus pour le segment total  $PQ$ . Supposons par exemple que  $Pfi$  possède la propriété; on divisera  $Pfi$  en deux segments, dont un au moins la possédera, et ainsi de suite indéfiniment. On arrive ainsi à la démonstration de l'existence d'un point  $M\{yo\}$  de  $PC$ , qui possède la propriété suivante: si petit 12

de Baire: Sur les fonctions que Boit  $\hat{e}$ , le\* segment: est la limite  
 d'une suite de segments:  $\hat{=}\hat{a}_n, y_0 \text{ — } \langle i^{\wedge} i^{\wedge} y_0 + f_i, (w = l_j 2, 3, \dots) \rangle^{\wedge} \langle$   
 dont chacun contient au moins un point de  $E$ . Le point  $M$  est donc un  
 point limite de  $E^{\wedge}$  et par suite fait partie de  $E$ . Nous pouvons énoncer le  
 résultat sous une autre forme: Si  $E$  est fermé, et si on projette cet ensemble  
 sur une droite, l'ensemble projeté est fermé. B B E Ci ' JD. F. \_ip Fig. 15.  
 81. Cette remarque étant faite, reprenons l'ensemble  $E_j$  supposé fermé, et  
 réparti sur toutes les parallèles à  $Oy$  dans le rectangle  $ABCD$  (fig. 15):  
 Traçons la droite  $EF$ : Je dis qu'il existe certainement un rectangle parallèle  
 aux axes, ayant pour bases des portions de  $AB$  et de  $EF^{\wedge}$  ou de  $EF$  et de  
 $CD$ , tel que sur chaque segment parallèle- à  $Ox$  joignant les bases de ce  
 rectangle, il y a au moins un point de  $E$ . Si en effet cela n'était pas, c'est que,  
 en projetant sur  $AB$  (parallèlement à  $Oy$ ) les points de l'ensemble  $E$   
 contenus dans le rectangle  $ABFE_j$  ou ceux qui sont contenus dans  $EFGD^{\wedge}$   
 on aurait chaque fois un ensemble non dense; on en déduirait que, dans le  
 rectangle total  $ABOD_j$  il n'y au- rait qu'un ensemble non dense de  
 parallèles à  $Oy$  portant des points de  $E_j$  ce qui serait contraire. à l'hypothèse.

de variables réelles. 91 Il existe donc certainement un rectangle tel que  $J^?$ ,  $Ci D$ , (fig. 15), qui se trouve dans les mêmes conditions que le rectangle primitif  $AB CD$ : l'ensemble  $E$  est réparti sur toutes les parallèles à  $Oy$  contenues dans ce rectangle; de plus, la hauteur de ce nouveau rectangle est la moitié de celle du rectangle primitif. Je désigne par  $a, jS, 71, ^$ , les coordonnées qui jouent le même rôle par rapport à  $A^{^}Bi C, Dj$  que  $\langle, /3, /, c^$ , par rapport à  $ABCDj$  de sorte que  $Ai BiCt D$ , peut être représenté par : et  $Ton a: , .$  Par le même raisonnement, on voit qu'il existe dans  $^5, CD$ , un rectangle  $AtBtCt A$  : possédant les mêmes propriétés que  $AB C D$  et  $^4, J5|$  (7, D, , et tel que : En répétant indéfiniment l'opération, on obtient une suite de rectangles dont chacun est contenu dans celui qui le précède; de plus, on peut s'assujettir à prendre toujours: les inégalités excluant les égalités. Dans ces conditions, il existe au moins un point  $P(Xoj ijo)$  appartenant à  $Ej$  et tel qu'on a, quel que soit  $n$ : Ce point possède la propriété suivante : Si on prend une aire quelconque contenant  $P$  à son intérieur, si petite qu'elle soit, on peut trouver dans cette aire un rectangle de côtés parallèles aux axes<sup>^</sup> dans lequel l'ensemble  $E$  est réparti sur toutes les parallèles à  $Oy$ ,  $P$  étant contenu dans ce rectangle mais ne se trouvant pas sur l'un des côtés parallèles à  $Oy$ . Si nous reprenons le rectangle  $A B C Dj$  et si nous considérons deux ' parallèles quelconques à  $Oy$ , le raisonnement s'applique aussi bien à la portion de  $A B C D$  limitée par ces deux droites qu'au rectangle total ; il existe donc, entre ces deux droites, un point de même nature que le point dont je viens de démontrer l'existence; je dirai qu'un point est un point  $\hat{P}b^$  il' fos-<sup>^</sup>

92 Baire: Sur les fonctions sède la propriété fondaiï\entale que je viens d'énoncer. Nous pouvons dire alors que V ensemble des parallèles à Oy qui portent des points P est un en\* semble deflse\* Je vais montrer que l'ensemble des points P est un ensemble dense en lui-même^ c'est-à-dire qu'un point P ne peut pas être isolé. Supposons pour un instant qu'il puisse exister un point Po ( $\hat{o}$ ,  $y^{\odot}$ ) isolé; je peux alors déterminer un rectangle A B G D (fig. 16) contenant Po à son intérieur et ne contenant pas d'autre point P. Soit: Fig. 16. ce rectangle. On a : Menons la droite G H: a

de variables réelles. 93 Voici maintenant la conséquence que je déduis de la propriété essentielle des points P. Supposons que, en chaque point M de, Ey on construise le segment parallèle à  $Ox$  ayant ce point pour milieu, et de longueur  $2h$ ; considérons l'ensemble de tous les points qui se trouvent appartenir aux segments ainsi construits; prenons un point  $P(x_0, y_0)$ ; je dis que, si petit que soit  $h$  il existe une aire contenant P à son intérieur, et dont tous les points appartiennent à l'ensemble précédent. En effet traçons les droites: D'après la propriété de P, il existe certainement un rectangle R ayant pour bases des portions de ces droites, comprenant P entre ses côtés parallèles à  $Ox$ , et tel que l'ensemble E est réparti sur tous les segments parallèles à  $Ox$  contenus dans R. Si, par chaque point  $(x_i, y_i)$  de E contenu dans R, on mène le segment de longueur  $2h$  qui a ce point pour milieu, ce segment: • contiendra tout le segment:  $x_i - h, x_i + h$  —  $y_i - h, y_i + h$ . On pourra donc affirmer que tout point du rectangle R appartient à un segment de longueur  $2h$  ayant pour milieu un point de E. 82.

