

Théorie des nombres

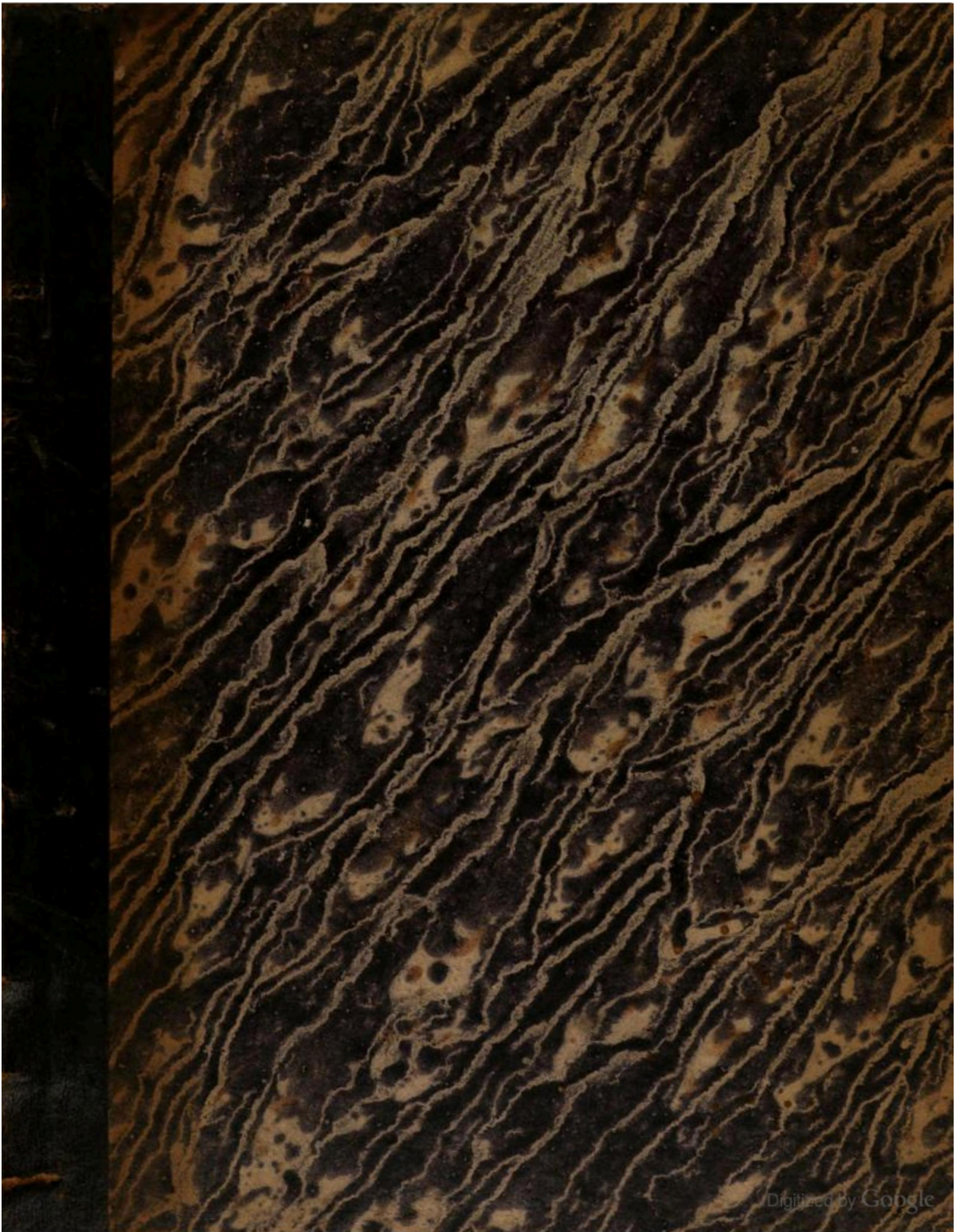
1. [Notice](#)

This book was produced in EPUB format by the Internet Archive.

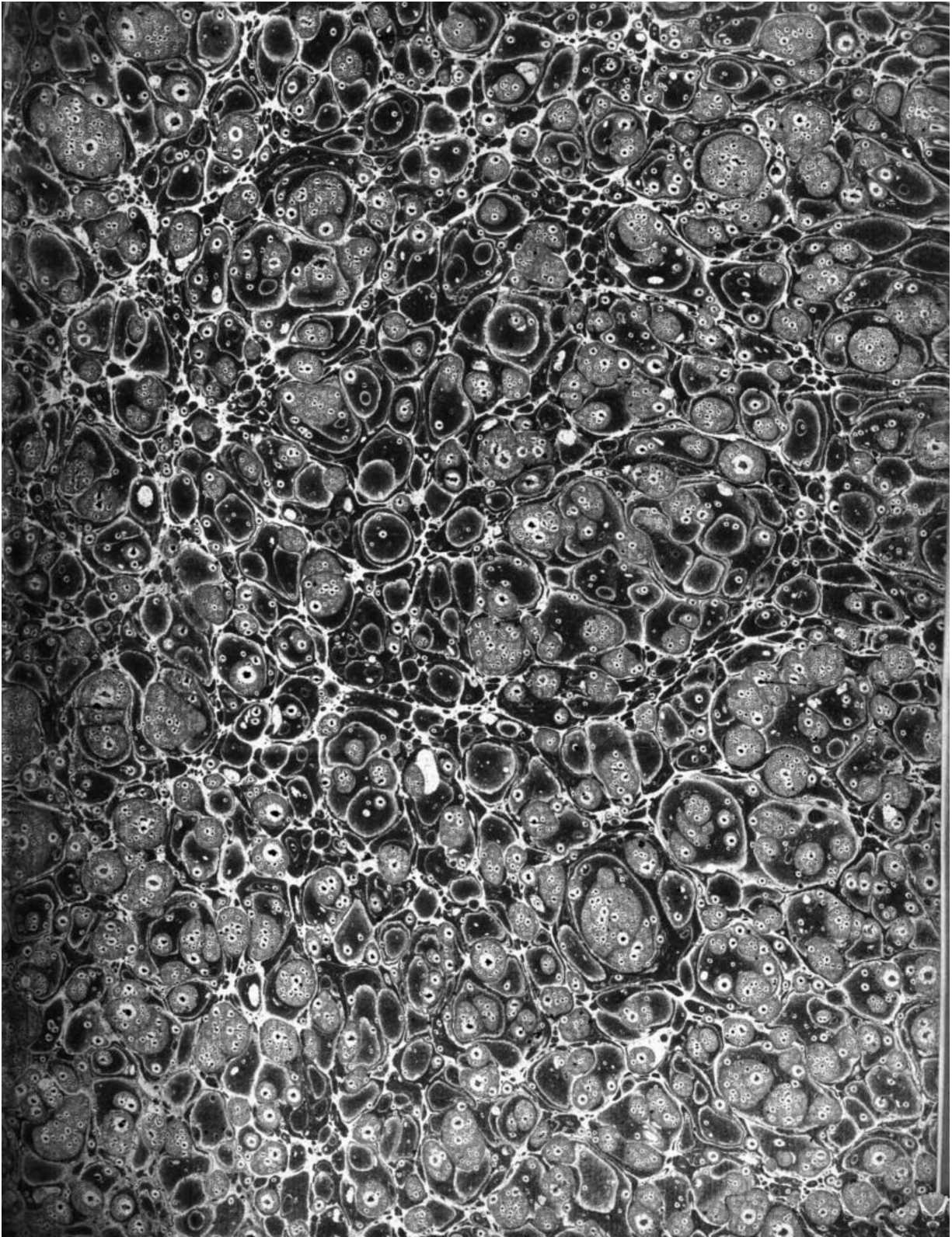
The book pages were scanned and converted to EPUB format automatically. This process relies on optical character recognition, and is somewhat susceptible to errors. The book may not offer the correct reading sequence, and there may be weird characters, non-words, and incorrect guesses at structure. Some page numbers and headers or footers may remain from the scanned page. The process which identifies images might have found stray marks on the page which are not actually images from the book. The hidden page numbering which may be available to your ereader corresponds to the numbered pages in the print edition, but is not an exact match; page numbers will increment at the same rate as the corresponding print edition, but we may have started numbering before the print book's visible page numbers. The Internet Archive is working to improve the scanning process and resulting books, but in the meantime, we hope that this book will be useful to you.

The Internet Archive was founded in 1996 to build an Internet library and to promote universal access to all knowledge. The Archive's purposes include offering permanent access for researchers, historians, scholars, people with disabilities, and the general public to historical collections that exist in digital format. The Internet Archive includes texts, audio, moving images, and software as well as archived web pages, and provides specialized services for information access for the blind and other persons with disabilities.

Created with hocr-to-epub (v.1.0.0)







The text on this page is estimated to be only 22.67% accurate

Digitized by Google

THÉORIE DES NOMBRES. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 13.00% accurate

DE L'IMPRIMERIE DE A. FIRMIN DIDOT, IMMUMEUft DU
BOI F.T OK l.'lîfSTITIJT, R Vf IACO» , H* ll^ . Mgmzea Dy Google

The text on this page is estimated to be only 18.42% accurate

THÉORIE DES NOMBRES. TROISIÈME ÉDITION. Par
ADRIEN - MARIE LEGENDRE. TOME II. CHEZ FIRMIN DIDOT
FRÈRES, LIBRAIRES, RUE JACOB, N° 24. i83o. uymz a Dy Vjuu



0
403 ter



PARIS,

The text on this page is estimated to be only 24.00% accurate

igitized by Google

The text on this page is estimated to be only 18.15% accurate

TABLE DES MATIÈRES DU TOME II. AIT ITDTPMI? 11 A D
T1!"! ? 1^U Al nLMr, PAnllJl. METHODES ET RECHERCHES
DIVERSES S 1 Théorèmes sur les puissances des non titres, i E aire d'un
triangle rectangle en nombres entiers ne saurait être égale a un carré , ■j. La
somme de deux bicarrés ne peut être égale à un carré, r> La formule $x^* +$
 $\%yk$ ne peut être égale à un carré, 6 Aucun nombre triangulaire, excepté
l'unité, n'est égal à un bicarré. 7 La somme ou la différence de deux cubes
ne peut être égale à un cube, ibid. L'équation $x^i - y^l = a^nz^3$ est impossible
pour toute valeur de m, 9 Aucun nombre triangulaire, excepté i , n'est égal à
un cube, 1 1 L'équation $x' - i = yi$ n'est susceptible que de la solution $ar=5$,
 $f=3$, 12 L équation $x^* + 4y$ nest susceptible que des deux solutions $x=$
 a , $v i .-y - \blacksquare i t v y - j$, $<k - 1 1$, $J - \blacksquare > j$ ibùl t Util , § II. Théorèmes
concernant la résolution en nombres entiers de l'équation $x^n - b = a y$, 13
Condition de possibilité et réduction de l'équation lorsque a est un nombre
premier, ibid. Résolution de l'équation $x^* - \backslash = .ay$ lorsque a est un nombre
premier et n un diviseur de a — i , ià Résolution de l'équation $iT^{\wedge}.ay$ dans
les mêmes cas, 18 Résolution de l'équation $j^* + b = a r$ dans les mêmes cas,
ibid. Résolution générale de la même équation, m § III. Résolution do
l'équation $x^1 + a = a^ny$, § IV. Méthode pour trouver le diviseur quadratique
qui renferme le produit de plusieurs diviseurs quadratiques donnés , y

The text on this page is estimated to be only 26.33% accurate

TABLE DES MATIÈRES - " ~ I ----- r --- - - -, — , , Formule
pour avoir le produit de deux diviseurs quadratiques semblables, 3i
Diverses formes dont est susceptible le produit de plusieurs diviseurs $ua^* \pm H$
quadratiques donnés, 34 Fonuulepour avoir la puissance n d'un diviseur
quadratique donné, 35 Si l'on considère l'ensemble des diviseurs
quadratiques d'une même formule $t' + ai$, on ueut déterminer toutes le.s
formes dont sont susceptibles les produits deux à deux, trois à trois, etc. de
ces diviseurs, semblables ou dissemblables , § V. Résolution cri nombres
entiers de r équation $Ly1 -+- Mvz -t- N/. '=bn$, n étant le produit de plusieurs
indéterminées ou de leurs puissances , 43 Après avoir dégagé le second -
membre du facteur constant b, on fait voir comment la résolution de cette
équation se déduit des développements donnés dans le § précédent, ibid.
Exemples divers, 4 i~4fl § VI. Démonstration d'une propriété relative aux
diviseurs quadratiques de la formule $t' + au'$, a étant un nombre premier $8n +$
 i , 5o Après quelques propositions subsidiaires, on prouve que l'équation....
 $U' = PY' + aQYZ + RZ'$, dans laquelle $P R — Q' = a$, n'est susceptible que
de deux solutions , lesquelles se réduisent à une seule lorsque l'équation
proposée est de la forme $U^* = a/' -+- \%yi \blacksquare + - \ (a -f- 1)^*$, 54 De là on
conclut que le nombre des diviseurs quadratiques $jn+ t$ de la formule $t1 + au'$
, surpasse toujours d'une unité le nombre des diviseurs cjusdratitiues $iin + 3$
de la même formule, 56 § VII. Démonstration du théorème contenant la loi
de réciprocité qui existe entre deux nombres premiers quelconques , \$ \ III.
D'une loi très-remarquable observée dans l'éurné ration des nombres
premiers, 65 Comparaison de la formule avec les tables , ibid. Valeur
moyenne et probable de la différence entre deux nombres premiers
consécutifs , 66 Sommation de quelques suites qui dépendent de la loi des
nombres premiers, 67 Fssai sur la démonstration de la formule trouvée par
induction, «9

The text on this page is estimated to be only 21.77% accurate

DU TOME II. vij § IX. Démonstration de divers théorèmes sur les progressions arithmétiques , Si on désigne par i le terme de rang k — i dans la suite des nombres premiers 3,5,7, 11 > etc-> ie 1UC sur 15 termes consécutifs d'une progression arithmétique quelconque, il y en aura toujours au moins un qui ne sera divisible par aucun terme pris dans une suite de k nombres premiers quelconques, 76 Il en résulte que toute progression arithmétique dont le premier et la raison sont premiers entre eux, contient une infinité de nombres premiers, 77 § X , où l'on prouve que tout diviseur quadratique de la formule $t^2 + Nu'$, contient au moins un nombre premier à N et plus petit que N , Hu § XI. Méthodes pour trouver combien, dans une progression arithmétique quelconque , il y a de termes qui ne sont divisibles par aucun des nombres premiers compris dans une suite de $0/1$ née , 8k Formule générale qui satisfait dans tous les cas, 88 Algorithme pour simplifier le calcul de la formule générale, Formules pour la comparaison des diverses progressions, 9-i Une progression quelconque et la simple progression des nombres impairs peuvent être disposées terme à terme, de manière que les ternies correspondantes soient tous deux premiers ou tous deux non-premiers à un même produit Çl , 97 On peut déterminer combien il y a de nombres premiers dans une progression arithmétique prolongée jusqu'au n^{me} terme, 101 On peut déterminer pareillement combien un diviseur quadratique donné de la formule $t^2 + Nu'$ contient de nombres premiers moindres qu'une limite donnée N , 102 § XII. Méthodes pour compléter la résolution en nombres entiers des équations indéterminées du second degré, 104 On ramène généralement l'équation $ay^2 + byz + cz^2 + dy + fz + g = n$ à la forme $a'x^2 + b'y^2 + c'z^2 = H$; on donne ensuite une méthode générale et exempte de tâtonnement pour déduire des valeurs de y' et z' celles de y et z en nombres entiers, 10;

The text on this page is estimated to be only 20.75% accurate

viii TABLE DES MATIERES Page» Le succès de la méthode précédente étant fondé sur ce que les Tractions à faire disparaître ont pour dénominateur $b^* - 4aei$ on *e propose plus généralement de déterminer l'exposant n tel qu'en faisant $(y-f-wW^A)^* \sim F G y'' A$, la quantité $^F-j-piG-f-v$ soit divisible par un nombre premier quelconque m , 10H On détermine ensuite directement la valeur du même exposant telle que $XF-f-p. G -f-v$ soit divisible par une puissance donnée de «, no S XHI. De l'équation $x' ay'ashz1, m$ » I i i- solution connue de cette équation en fait connaître une seconde, celle-ci une troisième et ainsi à l'infini; chaque solution est composée en général d'un nombre Je chiffres quatre fois plus grand que celui de la solution précédente, ibid. Par une analyse inverse on peut, à partir d'une solution donnée dans l'ordre ascendant, calculer les solutions inférieures dans l'ordre descendant, i i(i O problème donne lieu de remarquer qu'il y a des équations du 3* degré qui se résolvent par une formule différente de celle de Cardan et notablement plus simple. On donne le type général de ces équations, i i H Théorème sur les équations du troisième degré dont les trois racines sont rationnelles , i ao § XIV. Méthode pour la résolution de l'équation $y^* = a + bx^4 - cx' + d x^1 + c x^4$ en nombres rationnels, tai Si l'équation proposée est telle que a ou e soit un carré parfait, on donne le moyen d'avoir successivement d'autres solutions , ibid. Application a deux problèmes particuliers, ia5-ta6 S W. Développement du produit $(i - x)(i - x')(i - x^3)$, etc. continué à [infini , 128 On trouve que ce produit est $1 - x - x' - x^4 + x^{\sim} - x'^1 - x, s + \text{etc.}$, c'est-à-dire qu'il ne contient de puissances de x que celles dont les ex3*a±* posants sont de la forme , . i3a Conséquences qui en résultent pour la partition des nombres, ibid. S XVI. Des Jonctions semblables qui étant multipliées entre elles donnent des produits semblables , 134 Formules pour les fonctions homogènes de deux dimensions et à deux variables, 1 3 5-i 36

The text on this page is estimated to be only 20.32% accurate

DU TOME II. ix Page* Formules pour le» fictions homogènes de trois dimensions et a trois variables , ' i j~ - 1 jtë Ces formules fournissent le moyen de résoudre généralement l'équation indéterminée $X'+aX'Y-MXV+c Y3= V3$, i iy On peut étendre la même théorie à des fonctions homogènes de tous les degrés, i4' § XVII. De quelques questions guise rapportent, plus ou moins directement , à L'analyse indéterminée , iji On donne pour exemples deux problèmes difficiles dont la solution est due à En 1er, Méthodes pour déterminer les nombres qui sont une partie aliquote de la somme de leurs diviseurs , problèmes dont les géomètres se sont occupés du temps de Fermât et de Descartes, i45-i50 § XVIII. D'un autre problème remarquable par l'espèce d'analyse employée pour sa solution , 01 CINQUIEME PARTIE. USAGE DE L'ANALYSE INDÉTERMINÉE DANS LA RÉOLUTION DE L'ÉQUATION $\mathbf{r}^* - i = 0$, n ÉTANT IN NOMBRE PREMIER, iMi S I. Contenant les bases de cette nouvelle théorie, ibid. Théorèmes préliminaires , 168-169 Si l'on fait $\mathbf{r}'' - \hat{i} - (j\mathbf{r} - 1 X$, le polynôme X , dans lequel n est toujours supposé un nombre premier, ne peut se décomposer en deux facteurs rationnels , 1 71) Proposition très-générale dans laquelle consiste la théorie qu'on se propose de développer, d'après M. G miss, 17» Relation qui existe entre les racines de l'équation $X=0$, et celles de l'équation indéterminée $z^* \sim ' - i=3TL(\ll)$: toute valeur $z-g$ qui satisfait à cette dernière, et qu'on appelle racine primitive de n } est telle que toutes les racines de l'équation $X=0$ peuvent être exprimées par les puissances successives $r, r', r^8, \dots r^{** \sim '}$, ou, suivant une notation abrégée, par $(0>te)>te,)>(g,)--0r''$), »74-'7-» Formation des périodes dans lesquelles se décompose ln période ' $n - i, 1$) comprenant toutes les racines de l'équation $\backslash = 0$, «76 II. b

The text on this page is estimated to be only 22.06% accurate

% TABLE DES MATIERES Pige» Théorème fondamental par lequel on trouve généralement le produit de deux périodes semblables ou d'un même nombre de termes, 180 Manière de former l'équation du degré X qui a pour racines les k périodes de m termes désignées par $(m, i), j^{tg'}$ - $\blacksquare \cdot (rn, g > \sim')$ - Cette équation est toujours de la forme $-r - \langle / \wedge \sim' - T - 6 / ** \sim J - f - gtc. = 0$, 180-184 Au moyen des racines de cette équation, le polynôme X peut être partagé en k facteurs du degré m ; de sorte que l'équation $X = 0$ du degré $n = \sum_{i=1}^k rn_i$ sera décomposée en un nombre X' d'équations du degré m , 186 Chaque période de m termes représentée par (in, a) peut se diviser en k période de m' termes, ce qui suppose $m = k m'$; et l'équation du degré k' qui a pour racines ces périodes partielles, savoir : $(m', a), (m_1, a_1), (m, a_i h')$. . . , $(m \setminus a A' \sim')$, aura tous ses coefficients exprimés par les racines déjà connues de l'équation du degré kt 189 S II. Formation générale de l'équation du degré k pour les valeurs $k = a, 3, 4, 5$, 191 Lorsque $X = a$, les deux valeurs de p sont $\sqrt[n]{rt - jl/n}$ si n est de la forme $4*4-3$; elles sont $\sqrt[n]{t - i}$ si n est de la forme $4''' + 1$ » 19a Il s'ensuit qu'en général la fonction $4X$ est toujours de la forme $Y^* - f - nZ^*$ si $n = 4** + 3$, et de la forme $Y' - \langle Z^*$ si $n = 4 < + 1$ $i > 9^{\wedge}$ Diverses manières de trouver a priori les fonctions Y et Z , 104 Lorsque $X \sim 3$, et $3/71 - 4 - 1$, les trois périodes $(m : 1), (m : g), (m : g^*)$ sont les racines d'une équation du 3e degré déterminable par la seule valeur du nombre premier n , en mettant Jjn sous la forme $a' + 37^{\wedge}$. Cette équation jouit en général de la propriété que d'une racine p on dé, $\blacksquare, c 1 - \bullet$. - $\langle c + \{ \setminus - C \} p$ duit une autre racine p par la formule très-simple $p^z = z^n -$, 1S $i i p - 4 - 1 M'$ et de celle-ci la troisième t 198 Le cas de $4 = 4$ ou $\langle = 4** - f - 1$ » se divise en deux autres selon que m est pair ou impair. Si $n = a|i$, on peut former généralement l'équation du 4* degré dont les racines réelles sont les quatre périodes $\{m : i), (m : g), (im - g^*) i (m : g^*)$ - Cette équation jouira encore de la propriété qu'une racine donnée p sert à déterminer très-simplement les trois autres, 105 Enfin le cas de $\pounds = 5$, ou $n = 5m + 1$, n'est pas susceptible d'une solution si simple; cependant l'analyse fournit diverses équations de condition au moyen desquelles on peut obtenir l'équation du 5" degré dont les racines sont les périodes $(m : 1), \{m : g), (nt'.g^*), (m : ^J), (m : g^*),$ 105-at3 S III. Application de la théorie à des exemples numériques, a 14

The text on this page is estimated to be only 24.41% accurate

DU TOME II. xj Ces exemples »e rapportent aux valeurs $n=y, n,$
 $i3, 17, 4$ »; dans oe dernier exemple on dit voir comment la fonction X peut
 »e partager en facteurs de divers degrés, ai4-a36 S IV. Méthode de
 réduction pour compléter la t/téorie précédente , a17 De l'équation auxiliaire
 du cinquième degré qu'il but résoudre lorsque On donne la méthode
 générale pour résoudre cette équation, c'est-à-dire pour obtenir les valeurs
 explicites de ses cinq racines, et on en fait l'application au cas de $n=\hat{i}$,
 a40-a54 L'application de la même méthode au cas de $n = -1$ conduirait
 au même résultat qu'a donné Van Jeniionde, premier auteur de cette théorie,
 dans les M empires de l'Académie des Sciences , an. 1771 , a 55 Pe
 l'équation auxiliaire du septième degré qui a pour racines les période* de m
 termes , en supposant $n = 7m - 1$, il»<i. Ce second développement de la
 méthode générale est suivi d'un troisième relatif à la résolution de l'équation
 qui a lieu lorsque «— $3/n - 1$, «Sfi-^G; S V. Méthode pour parvenir à la
 résolution générale de l'équation $X = 0$, î6y Au lieu de résoudre
 successivement les différentes équations auxiliaires dont les degrés
 multipliés entre eux produisent — - — , il est beaucoup plus simple de
 résoudre directement l'équation en p du degré ' qui tient lieu de Inéquation
 $X=0$ et dont la formule générale est donnée sous la lettre (A), ibhl.
 L'analyse nécessaire pour résoudre cette équation, c'est-à-dire pour en
 déterminer explicitement toutes les racines, est développée dans plusieurs
 exemples qui réunissent à peu près toutes les difficultés qu'on peut
 rencontrer dans d'autres applications. Cette théorie donne lieu d'établir
 plusieurs suites de théorèmes très-remarquables relatifs aux fonctions T et
 A , Les nombres n pris successivement pour exemples sont $3i, i3,4$ », 17 ,
 Dans tous ces cas op parvient a exprimer dans une même formule, et sans
 aucune ambiguïté, toutes les racines de l'équation en py lesquelles sont en . .
 , lin gênerai représentées par $\text{acos.} \text{---} \text{---} t \text{uty-âta } a^*$

The text on this page is estimated to be only 15.54% accurate

. xij TABLE DES MATIERES. SIXIÈME PARTIE.
 DÉMONSTRATION DE DIVERS THÉORÈMES D'ANALYSE
 INDÉTERMINÉE. S I, o« l'on se propose de décomposer un nombre donné
 ;i en quatre carrés , de manière que la somme de. leurs racines , prises
 positivement , soit égale à un nombre donné b, 33 ■ Premier cas, ou l'un des
 quatre nombres s, f, //, ?■ serait zéro; conditions pour la possibilité de la
 solution , 33a Second i as . nu aucun de ce< nombres n'est /.ci o ; alors il
 faut que 4a — ^' soit la somme de trois carrés, et qu'ainsi 4a — b' ne soit
 pas de la forme 4*(8«-4-7), 33J la solution sera toujours possiltle avec cette
 condition , mais pour qu'elle soit donnée en nombres positifs, il faut encore
 que b soit compris entre les limites \-\'a et √ S n — i) — i, l'.t cependant il
 y a des cas où l'on obtiendra encore des solutions et) nmiiLircs j »<>■»! t
 ils, quoique b soit audessous de la limite [' '3 n ■ i) \ i , 33(i Cette première
 analyse donne une nouvelle extension aux deux premiers cas du théorème
 sur les nombres polygones, 3 ju S II. Démonstration du théorème de Fermât
 sur les nombres polygones et de quelques autres théorèmes aimlogues , 34o
 Après quelques propositions préliminaires on prouve i° que tout nombre
 entier plus grand que 5o/w +21 est la somme de/w-t- 2 polygones de l'ordre
 it + a , dont m — a seront égaux à aéro ou à l'unité, a" qu'il en» est de même
 de tout nombre entier plus petit que ~n>m- -ai. 3.jo-j4f) Ces deux
 propositions comprennent la proposition générale de Fermât, mais avec une
 modification qui lui donne plus de précision et d'élégance, puisque sur les m
 j- a polygones indiqués par Fermât il y en a toujours m — a qu'on peut
 supposer égaux à zéro ou à l'unité. On peut prouver de plus, que, passe une
 certaine limite, facile à assignerpour chaque ordre de polygones, tout
 nombre donne peut être décomposé en quatre polygones ou cinq an plus.
 35o-354 P.xemplc sur le nombre <» {84 qui peut être décompose en quatre
 octogones, 356 § III. De l'équation \s -4- y'-r- z3 — o. ifo 1. impossibilé de
 cette équation resuite des trois propositions suivantes :

The text on this page is estimated to be only 15.59% accurate

DU TOME II. xiiij Page* i* Si cette équation est possible, l'un des nombres $-r, /$, a sera divisible par 3. ■/ L'indéterminée, qui doit être paire, scia on même temps divisible par i . 3° Si l'une des indéterminées est divisible à i fois par a et par 3. l'équation à laquelle elle appartient pourra être changée en une autre ou l'indéterminée analogue ne sera divisible que par $3^{\sim}$. On parviendrait donc de transformation eu tianstoi inaliim à une équation ou aucune indéterminée ne serait divisible par 3, ce qui est impossible par la première proposition. § IV. De l't'guation $xs - + y^* 4-$ à — o, 36i Si l'équation proposée était résoluble, on pourrait déduire de cette équation une suite infinie d'autresequations, égalementrésolubls, qui supposeraient que les nombres $x, jr y z$ sont composés d'une infinité de facteurs; la solution supposée ne pourrait donc être donnée qu'en nombres d'une grandeur infinie. S V. Théorèmes d'analyse suivis de formules nouvelles pour les sections angulaires, sti^ En partant du théorème de l'art. 5io, on prouve i° que a étant un nombre premier $4^m - 1$ si l'on fait $(/+ ^ / \langle \rangle = /P + Q l^{\wedge} >$ les polynômes P et Q pourront se mettre sous la forme $X' - n Y^*$, a° Que «étant un nombre premier $4 m - f - 3$, si l'on fait $(f + gV/r - /i)^* - /! \blacksquare + \rangle^*$, $Q l^{-} - "$ i les polynômes P et Q pourront èie parlâmes eliaitm en deux facteurs rationnels, de sorte qu'on aura $P_{--} \backslash H, \langle \rangle = (iD, i \sim i$ Ces théorèmes appliqués à la puissance n de $\text{cns.pH-W}' - i \sin. \zeta$, donnent le moyen de décomposer généralement en deux facteurs le polynôme $n - n - i. \langle - a, . . , \dots . "in. \langle \odot n \cos. ' \sim 9 - .. \cos. ' - \zeta \sin. \zeta > - [rte, e; ; al a 1^* 1 . . \rangle . , S r ' \rangle m \sim y \sim$ Ces facteurs s'exprimeront toujours d'une manière linéaire par les cosinus des multiples pairs de y lorsque n scia de la l'orme $4^m \setminus 1$. et par les sinus des multiples impairs du même an.de. lorsque n sera de la forme $4W+3$, 373-38a De là résultent les équations les plus simples qu'on puisse obtenir pour la division de la circonférence en n parties égales. § VI. Nouvelle démonstration de Ici loi de réciprocité qui existe entre deux nombres j) ramiers, igt C'est la plus simple entre toutes les démonstrations connues de cette proposition fondamentale.

The text on this page is estimated to be only 13.96% accurate

TABLE DES MATIÈRES APPFJNDICK. Section I. Met /iodes nouvelles pour la résolution approchée des équations numériques . 3o5 Limites des rat ines réelles^ toia. Définition des fonctions omales, Résolution de l'équation omalc $c = \zeta(jr \setminus$ Méthode pour avoir la plus grande racine positive d'une équation proposée, «foo Manière de trouver les autres racines positives de la même équation, 40.} Seconde méthode pour la résolution des équations numériques, 40 J neenerene ue ta plus grande racine , 410 Détermination de la plus petite racine, 4II De I intersection ri une droite quelconque avec la courbe omale $^{''^{ij^x}}$ » 414 Seconde manière de déterminer la plus petite racine, Connaissant la plus grande ou la plus petite racine, déterminer toutes les autres , 4 17 Limites de la quantité réelle qui sert de module aux racines imaginaires, 4ao Forme des équations à résoudre dans le cas des racines imaginaires, * Form til es rvon r corriger 1 f>< vil purs on t pmi nnr n n#* nrpnnerp aonroxitiiliion 426 f * r\ nn:ii^<^i)t 1 i » c si ■ i v t^^mAfi ifliiniTi'iti'iic f i n-iti'int 1 il f u'ititii r »■* «1 r 1 ■ ■ iiifitm] lajii ihSki n i its cj(.u.v i-iciin.s iiiiiignitiii ls lointain le Kicieui it ou m.ioiiu Hurmi rr 1 1 ■ mlicMil - 1 | jt/iuilmn nrnnncmi clii ' | . > i r r** i h iah i i ■ r m n 1 <i(iii'ilif\ n Uu^I r l| U 1 SclllsltlILcl ItqlIctLIOIJ |>IOJMJ:lt-î~ llU(J(glt7f/,l/Il JOII(ltri(_ qil*iliiHl /fil i lu if rÀ n i\ ft iii fr \ n lia ti t lise i ■ i 1 rue i ~n #i ■ n a * uu iiegrp. ri — —2 qui couiieni les autres i«i(mes , Ain 427 Uciuarque pour compléter la résolution de 1 équation omale-c:= *p ^J^y, Sectionx II. De quelques équations dont la propriété est telle qu'une racine connue sert à déterminer rationnellement toutes les autres , 43 1 On prend pour exemple une loi très-simple qui règne entre deux termes consécutifs de la série des racines, ibid. !e là 1 expression générale d'une racine quelconque et la condition pour que la suite des racines soit rentrante, 434 Développement du 3e degré, 435 f ormule générale de l'équation du 3e degré dans Laquelle une racine connue sert à déterminer les deux antres, 437 dette formule contenant trois indéterminées, peut s'appliquer à toute équation proposée du 3' degré. Il en résulte une démonstration très-simple de b réalité de* trois racines dans le cas irréductible , 44<>

The text on this page is estimated to be only 28.60% accurate

DU TOME II. XV Développement du 4^e degré; la méthode ne s'applique qu'à des équations qu'on peut immédiatement décomposer en deux équations du second degré, 443 Développement du 5^e degré : le résultat mis sous la forme la plus simple, offre une infinité d'équations qui ont leurs cinq racines réelles, quoique leurs coefficients contiennent deux indéterminées réelles prises à volonté , 44^e On donne un exemple numérique dans lequel une racine trouvée par les procédés vulgaires sert à déterminer les quatre autres , 449 Méthode directe qui conduit à la formule générale contenant l'expression des cinq racines; application numérique de cette méthode au même exemple, 449^e 460 Recherche plus générale sur l'équation du degré n, dont les racines forment une suite rentrante dans laquelle chaque terme est une fonction rationnelle du terme précédent. On fait voir que n étant un nombre premier, la résolution générale de cette équation sera toujours donnée par une formule qui contiendra implicitement toutes les racines, 461 -463 ERRATA DU TOME I. Pag. «4 lieni_a jusqu'à P, lisez jusqu'à p. il 16 il clair, il est clair. hl jusqu'à i3g, jusqu'à ioo3. 71 G pr-\-y\ pr—g'. lAi LQ ±al/A. u5 2 de la fraction , la fraction. Lia a ioo3 ifil i c'est ce qui pourrait, c'est ce qui ne pourrait. '99 iû T=rp—\ ibid, il j—rp—' -\-q X. aaB La (44-f-i)I>, (a« + i)D. 378 ia = A un diviseur, — à un diviseur. 1 suite des théorèmes , suite de théorèmes. as des nombres, de nombres, 6-1 3o4 1 (-0 • ' (-«) • * 3a5 3 le cas , les cas.

The text on this page is estimated to be only 15.39% accurate

ERRATA DU TOME II. ;. 16 lign. dern. plus petits que g , /i«î :
plus petiu que «. 18 a on résoudrai equat ion, on résoudra d'abord 1 equ 4«
dern. C'A, C D. 64 18 cinquième, ci \ îi'fni» a7 10 étant et, étant x. 88 ai
forme (0), formule (b'\. 99 a4 valeurs de 0 , valeurs de Q". 106 n 70, n* 78.
109 a5 puissance donnée w, puissance donnée de w. m 18 n"43i, n" AAi.
i3g ai :r'«X'Y, X'+aX'Y. 1a or qu'on ait, qu'on ait. 177 ao Proposons ,
Proposons-nous. 178 17 y oar (m . e^} . par (m', 5^). ai6 16 P"+Pr, />" + />"•
M a5 1 , = 0. air racine r=acos. — . . 11 r — , cos. — . . 1 1 >4» x3 ctR'-r-
tR*. 247 i3 T = •r» 1 . — a5i 5 P-r-aQcos.jA, 1* -1... 0 IJCC* O IL ibid. a4
ci-dessus, ibid. *5 Ep", P r»" \^p . a53 i5 art. 563 , art. 557. ,87 4 />'*, />'",
»>«■« »«"• r > r 29a ia RJ à la place de R\ R J à la nlao^ R 3oo iQ 9 des
deux lettres/;, ne cieux iciires p. 3oi 3 + 4R", + 4R1'3o5 6 l/ — 1 sin.fc/-' ,
34» ai plus grand , pkis grande. 353 â m -4- a . 4 m'-r- a. jya Vllp
f'ntipnrlrîi L'autre partie contiendra 4o6 7 ce a ni donne k . ce qui donne
(k). 4M 18 E t w= _ F 4>7 a7 ibid. »9 437 dern. o=x' — o=x* — 456 dern
Ts=r*M>=r»(T* = r'MJ=:r*(. Digitized by Google

THÉORIE DES NOMBRES QUATRIÈME PARTIE.

MÉTHODES ET RECHERCHES DIVERSES. § I. Théorèmes sur les puissances des nombres. J'ai méthode dont nous allons donner diverses applications, mérite une attention particulière, en ce qu'elle est jusqu'à présent la seule par laquelle on ait pu démontrer certaines propositions négatives sur les puissances des nombres. Le but de cette méthode est de faire voir que si la propriété dont on nie l'existence avait lieu pour de grands nombres, elle aurait lieu également pour des nombres plus petits. Ce premier point étant établi, la proposition est démontrée; car pour que le contraire eût lieu, il faudrait qu'une suite de nombres entiers décroissants pût être prolongée à l'infini, ce qui implique contradiction. Fermat est le premier qui ait indiqué cette méthode dans une de ses notes sur Diophante, où il prouve que l'aire d'un triangle rectangle en nombres entiers (i) ne saurait (i) Trois nombres tels que le carré du plus grand équivaut à la somme des carrés des deux autres, sont ce qu'on appelle un triangle rectangle. On peut donner pour exemple les nombres 3, 4, 5, les nombres* 5, 12, 13, et une infinité d'autres. II. i Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 22.21% accurate

a THÉORIE DES NOMBRES. être égale à un carré. Euler en a depuis étendu les applications, et l'a exposée avec beaucoup de clarté, dans le tom. II de ses Éléments d'Algèbre. (3a4) Théorème I. « l'aire d'un triangle rectangle en nombres « entiers ne saurait être égale à un carré. » Puisqu'on a $(a' - b')^2 = (a' - b')^2 + (ac - b')^2$, il est clair que les trois côtés d'un triangle rectangle peuvent être représentés par les nombres $a' - b'$, $a' + b'$, $a^2 - b^2$; c'est aussi l'expression générale qu'on déduirait de la résolution directe de l'équation $y^2 = z^2 - x^2$ (n° 17). Ces trois nombres pourraient de plus être multipliés par un facteur commun 6; mais nous ferons abstraction de ce facteur, qui est inutile pour notre objet, et par la même raison, nous supposerons a et b premiers entre eux. En effet, si les trois côtés d'un triangle sont divisibles par 6, l'aire sera divisible par 6; donc si cette aire est un carré, elle le sera encore après avoir été divisée par son facteur 6. Cela posé, appelons A l'aire du triangle dont il s'agit, nous aurons $A = ab(a^2 - b^2)$; et comme les facteurs a et b sont premiers entre eux, ils le seront également avec $a^2 - b^2$; donc pour que A soit un carré, il faut que chacun des facteurs a, b, $a^2 - b^2$, en soit un. Soit donc $a = x^2$, $b = y^2$, il restera à faire en sorte que $x^2 - y^2$ ou $m^2 - n^2$ soit égal à un carré. Cette quantité $m^2 - n^2$ est le produit des deux facteurs $m + n$, $m - n$: or m et n sont premiers entre eux, puisque a et b le sont. I.e plus, ils doivent être supposés l'un pair et l'autre impair; car s'ils étaient impairs tous deux, a et b le seraient aussi, et ainsi les trois côtés $a^2 - b^2$, $a^2 + b^2$ ou ab seraient divisibles par a, ce qui est contre la supposition. Donc les facteurs $m + n$ et $m - n$ sont premiers entre eux, et puisque leur produit doit être un carré, il faudra que chacun d'eux en soit un. Faisons en conséquence $m^2 - n^2 = p^2$; nous aurons $n^2 + p^2 = m^2$. Donc, «si l'aire d'un triangle rectangle est un carré, on pourra trouver deux carrés y^2 , n^2 tels que

The text on this page is estimated to be only 28.04% accurate

QUATRIÈME PARTIE. 3 « chacune des deux quantités y , $+ /i$, 7 , $-i$ - an^* soit égale à un carré (i). Puisqu'on a $px = q^* + in^*$, il faut (n° 143) que p soit de la forme $f' + zg$: or on satisfait à l'équation $o^* + a f' = (/^* - t - a^*)'$ en faisant $y - h / il - a = (/ + fV - a) / \%$ ce qui donne $q = f - a \#'$ et cette solution est d'ailleurs aussi complète qu'on peut le désirer, comme on peut s'en assurer par les formules du n° 17. Il reste donc à satisfaire à l'équation $q^* + h' - m \backslash$ dans laquelle substituant les valeurs trouvées pour q et n , on aura $/^* - + - ^g^* = m \backslash$ Cette dernière équation, qui doit être possible si l'aire A est un carré, présente un nouveau triangle rectangle formé avec l'hypotenuse (i) Voici le passage de Fermât que nous suivons assez strictement, en ajoutant seulement les développements nécessaires pour rendre la démonstration plus claire et plus complète : ■ Si area trianguli esset quadratus darentur duo quadrato-quadrati quorum differentia esset quadratus : Unde sequitur dari duo quadrata quorum et summa et « differentia esset quadratus. Datur itaque numerus compositus ex quadrato et • duplo quadrati aequalis quadrato, eâ conditione ut quadrati eum componentes « faciant quadratum. Sed si numerus quadratus componitur ex quadrato et duplo • alterius quadrati, ejus latus similiter componitur ex quadrato et duplo quadrati, « ut facillimè possumus demonstrare. • Unde concludetur latus illud esse summam latus circa rectum trianguli • rectanguli et unum ex quadratis illud componentibus efficiere basem et duplum » quadratum aequari perpendiculari. • • Illud itaque triangulum rectangulum conficietur à duobus quadratis quorum • summa et differentia erunt quadrati. At isti duo quadrati minores probabuntur • primis quadratis suppositis quorum tam summa quam differentia faciant quadratum. Ergo si dentur duo quadrata quorum summa et differentia faciunt « quadratum, dabitur in integris summa duorum quadratorum ejusdem naturae » • priore minor. Eodem ratiocinio dabitur et minor ista inventa per viam priorem « et semper in infinitum minores invenientur numeri in integris idem præstantes : • quod impossibile est, quia dato numero quovis integro non possunt dari infiniti • in integris illo minores. - Ed. cit. de Dbph., pag. 330,

4 THÉORIE DES NOMBRES. thénuse m et les deux côtés f, g :
 or l'aire de ce triangle étant et par conséquent égale à un carré, il s'ensuit
 que si l'aire A du triangle rectangle proposé est égale à un carré, on pourra ,
 par le moyen de ce triangle , en découvrir un beaucoup plus petit , mais non
 pas nul, dont l'aire sera pareillement égale à un carré. (3a5) Pour juger de la
 petitesse de ce second triangle rectangle en comparaison du premier, il faut
 exprimer la valeur de A en f et g : or on trouve $A = (m^2 - f^2) / 2g$
 $g^2 (f^2 - g^2) / (f^2 + 2fg + g^2)$ D'ailleurs $f^2 - 2fg + g^2$ ne peut être moindre que
 1 , et on a toujours $(f^2 + 8/V, P + 8g) > 1$ Donc l'aire A est plus grande que
 $1/8g^2$; donc $f^2 - g^2$, qui est l'aire du second triangle, étant nommée A' , on
 aura $A' < 1/120$ De là on voit que s'il existe un triangle rectangle en
 nombres entiers, dont l'aire A soit égale à un carré, il existera en même
 temps "n triangle rectangle dont l'aire A' , plus petite que $1/120$ » sera en-
 core égale à un carré, et cependant ne sera pas nulle, car l'un des nombres f
 et g ne peut être nul sans rendre $A = 0$. Mais par la même raison, du triangle
 rectangle dont l'aire A' est égale à un carré , on pourra déduire un troisième
 triangle dont l'aire A'' , plus petite que $1/120$, sera égale à un carré, et ainsi à
 l'infini. Or il implique contradiction qu'une suite de nombres entiers $A, A',$
 A'' , etc. , quand même ils ne seraient pas carrés , soit décroissante et
 prolongée à l'infini. Donc il n'existe aucun triangle rectangle dont l'aire soit
 égale à un carré. Corollaire. La même démonstration prouve que la formule
 $(m^2 - n^2) / 2mn$ ne peut être un carré, non plus que la formule $(m^2 + 4n^2) / 2mn$ excepté
 seulement dans les cas évidents, l'un de $m=n$, ou $n=0$; l'autre de $foug=0$. On
 peut aussi en conclure que l'équation $x^4 - y^4 = z^4$ est impossible.

The text on this page is estimated to be only 29.45% accurate

QUATRIÈME PARTIE. . 5 possible, hors le cas de $x=y$; car de cette équation on tirerait $p^2 - xy = (J - x)^2$ or on vient de voir que le premier membre ne peut être un carré. (3a6) Théorème II. « La somme de deux bicarrés ne peut être « égale à un carré , à moins que l'un d'eux ne soit nul. » Soit, s'il est possible, $a^2 + b^2 = c^2$; il faudra d'abord qu'on ait $a = p^2 - q^2$, $b = 2pq$, $c = p^2 + q^2$ J'observe ensuite que a et b pouvant être supposés premiers entre eux, p et q seront pareillement premiers entre eux , et même ils ne pourront être tous deux impairs ; car s'ils l'étaient, a et b seraient tous deux pairs. On ne pourra non plus supposer p pair et q impair, parce qu'alors $p^2 - q^2$ serait de la forme $4X - 1$, laquelle ne peut convenir au carré a^2 . Donc il faudra que p soit impair et q pair, et ainsi, pour satisfaire à l'équation $b = 2pq$, on prendra $p = m^2$, $q = n^2$ valeurs qui étant substituées dans l'autre équation $a^2 = p^2 - q^2$, donneront $m^4 - n^4 = a^2$ Cette dernière équation exprimant que le carré m^2 est égal à la somme de deux autres carrés 4 « Si a , le seul moyen d'y satisfaire est de prendre $m^2 = z^2 + g^2$, $n^2 = z^2 - g^2$ Or l'équation $n^2 = fg$, ou etg doivent être premiers entre eux, donne $f = g^2$, $g = g^2$, et par ces valeurs, l'équation $a^2 = m^4 - n^4$ devient $a^2 = (z^2 + g^2)^2 - (z^2 - g^2)^2$. D'où l'on voit que s'il existe deux bicarrés a^2 , b^2 dont la somme soit égale à un carré c^2 , il existera en même temps deux autres bicarrés beaucoup plus petits z^2 , g^2 dont la somme sera pareillement égale à un carré. (327) Et pour rendre sensible la petitesse de ceux-ci en comparaison des premiers, on déduira des valeurs précédentes, $a = g^2 \sqrt{f} = 2zg\sqrt{f}/(c^2 + g^2)$; ce qui donne $a^2 = \frac{4z^2g^2f}{(c^2 + g^2)^2}$ et par conséquent $a^2 + g^4 < V^2 + b^2$). On remarquera d'ailleurs que « ne peut être zéro non plus que g , parce qu'il s'ensuivrait $b=0$, cas exclu. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 25.09% accurate

6 THÉORIE DES NOMBRES. S'il existe donc un carré c' égal à la somme des deux bicarrés, on connaîtra par son moyen un second carré c'' , pareillement égal à la somme de deux bicarrés, et dont le côté c sera $< \sqrt{c}$, sans être nul ; mais par la même raison, le carré c'' en fera connaître un troisième c''' jouissant de la même propriété, et dont le côté c'' sera $> 1/c$, sans être nul ; ainsi de suite. Or il implique contradiction qu'une suite de nombres entiers $c, c', c'', \text{etc.}$ dont chacun est plus petit que la racine quatrième du précédent, sans être nul, puisse être prolongée à l'infini. Donc il est impossible qu'un carré se décompose en deux bicarrés. Corollaire. La même démonstration prouve que la formule $m^2 - 4n^2$ ne peut être égale à un carré, si ce n'est lorsque $w = 0$. (3u8) Théorème IJT. « La formule $x^2 + 2y^2$ ne peut être égale à un carré, si ce n'est lorsque $j=0$. » Car si l'on fait $x^2 + 2j^2 = z^2$ il faudra d'abord supposer... $z = p^2 + q^2$, $r^2 = p^2 - nq^2$, $y = 2pq$; ensuite l'équation $r^2 = p^2 - aq^2$ donnera $x = m^2 - an^2$; $p = m^2 + an^2$, $< jr = a/wn$. Ces valeurs étant substituées dans l'équation $y^2 \sim npq$, on aura $^4 = 4 m n (m^2 - an^2)$. Pour satisfaire à cette dernière équation, j'observe que les nombres m et n sont premiers entre eux ; car s'ils avaient un commun diviseur, p et q en auraient un aussi, et par suite x et y , ce qu'on ne doit pas supposer. Donc si $m n (m^2 - a n^2)$ est un carré, il faudra que ses trois facteurs $m, n, m^2 + an^2$ soient chacun un carré. Soit donc $m = \wedge n = g^2$, et il restera à faire en sorte que $^4 ag - 4$ soit égale à un carré. Cette formule est semblable à la proposée, et il est visible qu'elle est exprimée en nombres beaucoup plus petits, car on a $x^2 + a.y^2 > p^2$ et par conséquent $p^2 \sim x^2 + a.y^2 < \sqrt{(x^2 + a)/1}$; d'ailleurs les nombres ^{4} et g ne sont nuls, ni l'un ni l'autre, puisque s'ils l'étaient, ils rendraient y nul, ce qui est un cas dont on fait abstraction. De là il suit que si on a un carré A^2 qui soit de la forme $x^2 - a/y^2$, on pourra en déduire un second carré A''' qui sera de la même forme, et dont

The text on this page is estimated to be only 23.44% accurate

QUATRIÈME PARTIE. 7 le roté A' sera $\leq 1/A$: mais par la même raison le carré A'* en fera connaître un troisième A''' de même forme, et ainsi de suite. Or il est impossible qu'une suite de nombres entiers A, A', A'', etc. soit décroissante et prolongée à l'infini; donc il est impossible que la formule $x^* + ay^*$ soit un carré, à moins qu'on n'ait $7 = 0$. Corollaire. Il suit de cette proposition, que la formule $x^* - Sy^*$ ne peut non plus être égale à un carré; car si on avait $x^* - Sy^* = z^2$ il s'ensuivrait que $z^2 + a(ax/)$ est égale au carré $(x^* + 8/')$, ce qui ne peut avoir lieu que lorsque $y=0$.

(3a<)) Théorème IV. a Aucun nombre triangulaire, excepté l'unité, « n'est égal à un bicarré. » Soit, s'il est possible, $\{ x(x + 1) = y^2$, ou $x(x + 1) = ay^2$; si l'on fait $y=mn$, m et n étant deux indéterminées, cette équation ne pourra se décomposer que de l'une de ces deux manières : $x=2m^2 j$, $x+1=2m^2 j$ (I) $x=n^2 j$ (II) $x=n^2 j$ lesquelles donnent, soit $r = n^2 - a m^2$, soit $1 = a m^2 - \ll^*$. La seconde combinaison donnerait $\frac{1}{4} = (r^2 - 1)^2$, équation impossible, parce que le premier membre est de la forme $p^2 - 7^2$, laquelle ne peut être un carré, que dans le cas évident de $m = 1 - x$. La première combinaison donne $1 + am^4 = \ll^*$, équation également impossible, parce qu'en vertu du théorème précédent, le premier membre ne peut être un carré. Donc aucun nombre triangulaire, excepté 1, n'est égal à un bicarré.

(33o) Théorème V. « La somme ou la différence de deux cubes « ne peut être égale à un cube. » Soit, s'il est possible, $x^3 \pm y^3 = z^3$ on pourra supposer à l'ordinaire que les deux nombres x et y sont premiers entre eux, et alors y et 3 seront également premiers entre eux, ainsi que x et z. Cela posé, des trois nombres x,y,z, il y en aura toujours deux impairs et un pair; soient x et y les deux impairs, qu'on peut toujours Digitized by Google

8 THÉORIE DES NOMBRES. placer dans un même membre; si l'on fait $x^2 = y^2 + 2p^2$ ou bien $x^2 = p^2 + q^2$, on aura par la substitution. $2P(P^2 \sim 3^2) = z^2$ et on observera ultérieurement, que puisque $p + q$ et $p - q$ doivent être impairs, il faut que p et q soient l'un pair, l'autre impair; de sorte que $p^2 - 3q^2$ sera toujours impair. Mais $+ 3^2$ devant être un cube, il est clair que z^2 sera divisible par 8, et ainsi p sera pair et q impair. Maintenant il y a deux cas à distinguer, selon que p est ou n'est pas divisible par 3. (33 1) Premier cas. Si p n'est pas divisible par 3, les facteurs $p^2, p^2 + 3q^2$ seront premiers entre eux, et si leur produit est un cube, il faudra que chacun d'eux en soit un. Soit donc $p^2 + 3q^2 = r^2$, alors r sera de la forme $m^2 + 3n^2$ et on pourra faire $p + q \sqrt{-3} = (m + n\sqrt{-3})J$, ce qui donnera $p - rn = 9m - 3n^2$. Ces valeurs satisfont à l'équation $p^2 + 3q^2 = r^2$, mais d'ailleurs elles ont toute la généralité nécessaire, ainsi qu'on peut s'en assurer par la résolution directe de cette équation. Il ne reste donc plus qu'à faire en sorte que Hp ou $a(m + 3n)(m - 3n)$ soit un cube. Or il est aisé de voir que les trois facteurs de cette quantité sont premiers entre eux, et ainsi chacun d'eux doit être un cube; soit en conséquence $m = a^3, m - 3n = b^3, am = c^3$, on aura $a^3 - b^3 = c^3$. De là on voit que si l'équation $a^3 \pm b^3 = c^3$ est possible en nombres entiers, l'équation $a^3 + b^3 = c^3$, semblable à la première et exprimée en nombres beaucoup plus petits, sera également possible. Or par la substitution des valeurs précédentes, on a ou $z = abc(a + b)$ et Par conséquent $z > a^2b^2c$; donc en passant de l'équation $sf^2zy = i^2a$ à sa transformée $a^2 + i^2 = c^2$, le nombre c qu'on peut représenter par z sera beaucoup plus petit Digitized by Google

QUATRIÈME PARTIE. 9 que z . Mais par la même raison on déduirait du cube c^3 ou z^3 un troisième cube z''^3 tel que z'' serait beaucoup plus petit que z et ainsi à l'infini ; or il est impossible qu'une suite de nombres entiers $z, z', z'', \text{etc.}$ soit décroissante et prolongée à l'infini. Donc la formule $a^3 - 3ab^2 + 3a^2b - b^3$ ne peut être un cube, lorsque p n'est pas divisible par 3. (33a) Second cas. Si p est divisible par 3, on fera $p=3r$, et la formule $a^3(p^3 + 3q^3)$ deviendra $27r^3(r^3 + 3q^3)$. Maintenant comme les facteurs $27r^3$ et q^3 sont premiers entre eux, il faudra que chacun d'eux soit un cube. Faisant donc $q^3 = 3r^3 \cdot \frac{1}{3}$, ou $q = r \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$, ce qui donne il restera à faire en sorte que $18r$ ou $37 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$ soit un cube. De là on déduira comme $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$, $\frac{1}{9} = \frac{1}{3^2}$, et par conséquent « $\frac{1}{3} = \frac{1}{3^2}$. Ainsi on voit que si le cube z^3 peut être la somme ou la différence de deux cubes $x^3 + y^3$ il y aura un autre cube beaucoup plus petit c^3 qui sera pareillement la différence de deux cubes « $\frac{1}{3} = \frac{1}{3^2}$; je dis que c^3 est beaucoup plus petit que z^3 ; en effet, les valeurs précédentes donnent $z = 3abc \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$, et par conséquent $z > 3a^{\frac{1}{3}}c$. De là on conclut comme dans le premier cas que $a^3(p^3 + 3q^3)$ ne peut devenir un cube lorsque p est divisible par 3. Donc dans tous les cas l'équation proposée $a^3 = x^3 + y^3$ est impossible, à moins que l'une des indéterminées ne soit zéro. (333) Théorème VI. « L'équation $x^m + y^m = az^m$ est impossible » pour toute valeur de m . » Dans cette équation, où l'on suppose m non divisible par 3 pour ne pas rentrer dans le cas précédent, les nombres x et y doivent être impairs ainsi que z ; d'ailleurs le premier membre est le produit des deux facteurs $x + y, x - y$ qui ne peuvent avoir II a Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 23.46% accurate

io THÉORIE DES NOMBRES. que 3 pour commun diviseur; ainsi il faudra distinguer deux cas, selon que z est ou n'est pas divisible par 3. Soit z divisible par 3, l'équation proposée se divisera nécessairement en deux autres comme il suit : $xy - f - y = 3r'$, et l'on aura $z = 3r'$; r' étant premier à 3 a. La seconde de ces équations peut se mettre sous la forme $\dots (-\pm r) - + 3(\wedge \text{£})' = 3H$, ou $(\hat{r}^y + 3(1+Z)W$; doù l'on voit que r , qui est toujours un nombre impair, doit être de la forme $f^* 4 - 3^{\wedge}$; faisant donc $r = f^* 4 - 3^{\wedge}$, puis $\{f + g \vee - 3\}1 = F + G \wedge - 3$, on aura $r^{\wedge} F' H - 3G'$, et de l'équation précédente on déduira $\{x - y\} = F$, $\{(\cdot; + j)\} = G$. Mais on a $G = 3^{\wedge}(\cdot -$ done Dans cette équation $\#$ doit être divisible par $a^{\sim}$, cary — est tm nombre impair, puisque $H - 3g^*$ eu est un ; d'ailleurs les trois facteurs $g, f+g, f-g$, n'ayant aucun diviseur commun, l'équation précédente devra se décomposer en trois autres , savoir : $g = zm^{\sim} \cdot f+g = ?$, $f-g = i$, d'où résulte $6J - y1 erra^* a1$, équation semblable a la pruposée et composée de nombres beaucoup plus petits. Soit a' z non divisible par 3 , alors l'équation proposée se décomposera en ces denx-ci : $x^* - xy + f - r^*$, lesquelles supposent $z = ar$, et $\cdot$ premier à a. La dernière étant mise sous la forme $(j^{\sim}y + 3(1^{\wedge}2)^* = t$ on voit que r devra être de la forme $f' + 3g \setminus$ C'est pourquoi , faiDigitized by Google

The text on this page is estimated to be only 27.97% accurate

QUATRIÈME PARTIE. 1 1 sant comme dans le premier cas, $r=y^*$
 $+ 3^*$, $\{f+gV - 3\}3 = F + G \mid - 3$, on aura $r^* = F^* + 3 G1$, ce qui donnera
la solution $x+y=n\mathbb{Z}$, $x-j=aG$. Mais on a $F = (/(* - gf)$; donc... 2"- * « $J = (/(' -$
 $9\#')$: les trois facteurs du second membre/, $/+ 3g''$, $/ - 3\#$, étant premiers
entre eux et/' $- 9^{\wedge}$ étant toujours impair, cette équation ne peut subsister, à
moins qu'on n'ait $/ = a'' - 'a1$, $/+ 3g = 63$, $/ - 3g = fly$ ce qui suppose $a - a$
 $\in y$, les trois nombres a , 6 , y , étant premiers entre eux. De là résulte
l'équation $g14 - T3 = a'' \ll$ semblable à la proposée et dans laquelle a sera,
ainsi que a , non divisible par 3. Puisque dans les deux cas l'équation
proposée se réduit à une équation de même forme et composée de nombres
beaucoup plus petits, opération qui peut être répétée indéfiniment, il s'ensuit
que cette équation est impossible, excepté dans le seul cas où $z = 0$, et aussi
dans le cas de $z = i$, si on avait $m = \backslash$. (334) H suit des deux théorèmes
précédents que l'équation.. $i' + ^{si}Az'$ est impossible pour les valeurs
 $A=i, a, 4 \gg 8, i6$, etc. ; il serait facile de démontrer par la même méthode qu'elle
est également impossible pour les valeurs $A=3, 5, 6$, et une infinité d'autres.
Mais si on avait $A = 7$, il est visible que l'équation $x^* + y^* = jzx$ serait
satisfaite par les valeurs $x - 2, y = - i, z = 1$; de même l'équation
 $.vi + yi = gzi$ le serait par les valeurs $x = a, y - 1, z - i$. Nous ferons voir par
la suite que dans ces sortes d'équations une solution connue suffit pour en
faire découvrir une infinité d'autres. (335) Théorème VII. «Aucun nombre
triangulaire, excepté 1, « n'est égal à un cube. » Car supposons qu'on ait $\sim x$
 $(x + 1) = y^*$, ou $x(x + 1) = a y^*$; si on fait $y = mn$, m et n étant deux
nombres premiers entre eux, cette équation ne pourra se décomposer que
de l'une des deux manières : $1 + x = n1$ $x = amJ$, a . Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 24.42% accurate

la THÉORIE DES NOMBRES. lesquelles donnent $n^3 \pm i = a/n$
 Mais suivant le théorème précédent cette équation ne peut avoir lieu à
 moins qu'on n'ait $n = i$; donc, excepté les cas de $r=0$ et $x = i$, il ne peut y
 avoir aucun nombre triangulaire égal à un cube. L'équation $\{x(x+ \backslash)=y^*$
 peut être mise sous la forme. . . . $Sj^3 + i = z^*$ donc celle-ci n'est possible que
 pour les seuls ras $J=0, r= i$. (336) Théorème VIIf. « L'équation $x' -+ x - yJ$
 n'est susceptible « que de la solution $x=5, j=3$. (Ed. de Dioph., pag. 3ao.) »
 En effet, si cette équation avait lieu, y devrait être de la forme $// -+ - a < 7'$;
 ainsi il faudrait faire $x + [/ - u - (p + f^{\wedge} - a) \backslash$ ce qui donnerait $i -$
 $3p' < / - 27'$; donc $y = i$, $p = 1$, $7 = 3$, $v = 5$. (337) Théorème IX. «
 L'équation $x^* + , \backslash = y$ n'est susceptible « que des deux solutions $x = st, y = 'x$; x
 $= 1 \ 1 \ 1$, $y = 5$. » Carj devant être de la forme $/; ' -4- < /'$, il faudra faire $x -+ x \backslash$
 $- 1 = (p - \backslash - q \backslash - i)J$, ce qui donnera $a = 3 / ? * < y - 7^0$ équation à laquelle
 on ne satisfait que par les valeurs $p = 1$, $7 = 1$, ou par les valeurs $/ > = 1$, $y =$
 $- 2$, lesquelles donnent les deux solutions mentionnées. Remarque. Nous
 avons démontré dans ce paragraphe que l'équation $xi \dot{a} zy i \sim zi$ est impossible,
 ainsi que l'équation $xk \pm : y^* - z \backslash$ et à plus forte raison l'équation $x^* \pm y^* =$
 z^* . Fermât a assuré de plus (Ed. de Dioph., pag. 61) que l'équation $x^* + y'' =$
 z'' est généralement impossible, lorsque n surpasse 2. C'est sur quoi on
 trouvera ci-après quelques recherches dans la VIe partie. Digitized by
 Googl

The text on this page is estimated to be only 29.61% accurate

QUATRIÈME PARTIE. i3 § II. Théorèmes concernant la résolution en nombres entiers de l'équation $x^a - b = ay$. (338) Si l'on satisfait à l'équation proposée en faisant $x=H$, on y satisfera plus généralement, en faisant $x = H + az$, z étant un nombre indéterminé. Or dans la suite formée d'après le terme général $6 +$ il y aura toujours un terme compris entre $-\sqrt{6}$ et 0 ; on peut donc regarder ce terme comme une solution ou racine de l'équation proposée; et la question est de trouver toutes les solutions ou racines de cette sorte dont l'équation proposée est susceptible. Voici différents théorèmes qui remplissent cet objet, dans le cas où a est un nombre premier; nous considérerons ensuite le cas où a est un nombre composé. (338) Théorème I. «L'équation $x^n - b = ay$, dans laquelle « a est un nombre premier, et b un nombre non-divisible par a , $a - 1$ ne sera possible qu'autant qu'on aura $b^{n-1} - 1 \equiv 0 \pmod{a}$, w étant « le commun diviseur de n et de $a - 1$. Si cette condition est remplie, l'équation proposée aura un nombre u de solutions qui a seront comprises dans l'équation $x^n - b = ay$, où $*$ est le « moindre entier positif qui satisfait à l'équation $\langle n - \phi(a) \rangle = w$. » Si l'équation proposée est résoluble, on aura, en rejetant les multiples de a , $x^n = b$; on a en même temps, par le théorème de Fermât ($n \neq 1$), $x^{n-1} \equiv 1 \pmod{a}$. Les deux nombres n et $a - 1$ ayant pour commun diviseur w , si l'on fait $n = w \cdot n'$, $a - 1 = w \cdot a'$, il sera facile de trouver deux autres nombres positifs n'' et a'' tels qu'on ait $n'' - 1 \equiv 0 \pmod{a''}$. (1) L'expression abrégée $OK\{a\}$ désigne un multiple de a . Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 27.25% accurate

i4 THÉORIE DES NOMBRES. Maintenant des équations $x^n = b$, $ax = i$, on tire $e = .r = a r = x$, donc $x = b$, ou $x = b^{1/n}$ — $b^{1/n} = 3K(a)$ — d'où l'on voit que l'équation proposée ne pourra avoir qu'un nombre w de solutions (n° i3a); et pour qu'elle ait effectivement ces solutions, il faudra que les deux équations $x^n = b$, $ax = i$ puissent s'accorder entre elles. Or ces dernières donnent $x^n = a^n i^n$, $.r^n = a^n i^n$; donc il faudra qu'on ait $A^n = s i$, ou $If' = i = 3ti(a)$. Cette condition est la seule nécessaire, et toutes les fois qu'elle sera remplie, l'équation proposée aura un nombre $*$ de solutions contenues dans l'équation $x^w = 3tt(a)$. Or on s'assure que celle-ci a effectivement un nombre $o >$ de solutions, en observant que $x^w = b^*$ est facteur de $ax = i$ qui revient à $.r^* = i + aR$. Remarquez que si dans l'équation proposée n est plus grand que $a - i$, on peut ôter de cet exposant les multiples de $a - i$, et ne conserver que le reste positif. En effet, $x^{n'}$ divisé par a , laisse le reste i ; donc x^n divisé par a , laissera le même reste que $x^{n'}$. (34o) Il suit du théorème précédent que l'équation $x^n = b = 3K(a)$ aura toujours une solution, quel que soit b , lorsque n et $a - i$ seront premiers entre eux; soit alors x le plus petit nombre positif qui satisfait à l'équation $x^n = \zeta (a - i) = i$, cette solution sera $x = b^{1/n}$. En général, ce théorème a l'avantage d'indiquer tout à-la-fois si l'équation proposée est résoluble, combien elle a de solutions, et quelle est l'équation la plus simple qui contient toutes ces solutions. Dans l'équation réduite, l'exposant de x sera toujours diviseur de $n - i$; ainsi il ne s'agit plus que de trouver les solutions de l'équation $x^* = b = M(a)$, dans la supposition que n soit diviseur de $a - i$. Or il est facile de voir que si on connaît une des valeurs de x , Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 29.41% accurate

QUATRIÈME PARTIE. 15 on les aura toutes en multipliant la valeur connue par les différentes racines de l'équation $x^n - 1 = 3it(a)$; il convient donc avant tout, de s'occuper de la résolution de cette dernière équation. (34i) Théorème II. « Étant proposée l'équation $x^a - i = 0$, « dans laquelle a est un nombre premier, et n un diviseur de $a - i$, « en sorte qu'on ait $a - i = a!nt$ « i° On aura $x = u$? 7 u étant un nombre quelconque non-divisible par a . « a° Si $\hat{O}$ est une valeur de 6 en sera une aussi, quel que soit « l'exposant m . « 3° Si le nombre 6 est tel que $6V - i$ ne soit pas divisible par a , « v étant un diviseur premier de n , la formule $ar = G^*$ contiendra « toutes les solutions de l'équation proposée, lesquelles seront i , « $6, 6', \dots, O^* - *$, ou les restes de ces quantités divisées par a . « 4° Non-seulement il y a plusieurs nombres 0 qui jouissent de cette « propriété, mais le nombre en est $i^i - ^ - ^$ ($' - \zeta^$) $^* e^* C - '$ « v, V, v'' , etc. étant les différents nombres premiers qui peuvent diviser n , » Car i° si l'on fait $x = u$, on aura $x^n - i = 0$ « $\bullet^* - \hat{1} = u' - i$, quantité toujours divisible par a . « i° Si $ar = 9$, on aura, en rejetant les multiples de a , $9 = i$: faisant donc $x = 6$, on aura pareillement $x^* = 0''' = i$, quel que soit m . 3° L'équation proposée devant avoir « solutions, la formule $x = V$ les donnera toutes, si dans la suite $f, 9, 6', \$', \dots, 6''''$, il n'y a pas deux termes égaux (en rejetant toujours les multiples de a). Or supposons $0^* 1 = 6^*$, il en résultera $8^\circ = i$, « t étant $jt - X$ ou $X - ji$, et par conséquent moindre que n . Mais comme on a déjà $H^* = i$, si on appelle e le commun diviseur de « et de n , et qu'on résolve l'équation $rcj - <rz =$ «, on aura $On^ = 8'x''''e$; le premier membre, à cause de $V = i$, se réduit à i ; le second, à cause de $6e = i$, se réduit à e'' ; ainsi on aurait $6^* = i$. Soit « $= \langle / \rangle'$, et « $' = n \setminus$, v étant un nombre Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 21.77% accurate

»6 THÉORIE DES NOMBRES. premier; puisqu'on a $S' = i$, on aura aussi $btn - i$, ou $8; = i$; équation impossible, puisqu'on a supposé dans l'énoncé du théorème, n que la quantité $0V - i$ ne peut être divisible par a; donc la formule $x = V''$ renfermera implicitement toutes les solutions de l'équation proposée. $\backslash^\circ$ Soit v l'un des diviseurs premiers de n; de même qu'il n'y a que n valeurs de x qui satisfont à l'équation $x' - i = an (a)$. il n'y a aussi que $^$ valeurs de $\hat{o}$ qui donnent $G^* = i$. Donc sur n valeurs que doit avoir 6 dans l'équation $0'' = i$, il y en a n — "qui ne donlient pas $\bullet \gg = i$. Raisonnant de même à l'égard des autres facteurs premiers dont/* peut être composé, on conclura qu'il y a un nombre (i)nÇt — ;) (' — v) (f — t) ' &tc- de valeurs de 6, telles qu'au* n a oune des quantités $\hat{o}'' - i$, — i, $b^* - i$, etc. , n'est divisible par a. (34a) Done si n est un nombre premier, il suffira d'avoir une valeur de x autre que l'unité, et cette valeur étant nommée f>, h formule $x = h''$ contiendra toutes les valeurs de x. Si n est une puissance d'un nombre premier v, pour que la valeur $x = H$ qui satisfait à l'équation $xT - i$, en donne la solution complète, il faudra que (r ne soit pas égale à -4- i, et alors on aura $x = r$. Enfin si n est de la forme $v v' v''^$, etc., comme on peut toujours le supposer, je fais $va = p, v'^ = (i', v'T = pt''$, etc. , et je résous séparément les équations $3? - l = 3\hat{I}L(o)$, $X? - l = 31L(a)$. — I — DM (a). (i) Le nombre des valeurs de 6 est le même que celui des nombres plus petits que £ et premiers à n. (Introduct., art. XV.)

The text on this page is estimated to be only 28.30% accurate

QUATRIÈME PARTIE. 17 Soient $x = \sqrt[m]{a}$, $x = \sqrt[n]{a}$, etc. les solutions complètes de ces équations, je, dis qu'en prenant $e = \sqrt[m]{a}$, etc., la formule $x = zbm$ sera la solution complète de l'équation proposée. C'est un moyen qu'on pourra mettre en usage, lorsqu'on n'aura pas rencontré tout d'un coup, par la formule $r = \sqrt[m]{a}$, le nombre a propre à donner toutes les solutions. Exemple I. (343) On demande les sept valeurs que doit avoir x dans l'équation $x^7 - 1 = 0$? Puisque $379 - 1 = 7.54$, on aura $x = u^*$, u étant un nombre quelconque non-divisible par 379. Soit $u = a$, on aura, en rejetant successivement les multiples de 379, $w_6 = 64$, $\sqrt[6]{a} = 73$, $u^* = a^3$, $u^{**} = a^5$. Soit, $u^* = ia^5$. Donc $x = ia^5$, et comme l'exposant 7 est un nombre premier, toutes les valeurs de x seront comprises dans la formule $x = ia^{5t}$ laquelle donne les sept nombres suivants 1, ia^5 , 86 , 138 , 184 , 199 , 94 . La moindre valeur de x étant 86 , on voit qu'il aurait été fort long de chercher les valeurs de x par le tâtonnement, en faisant successivement $x = \pm 1$, $d = a$, $\sqrt[3]{a}$, etc. Exemple II. (344) Étant proposée l'équation $x^3 - 1 = 0$, on peut, d'après le n° 342, résoudre les équations $x^9 - 1 = 0$, $x^{11} - 1 = 0$. Celles-ci ayant pour solutions complètes $x = 180$, $x = ia^5$, on en conclura celle de la proposée $\sqrt[3]{a} = (180. ia^5)^{1/3}$; et comme le carré de $\sqrt[3]{a}$, divisé par 379, laisse le reste -8 , on a plus simplement $x = (-8)^{1/3}$. La même équation aurait donné immédiatement, par la première partie du théorème II, $x = u^6$. Soit $u = a$, on aura $x = 64$; et comme les diviseurs premiers de 63 sont 3 et 7, il faut voir si 64 et 64^* ne donneront pas le reste $+1$. Or on trouve que ces puissances ne donnent pas le reste -1 ; donc 64 eût été encore la solution complète de la même équation. II. 3

The text on this page is estimated to be only 26.31% accurate

i8 THÉORIE DES NOMBRES. (34r>) Théorème III. « Étant proposée l'équation $x^m + i = 0$ (1), « dans laquelle a est premier et $t \mid n$ diviseur de $a - i$, on résoudra « l'équation $x^{m/t} - i = 0$ (2) qui sera toujours possible. Soit $0 \leq i < a$ « la solution complète de celle-ci, je dis que la solution complète « de la proposée sera $i \equiv 0 \pmod{a}$ « i étant un nombre quelconque. » Car 0 étant une valeur quelconque de x dans l'équation $x^m - i = 0 \pmod{a}$, sera aussi une valeur quelconque de x dans l'équation $x^n - i = 0$ (3). Restent donc les puissances impaires de 6 pour résoudre l'équation $x^n - i = 0 \pmod{a}$. ♦ Exemple. (346) Soit proposée l'équation $i = (433)$, qui est résoluble, parce que $433 - i$ divisé par 36 , donne le nombre pair 12 . Je me servirai pour cela de l'équation $x^3 - i = 0 \pmod{433}$, qui donne $x \equiv u6$. Soit « $= 5$, on aura $i \equiv x - 37$. Cette valeur étant nommée 8 , on a $6,6 \equiv -1$, $6' \equiv 198$; donc suivant les parties a^{***} et 3^{**} du théorème II, 6 est la solution complète de l'équation $\dots - 1 \equiv 3iL(433)$, et par conséquent e^{*****} est celle de la proposée $xu + 1 \equiv 31^{(433)}$. Voici les trente-six solutions qui en résultent. $x \equiv 3j'i \sim^{**} = zk \ 37 \pm 8 \pm 127 \pm 203 \pm 79 \pm 99^2 \pm i40 = fc \ 1 \ rnj \pm i28 \pm i33 \pm ai6 \pm 35 \pm i48 \pm 3a \pm 75 \pm 54 \pm 117$. Les mêmes valeurs seraient renfermées plus simplement dans la formule $x - t \dots^{**}$. (347) Théorème IV. « Étant proposée l'équation $x' - \wedge = 0$ (4), ($t \mid I$ « dans laquelle $b'' = \pm 1$, m étant diviseur de $\dots$, « 1" Si m et a sont premiers entre eux, et qu'on cherche les nombres « positifs $7c$ et $<p$ tels que $w \mid n - <p \mid m = 1$, je dis qu'on aura $x - b \mid y$, « y étant une racine quelconque de l'équation $y - (\pm 1)' = 3R$. («) ; « 2* Si m et n ont un commun diviseur a ; soit $n = ri <^*$ et $itn - \wp / \ll = i$, « on aura $x = bV!y$, ou $x^* - \&^*j = .m$ («), /étant une racine quelconque de l'équation $\dots - (\pm i)^? = 0 \gg L(a)$. »

The text on this page is estimated to be only 26.57% accurate

QUATRIÈME PARTIE. 19 Car en faisant dans le second cas $x'' = b^*y$, on a $xn = b^{TM} yn' = I + ?OT(\pm xf = b$. Le premier cas est d'ailleurs une suite du second. Ce théorème offre déjà un grand nombre de cas où l'on peut rappeler immédiatement l'équation $6=30$ (a) à la forme $x'' \pm i = iii(a)$. Il indique en même temps une infinité d'autres cas où l'équation $x^* - /; = 3TL(a)$ se décompose d'elle-même en un nombre n' d'équations de degré inférieur $a?w - b^* y = ifo>(a)$. Exemple I. (348) Soit l'équation $x' + 49 = f^{aa3}$, qui est résoluble (Th. I), parce qu'on a $(-49)^{?4} = 1 \cdot Le^*$ nombres 3 et 74 étant premiers entre eux, on aura, suivant le théorème précédent, $x = (-49)^{''^} = - (fay, y \text{ étant une racine de l'équation } 5 - 1 = JTt(aa3)$. Remarquez que si on eût proposé l'équation $x^* + 7 = 30, (333)$, il eût été facile de voir qu'une de ses racines est $.r = 6$. Or il suit de là que dans l'équation $^{-1}-49=30(233)$, on a $x = -36$. En effet, les trois racines de cette dernière sont $x - -36, -66, 102$. En général, si a est une solution de l'équation $x^* - \& = 30(a)$, «' en sera une de l'équation $a? - \&' = 30(a)$. Exemple II. (349) Étant proposée l'équation $x^* + 30 = 30, (61)$, où l'on a $bz = z - 20$, il faut d'abord, pour que cette équation soit possible $(11*339)$, qu'on en négligeant les multiples de 61, $b'' = 1$. Or on trouve $\&s = -1$, et par conséquent $b'' = 1$; donc l'équation est possible. Ensuite, puisque les exposants 6 et 5 sont premiers entre eux, on aura, suivant le théorème», $x = -zoy, et y^* + 1 = 30(61)$. Or l'équation $y^* - 1 = 30, (61)$ a pour solution complète $y - .29'$; donc $a? = -20.ao/*-'' = 3o. i3'$. Les nombres qui en résultent sont $\pm 7, \pm 34, \pm 3o. 3$. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 26.51% accurate

ao THÉORIE DES NOMBRES Exemple fil. (350) Soit l'équation $a:0 - 5 = 3K - (6oi)$, on trouve $Z^{>0} = -i$; mais comme 10 et 6 ont pour commun diviseur 2, on fera, suivant la seconde partie du théorème, $x' - U'y$ et $j^* - i = ^{(Goi)}$. Celle-ci donne $y = \{ - 169/$; ainsi l'équation proposée peut se décomposer en cinq autres du second degré, qui sont : $x' - iao = JiL((5oi)$, $x' - i54 = 3t(6oi)$, $x' + i83 = 3IL(6oi)$, $x' - 276 = ait(601)$, $x^* - 234 = ^{(^{01})}$. Mais cette décomposition est peu avantageuse, car il suffit d'avoir une valeur de x qu'on multipliera par les racines de l'équation $y'' - 1 = (60 \ 1)$; on peut donc n'employer qu'une de ces équations, et la troisième, qui est la même que $x' - h \ a8^* = 3lt(6oi)$, est celle d'où l'on tirera le plus aisément une valeur de $a?(n^{\circ}87)$. (351) Théorème V. « Soit l'équation à résoudre $x'' - b - cm(a)$, « dans laquelle $b < u = 1$, u étant diviseur de ; soit $ar = \hat{o}''$ la solution complète de l'équation $xnb > - i = at(a)$; b devant être un des « nombres fl^*, ea'' , $G3'' \dots ^{\sim n}$, je suppose $b = tf - *$: cela posé, « je dis que la solution complète de la proposée sera $x = bm^{**} * \backslash$ » En effet, cette valeur de x donne $x' = b$, quelle que soit m ; il suffit donc de faire voir que b se trouvera toujours parmi les nombres $0''$, etc. Or puisque $6''$ est la solution complète de l'équation $xn^{\circ} * - i = 0lt(rt)$, on aura $\hat{o}m''$ pour celle de l'équation $x^* - i = 3IL(\#)$; et puisque $ba - 1$, il est clair que b doit être un des nombres représentés par $<r \backslash$ Cette méthode pour résoudre l'équation $x'' - b - cm. (\ll)$, n'est sujette à aucune exception; mais il peut être plus ou moins long de chercher b dans la suite $9''$, $\hat{o}^{\wedge}etc$, et pour qu'elle réussisse complètement, il faut que le nombre u ne soit pas bien grand. Si l'équation $\&w = 1$ résultait de l'équation $\&T <f> == - 1$, il ne faudrait chercher/» que dans suite $0''$, $6U$, $\hat{o}5''$, etc. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 26.73% accurate

QUATRIEME PARTIE. 21 Exemple. (35a) Soit l'équation $x^n - 5 = 3it(fioi)$, déjà traitée (345), mais qui n'a pu se décomposer qu'en facteurs du second degré. On aura, en rejetant les multiples de 601 5, $// = -1, = 1$, et ainsi $\ll = 12$. Maintenant la solution complète de l'équation $x^n - 1 = 0$ (601), trouvée par le théorème II, est $x = (-14^\circ)^n$; et par conséquent celle de l'équation $x^n - i = 0$ (60i) est... $x = (-i40)^n$, ou 120° ; donc b doit être compris dans la formule $i2o^*$ en prenant pour p un nombre impair: or on trouve qu'il faut pour cela faire $p = 5$. Donc la solution complète de l'équation proposée sera $x = (-i40)s^{M^n}$ ou $* - ai4-(i69)^n$ - valeurs qui en résultent sont $\pm a14, \pm 106, \pm 116, \pm 229, \pm 237$. r (353) Ayant trouvé un nombre $\hat{O}$ tel que $6^n - b$ est divisible par le nombre premier a , il est facile de trouver une valeur de x quelconque $af - b$ soit divisible par une puissance quelconque a^* de ce nombre premier. Pour cela, soit $6' - 6 = M$, si l'on fait $i'a; = 8 + Afl$, et qu'on détermine A et M' par l'équation $M + n\hat{O} - A = flM'$, il est clair que $x^n - b$ sera divisible par a . Si on fait $a'' = 6 + lia$, $x = b' + A'a'$, et qu'on détermine A' et M'' par l'équation $M' + \ll \&'' - \bullet A^* = a'M''$ la quantité $-b$ sera divisible par a^* . Si on fait $3'' \hat{O}^* = G' - t - A'a^*$, $x = 6'' + A''a4$, et qu'on détermine A'' et M''' par l'équation $M'' - + - /i\hat{O}''' \sim A'' = a^* M'''$, le binôme $x^n - b$ sera divisible par a^* . On continuera ainsi jusqu'à ce que $x' - b$ soit divisible par et si x n'était pas un terme de la suite 2,4,8, 16, etc., on voit aisément quel changement il faudrait apporter à la dernière des équations indéterminées. Ainsi si on avait $\ll = 7$, au lieu de la troisième équation $M'' + *0'' - A' = a^* M \sim$, on prendrait $M'' + A^a M''$, et la valeur $x = 0'' A'' a^*$ rendrait $x^* - b$ divisible par a . Nota. Si l'exposant n était divisible par a , il pourrait arriver

The text on this page is estimated to be only 27.43% accurate

aa THÉORIE DES NOMBRES. que quelque'une des équations qui servent à déterminer $A, A', A'',$ etc., fut impossible; mais alors on aurait acquis la preuve que $x^9 - h$ ne peut être divisible par aa. (354) Maintenant si l'on veut que $x^* - B$ soit divisible par un nombre composé quelconque $A = b^e \cdot c^l$, etc. dont b, c , etc. sont les facteurs premiers, élevés à des puissances quelconques; il faudra, par ce qui précède, déterminer les nombres X, f, v , etc., tels que les quantités $V - B, il^* - B, v - B, a, b, c^l$ soient des entiers. Ensuite on combinera ensemble les équations $x = \sqrt[n]{A} + aaz = iL + A6z' = v + Jz'' = \text{etc.}$ Et on obtiendra de cette manière toutes les valeurs de x moindres que $7A$, qui rendent $x^* - B$ divisible par A , ou qui satisfont en général à l'équation $x^* - B = A$. Si on avait à résoudre l'équation $Cx^* - B = A$, on pourra supposer que C et A n'ont point de commun diviseur; (car s'ils en avaient un, on le ferait disparaître par la division). Soit donc $C|i - A, v = i$, si l'on fait $y = zy, y - vit''$, l'équation à résoudre deviendra $x^* - B|a = Aj$ et ainsi sera ramenée au cas déjà traité. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 26.03% accurate

a4 THÉORIE DES NOMBRES. cédents, sans introduire aucun dénominateur autre que a. Donc tout M coefficient réduit doit être de la forme — , M étant un entier. (356) Mais pour apercevoir encore mieux la loi de ces coefficients et déterminer en même temps l'exposant de la puissance de 2 qui leur sert de dénominateur, prenons l'expression générale du coefficient de z", laquelle est. 1.1.3.5... (an — 3) a. 4>6.8. ... an ... Tous les termes du dénominateur de cette quantité étant pairs , si on multiplie de part et d'autre par a", on aura ... 1 . 1 . 3.5. . . (a n — 3) 2*r*= :t — ; » 11 . a . ô . 4 • • • • ** Multipliant encore les deux membres par a . 4 • 6 . . . (a n — 4) , le produit sera 2'N(a.4.6. . .a/i-4)=:t^ -(a"r3)Il est visible que le second membre se réduit à n+ 1 ./M-a. . . a/i — 3, et le premier à a'— *N(i .a. 3. . . .« — a); donc on a .V n + i.n + *. . .art— 3 2 il = 5 i.a.3 n — a Multipliant successivement les deux membres par n et par 2/7 — a, on aura rt./t-t-i.Jt-f-a. • an — 3 2"-1«N== a'— *(a«— a)N 1 . a . 3. . .n — a nH-i.n-t-a...a« — a 1 . a. . .n — a Or ces deux quantités doivent être des nombres entiers , puisqu'on sait en général , par la formule du binôme, que la quantité <-.c-j- 1 .c-f-a. . ,ç-\-m — 1 1 . a . 3. . . . ru Digitized by Google

QUATRIÈME PARTIE. a_5 est un nombre entier. Donc faisant $a' = n$ $N = E$ et $(a_n - a)^2 \dots, N = E$ on aura $11 - a_i - >$ d'où l'on voit que le coefficient N du ternie Nz' ne peut avoir pour dénominateur que la puissance a'' ou une puissance inférieure de a , lorsque n sera impair. Pour déterminer dans tous les cas ce dénominateur, il faut recourir à la première formule, $i . i . 3 . S . . (/ \gg - 3) a . 4 - 6 . 8 \dots a_n$ et on voit que dans la valeur réduite de N le dénominateur ne sera autre chose que la plus grande puissance de a qui divise le produit $a . 4 - 6 . \bullet . a_n$, ou, ce qui revient au même, le produit $i . 2 . 3 . . . a_n$. Or on a donné ci-dessus (Introd. , n^* XVIII) l'expression générale de cette puissance, laquelle est $aa'' - v$, v étant le nombre des termes $a^* + a_6 - f - a?$ etc. dont la somme forme le nombre a_n .

(357) Pour revenir à la résolution de l'équation $a = oTy$, lorsqu'on fait $a = - 1^8 a$, supposons qu'on développe $db\ 8a$) en série, de la même manière que $\sqrt{\{- + - z\}}$, ce qui donnera $K(. \pm 8.) = . * i\ 3V \pm ^u V - i^a . V \pm e, c$. Un terme quelconque de cette suite peut être représenté par $N . a^* \ll *$, et comme N est une fraction qui a pour dénominateur a élevé à la puissance $a_n - 1$ au plus, il est clair que tous les termes de cette suite se réduiront à des entiers divisibles par des puissances de a de plus en plus élevées. Imaginons maintenant qu'on ne prolonge cette suite que jusqu'aux termes exclusivement qui sont divisibles par a'' , et dans cette hypothèse faisons $e = i \pm i . as \ll - iii . a^{\wedge} - ii^{\wedge} . a' . 1 - i^{\wedge} \wedge^{\wedge} i$ etc. $a . a . 4 a . 4 - 0 a . 4 - o - o$ II. - 4 Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 19.47% accurate

a6 THÉORIE DES NOMBRES. La quantité $6' + a$ ou $9^* - (i$
 $=fc 8 \llcorner)$ ne pourra être composée que de termes divisibles par a'' ; donc en
 faisant $x=6$, on satisfera à l'équation $x' + a = l'y$. Donc la solution générale de
 cette équation est Par exemple, pour résoudre l'équation $x1 + i5 = a''$, on
 fera $\pm a=2$, c'est-à-dire que prenant le signe inférieur on fera $\llcorner=a$, et
 prolongeant la suite jusqu'aux termes divisibles par a exclusivement, on
 aura $6=1 - .a4 - ^ .a1 - 4a,, = I - * \sim a' - 3-a'I$ Ai terme $- 3 . a^*$ se
 réduit, par la même omission, à $- a^*$ ou $a' - a^*=\llcorner'$; donc on a $9 = i - 8 -$
 $3a + a56 = a 1 7$, et en général $x = 5 1 ax' \pm a 1 7$. Digitized by Google

QUATRIÈME PARTIE, § I V. Méthode pour trouver le diviseur quadratique qui renferme le produit de plusieurs diviseurs quadratiques donnés. (358) Problème I. « Étant donnés deux diviseurs quadratiques a , A' , d'une même formule $f + au'$, trouver le diviseur quadratique qui renferme leur produit AA' . » Nous distinguerons deux cas, selon que les diviseurs proposés sont de la forme ordinaire $py^2 + 2qyz + rz^2$ ou de la forme $py^2 - qyz + rz^2$, dont les coefficients sont impairs. Premier cas. Soit $A = pf + zqyz + rz'$ et $A' = py'' + 2.q'fz + r'z''$ nous supposerons que les coefficients p et p' sont premiers entre eux , ou que du moins ils ont été rendus tels par une préparation convenable. Cela posé, si l'on fait $py = x$, $qz = x$, $p'y' + qz' = x$, on aura $A = x^2 + az^2$, $A' = x'^2 + az'^2$ donc $AA' = (xx' \pm azz')$ Mais puisqu'on veut que le produit AA' soit contenu dans un diviseur quadratique de la forme $t + au'$; puisque d'ailleurs ce produit, considéré en général, doit contenir le produit particulier pp , on pourra supposer $AA' = Y^2 - 9YZ - Z^2$ et $pp'ty$ — ce qui donnera $ppAA' = (pp'Y + 9Z)^2 - 4Z^2$. Comparant cette valeur à la précédente, on aura $ppY - 9Z = xx'$ donc $az^2 = xz' = pxz$. Mettant au lieu de a sa valeur $pp'ty - 9$, la première de ces deux

The text on this page is estimated to be only 27.38% accurate

a8 THÉORIE DES NOMBRES, équations donnera $pp'Y = (a' \pm cz)$
 (af — «pz') $\pm / ? / > |zz'$; et en substituant de nouveau à la place de x et x' leurs
 valeurs $py + qz$ et $p'y + q'z$, on aura, après avoir divisé par pp' . Cette
 quantité doit être un nombre entier; indépendamment de toutes valeurs de z
 et de z', il faut donc que et ? ? soient des entiers. Soit en conséquence
 $9 = pn = pq = pn + q'$; (a) on pourra toujours déterminer n et «' par l'équation
 $pn^f \cdot q = p'ri y'$, puisque $/ >$ et $/ >'$ sont premiers entre eux ; on aura ainsi la
 valeur de 9 , laquelle donnera un nombre entier pour 4» = * *• Car ayant
 $y = pn^z q, et q^* + a = pr$, il s'ensuit que $9^* + a$ est divisible par p; ayant de
 même $y = p'ri + q'$ et $q^* + a = p'r$ il s'ensuit que $9' - + \blacksquare a$ est divisible par p';
 donc puisque $/ ?$ et $/ ?'$ sont premiers entre eux, il faudra que $y' + a$ soit
 divisible par pp' . Les nombres n, ri , 9 , 9 étant déterminés comme on vient
 de le dire, si l'on fait $Y = (r \pm \gg x)(y - ri^*) \pm i, zz' 7. = xzzfa/z =$
 $(py + qz)z'^i (p'y^qz')z$, on aura le produit cherché $AA'^j/Y' + afYZ + tZ'$; de
 sorte que ce produit sera contenu dans un nouveau diviseur quadratique de
 la même formule V -+- a u\ (35g) On doit remarquer, à cause de l'ambiguïté
 du signe $\pm$ dans l'équation (a) , que le problème considéré en général a deux
 solutions. Digitized by Google

QUATRIÈME PARTIE. 29 Mais il ne peut en avoir plus de deux. En effet, on peut supposer les nombres p et p' premiers l'un et l'autre; et le diviseur quadratique, quel qu'il soit, qui renferme AA' , sera toujours de la forme $PPY + 9fz - yz''$, où l'on a $\zeta^* - a = pp'ty$. Mais lorsque les nombres p et p' sont premiers, il n'y a que deux valeurs de 9 moindres que pp qui rendent $9'' + a$ divisible par pp . Donc il n'y a au plus que deux diviseurs quadratiques différents qui renferment le produit AA' . Je dis au plus, parce que dans quelques cas particuliers, les deux diviseurs quadratiques réduits à l'expression la plus simple, pourront coïncider en un seul, lequel contiendrait AA' dans deux combinaisons différentes. Cela doit arriver, ainsi qu'on en verra un exemple, lorsque la formule $t' + au$ ne contient qu'un seul diviseur quadratique correspondant aux formes linéaires dans lesquelles pp est compris. (36o) Second cas. Si le nombre a est de forme $8n + 3$, et qu'en conséquence le diviseur quadratique A , qu'on supposera impair, soit de la forme $pf - qyz - rz''$, dans laquelle les coefficients p, q, r sont impairs, et où l'on a $frpr - a =$, on pourra encore faire usage de l'analyse précédente, pour avoir le produit AA' . En effet, comme on a $z = ipy^* + 2qyz + rz''$ $2' = ip'y' + 2q'y'z' + 2r'z'$ il suffira de mettre dans les formules trouvées a et r à la place de p et r . On aura donc, pour déterminer net n' , l'équation $pn - p n' - \{q' \pm q\}$; (b) d'où on déduira les valeurs de 9 et $\langle j \rangle$, savoir $\langle p = zpn = pq, \$ =$ Faisant ensuite $Y = (/ \pm n z) (y - r z) \pm ^{zz} \rangle \gg Z = (zpy + q z) z' q = \{p'y + q'z\}z$, on aura $4AA' = 4^Y - i - 2\zeta YZ + 9Z$. Or on voit que Z étant toujours pair, on peut mettre aZ à la place de Z , et alors si l'on fait de nouveau $Y = (y \pm nz) (y - riz) dzfzz Z = py z T p' / z + -, \{q = f 7O z z'$,

The text on this page is estimated to be only 28.67% accurate

3o THÉORIE DES NOMBRES, le produit cherché sera
 $AA' = \frac{1}{4}Y^2 + \frac{1}{2}YZ + \frac{1}{4}Z^2$ Exemple I. (36 1) Soient proposées les deux,
formules $A = i + \frac{1}{2} + a i z$, $t' = z - y + i f z - \frac{1}{2} 3ox'$ lesquelles représentent
deux diviseurs quadratiques de la formule $t' + 269 u$ Pour avoir le produit A
 A' exprimé par une formule de même nature, j'observe que les coefficients
4 et 9 étant premiers entre eux, on peut, sans aucune préparation, appliquer
à cet exemple les formules du n° 358. Faisant donc $p = i^2$, $q = 5$, $p' = \frac{1}{2}$, $q' = i$,
on aura l'équation $4\langle = 5 = 9\langle' + i \rangle$ laquelle donne deux résultats différents,
selon qu'on prend le signe supérieur ou l'inférieur. i* Avec le signe
supérieur, on aura $\langle = 3$, $\langle' = 4$, $9 = 37$, $+ = i3$, de sorte qu'en faisant $Y = 7 + 3$
 $zy - \frac{1}{2}yz + \frac{1}{2}zz'$ $Z \langle = 14 y z' - 9 y^2 + 4 zz$, le produit cherché sera
 $AA' = \frac{1}{4}6Y^2 + 74YZ + \frac{1}{4}3Z^2$ Avec l'autre signe, on trouve $\langle = i$, $\langle' = a$, $9 = 19$, $+ = 5$;
donc en faisant $Y = yy - zy' - zyz' - Zz z Z = 14/2 + 92/ + 622'$, le
même produit sera de nouveau $AA' = \frac{1}{4}6Y^2 + 38YZ + 5Z^2$ Maintenant, pour
réduire ces produits à l'expression la plus simple, il faut faire, dans le
premier cas, $Z = U - a Y$, et dans le second, Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 26.57% accurate

QUATRIÈME PARTIE. Si $Z = U - 4Y$, ce qui donnera finalement ces deux résultats: $TJ = aj - hGjrz - 3yz + 6zz'$ (,) $Y = r - h3/z - 4jz' + z^2$ ($AA' = i3U' - i - aaUY + 3oY \setminus ' \{] = ^{yy}' + 5yz + 6jz' - 6zz'$ (a) $Y = yf - yz - lyz - 3zz' AA' = 5U' - aUY + 54Y'$. Exemple II. (36a) Soient proposés les diviseurs $\setminus = y^* + yz + 4 \gg * \setminus A' = ' 4 - /z - t - 4i z''$, tous deux appartenants à la formuler $i6'Su'$. Pour avoir leur produit exprimé d'une manière semblable, on suivra les formules du n° 36o, lesquelles donneront les deux résultats que voici : $Y = yy + zy + zz$ (i) $Z = jz' - /z AA' = Y, + YZ + 4iZ'$ (a) $Z = yz' + /z + zz' aa' = Y' + YZ + 4iZ'$ Dans les deux cas, le produit est de même forme que les deux facteurs; et en effet il ne peut être de forme différente, puisque la formule $f + i63w'$ n'est susceptible que d'un ^eul diviseur quadratique. (363) Problème II. « Trouver le produit de deux diviseurs quadra« tiques semblables $A - py^* + zffyz + rz \setminus a' = py' + zqy z + rz'$. » On pourrait, par une transformation, réduire ce problème au précédent; mais il est plus simple de procéder à la résolution directe de la manière suivante : Soit $py + qz = x$, $py' + qz' = x'$, on aura $AA' > = (x' + az')(x'' + az'') = (xx \pm azz'y \setminus - a(xz'zpjfz)$: Digitized by Google

3a THÉORIE DES NOMBRES. Si dans les signes ambigus du second membre on prend le signe inférieur, et qu'on remette les valeurs de x et x_1 ainsi que celle de $\ll$, on aura $xx + azz' = p'yy' + pq(yz' + y'z) + przz'$, et... $xz - x'zz' = p(jz' - yz)$; d'où l'on tire, après avoir divisé par p' , $AA' = (/y + qy' + qy'z + rzz')' - /s'$. C'est la première valeur du produit AA' laquelle est de la forme $y + az$. Pour avoir une seconde valeur de ce produit, supposons $AA' = /V' + 29YZ - + | Z'$, et à l'ordinaire $p' - <p' = a$; nous aurons $AA'/?* = (/;Y - h \zeta Z)' - f - oZ''$; de sorte qu'en comparant cette valeur à la première, on aura $Z = xz' - fxz p'Y + yZ - xx' \pm azz'$, .substituant dans la dernière équation la valeur de a , ainsi que celles de x , x' , et Z , on en tire $v = 0 + *f* *) (y + \pm * sz < . "Donc pour que Y soit entier, indépendamment de toute valeur particulière de z et z' , il faut que $2^L?$ et $2 - 2$ soient des entiers; de là PP on voit que dans les signes ambigus on doit prendre seulement le signe inférieur; c'est pourquoi faisant $+pn >$ on aura $Y = (y - nz)\{y' - nz'\} - tfzz' - l' - p\{y* + y\} + 2qzz'$. Mais il reste à déterminer n de manière que y soit un entier: or on a $y = ^ = ^i!^{^} = ^\pm i^{^} + ^$ Donc siron cherche PP les plus petites valeurs de m et n qui satisfont à l'équation$

QUATRIÈME PARTIE. 33 toutes les conditions seront remplies; on aura $f=q+pn$, $\ll\rangle=m-4-n\%$ et le produit demandé sera dans sa seconde forme, $AA'=?' Y' + a^{\wedge}YZ + ^{\wedge}Z'$. (364) L'équation $r—pm — aqn$, dans laquelle m et n sont des indéterminées, sera toujours résoluble tant que p et a et q seront premiers entre eux; elle le serait encore, si p et aq ayant un commun diviseur 6, r était aussi divisible par 6. Ce cas cependant importe peu à considérer, ou même doit être entièrement écarté, parce qu'alors la formule $py^* \cdot qyz - f - rz^*$ ne pourrait représenter que des nombres divisibles par 6. Enfin il peut arriver que p et q aient un commun diviseur 9, lequel ne soit pas-commun avec r ; alors l'équation $r—pm — nqn$ serait impossible. C'est ce qui aura lieu dans les deux cas ci-après. i* Si a est divisible par 6 et non par 0*, car alors p divise bien $t^* - h a u^*$, mais $/'$ ne peut diviser cette formule qu'en supposant que t et u ne sont pas premiers entre eux. a" Si 6 étant diviseur commun de p et q , les nombres $pet a$ sont divisibles par 6'; car alors l'équation $p r — q' — a$ pourrait avoir lieu, sans que r fût divisible par 8. Dans ce cas, une simple transformation du diviseur $py^* + nqyz + rz^*$ préviendrait la difficulté; ou bien, comme ce diviseur est alors de la forme $p'b^*y' + zq'byz + rz\backslash$ tandis que la formule qu'il divise est $t^* + a' Vu^*$, on peut mettre j à la place de Qy , et u à la place de $0 u$, et on aura $p'y^* \bullet + - zq'yz \blacksquare + - rz^*$ pour diviseur de $f + a'u^*$. Or dans cette dernière forme, il n'y a plus lieu à difficulté. (365) Si le nombre a est de forme $Sn + 3$, et qu'en conséquence les diviseurs quadratiques proposés soient $\&=:py^* + qyz + rz^*$, $tf—py^* + qy z' - + - rz.^*$, on trouvera par une analyse semblable à la précédente, deux formes du produit AA' . La première qui se présente immédiatement est $AA'=Y' + YZ + \}(\ll + r)Z\%$ II. 5 Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 25.87% accurate

34 THÉORIE DES NOMBRES, où l'on aura Pour avoir la seconde forme, il faut chercher les moindres valeurs de $\frac{r}{p}$ et $\frac{q}{n}$ qui satisfont à l'équation $r = pm - qn$. Faisant ensuite les constantes $\zeta = \langle y \mid + \bullet \mid ipn, ty - m \mid + \bullet \mid n' \rangle$, et les indéterminées $V = (y - n z) (y - nz) - i(ZZ \ 7j = p(jrz' + fz) + rjzz')$; on aura $AA'^{\wedge}Y' + fYZ + ^{\wedge}Z^*$. (366) Il est manifeste que le problème général qu'on vient de résoudre comprend, comme cas particulier, celui où il s'agit de trouver le carré d'un diviseur quadratique donné. Mais alors le produit n'est susceptible que d'une seule forme; car ayant $^{\wedge}z - yz = 0$, la première valeur de AA' n'est pas de la forme d'un diviseur quadratique. En général, puisqu'on peut exprimer le produit de deux diviseurs quadratiques donnés, égaux ou inégaux, par une formule de la même espèce, laquelle est aussi un diviseur quadratique, il s'ensuit qu'on pourra toujours trouver un diviseur quadratique égal au produit de plusieurs diviseurs quadratiques donnés. Et si on s'occupe seulement de la forme des produits, sans s'inquiéter de la valeur des indéterminées qui y sont contenues, le problème devient beaucoup plus simple, puisqu'il suffit d'opérer sur les coefficients, lesquels n'offrent qu'un nombre de combinaisons limité. Ayant donc désigné, par exemple, par A, B, C, D , etc., les différents diviseurs quadratiques qui conviennent à une formule donnée $t' + au'$, on cherchera, par les principes précédents, quelles

QUATRIÈME PARTIE. 35 vent être les formes des différents produits deux à deux AA, AR, AC, BB , etc. Si l'on trouve que le produit AB peut être à-la-fois de la forme C et de la forme D , on écrira $AB = j^{\wedge}$, et ainsi des autres. Or on conçoit que les produits deux à deux étant trouvés, on en déduira aisément les produits trois à trois, quatre à quatre, etc.; de sorte qu'on connaîtra en général les diverses formes du produit qui résulte de tant de diviseurs quadratiques qu'on voudra. Dans cette notation, il convient de distinguer BB de B' ; l'expression $B B$ désigne le produit de deux diviseurs quadratiques semblables à B , mais dont les indéterminées sont différentes; l'expression B' désigne le carré du diviseur B , et suppose par conséquent que les deux facteurs B et B sont identiques, tant dans les coefficients que dans les indéterminées; cette circonstance apporte une modification au résultat, car nous venons de voir que B' n'est susceptible que d'une forme, tandis que BB en a toujours deux. Une pareille différence se fera sentir dans les expressions $BBB, B'B, B\backslash$ et autres semblables: il est donc nécessaire de chercher à quelle forme doit répondre une puissance quelconque d'un diviseur quadratique donné. C'est l'objet du problème suivant. (367) Problème III. « Étant donné un diviseur quadratique A de « la formule $f + au^*$ » trouver le diviseur quadratique de la même « formule, par lequel la puissance A^n puisse être exprimée. » Premier cas. Soit le diviseur donné $A = /?j^* -+- zqy^* + rz^*$, et supposons, pour éviter toute difficulté, que ce diviseur a été préparé de manière que le coefficient p est un nombre premier non diviseur de a . On peut d'abord démontrer qu'il n'existe qu'un seul diviseur quadratique dans lequel A^n puisse être contenu. En effet, quel que soit le diviseur quadratique qui contient A^n , il devra contenir $p\backslash$ Or on a déjà prouvé (n° 34) que p étant un nombre premier, la puissance p' ne peut appartenir qu'à un seul diviseur quadratique. Donc il n'y a aussi qu'un seul diviseur quadratique qui puisse contenir A^n . Cela posé, puisqu'on a $pr = q' 4 - a$, si l'on fait en général.. 5.

The text on this page is estimated to be only 26.16% accurate

36 THÉORIE DES NOMBRES. $(q + \sqrt{Z}a)' = F + G \sqrt{V - a}$, $(q - \sqrt{V - a})'' = F - G \sqrt{Z}^a$, on aura $Y + a)''$ ou $prr' = F' - 4G'$. Or je dis que G et p sont premiers entre eux, car si G était divisible par p , F le serait aussi d'après la dernière équation. Mais on a $F n.n - i n.n - i.n - a . n - 3 . , = Y - f > a + r^3 - i . tf' \ll - etc.$, et si on néglige les multiples de p , on aura $, , ./ n.n - i n.n - t.n - a.n - 3 \setminus . _ , , = - ? . | et F = 9 - (i + - rr - + + etc.) = sa - Y$ Donc[^], et par conséquent, serait divisible par p , ce qui est contre la supposition. Puis donc que G et p sont premiers entre eux, on pourra faire $F = \langle j \rangle G + ?'' H$, $\zeta et H$ étant des indéterminées, et en substituant cette valeur dans l'équation $p''r'' = F' + \langle G \rangle$, on en conclura que $?' + a$ est divisible par p'' , et qu'ainsi on peut faire $\langle p^* - + - a - p' ty$. Ayant déterminé de cette manière les quantités ζ et 4 , on aura le diviseur quadratique $p'' \setminus + 29 YZ - 4 - \langle | \rangle Z^*$, lequel appartient à la formule $V + a u \setminus$ puisqu'on a $p' ty -$ Ce diviseur est celui qui contient généralement la puissance A'' , puisqu'il contient le nombre $/ ; ''$; mais il faut voir comment on déterminera Y et Z en fonctions de y et $*$. Soit donc $A = / ? * Y' - i - a \langle p YZ + | Z^*$, ou $V_{pm} = (j > ' X + \zeta Z)^* + \langle Z^*$: on a d'ailleurs à $p \sim (py - \setminus - qz)' + az''y$ donc si l'on fait $py - \setminus qz - x$, $p'' Y - \setminus - f Z = X$, on aura $X' + a Z' = (x1 + a$ Or on satisfait généralement à cette équation, en prenant $X + Z | / - a = (x4 z \setminus - \langle) \blacksquare$, d'où l'on tire $X . n.n - i , , , n.n - i.n - a.n^3 . . , = c'' jtT - ' az' - i . . x' \sim ia' zi - etc. i.a . i . 2.3.4$ i.a.3 i. a. 3. 4-5 I* valeur de Z est déjà exprimée par une fonction entière de x et

QUATRIÈME PARTIE. 37 de z , ou par une $de^{\wedge}$ et de $*$; quant à Y , on a $Y = \wedge$ — or $X' = 9Z, = X1 - \rangle - rtZ^* \sim /7' < j \rangle Z' = /; (A'' = 9Z1)$, donc il faut que.. X' : — $9 \rangle Z'$ soit divisible par $/7''$. Mais on voit par l'équation fty — $y^* = a$ que 9 ne peut être divisible par p , puisqu'alors a serait divisible aussi par p , contre la supposition. On ne peut supposer non plus que Z soit divisible indéfiniment par p , car alors X serait aussi divisible par $/7$, ainsi que $x' + ax'$; donc en omettant les multiples de $/7$, on aurait $az^* = \wedge x^*$, valeur qui étant substituée dans celle de X , donne $X. / n.n = i n.n = i.n = a./i = 3 \setminus ., + + etc.) = a - \wedge$; donc il faudrait que $/;$ divisât x , et par suite z , ce qui ne peut avoir lieu, puisque $\wedge$ et z sont des indéterminées à volonté. Puisque la quantité $X^* = \wedge Z^*$ est divisible par jf , et que ses deux facteurs $X - f - 9Z, X = \wp Z$, ne peuvent avoir p pour commun diviseur, il s'ensuit que l'un de ces facteurs est divisible par $/A$. Et comme le signe de $\wp$ est arbitraire, on pourra supposer que $X = 9Z$ représente celui des deux facteurs qui est divisible par pr . Donc la valeur de Y développée en fonction de x et z , sera un nombre entier, quels que soient y et z . Donc le diviseur quadratique $/7'' Y' \blacksquare + \blacksquare 29YZ + 9Z'$ ainsi déterminé, sera égal à la puissance n du diviseur proposé $py^* + zqyz + rz \setminus (368)$ Second cas. Soit la formule donnée $\setminus = py^* - \setminus qyz + rz^*$, où l'on suppose $/;$, q , r impairs et $[\setminus pr = q' = a$. On préparera encore, s'il est nécessaire, cette formule de manière que le coefficient p soit un nombre premier, et on démontrerait d'ailleurs, comme ci-dessus, qu'il n'y a qu'un seul diviseur quadratique qui puisse contenir la puissance demandée A'' . Représentons ce diviseur par la formule $p'Y' + < fYZ + 9Z'$, il faudra qu'on ait $bp'' 9 = 9' + a$. Or comme on a déjà $4pr = q' - h a$, si l'on fait $(i.ry + \setminus; i / \setminus a) = iF + i - G / \setminus \setminus$ «, les nombres F et G seront toujours entiers ($n9 57$), parce que a étant de la forme Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 24.49% accurate

38 THÉORIE DES NOMBRES. 8/i-»- 3, —a est de la forme 4« +
 « : on aura même temps (t</ — -M— «)"=tF- 7Gl/- a, et par conséquent (^-
 j^f ou p*r" = j(F* -h «G'). Or on prouverait, comme ci-dessus, que F et G
 sont premiers entre eux , ou qu'ils ont seulement a pour commun diviseur;
 donc on pourra faire $F = 9 G - 4 - 2/?" H$, c'est-à-dire qu'on pourra toujours
 déterminer le nombre impair 9 <Cp' tel que F soit un entier. Cette valeur de
 F étant substituée dans l'équation $\wedge p"r'=F' -h aG\backslash$ on en conclura que?-^-
 doit être un entier; et comme 9' -4- a est de la forme $S_n -+-4\gg$ on aura en
 même ©' -4- a 1 temps égal à un entier. Soit donc $9'+ a = 4/?" 9$, et il est
 clair que par le moyen de 9 et 9 , on aura entièrement déterminé le diviseur
 quadratique qui contient p\ lequel sera /?'Y'-t- 9 YZ + yZ'. Maintenant , je
 dis que ce diviseur contient en général A*, en sorte qu'on peut supposer
 $\wedge"Y' -+-9 YZ -f \wedge Z' = \backslash' = (py + -i- rz')m$; c'est ce qui sera évident , si de cette
 équation on peut tirer des valeurs entières de Y et Z , quelles que soient les
 indéterminées y et z de la formule proposée. Or de l'équation précédente on
 tire $4 Y + v Z) \gg + \ll Z' = 4 -1- a-f)"$ • Soit pour un moment $2/?"Y + \wp Z = X$,
 $2^{\wedge j} + \wedge z = \wedge$, on aura l'équation $X* -4- a Z' = 4 (j-r* 4- jus')$ à laquelle on
 satisfait généralement en prenant et on sait que les nombres X et Z tirés de
 celle-ci seront toujours entiers; il reste donc à démontrer que Y est aussi un
 entier. Or on a $a/?*Y = X - 9Z$ et $X'+rtZ' = 4 A"/>'$; substituant dans In
 seconde, au lieu de «, sa valeur $f\wp" 9 - 9'$, on aura $X' - 9, Z'=4/>"(A', \sim +$
 On prouvera d'ailleurs, comme ci-dessus, que les facteurs $X - 9Z$, $X 4- 9Z$
 n'ont point de commun diviseur autre que a ; donc puisque Digitized by
 Google

The text on this page is estimated to be only 29.18% accurate

QUATRIÈME PARTIE. 3g $X' \sim \ll p'Z^* \gg$ est divisible par pm , il faut que l'un des facteurs $X - 9Z$, $X - H 9Z$, soit divisible par $//$; et comme on peut prendre à volonté le signe de 9, on pourra représenter par $X - 9Z$ celui des deux facteurs qui est divisible par p'' ; il le sera eu même temps par parce que 9 est impair; donc la quantité $Y = 1^*$ sera toujours un nombre entier, ou plutôt sera une fonction entière des indéterminées y et z . Donc la formule $//Y' + 9YZ - 9Z'$ représentera en général la puissance $/t$ de la formule proposée $py^* + -qyz + rz'$. Remarque. Si l'on veut simplement savoir à quelle forme des diviseurs quadratiques appartient la puissance n d'un diviseur quadratique donné A , l'opération se réduit à déterminer les coefficients 9 et $|$, comme on l'a expliqué dans les deux cas; ensuite on ramènera à l'expression la plus simple la formule $p'y^* - + - a^{yz} + 9 s^*$, ou la formule $p'y^3 + <\zeta y z 9 s>$ -(si a est de la forme $8n + 3$), qui contient la puissance désignée. Il est facile maintenant d'évaluer dans les produits des quantités A^I^C , etc. (n° 366) les termes qui contiennent des puissances de ces quantités. Exemple I. (369) Soit la formule $f_1 - f - 4$ dont les cinq diviseurs quadratiques sont : $A = j'xyz + 4as^*$ $D = 3y' + zyz + 1/$, $e B = :&yt + iyz + aïs^*$ $E = 6y + zyt + yz \setminus$ $C = 5y^* + 6yz + 10z'$ Si on multiplie entre eux deux diviseurs, tels que C et D (en distinguant par des accents les indéterminées de l'un des deux), on trouvera (n° 358) que le produit CD , réduit à l'expression la plus simple, est à-ia-fois de la forme D et de la forme E . On trouvera semblablement les autres résultats suivants qui renferment les formes des produits de deux diviseurs semblables ou dissemblables, dans toutes les combinaisons possibles : on y a joint les carrés de ces