Considérons maintenant une fonction  $f(x, y)$  continue par rapport à chacune des variables; reprenons la fonction  $\omega(x, y)$  définie au chapitre II: c'est la demi-longueur du plus grand segment parallèle à  $Ox$  et de milieu A  $(x, y)$ , dans lequel l'oscillation est égale à  $\omega$ . Nous savons que  $\omega$  est une fonction positive et semi-continue supérieurement; si on considère un ensemble parfait quelconque E, je dis qu'il est impossible que, en tout point de E,  $\omega$  ait son minimum nul par rapport à E. La démonstration a déjà été faite au chapitre I (§ 12), quand on considère une fonction de n variables qui peuvent prendre toutes les valeurs comprises entre certaines limites; je l'ai étendue ensuite, au chapitre II (§ 28), au cas où la fonction est seulement définie aux points d'un ensemble parfait linéaire. D'une manière plus générale, le théorème est vrai si la fonction est définie sur un ensemble parfait absolument quelconque, dans un domaine à n dimensions; il suffit, pour le voir, de reprendre avec quelques modifications de détail, la démonstration donnée au § 28; j'admettrai donc ce résultat.

94 Baire: Sur les fonctions 83. Cela posé, considérons la fonction  $f(x^y)$  dans un certain rectangle  $ABGD$  parallèle aux axes, et admettons pour un instant que l'ensemble  $E$  des points où l'oscillation est  $\infty$  puisse être réparti dans ce rectangle sur toutes les parallèles à  $Oy$ . L'ensemble  $E$  est essentiellement fermé; par le procédé du § 81 je déduis de  $E$  un ensemble  $(F)$ , dont chaque point  $P$  possède la propriété étudiée dans ce paragraphe; j'ai fait remarquer de plus que  $(F)$  est parfait, et réparti sur toutes les parallèles à  $Oy$ . Il est donc impossible que  $a$

de variables réelles. 95 Si on considère un point  $(x_0, y_0)$  et si on se donne un nombre  $\epsilon$ , on peut, dans tout cercle de centre  $A$  trouver un autre cercle en tout point duquel on a: i En effet, nous pouvons prendre, sur  $Ox$  par exemple, et à partir de  $A^x$  un segment  $AB$  contenu tout entier dans le cercle donné, et dans lequel l'oscillation sera inférieure à  $\epsilon$ . Dans Je segment  $AB$  il existe des points où la fonction est continue par rapport à l'ensemble  $(x, y)$ ; prenons l'un de ces points; nous pourrions trouver un cercle  $C$  ayant pour centre ce point, et dans lequel l'oscillation sera inférieure à  $\epsilon$ . • Il est évident qu'en tout point du cercle (7, l'inégalité (1) a lieu. Remarquons la différence qui se présente entre les points de continuité et les points de discontinuité: si en  $A$  la fonction est continue, on peut toujours choisir pour cercle  $C$  un cercle contenant  $A$ ; au contraire, s'il y a une discontinuité en  $A$  lorsque  $\epsilon$  est suffisamment petit, on est obligé de prendre pour cercle  $C$  un cercle ne contenant pas  $A$ . IL Fonctions de trois variables. 85. Etudions maintenant le cas d'une fonction de trois variables  $x, y, z$ , qu'on suppose, en chaque point, continue par rapport à chacune d'elles. Soit  $f(x, y, z)$  une telle fonction; soit  $A_0$  un point  $(x_0, y_0, z_0)$  je considère une portion de surface  $S$  passant par  $A_0$ , et représentable par une équation de la forme:  $z = \phi(y, 0)$ , avec la condition:  $\phi(y_0, 2\epsilon) = z_0$ . . ■ Soit, en chaque point  $A(x, y, z)$  la demi-longueur du plus grand segment  $BC$  parallèle à  $Ox$  et de milieu  $A$  dans lequel l'oscillation est:  $\epsilon$  (7) je vais étudier cette fonction  $\phi(x, y, z)$  considérée comme fonction sur la surface  $S$ , . . . Soit (fig. 17):  $Bo, A_0 = (x_0, y_0, z_0)$ . . • •

**The text on this page is estimated to be only 28.03% accurate**

96 Baire: Sur les fonctions Prenons,  $e$  étant un nombre positif quelconque: Dans le segment  $B'o G^{\wedge}$  l'oscillation est un nombre supérieur à  $a$ , soit  $d^{\wedge}-h]$  si je prends:  $k' cr + i'$ . Je vais considérer des points de  $S$  voisins de  $Ao$  ; je m'astreins tout d'à  $V a$ ;  $9o C.'$  Fig. 17. bord à faire varier  $y$  et  $z$  dans un champ suffisamment restreint autour de  $yo$  et  $Zo$  pour qu'on ait toujours :  $(1) \wedge \text{---} \wedge q \leq 7$ : Menons par  $Fo$  et  $Qo$  les plans parallèles au plan des  $yzj$  et dans ces plans, les parallèles à  $Oy$ ,  $P^{\wedge}y'^{\wedge} Qoy'']$  prenons, sur  $P^{\wedge}y$  et  $Q^{\wedge}y'^{\wedge}$  deux segments  $Pg P$ , et  $\zeta g \zeta$ , , dans chacun desquels l'oscillation soit inférieure  $y$  à  $\text{---}$  ; nous les prenons en outre assez petits pour que les valeurs de  $y$  et  $\wedge r$  correspondant aux points intérieurs à ces segments soient comprises dans le champ de variation de  $y$  et  $\wedge$ , précédemment défini. Choisissons sur  $Pg P$ , un point de continuité par rapport à l'ensemble  $(y, z)$  dans le plan  $Py' s')$  soit  $P'$  un tel point; prenons dans ce plan un  $k'$  cercle  $C$  de centre  $P'$  et où l'oscillation soit moindre que  $\text{---}$  • Prenons ensuite, sur  $\zeta o \zeta i$ , un point  $Q'$  se projetant à l'intérieur du cercle  $C$ , et tra

**The text on this page is estimated to be only 23.46% accurate**

de  $f$  réelles. 97 çoDS dans le plan  $Q^y^z^$  un cercle  $C$  de centre  $Q$  oh l'oscillation soit  $m^* k'$  feneure à — • 4 Si  $P$  et  $Q$  sont deux points quelconques pris, l'un dans  $C$  et Tautre dans  $C'$  y on a les différentes inégalités:  $\backslash f(P') - f\{P, \} \backslash <: ia = "" l = "" > \gg + /'^$ , d'où l'on déduit:  $\backslash f\{P\} \sim f\{Q\} \backslash >$

98 Baire: Sur les fonctions c'est-à-dire: De même, dans cette aire, on en trouvera une autre où Ton aura partout: et ainsi de suite. On aurait finalement un point où  $a_9 = 0$ , ce qui est impossible. Ainsi, dans toute portion de  $S^{\wedge}$  il existe une autre portion dans laquelle le minimum de «» est positif. Soit  $C$  une portion dans laquelle «» a son minimum positif, et soit  $y$  un nombre positif inférieur à ce minimum. Nous pouvons déterminer un domaine à trois dimensions, un prisme de côtés parallèles aux axes, par exemple, tel que, sur chaque parallèle à  $Ox$  contenue dans ce prisme, il y ait un point de  $(7, y)$ , et dont la dimension parallèle à  $Ox$  soit au plus égale à 7; dans ces conditions, sur tout segment parallèle à  $Ox$  et contenu dans le prisme, l'oscillation est  $\leq a$ . Prenons ensuite une section de ce prisme par un plan parallèle aux  $y$  et  $z$  et dans cette section, une aire  $G$  dans laquelle l'oscillation soit  $\leq a$ . Considérons le cylindre qui projette  $G$  sur le plan des  $x$  et  $z$  soit  $L$  ce cylindre, limité aux faces du prisme, et soit  $C$ , la portion de  $C$  qu'il découpe sur la surface  $S$ . Je dis que, dans le cylindre  $L$ , l'oscillation de la fonction est  $\leq 3a$ . En effet, soient  $P$  et  $Q$  deux points quelconques pris dans ce cylindre, et soient  $P'$  et  $Q'$  leurs projections sur  $G$ . On a:  $|f(P) - f(P')| \leq a$ ,  $|f(Q) - f(Q')| \leq a$ ,  $|f(P') - f(Q')| \leq a$ , d'où:  $|f(P) - f(Q)| \leq 3a$ . En particulier, nous constatons que, en chaque point de  $C$ , l'oscillation par rapport à l'ensemble  $(r, y, z)$  est  $\leq 3a$ . Ainsi, dans toute portion de la surface:  $a = 9(y, 0)$ , et si petit que soit  $\epsilon$ , il existe une aire en chaque point de laquelle l'oscillation par rapport à  $(r, y, 0)$  est  $\leq \epsilon$ . On déduit de là, par un procédé de raisonnement que j'ai souvent l'occasion d'employer, l'existence, dans chaque portion de la surface, d'un point de continuité par rapport à l'ensemble  $(r, y, z)$ . On a, a fortiori les résultats suivants: Dans tout domaine à trois dimensions il y a des points de continuité par rapport à l'ensemble  $(r, y, z)$  autrement dit, la fonction est ponctuellement discontinue.

de variables réelles. 99 Sur toute surface  $\alpha = \alpha(y, z)$  la fonction donnée  $\alpha$  considérée comme fonction de  $y$  et  $z$  est ponctuellement discontinue. 86. Nous voyons d'après cela que l'ensemble des points où l'on a: (k)  $[f(x, y, z)]^\alpha$  ne peut pas être dense par rapport à un volume, ni même par rapport à une surface ; mais cet ensemble peut contenir tous les points d'une ligne  $j$  comme je vais le montrer sur un exemple très simple. Prenons une fonction  $f(x, y, z) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y = z \\ 0 & \text{aux autres points} \end{cases}$  est partout continue par rapport à chacune des variables  $x, y, z$ . »

**The text on this page is estimated to be only 27.60% accurate**

100 Baire: Sur les fonctions 87. Il y aurait lieu maintenant d'étudier la succession de valeurs que prend, sur une courbe quelconque de l'espace, la fonction  $f(x, y, z)$  continue par rapport à chacune des variables. Je donnerai à ce sujet le résultat suivant; la fonction d'une variable ainsi obtenue est au plus de la deuxième classe. Je commencerai par démontrer le théorème suivant : Si une fonction de deux variables  $f(x, y)$  est continue sur chaque parallèle à l'axe  $x$ , et est de première classe sur chaque parallèle à l'axe  $y$ , elle est, sur une courbe quelconque, Fig. 18. de deuxième classe au plus. Je ferai la démonstration en considérant la droite  $X - y = 0$ . Prenons la suite des droites (fig. 18):  $X - y = a_1, X - y = a_2, \dots, X - y = a_n, \dots$  étant une suite de quantités tendant vers  $G$ . Soient  $l_1, l_2, l_3, \dots$  ces droites. Entre une quelconque de ces droites et la droite voisine, par exemple entre  $l_i$  et  $l_{i+1}$  je peux tracer des segments parallèles à l'axe  $x$ , tels que  $P_i Q_i, P_{i+1} Q_{i+1}, \dots$ , de sorte que chaque parallèle à l'axe  $x$  contienne un seul point appartenant à l'un de ces segments (sauf les droites  $l_i$  et  $l_{i+1}$  etc. ...). La succession des valeurs que prend  $f(x, y)$  sur  $P_i Q_i$  ( $P_i$  compris,  $Q_i$  exclus), puis sur  $P_{i+1} Q_{i+1}$  ( $P_{i+1}$  compris,  $Q_{i+1}$  exclus), etc.... forme une fonction d'une variable, qui est de première classe, puisqu'elle est de première classe sur chacun de ces segments. En supposant que cette opération soit effectuée entre  $l_n$  et  $l_{n+1}$ , pour toutes les valeurs de  $n$ , nous déterminons ainsi une suite de fonctions de première classe :  $f_1(y), f_2(y), \dots, f_n(y), \dots$

de variables réelles. 101 Si d'autre part  $y(y)$  est la fonction donnée, considérée sur  $x - y = 0$ , on reconnaît que

102 Baire: Sur les fonctions pour la fonction qui est égale à 0 en ce point, et à  $\alpha$  aux autres points.  $Y'' + y'$  On a, en effet, au point  $x = 0, y = 0$ :  $dx dy$  Si maintenant on déplace le point  $(X, y)$  à partir de l'origine dans la direction  $y = ax$  on a, en appelant  $\alpha$  la dérivée dans cette direction :  $df = a \alpha + 1$  Ainsi, à l'origine, il y a une dérivée déterminée dans chaque direction, mais ces dérivées ne sont pas données par les formules ordinaires. Cette remarque correspond, au point de vue géométrique, à ce fait que si on considère la surface  $z = f(X, y)$ , cette surface n'a pas, au point  $a = y = 0$ , de plan tangent déterminé. 89. Cela posé, considérons une équation aux dérivées partielles, et posons le problème de l'intégration de la manière suivante: Rechercher toutes les fonctions de variables réelles, assujetties seulement aux conditions strictement indispensables pour que les éléments qui entrent dans l'équation aient un sens déterminé et vérifient cette équation. En prenant comme exemple l'équation très simple :  $dx^2 dy^2$  il faudra déterminer toutes les fonctions de  $x$  et  $y$  qui, en chaque point, sont continues par rapport à chacune des variables, et possèdent des dérivées  $\alpha$  et  $\beta$  satisfaisant à la relation donnée. à  $X$  ou  $y$  Le problème étant ainsi posé, le raisonnement qui consiste à prendre comme nouvelle variable  $X = x - y^2$  et à constater que la fonction ne doit dépendre que de  $X$ , est insuffisant, car il suppose la continuité des dérivées. Pour essayer de traiter la question avec le minimum d'hypothèses possible, il convient tout d'abord de faire une étude des conséquences qu'entraîne, pour une fonction de deux variables, l'hypothèse de l'existence de dérivées partielles en chaque point.