The text on this page is estimated to be only 28.85% accurate

4o THÉORIE DES NOMBRES. mêmes diviseurs trouvés par les formules du n° 363, ou par celles du n° 367 : $A^* = A AA = A BB = A CC = B DD$ — je $B' = A AB = B BC = C C'' = B AC = C BD = E CD = D E D \ll = C AD = D BE = D D E E' = C AE = E CE = EE = j A G$ De là on déduira la forme du produit de tant de diviseurs qu'on voudra, où l'on pourra faire entrer des puissances supérieures à la seconde, en cherchant leur valeur par les formules du n° 367. Par exemple, les produits de trois diviseurs semblables seront : $AD (\circ A AA = A A = A DDD = CD = D BBB = AB = B ccc = ; = AC BC c; EEE = E \ll J \gg) CE (E$ d'où l'on voit que le produit BBB se réduit à la seule forme B ; que le produit CGC se réduit de deux manières différentes à la forme C ; que le produit DDD se réduit de deux manières à la forme D , et d'une manière à la forme E , etc. Dans le cas où les trois facteurs seraient égaux, les produits se réduiraient à une seule forme, et on aurait (n° 367) $A^* = A, B^3 = B, C = C, D' = E, EJ = D$. Exemple II. (370) Considérons encore la formule $t' + 89 m'$ qui a sept diviseurs quadratiques, savoir : $C = 97' + z f z - h i o z' D = i 8 y + 2 y z + 5 z' E = y y' + 6 y z + i 4 z' F = 3 j^* + a j z + 3 o^{**} G = 6 /' + 2 j r z + i 5 z \backslash$ Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 29.24% accurate

QUATRIÈME PARTIE. fa Les combinaisons de ces diviseurs multipliés deux à deux , donnent les résultats suivants , auxquels on a joint les carrés de ces mêmes diviseurs : $A' = A A A = A B B = A B' = A A B = B B C = D C' = D A C = C B D$ — $C D' = D A D = D B E = E E^* = B A E = E B F z z G F^* = C A F = F B G = F G' = C A G = G C D$: $C E$: $C F$: $C G$: $D D = D E = D F = D G = A D F G E G E F e e = ! b e H' d C E G = F F = F G = G G = ! D A C B D A t$: De là on déduira aisément les formes des produits de tant de diviseurs qu'on voudra, ayant soin de prendre pour les puissances supérieures à la seconde les formes déterminées n° 367. Par exemple, si on veut avoir toutes les formes des produits $A' B$, $B^* C$, CD , etc. on trouvera $A'A = A B 1 A$ — $A C'A = D D'A$ — $D E^* A$ — $B F^* A = C G'A = C A 1 B = B B'B = B C'B = C D'B = C E^* B = A F^* B = D G'B - D A T. = C A'D = D B'C = C B'D =, D C'C = (B (C D - C = | B E'C = D p. — (A ^ \sim (D G'C = |^* A'E = E B 1 E = E C'D = f f d > d = | d E^* D = C G.D = | J A'F = F B' F = F E' E = E A^* G = G B'G = G C E — IS d > e = ! g E'F = G f e H g g' H g C'F = IS E'G = F F^* F = j E G \ll F = j E C'G = \ f d^* g = | e f H g G'G = j^*$ Au moyen de ces* développements t on peut voir tout d'un coup quelles sont les combinaisons qui peuvent produire une forme déterminée. Ainsi on voit que A résulte également des sept combinaisons $A^* A$, $B' A$, $C' A$, $D' D$, $E^* B$, $F^* C$, $G' C$; de sorte que si on h. ; 6 Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 20.28% accurate

4a THÉORIE DES NOMBRES. avait à résoudre l'équation $V + Syu' = r' \cdot v$, cette équation aurait sept solutions. De même ayant trouvé $A5 = A$, $BJ = B$, $CJ = C$, $DJ = A$, $EJ = E$, $P = K$, ($V = E$, on en conclura que l'équation $y^{89} \ll' = x^3$ a deux solutions, que l'équation $7J^* + 6j^* + i4z^* = xJ$ en a trois, que l'équation $1 S f + xy z - + - 5 z' = a : *$ n'en a aucune, et ainsi des autres. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 29.10% accurate

QUATRIÈME PARTIE. 43 ■ — § V. Résolution et nombres entiers de l'équation $Ly^* - Myz - Nz' = bl$, n étant le produit de plusieurs indéterminées ou de leurs puissances. (ày\) Soit $LN - jM' = a$, si M est pair, ou $4I'N - M' = a$, si M est impair ; il est aisé de voir que le premier membre de l'équation proposée sera un diviseur quadratique de la formule $V \blacksquare + au$ et cette équation elle-même étant multipliée par L ou $4L$, deviendra de la forme $f + \ll Ji' = cn$, c étant Lb ou ^Lb . De là il suit que tout facteur de n doit diviser la formule $V + au$ et par conséquent pourra être représenté par un diviseur quadratique de cette formule. C'est de ce principe, et de la théorie exposée dans le § précédent, que nous déduirons la solution générale de l'équation dont il s'agit; mais d'abord il convient de débarrasser le second membre du facteur constant c . Si dans l'équation $P - f - au' = cH$, on suppose t et u premiers entre eux, il faudra que u et c le soient aussi, et alors on pourra iaire $= \ll h + cj$, ce qui donnera, après avoir substitué et divisé par c , $''' + afltt't + cx' = n \cdot *$. 4 Or u et c sont premiers entre eux, donc il faut que $n' + a$ soit divisible par c , et en faisant $n' + a = mc$, on aura $m n' - i - u$ nu $x + c\hat{a} = Tl >$ équation dont le second membre est dégagé du facteur constant c , et dont le premier est encore un diviseur quadratique de la formule $t' a u\%$, puisqu'on a $m c - n' = a$. On aura donc autant de ces équations à résoudre., qu'il y aura 6. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 23.44% accurate

44 THÉORIE DES NOMBRES. de valeurs de n , moindres que $\sqrt{c}$, telles que « $4 - a$ soit divisible par c . Soit $\sqrt{V^2 - 2gyz - hz} = n$ l'équation ou l'une des équations qui restent à résoudre. Le premier membre étant un diviseur quadratique de la formule $V^2 - 4a^2$, il faudra d'abord chercher tous les diviseurs quadratiques de cette formule, que l'on désignera par les lettres A, B, C, D , etc. Ensuite comme Π est supposé le produit de plusieurs indéterminées, on cherchera, par les méthodes précédentes, toutes les formes auxquelles se réduit le produit Π , en supposant que les indéterminées sont représentées par les lettres A, B, C, D , etc., suivant toutes les combinaisons possibles, et en observant que différentes indéterminées peuvent être désignées par la même lettre. Cela posé, parmi toutes ces formes on distinguera celles qui donnent pour résultat la lettre correspondante au diviseur quadratique du premier membre $V^2 - 4a^2$; et il est clair qu'autant on trouvera de ces formes, autant il y aura de solutions de l'équation $\sqrt{y^2 + 4gyz - hzx} = n$. Il faudra ensuite, pour obtenir réellement les solutions, faire le développement successif des produits suivant les règles que nous avons données dans le § précédent, et alors les indéterminées y et z s'exprimeront finalement en fonctions des indéterminées analogues qui entrent dans les différents facteurs du produit Π . Tout cela s'éclaircira suffisamment par des exemples. Exemple I. (372) Soit proposée l'équation $\sqrt{V^2 - 4a^2} = 1$; je développe d'abord tous les diviseurs quadratiques de $V^2 - 4a^2$, lesquels, comme on l'a déjà vu (n°369), sont $A = y^2 - a^2$, $B = y^2 - 4a^2$, $C = 3y^2 - 4a^2$, $D = y^2 - 2a^2$, $E = y^2 - 4a^2$, $F = y^2 - 2a^2$, $G = y^2 - 4a^2$, $H = y^2 - 2a^2$, $I = y^2 - 4a^2$, $J = y^2 - 2a^2$, $K = y^2 - 4a^2$, $L = y^2 - 2a^2$, $M = y^2 - 4a^2$, $N = y^2 - 2a^2$, $O = y^2 - 4a^2$, $P = y^2 - 2a^2$, $Q = y^2 - 4a^2$, $R = y^2 - 2a^2$, $S = y^2 - 4a^2$, $T = y^2 - 2a^2$, $U = y^2 - 4a^2$, $V = y^2 - 2a^2$, $W = y^2 - 4a^2$, $X = y^2 - 2a^2$, $Y = y^2 - 4a^2$, $Z = y^2 - 2a^2$. Parmi ces diviseurs, il n'y a que A, B, C qui comprennent les nombres $4, 1$, et dans lesquels on pourra trouver $11, 3$. Or si le divi

The text on this page is estimated to be only 17.96% accurate

QUATRIÈME PARTIE. 45

seur A contenait i faudrait que 1 13 fût de là formule $r + 4i u \setminus$ ce qui n'a pas lieu, comme on le voit au premier coup'd'œill, pareillement si le diviseur B contenait n^3 , il faudrait que $a \times 1 1 3$ ou 29.6 fût de la forme $f 4 i \llcorner$; c'est encore ce qui n'a pas lieu. Comme cependant on peut voir, par le caractère $(^j)=i$, que 1 13 est diviseur de $f' + 4' m^*$, il s'ensuit que 1 1 3 est nécessairement compris dans le diviseur quadratique C; et en effet on a $5. i i^3 = 5G5 = i4, +4 < -3'$. Puisque $i4^* - * -4 < .3J$ est divisible par 1 13, si l'on fait $i4 = 3 \llcorner$ — $j i^3/w$, il faudra que $n' - f - 4'$ soit divisible par 1 13. Or la valeur de i tirée de cette équation est $r_{ti} = \text{---} 33$. On connaît donc ainsi y d'fthe mal nière directe et presque sans tâtonnement, la valeur de $n >$ qui rend $n^* - + - 4 \llcorner$ divisible par 1 1 3. Cette méthode, que nous venons d'exposer avec quelque détail, est un développement de celle du n° 188. Cela posé, soit $f = 33 \llcorner$ — $i i^3 f$, on aura, après avoir substitué et divisé par 1 i3, $\cdot \bullet W \setminus !, \cdot \text{vo} \hat{\llcorner} - f 66 wfv \blacksquare + - i.r3/ \text{tf} = \pm : jr \setminus$ Pour réduire le premier membre à une expression plus simple, soit $u = u' \text{---} 3t$, on aura $\cdot 5 < Y + G \text{tfu} - + - iouu =, x \setminus$. Le premier membre étant de la forme $G r$ il faut chercher parmi les valeurs de $A', B'r$ etc. celles qui peuvent être de la forme C; or on trouve ($n^* 3GoJ$ que D' et E' sont de cette forme; < kmc l'équation proposée est susceptible de deux solutions, selon que l'on supposera $x = D$ ou $x = E$. i ,i.>U; Soit $i^\circ x = z^3 y + ajz + i4z' > ol >$ trouvera par les formules du $n^* 3G7, x \gg = 5Y, ' + 6YZ - fio7/$, les valeurs de Y et Z étant. . . $Y = \text{---} y + f \setminus yz + Gz'$, $Z = /' - f - ajjs \text{---} 4^* \%$ de sorte qu'on aura en même temps $t' = Y, \gg' = Z$. Soit $a^\circ x \sim Gf + \%yz + jz \setminus$ le résultat de cette seconde valeur pourra se déduire facilement du précédent (en mettant $-xy$ à la place de y, et divisant par 2 tant la valeur de x que celles de Y et Z); on aura ainsi $x' = 5Y' + G YZ + ioZ'$, $Y = \text{---} ny + Qyz + 3z'$, $Z = 271 + 2 yz \text{---} 2 \gg^* \blacksquare$, et on fera de nouveau $Y = Y, \llcorner' = Z$.

The text on this page is estimated to be only 20.69% accurate

4<i THEORIE DES NOMBRES. Il reste à substituer les valeurs de t' et u' dans celles de t et u; ce qui donnera les deux solutions suivantes de l'équation proposée. $Tz = \zeta yx + iYz + 7Z \setminus t = 38y + i * njrz - a4 * \ll = 8y - ioyz - i iz'$. Exemple II. (■iy3) Proposons-nous maintenant l'équation $t^* 4 - 4 * \ll = 1 i3x \setminus$ L'opération préliminaire pour diviser chaque membre par n^3 , étant faite comme dans l'exemple précédent, on aura $i = 33 \ll + i4 * > u \sim u - 3 f \setminus$ et la transformée sera $r)t't' + i \setminus t'u + iouii = x \setminus . \blacksquare' . \blacksquare \blacksquare \blacksquare < . \dots \blacksquare \blacksquare$ Il faudra donc chercher les différentes formes des quantités $A \setminus B', CJ$, etc., et voir si la forme Cy est comprise. Or on trouve (n° 369) que la forme C ne peut résulter que de CJ ; ainsi l'équation proposée n'est susceptible que d'une solution. Maintenant si on fait $x = C = r)y - h 6yz + ioz'$, on trouvera, d'après les formules du n° 367, $9 = \pm 47 \gg + == 18$ et $.r' \propto ia5Y, dr94YZ' + 18Z'$. Quant aux valeurs de Y et Z , elles doivent être déduites des équations $ia5Y \pm 47Z = :aJ - ia'3xz'$, $Z = 3 x' z - 4 1 ^\circ i * *$ on a $x - X \blacksquare + \blacksquare 3 z$; or pour que Y soit une fonction entière, on trouve qu'il faut dans les signes ambigus prendre; l'inférieur, et alors on a $\blacksquare * Y + ioy z + 3oj2' - 8 z1 Z = ;5 y z + 9072 * - 1 4 \sim x, = ia5Y1 \sim 94YZ + i8Z \setminus$ valeur de x' se réduit à l'expression la plus simple $5f'f + 6t'u + iou'u$ en faisant $Z = 3Y - u'$, puis $Y = ^{-4} - a//$, de sorte qu'on aura $a' = 3Y - Z - 3y + \setminus 5yz - ioz1, f' = aZ - 5Y = - 5y + Sojrz' - + - iarJ$. Donc enfin la solution de

The text on this page is estimated to be only 23.72% accurate

QUATRIÈME PARTIÈ. 4; l'équation proposée est comprise dans les formules $jc = 5j' - + - 6 j z + ioz' t = . zgy3 - + - 49.5 f z -4- 4ao^r' — 1 6a$
 $z^* u — \%y>+ i5j»z — yoyz' — 46z\$ Exemple III. (874) Si on propose en général l'équation $t' \blacksquare + - 2\ll' = ii3aj''$, la manière la plus simple de la résoudre, est de faire $x=y + az'$, $ii3=a/ + a.4'$; et on aura $t^0 + aw^*=(9^* \bullet + - a. 4') (.7^* + a^*)'' ^$ on satisfait généralement à cette équation , en prenant ? -H
 $\ll V/ — a = (9 \pm 4 l/ — a) (J + ' V — a)''$. Soit donc $\{y + z\sqrt{— a}\}r = Y -t- Zl/ — a$, on aura $f + 1 < |/\sim a = (9 \pm 4l/- a)(Y + Zl/ — a)$, partant $^9Y=f8Z$
 $\ll=9Z \pm 4Y$. C'est la seule solution dont l'équation proposée est susceptible , parce que $a^?$, comme diviseur de $f + au'$, ne peut avoir que la seule forme $y^* + a^{**}$. Exemple IV. (3J5) L'équation $f + 8\zeta)u'=x^*y$ doit avoir deux solutions, ainsi que nous l'avons déjà remarqué à la fin du n° 370. L'une des solutions où l'on aura $x=y'\sim t- 892'$, se trouve immédiatement par l'équation $t' - + - 89//'$
 $— \{y^* + 89^*\}J$, à laquelle on satisfait en faisant $t 4- u\sqrt{— 89} = (j-4- z\sqrt{— 89})J$;et ainsi on aura $t = yi — 367^{\wedge} z \gg$, $u — Zy^*z — 89 z1$. La seconde solution, fondée sur ce que $D'=A$, se trouvera comme il suit. Ayant fait $j- =D=5j^* - + - uyz -t- 18 z'$; si l'on applique à ce cas particulier les formules du n° 367, on aura $p= 5$, $7=1$, $r= 18$,

The text on this page is estimated to be only 18.69% accurate

§8 THÉORIE DES NOMBRES. $? = 6$, $ty = i$, ce qui donnera $or =$
 $i25Y, -1- laYZ + Z'' Y = y - 3y''z - 137.2^* - + \blacksquare a^* Z = -f- 3oyz^* - 86 x \backslash$
 Or on peut mettre la valeur dessous la forme $x' = (Z + 6Y)' - \gg - 89V'$, laquelle
 étant comparée à l'équation proposée, donnera $f = Z + 6 Y, u - Y$; donc
 enfin la seconde solution de cette équation sera donnée par les formules $x =$
 $5y^* -4- 2yz + i8z' t = 6y + 57/2 - 42/2^* - . 74^* 5 a = f - 3/2 - I2j^* +$
 221 . Exemple V. (376) On a déjà remarqué (n° 370) que l'équation $f + 89//$
 $= x \backslash v$ doit avoir sept solutions, attendu que la forme A résulte des sept
 combinaisons A'A, B'A.C'D, D'D,E'B, F'C, G'C. Pour développer une de ces
 solutions, prenons la combinaison $C^* D$, et faisons en conséquence $.r = 9/+$
 $272 + 102'$, $x = 5/1 - + - 2/2' + 182''$, on trouvera d'abord par les formules du
 $n^* 363$, on par celles du $u^* 367$, $'^{\wedge} = 5T + 2TV + , 8VT = j^* - 8/2 + 2Z' \backslash = -$
 $j.y + iyz - 22^*$. Si ensuite on multiplie la valeur de x' par celle de x' on
 trouvera par la première des deux formules du $n^* 363$, $^{\wedge} = (5Ty + TV + V/+$
 $i8VzO' -4- 89(T2' - V/)\backslash$ Comparant ce résultat avec l'équation proposée $f^* +$
 $89 u' = x'x'$, on aura $t = 5Ty + Tz' + V/+ 18V2' M = TV\_V/;$

QUATRIÈME PARTIE. 49 d'où l'on voit que les quatre indéterminées t, u, x, x sont exprimées en fonctions de quatre autres indéterminées indépendantes $y > z > y > *' >$ ce n°i constituera la première solution. On trouvera par des calculs semblables les six autres solutions dont l'équation proposée est susceptible. Remarque. Pour peu qu'on y fasse attention, on verra que cette théorie s'étendrait facilement au cas où le premier membre de l'équation proposée serait un diviseur de la forme $/' < —««'$. On pourrait aussi résoudre, par les mêmes principes, les cas où les indéterminées du premier membre seraient supposées avoir un diviseur commun; mais nous n'avons pas cru devoir entrer dans tous ces détails, qui n'offrent maintenant aucune difficulté. II. 7

The text on this page is estimated to be only 28.00% accurate

50 THÉORIE DES NOMBRES. § V T. Démonstration d'une propriété relative aux diviseurs quadratiques de la formule $t^2 + au$, a étant un nombre premier $8n + 1$. (1770) On a déjà remarqué, $n^2 + 1$, que si dans la formule $V = x^2 + ay^2$, a est un nombre de forme $8n + 5$, deux diviseurs conjugués de cette formule, tels que $py^2 + 2qyz + amz^2$, appartiendront toujours l'un à la forme $4n + 1$, l'autre à la forme $4n + 3$; de sorte qu'alors il y a autant de diviseurs quadratiques $4n + 1$ que de diviseurs $4n + 3$, et ce résultat a lieu quel que soit le nombre a , pourvu qu'il ne sorte pas de la forme $8n + 5$. Au contraire, lorsque a est de la forme $8n + 1$, les deux diviseurs conjugués dont il s'agit sont tous deux de la forme $4n + 1$, ou tous deux de la forme $4n + 3$, de sorte qu'on ne peut plus rien conclure sur le nombre relatif des uns et des autres; et en effet l'inspection de la Table IV fait voir qu'il y a à cet égard une grande irrégularité. Mais lorsque a est un nombre premier, on remarque dans cette même Table que le nombre des diviseurs quadratiques $4n + 1$ surpasse constamment d'une unité le nombre des diviseurs $4n + 3$. Ainsi on voit que la formule $t^2 - 4u$ a trois diviseurs quadratiques $4n + 1$, et seulement deux $4n + 3$; que la formule $f^2 - 8gm$ a quatre diviseurs quadratiques $4n + 1$, et seulement trois $4n + 3$, etc. On s'assurera aisément de cette propriété dans beaucoup d'autres cas particuliers; mais il n'est pas aussi facile de l'établir d'une manière générale et rigoureuse. Voici la série de propositions que cette démonstration semble exiger: elles offriront en même temps divers résultats remarquables qui contribueront à étendre et perfectionner les théories précédentes. (378) Proposition 1. Soit a un nombre premier $4n + 1$, et soit Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 22.23% accurate

QUATRIÈME PARTIE. Si « $py^* + qyz + amz'$ l'un des diviseurs quadratiques 4' » -4- i de « la formule V -#- au' jedis que l'équation $W - py^* - 4 - a^z^a/w^*$ » sera toujours résoluble. » Car si Ton multiplie cette équation par p, et qu'on fasse $py + qz^x$, on aura $p\backslash]' = x^* + az^*y$ équation toujours possible (Voyez n° vj et 198). Il est inutile d'observer que si $py^* + a qyz + am2^*$ était un diviseur t\ n -t-3, l'équation $\backslash\}'c = zpy^* + nqyz + amz^*$ serait impossible, puisqu'aucun carré ne peut être de la forme 4 » -H 3. (379)

Proposition II. « « étant un nombre premier $8n - f - 1$, la « formule ? + au aura toujours un diviseur quadratique de la forme Car on peut toujours (nw 149) satisfaire à l'équation $rt = a/* -$ laquelle étant posée, il s'ensuit que $/y1 + *gyz -4- a/V$, ou l'expression la plus simple de cette formule, est uo diviseur quadratique de la formule $f + au\backslash$ Remarquez que le diviseur $/y^* -4- igyz + o.fz\%$ ne diffère pas de son conjugué; dans ce cas, par conséquent, les deux diviseurs conjugués se réduisent à un seul qu'on peut appeler diviseur singulier. (380)

Proposition III. a a étant un nombre premier $8/1 4 - 1$, il « y a toujours une infinité de valeurs de / et de g qui satisfont à a l'équation $nf - g > a$, néanmoins il n'en peut résulter qu'un a seul diviseur quadratique de la formule $t + au\backslash$ » Car on trouvera aisément ($n^* 38$) que la série des valeurs de y et g qui satisfont à l'équation $a/* - g^*s = af$ est telle que si $/^*$ et g' suivent immédiatement fet g, on a $/ = 3/+a\#$, $g = *g + W$ De ces nouvelles valeurs résulte le diviseur quadratique singulier $(3/+ *g)y + a (3fr + 4Ar^* + a (3/+ zg)^*>$. Or si dans ce diviseur on fait $y = tiz' - y\backslash z = zy - z$ (ce qui ne restreint pas la généralité des variables et «), on aura pour traiw7

Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 29.92% accurate

5a THÉORIE DES NOMBRES. formée// * agy-V-f-a/V'; d'où l'on voit qu'en effet le diviseur quadratique $y^2 + 2g'yz + of s'$ n'est pas différent de $y^2 + ag^2 - ofz'$. Corollaire. De là il suit que a étant un nombre premier $8\alpha - 4 - 1$, les diviseurs quadratiques de la formule $\xi^2 + \dots$ seront composés de plusieurs couples de diviseurs conjugués et d'un diviseur singulier. Le nombre total de ces diviseurs sera donc toujours impair, et ainsi il est impossible que le nombre des diviseurs 1 soit égal au nombre des diviseurs $4 + 3$. (38i) Proposition IV. « Le carré d'un diviseur quadratique $\ll py^2 + 2qyz - i - 2Tcz \gg$ et celui de son conjugué $\ll py'^2 - 2qyz + \dots \gg$ sont compris dans un même diviseur quadratique $p'y'^2 - 2qyz + \dots$. » Car suivant la méthode du n° 363, si l'on détermine p. et v par l'équation $\dots^2 = v$, qu'ensuite on fasse $f = 7 + v/2$, $\dots = v' - 3|x$, $Y = y - 2vz - a|s'$, $Z = nz + [py + qz]$, on aura $(\dots^2 + 2qyz + 3\alpha^2) = Y'^2 + 2YZ + \dots$ Dans cette équation, qui doit être identique, mettons zyk la place de j , et comme alors Y devient pair ainsi que Z, faisons $Y = aY'$, $Z = aZ'$, ce qui donnera $Y'^2 - 2Y'Z' + \dots = \dots^2 - 2qyz + \dots$, $Z' = z(tipy + qz)$ nous aurons par la substitution, et après avoir divisé par $4 > (ipy^2 + aqyz - \dots^2) = Y'^2 - 2Y'Z' + \dots$. Donc le même diviseur quadratique $p'y'^2 + 2qyz + \dots$, qui contient le carré du diviseur $\dots^2 - 2qyz + \dots$, contient aussi le carré de son conjugué $zpy^2 + 2qyz + \dots$. Corollaire. Étant proposée l'équation $U = PY' + aQYZ - i - RZ'$, si on en connaît une solution comprise dans la formule $U = py^2 + 2qyz + 2itz'$ il y aura toujours une autre solution donnée par la forme conjuguée $U = apy'^2 - 2qyz - \dots$. Ces deux solutions se confondent en une seule, si la valeur de U est égale au diviseur quadratique singulier, c'est-à-dire si l'on a $V = y^2 + agyz + 2/z'$; mais alors le second membre de l'équation proposée serait de la forme $aY' + aYZ - f - \dots - 1) Z'$. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 29.18% accurate

QUATRIÈME PARTIE. 53 (38a) Proposition V. « étant un nombre premier, ainsi que a , « si l'on $a/? = M^* + \alpha N$, je dis que p ou ap sera nécessairement « de la même forme $t' + au'$, de sorte que p appartiendra soit au « diviseur quadratique $y' - \alpha - ayz + (a + i)z^2$ soit à son conjugué En effet, l'équation supposée $/? = M^* + \alpha N$ donne $/? - M' = \alpha N'$; donc puisque a est un nombre premier, il faut que l'un des facteurs $p + N, p - M$ soit divisible par a , et comme le signe de M peut être pris à volonté, on pourra faire $p + M = aP, /? - M = Q$, ce qui donnera $PQ = N'$. On satisfait généralement à cette dernière équation, en faisant, avec de nouvelles indéterminées, $P = ic'R$, $N = ito'R$, $Q = w,R$. On aura donc $2jp = flP + Q = R(\alpha + \alpha'N')$ d'où l'on voit que R ne peut être que i ou a : si $R = a$, on aura $p - u' - \alpha - K^*$; si $R = i$, on aura $a/? - \alpha^* + a w$. Donc p ou ap est nécessairement de la forme $f + a u$. Mais si $/?$ est de la forme $i' + aa'$, il est contenu dans le diviseur quadratique $/? + az^2$ qui est le même que $y^2 - f - zyz + \{a + i\}z'$, et il ne peut par conséquent appartenir qu'à ce seul diviseur. De même si $a/?$ est de la forme $P + au$, p appartiendra au diviseur quadratique $ny^2 - h - zyz + \alpha z'$ et il ne pourra appartenir qu'à ce seul diviseur. Donc si on a $jD^* = M' - H \alpha N'$, il faudra que p appartienne à l'un des diviseurs conjugués $y^2 - \alpha - lyz + (a - f - i)z'$, $-if + ajz + (\sim^{\wedge})$ (383) Proposition VI. « p étant un nombre premier quelconque, et « a un nombre premier $8/i + i$, si l'on a $j^{\wedge} a M' + a M N + Y^{\wedge} N'$, « c'est-à-dire si $a/?$ est de la forme $P' + \alpha N'$, je dis que $/?$ appartiendra nécessairement au diviseur quadratique singulier « $y^2 + \alpha gyz + a/V$, en sorte qu'on aura $p = fp' + \alpha ag - jtv - \alpha/V$. » Car a étant un nombre premier $8n + 1$, on peut faire $a - ifl - g^*$, et cette valeur étant substituée dans l'équation $a/?^* = P' + \alpha N'$, il en résultera $P' - ap' - fg^* - a/V)N$. Les nombres P et p étant premiers entre eux, on voit que N , diviseur de $P' - a/?$, doit être de

The text on this page is estimated to be only 22.05% accurate

54 THEORIE DES NOMBRES. la forme «* —a ; donc on aura P — rxj? — a /') (a* — a 6')', et] nation à laquelle on satisfait généralement en faisant $P + \pi^{nz} = z$ (g- -h/Va) (a 4- fil/ a)'; de là résulte/?==/«a-t-ag'*6 a/S*; donc p est compris dans le diviseur singulier $\pi^{nz} + ag^{rz} a/z^*$. f384) Proposition VII. « Je dis maintenant que les deux divi« seurs conjugués qui , pris pour U, satisfont à l'équation proposé* « U, = PY'-4- aQYZ -f- RZ', sont les seules solutions dont cette « équation est susceptible. » Pour démontrer cette proposition, cherchons en général les conditions qui doivent avoir lieu pour que deux valeurs différentes de V, savoir, U —py' + "xqyz + an z' U —p'y + a q'jrz +- a*' «' satisfassent également à l'équation proposée $U^* = PYi -+- aQYZ + RZ$ où Y et Z sont des indéterminées qui doivent être fonctions des indéterminées^ et z. Nous supposons que les deux valeurs de U sont préparées de manière que p et p' soient des nombres premiers; cela posé, on trouvera d'abord que les carrés de ces valeurs sont compris dans deux formules de cette sorte : ■ $p^*y + 29yz + \$z$ lesquelles doivent se réduire, l'une et l'autre, à la forme donnée $Py -4- aQjs -+- RZ'$. De là on voit que p1 doit être compris dans la formule $p''y + 2fjrz + <J>V$, et réciproquement// dans la formule $p^*y \blacksquare +- a?js + \$z^*$. On peut donc faire tout à-la-fois $p' \wedge p' < !' + z9' a p'x^* = zp^* \%* -\backslash - a < p \ll \acute{e} -4- < | \gg f \backslash$ Soit /?' a + ?é = y , on aura $p'p'^* =: y' -+- a 6'$, ou Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 29.03% accurate

QUATRIÈME PARTIR 55 Puisque a est un nombre premier, et qu'on peut prendre à volonté le signe de y , on pourra supposer $pp' \mid y$ divisible par a ; faisant donc $\zeta = ABC$, l'équation précédente se partagera en ces deux-ci : $pp' \mid y \text{ cstf} AB'$, $PP' \mid i = AC$ d'où résulte $pp' = \{ A (O -h a B') \}$. Maintenant, puisque $/?$ et p' sont premiers, les seules valeurs qu'on peut donner à A sont i , a , p ou p' , $a/7$ ou $a //$. On ne peut faire $A=p$, ni $A=2y3$ /car alors $\hat{e}$ étant divisible par $\wedge/$, la quantité p'' égale à $/?V -h 29 a 6 + \wedge 6'$ serait aussi divisible par p , ce qui est impossible : par la même raison, on ne peut avoir $A = p'$, ni $A = *p'$. Si l'on faisait $A = 2$, on attrait $pp' \mid C' + oB'$; serait donc de la forme $/' + az'$, et alors les deux nombres p et p' appartiendraient à un même diviseur quadratique de la formule $r^* + au'$, ce qui est contre la supposition. Il reste donc à faire $A = 1$, alors on aura $2 pp' = Q + a B^*$; donc les nombres p et np appartiendront à un même diviseur quadratique de la formule $f + 011^*$; mais les nombres p et ap appartiennent toujours à deux diviseurs conjugués l'un de l'autre. Donc les nombres p et p , qui sont supposés n'être pas compris dans le même diviseur quadratique, appartiennent nécessairement à deux diviseurs conjugués : ce qu'il fallait démontrer. (385) Proposition VIII. « Le nombre des diviseurs quadratiques $\ll 4'' + i$ de la formule $t^* + a u'$, où a est un nombre premier $8n -+- 1$, « surpasse toujours d'une unité le nombre des diviseurs quadratiques $4\ll + 3$ de la même formule. » En effet, soit M le nombre de diviseurs quadratiques $4\ll + ' 1$ et N le nombre des diviseurs quadratiques $4/*-* -3$; si on désigne par A, B, C, D , etc. la suite des diviseurs quadratiques $4\ll + 1 >$ les équations $U1 = A, U, = B, U^* = C$, etc. admettront chacune deux solutions distinctes, à l'exception de l'équation

The text on this page is estimated to be only 27.01% accurate

56 THÉORIE DES NOMBRES. $U^* = 2 Y''^4 - 2 Y Z + Z'$, qui n'en admettra qu'une. Donc le nombre total des solutions sera $a M - i$. Mais ces solutions qui doivent être toutes différentes les unes des autres, comprennent nécessairement tous les diviseurs quadratiques, tant $4'' + i$ que $4\alpha + 3$, de la formule $t' + au$. Donc on aura $a M - i = M + N$, ou $M = N + i$: c'est la proposition qu'il s'agissait de démontrer. Remarque. Puisque, dans le cas dont nous venons de nous occuper, la formule $f + aa'a$ a toujours au moins trois diviseurs quadratiques, savoir le diviseur $7^* + zyz + (a + i)z$ son conjugué $\bullet skj^* + zyz + t(\alpha + 0$ et le diviseur singulier $ify^* + *gyz + fz'$, lequel ne se confond avec les précédents que dans le seul cas de $a = 1$, cas exclu; il s'ensuit qu'il y a toujours au moins un diviseur quadratique $4\alpha + 3$, ce qui justifie la supposition faite dans l'article 171, de laquelle dépend la démonstration de la loi de réciprocité.

The text on this page is estimated to be only 27.28% accurate

QUATRIÈME PARTIE. 57 S VII. Démonstration du Théorème contenant la loi de réciprocité qui existe entre deux nombres premiers quelconques ($n \neq 166$). (386) Lemme. Soit p un nombre premier positif (2 excepté), i « un entier quelconque non divisible par p ; si on divise par p les « produits successifs $k, nk, 3k, \dots$ » les restes de ces divisions seront composés en partie de nombres $a', a'', a''' \dots$ plus « petits que p , en partie de nombres $b', b'', b''' \dots$ plus grands que $p/2$. Cela posé, π désignant le nombre de ces derniers restes, je dis qu'on aura « l' général $\pi = (-1)^{p-1}$ » savoir $\pi = 4-1$ si « p est pair, et $\pi = -1$ » si p est impair. » Il est clair d'abord que les restes b', b'', b''' , etc. sont inégaux entre eux. Car si deux de ces restes, dus aux multiples A, A', A'' , étaient égaux, il faudrait que la différence $k(A' - A)$ fût divisible par p ; c'est ce qui n'a pas lieu, puisque p est un nombre premier qui ne divise ni k , ni $A' - A$; car d'ailleurs A' et A sont inégaux et plus petits que p . On prouvera de même que tous les restes a', a'', a''' , etc. sont inégaux entre eux. Il suit de là que tous les nombres $p - b', p - b'', p - b'''$, etc. sont inégaux et plus petits que p : or je dis qu'aucun d'eux ne peut être égal à l'un des nombres a', a'', a''' , etc. En effet, si deux restes tels que a et b sont dus aux multiples kA, kA' , on pourra supposer $a = kA - px, b = kA' - px'$; si donc on avait $p - b = a$, il en résulterait $(i + x + x') = k(A + A')$; donc il faudrait que $(A + A')$ fût divisible par p ; or A ne l'est pas non plus que $A + A'$, puisque A et A' sont tous deux plus petits que p ; donc l'équation précédente est impossible. II. 8 Digitized by Google

08 THÉORIE DES NOMBRES. Maintenant, puisque la série $a \backslash a, d'' \dots a_1$, et la série $p \text{ --- } h \backslash p \text{ --- } b \backslash p \text{ --- } l f''$, sont l'une et l'autre composées de nombres différents, positifs et plus petits que $\backslash p$; puisque d'ailleurs le nombre total $\backslash + f t$ des termes de ces deux séries est égal à $-t$ ($p \text{ --- } i$; nombre des multiples $k, z k, 3 k \dots \text{---} \text{---} \text{---} h$, d'où ils tirent leur origine, il s'ensuit que le produit de tous ces nombres ne peut être que $i . a . 3 \dots$ et qu'ainsi on a l'égalité $a \text{ --- } a' a'' \dots a^{(p \text{ --- } b') (p \text{ --- } V)}$. $.. (/ > \_ . 2 . 3 \dots i (p - i)$, - » dans laquelle, en rejetant les multiples de p , on obtient $a \text{ --- } a m \dots a . b' b'' b''' \dots b^* (\text{--- } i f \text{ --- } j . a . 3 \dots \text{--- } i)$. Mais d'un autre côté , en rejetant aussi les multiples de p , on a $k . a k . S k \dots . H / > \text{--- } \backslash) k = a' a a''' \dots . a X b' b m b , u \dots . b^*$, et le premier membre de celle-ci = $i . a . 3 \dots \text{---} ^{(p \text{ --- } i)} . k^{*}$ De la comparaison de ces deux équations il résulte $I . 2 . 3 \dots - K / > \text{--- } 0^{*} \text{---} \sim 1) (\text{--- } i f = i . a . 3 \dots j (/ > \text{--- } i)$. Donc $a F^{ \text{---} 1 } (- i) f t = : i$, ou $F^{ \text{---} 1 } (- i) = (- i) \ll A$. Mais $F (/ \text{---} , J$ est, en rejetant les multiples de p , la valeur de l'expression $\text{---} j ^ i$ donc enfin on a, conformément à l'énoncé du lemme, $(*) \text{---} < - o > (387)$ Puisque le nombre p ., selon qu'il est pair ou impair, détermine la valeur de l'expression » 1 importe d'avoir une valeur analytique de ce nombre. Pour cela , j'observe que a désignant l'un des nombres a' , $a \dots . \ll *$, et l'un des nombres V , b' . . on aura, par les suppositions déjà faites, $a a < p$ et $a \& > / >$. Représentons à l'ordinaire par $E (x)$ l'entier le plus grand

QUATRIÈME PARTIE. 5g dans une quantité quelconque x , en sorte que $x - E(x)$ soit toujours une fraction positive plus petite que l'unité. Si on considère les divers multiples, $k, aA \dots \wedge \blacksquare 1 k$, d'où naissent les restes $a \setminus b \setminus$ etc. , et qu'on désigne particulièrement par $A k$ le multiple qui donne le reste a , et par $B k$ celui qui donne le reste b , on aura $\wedge - E(y) < f$ et $\wedge - E(\wedge) > i$; d'où résulte $E(\wedge) - aE(\wedge) = 0$, Ajoutant ensemble toutes les équations qui auront lieu semblablement pour toutes les valeurs de A et B , depuis i jusqu'à $\pm(p - i)$, il est clair que le second membre sera composé d'autant d'unités qu'il y a de nombres B ; et ce nombre d'unités ayant déjà été désigné par (i) , on aura donc $->EG) - *E(7) - ^\circ E(y) - "(\wedge$ D'ailleurs, comme on n'a besoin de la valeur de p que pour savoir si elle est paire ou impaire, on peut dans la formule précédente omettre les termes divisibles par a , ce qui donnera simplement $\wedge(VVCVVCT) + K(k=a - VE(fc=i\ddot{i}))$. (388) Cette expression est susceptible de réduction; d'abord si l'on fait $A=mf + \ll, \ll$ étant positif et $< \wedge$, on aura $(\pounds - \wedge^k = k - m - J = k - m - i - 4 - \pounds = ?$; donc $E((p \sim l)^* \wedge = k - m - i \sim k - x - E(\wedge)$; pareillement on aura $E((/ > \sim 3)^*) = k - i - E(y)$, ainsi des autres. Il faut substituer ces valeurs dans la formule, et pour cela distinguer deux cas, selon que p est de la forme $4n - f - i$ ou $4 \ll \blacksquare + \blacksquare 3$.

8. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 20.76% accurate

60 THÉORIE DES NOMBRES. Soit $i^{\circ}p = n$ et i , le nombre des termes $> E C^n$ sera $= a/i$. Les n premiers forment la suite $H_j h_0 + E(\wedge)$. Les n autres, écrits dans l'ordre inverse, forment la suite $E(teza^*) + E(fe=5^*) + e pa \pm 4^*)$, lesquels, suivant la transformation précédente, deviennent $n(*,) - E(l) - E(L^*) - E(L^*) - E(\wedge)$. Donc on aura $,- i (P- .)(*,) + E(y) + E(\pounds) + E$ (Ifi t Ajoutant au second membre, le nombre pair $aEG) + aE(y) + \gg E(\wedge)$. ce qui est permis pour notre objet, on aura plus simplement $, = i(/, _0(*_0 + EQ + E(\wedge) + E(H). \dots + B(2ii). a \gg$ Si l'on a $\wedge = 4\wedge + 3$, il y aura $2/1 + 1$ termes dans la valeur de $\wedge$; les «premiers seront toujours $E(\wedge) + E(\wedge) + E(\wedge). \dots + E(\wedge)$; les $(n - h - 1)$ autres seront et par la transformation indiquée ils deviennent $(n + ,)(, ,) - E(l) - E(37^*) - E(M). \dots - B(\wedge \pm i^*)$,
Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 24.25% accurate

QUATRIÈME PARTIE. 61 de sorte qu'on aura $, = ^{-}) (* - .) + E ^ { \wedge } +$
 $E (^ { \wedge } \dots + E (^ { \wedge }) ; - E (^ { \wedge }) - E (^ { \wedge }) \dots - E (^ { \wedge }) - E (^ { \wedge })$, ou en ajoutant le nombre pair $a + 2 E$
 $(^ { \wedge } \sim) + \text{etc} - \gg + ,) (* - .) + E (\hat{i}) + E (^ { \wedge } + E (y) . . . + \mathfrak{L} (^ { \wedge } * > (389)$ Comme $\{ (p - 1)$
dans le premier cas , et $\backslash (p - 4 - 1)$ dans le second, sont des nombres entiers;
lorsque k sera impair, les deux formules se réduiront généralement à une
seule, savoir : $, = E \$ + E (^ { \wedge }) + E (37 *) . . . + E (i < * = i \hat{i} i)$. (390) Lorsque k est pair
, les deux formules peuvent aussi se réduire à une seule, savoir: $, = ^ { \wedge } \pm 1) (* - .) -$
 $1 - E (\mid) + E (^ { \wedge }) + E (y) \dots + E (K ^ { \wedge } i l ')$, pourvu qu'on détermine le signe ambigu de
manière que $-y$ (pdt 1) soit un entier, et alors on peut même réduire $j \{ p " \text{à} z i)$
 $(A - \text{---} 1) \text{à} * ? (p \pm i)$; car il n'est toujours question que de savoir si p est pair
ou impair. (391) Soit, par exemple, $* = a$, alors tous les termes $B (^ { \wedge }) > E \mathfrak{C} - .$
 $. E$ sont nuls, et on a simplement $\mathfrak{f} i = \backslash (p \pm 1)$. Donc si $p = S n + 1$ ou $8 n + 7$, le
nombre (« sera pair, et on aura $(?) \text{---} \blacksquare \blacksquare$ Si , au contraire , $/ > = 8 n + 3$ ou $8 / t$
 $+ 5$, le nombre p . sera impair, et on aura $(j Q = \text{---} 1$. On parvient ainsi très-
simplement aux théorèmes connus contenant la relation de a à tous les
autres nombres premiers ($n 4 \ 1 \ 5 o$) ,

The text on this page is estimated to be only 24.43% accurate

6a THÉORIE DES NOMBRES. théorèmes qui étaient regardés comme difficiles à démontrer, lorsque la science des nombres était moins avancée. « * (39a) Soient maintenant k et p deux nombres premiers impairs quelconques; ayant déjà fait $(-1)^k = (-1)^{k-1}$, faisons semblablement $(-1)^p = (-1)^{p-1}$; nous aurons, suivant la formule du n° 389, $-E(5) + E(\infty) + B(V) \dots + E(t^k)$. Supposons $A \neq 0$, et faisons $a = p^k$, $p = z^0 p^k + 1$, $X = aA^k + 1$, ce qui donne $H-f-v = E(x) + E(aa) + E(3a) + E(p^k x) rK(!) + E(!) + E(i) \dots + Bg$, je dis que le second membre se réduit à E . En effet, considérons d'abord la suite $Z = E(a^k) + E(a^*) + E(3x) \dots$. 4- E et observons que les termes de cette suite croissent par degrés, depuis zéro, qui est la valeur de $E(x)$, puisque $r < 1$, jusqu'à k qui est la valeur de $E(p^k x)$; car on a $p^k x = p^k y = k^k + \dots = k^k + \dots$; donc $E(p^k x) = k^k$. Il faut maintenant examiner combien dans cette suite il y a de termes égaux à 1, combien d'égaux à 2, et ainsi de suite. Pour cela prenons des indéterminées $m, m, m, \dots, m^*$, telles qu'on ait $m, x = 1, m, x = a, m, x = 3, mx = 4, mk > x = k$. Aucun des nombres $m, m, \dots$, etc. ne pourra être entier, puisque leur expression générale $= ! = s$ étant Soit donc

Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 25.98% accurate

QUATRIÈME PARTIE. B3 E (m«) ss Mx , en sorte que m, tombe entre les entiers consécutifs M,, M« + i ; il suit évidemment de ces suppositions, i* Que les premiers termes E(ar), E(a«), . . . jusqu'à E(M,x) sont zéro; leur nombre =M,. I a* Que les termes suivants E (M, -+- i x) , E (M, »,)»>. »; . jusqu'à E(M, x) inclusivement , ont pour valeur i ; leur nombre =M,7— M,. 3" Que les termes suivants E(M, -+• i x) -+• E(M,-i-aJ:),. . . jusqu'à E (M,*) inclusivement , ont pour valeur a ; leur nombre = Mj — M,. Et ainsi de suite jusqu'aux derniers termes dont la valeur' est k' et dont le nombre =p' — M*. ■ i . ' Donc en réunissant tous les termes qui composent Z, on aura $Z = 0xM1 + (M,-M,) + a(M,-M.) . \dots + 3(M4-MJ) !; , .$. ' t . r ■■>•.«, ■ . i i ..VI» »!. I ('A''' — i) (Mai — Ma>— i) ou en réduisant, $Z = — M, — M, — M, — M^*_ , — M,$. Mais en général $M, = E(/wf) = E \text{ Ç}^j$; donc $Z = \text{^}_E(I) - E(\hat{i}) - E(?) - \text{£}(* \rightarrow$ Substituant cette valeur dans celle de $|i + v$, on en tire cette formule très-simple $p ->- v = p' h'$, ou $F + v = i(\wedge - 1)(* - 1)$. t (3g3) De cette formule se déduit immédiatement le théorème contenant la loi de réciprocité qui existe entre deux nombres premiers quelconques p et k. Si l'undes nombres pet Jr, oujous les deux, Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 26.29% accurate

64 THÉORIE DES NOMBRES. Soient a la forme $4k+1$ la quantité
 $\{ (k-1) \}$ sera un nombre pair} ainsi les. demi nombres p et q seront
tous deux pairs ou tous deux impairs, ce qui donnera $(p-q)$ Si les deux
nombres premiers p et q sont tous deux de la forme $4k+3$, la quantité $\{p$
 $(k-1) \}$ sera un nombre impair; donc a et v devront toujours être l'un
pair et l'autre impair, ce qui donne D'ailleurs la formule générale qui satisfait à
tous les cas, se déduit des expressions $x^2 = (k-1)^2$, $y^2 = (k-1)^2$, qui donnent $x =$
 $(k-1)$, $y = (k-1)$, comme au § 66. Ainsi se trouve démontré
généralement un théorème qu'on peut regarder comme le plus important de
la théorie des nombres, et qui a offert de grandes difficultés à presque tous
ceux qui ont entrepris de le démontrer par d'autres voies. La démonstration
que nous venons d'en donner, d'après Fréd. Gauss, est d'autant plus
remarquable qu'elle repose sur les principes les plus élémentaires ; mais
nous aurons occasion dans la section cinquième d'en donner une beaucoup
plus simple d'après l'auteur est M. Jacobi de Königsberg, connu par ses belles
découvertes dans la Théorie des fonctions elliptiques. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 28.05% accurate

QUATRIEME PARTIE. 65 S VIII. D'une loi très-remarquable observée dans l'énumération des nombres premiers. (3o4) Quoique la suite des nombres premiers soit extrêmement irrégulière, on peut cependant trouver avec une précision très-satisfaisante combien il y a de ces nombres depuis i jusqu'à une limite donnée x. La formule qui résout cette question est $7 = \log. x - i \cdot 0.8366 \cdot \log. j$: étant un logarithme hyperbolique. En effet, la comparaison de cette formule avec l'énumération immédiate faite dans les tables les plus étendues, telles que celles de Wéga, de Chernac ou de Burckhardt, donne les résultats suivants.

LtNITB X.	Nombre/	1 LIMITB X.
Nombre y P»r	11	formule. P«rl»Ubla. Par)• foraiUM. P»r let UbI*»
10000	ia3o ia3o a	00000 1798a 17984 20000 22(>S aa63 a5oooo aao35
aao45	3oooo 3a5a 3a46	3ooooo a6oa3 a5988 40000 4ao5 4ao4 35oooo
29961	*9977 5 0000	5i36 5i34 400000 33854 3386 1 60000 6049 6o58 5
000 00	4i533 41 538	70000 6949 6936 600000 49096 49093 80000 7838
7837	700000 56565 56535	90000 8717 8;i3 800000 63955 63937 IOOOOO
9588 959a	900000 7ia79 71268	1 5 0000 i3844 '3849 1 000000 78543
78493	II.	

66 THÉORIE DES NOMBRES. (39D) H est impossible qu'une formule représente plus fidèlement une série de nombres d'une aussi grande étendue et sujette nécessairement à de fréquentes anomalies. Pour confirmer encore mieux une loi aussi remarquable, nous ajouterons qu'ayant cherché, d'après un procédé que nous exposerons bientôt, combien il y a de nombres premiers de 1 à 1 000000, nous avons trouvé qu'il y en a 78627 ; résultat qui diffère peu de celui de l'énumération faite dans les tables, et encore moins de celui de la formule. Il n'y a donc aucun doute, non-seulement que la loi générale est représentée par une fonction de la forme $A \log^* x^B$ » $m \log x$ les coefficients A et B ont en effet les valeurs très-approchées $A = 1, \dots B = \frac{1}{0.8366}$. • Il resterait à démontrer cette loi a priori, et c'est une recherche intéressante sur laquelle nous donnerons ci-après quelques essais. (3t)6 Si on appelle a la quantité dont il faut que x augmente pour que y devienne $y + 1$, on aura pour déterminer * l'équation suivante, dans laquelle on a fait pour abrégier $c = i, 0.8366, x - f - q \times \log.(j - j - a) = e \log. or = c$ De là résulte, en supposant que x est un nombre très-grand, $a = (\log. \frac{1}{x} - c) +$ ou simplement $* = \log. \frac{1}{x} - 0.8366$; car ces déterminations ne comportent pas une précision rigoureuse. Il suit de là qu'à mesure que x augmente, la différence entre deux nombres premiers voisins de x augmente aussi, et peut être représentée avec beaucoup d'approximation, quant à la valeur moyenne, par $\log. -r - 0.8366$; de sorte que dans un intervalle de a m termes compris depuis $x - rn$ jusqu'à $x - f - m$, on devra compter autant de nombres premiers qu'il y a d'unités dans $\log \frac{1}{x} - 0.8366$ » pourvu que m soit assez petit par rapport à x. Ce résultat s'accorde très-bien d'ailleurs avec la nature des nom

The text on this page is estimated to be only 28.35% accurate

QUATRIÈME PARTIE. 67 bras premiers qui , en général , doivent être pins éloignes les uns des autres, à mesure qu'ils deviennent plus grands. En effet, U probabilité qu'un nombre pris au hasard est un nombre premier, diminue toujours à mesure que ce nombre augmente, puisque le nombre des divisions à essayer pour s'assurer qu'il est premier, devient de plus en plus grand. (397) D'après le résultat qu'on vient d'obtenir, il semble que les suites convergentes qui dépendent de la loi des nombres premiers, peuvent être sommées, comme si cette loi était régulière et telle qu'un terme quelconque étant a , le terme suivant fbt $x + \log.x - c - t - 1$. Voici un essai de ces sommations, qui d'ailleurs seront à vérifier, soit par le calcul numérique, soit par des méthodes plus directes. Proposons-nous d'abord d'évaluer le produit $\prod_{i=1}^m (1 - \frac{1}{p_i})$ dans lequel les dénominateurs sont la suite des nombres premiers de 3 à m . Si on appelle z' ce que devient a lorsque « se change en $u \log.w - c - t - 1$, ou » $+ a$, on aura $z' = z(\frac{1}{w} - \frac{1}{w^2} + \frac{1}{w^3} - \dots)$. Mais par les formules, connues on a $z' = z + a \log w + \frac{1}{2} a^2 \log^2 w + \dots$; donc en regardant comme très-petit par rapport à w , ce qui est d'autant plus exact que u est plus grand , on aura d'abord à très-peu près ce qui donnera $z' = z + a \log w$. En ayant égard aux termes du second ordre , on aurait plus exactement $A(i-i) 2 = \dots$; mais la première valeur est suffisamment $k > 9. \ll -0.08366 + \dots$ approchée:, et on trouve qu'en faisant $A = i. 104$, elle représente assez bien les nombres de la Table IX. (3q8) Soit proposé maintenant de sommer la suite de fractions

Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 27.44% accurate

68 THÉORIE DES NOMBRES, dont les dénominateurs sont les carrés des nombres premiers successifs. En mettant » + a au lieu de », on aura $z - z - \dots$ ou dz, ddz i la. , $= >^+ i \ll gcr + etc - =^r - jji + etc$; d ou 1 on tire $Z - A W(\ll - t - i) \sim A \gg (\log. < o - f - o.9i634)''$ La constante A est la valeur de la suite prolongée à l'infini : Euler Ta trouvée = 0.202247. (Introd. in Anal. , n° 282.) (399) Quant à la somme de la série réciproque simple $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$ « = $i + H \setminus + 7, 3 5 7 n w$ on peut la déduire des deux sommes déjà trouvées. En effet , puisqu'on a $t . 104 708366 0 -0 0 -5) (\bullet - ^{Hog.} \wedge - \hat{o}0'$ si on prend les logarithmes de chaque membre, on aura par les formules connues : $\wedge - f - j + i - + - \wedge = \log. (\log. \ll - o.08366) 1 / 1 1 1 1 \setminus - + -$ etc. Or la suite $\wedge + 57 \gg$ a pour somme 0,202247 , en négligeant les termes de l'ordre , 1 : les autres sommes se réduisent pareillement à des constantes dont il est aisé de trouver des valeurs approchées; on aura donc la somme cherchée $u = \log. (\log. \gg - o . 08366) - o . 22 1 5. (400)$ La propriété dont jouit la suite précédente, d'avoir une

QUATRIÈME PARTIE. somme infinie, peut jeter quelque jour sur la loi générale des nombres premiers. En effet, considérant u comme une fonction de x qui satisfait à l'équation $u' = u^m$ si m devient ∞ , on aura $\frac{1}{u} \frac{du}{dx} = a^x r^x f^x$ etc. $= \frac{1}{u} \frac{du}{dx} = r + \text{etc.}$ Et en supposant « très-grand ou « très-petit par rapport à w , ces suites se réduisent à leur premier terme et donnent $du = \frac{1}{u}$ Dans la même hypothèse de w très-grand, on peut supposer que la valeur de a , développée suivant les puissances descendantes de w , est $\frac{1}{u} = A u^m + B w^* + \dots$ etc., l'exposant m étant plus grand que les suivants. En ne considérant donc que le premier terme de cette suite, on aurait $du = \frac{1}{u} f^x$, d'où résulte $u = C \frac{1}{r^x}$. Mais si m était une quantité finie positive, lorsqu'on fait $x = ac$, u se réduirait à la constante C , ce qui ne peut avoir lieu, puisqu'on sait que u est alors infini; d'un autre côté, on ne peut supposer $m = 0$, parce que la distance entre deux nombres premiers consécutifs aurait pour limite une constante A , tandis que par la nature de ces nombres elle doit augmenter indéfiniment. Donc il faut que m soit infiniment petit, et alors $A u^m + B w^* + \dots$ prendra la forme $A \log. u + B$; faisant donc $\frac{1}{u} \frac{du}{dx} = A \log. u + B$, on a $du = \frac{1}{u} \frac{du}{dx} dx = \frac{1}{u} (A \log. u + B) dx$ d'où résulte $a^x = \log. u + C$, quantité qui devient infinie, comme elle doit l'être lorsque u est infinie. (401) Ayant $\frac{1}{u} \frac{du}{dx} = A \log. u + B$, on en déduit aisément la fonction y , au moyen de l'équation $y' = y^i$, ou $y = i$, laquelle donne $dy = -\frac{1}{y^2}$, et en intégrant $\frac{1}{y^2} = -\frac{1}{y} + \dots = a + \frac{1}{y} =$ Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 16.48% accurate

-o THHQM B l>m NOMBRES. — ^ T=h — r> ce qui s'accorde avec la formule générale ot — A A log. m -4- B — A 1 n donnée, ci-dessus y en prenant A = i , B = — o. o#366. Il est remarquable qu'on déduise ainsi du calcul intégral une propriété essentielle des nombres premiers; mais toutes les vérités mathématiques sont liçes les unes au\ autres , et tous les moyens de les découvrir sont également admissibles. C'est ainsi qu'on a cru devoir employer la considération des Fonctions; pour démontrer divers théorèmes fondamentaux de la Géométrie et de la Mécanique. • . . * s • . < in ■ 1*' ««-**•"! >: - ■ , • i • • 1 la H t. j ... • ~■ >• J. iilitHi * . 1 "• i - i" 'M " »•«• i . '■ " <»! : -'!.;•■ r •r. . v i î>lr-' ! »«ll<| " . "j ' • i: ' t ~ • - - : • • r.) o.f»". v iv '-: 'i' ..: • •■ , « • ■ ■i/ii iJOU;»**fol ./Mjiê .(J -ifiit >l ; «î. »;» 'j.-.< "■ \\ ... • >. .. .»«! ,«•;*! "liO""!! tiHi|")'i ir>|' :> . ' > "»i[f;}>fi-v i:: • ' \>-, . ' !>v< • . • \ .iiiî i'i '»!f«..| »n»p «îlinri /' , >î»r îv t» iti' i \,«>.j '*'()■*;; • ' ,■>-• !•• .• ,« : 'f?î; . / r: ■ ' . il". ■ m rV!i. »i ' v :i i îo -fl + i/ r- _x -r If: <*ii.'l rî -l .'• 11 '."î .I» jitj »li!îU.jp .!) | ■ : ;m! ' i).-- ' ... -|V'.' ,\ •Milil.li \:-. ,•> 'i':" i •; -y ' • Imi- • <• • i";t •> :., i .h > t , i .' . i i ' :<t ' , - .; .ii. . ;|, i, — • ' - -I- ^ ; • , . . 'ir ir, . ; . _ , . Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 23.30% accurate