**The text on this page is estimated to be only 28.93% accurate**

de variables réelles. 103 90. Je commencerai par exposer quelques considérations générales sur les fonctions d'une seule variable. Soit une fonction quelconque  $f(x)$  définie dans l'intervalle  $A B$ . Prenons deux points  $M_1(x_1)$  et  $M_2(x_2)$  dans cet intervalle, et formons le rapport:  $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ . Je désignerai dans la suite ce rapport par la notation: rapport  $\{x_1, x_2, f\}$ , ou  $r(x_1, x_2, f)$ , ou  $r(M_1, M_2, f)$ . Il est indépendant de l'ordre dans lequel on énonce les deux points; on peut dire que c'est une fonction de l'ensemble des deux nombres  $(x_1, x_2)$  définie seulement pour  $x_1 \neq x_2$ . Dans le cas où l'on suppose la fonction  $f(x)$  continue, la fonction  $r(x_1, x_2, f)$  est, en chaque point  $(x_1, x_2, f)$  où elle se trouve définie, continue par rapport à l'ensemble  $(x_1, x_2, f)$ . Je donne une propriété élémentaire de cette fonction qui me sera utile dans la suite. Considérons trois nombres  $x_1, x_2, x_3$ , rangés par ordre de grandeur. Soit:  $x_1 \leq x_2 \leq x_3$ . On a évidemment:  $f(x_3) - f(x_1) = [f(x_3) - f(x_2)] + [f(x_2) - f(x_1)]$  et  $x_3 - x_1 = (x_3 - x_2) + (x_2 - x_1)$ . Divisons ces deux égalités par  $x_3 - x_1$  et posons:  $r_1 = r(x_2, x_3, f)$ ,  $r_2 = r(x_1, x_2, f)$ ,  $r = r(x_1, x_3, f)$ . On a alors:  $r = (1 - \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}) r_1 + (\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}) r_2$ . Comme on a: 0

The text on this page is estimated to be only 27.34% accurate

104 Baire: Sur les fonctions - ' — ^- ^ ■■ — ■ — - - • — — — ■  
 — ■ - - - ■ ■ — — ^ — .. — . — — quumité »\*(a:, r,,) est cofitprfse entre la  
 plus grande et la plus petite des quantités : 91. Reprenons maintenant la  
 fonction  $r'(a_i, x)$ ; laissons  $X_i$  fixe, et donnons à  $X_t$  toutes les valeurs  
 satisfaisant à l'inégalité:  $X. < ar, :^ a-i + A, //$  étant un nombre positif. Les  
 valeurs de  $r^{(a:, a;)}$  qui correspondent à ces diverses valeurs de  $x$ , forment  
 un ensemble de nombres, qui a une limite supérieure et une limite  
 inférieure: soient  $M_h$  et  $m_h$  ces limites (qui peuvent d'ailleurs être infinies);  
 si  $h$  tend vers 0,  $M_h$  et  $m_h$  tendent vers des limites déterminées  $A_d$  et  $A_g$ ,  
 qui sont les extrêmes oscillatoires de la fonction à droite  $\{*\}$  on définit de  
 même les extrêmes oscillatoires à gauche  $A_g$  et  $I_g$ . On a ainsi les quatre  
 nombres dérivés dont l'étude a fait l'objet de travaux de plusieurs  
 géomètres, en particulier de MM. Dini, Volterra, L. Schbffer.  
 Remarquons que, si en un point les quatre nombres dérivés sont finis, il est  
 certain qu'en ce point la fonction est continue, mais la réciproque n'a pas  
 nécessairement lieu. Si, en un point, les quatre nombres dérivés sont égaux,  
 c'est qu'il existe en ce point pour la fonction une dérivée déterminée  $f(x)$   
 qui a pour valeur la valeur commune de ces quatre membres. Supposons  
 qu'il en soit ainsi au point  $w^e(o)$ - On peut alors, si petit que soit  $e$ ,  
 déterminer un intervalle  $BC [rCo — a, a^o + ^J?$  tel que, si  $M$  est un point  
 quelconque de cet intervalle, distinct de  $A_o$  on a:  $\backslash r'A_oM-f\{x.;)\backslash:^e$ .  
 Prenons alors deux points  $P$  et  $Q$  dans l'intervalle  $B 6^*$ , situés de part et  
 d'autre de  $A_o$  dans ces conditions, d'après la remarque faite au § 90,  $r^P Q$   
 est compris entre  $r^A^P$  et  $r^A^Q$ . On a donc:  $\backslash r^PQ-f\{x,)\backslash^z$ . D'une  
 manière générale,  $BC$  représentant un segment de milieu  $A\{x^$  et de  
 longueur 2 «, prenons, de toutes les manières possibles, un couple de points  
 $P$  et  $Q$  situés dans cet intervalle et de part et d'autre de  $iJ$ , de telle (\*) Cf.  
 Dini, Fondamenti, etc., page 190.

de variables réelles. 105 sorte qu'on ait toujours: D'après ces inégalités, il y aurait lieu de considérer l'expression  $r^{(rro, x^{\wedge})}$  qui n'a pas encore été définie ; je poserai : De cette manière, pour tout système de valeurs de  $Xp$  et  $Xq$  satisfaisant aux inégalités (1), il existe une valeur de  $r^{\wedge}$   $P Q$  parfaitement déterminée; l'ensemble de ces valeurs a un maximum  $M$  et un minimum  $m$  ; posons en outre :  $(\grave{u} = M - m$ . Si nous faisons varier  $\ll$ , nous pouvons considérer  $\&>$  comme fonction de  $\ll$ ; c'est évidemment une fonction qui n'est jamais décroissante; de plus, si  $a$  tend vers 0, elle tend vers 0, car, d'après ce que nous avons vu plus haut,  $M$  et  $m$  tendent tous deux vers la même quantité  $f\{x^{\wedge}\}$ . Si donc on se donne un nombre positif  $(j$ , il existe un nombre positif parfaitement déterminé, que je désigne par  $a^{\wedge}$ , qui est la limite supérieure des nombres  $a$  pour lesquels  $w^{\wedge}$  est supérieur à  $a]$  soit  $a + ^{\wedge}$  sa valeur. En prenant  $k'$