■ QUATRIÈME PARTIE. 71 : — . . !••;» 'h ' ... 'm* ' : • . 1. •%/•
 i.-'j -. ■ § IX. Démonstration de divers théorèmes sur les progressions
 arithmétiques. (40a) Soit proposée la progression arithmétique $A - C, aA - C, 3A^2 - C, \dots$ (Z) ■.: 1 • . 1 dans laquelle A et C sont des nombres
 quelconques premiers entre eux. ; soit 0 un nombre premier non-diviseur de
 A ; si Ton détermine x de manière que $Aa > *-C$ Soit divisible par 6, la valeur
 de a^* sera généralement de la forme $jx + 4a$ d'où l'on voit que les
 termes divisibles par 6 dans la progression proposée forment eux-mêmes la
 progression arithmétique $A - C, A(a + 6) - C, A(a + 12) - C$, etc et
 qu'ainsi sur 9 termes consécutifs, pris partout où l'on voudra dans la
 progression (Z) , il y en a toujours un divisible par 6, lequel est suivi et
 précédé d'une suite d'autres termes également divisibles par 6, et distants
 entre eux de l'intervalle 6. Cela posé, soit $p_1, p_2, \dots, p_r$, une suite de nombres
 premiers, pris à volonté , dans un ordre quelconque , mais, dont aucun ne
 divise A. Nous allons chercher quel est, dans la progression (Z), le plus
 grand nombre de termes consécutifs qui seraient divisibles par quelqu'un
 des nombres de la suite $p_1, p_2, \dots, p_r$. «P» Nous appellerons (a). Il faut
 pour cet effet examiner d'abord les cas les plus simples. (403) i' Si l'on ne
 considère que deux nombres premiers 0, >, il ne peut y avoir plus de deux
 termes consécutifs divisibles l'un par 0 , l'autre par \ , et ces termes peuvent
 être désignés par (6) , (>). Digitized by Google

Tx THÉORIE DES NOMBRES. Le terme qui suit (x) ne peut être divisible par 0, car l'intervalle avec (9) n'étant que de deux ternies, il faudrait qu'on eût $6=a$; mais ce cas est exclu, et nous ne considérons dans la suite (a) que des nombres premiers impairs. Par la même raison, le terme qui précède (ô) ne saurait être divisible par X et encore moins par 0; donc dans ce premier cas le maximum cherché $M = a$. (4o4) Soient les trois nombres premiers 6, X, |t; on pourra concevoir trois termes consécutifs divisibles par ces nombres, lesquels seront (ft), (X), (pi). Pour que le terme qui suit (jx) soit divisible par 6, il faut que 0 soit 3, et pareillement pour que le terme qui précède 6 soit divisible par, il faut que p. soit 3. Mais comme les nombres premiers que nous considérons sont nécessairement différents entre eux, il n'y a qu'une de ces deux suppositions qui puisse avoir lieu. Dans le cas donc de $6=3$, on pourrait avoir quatre termes consécutifs (3), (x), (t), (3), divisibles chacun par l'un des nombres premiers 3, X, pu A la suite de ces quatre termes on n'en peut pas mettre un cinquième; car la moindre valeur que puisse avoir (X) étant 5, le premier terme divisible par 5, après (x), serait le septième et non le cinquième. Donc dans le cas où la suite (a) est composée de trois nombres premiers, on a au plus $M=4$ » encore faut-il que l'un de ces nombres premiers soit 3. (4ô5) Supposons maintenant que la suite (a) soit composée de quatre nombres premiers 0, X, -a, v. Si l'on considère quatre termes consécutifs divisibles par ces nombres, savoir : (G), (x), (jx), (y); pour en ajouter un cinquième, il faudra que X soit 3; alors on aura les cinq termes consécutifs (ô), (3), (jx), (v), (3). Si l'on veut ajouter à ceux-ci un sixième terme, cela ne se pourra que lorsque $0=5$, car alors on aurait les six termes (5), (3), (pi), (v), (3), (5). La progression ne peut plus être continuée ni vers la droite, ni vers la gauche, car p et v devant être plus grands que 5, les termes divisibles par ^ ou par v vont beaucoup au-delà. Donc dans le cas où la suite (a) est composée de quatre termes, il n'y a au plus que six termes consécutifs de la progression (Z) <ftii soient divisibles par quelqu'un des Digitized by Google

QUATRIÈME PARTIE. 73 termes de la suite (a). On a donc alors $M=6$, mais ce maximum n'a lieu que lorsque deux des quatre nombres premiers sont 3 et 5. (406) On conçoit en effet que les nombres premiers les plus petits sont les plus propres à donner la plus grande valeur de M , toutes choses d'ailleurs égales, puisque de plus grands nombres premiers rendent plus grands les intervalles des termes dont ils sont diviseurs. En vertu de cette observation, on peut considérer tout d'un coup la suite naturelle des nombres premiers 3, 5, 7 . . . ty, u, en en laissant seulement deux indéterminés, tels qu'ils sont restés dans les cas précédents; et le maximum trouvé pour cette suite aura lieu à plus forte raison pour la suite (a), composée d'un pareil nombre de termes 0, p. . «J», ». • Soient donc les cinq nombres premiers 3, 5, 7, ^, »; on a déjà trouvé qu'avec les quatre seuls 3, 5, t|>, «, on pouvait former les six termes consécutifs (5), (3), (<J»), (<■>), (3), (5). Si à la place de <|> ou w on prenait 7, alors on ne pourrait former au plus que les huit termes (5), (3), (7), («), (3), (5), (3), car leur continuation à droite exigerait que » fut 5, et à gauche que fut 7. On obtiendra un résultat plus grand en laissant (<[<) et (<u), comme dans le premier arrangement, et en ajoutant (7) d'un côté, ce qui permettra de l'ajouter en même temps de l'autre, puisque l'intervalle des deux termes (7) et (7) sera de sept ternies, comme il doit être : on aura ainsi les huit termes consécutifs (7), (5), (3), (t|>), (w), (3), (5), (7). Mais tle plus on voit que (3) peut être ajouté de chaque côté, à cause de l'intervalle requis entre les (3) les plus proches; et de cette manière on aura une combinaison de dix termes, savoir : (3;, (7), (5), (3), (+), («), (3), (5), (7), (3). Elle ne peut être prolongée ni d'un côté ni de l'autre, parce qu'il faudrait pour cela que » ou fût 5, ce qui n'a pas lieu, 5 étant déjà employé. Donc dans Je cas où la suite (a) est composée de cinq termes, le maximum cherché est $M=10$. (407) On aurait pu, par une simple observation, arriver immédiatement à ce résultat. Puisque les termes divisibles par 3 et i^*eII . 10

The text on this page is estimated to be only 24.90% accurate

74 THÉORIE DES NOMBRES. présentés par (3) se succèdent à un intervalle de trois rangs, que les termes divisibles par 5 se succèdent à un intervalle de cinq rangs, et ainsi de suite, la série des termes consécutifs qu'on veut former au plus grand nombre possible, a cette propriété commune avec la série des nombres impairs, commençant à un terme quelconque, puisque dans cette dernière les termes divisibles par 3, par 5, etc. se succèdent pareillement à des intervalles de 3 termes, de 5 termes, etc. Mais le moyen d'obtenir le plus grand nombre de termes consécutifs de cette suite, qui soient divisibles par quelqu'un des nombres premiers 3, 5, 7, 11, etc., est de considérer la suite des nombres impairs dans ses moindres termes, c'est-à-dire dès l'origine de cette suite. Car à une distance plus grande on ne manquerait pas d'être arrêté par des nombres premiers plus grands que les nombres premiers donnés, et qui empêcheraient la continuité des termes qu'on veut former. Il faut donc tout simplement considérer la série 1, 3, 5, 7, 9, 11, etc., qu'on peut également prolonger dans l'autre sens, ce qui donnera — 9, — 7, — 5, — 3, — 1, 1, 3, 5, 7, 9, 11, etc. ou parce que les signes des nombres sont indifférents, lorsqu'on a égard seulement à leur propriété d'être divisibles ou non-divisibles par un nombre donné, on pourra considérer la double suite . . . 15, 13, 11, 9, 7, 5, 3, 1, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15. . . dans laquelle les termes divisibles par 3, 5, 7, etc. se succéderont toujours à des intervalles de 3, 5, 7, etc. termes, et cette suite aura l'avantage d'être composée des moindres nombres possibles. Désignant comme ci-dessus chaque terme par le moindre nombre premier qui en est diviseur, on pourra la représenter ainsi : 1, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 143, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 187, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 247, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 287, 293, 299, 307, 311, 313, 317, 331, 337, 347, 349, 353, 359, 367, 373, 379, 383, 389, 397, 401, 409, 421, 431, 433, 439, 443, 449, 457, 461, 463, 467, 473, 479, 487, 491, 499, 503, 509, 521, 523, 527, 539, 541, 547, 557, 563, 569, 571, 577, 587, 593, 599, 601, 607, 613, 617, 619, 623, 629, 631, 637, 641, 643, 647, 653, 659, 661, 667, 671, 673, 677, 683, 689, 691, 697, 701, 703, 707, 709, 713, 719, 727, 731, 733, 737, 739, 743, 749, 751, 757, 761, 763, 767, 769, 773, 779, 781, 787, 791, 793, 797, 799, 803, 809, 811, 817, 821, 823, 827, 829, 833, 837, 839, 841, 847, 851, 853, 857, 859, 863, 869, 871, 877, 881, 883, 887, 891, 893, 897, 899, 901, 907, 911, 913, 917, 919, 923, 927, 929, 931, 937, 939, 941, 943, 947, 949, 953, 959, 961, 967, 971, 973, 977, 979, 983, 989, 991, 993, 997, 1003, 1009, 1013, 1017, 1019, 1021, 1023, 1027, 1029, 1031, 1033, 1037, 1039, 1043, 1047, 1049, 1051, 1053, 1057, 1059, 1063, 1067, 1069, 1073, 1077, 1079, 1081, 1083, 1087, 1089, 1091, 1093, 1097, 1099, 1103, 1107, 1109, 1111, 1113, 1117, 1119, 1123, 1127, 1129, 1131, 1133, 1137, 1139, 1141, 1143, 1147, 1149, 1151, 1153, 1157, 1159, 1163, 1167, 1169, 1171, 1173, 1177, 1179, 1181, 1183, 1187, 1189, 1191, 1193, 1197, 1199, 1201, 1203, 1207, 1209, 1211, 1213, 1217, 1219, 1223, 1227, 1229, 1231, 1233, 1237, 1239, 1241, 1243, 1247, 1249, 1251, 1253, 1257, 1259, 1261, 1263, 1267, 1269, 1271, 1273, 1277, 1279, 1281, 1283, 1287, 1289, 1291, 1293, 1297, 1299, 1301, 1303, 1307, 1309, 1311, 1313, 1317, 1319, 1321, 1323, 1327, 1329, 1331, 1333, 1337, 1339, 1341, 1343, 1347, 1349, 1351, 1353, 1357, 1359, 1361, 1363, 1367, 1369, 1371, 1373, 1377, 1379, 1381, 1383, 1387, 1389, 1391, 1393, 1397, 1399, 1401, 1403, 1407, 1409, 1411, 1413, 1417, 1419, 1423, 1427, 1429, 1431, 1433, 1437, 1439, 1441, 1443, 1447, 1449, 1451, 1453, 1457, 1459, 1461, 1463, 1467, 1469, 1471, 1473, 1477, 1479, 1481, 1483, 1487, 1489, 1491, 1493, 1497, 1499, 1501, 1503, 1507, 1509, 1511, 1513, 1517, 1519, 1521, 1523, 1527, 1529, 1531, 1533, 1537, 1539, 1541, 1543, 1547, 1549, 1551, 1553, 1557, 1559, 1561, 1563, 1567, 1569, 1571, 1573, 1577, 1579, 1581, 1583, 1587, 1589, 1591, 1593, 1597, 1599, 1601, 1603, 1607, 1609, 1611, 1613, 1617, 1619, 1621, 1623, 1627, 1629, 1631, 1633, 1637, 1639, 1641, 1643, 1647, 1649, 1651, 1653, 1657, 1659, 1661, 1663, 1667, 1669, 1671, 1673, 1677, 1679, 1681, 1683, 1687, 1689, 1691, 1693, 1697, 1699, 1701, 1703, 1707, 1709, 1711, 1713, 1717, 1719, 1721, 1723, 1727, 1729, 1731, 1733, 1737, 1739, 1741, 1743, 1747, 1749, 1751, 1753, 1757, 1759, 1761, 1763, 1767, 1769, 1771, 1773, 1777, 1779, 1781, 1783, 1787, 1789, 1791, 1793, 1797, 1799, 1801, 1803, 1807, 1809, 1811, 1813, 1817, 1819, 1821, 1823, 1827, 1829, 1831, 1833, 1837, 1839, 1841, 1843, 1847, 1849, 1851, 1853, 1857, 1859, 1861, 1863, 1867, 1869, 1871, 1873, 1877, 1879, 1881, 1883, 1887, 1889, 1891, 1893, 1897, 1899, 1901, 1903, 1907, 1909, 1911, 1913, 1917, 1919, 1921, 1923, 1927, 1929, 1931, 1933, 1937, 1939, 1941, 1943, 1947, 1949, 1951, 1953, 1957, 1959, 1961, 1963, 1967, 1969, 1971, 1973, 1977, 1979, 1981, 1983, 1987, 1989, 1991, 1993, 1997, 1999, 2001, 2003, 2007, 2009, 2011, 2013, 2017, 2019, 2021, 2023, 2027, 2029, 2031, 2033, 2037, 2039, 2041, 2043, 2047, 2049, 2051, 2053, 2057, 2059, 2061, 2063, 2067, 2069, 2071, 2073, 2077, 2079, 2081, 2083, 2087, 2089, 2091, 2093, 2097, 2099, 2101, 2103, 2107, 2109, 2111, 2113, 2117, 2119, 2121, 2123, 2127, 2129, 2131, 2133, 2137, 2139, 2141, 2143, 2147, 2149, 2151, 2153, 2157, 2159, 2161, 2163, 2167, 2169, 2171, 2173, 2177, 2179, 2181, 2183, 2187, 2189, 2191, 2193, 2197, 2199, 2201, 2203, 2207, 2209, 2211, 2213, 2217, 2219, 2221, 2223, 2227, 2229, 2231, 2233, 2237, 2239, 2241, 2243, 2247, 2249, 2251, 2253, 2257, 2259, 2261, 2263, 2267, 2269, 2271, 2273, 2277, 2279, 2281, 2283, 2287, 2289, 2291, 2293, 2297, 2299, 2301, 2303, 2307, 2309, 2311, 2313, 2317, 2319, 2321, 2323, 2327, 2329, 2331, 2333, 2337, 2339, 2341, 2343, 2347, 2349, 2351, 2353, 2357, 2359, 2361, 2363, 2367, 2369, 2371, 2373, 2377, 2379, 2381, 2383, 2387, 2389, 2391, 2393, 2397, 2399, 2401, 2403, 2407, 2409, 2411, 2413, 2417, 2419, 2421, 2423, 2427, 2429, 2431, 2433, 2437, 2439, 2441, 2443, 2447, 2449, 2451, 2453, 2457, 2459, 2461, 2463, 2467, 2469, 2471, 2473, 2477, 2479, 2481, 2483, 2487, 2489, 2491, 2493, 2497, 2499, 2501, 2503, 2507, 2509, 2511, 2513, 2517, 2519, 2521, 2523, 2527, 2529, 2531, 2533, 2537, 2539, 2541, 2543, 2547, 2549, 2551, 2553, 2557, 2559, 2561, 2563, 2567, 2569, 2571, 2573, 2577, 2579, 2581, 2583, 2587, 2589, 2591, 2593, 2597, 2599, 2601, 2603, 2607, 2609, 2611, 2613, 2617, 2619, 2621, 2623, 2627, 2629, 2631, 2633, 2637, 2639, 2641, 2643, 2647, 2649, 2651, 2653, 2657, 2659, 2661, 2663, 2667, 2669, 2671, 2673, 2677, 2679, 2681, 2683, 2687, 2689, 2691, 2693, 2697, 2699, 2701, 2703, 2707, 2709, 2711, 2713, 2717, 2719, 2721, 2723, 2727, 2729, 2731, 2733, 2737, 2739, 2741, 2743, 2747, 2749, 2751, 2753, 2757, 2759, 2761, 2763, 2767, 2769, 2771, 2773, 2777, 2779, 2781, 2783, 2787, 2789, 2791, 2793, 2797, 2799, 2801, 2803, 2807, 2809, 2811, 2813, 2817, 2819, 2821, 2823, 2827, 2829, 2831, 2833, 2837, 2839, 2841, 2843, 2847, 2849, 2851, 2853, 2857, 2859, 2861, 2863, 2867, 2869, 2871, 2873, 2877, 2879, 2881, 2883, 2887, 2889, 2891, 2893, 2897, 2899, 2901, 2903, 2907, 2909, 2911, 2913, 2917, 2919, 2921, 2923, 2927, 2929, 2931, 2933, 2937, 2939, 2941, 2943, 2947, 2949, 2951, 2953, 2957, 2959, 2961, 2963, 2967, 2969, 2971, 2973, 2977, 2979, 2981, 2983, 2987, 2989, 2991, 2993, 2997, 2999, 3001, 3003, 3007, 3009, 3011, 3013, 3017, 3019, 3021, 3023, 3027, 3029, 3031, 3033, 3037, 3039, 3041, 3043, 3047, 3049, 3051, 3053, 3057, 3059, 3061, 3063, 3067, 3069, 3071, 3073, 3077, 3079, 3081, 3083, 3087, 3089, 3091, 3093, 3097, 3099, 3101, 3103, 3107, 3109, 3111, 3113, 3117, 3119, 3121, 3123, 3127, 3129, 3131, 3133, 3137, 3139, 3141, 3143, 3147, 3149, 3151, 3153, 3157, 3159, 3161, 3163, 3167, 3169, 3171, 3173, 3177, 3179, 3181, 3183, 3187, 3189, 3191, 3193, 3197, 3199, 3201, 3203, 3207, 3209, 3211, 3213, 3217, 3219, 3221, 3223, 3227, 3229, 3231, 3233, 3237, 3239, 3241, 3243, 3247, 3249, 3251, 3253, 3257, 3259, 3261, 3263, 3267, 3269, 3271, 3273, 3277, 3279, 3281, 3283, 3287, 3289, 3291, 3293, 3297, 3299, 3301, 3303, 3307, 3309, 3311, 3313, 3317, 3319, 3321, 3323, 3327, 3329, 3331, 3333, 3337, 3339, 3341, 3343, 3347, 3349, 3351, 3353, 3357, 3359, 3361, 3363, 3367, 3369, 3371, 3373, 3377, 3379, 3381, 3383, 3387, 3389, 3391, 3393, 3397, 3399, 3401, 3403, 3407, 3409, 3411, 3413, 3417, 3419, 3421, 3423, 3427, 3429, 3431, 3433, 3437, 3439, 3441, 3443, 3447, 3449, 3451, 3453, 3457, 3459, 3461, 3463, 3467, 3469, 3471, 3473, 3477, 3479, 3481, 3483, 3487, 3489, 3491, 3493, 3497, 3499, 3501, 3503, 3507, 3509, 3511, 3513, 3517, 3519, 3521, 3523, 3527, 3529, 3531, 3533, 3537, 3539, 3541, 3543, 3547, 3549, 3551, 3553, 3557, 3559, 3561, 3563, 3567, 3569, 3571, 3573, 3577, 3579, 3581, 3583, 3587, 3589, 3591, 3593, 3597, 3599, 3601, 3603, 3607, 3609, 3611, 3613, 3617, 3619, 3621, 3623, 3627, 3629, 3631, 3633, 3637, 3639, 3641, 3643, 3647, 3649, 3651, 3653, 3657, 3659, 3661, 3663, 3667, 3669, 3671, 3673, 3677, 3679, 3681, 3683, 3687, 3689, 3691, 3693, 3697, 3699, 3701, 3703, 3707, 3709, 3711, 3713, 3717, 3719, 3721, 3723, 3727, 3729, 3731, 3733, 3737, 3739, 3741, 3743, 3747, 3749, 3751, 3753, 3757, 3759, 3761, 3763, 3767, 3769, 3771, 3773, 3777, 3779, 3781, 3783, 3787, 3789, 3791, 3793, 3797, 3799, 3801, 3803, 3807, 3809, 3811, 3813, 3817, 3819, 3821, 3823, 3827, 3829, 3831, 3833, 3837, 3839, 3841, 3843, 3847, 3849, 3851, 3853, 3857, 3859, 3861, 3863, 3867, 3869, 3871, 3873, 3877, 3879, 3881, 3883, 3887, 3889, 3891, 3893, 3897, 3899, 3901, 3903, 3907, 3909, 3911, 3913, 3917, 3919, 3921, 3923, 3927, 3929, 3931, 3933, 3937, 3939, 3941, 3943, 3947, 3949, 3951, 3953, 3957, 3959, 3961, 3963, 3967, 3969, 3971, 3973, 3977, 3979, 3981, 3983, 3987, 3989, 3991, 3993, 3997, 3999, 4001, 4003, 4007, 4009, 4011, 4013, 4017, 4019, 4021, 4023, 4027, 4029, 4031, 4033, 4037, 4039, 4041, 4043, 4047, 4049, 4051, 4053, 4057, 4059, 4061, 4063, 4067, 4069, 4071, 4073, 4077, 4079, 4081, 4083, 4087, 4089, 4091, 4093, 4097, 4099, 4101, 4103, 4107, 4109, 4111, 4113, 4117, 4119, 4121, 4123, 4127, 4129, 4131, 4133, 4137, 4139, 4141, 4143, 4147, 4149, 4151, 4153, 4157, 4159, 4161, 4163, 4167, 4169, 4171, 4173, 4177, 4179, 4181, 4183, 4187, 4189, 4191, 4193, 4197, 4199, 4201, 4203, 4207, 4209, 4211, 4213, 4217, 4219, 4221, 4223, 4227, 4229, 4231, 4233, 4237, 4239, 4241, 4243, 4247, 4249, 4251, 4253, 4257, 4259, 4261, 4263, 4267, 4269, 4271, 4273, 4277, 4279, 4281, 4283, 4287, 4289, 4291, 4293, 4297, 4299, 4301, 4303, 4307, 4309, 4311, 4313, 4317, 4319, 4321, 4323, 4327, 4329, 4331, 4333, 4337, 4339, 4341, 4343, 4347, 4349, 4351, 4353, 4357, 4359, 4361, 4363, 4367, 4369, 4371, 4373, 4377, 4379, 4381, 4383, 4387, 4389, 4391, 4393, 4397, 4399, 4401, 4403, 4407, 4409, 4411, 4413, 4417, 4419, 4421, 4423, 4427, 4429, 4431, 4433, 4437, 4439, 4441, 4443, 4447, 4449, 4451, 4453, 4457, 4459, 4461, 4463, 4467, 4469, 4471, 4473, 4477, 4479, 4481, 4483, 4487, 4489, 4491, 4493, 4497, 4499, 4501, 4503, 4507, 4509, 4511, 4513, 4517, 4519, 4521, 4523, 4527, 4529, 4531, 4533, 4537, 4539, 4541, 4543, 4547, 4549, 4551, 4553, 4557, 4559, 4561, 4563, 4567, 4569, 4571, 4573, 4577, 4579, 4581, 4583, 4587, 4589, 4591, 4593, 4597, 4599, 4601, 4603, 4607, 4609, 4611, 4613, 4617, 4619, 4621, 4623, 4627, 4629, 4631, 4633, 4637, 4639, 4641, 4643, 4647, 4649, 4651, 4653, 4657, 4659, 4661, 4663, 4667, 4669, 4671, 4673, 4677, 4679, 4681, 4683, 4687, 4689, 4691, 4693, 4697, 4699, 4701, 4703, 4707, 4709, 4711, 4713, 4717, 4719, 4721, 4723, 4727, 4729, 4731, 4733, 4737, 4739, 4741, 4743, 4747, 4749, 4751, 4753, 4757, 4759, 4761, 4763, 4767, 4769, 4771, 4773, 4777, 4779, 4781, 4783, 4787, 4789, 4791, 4793, 4797, 4799, 4801, 4803, 4807, 4809, 4811, 4813, 4817, 4819, 4821, 4823, 4827, 4829, 4831, 4833, 4837, 4839, 4841, 4843, 4847, 4849, 4851, 4853, 4857, 4859, 4861, 4863, 4867, 4869, 4871, 4873, 4877, 4879, 4881, 4883, 4887, 4889, 4891, 4893, 4897, 4899, 4901, 4903, 4907, 4909, 4911, 4913, 4917, 4919, 4921, 4923, 4927, 4929, 4931, 4933, 4937, 4939, 4941, 4943, 4947, 4949, 4951, 4953, 4957, 4959, 4961, 4963, 4967, 4969, 4971, 4973, 4977, 4979, 4981, 4983, 4987, 4989, 4991, 4993, 4997, 4999, 5001, 5003, 5007, 5009, 5011, 5013, 5017, 5019, 5021, 5023, 5027, 5029, 5031, 5033, 5037, 5039, 5041, 5043, 5047, 5049, 5051, 5053, 5057, 5059, 5061, 5063, 5067, 5069, 5071, 5073, 5077, 5079, 5081, 5083, 5087, 5089, 5091, 5093, 5097, 5099, 5101, 5103, 5107, 5109, 5111, 5113, 5117, 5119, 5121, 5123, 5127, 5129, 5131, 5133, 5137, 5139, 5141, 5143, 5147, 5149, 5151, 5153, 5157, 5159, 5161, 5163, 5167, 5169, 5171, 5173, 5177, 5179, 5181, 5183, 5187, 5189, 5191, 5193, 5197, 5199, 5201, 5203, 5207, 5209, 5211, 5213, 5217, 5219, 5221, 5223, 5227, 5229, 5231, 5233, 5237, 5239, 5241, 5243, 5247, 5249, 5251, 5253, 5257, 5259, 5261, 5263, 5267, 5269, 5271, 5273, 5277, 5279, 5281, 5283, 5287, 5289, 5291, 5293, 5297, 5299, 5301, 5303, 5307, 5309, 5311, 5313, 5317, 5319, 5321, 5323, 5327, 5329, 5331, 5333, 5337, 5339, 5341, 5343, 5347, 5349, 5351, 5353, 5357, 5359, 5361, 5363, 5367, 5369, 5371, 5373, 5377, 5379, 5381, 5383, 5387, 5389, 5391, 5393, 5397, 5399, 5401, 5403, 5407, 5409, 5411, 5413, 5417, 5419, 5421, 5423, 5427, 5429, 5431, 5433, 5437, 5439, 5441, 5443, 5447, 5449, 5451, 5453, 5457, 5459, 5461, 5463, 5467, 5469, 5471, 5473, 5477, 5479, 5

The text on this page is estimated to be only 20.84% accurate

QUATRIÈME PARTIE. 75 à la place des deux termes (1) et (i) qui occupent le milieu, et on prendra dans les termes précédents et suivants tous ceux < p > i n'excèdent pas (7). De cette manière, on a immédiatement pour le cas dont il s'agit la suite (3), (7), (5), (3). (♦), (-), (3), (5), (?), (3), • qui est composée de dix termes et donne le maximum M = 10, comme on l'a déjà trouvé. Rien de plus facile ensuite que de généraliser le résultat pour tant de nombres premiers qu'on voudra. Si on a, par exemple les six nombres premiers 3, 5, 7, 11, 13, 17, on voit que la combinaison qui produit le plus grand nombre de termes consécutifs divisibles par quelque'un de ces nombres premiers, est (3), (7), (11), (3), (17). (♦), (13), (5), (7), (3), (11), (17), ce qui donne le maximum M = 12. En admettant encore un nombre premier de plus, de sorte que la suite (a) fût composée des sept ternies 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, on aurait la combinaison (3), (11), (13), (17), (5), (3), (♦), (19), (7), (3), (11), (13), (17), laquelle est composée de seize termes et donne M = 16. Elle ne peut être prolongée plus loin, parce que le terme qui viendrait à la suite, d'un côté ou de l'autre, est (17); or quand même y ou u serait égal à 17, on ne peut l'employer pour continuer la suite, puisqu'il laisserait vers le milieu une place vide. (409) Maintenant j'observe que le nombre i (> qui satisfait à la question précédente n'est autre chose que 17—1, 17 étant le premier qui suit immédiatement 13; et il est aisé de voir que ce résultat, ainsi généralisé, est exact; car la progression dont nous venons de faire usage n'est autre chose que la progression des nombres impairs 1, 3, 5, 7, 9, etc. répétée dans deux sens différents, 10.

The text on this page is estimated to be only 29.99% accurate

76 THÉORIE DES NOMBRES. et dans laquelle on a désigné chaque terme par le plus petit nombre premier qui en est diviseur; de sorte qu'on peut établir ainsi la correspondance de ces deux progressions : 17, 15, 13, 11, 9, 7, 5, 3, 1, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 (3), (3), (u), (3), (7), ^ or par cette disposition on voit évidemment que le nombre de termes compris entre les deux désignés par 17, 17, est 17 — 1 ; donc on a M — 17 — 1. Il n'est pas moins facile de voir en général , que si la suite (a) est composée de k nombres premiers, dont deux , 4 et u, sont indéterminés , et les k — a autres forment la suite naturelle 3, 5, 7, 11, 13, 17, etc. jusqu'à «(*_); le maximum cherché sera ir(4~,) étant le terme de rang k — 1 dans la suite des nombres premiers 3, 5, 7, 11, etc. Cette formule s'accorde avec les résultats particuliers que nous avons trouvés , et il en résulte le théorème général qui suit : (4 10) a Soit donnée une progression arithmétique quelconque « A — C, aA — C, 3 A — C, etc. , dans laquelle A et C sont premiers « entre eux; soit donnée aussi une suite 6, X, (i...^, w, composée « de/* nombres premiers impairs, pris à volonté et disposés dans « un ordre quelconque; si on appelle en général «' le z'1~ terme de la suite naturelle des nombres premiers 3, 5, 7, ' 1 » etc- » je °*'s « que sur ir(,~,) termes consécutifs de la progression proposée, il y a en aura au moins un qui ne sera divisible par aucun des nombres (i > « premiers 6, X, p. . . . <J<, w. » ! ') En effet, on vient de prouver que dans la progression dont il s'agit, il ne peut y avoir au plus que ir4_,i — 1 termes consécutifs qui soient divisibles par quelqu'un des nombres premiers 6, X, p. ..<|,, *>. Donc sur > termes consécutifs, il y en aura au moins un qui ne sera divisible par aucun de ces nombres. 4ML, jīV,t' 3« -A f .ÎU^/'&n/- " igitized by Google

QUATRIÈME PARTIE. 77 Ce théorème très-remarquable est susceptible de plusieurs belles applications. On en jugera par les deux conséquences que nous allons en tirer. (4n) La progression $A - C, aA - C, 3A - C$, etc. étant continuée jusqu'au w terme $nA - C$, soit L le plus grand entier compris dans $l/(A - C)$; soit en même temps u le nombre premier immédiatement au-dessous de L , et 4 le nombre premier qui précède u ; si dans la progression $A - C, 2A - C, 3A - C$, etc. , on prend partout où l'on voudra j termes consécutifs, il faut , en vertu du théorème précédent, que sur ces j termes il y en ait au moins un qui ne soit divisible par aucun des nombres premiers $3, 5, 7, 11, \dots, < j$, w , et qui sera par conséquent un nombre premier, la progression étant terminée au terme $nA - C$. Le nombre des termes de la progression , depuis celui qui approche le plus de $\sqrt{nA - C}$ jusqu'au dernier terme $nA - C$, est à peu près $n - l/Q$; (car on suppose $C < A$, et on a l/nA). Donc dans les n termes de la progression dont il s'agit, il y aura au moins $n - l/Q$ témoins autant de nombres premiers qu'il y a d'unités dans $n - l/Q$, ou à peu près dans n . Ce nombre peut être aussi grand qu'on veut, en donnant à n la valeur convenable. Donc « Toute progression arithmétique dont le premier terme et la « raison sont premiers entre eux , contient une infinité de nombres premiers. » Cette proposition, qui est très-utile dans la théorie des nombres, avait été indiquée dans les Mémoires de l'Académie des Sciences , an. 1785; mais jusqu'à présent sa démonstration n'était point encore connue et paraissait offrir de grandes difficultés. (4 12) On pourrait, s'il était nécessaire, resserrer graduellement les limites entre lesquelles doit se trouver un nombre premier; car le nombre ic^u qui fixe l'étendue de ces limites, diminue en même temps que n , et à peu près en raison de $\sqrt{n}$; donc lorsque n est

The text on this page is estimated to be only 22.63% accurate

7S THEORIE DES NOMBRES. moindre, ou que la progression est moins avancée, il faut un moindre nombre de termes consécutifs pour trouver parmi eux un nombre premier, que lorsque la progression est plus avancée. Par cette raison on trouverait une quantité plus grande que $1/\epsilon$ pour le nombre des termes de la progression qui sont des nombres premiers; ce résultat augmenterait encore en excluant les nombres premiers impairs qui peuvent diviser A ; car si le nombre de ceux-ci est i , alors au lieu du nombre i mentionné dans le théorème du n° 410, on devrait prendre i° . Mais ces observations sont peu importantes, et il suffit d'avoir démontré généralement que toute progression arithmétique, dans laquelle C et A sont premiers entre eux, contient une infinité de nombres premiers. Quant à la multitude des nombres premiers contenus dans n termes de la progression arithmétique, elle ne peut être déterminée que par d'autres considérations.

(413) Examinons plus particulièrement la progression des nombres impairs $t, 3, 5, 7, 9, \dots, an - i$, et proposons-nous de trouver combien de termes il faut ajouter à cette progression, pour que parmi ces termes il se trouve nécessairement un nombre premier. Soit u le nombre premier qui satisfait à la question, et v le nombre premier qui suit immédiatement u ; il faudra, suivant notre théorème, que u soit le plus grand nombre premier contenu dans $+2<j> - i$; donc $u - 2 < j - i$; donc $u - 1 < an$. Mais $u - 1$ ne saurait être moindre que 2, on aura donc $u - 1 < an - 4$ d'où résulte $w - 1 < V(2u - 4)$ et par conséquent $u - 1 < 1/(an - 4)$. Cette solution générale fournit le théorème suivant : * Soit u le plus grand nombre premier contenu dans $1/(an - 4) - 1$; je dis que parmi les nombres impairs qui suivent immédiatement $u - 1$, il y aura toujours au moins un nombre premier. » (414) Par exemple, soit $an - 1 = 57$, le nombre premier le plus grand contenu dans $1/57 - 1$ est 7. Donc parmi les sept nombres impairs qui suivent 7 et qui sont: 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 27.04% accurate

QUATRIÈME PARTIE. 79 i2i , ia3, ia5, 127, il y a nécessairement un nombre premier; c'est 1 a7 , qui est précisément le septième. Ici la limite fixée à 7 ne s'est trouvée que de la grandeur nécessaire; le plus souvent , et surtout lorsque n est très-grand , elle est beaucoup trop étendue ; on l'agrandirait encore, mais on simplifierait l'énoncé du théorème, en disant que de L à \. -4- il doit nécessairement se rencontrer un nombre premier. Ce théorème est au moins un premier pas vers la solution du problème regardé comme très-difficile, de trouver un nombre premier plus grand qu'une limite donnée. Remarque. Si on donnait à n des valeurs très-petites, on trouverait que ce théorème est sujet à quelques exceptions ; mais comme on a supposé que 4» est un terme de la suite 3 , 5 , 7 , 11 , etc. , il faut que $\frac{1}{C}zn - 4) - 1$ soit plus grand que 3, ainsi on doit faire $n > 10$, et alors il n'y aura aucune exception. Digitized by Google

80 THÉORIE DES NOMBRES. S X. OU l'on prouve que tout diviseur quadratique de la formule $V + Nu'$, contient au moins un nombre Z plus petit que N et premier à N . (4 1 5) Cette proposition est nécessaire pour compléter la démonstration du théorème XII de la troisième partie; elle se vérifie immédiatement dans tous les exemples qu'on peut se proposer, et même on peut donner la valeur générale de Z dans un grand nombre de diviseurs quadratiques qui contiennent un coefficient indéterminé et s'étendent ainsi à une infinité de valeurs de N . Mais nous ne donnerons de ces cas particuliers que ceux qui sont nécessaires pour conduire à la démonstration générale. Comme nous avons principalement en vue les formules de la Table VIII, qui font le sujet du théorème cité, nous ferons usage des mêmes dénominations. Soit donc le diviseur quadratique. . $r = Cj^2 + byz - az$ où l'on a $ac = N$, a et $c > nb$, et $c < a/2$; on suppose que les trois nombres a, b, c n'ont pas de commun diviseur; car s'ils en avaient un, il est évident que la proposition énoncée ne pourrait avoir lieu. (4i6) Cela posé, remarquons d'abord qu'il y a deux cas principaux où on obtient immédiatement la valeur de Z . i° Si l'un des deux nombres a et c n'a point de diviseur commun avec N , ou s'il n'a que a de commun diviseur, ce nombre pourra être pris pour Z . Si le diviseur quadratique proposé manque de second terme, de sorte qu'on ait $r = cJ^2 + C2'$ et $N = ac$, il est visible que le nombre c a, compris dans V , est plus petit que a et n'a aucun diviseur commun avec ac ; donc dans ce cas on a généralement $Z = r/a$. Digitized by Google

QUATRIÈME PARTIE. 81 Il ne s'agit donc plus que d'examiner les cas où b n'étant pas zéro, les coefficients a et c ont chacun un diviseur commun avec N . Dans cette double supposition, non-seulement il est possible de trouver le nombre cherché Z dans la formule proposée $cy^* + aby + az^2$ mais il est possible de le trouver dans la formule moins générale $cy^* - by + a$. Nous allons donc faire voir qu'on peut toujours satisfaire à l'équation $Z = cy^* - by + a$, en supposant Z moindre que N et premier à N ou à $|N$. (417) Soit δ le plus grand commun diviseur de c et N ; nous représentons ainsi ce diviseur afin d'exprimer que X n'a que des facteurs inégaux, et pour pouvoir conclure de l'équation $cX = N$ que X est le plus grand commun diviseur de c et de b . Soit donc $c = \delta c'$, $b = \delta b'$, $N = \delta XN'$, on aura $N' = ac' - b'$ et le diviseur Z deviendra $Z = c'y + ztb'y + a$. J'observe d'abord que Z ne peut avoir aucun diviseur commun avec δ ; car si un même nombre premier α divisait Z et δ , il est évident, par la formule précédente, qu'il diviserait a /donc les trois coefficients a , b , c seraient divisibles par un même nombre, ce qui est contre la supposition. Mais on a $N = \delta XN'$; donc s'il y a un commun diviseur entre Z et N , ce même diviseur aura lieu entre Z et N' ; et réciproquement si Z et N' sont premiers entre eux, Z et N le seront aussi, comme la question l'exige. Tout se réduit donc à faire en sorte que Z et N' n'aient point entre eux de commun diviseur. Or la valeur de Z étant multipliée par c' donne $c'Z = \delta c'cy + \delta c'zby + \delta c'a$, et d'ailleurs les nombres c et N' sont premiers entre eux, puisque δ est le plus grand commun diviseur de c et N . Donc on sera assuré que Z et N n'ont point de commun diviseur impair, si on fait en sorte que $c'y + b'$ et N' soient premiers entre eux. II. M Digitized by Google

8a THEORIE DES NOMBRES. (418) Appelons $\langle', \langle'', \langle''' \dots$ les n différents nombres premiers impairs qui peuvent diviser N ; si on désigne par $f_t(\_)$ le ternie de rang $t-1$ dans la suite naturelle des nombres premiers 3, 5, 7, 11, etc., et que d'après le terme général $f_{t-1} y + b'$, où b' est premier entre eux, on forme la progression arithmétique indéfinie dans les deux sens : $\dots - a_0 c + b', -b_1 c + b', -b_2 c + b', \dots$ Il a été démontré ($n \geq 4$) que sur n termes consécutifs de cette progression, il y en aura au moins un qui, n'étant divisible par aucun des nombres premiers $\langle', \langle'', \dots$, sera nécessairement premier à N . On trouvera donc ainsi tant de valeurs de Z qu'on voudra, lesquelles n'auront aucun diviseur commun avec N ; mais il reste à faire voir que parmi ces valeurs il y en aura toujours au moins une moindre que N . (419) Observons d'abord que pour avoir les limites des valeurs de y qui rendent Z moindre que N , il faut résoudre l'équation $N = cy + a$, laquelle donne pour ces limites $j \leq y \leq c$. Leur différence $\frac{1}{c}$ est à très-peu près le nombre des valeurs de y qui rendent $Z < N$; car au moyen des valeurs précédentes, et en observant qu'on a $\frac{1}{c} \leq y \leq c$, on trouve aisément que le nombre de ces valeurs est égal à l'entier compris dans $\frac{1}{c}(cN - a)$, ou ne peut surpasser cet entier que d'une unité. Appelant donc r ce nombre, on aura $w = E(a + J^{r-1} c)$, Gu dans certains cas, $n = 1 + E^{1/r} / (c - f)$. mais on peut s'en tenir généralement à la première valeur, et le calcul ne sera que plus concluant en faveur de notre proposition. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 29.94% accurate

QUATRIÈME PARTIE. 83 On peut donner à cette valeur une forme plus commode. Puisque a et c ont chacun un commun diviseur avec N , et que b n'est pas iéro, il faut que b soit divisible au moins par deux nombres premiers impairs différents l'un de l'autre; ainsi b ne saurait être moindre que 3×5 , et comme on a $c > 2b$, on doit donc avoir aussi $c > 30$. Le même nombre c , supposé le plus petit des deux a et c , est $< 21 / - | IN$; et comme on a $c N - c > (c - 1) N$, la valeur de n peut être mise sous la forme 11 faut maintenant faire voir que, quel que soit le nombre i des facteurs premiers différents dont N' est composé, on aura toujours (4aoj Reprenons la valeur $N' = ac' - \backslash b \backslash$ et supposons que le plus grand commun diviseur entre a et N soit $\wedge v$, jt' étant le plus grand carré qui en est facteur; il faudra que b' soit divisible par : ainsi en faisant $a = \wedge - * a \backslash \pounds' = p.v\pounds''$, on aura $N' = n'v(a' c - \backslash vb''')$. Le facteur pourrait se réduire à l'unité, mais v est un facteur impair qui reste nécessairement, puisqu'on raisonne dans l'hypothèse que a et N ont un commun diviseur autre que 2. Quant à l'autre facteur de $- Xv\&'''$, on peut faire voir qu'il est plus grand que $3 > v\&'''$; car a et c étant l'un et l'autre $> nb$, on a $\ll c > 4\pounds \backslash$ ce qui donne $aV > 4W > '' \backslash$ Cela posé, on voit que N' ne peut avoir moins de deux facteurs impairs différents, ou que i ne peut être moindre que 2. Nous allons examiner successivement les différents cas qui ont lieu selon les différentes valeurs de i . Supposons i' que N' n'a que deux facteurs, v et $\ll$; le nombre i étant 2, on aura $p / - ^\circ = (t(' \blacksquare = \blacksquare 3$, puisque 3 est le premier terme de Digitized by Google

84 THÉORIE DES NOMBRES. la suite 3, 5, 7, 11, etc. Il faut donc prouver que r_i est plus grand que 3. Ayant d'une part $N' = v a_i$ et de l'autre $N' \leq X v$ & 'Sona à plus forte raison $\ll X v$; et comme les moindres nombres à prendre pour X et v sont 3 et 5, on aura $\ll 45$. Ainsi on ne saurait supposer « moindre que 46 ou 47; on peut prendre $a = 46$, parce que le facteur a ne change rien au résultat qu'on veut obtenir. Alors on aura $N = \ll X N' = e' X v.46$; la moindre valeur de N est donc $N = 3 \cdot 5 \cdot 46 = 690$, d'où résulte — $690 > 9,37$. Donc si N' n'a que deux facteurs premiers impairs, on aura $r_i > \wedge i \sim t$). a* Supposons que N' a trois facteurs premiers, et de plus que ces facteurs sont inégaux, afin de rendre d'autant plus grande la valeur de 1; on fera donc $N' = v \ll 6$, $i = 3$, ce qui donnera $\bullet > \wedge = 5$; il faudra encore qu'on ait $N' > 3 v' X b'' 1$; et par conséquent $a \hat{=} 3 v X$. La quantité $3 v X a$ pour minimum 3.3. 5, ou 45; donc $\ll 45$. Mais les nombres a et 6 doivent être inégaux entre eux et différents de 3 et 5; on ne peut donc prendre pour « et 6 des valeurs moindres que 7 et 11. Elles donnent $N' = v.7-u$, et la moindre valeur de $N = \ll X N'$ sera $X v.7.11$, ou 3. 5. 7. 11. Mais il est évident que $1/(3.5.7. 11) > 5$ « Donc on a encore $r_i > \{ * c'''^o. 3'$ Soit $N' = v a \in y$; ces quatre facteurs étant impairs et inégaux, on aura $t = 4$ et $v Si$ — $\geq v P \geq j$. Dans ce cas la moindre valeur de $N = e \ll X v a 6 \ll y$ sera 3.5.7.n.i3; or $1/(3.5. 7. 11. i3)$ ou.. $1/(7. 11. 13. 15)$ est évidemment plus grande que 7; donc on a encore $/i^* > \{ t(, -,)$. 4* En admettant un facteur de plus, on aurait $1 = 5$, $' \geq 11$, et la moindre valeur de N étant 3.5.7. m. i3. 17 ou 11 • i3. 17. io5, on aurait $\vee N > aa$, et par conséquent $/ \gg > \wedge V/N > p!$ — \

L'inégalité devient évidemment de plus en plus grande en faveur de r_i , à mesure que le nombre des facteurs augmente au-delà de trois: ainsi la proposition est rigoureusement démontrée lorsque N' aura un nombre quelconque de facteurs impairs, inégaux.

QUATRIÈME PARTIE. «5 S'il y a des facteurs égaux dans N' , ils n'entreront que comme facteurs simples dans la valeur de $*$, et par conséquent dans celle de $\frac{1}{N}$ augmentera et l'inégalité deviendra encore plus grande en faveur de n' . Il en sera de même du facteur a , qui, lorsqu'il a Lieu, augmente la valeur de a' sans augmenter celle de $|t|$, $^{\circ}$. Donc dans toutes les formules qui ne se rapportent pas aux cas 1 et 2 du $n^{\circ} 4$, on pourra toujours trouver un ou plusieurs nombres Z plus petits que N et premiers à N ou à $|N|$.

86 THÉORIE DES NOMBRES. § XI. Méthodes pour trouver combien , dans une progression arithmétique quelconque , il y a de termes qui ne sont divisibles par aucun des nombres premiers compris dans une suite donnée. ■ • ■ ■ - - . « Considérons de nouveau la progression arithmétique $A-C, aA - C, 3A - C, nA - C$, dans laquelle A et C sont premiers entre eux, et soit 6 un nombre premier non-diviseur de A . Si on détermine le nombre 0^* plus petit que 0 , de manière que $A \cdot 8^* + C$ soit divisible par 0 , et qu'on fasse $x = 8z - 0^*$, toutes les valeurs de x comprises dans cette formule rendront $Ax - C$ divisible par 8 . Cela posé, le nombre des termes de la progression proposée étant n , supposons qu'on demande combien il y a de ces termes qui ne sont pas divisibles par 0 . Si n est un multiple de 0 , il est clair que le nombre des termes divisibles par 0 sera J ; donc le nombre des termes non-divisibles étant nommé y , on aura $y = n - J = n(i - \frac{1}{8})$. Si n n'est pas un multiple de 8 , la formule précédente désignera , à une fraction près , le nombre des termes non-divisibles par 8 . Mais pour avoir une formule exacte dans tous les cas, observons que les termes divisibles par 8 forment la suite $A(0 - 8^0) - C, A(8 - 8^1) - C, A(16 - 8^2) - C, A(24 - 8^3) - C, \text{ etc.}$, jusqu'à un terme $kA8 - A8^0 - C$, aussi approché qu'il est possible de $An - C$, et plus petit que $A \gg - C$. F) désignons à l'ordinaire par $E^{\wedge \sim \wedge}$ l'entier le plus grand contenu dans $-\bullet^* -$; cet entier sert à la valeur de $/\bullet$; donc le nombre des

The text on this page is estimated to be only 27.16% accurate

QUATRIÈME PARTIE. 8? termes divisibles par \$ dans la progression proposée sera $E(j-j^J)$ » et par conséquent le nombre des termes non-divisibles est $= -E(=\pm!)$. Lorsque n est divisible par e , l'entier contenu dans est quel que soit 6^0 puisque $\hat{o}^*$ est positif et <9 . Donc alors on aura. . . (4aa) Soient maintenant 6 et $>$ deux nombres premiers uoo-diviseurs de A , et soit proposé de trouver combien, dans la même progression, il y a de termes qui ne sont divisibles ni par 0 ni par a . Désignons en général par A° le nombre positif et moindre que a , qui rend $AA'' - \diamond - C$ divisible par A ; l'expression E désignera le nombre des termes divisibles par 0 dans la suite proposée, et $\wedge(\sim T \sim 0)$ le nombre des termes divisibles par X . Si 011 retranche l'un et l'autre du nombre total n , il restera $\ll - E(\wedge \sim) - E(\wedge -$ *)Mais de cette manière on retrancherait deux fois les termes divisibles par $\hat{o}x$; pour ne les retrancher qu'une fois, ainsi que la question l'exige, il faut ajouter à la quantité précédente le nombre des termes divisibles par $8X$, lequel est $E^\wedge - \zeta \sim - \backslash$ On aura ainsi le nombre demandé Dans le cas où n est divisible par $6X$, cette formule devient $^* \wedge 23$) En général soient $0, X > 1^* \cdot ..<!\rangle, \rangle$, tant de nombres

88 THÉORIE DES NOMBRES. qu'on voudra (a excepté) dont aucun ne divise A, et soit proposé de trouver combien, dans la progression $A - C, aA - C, \dots$. «A — C, il y a de termes qui ne sont divisibles par aucun de ces nombres; il faudra distinguer deux cas : i • Si n est un multiple du produit $6 * p$. <|* », le nombre demande *«(«-i)0-i)(-f) (-3 M Cette même formule donnera en général un résultat approché pour toute valeur de n; mais l'approximation pourrait devenir fautive si le produit GXp . . .tj»u équivalait à une puissance très-élevée de n. a* Quel que soit n, on obtiendra toujours la solution exacte, au moyen de la formule $y = \dots / E(^> / E("-$ $^ - / E(^aie\ddot{i}) + e \ll c \dots$. (10 dans laquelle /*E exprime la somme des entières $E^{^ - ^ - ^}$, ^CT *)' etc'* <*us aux s'mP^es n^omDres 6>X, etc. ; fE) la somme des entiers $E ("'^ > E (" fyf)i$ etc- » dus aux Pro" duits deux à deux de ces nombres, et ainsi de suite; ces quantités devant être formées dans toutes les combinaisons possibles et avec les mêmes signes que les termes de même dénomination dans le produit développé $n\zeta_i - |) (i - |)$ — Il faut observer cependant que dans la forme (b') les termes ne doivent être continués que tant que les dénominateurs A n'excèdent pas $A_n - C$, dernier terme de la suite proposée ; car lorsque A surpasse $A_n - G$, le nombre A° qui rend $A A''$ $4 - C$ divisible par A, est plus petit que $A - n$; ainsi on a $eT^{*''^}) = 0$. Dans le cas où n est un multiple du produit $8 > jt$. . .y»=ft, chaque terme $E^ - g - j$ de la formule (b') se réduit à ^ , et on retombe exactement sur la formule (a'). Digitized by Google

QUATRIÈME PARTIE. 89 En général si on a $\frac{1}{i} = a + m$, la valeur de y sera composée i° de la partie k ($0 \leq k < 1$) ($X \leq 1$) ... ($\infty \leq 1$) qui répond à la valeur $n = k\phi$; a° de la partie qui répond à la partie $n = m$, et qui est donnée par la formule (b'). (4a4) Dans le cas particulier où l'on considère la progression des nombres impairs $1, 3, 5, \dots, 2/1 - 1$, on a $A=2$, $C=1$, et la valeur de A_0 qui rend $2A^n + 1$ divisible par A , est en général $A^0 = y(A - 1)$, ce qui permet de former immédiatement tous les termes de la formule (b'), chacun étant $\pm E(\dots \sim H^* \sim \infty)$. Soit proposé, par exemple, de trouver combien, dans les 100 premiers termes de la progression $1, 3, 5, 7, 9, \dots$, il y a de termes qui ne sont divisibles par aucun des nombres premiers $3, 5, 7, 11$; la formule générale donnera $r = 100 - E(1/3) + E(1/5) - E(1/7) + E(1/11) - E(1/3 \cdot 5) + \dots$. On ne va pas plus loin, parce que les autres produits formés avec les facteurs $3, 5, 7, 11$, surpasseraient 199, dernier terme de la suite proposée. Faisant donc les réductions, on aura $r = 43$. La formule d'approximation (a') donne pour le même cas $j = 100$. $|J^4 - 4i^4|$ ce qui s'écarte peu de la vérité. (4a5) Examinons plus particulièrement la suite des nombres impairs $1, 3, 5, 7, \dots$ jusqu'à $2 \ll - 1 = 0$, et désignons, pour abréger, II.

The text on this page is estimated to be only 28.84% accurate

90 THÉORIE DES NOMBRES. par T le nombre des termes qui restent de cette progression, après avoir supprimé ceux qui sont divisibles par quelqu'un des nombres premiers successifs 3, 5, 7, 11... Nous distinguerons deux cas : 1° Si l'on a $w > 1/a$, tous les termes dont il s'agit seront des nombres premiers; supposons donc que par $N(», a)$ on désigne combien il y a de nombres premiers depuis u jusqu'à a , l'un et l'autre inclusivement, on aura $T(2) = N(», «)$. Quant au nombre $N(», a)$, il se trouvera ou par les Tables, ou par la formule approchée $N(u > a) = H-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \dots - \frac{1}{a}$, dans laquelle $c = 0,8366$. a* Si on a $a < w/2^k$, appelons $<a, a>$, etc. les nombres premiers qui suivent w , depuis $«$ jusqu'à $1/a$; appelons en outre $c, a'', a''',$ etc. les entiers impairs les plus grands contenus dans les fractions $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$, etc. Parmi les termes dont le nombre est représenté par T , il y a d'abord tous les nombres premiers de $»'$ à a , lesquels avec le premier terme 1, qui est toujours du nombre des restants, font un nombre $N(*>', a) - 1$ ou $N(*», a)$. Viennent ensuite les nombres qui résultent du produit de w' par chacun des nombres premiers de $»•$ à leur nombre est $N(«', a!)$; ainsi de suite. On aura donc $T(?) = x N(», «) + N(», «9 + N(««», a) + \dots$. Cette quantité s'évalue aisément au moyen d'une Table de nombres premiers suffisamment étendue. Car en commençant par les derniers termes et connaissant, par exemple, la valeur de $N(«'', a'')$, on en déduit $N(«\a9 = N(«'', a'') + N(«:, a')$; l'expression $N(«, a')$ èèù~ Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 28.12% accurate

QUATRIÈME PARTIR. 91 gnant combien il y a de nombres premiers depuis a'' jusqu'à cl inclusivement, ou ce nombre augmenté d'une unité, si a'' n'est pas premier. (4a6) Pour donner une application de ces formules, cherchons la valeur de $T(-4^{\wedge})$, c'est-à-dire, le nombre de termes de la progression $i, 3, 5$ ia $5i$, qui ne sont divisibles par aucun des nombres premiers $3, 5, 7, 11, 13$. Je trouve d'abord que de $i3$ à $1a5i$ il y a 199 nombres premiers, ce qui donne $N(i3, i25i) = 199$; je divise ensuite $ia5i$ par les nombres premiers $17, 19, 23, 29, 31$, compris de 13 à $l/iâS\ddot{i}$; les quotients impairs qui en résultent sont $73, 65, 53, 43, 39$. Or à l'aide de la Table on trouve $N(31, 3g) = 2$, $N(29, 43) = a + N(3\$, 43) = 5$, $N(a3, 53) = 5 + N(43, 53) = 8$, $N(i9, 65) = 8 + N(53, 65) = u$, $N(i7, l'S) = 11 + N(65, 73) = i5$. La somme de ces nombres est $4i$; donc $T(^?) = 199 + 41 = a4o$. La formule d'approximation (a1) donne darts le même cas $T(jff) = 6a6 \times o,3836 = a a4o$. Mais le résultat n'en est pas toujours aussi exact; par exemple, cette même formule donnerait $T(^p) = io638 \times o^8344 = 3o15$, tandis que la vraie valeur de cette quantité est 2987. (4a7) La quantité $T^{\wedge}$, ou en général P , relative à une progression quelconque $A - C, aA - C, /iA - C$, et en supposant des diviseurs premiers quelconques $p \dots '«J»$, u , peut se ramener à d'autres quantités de la même espèce, dans lesquelles la série des diviseurs serait moins étendue. En effet la valeur de $P(\pounds)$ donnée par la formule (b'), est. $\dots n\_yE(^{\wedge}) - H/E(^{\wedge}t^{\wedge})$ — etc.; on y remarque d'abord une suite de termes qui ne contiennent pas o , et dont la somme peut ia. Digitized by Google

9a THÉORIE DES NOMBRES être représentée par $\sum$ ce qui suppose que la suite des diviseurs $6, X, j_1, \text{etc.}$ a pour dernier terme $\leq j$. Les autres termes contenant w sont en général $\frac{E(i \pm \sqrt{w})}{e(\pm \sqrt{w})} - \text{etc.}$ Considérons un de ces termes quelconques $E >$ comme le nombre a doit rendre $Aa - C$ divisible par $\leq A$, si Ton fait $a = k \leq \sqrt{w} + 6$, ϵ étant positif et plus petit que $\sqrt{w}$, le terme deviendra $E \sim (\sqrt{w} + 6)$ Soit encore $n + g = n'w - 4y$, y étant positif et $\leq w$, on aura. $B(\sqrt{w}) = EC''(t'' + T) = E(\sqrt{w})$ Quant au nombre $i < PO$ voir ce qu'il signifie, il faut substituer la valeur $a = kt$ dans la quantité $Aa - C$, ce qui donnera $A \cdot w \sim \sqrt{w} - C = e$. De là on voit que $A \sqrt{w} + C$ doit être divisible par $\sqrt{w}$ et qu'ainsi g est ce qu'on a déjà appelé w° ; faisant donc $\sqrt{w} = \sqrt{w}^\circ$, puis $\sqrt{w} = C$, la quantité A devra satisfaire à l'équation $\sqrt{w} = e$, de sorte qu'on aura encore $k = \frac{e}{\sqrt{w}}$ Si on réunit maintenant tous les termes E avec les signes qui leur conviennent, la somme sera représentée par $\sum P'^{\sqrt{w}}$, $P'(\sqrt{w})$ étant le nombre de termes qui restent de la progression $A - C, aA - C, \dots, n'A - C$, après en avoir retranché tous ceux qui sont divisibles par quelque'un des nombres premiers $6, X, p, \dots, \leq j$. On aura donc enfin $p_0 = p(I) - p'(t)$ w formule qui sert à déterminer la quantité P' , t iu moyen de deux autres quantités semblables dans lesquelles il y a un nombre premier de moins à considérer. Le nombre C étant en général différent de $\sqrt{w}$, la progression $A - C, 2A - C, \text{etc.}$ est différente de la progression donnée; mais elles ont l'une et l'autre la même raison A . C'est pourquoi nous avons dis

QUATRIÈME PARTIE. 93 tingué par un accent la quantité F)
relative à cette nouvelle progression. On voit d'ailleurs que G' se trouve
immédiatement par la valeur $C = Ab^>$, ainsi que r_i par la formule r_i
 $= e(w^{\wedge}) \cdot (4^8)$ Les deux progressions dont nous venons de parler se
réduisent à une seule lorsqu'on a $A = 2$, $C = 1$, ou lorsqu'il s'agit de la
progression $i, 3, 5, \dots (an - 1)$. Alors on a $\gg^* = -j(m - i), C = i$, $r_i = E^{\wedge} **$
 $T^{\wedge} \sim >$ et la formule de réduction devient $t(:) = t(|) - t(t) (*)$ Cette formule
renferme une sorte d'algorithme qui peut avoir des applications utiles.
Supposons 7 par exemple , qu'au moyen de la Table des nombres premiers
de 1 à 100 seulement, on veuille savoir combien il y a de nombres premiers
de 1 à 1000. Le nombre premier immédiatement plus petit que $1/\hat{O}\hat{O}$ est $3i$
; ainsi en cherchant la valeur de $T(\wedge p)$, où l'on considère comme diviseurs
tous les nombres premiers de 3 à $3i$, il suffira d'ajouter 1 1 au résultat,
parce que $3 1$ est le iae des nombres premiers. Or par la formule (d') on a -
 $T(\pounds > T(t) \text{ rp } /500 \backslash \backslash 19/ -TG\hat{i}) - T(\pounds > -TGD T(\%) = t(t) - T(f >$ Digitized by
Google

94 THÉORIE DES NOMBRES. On trouve ensuite par la Table de
 là loojTQ^{sa}, TQ0s=3, T[^]-7.T([^])-9.T@) — .T[^] = .7.T(f)=,,. La somme de
 ces nombres est 70; d'ailleurs par la formule (b') on a T (-~")= 228 ; donc T
 (^jf) =228 — 70 = 1 58 , à quoi ajoutant 1 1 , le résultat est 169. Il y a en
 effet 169 nombres premiers de 1 à 1000. C'est par de semblables procédés
 qu'on s'est assuré que de 1 à 1000000, il y a 78527 nombres premiers ,
 résultat qui sert à confirmer la formule du n* 394. (429) Revenons à la
 formule générale (b'), et appelons c le plus petit nombre positif qui rend At
 + G divisible par A ; au moyen du seul nombre a , on pourra transformer
 d'une manière commode les différents termes de la formule (V). Soit , par
 exemple , E { ^ j un de ces termes où A doit être en général un diviseur de
 û; on pourra faire t=bz + &, * étant positif et < A. Alors A «+ C devient
 AAz-f-A\$-+-C, et comme cette quantité divisible par Cl, Test à plus forte
 raison par A, il faudra que A S + C soit divisible par A , ce qui donnera
 A"=i=» — As. On aura donc Faisant une semblable transformation pour
 chacun des termes dont la formule (b') est composée, on aura pour résultat
 général PG)-n(5±î)-nG)-.---M. n étant une fonction semblable à P , et dont
 la valeur générale est - n(;)=«-/E(î)+/E(fO-/E(4)+eW (H(430) Cette valeur
 de la fonction n prouve qu'elle n'est autre chose que la fonction P appliquée
 à la simple progression des nombres naDigitized by Google

QUATRIÈME PARTIE. 95

turels $1, a, 3, \dots, n$, et qu'elle désigne par conséquent le nombre des termes qui restent de cette progression après en avoir exclus tous les termes divisibles par quelqu'un des nombres premiers $\bullet, X, (t. \dots u$. En effet, dans le cas où le terme général $An - C$ se réduit à n , on a $A=1, C=0$, et la valeur de s qui rend $A + C$ divisible par f_i est simplement $1=0$, de sorte qu'alors P se change en n . La fonction n est nulle, ainsi que la fonction P , lorsque $n = 0$, et lorsque n est négatif, on a généralement $n = -n$ ($\sim$) » car la progression $1, a, 3, \dots$ « fait partie de la suite plus générale $3, -a, -i, 0, i, a, 3, 4, \dots$ etc. Suivant ce qu'on a déjà observé $n^* 4a3$, si l'on a $a = \#ft - m$, et qu'on fasse $ft' = (6 - i)(X - 1) (* - 1) \dots (\bullet - 1)$, il en résultera $p(iB^{\wedge}) = *fi' + P(\pounds) (g0$. Cette propriété aura donc lieu aussi pour les fonctions n et T , qui sont des cas particuliers de la fonction P . La fonction P' s'accorde avec la quantité $Z(\wedge) - n \cdot \wedge$ toutes les fois que n est un multiple de f_i ; dès-lors on voit que Z peut être regardée comme la valeur moyenne de $P(jl) \hat{i}$ en sorte que $PG) \sim Z G)^{*} un^*q$ «antité qui ne peut passer certaines limites, en plus ou en moins. La quantité $Z^{\wedge\wedge}$ augmente constamment de $\wedge$ à mesure que n augmente d'une unité; la fonction $P(?)$ n'augmente pas aussi régulièrement; cependant lorsque n est devenue $n + f_i$, elles ont augmenté l'une et l'autre de la même quantité f_i' . En général comme le $(/\gg + i)^{*} \dots$ terme de la suite $A - C, a A - C, \dots$ est $(/\gg + 1) A - C$, on voit que $P^{\wedge} \dots^{\wedge} - P$ sera $=0$ ou $=1$, selon que. . . . $(n - 4 - 1) A - C$ est divisible ou non divisible par un des facteurs de f_i .