**The text on this page is estimated to be only 19.45% accurate**

106 Baire: Sur les fonctions points  $P, \zeta, \eta, \zeta^1$ , tels que :  $|r'P.\zeta^1 - r'Pe\zeta| > cr + A;'$ . (1) On peut d'ailleurs s'astreindre à ce qu'aucun des quatre points  $P, \zeta, \eta, \zeta^1$ , ne coïncide avec  $A^1$  on aura ainsi; Il existe un nombre positif  $\delta$  tel que, dans l'intervalle  $(x^1 - \delta, 0 + \delta)$  n'y a aucun de ces quatre points. if  $H^1 \in C^1$ . (3) Appelons  $r_i$  le plus petit des trois nombres  $j_3, 7, -$ , et considérons le carré de centre  $J_q$  et de côté  $2\delta$ , soit:  $a_i, \dots > 7^{\delta} a_i = \delta.T, + \delta)$ ,  $y^{\delta} n^{\delta} y^{\delta} i^{\delta} y^{\delta} - V n$

de variables réelles. 107 Si  $A(X_j y)$  est un point quelconque pris dans ce carré le segment parallèle à  $Oxy$  de milieu  $A$  et de demi-longueur  $\ll^{(\wedge 0? yo)^{\wedge\wedge?}}$  contiendra certainement deux couples de points tels que:  $\{\wedge p, i y \setminus i^{\wedge} Q,, y)\}$ , auxquels s'appliquera la relation (3); de plus, les deux points de chacune des couples seront de part et d'autre de  $A$ » Par suite, dans le segment de milieu  $A$  et de demi-longueur  $a^{\wedge O^{\wedge} o) Vo^{\wedge} + \wedge j$  Tosillation  $w$  des  $r'(F\zeta)$ , telle que nous l'avons définie, est supérieure à  $a$ . On a donc:  $\ll^{\wedge} (\wedge j y) < \ll^{\bullet K i y,) + h}$  ce qui montre que  $\ll^{\ll(r, y)}$  est une fonction semi-continue supérieurement, 93. Nous déduisons de là que si  $E$  est un ensemble parfait quelconque, il y a, au voisinage de tout point de  $JP$ , des points de  $\wedge$  Où «

108 Baire: Sur les fonctions points quelconques pris  
 respectivement dans ces intervalles, on ait:  $\|r^P Q - r^P, Q\|$

de variables réelles. 109 En effet, « $\theta$  a son minimum positif en  $A$  je peux prendre un nombre positif  $y$  inférieur à ce minimum, et déterminer autour de  $A$  une aire en tout point de laquelle on aura:  $\theta > y$  Dans cette aire, je prendrai un rectangle de centre  $A$  et dont la dimension parallèle à  $\theta$  sera plus petite que  $y$ ; enfin je diminuerai, s'il le faut, les dimensions de ce rectangle, de manière que l'oscillation de  $\theta$   $y$  soit inférieure à  $\frac{y}{2}$ . Dans ces conditions, si nous prenons, dans le rectangle obtenu en dernier lieu, et sur une même parallèle à  $\theta$ , deux points quelconques  $B$  et  $C$ , on a, en appelant  $D$  le milieu du segment  $BC$ :  $BC - l^2(D) \leq \frac{y}{2}$  et:  $\theta_{BC} - \theta_D \leq \frac{y}{2}$  d'où l'on déduit:  $BC - l^2(D) \leq \frac{y}{2}$  a. (1) On démontrerait de même que si l'aire considérée autour de  $A$  est suffisamment petite, et si on prend deux points quelconques  $B'$  et  $C'$  de même abscisse dans cette aire, on a:  $\theta_{B'C'} - \theta_A \leq \frac{y}{2}$ . (2) Etudions maintenant ce qui se passe quand on considère deux points au voisinage de  $A$  situés l'un par rapport à l'autre d'une manière quelconque. Je suppose qu'on ait déterminé autour de  $A$  une aire (un carré de centre  $A$ , par exemple), dans laquelle les conditions précédentes, exprimées par les inégalités (1) et (2), se trouvent remplies. Soient  $P$  et  $Q$  deux points quelconques de cette aire. Je représente la longueur  $PQ$  par  $l$ , l'angle que fait la direction  $PQ$  avec  $\theta$  par  $X$ ; de cette manière, si les coordonnées de  $P$  sont  $a, y$ , celles de  $Q$  seront  $a' = a + l \cos X$ ,  $y' = y + l \sin X$ . Considérons le point  $R$  qui a même ordonnée que  $P$  et même abscisse que  $Q$ , c'est-à-dire qui a pour coordonnées

**The text on this page is estimated to be only 27.01% accurate**

110 Baire: Sur les fonctions Je me propose de trouver une expression de la quantité: Pour cela, j'écris :  $\wedge$  longueur  $PQ$   $f(Q)-f(P)^{f(R)-f(P)} \cdot f(Q)-f(R) RQ$   $\wedge$   $PQ$   $\wedge$   $PQ$  c'est-à-dire :  $r \ll P \cdot \zeta = r' \cdot \pi^2 \cdot \cos X + l' \cdot \hat{\zeta} \cdot 8 \sin X$ . Rappelons maintenant qu'on a :  $rtpR-lL(A) \cdot 0 X$   $\wedge$  Nous avons donc :  $\cdot \bullet \ll 9 - \wedge(J)$   $df a$ .  $\cdot PQ - \wedge / i \{ \wedge \} " \wedge o \wedge ' \wedge + y - y \{ A \} ' \% \backslash n \backslash \wedge$  or  $\cdot (I \cos X I + I \sin X I)$ . La quantité du second membre ne surpasse pas  $a \cdot V2$ . Nous pouvons tirer de cette étude la conclusion suivante : Si  $A$  est un 'point régulier  $\wedge$   $h$  tout nombre positif  $e$  on peut faire correspondre un cercle de centre  $A$   $y$  tel que,  $P$  et  $Q$  étant deux points quelconques pris dans ce cercle, et  $X$  étant  $V$  angle de  $PQ$  avec  $0 \wedge$ , on a :  $\wedge f(Q) \wedge f\{P\} VPQ - [ \{ (\wedge) \cos X + \wedge (\wedge) \sin x ]$

de variables réelles. m Nous allons voir qu'un tel point possède des propriétés tout à fait analogues à celles que j'ai étudiées dans le numéro précédent. Soit  $\alpha$  un point régulier par rapport à  $E$  la fonction  $\phi$ , a son minimum par rapport à  $E$  positif; soit  $\gamma$  un nombre positif inférieur à ce minimum. Je peux déterminer un carré de centre  $A$  possédant les propriétés suivantes : 1.  $\phi$  On a, en tout point de  $E$  situé dans ce carré : 2.  $\phi$  Le côté du carré est inférieur à  $\gamma$ . 3.  $\phi$  L'oscillation de  $\phi$  par rapport à  $E$  est inférieure à  $\gamma$  ; il est possible de réaliser cette condition, parce que  $\phi$  est continue en  $A$  par rapport à  $E$ . Dans ces conditions si nous prenons dans ce carré un point  $B$  appartenant à  $JS$  et un autre point  $C$  quelconque, mais de même ordonnée que  $B$ , nous aurons: et par suite :  $r'BC - l[(B) f|w - r^{\wedge\wedge}] (7 r - BC - l(A) : ^a$ . Supposons qu'on ait déterminé autour de  $A$  un carré remplissant les conditions qui précèdent et celles qu'on en déduit en permutant le rôle des lettres  $\alpha$  et  $\gamma$ . Prenons dans cette aire deux points  $P$  et  $Q$  appartenants à  $E$  soit  $T$  le point de même ordonnée que  $P$ , et de même abscisse que  $Q$  ( $K$  n'appartient pas nécessairement à  $E$ ). On peut, en raisonnant comme au numéro précédent, montrer qu'on a :  $f(Q) - f(P) \leq \sqrt{VPQ} \sqrt{df - [(\gamma) \cos X + (\gamma) \sin X]^2} \leq T \cdot V^2$ . À représenter, comme plus haut, l'angle de  $PQ$  avec  $0$   $\alpha$ .

112 Baire: Sur les fonctions Je résume ces résultats dans l'énoncé suivant: Si  $E$  est un ensemble parfait, il existe, au voisinage de tout point de  $E$ , des points de  $E$  que  $f$  appelle réguliers par rapport à  $E$ ; si  $A$  est un de ces points, à tout nombre  $\epsilon$  correspond un cercle de centre  $A$  tel que, si  $P$  et  $Q$  sont deux points de  $E$  pris dans ce cercle, on a :  $|f(P) - f(Q)| < \epsilon$ . (1) ■ Comme application de ce résultat général, nous reconnaissons que si l'on considère une courbe, il y a, dans tout arc de cette courbe, des points où  $x$  et  $y$  sont continues par rapport à la courbe. Mais il peut arriver que, pour tous les points d'un arc de courbe,  $x$  par exemple, soit discontinue par rapport à  $(x, y)$ . Citons la fonction qui, pour  $x - y = 0$  est égale à 0, et qui, pour  $x - y \neq 0$  est égale à :  $(x - y)^n \sin \frac{1}{x - y}$ . En tous les points de  $x - y = 0$ , les dérivées  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$  sont discontinues, l'oscillation étant. égale à 2. 96. Revenons maintenant au problème posé au § 89, à savoir l'intégration de l'équation : Je viens de déterminer certaines conditions auxquelles satisfait toute fonction  $f(x, y)$  qui possède en chaque point des dérivées déterminées; j'ajoute maintenant à ces conditions celle qui est exprimée par l'équation (2). Interprétons alors les résultats trouvés. Prenons une quelconque des droites parallèles à  $x - y = 0$ , et sur cette droite un ensemble parfait quelconque  $E$  (qui, en particulier, pourra être le continu). Il existe, au voisinage de tout point de  $E$  des points réguliers par rapport à  $E$ ; si  $A$  est un de ces points, à tout nombre positif  $\epsilon$  correspond un intervalle de milieu  $A$ , tel que, si  $P$  et  $Q$  sont deux points de  $E$  pris dans cet intervalle, on a :

de variables réelles. 113 Dans le cas actuel, cette relation devient simplement :  $\sqrt{r^{PQ}}$

114 Baire: Sur les fonctions m — -r — --1-^1 — "i---ir- I - !■ - ' - ■ ^ \_ ^ .. ^ ^ ^ ^ ^ ^ ^ ^ \_ ^ \_ ^ . ^ ^ point -^oO^o)- Pour définir  $M\{f\}_{j \in \mathbb{N}} \setminus E_j$  a/3), on peut, au lieu de considérer tous les couples de points  $A_i\{x_i\}$  et  $\hat{i}(\wedge)$  appartenants  $k \in E$  et situés dans l'intervalle, considérer seulement ceux pour lesquels on n'a pas:  $\alpha_i = x^{\wedge} X q^{\wedge}$  en d'autres termes faire abstraction du point  $M^{\wedge}$ . En effet, dans l'hypothèse de la continuité, toute quantité telle que  $r^{\wedge} A^{\wedge} A$  peut être regardée comme limite d'une suite de quantités telles que  $r^{\wedge} i^{\wedge} l g. A_i$  et  $A_t$  étant distincts de  $A_q$ ] par suite, que l'on tienne compte ou non des quantités de la forme:  $r^{\wedge} A^{\wedge} A_j$  les limites supérieure et inférieure resteront les mêmes. Prenons maintenant l'intervalle  $\{r^{\wedge} - c?, x^{\wedge} + (J)$ , et considérons tous les points du continu  $C$  qui sont dans cet intervalle, en retranchant le point  $r^{\wedge}$ . La fonction  $M[f\{x\}, C, r]$  a, en  $c \in C$  chacun de ces points, une valeur déterminée; cet ensemble de valeurs a un maximum qui, quand  $i$  tend vers 0, a une limite  $M'$ ; je dis que, dans le cas où la fonction est continue^ cette limite  $M'$  est précisément  $M[f\{^{\wedge}\}_{j \in \mathbb{N}}] C^{\wedge} *^{\wedge} o]$  Nous savons déjà qu'on a: Cela résulte de ce que la fonction  $M\{x\}$  est semi-continue supérieurement; il suffit donc de démontrer qu'on ne peut pas avoir : Supposons que cela ait lieu; prenons un nombre  $X$  tel qu'on ait:  $M\{\alpha, \epsilon\} > k > M'$ . On peut trouver, aussi près qu'on veut de  $^{\wedge} 7, ,$  deux points  $P$  et  $Q$  tels que :  $r^{\wedge} P Q > h$  On peut d'ailleurs supposer que  $P$  et  $Q$  sont du même côté par rapport à  $A\{X_0\}$ ] en effet, si cela n'a pas lieu, si l'on a, par exemple:  $X_P X_Q$ . Nous pouvons, à cause de la continuité de la fonction, prendre un point  $Q$ , du même côté que  $P$  par rapport à  $^{\wedge}$  et assez voisin de  $A$  pour qu'on ait  $* \text{ encore : } '. r^{\wedge} P Q, > h$