96 THÉORIE DES NOMBRES. (43 1) Lorsqu'on considère la progression $i, 3, 5, \dots (an - i)$, la fonction P se change en T , et il faut faire $\ll = 7(\wedge - 1)$. Soit donc $t(\hat{u} - i) = \ll r$, et on aura De cette équation on déduit, en changeant le signe de n , $T(==) = n(\wedge) - nG$. Mais comme la progression $1, 3, 5, 7$, etc. continuée dans le sens négatif, est $-1, -3, -5$, etc., il est clair qu'on a $T(zjr) = -T)$. Donc des deux équations précédentes, on tire $nC42) - n(' - \wedge) = \wedge G$. Si l'on fait dans celle-ci $n = \ll$, il en résulte $n(\wedge) = an(\wedge)$; mais puisque $20 + 1 = fl$, il est clair qu'on a $n Qjj^\wedge = *TlQC* l^\wedge = S\ddot{i}$; donc $n(\wedge) = t^{**}$, ce qui donne les deux formules $n(\wedge) + \ll = ! = n'(h'') TG) - \gg (= \hat{i} - *) - *tf(\ll)$. Réciproquement de la seconde on déduit Et cette valeur étant substituée dans la formule (c'), on aura l'expression générale de P en fonction de T , laquelle sera $KD^\wedge C - \wedge) - \wedge) c$. D'où il suit qu'une progression quelconque $A - C, aA - C, \dots \ll A - C$, Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 24.37% accurate

QUATRIEME PARTIE. 07 contient autant de termes premiers à Cl, qu'il y en a dans un pareil nombre de termes consécutifs de la suite des nombres impairs pris, non depuis le commencement de la suite, mais depuis le terme. • $ae - a$ jusqu'au terme $ae - a$ — 1 inclusivement. Cette propriété établit une relation très-remarquable entre une progression arithmétique quelconque et la simple progression des nombres impairs. Il faut en effet, d'après le résultat qu'on vient d'obtenir, que ces deux progressions étant disposées, terme à terme, comme il suit : $1, A - C, - C, A - C, aA - C, \dots, nk - C, \text{etc.}$. . . $a - 3, ae - 1, 2 - 2, 1, ae - a + 3, a - a - f - a - 1, \text{etc.}$ deux termes correspondants quelconques soient tous deux divisibles ou tous deux non-divisibles par l'un des facteurs de Cl. Or c'est ce qu'il est facile de vérifier indépendamment de la théorie précédente; car deux termes correspondants quelconques étant représentés par $nA - C$ et $ae - f - 2 - a - 1$, si on observe que $Ae - C$ est divisible par $\hat{U}$, et que $a - 1 = f$, ces termes deviennent, en rejetant les multiples de Cl, l'un $A(n + a)$, l'autre $a(a - h - e)$. Donc ils seront tous deux premiers à n, ou tous deux non premiers à Cl, selon que $n - f - c$ sera premier ou non premier à Cl. Il résulte encore de cette propriété ou de l'équation (I'), que si on ne peut avoir plus de a termes consécutifs dans la suite 1, 3, 5, 7, 9, etc. qui soient divisibles par quelque'un des facteurs de Xi, il ne pourra non plus y avoir plus de a termes consécutifs dans une progression quelconque $A - C, aA - C, \text{etc.}$, qui aient chacun un diviseur commun avec Cl. Car si la quantité $T^{(\sim)}$ augmente d'une unité lorsque n devient $n + a$, il faudra qu'en même temps $P(s)$ 'devient p' augmente aussi d'une unité. C'est ce qui s'accorde avec le théorème du n°410. (43a) Les fonctions U, T, P ont encore quelques autres relations remarquables. D'abord, comme la progression $t, a, 3, \dots$

2/1 II. i3 Digitized by Google

98 THÉORIE DES NOMBRES. relative à n ($\wedge$), est composée de la progression $1, 3, 5 \dots (2n - 1)$ relative à $T^{\wedge}Q$ et de la progression $2, 4, 6 \dots 2n$, dont les ternies divisés par 2 donnent $1, 2, 3 \dots n$, il est clair qu'on a en général $TG = nG - nG$ m On trouverait semblablement $TG = u(\wedge) - n(\wedge)$ m Et comme on a $p(\hat{i}) = n(!T, -) - n(\hat{i})$. si on fait $/i = \ll$, cette équation donnera $pG = n\ll - \ll = TG$ m Faisant $\ll = e$ dans la formule (1'), on aura donc $TQ = T(-\wedge) - \wedge(\text{""Sr}) * \wedge a * s$ dans cette dernière équation « est volonté, puisqu'il ne reste plus de trace de la progression d'où $\bullet$ est tirée; donc on a, quel que soit n , $TG = TG - \wedge) - TGv \backslash$ m Cette formule se déduirait aussi de la combinaison des équations (k') et (m'). (433) Proposons-nous maintenant de déterminer combien il y a de nombres premiers dans la progression $A - C, 3A - C, 5A - C, n\backslash - C$, où nous supposons, comme ci-dessus, A et C premiers entre eux, et de plus A pair et $C < A$. Le nombre A restant le même, on peut prendre pour C celui qu'on voudra des nombres premiers à A et plus petits que A , et si on reDigitized by Google

The text on this page is estimated to be only 28.64% accurate

QUATRIÈME PARTIE. 99 présente la suite de ces valeurs .par C, $\wedge G$, Q. . . .G*, leur nombre k se trouvera, comme on sait, par la formule a, 6, y, etc. étant les différents nombres premiers impairs qui divisent A. Ainsi on voit que la progression proposée fait partie d'un système de k progressions semblables dont les termes généraux sont $/*A - C$, $\ll A - C$, $nA - G$ s. . . . $\ll A - C$ *. Gela posé si on s'arrête à une valeur déterminée du nombre n que nous supposerons très-grand par rapporta A, tous les nombres premiers moindres que $\ll A$, excepté ceux qui divisent A, seront compris dans ces diverses progressions , et notre objet est de prouver qu'ils sont répartis également entre elles, c'est-à-dire que s'il y a P nombres premiers compris dans la progression dont le terme général est $\ll A - CP$, et Q nombres premiers compris dans la progression dont le terme général est $nA - Cq$ > n étant le même de part et d'autre, le rapport q deviendra aussi peu différent de l'unité qu'on voudra en donnant à n une valeur suffisamment grande. (434) Soit 6 un nombre premier $< \sqrt{nA}$ et non-diviseur de A, et soit 6' un nombre positif plus petit que G, tel que, $A 6' \blacksquare + \blacksquare C$ soit divisible par 6 ; on a fait voir ci-dessus n" 4ai , que le nombre des termes divisibles par 0 , dans la progression qui a pour terme général $nA - C$, est exprimé par $E^{\wedge\wedge-\wedge}$) Or a et € étant deux valeurs de 0 relatives à deux valeurs particulières de G, telles que et C? , il est visible que les deux nombres désignés par $E^{\wedge\wedge-y-\hat{Q}}$, $E^{\wedge\wedge-y-\wedge}$, sont égaux ou ne peuvent différer au plus que d'une unité. Donc le nombre des termes divisibles par 6 , dans la progression dont le terme général est $\ll A - C$ et un semblable nombre dans la progression dont le terme général est $\ll A - C$, seront égaux entre eux ou ne différei3. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 20.86% accurate

ioo THÉORIE DES NOMBRES. sont au pins que d'une unité. Il est de même de» termes nondivisibles par 0 dont le nombre ne peut varier que d'une Unité au plus d'une progression à l'autre. (435) Soient $6, \backslash, p, \dots$ les différents nombres premiers moindres que $1/T\hat{A}$ et non- $^*!$ i viseurs de A; soit le nombre des termes de la progression $A - C_p, a A - CP \dots nA - CP$, qui restent après en avoir retranché tous les termes divisibles par l'un des nombres premiers $p \dots$; soit N_f le nombre semblable qui se rapporte à la progression $A - C_j, 2 A - C? \dots \ll A^C_f$; en vertu du résultat précédent, la différence entre N_f et N , ne pourra jamais être un nombre plus grand que celui des nombres premiers moindres que $V_{rnk} >$ et que nous représenterons par $m^* = \leq \zeta (V^n \hat{A})$. D'un autre côté, tous les nombres $N, N, \dots NU$, qui répondent aux k valeurs différentes de G , doivent composer les différents nombres premiers compris depuis $|/n \sim \hat{A}$ jusqu'à $a\hat{a}$, et leur somme est représentée par conséquent par la quantité $M = \leq p(i A) - \leq p(y^{nk})$. Ces deux conditions ne peuvent être remplies à moins qu'on n'ait en général ξ étant une quantité constante pour toutes les valeurs de p depuis i jusqu'à ky et x_p une partie variable positive ou négative, qui ne peut jamais surpasser m et dont la somme pour toutes les valeurs de p est nulle. (436) Mais à mesure que n augmente, le nombre m devient de M plus en plus petit par rapport à M et même par rapport à $-\zeta(i)$, (i) Celle proposition assez évidente par elle-même, se vérifie aisément par la loi donnée § VIII; on a en effet suivant cette loi $M - f' \ll = s \dots, J' \log.(\ll A) - c1 / \ll - \wedge / \wedge$: dont $- + i = j V(n X) \cdot a.c$ quantité qui de $\log.frt A) - c m * v$; $\log.(ft A) - e 1 \wedge n$ vient aussi grande qu'on voudra, en augmentant progressivement le nombre n . Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 26.83% accurate

QUATRIÈME PARTIE. 101 doit il suit que le rapport des deux nombres désignés par N, et Ny , doit être censé égal à l'unité lorsque n est devenu très-grand , et qu'ainsi les M nombres premiers compris depuis 1/n~K jusqu'à «A, se partagent également entre nos k progressions. Une semblable égalité a lieu dans la répartition des nombres premiers compris depuis \y n A jusqu'à \n A et ainsi de suite. D'ailleurs à mesure qu'on descend des limites supérieures aux inférieures, les nombres analogues à M diminuent d'une manière rapide et la petite inégalité qu'il pourrait y avoir dans leur partage entre les k progressions serait sans influence sensible sur le partage résultant de la première valeur de M. Nous pouvons donc tirer de toutes ces considérations le théorème suivant. « La série des nombres premiers (excepté ceux qui divisent le « nombre A) se partage également entre les k différentes progressions formées d'après les termes généraux nk — C,, nA — C,, « n A — Cj . ..n A — C* ^de manière «quesi \$(n A) représente le nom« bre total des nombres premiers depuis i jusqu'à la limite «A, « chacune de ces progressions continuée jusqu'au nombre de termes « n, contiendra à très-peu près autant de nombres premiers qu'il « y a d'unités dans la quantité J«p(n A). • * . A » Nous savons par le §VHI quelle est la valeur approchée de f (n A) ; il en résulte que la formule i «A X~T\oS. (nA) — i.o8366 fera connaître avec une exactitude suffisante combien il y a de nombres premiers dans la progression A — C, a A — C, 3 A — C . . . n A — C. Par exemple, dans la progression 59, 1 19, 179. . .etc., dont le terme général est 60/1— 1 , le nombre k, déduit des facteurs simples a, 3, 5, du nombre 60,est3o(i — y) (1 — ■•) = '6, ce qui donne x — \0ç (6ow^_t o8366' A'ns' t*ans 'es 100000 Pr*n»«* termes de cette progression on devra trouver à très-peu près u58ao nombres Digitized by Google

to2 THÉORIE DES NOMBRES. bres premiers, c'est-à-dire un peu plus que le quart de tous les termes. (437) Il est maintenant facile de déterminer combien un diviseur quadratique donné $b=py^* + aqrz + rz^*$ de la formule $f + au^*$, contient de nombres premiers moindres qu'une limite donnée N. Soit pour cet effet 9 (M) le nombre total des nombres premiers plus petits que N, $7\zeta(N)$ exprimera celui des diviseurs premiers de la formule $t^* + au'$. Supposons que les diviseurs quadratiques de cette formule soient partagés en k groupes comprenant chacun un égal nombre de formes linéaires $k < i^* + *$, ou $2ax + *$, comme on l'a vu dans les art 307 et 208, dont les résultats se vérifient immédiatement dans les Tables IV, V, VI et VII ; chaque groupe devra contenir par conséquent autant de nombres premiers qu'il y a d'unités dans la quantité $A \cdot 9(N)$. Soit ensuite $j_t(1)$ le nombre de diviseurs quadratiques compris dans le groupe dont A fait partie, en ayant soin de compter pour 7 seulement chaque diviseur qui serait bifide, c'est-à-dire qui appartiendrait à l'un des trois cas $r/ = 0$, $r=iq$, $p=r$; alors — $j - 9(N)$ sera le nombre cherché de nombres premiers moindres que N, compris dans le diviseur A, s'il n'est pas bifide, et la moitié seulement, savoir si le diviseur A est bifide. Ce résultat est fondé d'une part, sur ce que les diverses formes $4x^2 + a$ ou $aax + i$, correspondantes à chaque groupe de diviseurs quadratiques, représentent des progressions arithmétiques entre lesquelles se partagent également tous les nombres premiers diviseurs de $t^* + au^*$ et dont le nombre total est $79(N)$; D'autre part, sur ce que, si l'on forme deux séries d'après les (1) Ce nombre p. sera le même dans tous les groupes, qui composent tous les diviseurs quadratiques d'une même formule t^* comme on peut le voir dans les Tables citées. Digitized by Google

QUATRIÈME PARTIE. io3 termes généraux $A = py^* + a qy^h + r h \backslash A$ et A' étant deux diviseurs quadratiques affectés à un même groupe et dans lesquels on donne à h une même valeur constante, tandis que 7 prend successivement les valeurs 0, 1, a, 3, 4, etc., les deux séries ainsi formées ont la propriété commune avec les progressions arithmétiques que les termes divisibles par un même nombre premier 0, se succèdent à un intervalle de 0 termes; d'où l'on peut inférer qu'elles doivent contenir une égale portion des nombres premiers qui divisent la formule $V + au'$, égalité qui sera d'autant plus exacte que la limite N sera plus grande. (438) Considérons, par exemple, dans la Table IV, la formule $+ fyy^*$ et son diviseur quadratique $A = oy^* + iyz + 35 z''$; c«diviseur fait partie d'un groupe composé de deux diviseurs bifides, et le nombre des groupes est 4î on a donc $k=h$, et $n=a.T = 1$ ce qui donne le nombre cherché $x = \wedge^g \wedge \zeta S$). Ainsi en faisant la limite $N = 1\ 00000$, on aura par la formule connue $\zeta(N) = 9 \& 88$ et $x = 7^9(N) = 599$; c'est-à-dire qu'il doit y avoir 599 nombres premiers moindres que 100000 compris dans le diviseur quadratique $aj^* + ajz -+- 35z \backslash$ Considérons encore dans la Table VI la formule $f + 106 m^*$ et son diviseur quadratique $A = aa < y^* + hyz + 5z^*$; ce diviseur joint au diviseur bifide $a/" + 53z^*$ forme l'un des deux groupes qui comprennent tous les diviseurs quadratiques de $f + 106$ «*. On a donc $k = 7$, et ($a = 17$, ce qui donne $\# = f9(N)$). Enfin pour appliquer les mêmes formules aux diviseurs compris dans la Table V, il faut réduire les diviseurs quadratiques à coefficients impairs en diviseurs de la forme ordinaire $py^* - t - aqyz + rz\%$ comme on l'a indiqué n° aa4- Prenons pour exemple la formule $f + 83$ «' qui a les deux diviseurs quadratiques $y^* + yz - h ai z'$, $3y - \backslash - yz -+- 7 z'$, formant un seul groupe; le premier se transforme en deux diviseurs $y^* + 83 z'$, ($y^* - f - a/z - H aiz'$, le second se transforme en trois autres, savoir :

The text on this page is estimated to be only 20.36% accurate

io4 THÉORIE DES NOMBRES. Donc si l'on veut savoir combien il y a de nombres premiers moindres que N compris dans chacun de ces cinq diviseurs quadratiques, on fera $t, \sqrt{L} \sim a$, parce que sur les cinq diviseurs il y en a un bifide, ce qui donnera $\phi^*(N)$ pour chacun des quatre diviseurs entiers ou non bifides et $z = ry^4 > (N > \text{pour le diviseur bifide } y + 83z \setminus$ Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 28.47% accurate

QUATRIÈME PARTIE. io5 •;■ à ' ,1'. w 1 — § XII. Méthodes pour compléter la résolution en nombres entiers des équations indéterminées du second degré. (439J Nous avons donné dans la première partie les méthodes nécessaires pour résoudre en nombres entiers les équations indéterminées du second degré, qui sont de la forme $ay^* + byz - cz'' = \pm 1$; c'est en effet à cette forme que peut être réduite toute équation proposée du second degré; mais il reste une condition à remplir lorsque l'équation dont il s'agit contient des termes du premier degré. Soit en général $ay^* + byz + cz^* + dy + fz - g = 0$ l'équation proposée; pour faire disparaître les termes où les indéterminées y^* et z' sont au premier degré, je fais $y = \frac{g}{a} + \frac{byz + cz^* + dy + fz}{a}$, et j'ai la transformée $\blacktriangleright * \blacksquare \ll 0 = ay'^1 + b/z' + cz'' + a^*y' + c\zeta z' + a^*1 + d^*9 + b\epsilon y - h b < iz' + b < t\epsilon - i - feQ + dly' + f^*z + c\hat{e}^* + gV \text{ Sup})K>$ sans donc $aaa + \wedge 6 + rfJ = 0$, $ace + 6a - i - y8 = 0$, on aura $l = H - 4ae > \hat{e} = \wedge - 4 \ll \hat{c}i d^oU l^on VOlt \wedge 81 \text{ dailS lequatlon}$ proposée on fait immédiatement $y + icd - fb z' - \wedge - 2a / - db J \sim bb - Aac ' bb - \hat{a}ac ' la$ transformée sera $ay' + by'z' + cz'^\wedge - W - bdf + cd?) (bb - fac) - g(bb - fac)$: Je remarque maintenant qu'on peut supposer que les coefficients a, b, c des termes du second degré dans l'équation proposée, n'ont II. i4

The text on this page is estimated to be only 24.22% accurate

i o6 THÉORIE « DEST NOMBRES pas de diviseur commun ;
car s'ils avaient un commun diviseur u , il faudrait que $dy + fz + g$ fut aussi
divisible par u ; or cette condition est facile à remplir, en introduisant une
indéterminée nouvelle à la place de y ou de z , et alors toute l'équation
devient divisible par u . Je remarque aussi qu'on peut faire abstraction' dd cas
oixbb — $\frac{f}{u}$ est une quantité négative, parce qu'alors le nombre des
solutions de la transformée étant toujours limité, le procédé le plus simple
est de substituer successivement les valeurs trouvées de y et z dans les
formules $r = -\frac{f}{u} + \frac{v}{u}z$ afin de voir <\ue]hs soot celles qui
donnent pour y et z des nombres entiers;; On peut< se dispenser < encore de
discuter rie- cas où $4ac - j$ quoique positif Δ serait égala un carré,
panoeqtralors la. transformée n'a encore qu'un nombre désolutions à l'um té
($n \leq 70$). Une restedonc à exaainecque lecasoù $\Delta \equiv 4 \pmod{4}$ e3tiiaiiioinbreipoaitif
noiwiaiwéi (44o> Alors la transformée Δ . si elle est résoluble,, aura toujours
une infinité de solutions renfermées dans un ou plusieurs systèmes, et
chaque système pourra être représenté par les formules $x = yF + \frac{1}{2}G [\frac{1}{2} +$
 $\frac{tyi}{fib} - 4\Delta c]$ $y = F + G/(\Delta - 4\Delta c)$. Pour éviter la considération des cas
particuliers, nous supposerons que ces formules sont préparées de manière
que les nombres y , te , e , $\frac{1}{2}$, 9 , sont des entiers, et que l'exposant n est
un nombre. à, vOr l'onté. Quelquefois la solution immédiate donnera, pour
ces coefficients, des nombres affectés de la fraction il pourra arriver aussi
que l'exposant n soit d'une forme désignée paire ou impaire. Mais dans tous
les cas, il est facile de réduire les formules à la forme que nous supposons,
où tous les, nombres. sont entiers eUexposant n à volonté : il faut de plus se
rappeler qu'on aura toujours $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$ $\Delta \equiv 4 \pmod{4}$ a <?)=i. Cela posé, il s'agit de
trouver en-général la valeur- de n relie que Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 25.54% accurate

$\text{ATMÈSffITPJOITIE. T ro7 7 bb} \text{---} \backslash \text{ac ' * AA} \text{---} 4\text{ac}$ soient ides entiers: i Or on a Ainsi en substituant ces valeurs de F et G , on voit que la question se réduit* déterminer $n^{\text{erm}} \text{mère qielesquanttfe}^{\wedge \wedge \text{J}^{\wedge} \text{H}''} \backslash \text{---} 4\text{ac '}$ so,ent des entiers. Four cela, nous distinguerons deux, cas r salon, que n est pair ou impair. Soit $r n = a m$, l'équation $9^* \text{---} \text{ty' (b' --- 4 c) = i} < \gg$ donne , en négligeant les multiples de $b^* \text{---} \text{^ac}$, $9''' = i$; on peut donc, au lieu de « et 6, mettre « 9^* » et 69^{**} , et alors supprimant le facteur 9^{****} qui ne peut avoir aucun diviseur commun avec $b^* \text{---} \text{^ac}$, on trouve que la détermination de m ne dépend plus que des équations du premier degré ■ * $(\ll -4 - v)? + z \text{Uty}^m \wedge (6 - 4 - 6)y - t - a^m \wedge . , \text{bb} \sim \text{rr} \backslash \text{ac} * \text{^bbn} - \text{iac} / /$ lesquelles doivent s'accorder entre elles, pour que l'équation proposée soit résoluble en nombres entiers. Soit $a' n = a m + 1$, alors, eu négligeant les multiples de $\text{bb} \text{---}$ fine, on aura encore $a = \ll 9^*$ et $\text{€} = \text{£} 9'''$, et la détermination de m dépendra des équations du premier degré $\text{Y} 9 + \ll - + - (\text{aCT} - + - \text{i}) \text{S} 9 \text{---} \text{c} \ll 9 + 6 - \text{Haw} - \text{HK} 9 \text{---} \text{c} \text{bb} \text{---} 4\text{ac ' } \text{bb} \text{---} 4\text{ac ' '}$ lesquelles doivent encore s'accorder entre elles. Donc dans tous les cas on trouvera les valeurs convenables de l'exposant /« parla- simple résolution d'une équation indéterminée du premier degré, et kt valeur de « qui résultera de cette solution i4Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 27.15% accurate

w8 THÉORIE DBS NOMBRES étant en général de la forme $v + (bb - \backslash a c)k$, où k est une indéterminée, il s'ensuit qu'on aura une infinité de valeurs de n qui satisferont à la question, de sorte qu'on aura aussi une infinité de solutions de l'équation proposée en nombres entiers. On doit d'ailleurs observer que les nombres F et G peuvent être pris chacun avec le signe qu'on voudra, ce qui donnera quatre combinaisons à examiner séparément, et d'où pourront résulter différentes solutions. (44 1) Soit proposé maintenant, pour compléter cette théorie, de résoudre la question suivante : Les nombres F et G étant donnés par la formule $(? + A)' = F + G/V$, dans laquelle $\dot{}$ exposant n est indéterminé, et où l'on a $9^* - y A = i$, trouver toutes les valeurs de n telles que la quantité $\backslash F - + p. G + v$ soit divisible par un nombre premier « qui ne divise pas A f Voici une méthode qui a été indiquée pour cet objet par Lagrange (iMétn. de Berlin, 1777.) Je suppose d'abord qu'on connaisse une valeur de l'exposant n qui satisfait à la question; soit cette valeur q , il faudra qu'en faisant $(? + \backslash)^n = f + gVA$, la quantité $xS + ?^* + *$ soit un entier. Je cherche ensuite un exposant q , tel qu'en faisant $(? + \backslash y = f + \backslash / A$, le nombre $\wedge$ soit divisible par «. Il est certain que cet exposant existe, puisqu'on peut toujours satisfaire à l'équation $A <^* y = 1$. Cet exposant étant trouvé, on peut supposer en même temps que $\backslash - 1$ soit divisible par w ; si cela n'était pas, on doublerait l'exposant $\langle y$; et faisant $(? - + - + 1/A)^n$ ou $(\backslash - H^VA)' = f + g''[\wedge$, on aurait $+A^{\wedge} = i + a Ag''$, et $g' = ti/g\backslash$ de sorte que $\backslash - i$ et g seraient à-la-fois divisibles par «. Donc en faisant les préparations convenables, on trouvera toujours un exposant q , tel qu'en faisant $(? + \wedge A)' = \backslash + \wedge VA$, les nombres $f - 1$ et g soient l'un et l'autre divisibles par u . Je dis maintenant qu'en prenant $\langle = ?x + \backslash / ?$, la quantité proposée $x F + a G - \rangle - v$ sera divisible par w , quel que soit l'entier x . Car soit

The text on this page is estimated to be only 29.75% accurate

QUATRIÈME PARTIE. 109 $(1 + \frac{1}{A})^n = F' + GVA$, on aura $F' = \frac{G}{G' + gW}$, et $X F + p G + v = (x + pg) F' + (-Kg A + fi) G' + v$. Mais les valeurs développées de F' et G' étant $F' = \frac{1}{w} + \frac{1}{w^2} A + \text{etc.}$, $G' = \frac{1}{w} + \frac{1}{w^2} xg' + \text{etc.}$, si on néglige les multiples de $\frac{1}{w}$, on aura $G = 0$, et $F' = \frac{1}{w} = 1$; donc en négligeant les mêmes multiples, la quantité $x F - H f G H - v$ se réduit à $X f + pg - hv$, donc elle est divisible par w . Puisque toutes les valeurs de n comprises dans la formule. . . $n = qx + p$ satisfont à la question, il y aura toujours une de ces valeurs qui sera moindre que 7, de sorte qu'on pourra toujours supposer $p < q$. Donc pour avoir l'exposant p qui donne la première solution, il faut élever $1 + \frac{1}{A}$ à ses puissances successive* 0, 1, 2, 3, . . . $q - 1$, et essayer, pour chaque puissance représentée par $1 + gV^n$ » s' » 'a quantité $x + pg + v$ est divisible par w . On peut aussi former directement la suite des quantités $x/h - pg$, en observant que cette suite est récurrente, et qu'elle a pour échelle de relation 39, — t ; d'où il suit qu'au moyen des deux premiers ternies connus 1, $X^9 H - fi < | >$, on formera aisément tous les autres. Ces calculs sont d'autant plus faciles, qu'on peut rejeter les multiples de u , à mesure qu'ils se présentent, et si le problème est possible, il faudra que dans les q premiers termes de la suite dont il s'agit, on trouve une ou plusieurs fois $X / + y. g \blacksquare + \bullet v = 0$. (44a) Connaissant l'exposant le plus petit pqui rend $x / + ng' - t - v$ divisible par un nombre premier u , voici la méthode qu'on peut suivre pour trouver a priori une valeur de n , telle que $X F - f - ji G + v$ soit divisible par une puissance donnée u . Nous observerons d'abord qu'on peut résoudre généralement l'équa $L + Mx + Nw + P^{**} - + - Q \ll J - | - \text{etc.}$, , ,, tion — — (im $v = e$, dans laquelle L et M sont des nombres donnés, et N , P , Q , etc. des fonctions quelconques entières de x . Pour cela, il faudra déterminer x de manière que — — - soit un entier; ayant trouvé $x = l + mx \backslash s \backslash$ on substitue

The text on this page is estimated to be only 21.15% accurate

i io THÉORIE DES ! NOMBRES. cet tejt» leur j dans inéquation
i proposée/ eUedevendra deJa forme $\wedge V^{*****} \wedge$ e semblab,e à ,a
proposéC) mais dont le dénominateur est d'un degré moindre d'une unité.
On aura donc, par une suite de procédés semblables, $x=l-\backslash-ux$, /' + « ar* ; *'a
/* ■+ , etc. ; :d'où l'on conclura $x \gg /' + W \ll \gg -4- / -f-$ eto. jusqu'à ain terme de
la forme uTx^{TM} dans lequel $a/\wedge$ sera une nouvelle indéterminée. Gelauposé,
si l'an veut v par exemple, déterminer la valeur de n telle que la quantité x^F
+ $pG + v$ soit divisible par $\gg 3$, on fera, (ommcrIndessus, $n=\langle ya; \blacksquare + \bullet / \rangle$, et
toutes choses étant dlatlleurs les mêmesi, faisant de plus $jtg-5=V$, $\backslash gA jt'$, on
aura $x^Fn \gg -$. (*G: + $t=X^F + j^*G' + v$. Dans cette quantité, qui est déjà divisible
par u, quel que soit a:, il faudra substituer, au lieu de F 'et G' leurs valeurs
développées, en omettant la troisième puissance et les puissances
supérieures de g ; ces. valeurs sont : On distinguera ensuite deux cas, selon
que x est pair ou impair. X i° Sd x est pair , on pourra , À la place de v +
mettre v ($f - g^* A$) » , et développer cette quantité, en omettant les termes
qui contiennent g'et les puissances supérieures de $\wedge$. Par.ces substitutions,
l'équation proposée $\wedge = e$ deviendra $\_ \_ \in$ Or /' n'étant pas divisible par u,
puisque/' — i l'est, on peut supprimer du numérateur le facteur commun
y?"" , ce qui fait disparaître la variable en exposant; si de plus on
fait $\wedge = \gg A', V - \gg - y = a \gg L$, l'équation à résoudre deviendra $W'' + t^* /' A' x + (v -$
 $\hat{T}^{11} - \hat{v}i) A''$ Au Digitized by Google

QUATRIÈME PARTIE " m Et celle-ci pouvant se traiter par. la méthode précédente, on aura le résultat de la forme $x=l+l'a + u'x''$, où il faudra prendre l'indéterminée x'' de manière que $*$ soit pair. 2° Si x est impair, il faudra; à la place «de v , mettre v ($\ll/*\blacksquare—g^*A) \sim \sim t$ et d'ailleurs le calcul sera entièrement semblable à -celui du premier cas. On verra maintenant le procédé à suivre-, pour faire en sorte qu'une quantité de la forme X . $F t - *- v$ soit divisible par un nombre quelconque P . Ayant décomposé P en ses facteurs premiers, soit «" un de ces facteurs, on cherchera les valeurs de n , telles que la quantité proposée soit divisible par et ainsi successivement par rapport à chacun des autres facteurs. On aura différentes valeurs particulières de n qu'il faudra combiner ensemble, afin d'avoir une valeur générale qui satisfasse à toutes les conditions, et le problème ne sera résoluble qu'autant que toutes ces conditions pourront être remplies. (443) Nous remarquerons que la valeur de q dont on a besoin dans la solution précédente (n° 43 1), peut être donnée directement par le théorème suivant. ■ « Si l'on a $9^* — A|' = i$, et qu'on cherche un exposant q , tel que « $(? + <H/A)^* — i$ soit divisible par un nombre premier w non-diviseur de $A <f>$, je dis qu'on peut faire $9 = w — 1$ si l'on a $+ 1$, c ou $q = u > 1$ si l'on a $(-) = — »$. En effet on trouvera, comme au n° 129, que la quantité $(\zeta - h^V/A)^w — (9 + ^l/A)$, divisée par o , laisse le même reste qu'une quantité semblable $(\zeta — k \blacksquare + \blacksquare \% l/A)^w — (\zeta — k + »J»l/A)$, dans laquelle k est un entier quelconque. Soit $* = <p$, on aura ainsi, en omettant les multiples de », $(? + */A)^n - (? + tV/A) = (+V/ A)^W - <H/A$,

The text on this page is estimated to be only 14.57% accurate

na THÉORIE DES NOMBRES. et le second membre, à cause de
 $\langle | \rangle w = \langle | r$, devient $| \forall h (A * \text{---} i) o. \langle 4, ^a[(\text{£})-i] \}$ Soit $r(\text{£}) = i$, on aura $(? -I-$
 $^/h)" \text{---} (? 4- \langle J, l/A) = o$; donc $(\text{ç} + ^v/A)w \text{---} 1 \text{---} 1$ est divisible par u , donc
on peut faire $7 = * \rangle \text{---} 1$. Soit $a_0 = \text{---} 1$, on aura $(? + \langle | \rangle VA)W = ? \text{---} \langle | \rangle l/A$;
donc $(? + ^/A)w + I = 9 \rangle \text{---} A|' = i$, donc on peut faire $7 = 1 * + 1$. Digitized by
Google

The text on this page is estimated to be only 21.55% accurate

QUATRIÈME PARTIE. n3 S XIII. De l'équation $x' + ay^{bz}1$.

(444) Supposons qu'une solution de cette équation soit donnée par les valeurs $x=f$, $y=g$, $z=h$; si en conservant la valeur $z=h$ on fait $x=J+iùty=g$ — riu>, on aura par la substitution $o = 3/' + 3/w + «*' — a n (3g^* \sim 3 gn » + n' «') \bullet$ Soit $1 — ag^*n — Oy$ ou $n — t—$, , l'équation restante donnera $a/i\}$ — i /J — «£J ' donc 1 » Ainsi on satisfera à l'équation proposée au moyen des nouvelles valeurs , ;. $* = / \{ /' + " ^ \} = / jr = -g(2f + ag>) = g' z = k(/>- ag') = :h'..$ Cette seconde solution en donnera une troisième exprimée par les formules $x = /'(/" - «- a ag) = f a : . . \bullet - - \blacksquare \bullet \blacklozenge \blacksquare - .v . i$ et ainsi à l'infini. Si les nombres /, g-, A, qui donnent la première solution sont considérés comme du premier ordre, les nombres /', ^', h', qui II. i5

n4 THÉORIE DES NOMBRES. composent la deuxième solution seront du quatrième ordre, les nombres f'' , g'' , h'' , qui composent la troisième solution seront du seizième ordre; c'est-à-dire en d'autres termes, que le nombre de chiffres d'une solution sera environ quadruple du nombre de chiffres de la solution précédente. A partir d'une solution telle que la troisième, par exemple, on peut suivre l'ordre ascendant pour avoir les solutions quatrième, cinquième, sixième, etc.; ce qui se fera par les formules précédentes; mais on peut aussi suivre l'ordre inverse pour avoir la deuxième puis la première solution; ce qui ne peut se faire que par de nouvelles formules que nous allons rechercher. (445) Il s'agit en général de déduire x, y, z , des quantités données x', y, z' , au moyen des équations $x^* = x(x^* + a \ll J) / \text{---} j r i z x^* a y l) z' = z(a^{?''''} \text{---} \ll .r5)$ Pour cela soit $y' = m x''$, $z' = n x$, ensuite $y \text{---} p x$, $z = q x$, on aura $x' = \wedge(i + z a p') m = p j z + a p')$ l'équation pour déterminer p sera donc équation qui est susceptible d'une solution assez simple. En effet, si on la met sous la forme $(p' + m p H \text{---} >)' \text{---} (t t p + v)' = 0$, on aura pour déterminer X, p, v , les équations $m \gg \text{---} 2 X \text{---} (i^* = 0$, d'où résulte $|i, = 2i + m' f f a \text{---} r = ; v \ll = v \text{---} 1$ a a Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 25.34% accurate

QUATRIÈME PARTIE. 1 1 5 La dernière donne $x' = 1 \sim "a, m >$,
et par conséquent $j . \geq l^{(' ^, W)} = /tt^{7 ^}; - * \text{ étant connu on a}$
immédiatement $ft = l / "(aX + w^*)$, et $v = ^m i$ — Ensuite on a pour déterminer
p les deux équations du second degré $-4 - (i) / ? + X + v = o$ $p' + (m -$
 $|i) / > + X - v = o$, : -d'où résultent ces quatre valeurs $/; = -Hm + r) \pm l / [-; (m +$
 $rf - l - ,]$ pétant connu on aura y par l'équation $y - 71 \wedge \wedge Jk^p J^ = - p'' + mt$
ensuite j: par l'équation $-r - r' (/ > 2 m)$ ce qui fera connaître $y - px$ et $z - qx$.
Au reste il n'est pas besoin de connaître j: qui pourrait être irrationnel ou
même imaginaire, car à la place des trois valeurs x, px, qx, il est visible
qu'on peut prendre i tp, q, comme si on faisait $x = i$. Ainsi tout se réduit à
trouver la valeur dep par l'équation $a / 4H - zamp^* + ap + m - o$, valeur qui
, si elle n'est pas rationnelle, ne donnera pas de solution. (446) Supposons
qu'on satisfasse à cette équation par la valeur $p = k$, d'où résulte $i / 2k + m \backslash$
les équations précédentes entre x, p, v, doivent se combiner avec
l'équation $p' + (m + p)p + x - I - v = o$ qui étant satisfaite par la valeur i5.
Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 25.10% accurate

n6 THÉORIE DES NOMBRES. $pz = zk$, donne $X + v = \dots$ $\{m - t - fi\} k$; niais on a donc $2v = m' - a/rtA - a^{*'} - 2|aA - j^{*}$.
Multipliant par f^{*} et mettant au lieu de j sa valeur $wX - i$ ou $7m(|i' - m') -$ on aura $\dots$ $m') - \wedge = \dots$ $ji^{*} - a^{*}ji' + (m^{*} - am^{*} - a^{\wedge})^{\wedge}$ ou $(t1 + (aA: 4 - m) > -f - (*/* - \gg) - ikm - m')^{\wedge} - m1 - \wedge = o$, équation qui détermine immédiatement et qui devient homogène entre y , m et A , en substituant au lieu de $\wedge$ sa valeur $\dots$ $a^{*}J(\wedge rj^{\wedge}j)$; on peut en effet l'écrire ainsi $o = (a\# + m)(iJ + (2^{\wedge} + m)^{\wedge} - t - (aA + /n)(aA' + aAm - m')p - h2k\backslash k + am) - mJ(a^{\wedge} + w)$. Cette équation est très -remarquable en ce qu'on y satisfait par la valeur $\wedge. - \vee \{m^{*} + ax\}$, tandis que X est déterminé par la formule $\wedge C4^{\wedge} = (* + * \gg) \ll \gg (.T^{\wedge} \ddot{I}ro > ^{\circ} "$ 'il aisément que l'équation en j a une racine réelle et deux imaginaires; ainsi on voit que la racine réelle est donnée par la formule $1/(m^{*} - f - ax)$, c'est-à-dire par un radical carré imposé sur une quantité composée de la partie rationnelle m' et de la partie aX qui représente un radical cubique. Cette forme de la racine d'une équation du troisième degré n'est pas semblable à celle que donne la formule de Cardan, puisque celle-ci est composée d'un terme rationnel joint à deux radicaux cubes imposés sur des quantités de la forme $A - t - l/B$, $A - l/B$. (447)
Cherchons a priori les équations du troisième degré qui Digitized by Google

QUATRIÈME PARTIE. 117 se résoudraient comme l'équation en p. Considérons pour cet effet l'équation $Ax^2 + Bx + C = 0$, et supposons $x' = M + y$, on aura $A(y+M)^2 + B(y+M) + C = 0$, et en élevant chaque membre au carré $(y+M)^2 [A + B(y+M) + C] = 0$, ou en développant $Ay^2 + 2AMy + A^2M^2 + By^2 + 2BMy + BM^2 + Cy^2 + 2CM + C^2 = 0$, ou en développant $(A+B+C)y^2 + 2(A+B)My + (A^2M^2 + BM^2 + C^2 + 2CM) = 0$. Maintenant si l'on veut que dans celle-ci les termes affectés de y^2 et y disparaissent, il faudra satisfaire aux deux conditions $A+B+C = 0$ et $2(A+B)M = 0$. L'équation de condition est par conséquent, en éliminant M , $3B^2 - 6AC = (A^2 - 4B^2)$ ou $A^4 - 4A^2B + B^3 + 6AC = 0$; alors on aura $M = \frac{A^2 - 2B}{3B - A}$, et l'équation pour déterminer y sera $y = \frac{(AM - C) - M(M+B)}{C - W} = \frac{Cr - (A^2 - 4B^2)}{3B - A}$. Substituant au lieu de C sa valeur $C = \frac{A^2 - 4B^2}{3B - A}$, on aura $y = \frac{(A^2 - 4B^2)(3B - A) - (A^2 - 4B^2)}{3B - A}$ et par conséquent, $y = \frac{A^2 - 4B^2}{3B - A}$.

The text on this page is estimated to be only 27.29% accurate

n8 THÉORIE DES NOMBRES. Cette formule de solution est beaucoup plus simple que celle que donnerait la formule ordinaire de Cardan; cependant on pense bien qu'elles ne doivent pas différer essentiellement l'une de l'autre, et qu'ainsi la plus composée peut être ramenée à la plus simple. C'est ce que nous allons faire voir. (448) Si dans l'équation proposée $x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$, on fait $x = z - \frac{A}{3}$, on aura la transformée $z^3 + pz + q = 0$, dans laquelle $p = -\frac{A^2}{3} + qB$ et $q = -\frac{A^3}{27} - \frac{9AB}{27} + \frac{37C}{27}$; substituant au lieu de C sa valeur en A et B, on a $q = -\frac{5A^4}{27} + \frac{8A^2B}{9} + \frac{9B^2}{27}$; de là résulte $q = \frac{9A^2B - 5A^4}{27}$; Soit donc $1 > 0(A' - 3B) = f$, on aura $V > [(A' - 3B) - i] = il$ et t^* par conséquent $z = z$ étant connu, on aura $t^* = i(-A - W + il)$, de là ou enfin $ts[t^* - B, A^4 - B, y^3 - A^3M]$ ce qui s'accorde avec la première formule qui est comme on voit l'expression la plus simple de x. (449) Pour donner une application des formules précédentes considérons l'équation $a^2 + y^2 = 7z^2$, à laquelle on satisfait en donnant

Digitized by Google

QUATRIÈME PARTIE. 119 aux indéterminées x, y, z , les valeurs 2, — 1, 1 respectivement De là on déduira la seconde solution 1 2 , 1 5 , 9 , ou plus simplement, en supprimant le facteur commun, 4,5,3. Celle-ci en donnera semblablement une troisième 1 265 , — 1 256 , i83, et ainsi à l'infini dans l'ordre ascendant. Pour continuer la même série dans l'ordre inverse, regardons comme donnée la solution 5,4>3, afin d'en déduire la première, par la méthode de l'art. 445, nous aurons $x=5, y=4, z=3$, ce qui donne $m = \frac{1}{2} \cdot 8, // = \frac{1}{2} \cdot 6$, et l'équation pour déterminer p sera $8, 4 p^* + lp' + P + 1 = 0$; d'où l'on déduit $p = -2, q = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$; on a ainsi immédiatement la solution i, p, q , ou 1, — 2, — 1, ou $2t = 1$ — ce qui est en effet la première solution d'où l'on était parti. Ce même résultat se déduirait, mais avec moins de facilité, des formules générales où l'on emploie les auxiliaires $X, -a, v$, pour avoir la valeur de p . On aurait alors $x^{(i)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}, K^{(i)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, ou par approximation $X = 0.9109768, |x = 1.5690611, v = 0.1728540$. Ensuite pour trouver p on aura les équations à résoudre $p' + 2.3690611 p + 0.7381228 = 0, p' = 0.7690611 p^4 - 1.0838308 = 0$. La seconde a ses racines imaginaires; la première donne les deux racines réelles $p = -2.000000, /? = -0.3690611$; mais la valeur $p = -2$ que nous savons être exacte est la seule utile. C'est aussi ce qu'on trouverait sans le secours des décimales, en observant que dans le cas présent où $m = \frac{1}{2}$, on a $n = -J - j + 1, X = -\frac{1}{2} x^*$, et de plus $i + v = \frac{1}{2} u - \frac{1}{2} f$, valeur qui, substituée dans la formule

The text on this page is estimated to be only 22.90% accurate

lao THÉORIE DES NOMBRES. />— — 7(m+>)±1/'[^(m + (t)' — X — v], donne les deux racines =7- t*=TV-^ + S*'. (45o) On peut remarquer que les formules de l'art. 444 appliquées à l'équation +y = A, donnent le moyen de trouver une infinité de solutions de cette équation, quand on en connaît une seule; en sorte que la somme de deux cubes donnés/5 -h gi peut être transformée d'une infinité de manières en deux autres cubes; en effet, il résulte de ces formules qu'en prenant on aura/3 + g* =/' -h Par des formules semblables on obtiendra fn-* -g'l—fl+g'i-> et ams» « l'infini. Donc si on avait/3-* - £*=AJ, cette solution de l'équation x}+y + zi = o en fournirait une infinité d'autres, mais on sait que la chose est impossible. (4 Si) Nous terminerons ce paragraphe par un théorème qui peut être utile dans diverses recherches d'analyse indéterminée. « Théorème. Si l'équation —px'+qz — r=o a ses trois racines « rationnelles, la quantité A—p'q' — 4 q* + î Sp q r — 4/»J r — 27 r\ « devra être un carré parfait. En effet soient a, 6, y, les racines rationnelles de l'équation proposée \ si l'on cherche les valeurs des quantités v et z ainsi eompoZ=a'y Ê'a + y'Ê, ces quantités devront être également rationnelles. Or par les formules connues ou trou ve/ + z =/> q — 3 r, y z = q* -+- p V — 6pqr + gr'; donc {y — zy=p*q* — ^q}+iSpqr — ^p^r — -xjr>; le second membre doit donc être un carré parfait. Appelant ce second membre Q1, on aura Q = ±(j— z).. = ± (« — ê)(6 — y) (y — *)i et l'équation précédente pourra être mise sous la forme Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 28.20% accurate

QUATRIÈME PARTIE. $4(p^2 - 3q)J = (ap^3 - 9pq + a^2r)$
 4- a; Q-. Donc en supposant les nombres y , entiers, si on met $p^2 - 3q$ sous la forme $a(am + i)$, il faudra que a soit pair et qu'en même temps $am + i$ soit de la forme $f - k - \frac{1}{2}g$ \ car si l'une de ces deux conditions n'avait pas lieu, le premier membre de l'équation ne pourrait pas se réduire à la forme $P' + 27Q'$, qui est celle du second membre. Enfin il résulte de ce même théorème que si l'équation $r^3 - px^2 + qx - r = 0$ a ses trois racines rationnelles, l'expression de l'une de ces racines, donnée par le formule de Cardan, sera toujours de la forme $x = \sqrt[3]{A + B\sqrt{-A}} + \sqrt[3]{A - B\sqrt{-A}}$; A et B étant rationnels ainsi que $1/(A^2 - 7B^2)$. Si on représente par $V^5 - pV^3 - qV - r = 0$, l'équation dont les racines x, y, z , positives ou négatives, sont supposées satisfaire à l'équation $x^2 - y^2 - z^2 = 0$, n étant un nombre premier ; on pourra exprimer le premier membre par une fonction de p, q, r , laquelle étant égale à zéro, sera la première équation du problème. Il faudra en outre que la fonction $4(p^2 - 3q)^2 - (*p)^3 - yp^2q + 27r^2$, laquelle est la même pour toutes les valeurs de n , soit de la forme a^2Q . Ces deux équations pourront, au moins dans des cas particuliers, faciliter la résolution de l'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, ou conduire à en démontrer l'impossibilité. On peut remarquer d'ailleurs i° Que le coefficient p , égal à la somme $x + y - k - z$, est toujours un nombre pair divisible par comme il sera démontré ci-après (partie VI) ; a' Que le coefficient q , égal à $xy + yz + zx$, est toujours un II. 16

The text on this page is estimated to be only 21.94% accurate

iaa THÉORIE DES NOMBRES. nombre impair, de signe contraire à p , lequel n'a aucun diviseur commun ni avec p ni avec r ; 3" Que r est un nombre pair de signe contraire kp , et divisible par n^* . On peut, dans tous les cas, faire $p = i$, et considérer alors y et r comme des quantités rationnelles qu'il faut déterminer par ces deux équations.

The text on this page is estimated to be only 27.14% accurate

QUATRIEME PARTIE. § XIV. Méthode pour la résolution de l'équation $y' = a + b x^4 - c x^3 - d x^2 - e x$ en nombres rationnels. (45a)

Avant été conduits à traiter fort au long de la résolution des équations indéterminées, nous devons faire mention d'une méthode indiquée par Fermât pour résoudre en nombres rationnels l'équation $y = a - h b x + e x^3 + d x^2 + e x^4$, dont le second membre est un polynôme rationnel où la variable ne passe pas le quatrième degré. Voici les cas principaux dans lesquels la résolution est possible.

i* Si le nombre a est égal à un carré positif f , les valeurs $x=0$, $y=y$ donneront immédiatement une solution de l'équation proposée. Pour avoir une autre solution, on supposera $u = h' b x^4 - c x^3 + d x^2 + e x + f$, ce qui donnera, en développant et ordonnant, $0 = f' + z f g x^4 - a/h.v' - z g h x^3 + h' x^2 - a - b - g'' - d - e$

Or on a déjà $f' = a$; si pour faire disparaître les deux termes suivants, on fait $i f g - b = Q$, $i f h + g' - c = 0$, on en tirera les valeurs des coefficients g et h , lesquelles seront $g = \frac{h^2 c u - h^2 y}{h^2}$. Alors l'équation étant réduite aux seuls termes qui contiennent x^3 et x , il en résultera une valeur rationnelle de x , savoir, $x = \frac{3^2}{h^2}$. Cette valeur donnera donc une nouvelle solution en nombres rationnels de l'équation proposée; si toutefois on n'a pas $-i g h - d$, ni $e - h$. La nouvelle solution étant désignée par $x=m$, si l'on fait gé16.

The text on this page is estimated to be only 28.39% accurate

Ia4 THÉORIE DES NOMBRES, nécessairement $x = m + x$, et qu'on substitue cette valeur dans l'équation proposée, le second membre deviendra de la forme $a' + b'x' + c'x' - d'x^n + ex'$ dans laquelle cl sera encore un carré positif. On procédera donc de la même manière pour trouver une nouvelle valeur de x' et ainsi à l'infini. D'où l'on voit qu'une première valeur connue de x suffit pour en faire trouver une infinité d'autres, sauf quelques cas particuliers qui ne peuvent guères avoir lieu que lorsqu'il est absolument impossible de résoudre l'équation proposée autrement que par les premières valeurs données. a" Si le coefficient c du terme ex est égal à un carré positif h' , on fera $a + bx + ex^* + dx^* \pm ex' = (f + gx + hx^*)$ ce qui donnera, en développant et réduisant, $0 = f' + zfgx + a/hx' + zghx^* - a - b \pm g' - d - c$. Mais on peut faire disparaître les x' et x^* , en prenant $g = \sqrt{h}$, $f = i\sqrt{h}$ et alors l'équation réduite au premier degré, donne. $x = a/f$. Cette solution en fournira ensuite une infinité d'autres comme dans le cas précédent, mais il faut qu'on n'ait pas $zfg - b = 0$. 3* Si l'équation proposée est de la forme $f = f' + bx + ex' - dx^* - hx^*$ en sorte qu'elle tombe à-la-fois dans les deux cas précédents, on pourra faire usage de chacun des moyens indiqués. On peut aussi tout d'un coup faire $f = f' + gx + hx^*$ ce qui donnera, en substituant, développant et réduisant, $0 = afgx \pm 2fhx' \pm 2ghxy - b - h g' - d - c$. Or on peut satisfaire à celle-ci de deux manières, soit en faisant $fT = \sqrt{h}$

The text on this page is estimated to be only 28.92% accurate

QUATRIEME PARTIE. 15 ce qui donne $x = -\frac{f}{g}h$ d' où l'on tire $x = -\frac{f}{g}h$. Si on a une solution désignée par $\frac{p}{q}$, on fera $x = m \frac{p}{q}$, et l'équation sera ramenée au premier cas. Nous pourrions ajouter un grand nombre d'applications de cette méthode tirées des problèmes d'analyse indéterminée, dont Euler a donné les solutions dans plusieurs de ses Mémoires, et dans le second volume de son Algèbre. Nous nous bornerons à un ou deux exemples de ce genre, afin de donner une idée de cette branche d'analyse, qui exige une grande sagacité dans le choix des moyens de solution, mais qui étant trop particulière, n'a qu'un rapport éloigné avec notre sujet. (453) Proposons-nous de trouver trois nombres a, y, z , tels que les trois formules $x^2 + y^2 + z^2, x^2 + y^2 - z^2, x^2 - y^2 + z^2$ soient égales à des carrés. Comme on peut supposer que ces nombres sont premiers entre eux, il est aisé de voir qu'ils doivent être tous trois impairs : on peut donc faire $y = x + 2p, z = x + 2q$, et on aura $x^2 + y^2 - z^2 = 4x^2 + 4(p - q)x + 4(p^2 - q^2)$. Je fais cette quantité $= 4(a^2 + b^2)$, et j'en tire $x = \frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2}a$. La seconde formule donnera semblablement $x = \frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2}b$ et pour faire accorder ces deux valeurs, je fais $\frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2}a = \frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2}b$, $xf - p = 2qz = 2g - q^2p$; j'en tire des valeurs rationnelles de e et de g , savoir $e = i(5p^2 + Zp)$, $gz = i\{p^2 + 3q^2\}$, au moyen desquelles la valeur de x deviendra $\frac{8}{p^2 + q^2}(p^2 + q^2)$

The text on this page is estimated to be only 26.62% accurate

I2f> THÉORIE DES NOMBRES. Cette valeur satisfait déjà aux deux premières conditions : on aura d'ailleurs les valeurs correspondantes de y et z par les formules $y = x+2p$, $z=x+2q$; de sorte qu'en supprimant le dénominateur commun, on pourra faire $x = jp' - 3opq + 77^* z = 7/?' - x^{pq} + 1 \ 3 \ 7^*$. Substituant ces valeurs dans la formule $y - 4 - z' \blacksquare i - zx'$, et faisant $\wedge = i + 6$, il restera à satisfaire à la condition $1 \ i + + 28' - t - G1 + fff64 = \text{à un carré}$. Or on trouve immédiatement $6 = o$, ou $9 = - i$, ou $\hat{o} = - a$; mais il ne résulte de là aucune solution. Soit donc, suivant la méthode précédente, $i - h \ 2e + ao, + \hat{o}'H - ff[o4 = (i + ct\hat{o} + fie1)'$; • si l'on développe cette équation, et qu'on prenne $a = \sim j$, on aura $G = 208$; donc $\wedge = 209$, $q = 1$, ce qui donne cette solution $* = x \ 18719$, $\wedge = 62609$, $z = 18929$. Il serait facile d'en trouver plusieurs autres, mais elles seraient probablement plus composées, quoique la méthode dont nous avons fait usage ne prouve pas que les nombres trouvés sont les moindres possibles qui satisfont à la question. (454) Soit proposé encore de trouver trois carrés inégaux $x \setminus y^0 \ 2^*$, tels que les trois formules $x1 + y^* - z^*$, $x^* + z^* - ,r^0 \ J1 - * - s^* -$ soient égales à des carrés. On trouve aisément que les deux premières conditions sont remplies, en faisant $> - r^* - 4 - rs - s' \ z = r' - rs - s'$.

Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 29.79% accurate

QUATRIÈME PARTIE. 127 Il reste donc à satisfaire à la troisième, laquelle devient, par la substitution de ces valeurs, $r^2 = r^2 + a$ un carré. Soit $r = Hs$, la question se réduit à faire en sorte que $04 = 40' + i$ soit un carré. On pourrait prendre $\hat{O} = o$, ou $6=2$, mais il ne résulte de là aucune solution convenable; pour avoir d'autres valeurs, soit $0=2 - + \bullet 9$, on aura $1 + 169 - t - 209 \times 4 - 891 - + \blacksquare ?4 =$ à un carré. Je fais cette quantité $=(1 - \blacklozenge - 89 + \langle 9 \rangle)^*$; prenant ensuite $a = 1$, je trouve $9 =$ — donc $6 =$ — $^$, $r = 15$, $s = 4$ d'où résulte cette solution : $\blacksquare^* = 241$, $^ = 269$, $Z = i4q$. Ce sont vraisemblablement les moindres nombres qui satisfont à la question. On aurait pu faire encore $\langle =$ — 22, ce qui aurait donné $9 = 4$ tti $G = 17$ fr> ou $r = 44a \rangle - * = i6'$: mais de là résultent des nombres beaucoup plus considérables que les précédents. On peut suivre un autre procédé pour faire en sorte que la quantité $1 \blacksquare + - 169 - f - 209 \times 4 - 89 \times 4 - 9^*$ soit égale à un carré. Représentons ce carré par $(i + m\zeta + n9^*)'$, nous aurons, en comparant et développant, $0 = am\zeta + an\zeta' + amn^ + n'\zeta 4 = 16 + / \rangle' = 8 = 1 = 20$. Soit $9 = a \wedge \sim 2^{\text{TM}}$ $aQ = 8$ y on aura entre metn l'équation $(8 - h m) n' 4 - (m^* = 20m = 8)n = \wedge rrV + m 4 - 72 = 0$. Maintenant, pour avoir une valeur rationnelle de n , soit $m =$ — 8, on aura $/ * =$ — $\zeta = fH >$ qui est la seconde des deux solutions trouvées par l'autre méthode.

The text on this page is estimated to be only 19.97% accurate

i*8 THEORIE DES NOMBRES. § XV. Développement du produit $(i - x)(i - x^*)(i - a:5)$, etc. continué à l'infini. (455)
 Considérons plus généralement le produit $(i + xz)(i + ar'z)(i + a:1z)(i - t - <r^*z)$, etc., et supposons que ce produit développé suivant les puissances de z , soit égal à la suite $i + Pz + Qz^2 - f - RzJ - * -$ etc. ; si on met xz à la place de z , on aura $(i + x1z)\{ \backslash + x^*z)(i + x^*z)etc. = i - t - P.rz + Qx'z' + etc.$, et par conséquent $i + Pz + Qz^2 - + - RzJ etc. = (i - + \bullet xz)(i + P \ll z + Qx'z' - t - etc.)$. Développant le second membre et égalant de part et d'autre les coefficients d'une même puissance de z , on aura $P = * V i - jz > (i - x)(i - x1) R - Q^*3 - ** S = I - x \gg (1 - x)(1 - X'^1 - X1) Rx^* x'^o I X^* (i - x)(i - **)(i - x3)^X4) etc.$
 Soit $z = - i$, et le produit proposé $(i - x)(i - x^*)(i - jr')$ etc., c pie nous appellerons X , sera exprimé par cette suite $XX5 X^* M' \sim T^+(1-X)(1-X')_ (1 - X)(1-X^*)(1 - X \gg) X'' + (, _)(, _ \cdot)(, _ \bullet)(, - et C - > où l'on voit que les numérateurs ont pour exposants les nombres$ Digitized by Gcjbgle

The text on this page is estimated to be only 17.91% accurate

•QUATRIÈME PARTIE. i-ag triangulaires 1, 3, <>, 10, i5, etc.

Nous alldrts ferre voir malhtfentfnt comment on peut faire disparaître successivement dans les dénominateurs, les facteurs $1 - xy$, $1 - x^*$, $1 - x^3$, etc. (456) Pour y parvenir, nous changerons chaque terme de la suite en deux autres, savoir : en $x + 1 - X$ et $1 - X x^1 X^3 x^>$ ($1 - x$)($i - x^>$) $\in n + -$ **) $a? x^* (1 - x)(1 - x^*) (1 - x^3) \dots (1 - X)(1 - X^2) + (1 - x^*)(1 - x^3) (1 - X^2) \dots$ etc. Par ce moyen la suite (A) deviendra, en mettant à part le premier terme 1, $\sim X \sim T = Tx + (-x^f, -^j - (i - x) (1 - x^*) (1 - x^3) + \dots$ et CH ; r . -+ - t r? w t: — etc. , $1 - x (1 - x) \{i - x^2\} (i - x)(i - x^1)^{X^3}$ ou en réduisant (B) $- x_a' + -^{\wedge} + -^{\wedge} \hat{1}$ etc. Comme il est essentiel d'observer la loi que suivent les exposants u, 5, 9, i4, etc. , on jettera un coup d'œil sur le tableau ci-dessous où cette loi est très-claire. La première ligne horizontale est celle des nombres naturels, la seconde est celle des nombres triangulaires, ou des exposants des numérateurs dans la première suite (A). Ajoutant à chaque nombre triangulaire le nombre naturel écrit au-dessus, on forme la suite a, 5, 9, 14, 20, etc. qui est celle des exposants de x dans la suite (B), si on en excepte le premier terme $- x$ dont l'exposant 1 est immédiatement au-dessus de a dans la table, au lieu d'être à côté comme dans la suite (B). Gela posé, on voit que nous avons fait disparaître le facteur $1 - x$ II. 17

Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 26.64% accurate

QUATRIÈME PARTIE. où le facteur $i - x^*$ ne se trouve plus dans les dénominateurs. On y trouve les exposants $1, 5, 22, 30, 39, \dots$, qui, à l'exception du premier, forment la ligne (D) du tableau ; ils se déduisent des précédents $12, 18, 25, 33, \dots$, en ajoutant à chacun de ceux-ci le nombre naturel qui lui répond verticalement. On voit qu'il est inutile de continuer plus loin l'opération analytique et qu'on peut se borner à prolonger le tableau, en ajoutant dans chaque colonne verticale le nombre naturel inscrit au haut de cette colonne. Alors les deux derniers termes de chaque colonne verticale sont les exposants de x dans la série réduite ou dans le produit cherché. Quant aux signes de ces deux termes, on voit clairement par notre opération qu'ils sont positifs dans les colonnes de rang pair et négatifs dans les autres. Nombres naturels.... $1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9,$
 (A) $1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, \dots$ (B) $2, 5, 9, 14, 20, 27, 35, 44, 54, \dots$ (C) $7, 12, 18, 25, 33, 42, 52, 63, \dots$ (D) $15, 22, 30, 39, 49, 60, 72, \dots$ (E) $26, 35, 45, 56, 68, 81, \dots$ (F) $40, 51, 63, 76, 90, \dots$ (G) $57, 70, 84, 99$ Donc le produit cherché $X = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{720}x^6 - \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{30240}x^8 - \frac{1}{201600}x^9 + \dots$ (457) Quant à la loi des exposants de ce produit, elle est facile à trouver ; car, puisque toutes les colonnes verticales sont des progressions arithmétiques, si on appelle k le nombre naturel qui désigne le rang d'une colonne quelconque, on aura pour le dernier terme de cette colonne ; $k(k+1)/2$, ou $t(3A-1+k)$, et pour le pénultième terme $-k(k+1)/2 + k(k-1)/2$, ou $(k^2 - k)/2$. Donc la série ■7

1 32 THÉORIE DES NOMBRES. des exposante 2,7, i5, 26, 40, 5; , etc., aura pour ternie général $T(3X-J h- X)$, et la série i , 5, 12, 22, 35, 51, etc. , aura pour terme général $7 f3A-': - \hat{A}-)$, donc enfin le produit cherché X ne contiendra de puissances de x que celles qui peuvent être représentées par . $rK\hat{i}', \pm i)$ étant un nombre entier. Ces puissances auront pour coefficient + 1 si k est pair et — 1 si k est impair. La série 1 , 5 , f 2, 22 , 35, 5i , etc. , qui a pour terme général . . $7 (3 A-'< - k)$, est proprement celle des nombres pentagonaux (voyez ci-dessus, arl. i5(>); mais l'autre série 2,7, i5, a0,40, etc. appartient aussi aux mêmes nombres, en donnant à k les valeurs — 1 , — 2 , — 3 , etc. , c'est-à-dire en changeant le signe de k. En effet les deux séries n'en forment qu'une déduite du même terme général $T(3A-'< - A-)$, comme on le voit ici : k — 4, — 3, — a, — 1,0,1,2, 3, 4, etc. Nombres pentag. 26, i5, 7, 2, 0, i, 5, 12, 22, etc. Soit N«* un terme quelconque compris dans le développement de plusieurs facteurs \ —xx, 1 — x\ 1 — arrête., en nombre fini ou infini ; le coefficient N sera en général le nombre de fois que n peut être formé par l'addition des exposants a, 6, y, etc. pris en nombre pair , moins le nombre de fois que n peut être formé par l'addition de ces exposants pris en nombre impair. (458) Il résulte par conséquent de la loi qu'on vient de démontrer dans le développement du produit $(1 - x)(1 - x^2)(1 - x^3)$, etc. , continué à l'infini , r Que tout nombre qui n'est pas pentagonal, c'est-à-dire qui n'est pas compris dans la forme $7 (3 X^{*'} \pm k)$, peut se former d'autant de manières par l'addition des nombres naturels 1 , 2, 3, 4, etc. pris eu nombre pair, que par l'addition de ces mêmes nombres pris en nombre impair. 2* Que tout nombre pentagonal pair ou qui répond à une valeur paire de est formé une fois de plus par les nombres naturels

The text on this page is estimated to be only 20.28% accurate

QUATRIÈME PARTIE. i33 1,2, 3, etc. pris en nombre pair, que par ces mêmes nombres pris en nombre impair. 3" Que le contraire a lieu pour tout nombre pentagonal impair. Fie même développement offre d'autres propriétés encore plus remarquables qu'on trouve dans le chapitre de Partitione Numerorum de YIntroduct. in Anal. inq., et dans le tom. III, partie I des Nova (tcta Petrop.

i34 THÉORIE DES NOMBRES. § XVI. Des fonctions semblables qui étant multipliées entre elles donnent des produits semblables. «5») On a déjà vu (§ IV) que les différents diviseurs quadratiques d'une même formule $t^2 + at + a'$ jouissent de cette propriété, qu'en multipliant entre eux deux ou plusieurs diviseurs, égaux ou différents, le produit peut toujours être représenté par l'un des diviseurs quadratiques de la même formule. Une propriété analogue se fait remarquer dans certaines fonctions homogènes de tous les degrés, savoir dans des polynômes à trois variables pour le 3^e degré, dans des polynômes à quatre variables pour le 4^e degré, ainsi de suite. C'est ce que nous allons faire voir en commençant par les polynômes à deux variables, du second degré, qui rentrent dans les formules connues. Soient a et ϵ les deux racines de l'équation du second degré $p^2 - ap + b = 0$ on pourra regarder la formule du second degré $x^2 + axy + by^2$ comme étant le produit des deux facteurs $(x - \epsilon y)(x + ay)$, puisqu'on a $a + \epsilon = a$ et $\epsilon a = b$. De même la formule $x^2 + ax.y + by^2$, composée semblablement avec deux autres variables x, y_1 sera le produit des deux facteurs simples $(x + ay_1)(x - \epsilon y_1)$. Maintenant si on veut multiplier ces deux formules entre elles, on prendra d'abord le produit des deux facteurs $(x + ay)(x - \epsilon y)$, lequel est $x^2 + a(xy - \epsilon xy) + a'y^2$, ou, en mettant $a - \epsilon$ à

QUATRIÈME PARTIE. 135 la place de a' , xx , — byy , + $*(xy$,
 $+ar, + ayy)$. Soit pour abrégé $X = xxt - byy$, $Y = xy, +yx, +ayty$ et on aura
 $(x + ay)(x, 4- *y,) = zX + «Y$. Par la même raison on aurait, en mettant S à la
place de a , $(x+ey)(x, + Çy,) =: X + eY$. Multipliant entre elles ces deux
équations, le premier membre sera le produit des deux polynômes proposés,
et le second se réduira à $X' + flXY + iY'$; d'où l'on voit que le produit des
deux fonctions semblables $x' + axy + by> , x, l 4- a x, y, + by, ' ,$ est
représenté par une fonction semblable $X* 4- oX Y 4- b Y \setminus$ Mais il y a une
seconde manière de former le produit des deux polynômes proposés. (460)
En effet si on multiplie d'abord $x 4- a. y$ par $x, 4- €y$, le produit sera $xx, 4-$
 $ayx, 4- Gxy, 4- *6yy,,$ ou , en substituant les valeurs $€=a - «, a€=b, xx, +$
 $axy, + byy, 4- *(yx, - xy,)$. Ainsi on peut donner à X et Y les valeurs. $X =$
 $xx, 4- a x y, 4- byy$, $Y = yx, - xy,,$ et le produit cherché sera encore
représenté par $X' 4- flX Y 4- ^ Y*$. De ce que le produit de deux facteurs de
la forme $x' 4- axy + by*$ peut être mis de deux manières différentes sous la
forme semblable $X* 4- aXY + bY*$, il s'ensuit que le produit de trois
facteurs, tel* Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 22.91% accurate

i36 THÉORIE DES NOMMES, que $x' + axy + by \mid x, y' + ax, y + by, \mid$
 $x; + a x, y, -+- by; ,$ pourra être mis sous la même forme de quatre manières
différentes, que le produit de quatre facteurs sera huit fois de la même
forme , ainsi de suite. Eu général si l'on a n facteurs de la forme $x' -+- axy +$
 $by \mid$ leur produit sera $a^n \sim '$ fois de la même forme. (46 1) Si les n facteurs
dont nous parlons sont égaux entre eux , alors on aura d'autant de manières
 $(a' a xy \blacksquare + \blacksquare by)' = X' + \ll XY + M'*$; mais cette équation n'aura qu'une
solution, si on veut que les indéterminées X et Y n'ayent point de facteur
commun. Pour trouver directement cette solution on pourra se servir de
l'équation $X + aY = (x + *y)'$, ou $X^4 - aY + Ywfi - b) = [t + lay + yl/Q - b))"$,
d'où l'on tire $\_ . . \ll -i n.n - i.n - if , .n-i >/\ll' \gg \backslash = n(x + \$ay) y + ^ - (fs + -$
 $ay) y \{- - \grave{u}) + eW$. Ainsi on connaîtra généralement les deux fonctions X et
 Y pour toute valeur de n . (ffin) Supposons maintenant; que $a, 6, y$, sont le»
trois racines de F équation $-p1 - ap' + bp - c = 0$; si on développe le
produit des trois facteurs $\blacksquare , (xrh, 9y + iz)(x + fy + Çiz)(a: + iy + ylz)$, on
trouvera l'expression suivante Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 23.91% accurate

QUATRIÈME PARTIE. $i37 xJ + (\ll + 6 + y) x'y + (\ll' + 6^* + y') x1$
 $z - | - (\ll 6 - i - \ll y + 6y) xy^* - 4 - (ot^* 6 4 - 6'y + y'^* + \ll' y + 6^* \ll + y^* \epsilon) xyz + (\ll' S^*$
 $+ g' y' + y^* a)) .r 2^* + \ll \epsilon y / + (\ll' \epsilon y - f - < 5^* y \ll + y' \ll g)^Z + (a^* Cty +$
 $e, y, \ll - hy' a, 6) jZ, + a, e, y, a, l$ dans laquelle tous les coefficients sont des
fonctions invariables des racines * , 6 , y , et pourront par conséquent être
exprimés par les coefficients de l'équation en p . Le produit dont il s'agit se
réduit donc à une fonction entièrement rationnelle, savoir : $x^* + ax^* j + \text{---}$
 $^* b) x^0 z + bxy > + (ab \text{---} \$c) xyz + (b^0 \text{---} aac) xz' + t - y + acy^* z + beyz^* - h$
 $Cz3$; et cette fonction que nous désignerons par $\&\{x, y, z\}$, aura la propriété
qu'en multipliant ensemble plusieurs fonctions semblables dans lesquelles
les quantités a, b, c , sont les mêmes, le produit sera toujours une fonction de
même forme. (463) En effet, supposons qu'il s'agit de multiplier la fonction
précédente $\wedge\{x, y, z\}$ par une fonction semblable $Q(x, y, z)$ où les constantes
 a, b, c , seront les mêmes, la question se réduit à trouver le produit des six
facteurs $x + \ll' z, x + \epsilon y + \epsilon' z, x + ty + fz, x + ^* y, + ^* z, xt + 6y, + \epsilon' z,$
 $x. + yy. + fz,;$ or si on multiplie d'abord $i +$ par $x, + < xy, + \ll^* z,$ et que dans le
produit on mette au lieu de $\ll J$ et a^* leurs valeurs $\ddot{i}! = \hat{u} \ll' \text{---} b^* + c, \ll^* = (a1$
 $\text{---} b) < t \text{---} (ab \text{---} c)^* + ac$, ce produit sera exprimé par $X + aY + \ll' Z$, en
faisant $\backslash = : xx, + c(yz, zy,) - + - aczz, Y = xy, + yx, \text{---} b(jz, + zy,) \text{---} \{ab \text{---}$
 $c)zz, Z \text{---} xz, + zx, + yy, + a\{yz, + zy,) + (a' \text{---} b)zi.$ Dès- lors on voit que le
produit des deux fonctions proposées $Q(x, y, z), Q(x. , y,, z,)$, sera égal au
développement des trois facII. 18 Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 22.83% accurate

1 38 THÉORIE DES NOMBRES, leurs $(X + \ll Y + \ll' Z) (X + \ll Y + 6 \gg Z) (X - f - yY + fZ)$, et qu'il sera par conséquent égal à la fonction désignée par $\dots 4 > (X, Y, Z)$, laquelle est $Xs + aX'Y + \{a' - 2b)X'7t + bXY' + (ab - 3c)XYZ + p - aac)XZ^* 4 - cY^5 4 - acY'Z^4 - 6cYZ^4 - c - Z \setminus$ (464) Supposons ensuite qu'on veuille multiplier ce produit par une troisième fonction z ,) semblable aux deux autres, il est visible qu'on devra faire $X, = Xj^7, 4 - c(Yz, 4 - Zj.) 4 - acZz, Y. \alpha Xj -, 4 - Yx, - b(Yz, 4 - Z/,) - (ab - c)Zz, Z, = Xzi - h Zx, 4 - Yj, + a(Yz, 4 - Zyt) + (a1 - \&)Zz,,$ et le produit des trois fonctions dont il s'agit sera exprimé par la fonction semblable $*(X, Y, Z)$. Il en sera de même du produit d'un nombre quelconque de fonctions, et par conséquent d'une puissance quelconque de la même fonction. Mais dans ce dernier cas on peut parvenir au résultat par un procédé plus simple que celui de la multiplication successive. En effet on peut, par différentes méthodes connues, déterminer directement les quantités X, Y, Z , de manière qu'on ait $(x 4 - \%y 4 - \ll' z)' - X + \ll Y + \ll' Z$. Il suffit pour cela de développer le premier membre suivant les puissances de a , et de substituer aux puissances supérieures à $\ll'$ leurs valeurs réduites d'après l'équation $as = aa - ba + c$. Par ce moyen la quantité $*(.f, j, z)$, qui désigne la puissance n de la fonction $*(.c, y, z)$, sera exprimée par $\langle t \rangle (X, Y, Z)$. (465) Dans le cas de — on trouve immédiatement par les formules de l'art. 463, en faisant $x, =: x, J. = j, z, = z, X 4 - 2 cyz 4 - a c s' Y = 2j?j - aby z - \{ab - c)z' Z = zxz + y 4 - a a y^* 4 - \{a' - b) z^0$ Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 20.24% accurate

QUATRIÈME PARTIE. i3o ces valeurs satisferont à l'équation $*(*,r,z)=*(X,Y,Z)$, quelles que soient les trois indéterminées x, y, z . Si on établit entre ces trois indéterminées la relation $o = ixz + y^* + nayz - (a^* - b)z'$, qui donne $Z = o$, alors $*(X, Y, Z)$ se réduira à $X^* - \bullet \ll X'Y + b X Y' + cY \setminus$ d'où il suit qu'on peut résoudre généralement l'équation $X'^4 - rtX'Y + bX'Y + cY' = V'$. Car en prenant les indéterminées de manière que l'équation de condition $Z = o$ soit satisfaite, les valeurs qui en résulteront pour X et Y , seront telles qu'on aura en même temps $V = *(x, j, z)$. Soit pour cet effet $/ = (\ll - \grave{a})z$, ce qui donne il en résultera la solution $X = \{b^{\wedge}, y (u' - nbu' + 8cu + b > - /iac) V = - [b \_ \hat{u} > y (tt - au' + bu - c) xi (- u' + aa u 5 - 5 bu^* - t - 2oc m 3 - f - (5 b' - ao a c) \ll ') V = CA - \ll .) j j + (8a > c - aa f' \_ 4 \hat{O} c) m + \pounds j - 4^{\wedge} c - i - 8c'\}$ * Et si on veut que les fonctions X et Y n'aient pas de commun diviseur, on pourra faire $\ll = \sim, x = (u^* - b)z$, et on satisfera à l'équation - i. $X^{\wedge} rtX'Y + \wedge XY' + cY^{\wedge} V'$, par les valeurs $X = y^4 - a bfz^* + 8 cyz + (b^* - 4 a c) z < V = - \$z(f - ayz + byz' - czs) V = y^* - nay^{\wedge} z \blacksquare + - 5by^*t' - \%ocyizi - (56' - zoac)y' zx - (\$a't - \%ab\% \sim 4^{\wedge} c) 7ss - ^{abc} + 8c')zs$.

18. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 27.38% accurate

i4o THÉORIE DES NOMBRES. Telles sont les formules qui résultent de la supposition $Z=0$. Les suppositions $Y=0, X=0$ conduiraient à des formules semblables pour résoudre généralement les équations $X^3 + (a^2 - 6a)XZ + (6a^2 - 6ac)XZ + c^2Z = \sqrt{V} cY + acYZ + \frac{1}{2}cYZ - 4c^2Z = \dots$

(466) Considérons maintenant l'équation du quatrième degré $pK - a/p' hbp' - cp + d = 0$, dont les racines sont $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; si au moyen de ces racines on forme les quatre polynômes $X - \alpha, X - \beta, X - \gamma, X - \delta$ le produit de ces quatre polynômes sera une fonction invariable des racines $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; car il est visible que ce produit reste le même en faisant une permutation quelconque entre ces racines. Cette fonction sera donc un polynôme du quatrième degré, homogène en x, y, z, u , dont les coefficients pourront s'exprimer par les quantités données a, b, c, d , en appliquant les formules connues pour déterminer toute fonction invariable des racines d'une équation donnée. Mais comme la multiplicité des termes dont un pareil produit est composé, peut donner quelque embarras dans la détermination de leurs coefficients, on pourra supposer que le facteur $x + \alpha y + \beta z + \gamma u$, et les trois autres semblables sont les racines de l'équation du quatrième degré $P^4 - AP^3 + bP^2 - CP + D = 0$, qu'on obtiendra en éliminant p des deux équations $P - x + py + p'z + p''u - p^3 - ap^2 + bp - cp + d$. Digitized by Google

QUATRIÈME PARTIE. 141 Au moyen de cette élimination on connaîtra les coefficients A , B, C, D , en fonctions de x,y, z, u, a ,b ,c, d; et puisque D est le produit des quatre valeurs de p , il est clair que D sera la fonction cherchée résultant du produit de nos quatre polynômes. (467) Cette fonction étant représentée par Q(x ,y, z, «), si on veut la multiplier par une fonction semblable Q(x , y , z , «), dans laquelle les quantités a,b,c,d, sont les mêmes, il suffira de considérer le produit des deux polynômes X + ay + a'z + aU x, + *y, + «'z, + alU,. Soit ce produit = X+ «Y+a'Z + «,V,on trouvera X = .rx, — d(uy, + zz.+yu.) — ad{uz, + zu,)~{at — b)duu, Y —yx, + xy, + c(uy, + zz, +yu.) -+- (ac—d) («x, + zu.) + (a'c—bc — ad)uu, 7s=zzx.+yy, + x z,—b(uy, + zz, +yu,) — (ab—c)(uz,+ zu,) — {alb — b' — ac +d)uu, V=«x, + zy, +yz. + xu, + a(uy, + zz, +yu.) -+•(«• — b)[uzt zu,) + (a' — iab + c)uu,t et le produit des deux fonctions proposées sera *(X , Y , Z, V). Il en sera de même du produit de trois ou d'un plus grand nombre de ces fonctions; nous ne croyons pas d'ailleurs devoir pousser plus loin ce genre de recherches qui s'applique à tous les degrés , mais qui donne des résultats de plus en plus compliqués.

The text on this page is estimated to be only 29.65% accurate

THÉORIE DES NOMBRES. § XVII. De quelques questions qui se rapportent , plus ou moins directement , à V analyse indéterminée. (468)
 Parmi les nombreux problèmes d'analyse indéterminée dont la solution est due à Euler , nous choisissons les deux suivants qui se trouvent dans sa correspondance avec Lagrange(i). Problème I. Trouver cinq nombres x, y, z, u, v , tels que le produit de deux quelconques de ces nombres, augmenté de l'unité, fasse un carré. Pour trouver d'abord les trois premiers x, y, z , tels que les trois quantités $xy + 1, yz + 1, zx + 1$, soient des carrés, prenez à volonté le carré décomposez $l' - i$ en deux facteurs m, n , en sorte or qu'on ait $l' - i = mn$, les trois nombres cherchés seront $m, n, m + n + 1$, qu'on pourra prendre respectivement pour x, y, z ; en effet, on aura par ces valeurs
 $xy + 1 = l' - i = mn$
 $yz + 1 = n(m - f - n + 1) + 1 = \{f + 1\} \cdot z$
 $zx + 1 = m(m + 1/n - 1) + 1 = (m + 1/n)^2$. Si on cherche ensuite un quatrième nombre u , tel qu'en le combinant avec les trois premiers x, y, z t on ait trois nouvelles quantités $ux + 1, uy + 1, uz + 1$ égales à des carrés, cette condition sera remplie en faisant $u = 4/(1 + m)(1 + n)$. En effet , au moyen de ces valeurs on aura Y) Voir les manuscrits de Lagrange déposés à la bibliothèque de l'Institut. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 21.03% accurate

QUATRIÈME PARTIE. $i^4 3 u x + i = b l m (1 + m)(1 + n) + (/ ' - m$
 $/ \gg)' = (/ * + 9.1 m - h m n) l i t y 4 - i = (\pm \ln(1 4 - r r i)(1 + n) 4 - (/ * - m n) \% - (l \% +$
 $2 / \gg + m n)' u z + 1 1 (1 + m)(1 + n) \{ i l + m + n) + (t - m n)^* = (3 P + 2 / (m$
 $4 - / 1) + w / i V$. Enfin si l'on demande un cinquième nombre v qui étant
combiné avec les quatre autres rende égale à un carré chacune des quantités
 $m + i, v z + 1, v u + 1$, nous désignerons d'abord par i — pls 4- $q i$ — r£ 4- $f = o$,
l'équation du quatrième degré dont les racines sont x, y, z, u ; ensuite le
nombre cherché $i >$ sera déterminé rationnellement par la formule $V - U = l y$
— (4%) Pour vérifier cette solution indiquée par Euler, il faut faire voir que
la quantité $\zeta r 4 - 1$ sera un carré, sans particulariser la valeur de e et par
conséquent que la quantité $4 r f + 2 / ? (j 4 - (s - 1)'$ sera aussi un carré. Mais
l'équation en ζ donne $4 " f = 4 S 4 - \backslash p V 4 b q l' 4 - 4^*$ » donc tout se réduit à
prouver que la quantité $4 ? - 4^J + 4 < 7 S' + a / \gg (* + + (j + i)'$ est un carré pour
toute valeur de f . Or on voit qu'en effet cette quantité sera le carré de $2 1' -$
 $p i - * - 1$, si toutefois la condition $7 4 - v 4 - 1 =$ est satisfaite. La question
étant réduite à ce point on formera les équations $p = m 4 - n 4 - z 4 - u q = r n n$
 $+ (m 4 - n) (z 4 - \ll) 4 - * u p' - 4 ? - 4 - \ll - z - u)' - 4 / n / i - i z u =$
 $(a / 4 - \ll)'' - 4 (/ - i) - 4 z \ll 4 (* 4 - i) = 4 m / \gg w^* 4 - 4 = 4 * \ll (" - 0 + 4$; Digitized
by Google

The text on this page is estimated to be only 22.83% accurate

i41 THÉORIE DES NOMBRES, donc $\{j' - 4, 7, 40, 4 - i\} = \{(m + 4) - (Vz)\}$. D'un autre côté, il est aisé de voir qu'on a $u = 4l^*z - 1$, et qu'ainsi le second membre de la dernière équation étant zéro, la condition dont il s'agit est satisfaite. Il ne reste plus qu'à substituer les quatre valeurs de i dans la formule générale et on aura les quatre résultats suivants : $\{a, m, -pm, -s - i\} \{an^* - z\} \{s - i, V/n' - pz - * - i\}^{TM+i} = (a^*, \sim f' 7' \sim)$ Soit par exemple $m = i, n = 3, / = 2$, on aura $.f = \hat{1}, j = 3, z = 8, \ll = \text{lao}, v = 777^{\wedge}$, et les cinq nombres $x, /, z, m, i$, seront tels que le produit de deux quelconques de ces nombres, augmenté de l'unité, sera égal à un carré. A | B | C | D (4/û) Problème II. Dans un carré divisé en 16 cases, i 1 I G I H suivant la figure ci-jointe, inscrire 16 nombres A, B, L! * j ^ I ^ C. . .Q, qui satisfassent aux conditions suivantes, i° Que la somme des carrés des nombres soit égale dans chacune des quatre lignes horizontales, égale aussi dans chacune des quatre lignes verticales, et dans les deux diagonales, ce qui fait 10 conditions; a." Que la somme des produits deux à deux, tels que $A E 4 - B F - + - C G + D H$ soit nulle à l'égard des deux premières lignes horizontales, comme à l'égard de deux lignes horizontales quieleonDigitized by Google

The text on this page is estimated to be only 25.66% accurate

QUATRIÈME PARTIE. i/45 ques, et qu'il en soit de même à l'égard de deux lignes verticales, ce qui fait 12 conditions. On aurait donc en tout 22 conditions à remplir et 16 inconnues seulement. Cependant Euler remarque qu'il y a une infinité de manières de satisfaire à ce problème, qu'il en possède la solution générale, et il en a donné pour exemple le carré suivant, 68, — 29» 4i, -37 — '7> 3i, 79. 3a 59> 28, -23, fil — ' 1, — 77» 49. L'analyse de ce problème n'a point été publiée et il est fort à désirer qu'elle le soit, si on peut la trouver parmi les manuscrits de l'auteur, non encore imprimés; car on voit qu'il serait fort difficile de la restituer. (471) On a vu dans l'Introduction, art. X, que si un nombre donné. N est de la forme $2'' \ll \epsilon y$, etc., $\ll$, 6, y, étant des nombres premiers inégaux, la somme des diviseurs du nombre N est donnée par la formule $(a-H.._I)(l4.a)(I+\epsilon)(l+y)....$ Si au lieu du facteur simple o on avait le facteur double a', ce facteur, au lieu d'être représenté dans la formule par $1\ 4- a$, le serait par $1 + a + \ll'$ ou $\sim T'$ de même un facteur triple a' le serait par $1 + * + \ll'-\blacklozenge\blacksquare$ ou $' a'ns' ^e su'te \gg$ ce °tm s'applique également aux autres facteurs qui pourraient n'être pas simples. Voici quelques usages de cette formule. 1" Ayant choisi n de manière que $2'' - 1$ soit un nombre premier, si on fait $N = a'' - (2'' - 1)$, la somme des diviseurs du nombre N sera, en vertu de la formule précédente $(2'' - 1)2''$; donc cette somme sera double du nombre N, ou, ce qui revient au même, le nombre N sera égal à la somme de ses parties aliquotes. Les plus simples II. 19 Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 20.80% accurate

i46 THÉORIE DES KOMBRES. de ces nombres auxquels on a donné le nom de nombres parfaits, sont a' ($aJ - i$) = 28, a^4 ($a_s - i$) = 4g6, a^6 ($a_7 - i$) = 8 1 a_8 , a'' ($a,J - i$) — a'' (8 1 9 1) = 33 55o 336, etc.

II. Si on veut avoir un nombre N tel que la somme de ses diviseurs, N compris, soit triple de N , supposons $N = a'' a_6 Y >$ etc., « , 6, Y , etc. , étant des nombres premiers inégaux, il faudra satisfaire à l'équation $(a''^* - i)(i + \ll)(i - * - 6)(i + y) \dots = 3 \cdot a'' \ll \epsilon 7 \dots$ ou $t + \ll t + 6 i - h y 3 \cdot a'' \sim \zeta \sim y i''$ — r Soit $n = a$, le second membre devient y , ainsi faisant « = 7, on aura — | — • — ^ • • • — ^ > équation impossible parce que les dénominateurs $\epsilon, y - \bullet \bullet$ sont impairs. Soit « = 3, on aura $i \pm \pm \cdot i + i \cdot \dots = \wedge = f$; il en résulte « = 5, et $' - g \dots \cdot = g = | i \wedge$ onc 6 = 3, et l'un des nombres cherchés est 2'. 3.5 = 120. i«» supposition $n = - - 4$ conduit à une impossibilité. Soit donc $n = 5$, $t + a 1 - 4 - 6 06 3a \cdot o$ on aura — ^ ^ — . . . = ^ = ^; soit $a = 3$, 6 = 7, on aura. . . ! — I . . . = - j - ^ = 1 ; donc il n'y a pas d'autres nombres premiers que 3 et 7 à employer, et on aura le second des nombres cherchés = $2^3 \cdot 3 \cdot 7 = 672$. Les cas de $n = 6$ et $n = y$ ne donnant aucun résultat, soit $n = 8$, 1 - 4 - a 1 - 1 - 6 . 0 on aura — ^ g — . . . = ^ - ^; soit « = 7, 6 = 73, on aura $i + v i + J 768 48 0 \cdot t - M 6 Y - y - \bullet \bullet$ = $F^4 = 3^{\wedge} \&olt Y = : 37 \gg^* = \gg 9 \gg$ on aura — • ' - = 5; d'où résulte enfin 1 = 5, et le nombre cherché $N = a^* \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 73$. On vérifie immédiatement ce résultat par la formule générale d'où résulte la somme des diviseurs = $(a' - 1)6 \cdot 8 \cdot a_0 \cdot 38 \cdot 74 = a^* \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 73 = 3 N$.

The text on this page is estimated to be only 23.87% accurate

QUATRIÈME PARTIE. 147 III. Pour avoir un nombre N tel que la somme de ses diviseurs soit quadruple de N , N compris, il faut résoudre l'équation $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{N} = 4$. Soit $n = 3$, le second membre sera $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$; on aura donc d'abord $\frac{3}{2} = 5$; mais à cause du facteur $\frac{1}{2}$, on voit qu'en faisant $\frac{3}{2} = 3$, le facteur $\frac{1}{2}$ remplacera $\frac{1}{3}$; il faudra donc au lieu de $\frac{1}{2}$ prendre $\frac{1}{3}$, et faire $\frac{3}{2} = \frac{3}{3} = 1$. Soit ensuite $y = \frac{1}{3}$, on fera $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{N} = 4$, ce qui donnera finalement $i = 7$, et le nombre cherché $N = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$. En faisant $n = 5$, on trouverait semblablement $N = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2310$, nombre plus simple que le précédent.

IV. Si l'on veut trouver un nombre N tel que la somme de ses diviseurs, N compris, soit quintuple de N , appelant 2^m la plus grande puissance de 2 qui divise N , il faudra, suivant la formule générale, que soit égal au produit de plusieurs facteurs de la forme $1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \dots + \frac{1}{p^m} = 5$ pour chaque facteur simple p qui divise N , de la forme $1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \dots + \frac{1}{p^m} = 5$, ainsi de suite. Soit $\frac{1}{p} = \frac{1}{2}$, on aura $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^m} = 5$, $\frac{1}{2^m} = \frac{1}{4}$, $m = 2$. Le facteur $\frac{1}{2}$ indique que le nombre cherché est divisible par 2, ainsi il faut recommencer l'opération et faire $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^m} = 5$, $\frac{1}{3^m} = \frac{1}{9}$, $m = 2$. Ces facteurs étant tous de la forme l'opération est terminée, et le nombre cherché $N = 2^2 \cdot 3^2 = 36$. On trouverait également $N = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$, nombre un peu plus simple que le précédent.

The text on this page is estimated to be only 24.54% accurate

i/8 THÉORIE DES NOMBRES. (47») Proposons-nous maintenant de trouver deux nombres A et B tels que chacun d'eux soit égal à la somme des diviseurs de l'autre, celui-ci non compris. Nous supposons pour faciliter la solution, que ces deux nombres sont ainsi représentés $A = 2^m y$, $B = a^p \epsilon^q$, a, ϵ , y étant des nombres premiers. Et puisque la condition du problème exige que la somme des diviseurs de A et celle des diviseurs de B soient égales, l'une et l'autre, à $A + B$, nous aurons la double équation $(1 + 2^m + \dots + 2^{m-1}) = (1 + a + a^2 + \dots + a^{p-1})(1 + \epsilon + \epsilon^2 + \dots + \epsilon^{q-1}) = 2^m(1 + a + a^2 + \dots + a^{p-1})$. De là on tire premièrement $1 + a + a^2 + \dots + a^{p-1} = 2^{m-1}$, ou $y = a^{p-1} - 1$; ensuite $2^m = (2^m - 1)(1 + a + a^2 + \dots + a^{p-1}) = a^{p-1} - 1$. Celle-ci peut se mettre sous la forme $(a^p - a^{p-1} - 1) = 2^m$. Ainsi toute manière de partager $a^p - a^{p-1} - 1$ en facteurs inégaux semble devoir donner une solution. La première qui se présente consiste à faire $a^p - a^{p-1} - 1 = 2^m$, I at $= 3.2^m - 1$ ce qui donne $m > -a^p + 1 = a^{p-1} - 1$ et il en résulte $y = g. a^{p-1} - 1$. Mais pour que la solution soit admissible il faut que les trois nombres a, p, y, ainsi déterminés, soient des nombres premiers. Si on donne maintenant à m les valeurs successives a, 3, 4 > etc., on aura les résultats compris dans le tableau suivant : Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 20.11% accurate

QUATRIÈME PARTIE. «49 m a. g Y a 5 1 1 # 3 ii a3 a87 * 4 a3
 47 * * n5i 5 47 95 4607 6 '91 V i843i 7 383 73737 8 383 767 ao4gn 9 767
 i535 1 179647 m 3o^ 1 4710J;; 1 1 1 3071 6143 ia 6i43 i3 13387 a4575 •4
 a4575 4yi5i i5 4gi5 1 p83o3 — a84 18416 9437056 n 17396 9363584 On
 voit que les nombres 2,4,7 pris pour m sont tels que les valeurs qui en
 résultent pour et, g, y, sont des nombres premiers, ce qui donne les trois
 solutions comprises dans la colonne des A et dans celle des B. Mais ce
 même tableau continué jusqu'à m=i5 ne donne aucune autre solution. Pour
 avoir une autre formule de solution, revenons à l'équation $(a - 2'' + 1)(g - 2'' + 1) = 2^{*}$. Elle peut en général se partager en deux autres comme il suit : $a - 2'' - I = 2^{TM} - H$ $g - 2m + 1 = 2'' + ^$, d'où résulte « $= (2^{+} + I) 2''1 - ^$
 $- I g = (2l^{*} + 1)2m - I y = (2f^{*} 1)^{*}2^{*} - * 1$. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 27.44% accurate

i5o THÉORIE DES NOMBRES Le nombre jx qui reste arbitraire dans ces formules doit être impair, car s'il était pair, la valeur de y serait en général de la forme $p^* - i$, et ne serait par conséquent pas un nombre premier. On a déjà fait $jt=i$; on ne peut faire $t = 3$, parce qu'alors $at^* + i$ étant 9, il y aurait toujours une des valeurs de « et $\hat{e}$ comprise dans la forme $p' - i$ qui n'appartient qu'à un nombre composé. Soit donc $p. = 5$, et on aura les formules «=33. $a'' - 5 - i \in = 33.a'« - i y = (33)'a» - 5 - i$. Si on fait $m = 8$, on aura « = $a63$, $\epsilon = 8447$, $y = aa3oa7i$; mais il n'en résulte pas de solution, parce que y est divisible par 463. Quelques autres essais sur la valeur de m n'ont pas en plus de succès. Enfin si l'on fait $\{1 = 7$, on aura les nouvelles formules «= 139. $a^{TM} - ' - 1 \hat{e} = 129 . \blacksquare im - 1 y = (i29)'a»^* - 1 - 1$. Soit $m=8$, on aura «= $a57$, $6 = \pounds 3oa3$, $y = 85aoi9i$, de là résultera une solution si y est un nombre premier, car ces deux autres le sont; cette solution serait $A = a^*y$, $B = a' * 6$. Les problèmes dont nous venons de nous occuper sont du nombre de ceux sur lesquels les géomètres s'exerçaient du temps de Fermât, c'est-à-dire vers le milieu du 17^e siècle. On en fait mention ici parce que la méthode de les résoudre n'est pas généralement connue. Voyez à ce sujet le tom. III des Lettres de Descartes, et l'écrit intitulé Influence de Fermât sur son siècle, par Genty. Digitized by Google

QUATRIÈME PARTIE. i5i § XVIII. D'un autre problème remarquable par l'espèce d'analyse employée pour sa solution. (473) Les amateurs du jeu des échecs savent qu'à partir, d'une case donnée il est possible de faire parcourir au cavalier les 64 cases de l'échiquier, sans passer deux fois par la même case. Quelques géomètres se sont occupés de ce problème et ont voulu le soumettre à l'analyse, mais Euler est le seul qui ait réussi à en trouver méthodiquement un grand nombre de solutions (i). Le procédé de cet illustre auteur est aussi sûr qu'ingénieux ; il consiste à essayer d'abord une solution par la marche effective du cavalier. On réussit aisément à prolonger cette marche, de manière qu'il ne reste plus qu'un petit nombre de cases à parcourir. Les cases parcourues se marquent successivement sur le papier (où l'on figure un échiquier de petites dimensions) par les chiffres 1, 2, 3, jusqu'à 58, si c'est à la case 58 qu'on se trouve arrêté; les cases restantes se remplissent par des lettres a, b, c. . . . Il s'agit ensuite de faire entrer successivement les cases restantes parmi celles qui forment un circuit et qui sont marquées par des chiffres. C'est ce qu'on peut faire au moyen de plusieurs règles générales données par Euler et que nous allons faire connaître dans un exemple où elles recevront, à peu près toutes, leur application. (474) Nous supposons qu'à partir de la case i, on a fait parcourir au cavalier les cases a, 3, 4 etc., jusqu'à la case fio, où la marche est arrêtée, en sorte qu'il reste quatre cases vacantes, mar(i)

Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin, année 1759. Digitized by Google

i > 2 THÉORIE DES NOMBRES. quées a, b, c, d, comme on le voit dans le tableau suivant : 55 . 58 . ag . 4° • » 7 • 44 • 19 • a » 60 . 39 . 56 . 43 . 3o . ai . a6 . 45 57 . 54 • 5g . 28 . 41 • 18 . 23 . ao (I) 38 . 5i . li . 3i . 8 . a5 . 46 . 17 53 . 3a . 37 . a . 47 • > 6 . 9 • ^4 5o . 3 . 5a . 33 . 36 . 7 . 12 . i5 1 . 34 • 5 . 48 • b . 14 . c . 10 4 . 49 . a . 35 . 6 . n . d . i3 J'observe que le cavalier peut passer de la case 1 aux trois cases 32, 5a, 2, de la case 60 aux trois cases 29, 5g, 5i, et de la case a aux huit cases 3, 3i, 5\$, 4», a5, 7, A, 5, ce que je représente ainsi : i j 32, 52, 2 A 60 J 29, 5g, 5 1 B « ! 3, 3i, 59, 41, 25, 7, A, 5. Or toutes les fois qu'un des nombres A qui répondent à la case 1, est tel que A — 1 se trouve parmi les nombres B qui répondent à la dernière case f > o (comme il arrive dans ce cas où l'on peut prendre A = 52 et 1J = 5i), le circuit j, 2, 3, ... 60 qui ne rentre pas sur lui-même, parce qu'on ne peut pas passer de la case 60 à la case 1, deviendra rentrant, si on le compose des deux parties 60 . 59 A : 1.2.3 B, qui dans notre exemple sont 60 . 5g 52 : 1.2.3 5 1 . Il convient, pour exprimer ce changement, de faire un nouveau tableau qui se déduira du précédent en laissant à leur place tous les nombres de la partie 1 . 2.3. ... 5i, mais en remplaçant la suite 60 . 5g ... 52, par la suite inverse 52 . 53 ... 60, c'est-à-dire en retranchant de 112 chacun des nombres de 52 à 60. Voici le nouveau

The text on this page is estimated to be only 29.30% accurate

QUATRIÈME PARTIE, tableau qui résulte de cette opération :
.53 57.54.2f).4o.a7.44- '9-22 5'i. 3f).?)6.43.3o. 21 .a6.45 55. 58. 53. 28. 41.
18. a3. 20 38. 5i .42 . 3i . 8 . a5. 46. 1 7 (II) 5g . 3a . 37 . a . 47 • • 6 . 9 . 24
5o . 3 . 60 . 33 . 36 . 7 . 1 2 . 1 5 1 .34. 5 .48. b . i4- c . 10 4 . 49 • 2 . 35 . 6 .
1 1 . d . 1 3 Le tableau (I) offrait un circuit de 60 cases, lequel n'était pas
rentrant; ce second tableau offre un circuit rentrant, puisqu'on peut passer
de la case 60 à la case 1 et réciproquement. Or un pareil circuit a l'avantage
qu'on peut y faire entrer celle qu'on voudra des quatre cases vacantes a,
b,c,d, et nous choisirons la case a , parce que de a on peut passer
successivement aux cases b et d, de sorte qu'on fera entrer dans le circuit les
trois cases a ,b, d, à la fois. (4~5) Comme il y a huit cases de chacune
desquelles le cavalier peut passer à la case a, savoir , 5i , 53, 4' » a5, 7 , b , 5
, 3, on aura 7 manières (b ne devant jias être comptée) de faire l'opération ;
lesquelles réussiraient toutes également. Choisisant la case 5i , on pourra
établir le nouveau circuit composé de 63 cases , comme il suit : 5a, 53. ... 60
| 1 , 2, 3. . . . 5i , a, b , d. Il faudra donc former un troisième tableau qui se
déduira du tableau II, en mettant 1 , 2 , 3. . .9 au lieu de la suite 52 , 53. .
.60, c'est-à-dire en retranchant 5i de chacun de ces nombres, puis en
ajoutant 9 à chacun des nombres de la suite 1 , 2, 3. . . 5i , et enfin mettant
61 , 62, 63 à la place de a, b, d. En voici le résultat: II. ao

The text on this page is estimated to be only 23.62% accurate

i54 THEORIE DES NOMBRES. 6 . 3 .38. 49. 36. 53. 28. 3i 1
.48. 5 .5». 39.30. 35. 54 4 • 7 . a . 37 . 5o. 27 . 3a .29 47. 60. 5 1 .40. 17.
34.55. 26 (III) 8 .41 .46.fM .56.a5.i8.33 59. 1 2 . 9 . 4a . 45 . 16. ai . 24 1 o .
43 . 1 4 • 57 . 62 . 2 3 . c .19 i3.58. 1 1 .44- i5.ao.63.22 Il ne reste plus qu'à
faire entrer la 64e case c dans le eircuit ; pour eela, nous remarquerons que
de la case a5 on passe à c, comme de •i \ à 6 3, de sorte qu'on peut Tonner le
circuit complet ?.,,3... a4 | 63.6a. . .a5. c. Pour le représenter dans un
quatrième tableau, il faudra, dans le tableau 1 1 1 , ne rien changer aux
nombres 1 , a , 3 . . . 24 , mettre ab à la place de 63 , 26 à la place de 62 ,
etc. , c'est-à-dire retrancher de 88 tous les nombres de ar> à 63 , et enfin
mettre 64 à la place de e. Voiri le résultat de cette opération : 6 . 3 .5o. 3g.
5a. 35.6o.57 1 .40. 5 .36.49.58.53.34 4.7.2.51 .38. 61 . 56.59
41.28.i7.48.17.5433.62 (IV) 8.47.4a.a7.32.63.i8.55 29 . 1 2 . 9 . 46 . 43 • 1 6
. 2 1 . 24 10.45. i4-3i .26.23.64. 19 13.3o. I 1 -44- 15.20.a5.22 Dans ce
nouveau tableau toutes les cases étant remplies le problème est résolu, c'est-
à-d ire que le cavalier partant de la case 1 , et suivant les cases marquées a,
3, etc., parcourra toutes les cases de l'échiquier, sans passer deux fois sur la
même. Mais la marche que nous venons de tracer n'est pas rentrante,
puisqu'on ne peut pas passer de la case 64 à la case 1 ; ainsi nous n'avons
pas encore satisfait à Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 29.21% accurate

QUATRIÈME PARTIE. i55 la question générale qui suppose que le cavalier parte d'une case donnée quelconque. (470) Pour y satisfaire il faut trouver moyen de changer le circuit non rentrant qu'offre le tableau IV en un circuit rentrant. Dans l'état actuel du tableau IV, les cases extrêmes 1 et 64 sont trop éloignées pour qu'on puisse par une seule opération obtenir un circuit rentrant; on peut seulement rapprocher les cases extrêmes en substituant au circuit du tableau le circuit suivant : 64.63.28 | 1.2.3 — 27. Pour représenter celui-ci il faudra dans le IV^e tableau ne rien changer aux nombres de 64 à 28, mais seulement prendre le complément à 28 de tous les nombres de 1 à 27, ce qui produira le tableau suivant : 22 . a5 . 5o . 39 . 5a . 35 . 60 . 57 27 . 4o . a3 . 36 . 49 • 58 . 53 . 34 24.21 .a6.5i .38. 61 .56.59 4i. 28.37. 48. 11.54.33.62 (V) 20.47.42. 1 .32.63. to. 55 29. 16. 19.46.43. 12.7.4 18.45. i4-3i . 2 . 5 .64. 9 1 5 . 3o . 1 7 . 44 • 1 3 • 8 . 3.6 Maintenant les cases voisines des extrêmes 1 et 64 sont, comme il suit : 1 j 26,38, 54, ia, 2, i4, 16, 28 64 j 13,43,63,55. Et parce que le nombre i4 de la première ligne surpasse d'une unité le nombre i3 de la seconde, on pourra former un circuit rentrant avec les deux suites 64,63 i4 | 1,2,3 i3, et le nouveau tableau qui contient ce circuit se déduira du précé20. Digitized by Google

i56 THÉORIE DES NOMBRES, dent , en prenant au lieu de chacun des nombres i , a . . . 1 3 son complément à i4- Voici le sixième tableau. aa.i5.5o.3g.5a .35. 60. 57 17 . 40 . a3 . 36 . 4g . 58 . 53 . 34 i4-ii ,a6.5i .38.Gi .56.5g 4i. 18.37. 48. 3 54.33.6a (VI) ao . 47 . 4a . 1 3 . 3a . 63 . 4 ■ 55 39. 16. ig. 46. 43. a . 7 .10 i8.45. i4-3i . ia. g .64. 5 i5.3o. 17.44 • 1 . 6 . 1 1 . 8 Nous avons dit qu'une marche rentrante telle que nous venons de l'obtenir dans ce dernier tableau, permet de faire parcourir au cavalier toutes les cases de l'échiquier, à partir d'une case donnée quelconque, et cela de deux manières différentes. En effet, si on veut partir de la case 38 , par exemple, on pourra choisir entre les deux marches suivantes, inverses l'une de l'autre 38 . 39 . . . 63 . 64 . 1 . 2 . • . 3j 38 . 3j . . . a . i . 64 . 63 . . . 3g. Ainsi le problème est résolu dans toute sa généralité par le tableau (V I). Mais nous allons faire voir qu'une seule solution connue en fait connaître immédiatement un grand nombre d'autres. Donnons avant tout un second exemple de la manière de rendre rentrant un circuit qui ne l'est pas. (477) Nous nous proposerons à cet effet le tableau suivant : 54 4i • n-15.60.j7. i4-a3 1 1 . 16 . 55 . 4o . 1 3 . 14 • 4g • 58 4a. 53. 10.61 . 56.5g. aa. 1 5 g .6a. 37. 5a. 3g. 48. 3i .5o a8.43. 8 .47.3o.5i . 16. ai 63. 46. ag. 38. 5.ao.35.3a 44-7 • a .19.34.37. 4 «7 1 .64.45. 6.3. i8.33.i6 Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 28.44% accurate

QUATRIÈME PARTIE. if>7 A raison des cases voisines des deux extrêmes i et 64, savoir : 64| 19,29,63, on pourrait changer la marche du tableau en trois autres , savoir : 64.63. . .46 | 1 .a. 3. . .45 1.2. 3... 19 | 64-63... 20 1 . 2 . 3 ... 29 | 64 . 63 . . . 3o. Mais ces trois combinaisons présentent peu d'avantage, parce que les cases 1 et 64 ne permettent le passage qua deux et trois autres cases. Après quelques tentatives on trouve que le circuit suivant, composé de trois parties 3o.3i...46 | 1.2. 3... 29 | 64. 63... 4;, est préférable, parce que les cases extrêmes 3o et 47 venant au milieu du tableau , il y a plus de chances d'arriver par elles à un circuit rentrant. Pour représenter cette nouvelle marche, il faut, dans le tableau proposé, ôter 29 des nombres de 3o à 46 , ajouter 1 7 aux nombres de la seconde suite , 1 . 2 . . . 29 , et retrancher de 1 1 1 tous les termes de la troisième suite 64. 63... 47- On obtiendra ainsi le tableau suivant : 57. 1a.a9.43.5r .54.3i .40 a8.43.56.n.3o.4i.6a.53 1 3 . 58 . 37 . 5o . 55 . 5a . 3g . 3a a6. 49-44-59- 10. 63. a .61 45. i4.a5.64. 1 .60. 33. 38 48.17.46.9.33.37.6.3 i5.a4. 19.36 .5.8 .ai. 34 18. 47' i6.a3.ao.35. 4 • 7 Dans cette marche les cases extrêmes 1 , 64, permettent de passer de chacune à huit autres cases, comme on le voit ici :

The text on this page is estimated to be only 23.21% accurate

i58 THÉORIE DES NOMBRES. $i j 2, 6, 8, 36, 46, 44 \gg 5o, 5a$
... $a r > 4$; $63, 37, 5, 19, 17, 49, 27, \dots$) $r) \dots J >$. Maintenant si a étant un
nombre de la première série, on trouve $a - 1$ parmi les termes b de la
seconde série, on pourra former une marche rentrante de ces deux parties 1 .
2 ... $a - 1 \mid G4 . 63 \dots a$. Or c'est ce qui arrive en faisant $a = G$ et $\ll = 5o$,
puisque 5 et 4y se trouvent parmi les nombres b . On obtient donc les deux
marches rentrantes que voici : 1 . 2 ... 5 j 64 . 63 ... 6 1 . 2 ... 49] 04.63. .
.5o. Il en résulte les deux tableaux suivants : 1 3 . 58 . 4 » -38. 19. 16.39.30
57. 12.29. 4» -63. 60. 3i .40 4a. 37. 14. 59. 40.29. 8 .17 28.43.58. 11 .3o.4i-
5a. 61 57 . 1 a . 43 . 20 . 1 5 . 1 8 . 3 1 . 38 1 3 . 56 . 37 . 64 • 5g . 6a . 3g .
3a 44.ai .a6. ii .60. 7.3.9 36.49.44. 55. to.5i . a .53 35.56.45*. 6 . 1. 10. 37.
33 45. i4-a5.5o. 1 . 54-33.38 aa. 53. 3461 .48.33.64. 3 4817.46. 9 .33.37. 6 •
^ 55 . 46 . 5 1 . 34 • 5 . 63 . 49 • 36 1 5 . a4 • 1 9 > 36 . 5 . 8 . s 1 . 34
5a.33.54.47-5o.35. 4 -63 18.47- 16.33. ao. 35. 4 • 7 M N Nous connaissons
déjà trois marches rentrantes, qui donnent chacune deux manières de
résoudre le problème à partir d'une case donnée. Nous allons faire voir de
plus que chaque tableau comme M en fournit trois autres qui résolvent
également la question. (478) Mais d'abord nous observerons que pour
comparer plus aisément entre elles les différentes marches rentrantes qu'on
peut trouver et dont le nombre est sans doute très-grand , il est bon de
convenir qu'on mettra constamment 1 à la première case à gauche de la
dernière ligne. C'est ce qui se fera pour le tableau M en Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 20.93% accurate

QUATRIÈME PARTIE. ify retranchant 5i des nombres supérieurs à 5i et ajoutant i3 à tous les autres, opération qui se pratiquera semblablement pour tout autre tableau. Voici en conséquence la nouvelle forme que prendront les tableaux M et N. a6. 7 .54-4' .32.ag.5a.43 ko. 5g. ia.a5. 46. 43. i4-a3 55. 4b. 27. 8 .53. 4a. ai .3o 1 1 .26.4» • 58. i3. 24. 35-44 6 . 25. 5G. 33. 28.3i ./4 5i 60.39.10.47.42.45.2a. 1 5 57.3439.24. 9 .20. 1 5. 22 9 .3a. 37. 38. 57. 34. 49 -36 38. 5 .58. 19. 14. 23. 5o.45 28. Ci . 8 .33.48.37. iG. ai 35. a .37.10.61.46.13.16 31.64.29.66. 5 .ao.53.5o 4 . 59. 64-47' '8. 1 1 .6a. 49 7 • a .»9'5a.55. 4 -»7 1 .36. 3 .60.63.48. 17.1a 1 .3o.63. 6 . 3 . 18. 5i .54 (M) (N) Étant donné le tableau (M), par exemple, on pourrait faire tourner ce tableau autour de la diagonale passant par la case 1 , de manière que la ligne horizontale 1 .36. . . i« prît la place de la ligne verticale i,4- • .26, et réciproquement. Mais comme la position des rases, les unes à l'égard des autres, serait toujours la même, nous considérerons ces deux formes comme n'en faisant qu'une seule. On peut aussi en conservant le nombre 1 à la première case, changer les nombres des autres cases, en mettant au lieu de chaque nombre son complément à 66. De cette manière le tableau M en fournirait un second que voici : 4o . 59 . 1 a . a5 . 34 . 37 . 1 4 . 23 11. 26.39. 58. i3. a445. 36 60.41 • 10. 33. 38. 35.22. 1 5 9 .32.27.42.57.46.51.44 28.61. 8 .47.52.43.16.21 31.64.29.56. 5 .20.53.5o 62. 7 . a . 19.48. 55 . 4 .17 1 . 3o . 63 . 6 . 3 . 1 8 . 49 • 54 («) Mais ce second tableau qu'on peut regarder comme l'inverse ou le

Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 26.43% accurate

,6o THÉORIE DES NOMBRES. réciproque du premier, ne donne réellement aucun nouveau moyen de résoudre le problème. Car la case de l'échiquier < qui est marquée 20 dans le tableau (M) , est marquée 66 — 20 ou 46 dans le tableau (m) , et les deux marches qui résolvent le problème dans le tableau (M) ne diffèrent des deux marches qui le résolvent dans le tableau (m) qu'en ce qu'elles sont notées par des nombres différents. Par exemple , la marche indiquée $ao . 21 . 2 \rangle \dots 64 . 1 . 2 \dots 19$ dans le tableau (M) , occupe successivement les mêmes cases de l'échiquier que la marche indiquée $46.45.44 . 2 . 1 . 64 - \bullet \langle 47$ dans le tableau (m). (47o)
Maintenant pour opérer de véritables changements dans le tableau (M), il faut supposer que ce tableau, qui a pour base la ligne horizontale $1 . 36.3 . \dots 12$, prendra successivement pour base chacun des trois autres côtés de l'échiquier. Si on prend pour base le côté $12.49 - '6 - \bullet - 43$, il faudra retrancher 11 de tous les nombres, ce qui donnera la nouvelle forme $54 \bullet 57 . 24 \blacksquare 27 . 46 \bullet 59 . 44 \bullet 15 a5 . 48 . 55 . 58 . a3 . 14 . 29 \bullet 60$
 $S6.53.26.47.28-.45. 16.43 49-36.63. 8 . i3.aa.6r.3o 62 . 7 . 5o . 3 . 6a . 17 .$
 $4a . a 1 37.64-35. ia. 9 . ao.3i.i8 6 . 5 1 . a . 39 . 4 \bullet 33 . 1 o . 4 ' 1 . 38. 5 . 34.$
 $11 . 4 \langle - '9-3a (M 1)$ Les deux autres côtés $43 . 5a \dots 26$, et $26 . 55 \dots 1$, donneront semblablement les deux tableaux qui suivent. $34.39. 6$
 $.ai.i8.a5.58.a3 18. 5 .a6.6i .ao.55.a4.5i 7 . ao. 33.4o. 5 . aa. 17.26 37.60.$
 $19.54 .a5. 5a. 37. 56 38.35. / \rangle . 19. 3a. 59. 24. 57 4 \bullet '7- 6 .59. 6a. ai .5o.a3$
 $3 . 8 .45.36.4i- 16. a7. 60 7 .a8. 3 .48. 53. 36. 57. 38 44. 37. 42. 3i. 46. 61.$
 $56. i5 16.47. 8 -63.58.49 ^{-35} 9 . a .53.5o.55. 14.47.28 29. a .3i . 14. 33. ia.$
 $39.4a 5a. 43. 64- 11 3o.49- 6a. i3 46.15.64.9 .44-4'-34.n 1 . 10. 5i .54*63.$
 $1a.a9.48 1 .3o.45. 3a. i3. io.43.4o (M 2) (M 3)$ Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 26.76% accurate

QUATRIÈME PARTIE. 161 Ainsi toute marche rentrante, comme celle qui est représentée par le tableau (M) , en fournit trois autres représentées par les tableaux (Mi), (M 2) , (M 3) ; et puisque chaque tableau donne deux solutions du problème, les quatre tableaux en donneront huit. Nous avons formé d'ailleurs deux autres tableaux (VI) et (N) semblables au tableau (M) ; ainsi nous connaissons déjà a/f solutions du problème général, et il serait facile d'en trouver un beaucoup plus grand nombre. (4#o) En effet, prenons encore pour exemple le tableau (M), et supposons que de la case A on puisse passer aux cases a, b ,c, etc., et que de la case A 4- I on puisse passer aux cases n' , b' , c' , etc. , c e que nous exprimons ainsi : A j a, b , c. . . . , A+i \a\b\c Si parmi les nombres d,b't c', etc., il se trouve le nombre a -f- i , on pourra de la marche rentrante donnée par le tableau , déduire une autre marche pareillement rentrante, savoir: «, a — i,£/. — 2...A+1 | a+i,rt + a...A; Il faut seulement excepter le cas de a = A -+- i , et celui de A=<h i qui ne donnent aucun résultat. C'est ainsi qu'on peut déduire du tableau M les onze marches rentrantes qui suivent : 58 . 5y ... i o j 59 . 60 . . . 64 . 1 . 2 . 3 . . . 9 59. 58... 11 | 60.61 . . .64. 1 .2.3. . . 10 53. 5a... a5 f 54.55. . .64. 1 .a.3. . .24 37.36. ..25 I 38.39- . .64. 1 .2.3. . .24 54. 53... 34 j 55.56. . .64. 1 .2.3. . .33 24. a3... 1.64. 63... 38 | 25.26... 37 62.61 46 j 63. 64. j. 2. . .45 24. 23... 1.64. 63... 54 | 25. 26... 53 33. 32... j. 64. 63... 55 | 34- 35... 54 1 o . 9 ... 1 . 64 . 63 ... 60 | 11 . 1 2 ... 59 45.44..- 1.64.63 | 46. 47... 62 !L ai Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 28.44% accurate

16a THÉORIE DES NOMBRES. Le premier circuit se tracera d'après le tableau (M), en retranchant de 68 tous les nombres de 10 à 58, et laissant les autres nombres tels qu'ils sont, on formera ainsi le nouveau tableau 4a. 7 . 14.27.36.39. 16. a5 i3.a8.4i. 8 .i5.a6.47.38 6 .43. ri.35. 40.37. 24 17 1 1 .34.29. 44. g .48.53.46 3o. 5 . 10.49.54.45. 18. a3 33. a .3i.58.6i.aa.55.5a 4 .59. 64- ai .5o.57.6a. 19 1 .3a. 3 .Go.63.ao.5i .56 r Si l'on forme de même les 10 autres tableaux qui résultent des circuits indiqués, on aura douze tableaux principaux qui sont susceptibles chacun de quatre formes, ce qui fera en tout 48 tableaux donnant chacun deux solutions du problème général. (48 1) Pour déduire du circuit représenté par le tableau (M) onze autres circuits semblables, nous n'avons eu besoin que de partager le premier circuit en deux parties qui s'ajustent convenablement; mais on pourrait partager le même circuit en trois ou en plus grand nombre de parties, de manière à faire toujours un circuit rentrant , ce qui donnerait de nouvelles solutions , en nombre presque indéfini. Supposons, par exemple, que passant de la rase a à la case b, et de la case a + 1 à la case c , on puisse passer en même temps de la case h- - \ à la case c + 1 , ce que nous exprimerons ainsi : a j by a+ 1 j c, b — 1 | c + 1 , on aura cette nouvelle marche rentrante composée de trois parties r + i.e+2...64>i.3...a | b .b -\ - \ . . .c \ a + I .a + a. . .b — 1 : elle suppose seulement £>aH-aetc>£. Un exemple tiré du tableau (M) donnera cette marche toujours rentrante 54 • 55 . . . 64 • 1 • a ■ • • 1 9 j 34 . 35 ... 53 | ao . a 1 . . . 33.