de variables réelles. 115 Il existe, entre  $P$  et  $C$ , un point  $B(x)$  où l'on a :  $M\{x\} > \frac{1}{2}$  ce qui est en contradiction avec l'hypothèse :  $X > \frac{1}{2}$  if', En résumé, dans le cas où  $f\{x\}$  est continue, la fonction  $M(x)$  relative au continu, possède une propriété caractéristique qu'on peut énoncer de la manière suivante: La fonction  $M\{x\}$  est égale, en chaque point, au maximum des valeurs qu'elle a aux points voisins. Considérons maintenant une fonction  $f\{x\}$  continue et non constante; cette dernière condition peut s'exprimer de la manière suivante: il existe deux points  $P$  et  $C$  tels que l'on a :  $HPC < 0$ . On aura, ou bien :  $r' P > 0$ , ou bien :  $r^{\wedge} P C < 0$  ; il suffit d'envisager, par exemple, la première hypothèse. Je suppose donc qu'il existe un nombre positif  $a$  et un couple  $P C$ , pour lequel on a :  $r'PC > cr$ . D'après ce que nous avons vu, il existe certainement au moins un point  $x$  où l'on a :  $M\{x\} > \frac{1}{2}$  ( $j$  est point limite d'une suite de points où l'on a aussi  $M(x) > \frac{1}{2}$ ). Autrement dit, en désignant par  $G$  l'ensemble des points où  $M\{x\} > \frac{1}{2}$  ( $T_j$  l'ensemble  $0$  est dense en lui-même. Son dérivé  $G'$  est donc un ensemble parfait, et en chaque point de  $G'$  on a :  $M(x) \wedge a$ . 98. J'arrive maintenant à l'étude des fonctions présentant la propriété indiquée au § 96, propriété que je peux énoncer de la manière suivante: Si Von considère un ensemble parfait . quelconque  $E$  il y a au voisinage de tout point de  $E$  des points où Von a:  $M \left[ \frac{1}{2}; E, x \right] \wedge m \left[ \frac{1}{2}; x \right] = 0$ . On peut dire qu'un point où cette double condition est remplie est un point stationnaire par rapport à  $E$  ; au contraire, en un point où l'un des deux nombres  $M$  et  $m$  est différent de  $0$ , on dira que la fonction est variable par

H6 Baire: Sur les fonctions rapport à E. Nous sommes conduits à dire, par analogie avec la notion de fonction ponctuellement discontinue, que la fonction dont nous nous occupons en ce moment est ponctuellement variable relativement à tout ensemble parfait. D'après cette définition, le résultat du § 96 peut s'énoncer dans les termes suivants: Si une fonction  $f(x, y)$  satisfait en tout point à l'équation:  $\sum_{n=1}^{\infty} q_n^2 = 0$ , sur chaque droite  $x - y = \text{const}$  elle est ponctuellement variable relativement à tout ensemble parfait. Supposons qu'on impose à  $f(x, y)$  la condition d'être continue par rapport à l'ensemble  $(x, y)$  dans ce cas, la fonction d'une variable définie sur chaque droite  $a; x - y = \text{const}$ , sera à la fois continue et ponctuellement variable sur tout ensemble parfait. Je vais démontrer qu'une telle fonction est nécessairement constante. Je ferai voir pour cela qu'une fonction continue et non constante ne peut pas remplir la condition d'être ponctuellement variable sur tout ensemble parfait. Soit donc  $f(x)$  une fonction continue et non constante; j'ai montré plus haut qu'il existe (soit pour  $f(x)$  soit pour cette fonction changée de signe), un nombre positif  $\alpha$  tel que l'ensemble G des points où  $M\{f(x), C, \epsilon\} > \alpha$ , C représentant le continu, est dense en lui-même. En tout point de G on a: et en tout point qui ne fait pas partie de G on a: Si on suppose que  $f(x)$  est ponctuellement variable relativement au continu (et par suite G est non dense par rapport au continu). Soit A ( $x_0$ ) un point de G'. Je considère simultanément les deux nombres  $M[f(x), (x_0, x)]$  et  $M[f(x), G \setminus x_0]$  je vais démontrer qu'ils sont égaux. • D'abord on a certainement:  $M\{G \setminus x_0\} \wedge M\{C, x_0\}$  car tous les couples de points qui sont à considérer dans la définition de  $M\{G \setminus x_0\}$  le sont aussi dans la définition de  $M\{C, x_0\}$ . Je dis maintenant qu'on ne peut pas avoir:  $M\{G \setminus x_0\} < M\{C, x_0\}$

de variables réelles. 117 Supposons en effet que cela puisse avoir lieu; prenons alors un nombre  $X$  tel qu'on ait: et en même temps:  $X > a$ . On peut, d'après cela, déterminer un intervalle  $B B'$  contenant le point  $A \{x^{\wedge\wedge}$  tel que, pour tout couple  $HK$  de points de  $G'$  contenus dans cet intervalle, on ait:  $Ir^{\wedge}HKKl$ . Soit alors  $PQ$  (xp

118 Baire: Sur les fonctions. Donc, sur l'ensemble parfait  $G$  la fonction considérée ne peut pas être ponctuellement variable; nous pouvons dire qu'elle est, sur  $G$  totalement variable ou même totalement croissante. La conclusion de cette étude est, que, si une fonction est continue et est ponctuellement variable relativement à tout ensemble parfait elle est constante. Pour se convaincre de la nécessité des raisonnements que nous venons de faire, il suffit de se rappeler qu'une fonction peut être continue, non constante, et telle que, dans tout intervalle, il en existe un autre où elle est constante (\*). Autrement dit, une fonction peut être continue et être ponctuellement variable relativement au continu, sans être constante. D'autre part, si on supprime la condition de la continuité, le théorème ne s'applique plus. Prenons par exemple la fonction discontinue égale partout à 0, sauf en un point, où elle a la valeur 1. Cette fonction, qui n'est pas constante, est ponctuellement variable relativement à tout ensemble parfait. 99. L'application des résultats précédents à l'intégration de l'équation  $\Delta u = 0$  est immédiate, et nous pouvons énoncer le résultat suivant : if Toute fonction  $f(x, y)$  continue par rapport à  $(x, y)$ , et possédant en tout point des dérivées  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$  satisfaisant à la relation: est de la forme:  $d u = P dx + Q dy$