The text on this page is estimated to be only 22.59% accurate

QUATRIÈME PARTIE. i63 Pour former le tableau qui la représente, il faudra dans le tableau M, r laisser à leur place tous les nombres de 54 à 64 et de i à 19; a" diminuer de 1 4 tous les nombres de 34 à 53; 3* augmenter de 20 tous les nombres de 20 à 33. Voici le résultat de cette opération 46. 7 .54.a7.53.49.38.29 55. 26.47- 8 .39.a8.41 -5o 6 .45.56 53.48.5i.3o.37 57.20. 25.44. 9 .40.1S.42 24. 5 .58. 19.i4-43.36.3i 21 . 2 .a3. 10.61 .3a. 1 3. 16 4 .59. 64. 33. 18. 11. 6a. 35 1 .aa. 3 .60.63.34. 17 . 12 On trouverait, suivant les mêmes principes, beaucoup d'autres marches rentrantes ; d'où l'on voit combien le nombre des solutions peut être multiplié, dès qu'une fois on connaît une marche rentrante. (48a) On peut imposer des conditions particulières qui diminueront le nombre des solutions, mais il sera encore très-considérable. Supposons, par exemple, que l'on veuille renfermer les nombres 1 .2.3. . .3a, dans les quatre lignes inférieures du tableau, et les 3a autres dans les quatre lignes supérieures, on satisfera à la première condition de la manière suivante : 3 .a6. 7 .3a. 1 .ad. i5. 18 8 .3i . a .a7. 6 . 17.ga.a1 a5. 4 .39. 10. a3- 14 19. i<> 3o, 9 .a4. 5 .a8. 1 1 .aa. i3 Et si on ajoute 3a à tous ces nombres, on aura quatre autres lignes contenant tous les nombres de 33 à 64. Mais cette seconde partie ne pourra pas s'ajuster avec la première de manière à former un seul tableau de 1 à 64 Pour remplir cette seconde condition Euler donne la première partie ainsi distribuée: ai.

The text on this page is estimated to be only 24.40% accurate

i6'4 THÉORIE DES NOMBRES. aa. 7 .3a. i .a4-i3. 18. i5 3i . a
.a3. 6 . cg. 16.37. Ia 8 .ai . 4 -*9- 10. a5. 14. 17 3 .3o. 9 -ao. 5 .a8. 1 1 .a6 Il
prescrit ensuite d'ajouter 3a à tous ces nombres et d écrire le résultat dans
un sens inverse en prenant les nombres de gauche à droite, et faisant de la
dernière ligne la première. Cette seconde partie ajustée à la première donne
le tableau complet. 58.43.6o. 37 . 5a . 4< .6a .35 49. 46. 57. 45». 61
36.53.4o 44 • 5<) . 48 . 5 1 . 38 . 55 . 34 • 63 47.50.45.56.33.6439.54 a aa .
7 ,3a. 1 . a4- 1 3. t8. i5 • ■ • - ^ 3i . a .a3. 6 . 19. 16.37. ia 8 .ai . 4 -39- 10.
a5. r4- 17 3 .3o. 9 .ao. 5 .a8. 1 1 .a6 où l'on voit que les nombres opposés,
dans les deux moitiés séparées par la ligne a b, diffèrent constamment entre
eux de 3a. Ainsi on a 58 — 26= 32, 5y — a5=3a, etc. La même propriété
subsiste dans les quatre formes dont ce tableau est susceptible. Comme on
peut passer de la case 1 à 1 6 et de la case 64 à 1 5 , on peut changer la
marche précédente en celle-ci 1 . 2 ... 1 5 | 64 • 63 . . . 1 6 , d'où résulte ce
nouveau tableau : 58. 43. 60. 37. 5a. 41 .6a. 35 49. 46. 57. 4a. 61. 36. 53. 4o
44.S9.48.51. 38. 55. 34. 63 47. 5o. 45 .Sj. 33. 64. 39. 54 a aa. 9 .3a. i5.a4 - 3
. 18. 1 ■ • • 3i . i4>*3. 10. 19. 16.37. 4 8 .ai . 13.39. 6 .a5. a . 17 i3.3o. 7 .ao.
1 1 .a8. 5 .36 Mais ce tableau, où l'on n'a changé que la moitié inférieure,
n'a plus Digitized by Google

QUATRIÈME PARTIE. i6r la propriété du précédent, relative à la différence des nombres semblablement placés. Pour la lui conférer, il faudrait former la partie supérieure du tableau en ajoutant 3a aux nombres de la partie inférieure et plaçant ces nombres dans un ordre inverse. (483) Si l'on voulait savoir combien le problème proposé peut avoir de solutions , voici un moyen qu'on pourrait employer dans cette recherche, qui est d'une nature très-difficile. Nous avons trouvé au moins 50 marches qui donnent chacune deux solutions , et ces 50 marches peuvent être assujéties à la notation de l'art. 478 qui les distinguera de toutes les autres. Supposons que par des procédés semblables on forme un nombre de marches beaucoup plus grand que 50 et assujéties à la même notation. Soit ce nombre = n , et soit N le nombre de toutes les marches possibles qui, étant différentes les unes des autres satisfont toutes au problème. Il arrivera nécessairement, lorsque n sera suffisamment grand , que parmi les n marches trouvées, il y en aura quelques-unes qui seront égales, de sorte que le nombre n se réduira à $n - a$ marches différentes. Cela posé on trouve aisément l'équation $n^2 - a^2 = N$ d'où résulte $N = n^2 - a^2$, valeur d'autant plus approchée que n sera plus grand.

The text on this page is estimated to be only 27.00% accurate

— ~ ~ > — — minmiiimi CINQUIÈME PARTIE. Usage de l'analyse indéterminée dans la résolution de l'équation $x^n - i = 0$, n étant un nombre premier. (484) Si l'on écarte du premier membre le facteur $x - i$, et qu'on fasse $\sqrt[n]{C} = a + x^{-1} + x^{-2} + \dots + x^{-k} + i$, $x - i$ on sait par le théorème de Côtes que le polynôme X a pour facteur général $x' - a \arccos \sqrt[n]{p} - i$, k étant un nombre quelconque nondivisible par n ; de sorte qu'en donnant à k les valeurs successives $1, 2, 3, \dots, n - 1$, on aura tous les facteurs dont ce polynôme est composé. Les connaissances des Analystes sur la résolution de l'équation $v^n - i = 0$, étaient presque réduites à ce seul théorème, lorsque M. Gauss publia son excellent ouvrage intitulé *Disquisitiones Arithmeticae*, où l'on trouve une théorie nouvelle et très-complète de la résolution de la même équation, ou, ce qui revient au même, de la division de la circonférence en n parties égales. Comme cette théorie est une des applications les plus intéressantes de l'analyse indéterminée, et qu'elle conduit à des résultats très-curieux, nous avons cru faire plaisir à nos lecteurs, en l'exposant ici avec de nouveaux développements. (485) Si on appelle r l'une quelconque des racines imaginaires de l'équation $r^n - i = 0$, c'est-à-dire, si l'on fait $r = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$, $\frac{2\pi}{n}$ étant un nombre quelconque non-multiple de n , toutes les racines de cette équation seront $r, r^2, r^3, \dots, r^{n-1}$; des

The text on this page is estimated to be only 21.28% accurate

CINQUIÈME PARTIE. Soit α une racine de l'équation $X^n - 1 = 0$, il restera pour les racines de l'équation $X^n - 1 = 0$, ces $n - 1$ valeurs : $x = \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \dots, \alpha^{n-1}$. En général donc α^k sera une racine quelconque de l'équation $X^n - 1 = 0$; pourvu que k ne soit ni zéro ni multiple de n . Avec cette restriction il n'y a que $n - 1$ valeurs différentes comprises dans l'expression $x = \alpha^k$; car si on avait $\alpha^k = \alpha^l$ il est clair qu'on aurait $\alpha^{k-l} = 1$, puisque $\alpha^n = 1$; et par la même raison, on aurait aussi $\alpha^{l-k} = 1$. D'ailleurs on prouve aisément que les $n - 1$ valeurs précédentes sont différentes entre elles; car si on avait $\alpha^k = \alpha^l$, k et l étant plus petits que n , il en résulterait $\alpha^{k-l} = 1$, $k-l$ étant $\pm (a - g)$ et par conséquent plus petit que n . Mais comme n est un nombre premier, les deux équations $\alpha^k = 1$, $\alpha^l = 1$, ne sauraient avoir lieu ensemble, à moins qu'on n'eût $k = l$, ce qui est contre la supposition. (486) Cela posé, le polynôme X peut être mis sous la forme $(X - \alpha)(X - \alpha^2)(X - \alpha^3) \dots (X - \alpha^{n-1})$. Et comme on peut mettre α , ou en général α^k au lieu de α , on aura aussi $X = (X - \alpha^k)(X - \alpha^{2k}) \dots (X - \alpha^{(n-1)k})$, et en général, $X = (X - \alpha^k)(X - \alpha^{2k}) \dots (X - \alpha^{(n-1)k})$. Donc puisque le second terme du polynôme X a pour coefficient $-\alpha - \alpha^2 - \alpha^3 - \dots - \alpha^{n-1}$, on aura $\alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \dots + \alpha^{n-1} = -1$, et en général, $\alpha^k + \alpha^{2k} + \alpha^{3k} + \dots + \alpha^{(n-1)k} = -1$;

The text on this page is estimated to be only 28.58% accurate

H* THÉORIE DES NOMBRES. équations qui ont lieu sans désigner celle des racines de l'équation $X = 0$ qu'on prend pour r . (487) 0

Théorème. Soit $\phi(r, s, t, u, \text{etc.})$ une fonction rationnelle « et entière (1) des racines $r, s, t, \text{etc.}$ de l'équation $X = 0$, ou seu« lenient de quelques-unes d'entre elles ; si dans cette fonction on « substitue successivement, au lieu des racines $r, j, i, \text{etc.}$, leurs « carrés, leurs cubes, et ainsi jusqu'aux puissances de l'ordre n , « lesquelles se réduisent toutes à l'unité ; je dis que la somme des n « fonctions ainsi formées, « $\phi(r, s, t, \text{etc.}) + \phi(r^2, s^2, t^2, \text{etc.}) + \phi(r^3, s^3, t^3, \text{etc.}) + \dots + \phi(r^n, s^n, t^n, \text{etc.})$, « sera égale à un multiple de n . » En effet, chaque terme en particulier de la fonction ϕ étant de la forme $A r^j s^k t^l \dots$, et les racines $j, k, l, u, \text{etc.}$ étant des puissances déterminées de l'une d'elles r , il est clair que ce terme se réduira toujours à la forme $A r^e$, où l'on peut supposer $t < n$. Donc la fonction entière $\phi(r, s, t, u, \text{etc.})$ se réduira à la forme $A' + A''r + A'''r^2 + \dots + A^{(t)}r^t$. Si Ton met ensuite r' à la place de r , ce qui change en même temps s en s' , t en t' , etc., la fonction $\phi(r, s, t, \text{etc.})$ sera représentée par $A' + A''r' + A'''r'^2 + \dots + A^{(t)}r'^t$, et en général la fonction $\phi(r, j, f, \text{etc.})$ le sera par $A' + A''r + A'''r^2 + \dots + A^{(t)}r^t$. Donc la somme de toutes ces fonctions jusqu'à $\phi(r^n, j^n, f^n, \text{etc.})$ inclusivement, sera $(t+1)A'$. On appelle /onction rationnel/g et entière des quantités $r, f, j, \text{etc.}$ toute fonction composée de tant de termes qu'on voudra, de la forme $A r^m s^n t^p \dots$, A étant un entier.

The text on this page is estimated to be only 28.16% accurate

CINQUIÈME PARTIE. i% «A'+A'V + r' + r' r') + A'''(r'+ r< + r6
r'') -f- Aw(r— ' 4- r''~ * + r1''-5 -+ r'''-"), quantité qui se réduit à «A'
(n*486), et par conséquent est un multiple de n. Il est bien à remarquer que
<;e théorème a lieu , quel que soit le nombre des racines r, s , t, etc. qui
entrent dans la fonction 9. (488) Théorème, a Si le polynôme Z=aT-f- Aaf'''
+ Bj''-' + « Cxm~i + etc. , dans lequel les coefficients A , H, C , etc. sont
entiers, «est divisible par le polynôme P=.r'' -4- axm~' + bx*~'+ etc., dont «
tous les coefficients a, b , c, etc. sont rationnels; je dis que oes « derniers
doivent aussi être des nombres entiers. » Car après avoir réduit tous les
ternies de P, excepté le premier or", à un même dénominateur , soit ce
dénominateur = a*4 A, a** étant la plus haute puissance de l'un des
nombres premiers qui en sont diviseurs; on pourra supposer (n° i4), ly,P",
V" étant des polynômes en x dont tous les coefficients sont entiers, le
premier du degré n commençant par x" , les deux autres du degré n — 1 au
plus. Si on appelle Q le quotient de Z divisé par P, on pourra faire
semblablement Cela posé, le produit PQ devant se réduire à un polynôme
dont tous les coefficients sont entiers, il faudra que le terme — ^-
disparaisse de lui-même, puisque les autres n'offrent dans leurs
dénominateurs que des puissances moins élevées de «. Donc l'une au moins
II. Digitized by Google

170 THÉORIE DES NOMBRES, des quantités F et Q est nulle :
 ce ne peut être P^* , puisque P contient a^4 dans ses dénominateurs; donc on
 a $Q''=0$, donc a ne se trouve pas dans les dénominateurs de Q . La même
 chose peut se dire des autres nombres premiers qui entreraient comme
 diviseurs dans les coefficients de P . Donc le quotient Q ne contient aucune
 fraction et doit être une fonction entière. Cela posé on aura. . . $P''^0 P''' Q Z =$
 $PQ = IyQ H j = -4 - r - S$; mais puisque Z est une fonction en $P^* Q$ tière, il
 faudra que — en soit une aussi; or d'une part la fraction $a P''$ — est censée
 irréductible, d'autre part le quotient Q , dont le premier a^{**} terme est a^{*-1} ,
 n'est point divisible par a^{**} . Donc le polynôme P ne peut contenir dans ses
 coefficients aucun terme fractionnaire. (489) Théorème. « Le polynôme X ,
 dans lequel n est toujours « supposé un nombre premier, ne peut se
 décomposer en deux « facteurs rationnels. » Car supposons que le
 polynôme X du degré $n - 1$, ait pour facteur le polynôme de degré
 inférieur $P = v^4 - ax^{n-1} + bx^{n-2} + hx + k$, il faudra, par le théorème
 précédent, que tous les coefficients a, b, c , etc. soient des entiers. De plus on
 peut observer que v doit être pair et k positif; car si ces conditions n'avaient
 pas lieu à-la-fois, l'équation $P=0$ aurait au moins une racine réelle, laquelle
 serait aussi une racine de l'équation $X = 0$: or on sait que celle-ci n'a que
 des racines imaginaires. Soient r, s, t, u , etc. les racines de l'équation $P = 0$,
 en sorte qu'on ait l'équation identique $P = s (a - r) (x - s) \dots (x - t) (x - u)$
 etc. , ■ le nombre des facteurs $x - r, x - s$, etc. étant v . On peut donner
 une valeur quelconque à x dans cette équation; soit donc $x=z$ 1 , Digitized
 by Google

CINQUIÈME PARTIE. 171 et appelons p' ce que devient P ; nous aurons $\frac{1}{p'} = (1 - r)(1 - s)(1 - t)(1 - u)$ etc. Le nombre p' aura aussi pour valeur $1 + a + b + c + \text{etc.}$, et ainsi il sera entier; de plus, il devra être positif, puisque toutes les racines r, s, t , etc. sont imaginaires. Au moyen de l'équation $P = 0$, dont les racines sont r, s, t, u , etc., il est aisé de former une autre équation $P^* = 0$, dont les racines soient r^*, s^*, t^* , etc.; et parce que les coefficients du polynôme P sont entiers, le premier étant $= 1$, ceux du polynôme du même degré P^* seront pareillement entiers, ainsi qu'il résulte des formules connues. Donc si on fait $x = 1$ dans chacun des polynômes P^* , et que les nombres résultants soient successivement $p' = (1 - r')(1 - s^*)(1 - V)(1 - \dots)$ etc. $\frac{1}{p'} = (1 - r)(1 - s)(1 - t)(1 - u)$ etc. $\frac{1}{p'} = (1 - r)(1 - s)(1 - t)(1 - u)$ etc., il est clair que tous les nombres p', p^*, p'' , etc. seront des entiers positifs. Maintenant si on multiplie toutes ces équations entre elles, et qu'on observe que par l'équation $X = (a - r)(x - s)(x - t)$, etc., on a pour chacune des racines r, s, t , etc. $(1 - r)(1 - s)(1 - t) = \dots$ etc. le produit sera Mais puisque toutes les quantités p', p^*, p'' , etc. sont des entiers

The text on this page is estimated to be only 18.81% accurate

i7a THÉORIE DES NOMBRES. positifs, et que leur nombre n —
i surpasse v , il faut , pour que leur produit soit n , que quelques-unes d'entre
elles soient égales à n ou à une puissance de n , et que d'autres soient égales
à l'unité. Le nombre de celles-ci ne peut être moindre que $n - i - v$; si on
l'appelle X il est clair que la somme $p + p' + p \dots - p'' - p''' \dots$ sera de la
forme $X A / t$. Or on a démontré (n° 487) que la même somme, en y
comprenant p_m , qui est zéro, est un multiple de n . Il faudrait donc qu'on
eût $X + A/i = B$, équation impossible, puisque X est $< v$ et $> « - 1 - v$,
ou $= n - 1 - v$. Donc si P est diviseur de la fonction X , les coefficients de
 P ne peuvent être des nombres entiers. Donc la fonction X ne peut avoir que
des facteurs irrationnels. Hemarq. Ce théorème n'aurait pas lieu si n était
un nombre composé ; en effet soit $n = « \hat{e}$, a et 6 étant deux nombres i m
pairs, premiers ou non premiers, on pourra faire $X = — = X 1 - — ^ —$.
Ainsi ■ • $x - 1 x - 1 * x - I$ a en appelant P le polynôme $x - 4 - x - + -$ etc.
égal à — et Q , . $a \hat{e} - a \hat{e} - aa \cdot \cdot x \% - 1$ le polynôme $x + x - t -$ etc.
égal a — , ou aura. $\cdot x - J \setminus = PQ$. (4<)o) Puisqu'il est démontré que le
polynôme X ne peut avoir aucun facteur rationnel, n étant un nombre
premier , la résolution de l'équation $X = 0$ ne peut se faire qu'en
décomposant X en facteurs irrationnels. Or la théorie que nous allons
exposer, d'après M. Gauss, a pour but de démontrer cette proposition très-
générale : « Ayant décomposé $n - 1$ en facteurs premiers at A, r , etc., de m
« sorte qu'on ait $n - 1 = t^* h e T$, etc., je dis que la résolution d« « l'équation
 $X=0$, ou, ce qui revient au même, celle de $r 1 = 0$, « pourra toujours se
réduire à la résolution de plusieurs équations « de degré inférieur, savoir: «
équations du degré a , 6 du degré A , « y du degré c , et ainsi de suite. Par
exemple, si l'on a $11 = j \setminus$, $> c$ qui donne $// - 1 = \hat{i} \setminus H \setminus$ la ré

The text on this page is estimated to be only 21.85% accurate

CINQUIÈME PARTIE. i;3 solution de l'équation $x^i - i = 0$
s'effectuera moyennant trois équations du second degré et deux du
troisième. Si l'on a $n - 1 \mid 7$, ce qui donne $n - 1 = a$ la résolution de
l'équation $x^a - 1 = 0$ se réduira à celle de quatre équations du second degré,
On peut donc diviser géométriquement la circonférence en dix-sept parties
égales, ce qu'on était loin de regarder comme possible avant la
démonstration de M. Gauss. En général, si le nombre premier n est de la
forme $a^m + 1$, on pourra réduire la résolution de l'équation $x^n - 1 = 0$ à celle de m
équations du second degré; il ne faudra même que $m - 1$ de ces équations,
s'il s'agit de la division du cercle en n parties égales. Observons que $a^m - 1$
ne pourrait être un nombre premier, si m était impair ou qu'il eût seulement
un diviseur impair, car $a^{1^m} - 1$ a pour facteur 3, et $2^m + 1$ a pour facteur
 $a + 1$, si m est impair. Donc $a^m - 1$ ne pourra être premier que lorsque m
sera une puissance de 2, et cependant il ne sera pas premier toutes les fois
que m sera une puissance de 2; car il y a exception lorsque $a = 3$.
Après les cas de $m = 1, 2, 4$, qui sont déjà connus, si l'on prend celui de $a = 8$,
il en résulte $n = 2^{2^2} + 1 = 337$, qui est un nombre premier. Donc on
peut diviser géométriquement la circonférence en 267 parties égales, ce qui
se fera au moyen de sept équations du second degré. La division
géométrique peut se faire aussi en 255 et 257 parties, puisque $255 = 3 \cdot 5 \cdot 17$
et $257 = 2^8 + 1$; de sorte que les trois nombres consécutifs 255, 256, 257, ont la
propriété de diviser géométriquement la circonférence. Dans les nombres
inférieurs, il faudrait descendre jusqu'à 15, 16, 17, pour rencontrer une
semblable propriété. Et parce que $2^{16} - 1 = 65537$ est aussi un nombre
premier, si on remarque que $2^{16} - 1 = (2^8 - 1)(2^8 + 1) = 255 \cdot 257$, on verra que les
trois nombres consécutifs 65535, 65536, 65537 » quoique trèsgrands,
jouissent encore de la même propriété. Mais on ne peut continuer
immédiatement cette suite, parce que $2^{17} - 1$ n'est pas un nombre premier.

i74 THÉORIE DES NOMBRES. (491) Toute racine de l'équation $X=0$ pouvant être représentée par r^* , « n'étant ni zéro ni multiple de n , nous désignerons cette racine par l'expression abrégée $(\ll)$. Cela posé, deux racines $(\ll)$ et $(\hat{e})$ seront les mêmes si $a - \hat{e}$ est divisible par n , et différentes s'il n'est pas divisible. De plus, il suit de l'origine de ces racines que le produit $(a) \times (g) = \{a\}$, et que la puissance $(a)^m = (m a)$, propriétés analogues à celles des logarithmes. On observera aussi qu'on a $(0) = 1$, $(n) = 1$, et en général $(k n) = 1$, puisque ces expressions représentent r^*, r'', r^{**} , qui sont égales à l'unité. Toutes les racines de l'équation $X = 0$ sont représentées par la suite $(1), (a), (3a) \dots (n - 1)$; mais comme au lieu de r on peut prendre en général ra , pourvu que « ne soit pas divisible par n , ces mêmes racines seront représentées par la suite $(a), (2a), (3a) \dots (n - 1 \cdot a)$, qui ne différera de la première que par l'ordre de ses termes. {492}

Considérons maintenant l'équation indéterminée $z^n - 1 = CM > (h)$ dont le second membre désigne un multiple quelconque de n ; on sait que les $n - 1$ racines de cette équation, supposées positives et moindres que n , sont la suite des nombres naturels $1, 2, 3 \dots n - 1$; on sait en même temps qu'il est toujours possible de trouver un nombre g dont les puissances successives donnent toutes les racines de la même équation; de sorte que la suite $g^1, g^2, \dots, g^{n-1}$, ou ce qui revient au même, la suite $1, g, g^2, \dots, g^{n-1}$, donne, en omettant les multiples de n , les mêmes termes qui sont contenus dans la suite $1, 2, 3 \dots n - 1$, mais rangés dans un ordre différent (1). Ce nombre g qui, rapporté au nombre premier n , se désigne (i) On peut conclure de là qu'en omettant les multiples de n le produit $g^1 g^2 \dots g^{n-1}$, ou $g^{n(n-1)/2}$ est égal au produit $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n - 1$. Mais puisque par la propriété du nombre g on doit avoir $g^{n-1} = -1$, et par conséquent $g^{(n-1)/2} = \pm 1$ s'ensuit que le produit $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n - 1$ augmenté de l'unité est divisible par n , ce qui est le théorème de Wilson (n° i30). Digitized by Google

CINQUIÈME PARTIE. 175 tous le nom déracine primitive, est tel qu'on a $g^{\sim} = i$ et qu'aucune puissance de g , dont l'exposant est moindre que $n - i$, ne peut se réduire à l'unité, en omettant les multiples de n . Et comme $n - i$ est un nombre pair, la même propriété exige qu'on ait $g^{7^n} \sim i$ et qu'aucune autre puissance de g dont l'exposant est moindre que $\pm(n - i)$, ne puisse se réduire à -1 par l'omission des multiples de n . (493) Cela posé, « étant un nombre quelconque non-divisible par n , on pourra toujours trouver un exposant j tel que c'est-à-dire, tel que $g^j = i$. Car le nombre « diminué, s'il y a lieu, du multiple de n qu'il peut contenir, est compris dans la suite $g, g^2, g^3, \dots, g^{n-1}$. Au moyen de la racine primitive g , on peut donc exprimer toutes les racines de l'équation $X^n - i = 0$ par $(a), (ag), (ag^2), \dots, (ag^{n-1})$ g^j étant un nombre quelconque non-divisible par n , car en faisant $j = g^p$, cette suite devient et parce que le terme suivant $g^{n-1} = (g^{n-1})$ on voit que cette suite est circulaire ou rentrante sur elle-même, et qu'on peut la commencer par un terme quelconque, de sorte qu'elle est équivalente à la suite $(g), (g^2), (g^3), \dots, (g^{n-1})$. Ces mêmes racines seraient également exprimées, mais dans un ordre différent, par la suite $(a), (aG), (aG^2), \dots, (aG^{n-1})$, si G était une autre racine primitive de l'équation $z^n - i = 0$. Or on sait (n° 34) que pour un même nombre premier n , le nombre des racines primitives qui satisfont à l'équation $z^n - i = 0$, est toujours le même que celui des nombres premiers a — 1 et plus petits que $n - 1$. Ainsi pour $n = 4$ il y a 1 G de ces nombres, savoir : 6, 7, n , 11; 13, 15, 17, 19; 23, 25, 26, 28; 29, 30, 34, 35; ils se déduisent tous des puissances de l'un d'eux en omettant celles dont

The text on this page is estimated to be only 25.21% accurate

i7(i THÉORIE DES NOMBRES, les exposants ont un diviseur commun avec $n - i$; ce sont dans it^* cas les puissances dont l'exposant est impair et non-divisible par 5 (i). -495) Soit k un diviseur quelconque, premier ou non premier, de $n - i$, en sorte qu'on ait « $- i = ^mk$; si à partir d'un terme quelconque $\{gx\}$ de la suite $(i), (g), \{g'\} \dots (g''- \dots)$, comprenant toutes les racines de l'équation $X - o$, on forme une nouvelle suite : rette suite ou période composée d'un nombre m de termes, pourra toujours être regardée comme circulaire ou rentrante sur elle-même, puisque le terme (g^{m^m}) qui suivrait le m^m terme , est égal au premier (gx) , en vertu de l'équation conditionnelle $gmh = gn - 1 =$ On peut donner à X toutes les valeurs depuis i jusqu'à k , on aura ainsi un nombre k de périodes composées chacune de m termes. Appelons en général $(m : g^*)$ la somme des m racines qui composent la période dont g^* est le premier terme, nous aurons successivement $\{^{**} + (g^1 + k) + \{g^1 + a^*\} Hgx + mk \sim k) (m \cdot g') = \langle g' \rangle Hg : i + k) + (g^2 \wedge k) Mg^2 + mk - k) (\gg : g^*) = \{gi\} Hg^* + k) + (g^{***'}) + (g^* + mk - *) (\ll : g^*) = lg^*) + ig^*k) + igZk) Hgm k)$ Il est visible que les k périodes, composées chacune de m termes , ' i ' ; Voici , d'après Euler , la plus petite valeur de $/y$ pour tous les nombres premiers de 3 à 41 « I 3, 5, 7, n, i3, 17, io, a3, ao, 3t , \$7, 4 » ? \ a, a, 3, a, a, 3, a, 5, a, 3, a, 6 Digitized by Google

CINQUIÈME PARTIE. 177 comprennent toutes les racines de l'équation $X=0$, puisqu'on y trouve tous les termes de la suite $(g), (g'), (g^*)$. ■
 • $(gp''\sim')^{\wedge}$ et Ulle décomposition semblable aura lieu pour toutes les autres valeurs de m et de k dont le produit mk est égal au nombre donné $n - 1$. Il est essentiel de remarquer que si (a) et (ϵ) sont deux termes d'une même période, cette période désignée par $(m : a)$, peut l'être aussi par $(m : \epsilon)$; car puisque toute période est rentrante sur elle-même, un terme quelconque peut être regardé comme le premier. C'est tinsi que la période désignée par $(m : g^*)$ dans le tableau précédent, peut l'être également par $(m : 1)$, parce que son dernier terme $gm = xgn \sim I = 1$, ce qui donnera pour l'expression de la même période $(m : .) = (i) + (g^*) + g^{**}$. . . + $\{gmk - k\} / (19G)$ Ces propriétés relatives à la racine primitive $^{\wedge}$ ont lieu également par rapport à toute autre racine primitive G ; mais ici il se présente une question à résoudre : c'est de savoir si, en conservant les mêmes facteurs m et k dont le produit $= n - 1$, les k périodes désignées par $\{m : G^{**}\}$ seront les mêmes que les k périodes désignées par $(m : g')$. Voici comment l'affirmative peut être démontrée. Proposons de comparer entre elles les deux périodes $(m : G^{\wedge}) = (C/) + (G < A + *) + (G^{**4} 2^*) 4 - (G^{\wedge} + mk \sim k)$. Pour cela j'observe (l'abord qu'on peut supposer $G = ga$, a étant un nombre premier à mk ; ensuite si on veut avoir $Gv = gX + **$ ou $gaP = gX + *y$, il suffira de satisfaire à l'équation $X = \ll a - \#v$, c'est à dire de diminuer le nombre donné a (t du multiple de k qu'il peut contenir, et le reste sera la valeur de X . On trouve donc ainsi une valeur de X telle que la racine donnée $(G1^*)$ coïncidera avec la racine (g) . On trouvera de même que toute autre racine II. a^3

The text on this page is estimated to be only 21.54% accurate

i7S THÉORIE DES NOMBRES. (G*****), comprise dans la période (m : G1*), coïncidera avec ime des racines comprises dans la période (m : g*) ; et puisque chacune de ces périodes est composée d'un même nombre de termes inégaux entre eux , si chaque terme de l'une trouve son égal dans l'autre, il faut nécessairement que ces deux périodes soient égales, comme étant toutes deux la somme des mêmes termes disposés dans un ordre différent. Appliquant le même raisonnement aux autres valeurs de ji, on en conclura que les k périodes de m termes formées d'après la racine primitive G , ne diffèrent des k périodes semblables formées d'après la racine primitive g, que par l'ordre qui peut varier tant dans les périodes entre elles que dans les termes qui composent chaque période. (497) Toutes les fois que m sera un nombre composé, ce qui permettra de faire $mtetm'^*$, chaque période de m termes telle que (m : $\mathbb{X}$), pourra être décomposée en un nombre k' de périodes de /«' termes, désignées par (m'igr-), en donnant successivement à ^ toutes les valeurs 1 , a, 3. . .k'. Il faut concevoir pour cet effet que les m termes qui composent la période (m savoir, (gX) + (ffl + *) + ($\mathbb{X}$ + "*)••• + (gX + m>-*), sont pris de deux en deux si k'^2 , de trois en trois si $X' = 3$, etc., ce qui formera les périodes partielles au nombre de k', comme il suit : ($\ll f = rt=*Uh + tt^{**} TM) + tf^{*} ***) \bullet \blacksquare - Hey + " *-** <$ ($m^{\wedge} + *' *-*$ } = $\wedge + *' *-*$) + ($\wedge + a *' *-*$)... + ($\wedge X - 1 - " *-*$). On voit de même que si m! est encore un nombre composé et qu'on Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 26.04% accurate

CINQUIEME PARTIE. i79 fusse m' sa m" k" , chaque période de m' terme» pourra se décomposer en k' périodes de m termes, et ainsi jusqu'à ce que le dernier terme de la série décroissante m , m\ m", etc. soit égal à l'unité. Dans cette limite la période se réduira à un seul terme , qui sera l'une des racines de l'équation proposée $X = 0$. (498) Au reste comraen — 1 est toujours un nombre pair, la formation des périodes pourra toujours être dirigée de manière que les dernières périodes à déterminer soient celles de deux termes , lesquelles contiendront toujours deux racines réciproques l'une de l'autre , en sorte que (a : a) étant une de ces périodes, on aura généralement (a : *) $s = ra + rn - \dots = r^* r^x$. On aura ainsi l'avantage de n'avoir à résoudre dans le cours de l'opération que des équations dont toutes les racines sont réelles. Enfin connaissant par la dernière équation la valeur de la période (a : a) par exemple , laquelle pourra toujours être représentée par $\cos. (t, \text{ on aura l'équation } ra + r^n = \cos. \pi$, d'où l'on tire $r^n = \cos. \frac{\pi}{n}$ — $\sin. \frac{\pi}{n}$; et cette valeur d'une des racines de l'équation $X = 0$ suffit pour trouver toutes les autres représentées par la formule $x^{(n)} = \cos. \frac{\pi}{n} + i \sin. \frac{\pi}{n}$ * 5 = $\cos. \frac{\pi}{n} + i \sin. \frac{\pi}{n}$ | A , k étant un terme quelconque de la suite 1 , a, 3. . . n — 1. On sait d'ailleurs que p. sera toujours un multiple 1 217 (499) L'ordre des opérations qu'on vient d'indiquer est fondé sur ce que dans toute période (« : «) on m est pair et dont la valeur développée est (1) (m : «) = («) + («/ + *).... + { *Smk ~ k) , le terme («) est toujours accompagné du terme («£••), qui est le (1) Cette formule, comprise dans celle de l'art- 497» 691 $P^{*00} ** *$ représenter toute période formée directement ou déduite d'autres périodes par des décompositions successives; car les nombres m et k peuvent être variés de plusieurs manières avec la seule condition que le produit $mk = n - 1$. a3.

i80 THÉORIE DES NOMBRES. même que (— a) , puisque $g^7 =$ — i, c'est-à-dire qu'on trouve à-la-fois dans la même période les deux termes ra et r~ qui sont réciproques l'un de l'autre. Et ce qui se dit du terme (a) peut s'entendre de tout autre terme de la période , puisqu'on peut prendre un terme quelconque pour le premier. Donc toute période (m : a) dans laquelle le nombre m est pair, est composée de deux parties, telles que les termes de l'une sont les compléments ou les réciproques des termes de l'autre. (500) Il reste maintenant à faire voir comment on peut former l'équation qui a pour racines les k différentes périodes désignées par (m : «), ainsi que les équations qui servent à déterminer les périodes décroissantes (m : «), (ni : a), etc. C'est ce qui deviendra facile au moyen du théorème suivant, dont l'importance est trèsgrande dans ce genre d'analyse.

THÉORÈME FONDAMENTAL. « Soient (ni : «), (/« : 6) , deux périodes semblables ou d'un même « nombre de termes, mais d'ailleurs égales ou inégales; le produit « de ces deux périodes étant nommé n , on aura, en faisant / == ' - ^ ^ « et $A = g^*$, a $II = (m : « + 6) + (JK : «A + e) 4 - (m : aA' + 6) . . . + (m : «A — * + é)$, « c'est-à-dire que le produit II sera égal à la somme des périodes « semblables qui contiennent les termes (« -+- 6) , (a h -+- 6) , (a A' + €) « . .. («A — * + *). » En effet le développement des termes contenus dans les deux périodes proposées donne (m : «) = («) 4- («A) 4- («A*). . . . + («A—; • (m : ê) = (6) -H (6A) + (S h'). . . . + (6A~) Or le produit de ces deux polynômes peut être disposé de la manière suivante, d'après la formule («) x (£) = (* + ê),

The text on this page is estimated to be only 25.73% accurate

CINQUIÈME PARTIE. 18 1 («+*) + {«A + ê) + («AN- €). . . + (aA~'-t- 6) + («A + 6A) -+- («À*+ 6A) + («A» -4- 6A). . . + («A" -t- 6A) + (aA'+ 6A') -f- («A1 + g/*') + («A* -1- 6 A').'. . + (« A—' + .6 A») + («A— *+eAT-)+(«A-'4reA— O+CaA^'+eA—)- . . +(aA"— + 6A— '). Prenant la somme des différentes colonnes verticales qui forment chacune une même période von aura le produit cherché II — (m : « + é)+ (m : ah + G) + (m : aA'+ é). . . +(m : a A— '+ ê). l/es diverses parties dont le produit n est composé se réduiront toujours soit à la période (m : o) ou (m : n) dont la valeur est m puisqu'elle représente la somme de m termes égaux à r'ou r" , soit à l'une des périodes (m : 1) , (m : #) , (m :g'). . . (m:g1-'); ainsi on aura en général n = A m + A' (/« : 1) + A" (m : #)+ A'''(w : g") + etc. Et comme le nombre des périodes comprises dans le produit n est m , on devra avoir aussi la somme des coefficients A -+- A' + A"-f- etc. = m , ces coefficients étant des entiers positifs ou zéro. (5oi) Le produit de deux quantités de la forme {m : a) pouvant toujours se réduire à la somme de plusieurs quantités de la même espèce, il est clair que le produit d'un nombre quelconque de ces quantités, et par conséquent aussi leurs puissances et les produits de ces puissances, se réduiront toujours à une expression linéaire telle que Am+A' (m : 1) + A" (m : g) + etc. , les coefficients A , A' , A" , etc. étant des entiers positifs ou zéro. Donc si une fonction F est composée de plusieurs termes tels que N if v . . . , où N est un entier et dans lequel f \ ifi , v*. . . désignent

The text on this page is estimated to be only 22.78% accurate

18a THÉORIE DES NOMBRES. des puissances quelconques des périodes $i = (\# \ll : \grave{a})$, $u = s\{m : \epsilon\}$, $v = (m : y)$, etc. prises à volonté parmi les k périodes de m termes qui comprennent toutes les racines de l'équation $X=0$; cette fonction se réduira de même à la forme $A m + A'(m : i) + A''(m : g) + \text{etc.}$, où les coefficients A, A', A'' , etc. sont des entiers. Si ensuite au lieu de t, u, v , etc. on substitue les périodes $[m : /a), (m:i\epsilon), (m:iy)$, etc., i étant un entier quelconque non-divisible par n , le résultat sera $A m - A' (m : i) - A'' [m : ig) + \text{etc.}$; car le changement dont il s'agit se fait en substituant simplement r à r' , au moyen de quoi toute racine désignée par (a) devient $(i a)$. Imaginons qu'on donne successivement à t toutes les valeurs $(m : a), (m : <tg), (m : a g1)$, etc. qui forment la suite des k périodes de n termes, en commençant par le terme $(m : a)$; qu'en même temps u prenne les valeurs successives $(m : \zeta), (m : ^), (pt! 6g-*)$, etc., et v les valeurs $(w.y), (m : y\#), (m : yg^*), \text{etc.}$, ainsi de suite, ce qui donnera k différents résultats dans lesquels chaque quantité t, u, v , etc. aura pris les k différentes valeurs dont la période de m termes est susceptible; la somme des k valeurs de la fonction F résultant de toutes ces substitutions sera $A^*m + A' \{m : i\} + A''f(m : g) + A'''f\{m : g^*\} + \text{etc.}$. Dans cette formule $\sum_{m : i}$ représente la somme (les k périodes $(m : i) + (m : g) + (m : g^*) + \dots + (m : g^{i-1})$), laquelle est égale à $-i$; les autres sommes semblables $\sum_{m : g}, \sum_{m : g^*}, \text{etc.}$, composées chacune du même nombre de périodes, ont toutes la même valeur. Ainsi la somme des fonctions F est en général $Akm - A' - A'' - A''' - \text{etc.}$, de sorte qu'elle est toujours égale à un nombre entier déterminé.

(50a) Telle est donc la propriété des racines de l'équation du degré k qui donne les périodes $(m : i), (m:g), (m:g^*), \text{etc.}$, qu'étant proposé une fonction Z rationnelle et entière de ces racines ou de quelques-unes d'entre elles désignées par t, u, v , etc., si on imagine que les quantités t, u, v , etc., qui d'abord sont $(m : a), (m : 6), (m : y)$, etc., prennent dans une première substitution les va

The text on this page is estimated to be only 22.56% accurate

CINQUIÈME PARTIE. 183 leurs ($\frac{1}{\#} : ag$), ($ni : \epsilon g$) $\{m : y g\}$, etc., dans une seconde les valeurs ($m : *g'$) $t(m ; S g^*)$, ($rn : fg^*$), etc., ce qui après $k - 1$ substitutions aura fait parcourir à chacune le cercle entier des valeurs dont toute période de m termes est susceptible, la somme de toutes les valeurs de la fonction Z sera égale à un nombre entier facile à déterminer. (503) Si la fonction F des racines t, a, v , etc. de l'équation du degré k , comprend toutes ces racines, et si en même temps elle est telle qu'on puisse échanger entre elles deux des racines à volonté, cette fonction qu'on désigne ordinairement sous le nom de fonction invariable, se déterminera immédiatement, puisqu'alors on peut mettre rgk la place de r , sans rien changer à la fonction, et qu'ainsi la valeur $A_m + A'(m : i) - A''(m : g) - A'''(m : g'') - t$ etc. devant être la même que $A_m + A'(m : g) A''(m : g') + A'''(m : g'') - *$ etc., on a $A' = A'' = A'''$, etc.; donc la fonction F se réduit à $A_m - A'$. Ainsi au moyen du théorème de l'art. 500, on déterminera facilement en nombres entiers les coefficients de l'équation du degré k qui a pour racines les périodes $(m : i), (rn : g), \dots (m : g^{1''})$. Cette équation jouit de la propriété fort remarquable qu'une seule de ses racines étant connue, on en peut déduire aisément toutes les autres. En effet, désignons par $p, p', p'', \dots p^{(l-x)}$ les périodes $(m ; *)$, $(m : ag)y$ $(m : «g''')$. $\dots (m : *^{\wedge'})$ » ^ somme de ces quantités étant la même que celle des racines de l'équation $X=0$, c'est-à-dire $-i$, on a pour première équation $0 = 1 + p + p' + p'' + \dots$ etc. Si ensuite on développe les puissances successives p^*, p' etc. pour les réduire à la forme linéaire d'après le théorème de l'art. 500, on aura $* - i$ autres équations, $p' = a_m + a'p - a''pt - a'''p'' - h$ etc. $p \geq b_m + Vp - h b''p' + b'''p'' + \dots p^{rsrscm} + e'p + c''p - c'''p'' + \dots$, etc. où les coefficients doivent être des nombres entiers positifs. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 27.90% accurate

184 THÉORIE DES NOMBRES. Ces équations au nombre de A , contenant les inconnues $p, p', p'' \dots p^{(l-1)}$ sous forme linéaire, on pourra par les k — i premières équations trouver les valeurs de ces inconnues qui seront toutes de la forme $A + A'p + A''p^2 \dots + A^{(k-1)}p^{k-1}$; A, A', A'' , etc. étant des coefficients rationnels. On voit de plus que si on substitue toutes ces valeurs dans la dernière équation qui donne la valeur de p^k , on aura l'équation en p du degré k qui a pour racines les A périodes $(m : i), (m : g)$, etc., ce qui est un des moyens les plus simples d'obtenir cette équation, qui sera toujours de la forme $p^k + p^{k-1} + \dots + p + g = 0$. (A) (504) Il faut faire voir maintenant qu'au moyen des racines «le l'équation (A), le polynôme X peut être partagé en h facteurs du degré m . Pour cela soit $r = A + A'p + A''p^2 + \dots + A^{(k-1)}p^{k-1}$ — $B + B'p + B''p^2 + \dots + B^{(k-1)}p^{k-1}$, etc. = 0 l'équation du degré m qui a pour racines les différents termes $(a), (a'), (a''), \dots$ (« A —»), dont la somme compose la période $(m : et)$, en supposant $A = g^k$, on aura d'abord $A = (m : a)$, et les autres coefficients B, C, D , etc. de cette équation étant des fonctions invariables des racines $(et), (ah), (ah'), \dots$ seront exprimés d'une manière linéaire par les périodes $(m : i), (m : g), (m : g'), \dots$, ou par les racines $p, p', p'', \dots$ de l'équation (A). Le moyen le plus simple de déterminer les coefficients dont il s'agit est de commencer par chercher la somme des carrés des racines $(z), (s h)$, etc. composant la période $(m : a)$, puis la somme de leurs cubes, la somme de leurs puissances quatrièmes, etc. Désignons par S_a la somme des carrés de ces racines, c'est-à-dire, la somme des termes $(2 a), (2 a'), (2 a''), \dots$, etc, cette somme est égale à la période $(m : 2 a)$; ainsi on aura $S_a = (m : 2 a)$, etc; on aura semblablement $S_3 = (m : 3 a), S_4 = (m : 4 a), \dots$ etc. valeurs qui seront données chacune par une des racines de l'équation (A). Maintenant de ces quantités connues il sera facile de déduire les coefficients $A, B, C, D, \dots$.

The text on this page is estimated to be only 26.96% accurate

CINQUIÈME PARTIE. i85 au moyen des formules - . $\dot{A} = S, =$
 $(m : a) aB=AS, — S, 3C=BS, — AS. + S, 4D=CS, — BS, -t- AS, — S4$ etc.
 On rendra ensuite linéaire l'expression de chaque coefficient à compter de B
 par le théorème de l'art 500 ; ainsi chacun d'eux sera de la forme $a + tp^4 -$
 $jp^4 - Sp^4$ etc. 6,7, etc. étant des nombres entiers, etp, p^4 .. étant les
 racines de l'équation (A) ; on peut même dans cette expression faire
 disparaître au moins une des racines p , au moyen de l'équation $o = \hat{1} + p - t - p'$
 $+ p''$ etc. Cela posé il est visible que l'équation du degré m qui a pour
 racines les termes compris dans la période $(m : a)$ sera de la forme $o = P^4 -$
 $Qp - hRp' + Sp''^4$ etc. , P étant un polynôme en x du degré m , et $Q, R, S,$
 etc. d'autres polynômes de degrés inférieurs dont tous les coefficients sont
 des nombres entiers. Si l'on observe ensuite qu'en mettant ah au lieu de et ,
 la période $\{m : \ll\}$ ou p devient $(m : ah)$ ou p' , qu'en même temps p'
 devient $/?$, et qu'ainsi toutes ces quantités avancent d'un rang, la dernière
 devenant la première par l'effet de cette rotation, on verra que le facteur
 trouvé de l'équation $X=o$ donnera tous les autres du même rang en avançant
 les lettres p d'un rang pour passer d'un facteur au facteur suivant. Ainsi les
 facteurs de X seront successivement $P^4 - Qp + Kp' + Sp''^4$ etc. $P^4 - Qp' -$
 $Rp'' + Sp''^4$ etc. $P^4 - Qp'' - R''' - Sp'' +$ etc. etc. ces facteurs étant au
 nombre de k . II.