de variables réelles. 119 100. Les résultats que nous Tenons d'obtenir pour l'équation simple :  $T^2 + o^2 = 0$  8-étendent sans diificulté à toute équation de la forme :  $X(x, y) + F(y) = 0$ . (I) Lorsqu'on se place au point de vue ordinaire, on cherche d'abord les courbes satisfaisant à la relation différentielle :  $dx + y X(x, y) dy = 0$  Ces courbes sont les caractéristiques de l'équation (1); si l'on admet que  $X$  et  $F$  sont des fonctions continues, la fonction  $u(x, y)$  admet une différentielle totale: On voit alors que cette fonction doit être constante sur les caractéristiques. Cherchons dans quelle mesure nous pouvons étendre ce résultat. Je me place dans les hypothèses suivantes : Dans une certaine aire  $S$ , il existe une famille de courbes :  $u(x, y) = w$ , de sorte que, par tout point de l'aire, passe une courbe et une seule de cette famille;  $u(x, y)$  a en tout point des dérivées continues par rapport à  $(x, y)$ ; il y a ainsi, en chaque point  $(x_0, y_0)$  une tangente déterminée pour la courbe qui passe en ce point; l'angle « de cette tangente avec l'axe  $Ox$  est donné par la formule:  $\cos \alpha = \frac{1}{X}$  Enfin,  $X$  et  $F$  sont limités dans l'aire que nous considérons. Soit  $C$  une de ces courbes,  $E$  un ensemble parfait de points pris sur  $C$ ; je dis que la fonction  $u(x, y)$ , relativement à  $E$ , est ponctuellement variable. Il suffit, pour le démontrer, d'interpréter le résultat général énoncé au § 95: Il existe dans  $E$  des points réguliers par rapport à  $E$ ] si  $A$  est un de ces points, à  $A$  correspond un cercle de centre  $A$  tel que, si  $P$  et  $Q$  sont

120 Baire: Sur les fonctions deux points de  $E$  pris dans ce cercle,  
on a :  $r^*PQ - [l^iA) - coB(Ox, PQ) + ^{(A)} - s \setminus n \{Ox, PQ)\} \setminus$

de variables réelles. ISI exemple, si nous envisageons l'équation : la fonction que j'ai déjà considérée au § 86, qui est égale à 0 pour les points de la droite  $x = y = z$  et à :  $(a; -g) (y -g) (a? - y) 3 '$  pour les autres points de l'espace, satisfait en tout point à l'équation aux dérivées partielles (2); cela résulte de ce qu'elle est constante sur chaque parallèle à  $x = y = z$  mais on voit qu'elle est discontinue par rapport à l'ensemble  $\{Xy y, z\}$ . CONCLUSION. Dans l'introduction, j'ai montré comment les différentes questions traitées dans ce travail peuvent être considérées à un même point de vue. On voit à présent que les méthodes qui ont été employées pour les résoudre présentent aussi entre elles les plus grandes analogies. La théorie des ensembles de points joue un rôle très important dans ces méthodes; on peut même dire, d'une manière générale, que, dans l'ordre d'idées où nous nous sommes placés, tout problème relatif à la théorie des fonctions conduit à certaines questions relatives à la théorie des ensembles; et c'est dans la mesure où ces dernières questions sont avancées ou peuvent l'être qu'il est possible de résoudre plus ou moins complètement le problème donné. Les questions dont l'étude fait l'objet de ce mémoire en appellent une foule d'autres. En ce qui concerne les fonctions d'une variable, il y aurait lieu de poursuivre l'étude des différentes classes de fonctions définies au chapitre III; il faudrait ensuite faire une étude analogue pour les fonctions de plusieurs variables, étudier en particulier, d'une manière plus approfondie qu'on ne l'a fait au chapitre IV, les fonctions de  $n$  variables<sup>^</sup> continues par

122 Baire: Sur les 'fonctions de variables réelles. rapport à chacune d'elles; il y aurait lieu aussi de chercher à résoudre, aussi complètement que possible, la question posée au chapitre Y au sujet des équations aux dérivées partielles. On voit qu'il y a là tout un groupe de problèmes, dont quelques-uns seulement, choisis parmi les plus simples, ont été étudiés dans ce travail. Vu et approuvé : Paris, le 1<sup>er</sup> août 1898. Le Doyen de la Faculté des Sciences, G. DARBOUX. Vu et permis d'imprimer : Paris, le 1<sup>er</sup> août 1896. Le Vice-Recteur de l'Académie de Paris, GRÉARD.

|                                                                                                                                 |                                 |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------|-----|
| TABLE DES MATIÈRES                                                                                                              | Patres Introduction , ^ . . . . | 1   |
| Chapitre I. — Généralités sur les fonctions de n variables                                                                      |                                 | 4   |
| Chapitre II. — Fonctions discontinues développables en séries de fonctions continues : I. Enoncé des problèmes                  |                                 | 16  |
| II. Conditions nécessaires                                                                                                      |                                 | 22  |
| III. Conditions suffisantes                                                                                                     |                                 | 31  |
| IV. Propriétés générales                                                                                                        |                                 | 63  |
| Chapitre III. — Fonctions discontinues développables en séries multiples de fonctions continues: I. Définition de ces fonctions |                                 | 68  |
| II. Fonctions de la deuxième classe                                                                                             |                                 | 71  |
| Chapitre IV. — Fonctions de plusieurs variables                                                                                 |                                 | 87  |
| I. Fonctions de deux variables , continues par rapport à chacune d'elles                                                        |                                 | 88  |
| II. Fonctions de trois variables                                                                                                |                                 | 95  |
| Chapitre V. — Le problème de l'intégration au point de vue des variables réelles                                                |                                 | 101 |
| Conclusion                                                                                                                      |                                 | 121 |

**The text on this page is estimated to be only 25.12% accurate**

SECONDE THÈSE. PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA  
FACULTÉ. Principales propositions relatives aux surfaces dont les rayons  
de courbure sont fonctions l'un de l'autre. Vu et approuvé : Paris, le 7 août  
1898. Le Doyen de la Faculté des Sciences, G. DARBOUX. Vu et permis  
à l'impression : Paris, le 14 août 1898. Le Vice-Recteur de l'Académie de  
Paris, GRÉARD. 3464-98 Milan. — Imprimerie BBNA BDom db C.  
Rbbsolini & G.

**The text on this page is estimated to be only 0.00% accurate**

**^■111.»**

**The text on this page is estimated to be only 11.00% accurate**

**!**