186 THEORIE DES NOMBRES. Au moyen de ces calculs on décomposera l'équation $X=0$, du degré $n - i$ ou mk , en k autres équations du degré m ; ce qui pourra se faire d'autant de manières différentes qu'il y a de combinaisons pour former le nombre donné $n - i$ par le produit de deux facteurs m et k . (505) Venons maintenant à la subdivision progressive des périodes ($m : <^*$) qui est nécessaire dans la méthode que nous développons pour parvenir à la solution complète de l'équation $X=0$. Supposant donc $m = ni k'$, il s'agit de former l'équation du degré k' qui a pour racines les périodes ($ni : \langle$), ($ni : ah$), ($ni : \langle A'$)...($m' : ah^* —$ dans lesquelles se décompose la période donnée ($m : a$), en faisant $h=g$, et $^*=gx$. Pour cet effet nous devons considérer les choses sous un point de vue plus général. Désignons par t, s, u, v , etc. les périodes ($ni : a$), ($ni : ah$), ($ni : ah'$), ($ni : ah^*$), etc. respectivement, et soit θ une fonction rationnelle et entière des quantités t, s, u, v , etc. ou de quelquesunes d'entre elles ; cette fonction pourra toujours se réduire à la forme linéaire $Am' + A' (ni : \langle) + A'' (m1 : ag) + A'''(ni : ag') + \text{etc.}$, dont les coefficients sont entiers si ceux de la fonction θ le sont. C'est ce qu'on démontrera comme au n° 501, car la suite ($ni : 1$), ($m' : g$), ($m' : g^*$), etc., prolongée jusqu'à un nombre de termes égal à kk' , ne diffère de la suite ($ni : a$), ($ni : ag$), ($ni : ag'$), etc., semblablement prolongée, que par le choix du premier terme, lequel est indifférent dans une suite rentrante sur elle-même. Maintenant supposons qu'on mette ah à la place de a , et que par cette substitution les quantités t, s, u, v , etc. deviennent u', v' , etc., la fonction θ devenue θ' , sera exprimée par la suite $Am' + A' (ni : ah) + A'' (ni : ahg) + A''' (ni : ahg') + \text{etc.}$ Une seconde substitution de A au lieu de a , par laquelle les quantités $t', / , u, v \dots$ deviennent $f', u'', v'' \dots$, changera la fonc

CINQUIÈME PARTIE. 187 tion 9' en une nouvelle fonction ?" dont la valeur serait $Am' + A'(m' : aA'') + A''(jri : \langle A'^{\wedge} \rangle) + A'''(m' : \langle A'g'' \rangle) +$ etc. Continuant ces substitutions jusqu'à ce que le nombre des fonctions '?)?'>... soit k'y la quantité t passera successivement par toutes les valeurs t, t?, f... t*—1 des périodes de m' termes qui composent la période (m:«); les autres quantités s,u,v, etc. parcourront également le même cercle, en partant chacune d'un point différent, et la somme de toutes les fonctions ç qui en résultent, étant désignée par S (9), on aura $S(?) = Am'k' - h A' [(1 \gg' : a) + (m' : ah) + (m : ah'') \dots - + \blacksquare (m : \langle A^* \text{—}') \rangle] - + - \backslash'' [(m' : \langle g \rangle) + (m' : agh) + (m' : aght) \dots + (/ \gg' : et^{\wedge} A^{*-1})] + A''' [(m' : a^{\wedge}) + (m' : h) + (rri : \langle g^{\wedge} A^* \rangle) \dots - t - (m' : a\text{£}'' A^* \text{—})] +$ etc, expression qui se réduit à la suivante, $S(?) = Am - 4 - A' (m : \langle \rangle) + A'' (/ \gg' : \langle \text{£} \rangle) + A''' (/n : +$ etc. Donc la somme des fonctions f s'exprimera toujours d'une manière linéaire par les quantités (m : a), (m : ctg), etc., c'est-à-dire par les racines supposées connues de l'équation du degré k dont nous avons montré la formation. Il faut remarquer aussi que le nombre des termes qui dans la valeur de 9 pouvait s'étendre jusqu'à kk' 1, se réduira à k+ 1 au plus dans la valeur de S(<p). Car comme il n'y a que k valeurs différentes pour les périodes de m termes, savoir : (m : a), (m : *g), (m : a g*) ... (m : «g4-'), les termes qui viendraient à la suite, savoir : (m : *g'), {m -.ag* -*''), etc., offriront de nouveau la série (m : a), (m : a g), etc., ce qui aura toujours lieu de k en k termes à compter de A' (m : «). Appelons donc B' la somme des coefficients de la période (m : a), B'' la somme des coefficients de la période (m : *g), etc., on aurait, dans une suite de k + 1 termes au plus, la somme cherchée a4Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 23.61% accurate

THEORIE DES NOMBRES $S(?) = ATO + Bf(\text{ff}i:a) + \text{ii}'(m : \%g) + B^* \text{fm} : \blacksquare + \text{etc.}$ (506) Ce résultat qui a lieu pour toute fonction proposée θ rationnelle et entière des quantités $t, s, u, v, \dots$ ou de quelques-unes d'entre elles, est applicable à plus forte raison au cas où θ serait une fonction invariable des k' quantités $t, s, u, v, \text{etc.}$; car alors le changement par lequel ces quantités deviennent $t, s, u, v, \text{etc.}$, consiste à avancer d'un rang chacune des quantités $t, s, u, v, \text{etc.}$, de manière que t se change en s , s en u , u en v , ainsi de suite jusqu'à la dernière, qui reviendrait à la première t et par cette permutation la fonction θ restera toujours la même, de sorte qu'on aura $\theta = \theta' = \theta''$, etc. Donc alors $\theta(\theta) = \theta$. Il faudra donc diviser par k' la valeur trouvée pour $\theta(\theta)$; mais dans ce cas on peut trouver immédiatement le résultat; car puisqu'en mettant « A ou $*g^*$ » à la place de « θ » dans la valeur $\theta = A m' - 4 - A' (t : \langle) + A'' (m : a g) h M'' \{in : a g''\}$ etc., cette valeur doit rester la même, il est clair que tous les termes $(m':a), (m':ag^*) l(ni: \langle ig^* i) \dots (ni: agit'-i)$, compris dans cette formule, doivent avoir le même coefficient A' que le premier terme $\{ni : a\}$; que semblablement A'' est le coefficient commun de tous les termes $(ni: \langle ig), (ni : ag^{**} 1), (ni: agi\hat{A} + 1) \dots \{ni: *g\hat{A}y-' + \}$, qui composent la période $(m : *g)$ ainsi de suite. Donc dans le cas où θ est une fonction invariable des k' racines $t, s, u, v, \text{etc.}$, on aura simplement $\theta = A m' - 4 - A'(m : \bullet) + A'' (m : ag) + A'''(m : *g') + \text{etc.}$, cette suite n'ayant au plus que le nombre de termes $k + 1$. (507) Il suit de là I* que pour former l'équation du degré k qui a pour racines les périodes partielles $\{ni: a\}, (m' : \langle A), \{ni : \langle h'\}$, etc. dont se compose la période totale $(m : \langle)$, il faudra chercher par les formules précédentes la valeur des coefficients qui sont des fonctions invariantes des racines, et que tous ces coefficients s'expriment

The text on this page is estimated to be only 27.94% accurate

CINQUIÈME PARTIE. 189 meront , comme la fonction 9 , d'une manière linéaire par les périodes (m : «), (m : a g), etc. , c'est-à-dire par les racine* déjà connues de l'équation du degré k. 2° Que l'équation du même degré k' qui a pour racines les périodes partielles (ni: *g),(ni : agft), (m: etc. dont se compose la période totale (m : «#•), se déduira immédiatement de l'équation dont on vient d'indiquer la formation , en mettant simplement dans celle-ci *g à la place de «, c'est-à-dire, en avançant d'un rang dans l'expression de chaque coefficient, les quantités (m : a) , (m : < xg), (m : , etc. , de sorte que si ces dernières sont désignées par p , p , p\" etc., ou augmentera d'une unité l'indice de chaque terme, en observant que par cette addition le dernier p {1~\" devient égal au premier p. On formera semblablement les équations relatives aux périodes partielles qui naissent de la décomposition des autres périodes (m : xg^yim : a g1) , etc. 3\" Enfin il suffira de résoudre une de ces équations du degré k' , ou même d'avoir une seule racine de cette équation ; car au moyen de cette racine et de ses puissances on peut déterminer toutes les autres racines, ce qui se démontrerait comme au n\" 5o3; mais nous n'entrerons point dans le détail de la démonstration , et nous nous bornerons à donner ci-après les exemples de calcul qui y suppléeront. (5o8) Après avoir formé les équation» du degré k' qui ont pour racines les périodes de m' termes contenues dans chaque période de m termes , U reste à faire voir comment on tronre pour chacune de ces équations le facteur correspondant de l'équation X=o. Désignons par A**-' + Bx-'~» — C*«'-3-4-etc. = o, l'équation du degré m' qui a pour racines les différents termes («), (ah'),(a/i')y etc. composant la période (m':«); la somme de ces racines est {ni : a), ou pour abrégér qx; la somme de leurs carres est {m : a a) ou q% « , la somme de leurs cubes est (m : 3 «) ou g 3 » , ainsi de suite. Ces sommes étant connues , puisque toutes les périodes

igo THÉORIE DES NOMBRES. q le sont, on en déduira les
 valeurs des coefficients A, B, C, etc. au moyen des équations $A = 7\alpha$
 $B = Ay\alpha - 3C = B7,x - A7,\alpha + 73\alpha$ $4D = C<7^* - By,\alpha + A734 - 7i\alpha$ etc.
 On rendra ensuite linéaire l'expression de ces coefficients par le théorème
 de l'art. 500 ; ainsi chacun d'eux sera de la forme $* + \zeta q + yq' + Sq' + \text{etc.}$
 où la suite q, q', q'' etc. représente les périodes rangées dans l'ordre naturel
 ($\alpha\alpha\alpha' : 1$), $\{m' : g\}$, $(m' - g1)$ y etc. Donc le facteur de l'équation $X=0$
 correspondant à la période (m : a) sera de la forme $P - Qq + Rq' - Sq'' +$
 etc. = 0, P étant un polynôme en x du degré m' et Q, R, S, etc., d'autres
 |M>ly nomes de degrés inférieurs. Ce facteur fera connaître successivement
 tous les autres en augmentant d'une unité les indices des lettres q, comme
 on l'a déjà vu (11° 504). On aura ainsi les k k' facteurs du degré m' dans
 lesquels on peut décomposer l'équation $X=0$. Cette théorie s'éclaircira
 beaucoup lorsque nous l'appliquerons à des exemples; mais avant tout il
 sera bon de faire voir comment on peut, pour tout nombre premier $n=k m +$
 1, former l'équation du degré k qui a pour racines les périodes (m : a), (m :
 *g), (m : «g-'), : <tgk''), en supposant successivement *=a, 3, 4 et 5. Cette
 rer cherche nous conduira à plusieurs théorèmes d'analyse fort
 remarquables. Digitized by Google

CINQUIÈME PARTIE. «9» S II. Formation générale de

l'équation du degré k pour les valeurs $k = a, 3, 4, 5$. Premier cas $n = im + i$, $k = a$. (50g) Dans ce cas la période $(am : i)$ se partage en deux autres $(m : i) = (i) + (s') + \{gft + (g') \dots + (m = + (**)) + (\#') \bullet \bullet \bullet + te''''\}$. Soient p et ces deux périodes, on aura d'abord $p + />' = -i$, ensuite $pp' = (m : i - 4^{-}) + (m : i + g^*) + (m : i - hgi) \dots + (m : i$ Comme toutes les périodes de la forme $(m : a)$ se réduisent aux deux $(m : i)$ et $(m : \text{£})$, auxquelles il faut joindre l'expression $(m : o)$ qui n'est pas proprement une période, mais dont la valeur est m , il s'ensuit que la valeur du produit pp' se réduit à cette forme $pp' = Am A'p - h A''p'$, dans laquelle on aura $A + A' + A'' = ro$, puisque m est le nombre des périodes $(m : \backslash + g)y \{m : i - \sim gl\}, (m : i + gs) \dots (m : i + g'''')$ qui composent la valeur de pp' . De plus, comme dans cette équation les quantités p et p' peuvent être échangées entre elles, on aura $A' = A''$; par conséquent $/>'/?' = A/ \gg - A'$, et $A + aA' = m$. Il faut maintenant distinguer deux cas selon que m est pair ou impair. Soit i'' m impair; comme on a toujours $g'' = -i$, c'est-à-dire, $gm + i = 3H.(n)$, il y aura nécessairement, dans la suite $i + g, i - 4 - g^3, i + gs \dots i$ un terme $= o$, et il n'y en aura qu'un, par la nature du nombre $^$. On aura donc dans ce cas $A = i$ et $A'' = 7(m - 1)$, ce qui donne $pp' = \pm(m + 1)$. Soit a^* m pair; on aura encore $g'' = -1$, et par conséquent il Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 25.65% accurate

10a THÉORIE DES NOMBRES. n'y aura aucun terme égal à zéro dans la suite $i + g, i + \dots$. Donc on aura $A=0, A'=m$, et $pp' = -Ltm$. Il s'ensuit que l'équation qui a pour racines p et p' sera $p^* + p + -(m + i) = 0$, si m est impair ou n de la forme $4^* + 3$, et qu'elle sera $p^* + p - \backslash m = 0$, si m est pair ou n de la forme $4^* + \dots$ Donc on aura $p = -i \pm \sqrt{m^2 - 4}$ si est de la forme $4^* + 3$ et $\sqrt{m^2 - 4} = 7 \frac{1}{2}$ (//■), si n est de la forme $4^* \bullet + i$. Dans ce dernier cas la différence des deux valeurs de p est égale ($5 \frac{1}{2}$) Soit $zT - a \frac{3}{T} + \frac{f}{T} - \frac{c}{T} + \dots = 0$ l'équation qui a pour racines toutes celles qui composent la période ($m : i$), on aura le coefficient $a = (m : i) = \dots$; quant aux autres coefficients $b, c, d, \dots$, leurs valeurs se trouveront par la méthode du na 504, et ils seront tous de la forme $B + B' + B'' p$. De là on voit qu'en * faisant $Z = x^n - a x^{n-1} - b x^{n-2} - c x^{n-3} - \dots$, le polynôme Z se réduira à la forme $Z = P + Qp + R//$, où P est un polynôme en x du degré m , et Q, R des polynômes d'un degré inférieur. Si on considère pareillement le facteur $Z' = xT - d x - \dots - b'aT - \dots - \epsilon x - 1 - \dots$, lequel étant égalé à zéro donne toutes les racines comprises dans la période ($m : g$), on aura par le n°504, $Z' = P - Qp' + Rp - H$ faut maintenant substituer les valeurs de p et de p' dans les deux cas déjà examinés. i' Si h est de la forme $4^* + 3$, on aura $p = \dots + x; \sqrt{\dots} - n, p' = \dots \sim \dots - 7V/ - n$, ce qui donne $z = P - T(Q - R) + \sqrt{(Q - R)} // - \dots \ll Z' = x = P - T(Q + R) - HQ - R) ! / - \dots \ll$

CINQUIÈME PARTIE. 193 Mais $ZZ'=X$; donc, dans ce cas, on a $4X=(aP-Q-R)^4-(Q-R)^4$ Si n est de la forme $4^* + i$, les valeurs de p seront données par les mêmes formules, en y changeant simplement le signe de n ; on aura donc alors $4X = (aP-Q-R)^4 - (Q-R)^4$; d'où résulte ce théorème remarquable : « n étant un nombre premier quelconque et la fonction X étant « le quotient de $x^n - i$ divisé par $x - i$, on pourra toujours trouver « deux polynômes Y et Z qui satisferont à l'équation $4X=Y^2 \pm nZ^2$, « le signe supérieur ayant lieu si n est de la forme $4^* H - 3$, et l'inférieur si n est de la forme $4^* + i^*$ » Dans le premier cas le polynôme $4X$ se décompose en deux facteurs imaginaires $(Y + \sqrt{-n}Z)(Y - \sqrt{-n}Z)$; dans le second il se décompose en deux facteurs réels $(Y + \sqrt{n}Z)(Y - \sqrt{n}Z)$. Ce théorème serait peut-être très-difficile à démontrer sans le secours de l'analyse indéterminée ; d'où l'on voit que cette analyse n'est pas bornée aux spéculations sur les nombres , mais qu'elle peut encore être utile au perfectionnement de l'analyse algébrique. (Si i) Sachant a priori que la fonction $4X$ peut être mise sous la forme $Y^2 \pm nZ^2$, il est facile de trouver les valeurs des polynômes Y et Z dans les différents cas. Pour cela on voit d'abord qu'en négligeant les multiples de n on aura $Y^2 = 4X$; ainsi pour avoir la valeur de Y il faut extraire la racine carrée de $4X$, ce qui donne les deux premiers termes $a \pm \sqrt{-h}$; on continuera l'opération en ajoutant aux premiers termes des résidus les multiples convenables de n , pour que tous les termes de la racine aient leurs coefficients entiers et les plus petits possibles. Connaissant Y on aura Z par l'équation $4X - Y^2 = \pm nZ^2$, dont le calcul se fera sans rien négliger. Voici d'ailleurs un moyen de simplifier beaucoup l'opération qui vient d'être indiquée. En rejetant les multiples de n , on a $Y=a/X$ et $X=x^2$ II. *5*

The text on this page is estimated to be only 19.04% accurate

ttf TtftëÔftlË DËS KOMfîRËS. * =*"*(i — i)~ 1 (i — ^ir.) • Mais
côrtirtte dans la râleur de Y on n'a besoin que des puissances positives de x
moindres que x", il est elair qn'Ort peut supprimé!* le facteur i — JT,m"
qui n'aurait d'influent* qu'après les puissances x^, et qu'ainsi on aura ou Y =
aai-+ar'+]4r-' + j^-tf- J+ etc. il restera à donner aux coefficients ^ j j^, j-j^-g
» etc. une valeur en nombres entiers les plus petits possibles, positifs ou
négatifs, ce qui sera faeile dans Chaque cas |>articulier en ajoutant aux
numérateurs de ces fractions les multiples de n, positifs ou négatifs, qui
rendront la division possible par les dénominateurs. Au reste chaque
coefficient réduit servira à former le suivant; ainsi ayant trouvé pour la
valeur ±k, le coefficient suivant sera ±^ qu'il faudra réduire à un entier en
ajoutant, s'il est nécessaire, un multiple de n au numérateur. L'opération
d'ailleurs sera terminée lorsqu'on parviendra au terme moyen ou aux deux
termes moyens du polynôme V , parce qu'en général les coefficients
également éloignés des extrêmes sont égaux ; ils ont de plus les mêmes
signes si n est de la forme 4 i + i , et des signes différents si n est de la
forme 4 / + 3. ('Ji 2) Il y a encore un moyen plus simple de trouver
immédiatement la fonction Y; en effet, dans le développement de la
puissance (x — 1)^TM tous les termes, excepté Je premier et le dernier, ont
leurs coefficients divisibles par n ; ou peut donc laire — i)"=a" — 1 —
#iT,oti:r" — 1 =(x — i)*+nT;done 4X(x — 1) ou (x — i)(Y* ±rtZ,) = 4(«f
— i)" + ^n'T. Omettant dans cette équation les multiples de/k, on aura (x —
i)Y'=4(# — 1)", d'où l'on tire Y' = 4(x — i)"" et Y =2 (x— 1)"; ainsi on aura
généralement Y^uxT— 2mr, + m.— 2m.OT~r~a.ar-i-t-etc.; et dans ce
développement il ne restera plus qu'à réduire les coeffiDigitized by Google

The text on this page is estimated to be only 17.07% accurate

CINQUIÈME PARTIE. id5 cieuts au-dessous de-J-w, en supprimant les multiples de n qu'ils peuvent contenir; ce qui réduira par exemple, le coefficient du second terme — a m à 4- 1, celui du troisième à ' ^, etc. 4 • j,, ^ ; Une observation que fournit la valeur développée de Y,, c'est qu'aucun de ses coefficients ne se réduit à zéro; car n ne peut se trouver parmi les facteurs m.m-r- 1 >m. — a. . . ; donc le polynôme Y du degré m aura toujours m 4- 1 termes. Il n'en «sj pas de même du polynôme Z qui est du degré m^- 1 et 4pH,t plusieurs ternies peuvent manquer. Voici une table où l'on trouve les valeurs des polynômes Y et Z pour tous les nombres premiers de 3 à 29. ' n Valeurs des polynQmes Y et Z. 3 \ = '2x+ 1, Z= J Y' = .;c4-a, Z==yC 5 - . • ■ r ■ -t ■ Y = 2ar* 4-a?4-a, Z==a; 7 Y = a ar* 4- .r' — a — a, Z=.t* 4- a: i* , Y = aa:5 4- a^ a a:' + oa>' Trrjc ttt 2 , £3=. ** + * i3 Y=ax{ + as -f- 4a;4 — a^ 4- f\xl + .c+a, Z = a:5 4- aP 4- * '/' Y = aar*H-aJ7 + 6ar*+ ^a»*- *- 4^^- 7.r' + 5x' + x + a 7,—jC 4- .r6 4- .rs -f- ax4 4- a:1 -f- .v* 4- x Y = zx9-h x* — 4a? 4- 3*'- *- Saî5— 5ar4r-3ari4-4** — ar— a — ^6 + a^ f-^4 — a?3 4- x a3 Y= 3x"4-ar"— S*»— 8a?— 7a?'— 4a? 4- 4a?* 4- jx* 4- 8a? 4-'5ar'— a?— 2 '£=x° 4- .r9 — x7 .— r a.tf'W a.or* ,rr a? + 4- a? 'M) j aar-^a^^Sar"— 3 a?" aa* 4- 3 a? 4- 9a-7 — 1 4- a.4- a: 4- £a? -^3*? 4- #* -5-3^4- 3#« Z=ar,> 4- x" — x" 4- a? 4- a:7 4- a? — x* 4- ^4^ a5. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 28.14% accurate

196 THÉORIE DES NOMBRES. 1 (Second cas. $n=3$ ro $-+-i$, $A=3$. (5i3) Alors la période $(3m:i)$ contenant toutes les racines de lequation $X=0$, se décompose en trois autres $(m:i)$, $(m:g \setminus (m:g^*))$, dont les valeurs développées sont $(m:i)=(i) + (^) + (^).... + (^-3) \{m:g)=(g) + (g^*) + (\$*).... + te1—) 0 \gg : 5'' = te') + (**) + te') \bullet \bullet \bullet + te''-$. Soient p , $p' > p''$, ces trois quantités ; comme on sait que leur somme $p+p'+p'' = -i$, on pourra supposer que ces trois quantités sont les racines de l'équation $Pi+pt+Vp - Q=0$, dans laquelle on aura $P=pp + p'p'' \blacksquare + \blacksquare p'' p$, $Q=pp'p''$. Pour trouver les valeurs de ces coefficients, il faut d'abord connaître celle du produit pp' or par le théorème général ce produit est égal à la somme des m périodes $(m: \langle \rangle)$ dans lesquelles a prend les valeurs successives $i-i-g \} g^* + g > 'g6 \sim * \sim \{) >$ mais aucune de ces valeurs ne peut se réduire à un multiple de n , puisque par la propriété de la racine primitive on a $g3^{\wedge} = -i$, ou $g^{**} \bullet + -i = ;nt (\langle \rangle)$, $|t$ étant jm , et qu'ainsi on ne peut avoir en même temps $g^{*'} = -i$. Donc la valeur du produit pp' ne contiendra pas la période $(m:0)$, et devra se réduire à la forme $pp' = Ap+bp' + Cp''$, dans laquelle A, B, C sont des entiers positifs tels que leur somme $A -4- B + C=m$. De cette valeur on en déduit deux autres, savoir : $p'p'' = kp' + Vp'' + Cp p''p = Ap'' + B/> h- Cp'$; et puisque la somme de ces trois produits $= (A +B -t-C) (p + p'+p'') = -m$, on a $P=-m$.

The text on this page is estimated to be only 28.41% accurate

CINQUIÈME PARTIE. 197 Pour avoir le produit pp'' , on mettra pp' sous cette forme $pp' = C + (A - C)p + (B - C)p'$ puis multipliant de part et d'autre par p'' et substituant les valeurs de pp'' et de $p'p''$, on aura $pp'p'' = Cp'' + (A - C)(Ap'' + Bp + Cpn) + (B - C)(Ap + Bp'' + Cp)$. Le premier membre étant une fonction invariable de p, p'' , le second en doit être une aussi ; partant il doit se réduire à la forme $M(p + p' + p'')$ et ultérieurement à M . De là résulte la condition $A' + B' + C' = AB - AC - BC = C$, laquelle étant combinée avec l'équation $A + B + C = m$, donne pour résultat $4n = (9C - n - 1) \cdot -4 - 27(A - B)$. (514) Cette équation détermine complètement le coefficient C , ainsi que $A - B$; car n étant un nombre premier de la forme $3k + 1$, on pourra toujours faire $n = 3k + 1$. Or si 6 est divisible par 3 et qu'on fasse $6 = 3y$, on aura $4n = (a + 27(a - 6))$, ou $4n = a^2 - 37h$. 2° Si 6 n'est pas divisible par 3 ; comme a ne peut jamais l'être, l'un des deux nombres $a - h$, $a - 6$, sera divisible par 3 ; mais en mettant $4n$ sous la forme $(\pm 36)^3 (0^6)^*$, on pourra supposer. $a \pm 36 = a$, $a \pm 36 = 36$, ce qui donnera encore $4n = a^2 + 276^*$, et on voit de plus que $4n$ ne sera jamais qu'une fois de cette forme. Cela posé on aura $C =$ et $A - R = \pm b$, ce qui donnera $pp'p'' = 0 - AB = C' - (m - C) - h$; donc $Q = (SC - m)(C + m) + l$ nC-m' valeur qui, quoique sous la forme fractionnaire, sera toujours un entier. L'équation cherchée sera donc en général $p^2 + p' - mp + y(m^2 - C) = 0$. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 19.05% accurate

198 THÉORIE DES NOMBRES. (5i5) Soit par exemple «= 991, 011 aurQ.m=3'^ott/^n=zC^t, + 2J.3', « = fn, C=221±±=n7, j(nC—i»')=a349. On trouvera sembtablement pour le» nombres premiers au-dessous de 100, les résultats suivants : 4 /i = 7, i3,ig,3i, 37, 43,6i, 67,73,97 /n = a, 4, f»»*o, la, i4>2o, aa,a4,3a Q=i, — 1, 7, 8,—u, — 8, 9,-5,37,79. On formera donc ainsi autant d'équation* qu'on voudra de la forme $p^* + p^* - mp - Q - Oy$ dont la propriété est telle qu'une racine étant connue et désignée par p, les deux autres p' et p" seront données par les formules : $\frac{C+(A-C)p}{,}, - C + (B - C)/> P = , + \bullet P = p + C - A$ ' d'où l'on voit que l'expression d'une racine en fraction continue servira à trouver immédiatement l'expression des deux autres racines , et qu'ainsi il y a une infinité d'équations du 3e degré qui jouissent de cette propriété dont nous avons déjà donné un exemple pour le cas de «=7 (art. i o5). (5 Les trois racines p,pt ,/?" ', étant trompées, le polynôme X pourra se décomposer en troisfaeteurs $P-»»Q/M-ft/»\ P-4-Q/?'-*- R/*", P -f- Qp" -4- Rp ,$ -dans lesquels P , Q , R désignent des polynômes m ,v, le premier du degré m, les autres de degrés inférieurs, dout tous les coefficients sont entiers. Os polynômes se trouveront par la méthode du n*5©4» doivent en général satisfaire à l'équation $3P - Q - R = |/(»7 X) = 3^ + + + ^"3 + "*"r- »$ où l'on fera disparaître les fractions comme au na 64 1 . Par exemple dans le cas de n = 19, on aura $V = x^6 + ax^1 - ax' + aa;' 1 Q = - or1 - 2X1 - x$

400 THÉORIE DES NOMBRES. m , ne se trouvera pas au nombre des m périodes qui composent la valeur de pp' . Nous ferons en conséquence $p' = Ap + Bp' + Cp'' + Dp'''$, A, B, C, D , étant des entiers positifs dont la somme $A + B + C + D = m$. Cette équation et les trois autres semblables qu'on en déduit donnent les produits de deux termes consécutifs dans la suite p, p', p'', p''' , savoir : $pp' = Ap + Bp' + Cp'' + Dp'''$, $p'p'' = A'p' + B'p'' + C'p''' + D'p''''$, $p''p''' = A''p'' + B''p''' + C''p'''' + D''p'''''$, $p'''p'''' = A'''p''' + B'''p'''' + C'''p''''' + D'''p''''''$. Il en résulte la somme des produits de deux termes contigus, ou $S(p'p'') = (A + B + C + D)(p + p' + p'' + p''') = m$. Pour avoir semblablement la somme des produits de deux termes non contigus, j'observe qu'on a par le théorème de l'art. 500, $pp'' = (m : i)(m : i + 6) + (m : i + 3)(m : i + 9)$, et comme dans la suite $i, i + 6$, etc., on ne saurait rencontrer le terme $i - t - g \cdot m$ ou $i - 4$ qui se réduit à zéro, il s'ensuit que la période $(m : 0)$ ne se trouve pas non plus parmi les m périodes qui composent la valeur de pp'' . On peut donc supposer $pp'' = Fp + Gp' + Hp'' + Ip'''$, F, G, H, I étant des entiers positifs dont la somme $F + G + H + I = m$. De là résulte en avançant les lettres p d'un rang, $p'p''' = Fp' + Gp'' + Hp''' + Ip''''$. Avançant encore dans celle-ci les lettres d'un rang, on aura $p''p'''' = Fp'' + Gp''' + Hp'''' + Ip'''''$. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 25.77% accurate

CINQUIÈME PARTIE. $\ast > i$ Comparant cette expression à celle qu'on a d'abord supposée, on en tire $H = F, l = G$. Donc les deux produits pp'' , $p'p''$, seront ainsi exprimés : $pp'' = F(P + P'') + G(p' + r'')$ et on aura en même temps $F - G = t m$ — [L. Désignons à l'ordinaire par $S(pp'')$, la somme des quatre valeurs que prend pp'' , en faisant parcourir à chacun des facteurs de ce produit le cercle entier des valeurs de p ; cette somme sera égale à $— m$, comme $S(pp')$; mais comme les mêmes termes pp'' , pp''' , s'y trouvent répétés deux fois, on aura $pp' + p'p''' = \pm S\{pp''\} = — ; \ast = — ! \ast \bullet$ (5 19) Maintenant si nous représentons par $f + f + Pp^* - Q/> + R = 0$, l'équation dont les racines sont $p, p \setminus p''$, $p'' \setminus$ il est visible qu'on aura $P = S(/>/>) + iS(/>/0 — — 7^{TM} = — 3jt$. Pour trouver semblablement la valeur du coefficient Q , j'observe que ce coefficient égal à $pp'p' - Vp' p' p'' \bullet \forall p'' p'' p + p'' pp$ est représenté par le seul terme $S\{pp'p''\}$. Or si on met la valeur de $p p'$ sous cette forme $pp' = — C + (A — C)p + (B - cy + (D — C)/T$, et qu'on multiplie chaque membre par p'' , on aura $pp'p'' = — Cp + (A — C)pp + (B - C)/V + (D — C)p''p'''$. Cette équation en fournit trois autres semblables et la somme des quatre donnera $S\{pp'p''\}$ ou $Q = -.CS(/>) + (A - C)S(^{>}) + (B - C)S^{>}) + CI>\sim C)S (/ /)$, or on a $S\{P''\} = S(f \gg) = — 1$, $S(/, /, \gg) = S(^{>}) =$, $S\{p \gg p''\} = -m$ II. a6 Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 23.50% accurate

aoa THÉORIE DES NOMBRES, donc $' \cdot Q = C - (A + B + D - 3Q)/\gg = C - m(m - \backslash C) = nC - m'$. On peut aussi mettre la valeur de pp sous la forme $pp' = -Oh - (A - D)P + (B - D)/>' + - (C - D)/>"$, et multipliant de part et d'autre par $p'' \backslash$ pu en déduira $J \backslash pp'p''$, ou $Q = \ll D - m'$; donc $D = C$. Une troisième valeur du coefficient Q peut se déduire du produit $p p$ qu'on mettra sous la forme $Pp'' = -G + (F - G)(f> +$; puis multipliant de part et d'autre par $/>'$ et formant les trois autres produits semblables, on déduira de leur somme $Q = nG - m \backslash$ donc $G = C$. Par ces résultats les valeurs des produits pp', pp'' , deviennent $\bullet pp' = Ap - + - ftp' \blacksquare + - Cp'' + Cp'''$. De là seconde on déduit la valeur de $p' p'''$, laquelle étant multipliée par celle de pp'' , donne $pp'p'p''$ ou $R = C' + C(|^* - aC) + (jt - aCySC/y/)$; et puisque $S(pp') - - m$, on aura $R = C, -i - (\{i - aC)C - a, *(|i - aC)'$, ou $R = |n' - n(C - 7|a)'$; l'équation qui a pour racines les quatre valeurs de p est donc $p^* + p1 - 3^{\wedge'} - i - (V - nC)p + - \ll (C - 7n)^* = 0$. Ainsi il ne reste plus qu'à déterminer le coefficient C . (5ao) Pour cela multiplions par p' la valeur de pp'' , nous aurons en substituant les valeurs linéaires de pp' et pp'' :

Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 22.11% accurate

CINQUIEME PARTIE. so°» $pp'p = -C/>' + a^{\wedge} - aC)7>' \sim aC(K$
 $- aC) + - a C) (A - C)p -t- ^ ^-a C) (B - C) p$. Multipliant de part et
d'autre par p''' et réduisant le second membre en termes linéaires, on aura
 $'pp'p'p' = [a.fe-a C)'-C][C>+/0+(\wedge- C) 0'+/'] -+- (ft - aC) (A - C) (A//''$
 $+Vp + Cp + Cp) + ((A_-aC)(B- C)(Ap''+ BP''' + Cp + C?) -aC(,t - aC>''))$.
Le premier membre étant une fonction invariable de $p, p'tp'', p''\backslash$ le second
devra se réduire à la forme $M(p + p' + p' + p'')$ ou $-M$; de là trois équations
qui conduisent à la seule condition $(A - C)' + (B - C)^* = aC$. Et puisqu'on a
d'ailleurs $A + B + aC = aji$, ces deux équations en donnent une troisième,
 $\ll = t8C - 4n - i6(B + C -$ Cette dernière suffit pour déterminer C et même
 B ; car le nombre premier n étant de la forme $8p + i$, on aura toujours d'une
seule manière $n = a' + 16b'$; ainsi on devra avoir $8C - 4(* - i = \pm \ll$, et $B + C$
 $- (i = dbi$, ce qui donne $C = 4JM\_L \pm ^{\wedge} >$ valeur qui en prenant a avec le
signe convenable sera toujours un entier. Ainsi étant donné un nombre
premier n de la forme $8p - f - i$, on pourra toujours former a priori l'équation
du quatrième degré qui a pour racines les quatre périodes $p, p' Tp'', />'$; ce
qui permettra de décomposer en général le polynôme X du degré m , en quatre
facteurs du degré m correspondants à ces quatre périodes. (5u c) On peut
remarquer, au reste, que l'équation du quatrième a6.

The text on this page is estimated to be only 21.71% accurate

ao4 THÉORIE DES NOMBRES. degré en p est facile à décomposer en deux équations du second degré, l'une $p' - *p + C = 0$, qui donne les racines p et p'' , l'autre $p' - yp + \$ = 0$ qui donne les racines p' et p''' . En effet, pour déterminer les coefficients $\alpha, g, y, \&$, on a les équations $x = p + p'', C = pp'' = -C + (\dots - 2C) * y = p' + p'' \setminus l = -.pp'' \sim -C - h - aC)y$. $i^{\wedge}$ es deux équations du second degré seront par conséquent $-C - \dots ji + aC) = 0 - C - f(p - [x h - aC) = 0$. Il reste à déterminer a et y ; or on a $a + y = p + p' + p'' + p''' - i$, et $a y = /?/>' 4 - ///?' + p''p''' + p'''p = -a |t$. Donc α et y sont les deux racines de l'équation $y - hy - 2y = 0$, d'où l'on tire $* = - \{ + [\sqrt{n}, - 7 - \setminus S n$. On peut vérifier en effet d'après ces valeurs que le produit des deux équations précédentes, savoir : $\{p^0 \sim C\}^0 + (/ \setminus' - C) (/ > - (* H - a C) - a? (p - r - h aC)' = 0$, se réduit à l'équation déjà trouvée $p(+ pi - i \setminus p' + (4 (i^* - iC) / > + 7! ** - "(C - 7K), = 0$ (5aa) Connaissant une racine de cette équation, désignée par p , on trouvera les trois autres p', p'', p''' , exprimées chacune par une fonction de la forme $a + \setminus p + y / >' + ip \setminus$ Mais dans le cas présent on aura une expression encore plus simple de ces racines au moyen des formules suivantes qui résultent des formules démontrées, $- C + (A - Qp \dots - C - | - (H - C)p P - , + ' P - / , + C - A ' P p + aC - p$ Quant aux valeurs de A et B qui entrent dans ces formules, elles Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 28.13% accurate

CINQUIÈME PARTIE. On se déduit des équations $A^2 = B^2 + C^2$ — $Cq = A^2, B^2 = jtC^2 \pm$; valeurs où le signe ambigu n'a d'autre effet que de changer à la fois A en B et p en p'' . On peut donc former pour tout nombre $n = 8p, i$, une équation du quatrième degré, telle que le développement d'une racine en fraction continue donnera immédiatement le développement des trois autres racines. Voici un tableau de ces équations pour tous les nombres premiers moindres que 100, de la forme $74 \ll 738997$ Équation
 $bjc p o = p^* + pl - 6p^* - p - i o = p < - pl - i 5 / > + 18 / \gg - 4 o - p^* + pi -$
 $* 7 p' - 4 l p + 16 o = P > + p > - 33 / \gg' - f - 39 / > 8 0 = 7 \gg' + / > - 36 / \gg^* + 91 / 7 - 61$
 $A, B 1 a 5 5 5 a, 0 6, 2 8, 4 8, 6$ Quatrième cas. $n = 5m + 1 f k = 5$. (5a3) la
période $(5m : 1)$ représentant la somme des racines de l'équation $X = 0$, se
décompose en cinq périodes de m termes, savoir : $f m : 1$), $(m : g)$, $(m :$
 $(m : g^*), \{m : g^*)$, que nous désignerons par p, p', p'', p''', p'' , respectivement, et
dont les valeurs développées sont : $p = (0 + (*) + (*'') \dots + (* \cdot * - *) A > ' = te)$
 $+ te 6) + (ér'') \dots + (érs - 4) (m te 7) + (\# \cdot ')\dots ^{(éT5'' - 1) ^{= (^ + ^') + ^{,,) \dots + (ér^)$
 $= (S4) + (g9) + (s''4) \cdot \blacksquare \cdot \cdot + te'' - ')$. Pour avoir l'équation qui a pour racines
ces cinq valeurs de p , nous considérerons d'abord les valeurs générales des
produits $p p, p p \backslash$ Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 18.30% accurate

*oo THÉORIE DES NOMBRES. d'où se déduisent les valeurs des produits deux à deux des racines, partagés en deux séries, comme il suit :

$$P p z = \sqrt{p + bp' + Cp'' + Dp'' - i - Ep''}, p p' = \sqrt{p hB'^2 + C^2 + D^2} - f E/v P' P'$$

$$= AP' + Bp'' + Cp'' + Dp'' + EP, p p'' = \sqrt{P' + \langle \rangle - + - C'p D^2 + E^2} / \langle \rangle = A' + B/7'' + C/, \dots$$

Dans ces formules les coefficients A, A', B, B', etc. désignent des entiers positifs ou nuls, tels qu'on a $m = A + B + C + 0 + E = A + B + C + D + E$, et puisqu'on a toujours $S(p) = -i$, l'équation en p sera de la forme $P^2 = Q^2 + R^2 - il$. (5a4) La question est maintenant de déterminer les coefficients P, Q, R, li, d'après la seule connaissance du nombre premier // de forme $5/w - + i$, afin d'obtenir des résultats analogues à ceux des cas précédents. On aura d'abord $S(pp') = (A + B + C - + - D - + - E)(p + p' - + + p'' + p'') = -m$, et semblablement $S(pp'') = -m$, ce qui donne $P^2 = S^2(pp) + - S(pp') = -2m$, et $S(p') \sim (SpY - aP - i + -4'' = -m$. Multipliant par $\langle \rangle$ la valeur $i \backslash cpp$, on aura $pp'p = \sqrt{pp + H/f + C\{py + D/TP' + Ep''p}$. Avancé successivement les lettres p d'un rang, on formera quatre autres équations semblables, et la somme de toutes donnera $S\{pp'p''\}z = (A + j + n + E)(-m) + C(\langle \rangle - m) = *C - m^*$. Si on multiplie semblablement la valeur de pp' par $\langle \rangle^*$, on en déduira $S(pp p'') = nE - m'$; mais $S(\langle \rangle / \langle \rangle / \langle \rangle)$ est la somme des cinq mêmes termes qui composent $S(pp'p')$, donc on a en général $E = C$. Une autre valeur de la même somme se trouvera en multipliant pp'' par $p \backslash$ ce qui donnera $S(pp'p'') = nB' - m'$, donc $B = C = E$. On peut trouver semblablement trois expressions de la somme

The text on this page is estimated to be only 25.60% accurate

CINQUIÈME PARTIE. Soit $S(pp'p''')$; la première en multipliant pp par p''' donne $S(pp'p''') = nD - m'$; la seconde en multipliant pp''' par $/>$, donne $S(/>/>/>''') = nE' - m'$; le troisième en multipliant par la valeur $dcp'p'''$ donne $S(pp'p''') = nD' - W$; donc $D = E' = D$. Par de semblables procédés on trouvera $S(p'p') = nA - m$, $S(= /i A' - m * S(pp'') = nB - m$, $S(p p'') = nC - m$. On a posé les valeurs générales de pp' et pp'' deviennent $pp' = Ap' - Bp' + Cp + D + Cp''$, $pp'' = A' + Cp' + C'p'' + Dp'' + Dp''$; de sorte qu'il ne reste plus que six coefficients indéterminés A, B, C, D, A', C' , entre lesquels on a les deux équations $AB + aC + D = m$, $A + C + C + aD = m$. Ensuite puisqu'on a trouvé $S(pp'p'') = nC - T$ et $S(pp'p''') = nD - m'$; la somme de ces deux quantités étant la somme de tous les produits des racines p prises trois à trois, on aura $Q = i(C + D) - aW$. (5a5) Pour trouver d'autres relations entre les coefficients qui restent à déterminer, je mets d'abord la valeur de pp sous cette forme $pp = C + (A - C)p + (B - C)p' + \{D - C\}p''$. Multipliant ensuite par $/>$ et réduisant les produits $pp'' \cdot p p''$, $p''' p''$ en valeurs linéaires, j'ai $p p'p'' = r - Cp'' + (A - C)(A' + Cpt + Cp'' + Dp'' + Dp'') + (B - G)(Ap' + Kp'' + Cp''' + Dp'' + Cp) + (D - C)(Ap'' + Bp''' + Cp'' + Dp + Cp')$.

The text on this page is estimated to be only 26.44% accurate

ao8 THÉORIE DES NOMBRES. De même si on multiplie par p la valeur de $p'p''$, on aura $pp'p'' = -Cp + (A - C)(p + Kp' + Cp'' + Dp' + Cp'') + (B - C)(A + Cp' + C'p'' + T)p'' + Dp'' + (D - C)(A + Bp + Cp' + Dp'' + Cp'')$. Comparant ces deux valeurs on trouve que les coefficients de p , p'' et p' sont identiques et (que les deux autres conduisent à la même équation de condition, savoir : $(A - B)A = C - C(A + aB - D + i) + A' + BD - D$). Enfin si l'on cherche deux valeurs linéaires du produit $pp'p''$ l'une en multipliant pp' par $?'$, l'autre en multipliant pp'' par $/*$, la comparaison des deux expressions conduira à une nouvelle équation de condition, savoir : $AC = -AB + (A + B - D)' + C - CD + D - C - D$. D'autres tentatives faites sur la comparaison des valeurs d'un produit de quatre lettres n'ont produit aucun résultat, ainsi nous n'avons, pour déterminer les six inconnues A, B, C, D, A', C' , que les deux équations précédentes jointes aux deux déjà trouvées, ce qui laisse le problème fort indéterminé. Cependant nous verrons qu'en mettant sous la forme convenable les deux dernières équations, on en pourra déduire soit une solution déterminée du problème, soit deux solutions dont la différence ne se rapporte qu'à la multitude des valeurs qui peuvent être prises pour la racine primitive g , et qui n'influe pas sur les coefficients de l'équation en p . (5a6) Il nous reste à déterminer les coefficients R et 12 de cette équation. Pour cela reprenons la valeur trouvée ci-dessus pour ppp'' , que nous mettrons sous la forme $pp'p' = M + Wp + M'V + \dots p''$, où l'on suppose Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 20.23% accurate

CINQUIÈME PARTIE. 209 $M = C^* + CD - D(A + B) = C' + 3CD + D' - \ll *D M = A'(B - C) + (A - C)(A - D) + C - BC - C M'' = (A - D)(B - D) - (C - D)' M''' = C(B - C) + A(C - D) + D(D - B);$ Si on multiplie par p''' la valeur de $pp'p''$, et qu'on applique le signe S aux deux membres, on aura $S \wedge p pp'p''$ ou $R =; - M + (M' + M'' + Mw) (- /w) \bullet$ Mais l'équation $pp'p'' = M + Wp + Wp + Wp''$ donne $S(pp'p'') = 5M - M' - M'' - M''' = /iC - m'$; donc $M' + M'' - h M''' = r)M - nC + m'$, et par conséquent $K - mn (C \bullet + - D) - n (C' + 3 G D 4 - D') - m \backslash$ Pour avoir la valeur du dernier coefficient $n = pp'p''p''p''$, je multiplie par $p''p''$ la valeur de $pp'p''$, et appliquant le signe S aux deux membres, j'ai $S(pp'p''p''p'')$ ou $3ft = MS(/>") + M'S(/>/>">") + WS(?p''p'') + M'''S(/>>>")$. Substituant les valeurs connues $S(/>'''>") = - m$, $S(/>/'>") = S(ppy) = nC - m^0 S(pyy) = S(ppp'') = nD - m >$, $S\{p''p''p''\} = S\{pp'p''\} = nC - m1$, on aura $5n = - m M + M'' (nC - W) + M' > D - m^*)$, d'où l'on déduit $ii = f(n W - m4)$, en faisant $W = -C' + mC(aC + D) - aGJ + (A + B)' (2 C D)) 4 - (AB + aCD)(D - C)$. J Ainsi il suffira de connaître les quatre coefficients A, B, C, D , ou seulement trois d'entre eux, puisqu'on a $A + B + aC + D = m$, et l'équation du cinquième degré en p sera entièrement déterminée. (527) Pour procéder maintenant à la détermination de ces coefficients, j'observe que les équations du n° 5a5 peuvent être mises sous cette forme II. a7

The text on this page is estimated to be only 22.38% accurate

2,0 THÉORIE DES NOMBRES. 1 b/i=5o(A'— C')' -I- 5o(A— B)' + i a5(C - D)*+(a5C + a:>D— a/<— 2)' . (A — B)' — 2 (A — B)(A' — C'İ=4G f 5(C-D)* — (5C— m)'. Soit $C + r > a$, $C — D = b$, $A — B = y$, $A' — C^* = z$, on trouve d'abord par la première équation que les limites de « sont 1 1 faudra donc essayer successivement pour a tous les nombres entiers compris entre ces deux limites. Puis faisant $8a — (5a — a/7i)' = F$, on aura l'équation $\wedge-,4-\hat{i}'=v(F — 5b')$; ainsi pour chaque valeur de a, il faudra prendre b de même espèce que a et $<l/yF$; il faudra de plus que le nombre $\sim (F — 5 b')$ qui est la valeur de $4- z'$, ne contienne pour facteur aucune puissance impaire d'un nombre premier $4^* — i$. Ces premières conditions étant remplies, on aura une ou plusieurs manières de déterminer les valeurs de y et z, et il ne restera plus qu'à satisfaire à l'équation $G = y^* — zyz$, dans laquelle on a $G = 4C + 5b' — (5C — m)'$ et $C = f(\ll + />)$. (528) Exemple I. Soit $\gg = 4i$, $m=8$, les limites de a seront $\ll>a.3, a<4.4$; donc les valeurs à essayer sont $a = 3$, $a = 4$. Soit d'abord $a=4$, on aura $F=3a — 4' = \gg<>$; 6 pair et $<l/\wedge f$; donc $b = 0$ et $j1 -f- z'=8$. On satisfait à cette équation en prenant $j=2, s=d=2$ (car on peut se dispenser de faire $j= — 2$, ce qui m* donnerait pas un résultat différent de celui que donne $y= a$). Par les valeurs $a = /i = C - \backslash- D, /; — o = C — D$, on obtient $C=D = 2$, ($\gg = 4 C + >Z\gg'$ — (5C. — w)' =4 » niais alors l'équation $G — y'' — \%yz$, qui devient $4 = 4 \pm 8$ "est pas satisfaite ; donc la valeur $\ll = 4$ ne peut avoir lieu. Il reste à essayer la valeur $a = 'i$ qui donne $F = 23$, b impair et $< 1/ \wedge$; par conséquent $b — 1$; de là $y^* + z' = g$, ce qui donne les deux solutions $y= 3$, $z=0, jy=0, z = \pm 3$. La seconde ne satisfait pas l'équation $G=\wedge'' — a.)'z$, où l'on a $G = — 3a$; ainsi la première devra avoir lieu. En effet les équations $C + D = 3$, $C — D = i$, donnent $C = 2, 0= 1$, $G = 8 4- 5 — 4 = 9\gg$ et puisque $y= 3, z=0$, on a aussi $y^* — 2/z = 0, = G$. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 29.04% accurate

CINQUIÈME PARTIE. an On a donc pour seule solution les valeurs $C = a, D = i, A + B = m = aC = D = 3, A = B = j = 3$; d'où $A = 3, B = 0$; calculant d'après ces valeurs les coefficients $Q_t R$, il, l'équation en p , pour le cas de $i = 4i$ » sera $p^5 + p^4 - i6/?J + 5/? + 'xi p - 9 = 0$. (029) Exemple II. Soit $n = 64i, m = 128$, les limites de a étant $^{(64a = fc a/64i)}$, on devra faire successivement $a = 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55$, et pour chaque valeur de a prendre la valeur de b de même espèce que a et plus petite que $V\{j F\}$. On verra ensuite si $\{ (F - 5 b') \}$ qui est la valeur de $y^* - z^*$, peut se décomposer en deux carrés, ce qui exige qu'il n'ait pour facteur aucun nombre premier $4^* - 1$ élevé à une puissance impaire. Cette condition étant remplie, il restera à voir si la condition $G = y^* - zyz$ est satisfaite. Voici un tableau qui contient le détail de toutes ces opérations. 1

The text on this page is estimated to be only 10.57% accurate

THÉORIE DES NOMBRKS. F r'-M' G | r»— a7r 48 o,a4,a4
a,a5,i3 4,a6*,aa ia8 64 54 *4 8, 0 °,— n 3a 64 ; l j 4y i,ar>,a4 3,a6,a3 5,
37,2a -,a8,ai a7i i33 rr3 i3 7,± 8 1-1-8 3,± a 145 ai3 : 49=p"a y-+0+ ia Sa
o,a5,a5 a,a6,a4 4,27,33 6,a8,23 8,29,21 364 18a 17 a t4a Va aa 5. i,a6,a5
3,^7, a 4 5,a8,a3 7,29,22 9,3o,ai 407 aoi 181 81 1 io,± 9 0^= 9 1, 0 104 7*
4« 100^:180 0 1 • 5a 0,30,30 a,a7,a:> 4,a8,a4 6,a9,a3 8,3o,aa 400 a 00 190
160 1 tu 4o io,±io . / -4- ., i4,± a a,±i4 I2,± 4 4,±.a 6,± a a, _fc 6 100 48 - 44
1 oorpaoo 1 go_i_ ao 4+ 56 i44 — • 9°* (solution) i6qz 96 1 36zc a4 4+ H
53 1,37,36 a ni .»£ J,an,an 5,a9,a4 7,3o,a3 343 109 '49 109 49 ia,rfc 5
7,3:10 io,± 3 7» 0 64 1 0 - 48 —119 i44rj=iao 49^1 4° K>ozp 60 49 J1
0.37.37 a,a8,a6 4,a9,a5 6',3o,a4 a 36 118 108 78 38 55 1,28,27 3,29,26 79
37 *7 i^b 6 4,± 1 — a7 — ia8 i=n ia •6İ 8 Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 19.17% accurate

CINQUIÈME PARTIE. *r3 On voit par ce tableau qu'il n'y a qu'un seul cas où l'égalité $G=j'' - ajz$ soit satisfaite; c'est celui où l'on a $C=a^8, D=a^4, A -f- B=/w - aC - D=48, A - B= \backslash a, A=3o, B=i8$. Calculant par ces valeurs les coefficients Q, R, ft , on a l'équation cherchée pour le cas de $n = 64 \ 1, \pi -+- pl - a56 p^* - 564 p7 + :Vto8 p - 5 \ 1 ao = o$. Remarquons en général que plusieurs solutions peuvent conduire au même résultat, parce que les coefficients désignés par A, B, C, D dépendent de la racine primitive g qu'on a choisie pour les former; mais tous les changements se borneront à ce qu'il y ait la permutation ait lieu entre C et D , ce qui changera en même temps A et B en A' et C respectivement, de sorte que $A - B$ deviendra $A - C$ et réciproquement. Les valeurs des coefficients Q et R ne changent pas par la permutation entre C et D ; quant au coefficient t , on peut dans son expression changer simultanément C en D et $A + B$ en $A' - C$ ou $m - aD - C$, et AB en $A'C^*$; car les deux expressions étant égales entre elles, on obtient l'équation conditionnelle $AB + A'C = m' - (4m + i)(C + D) + 5C' + 7CD + 5D'$ que nous avons déjà trouvée (nB 5a5). 11 «' ft i . i . • ■' Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 24.60% accurate

ai 4 THÉORIE DES NOMBRES. § III. Application de la théorie à des exemples numériques. Exemple I. « = 7. (53o) T-*e plus petit nombre qui satisfait à l'équation $g-5-!- 1 = 0$ (11(7)), « tant $\text{£}=3$, il faudra former la série des puissances de 3 en rejetant les multiples de 7; cette série est 1, 3, 1, 6, 4, 1, 5; ainsi les puissances de r qui forment les six racines de l'équation $X = 0$ ou $r^6 + j'-t-.r'-t-.v, + x'+x+ 1 = 0$, devront être rangées dans l'ordre $r \setminus rJ$, $r \setminus r \setminus$ Leur somme compose le période de six ternies désignée par (G : 1) ou par (1, 3, a, 6, 4, 5). Cette période se décompose en trois de deux termes (a : 1), (a : 3), (a : a), que nous désignerons plus simplement par p, p', p'' et dont la valeur est $p = rr' + r^6$ $p = r^3 + r^*$ $p' = r^1 - 1 - r^*$. De là on tire immédiatement, en observant que $r' = 1$, $p p' = r^k \blacksquare + \blacksquare r' - 4 - 4 - r^i = p' + p'$ $pp'' = r^0 + r^6 + r + r' = p'' + p'' p = r^3 + r + r^c + r^* = p + p$, ce qui donne d'abord $S(pp') \sim a(p + p' - p'') = -a$. Si ensuite on multiplie la valeur $\hat{a}ep p'$ par p'' on aura $pp'p'' = p'p'' + \{p''Y - p' + p + r^* + a + r^3 = a + p + p' + p'' = i$. Donc l'équation du troisième degré dont les racines sont p, p', p'', est $pl + pl - a/? - 1 = 0$. (A) Cette équation dont les trois racines sont réelles étant résolue par les

Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 22.81% accurate

CINQUIÈME PARTIE. 21 5 règles ordinaires, on connaîtra les quantités $p = r + r^6 = 2 \cos.^{\wedge}$, $= + r' = a \cos.^{\wedge}$, $p'' = r' + rs = 2 \cos.^{\wedge}$. Jusque là * est un nombre à volonté non divisible par 7; si on fait $k = 1$, les racines seront $p = a \cos. —$, $p' = n \cos. — — — a \cos. *$, $/> = 2 \cos. — 3^{\wedge} 7 y y = — 2 \cos. y$, la première étant positive, les deux autres négatives. Ainsi la racine positive de l'équation (A) sera la valeur de $2 \cos.^{\wedge}$; 7 d'où l'on déduira immédiatement la racine $r = \cos. — + \ll — 1 \sin. -$, 7 7 ensuite les cinq autres racines de l'équation $X = 0$ seront déterminées par les puissances successives $r \backslash r \backslash r 5, r 6$. Une racine de l'équation (A) étant connue et désignée par p , on en déduira les deux autres par une formule rationnelle, comme il suit : $p \gg p > — 2 = i_ r r i + p p' = i - p - p' = -i - lp$ C'est ce qui s'accorde avec les valeurs trigonométriques de ces racines. Au reste cette solution, pour le cas de $\ll = 7$, est entièrement semblable à celle qu'on déduirait des méthodes ordinaires. En effet, l'équation $X = 0$ étant du nombre de celles qu'on appelle réciproques, ou dans lesquelles on peut substituer $^{\wedge}$ au lieu de on peut la réduire [au troisième degré par la substitution $x' + i = zx$ qui donne immédiatement $Z^1 + 2* — 1Z - I = 0$; équation qui est la même que l'équation (A), et dont nous avons donné ci-dessus (n° 105) la résolution numérique par les fractions continues. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 22.66% accurate

aifi théorie des nombres. Exemple II. /*= 1 1. (53i) Prenant dans ce cas la racine primitive $g = a$ qui satisfait à l'équation $gh = -i$, on formera par les puissances de a , la série des dix racines de l'équation $X = 0$, ce qui composera la période (10: i) ou (1, a, 4i, 8, 5, t o, y, 7, 3, 6). Cette période se décompose en cinq autres de deux termes, savoir: et ces valeurs donnent immédiatement les équations $jt' = a - p'$. $pp' = p + p''$ $pp' - p'' + pl$ d'où l'on déduit toutes celles qui expriment en valeurs linéaires les produits de deux dimensions, savoir: $p = z + p'$ $pp' = p + p''$ $pp'' = p'' + p'''$ $P''^u + p''$ $pp = p + p - pp'' = f + p / > " \bullet = a + p'''$ $p''p'' = p'' + p$ $pp'' = p + p$ $p''' = * + p''$ $p'''p''' = p'' + p >$ $p'''p = p' + p''$ $p''' = 2 + p$ $p'''p = p'' + p'$ $P''P' = -p'' + p'''$. f>e ces formules on déduit les valeurs fie quatre racines exprimées en fonctions de la cinquième, savoir: $// = // - a p - p' - ! \backslash p'' - t - a$. $p''' = p > - \$ p p'' - pi - Spi + r > p$. Substituant ces valeurs dans l'équation $0 = 1 + p' - i \sim p'' + p'' - + - p \backslash$ on a l'équation du cinquième degré, $p > + p^* - / i pi - 5p' + 3p + 1 = 1$; (A) ait $4^{\wedge} \sim$ dont les racines doivent être a cos. — , a cos. — » — acos- $7^{\wedge}$ » __a(.os.lZ, _aCos.-. Ainsi la plus grande des deux racines |»oDigitized by Google

The text on this page is estimated to be only 29.99% accurate

CINQUIÈME PARTIE. ai 7 sitives de cette équation sera la valeur de $\cos.\sqrt[n]{-1}$; on en déduira la $r = \cos.\sqrt[n]{-1}$ et de là les neuf autres racines de l'équation $X = 0$. Nous avons suivi la méthode générale pour parvenir au résultat précédent, mais on y serait parvenu plus simplement en faisant la substitution $x = \sqrt[n]{-1}$ dans l'équation $X = 0$. Jusque là on ne voit pas quel est l'avantage de la nouvelle méthode dans la résolution de l'équation $x^n - 1 = 0$; cet avantage se fera mieux sentir dans les exemples suivants. Exemple III. «=i3. (53a) D'après la racine primitive $g = a$ qui satisfait à l'équation $g^n = -1$ ou $g^n + 1 = 0$, on formera la suite des exposants de r dans l'ordre 1, $a, 4, 8, 3, 6, 1a, 11, 9, 5, 10, 7$, qui sera celui des puissances égales aux racines de l'équation $X = 0$. Ces racines prises de trois en trois, formeront trois périodes de quatre termes que nous désignerons comme il suit, en nous bornant à indiquer les exposants des puissances de r qu'elles contiennent $p = (4: i) = (i, 8, 1a, 5)$ $p' = (4 : a) = (2, 3, 11, 10)$ $p'' = (4:4) = (4, 6, 9, 7)$; on tire de là par le théorème de l'art. 500, $pp' = p - t - a // + p'' = -1 + p' p'' = A + p' + 2p'' = 3 - p + p''$. Chacune de ces équations en fournit deux autres, mais il suffit de les combiner avec l'équation ordinaire $0 = 1 + p + p' + p''$, pour en déduire $p + p' - 4/ > + 1 = 0$. (A) C'est l'équation qui servira à déterminer les trois racines/»,/*',/'; II. a8 Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 21.36% accurate

a18 THÉORIE DES NOMBRES. connaissant une de ces racines désignée par p , les deux autres se trouveront immédiatement par les formules $j P^{TZ} - 2 - \%P P'' p = r = y = t - p^r + p^{-*} 11$ faut maintenant subdiviser chaque période de quatre termes en deux autres de deux termes (i), savoir : $\_ > < > j 7 = (' : ia) = r' + r'' P - / + < ! | , y' \rangle \_ (8 : 5) = r \rangle + r^* (q = (\langle :$ II) $= r, ^{-r''} 7 (q'' = (3 : io) = rJ + r'' j 7' = (6 : 7) = r \langle + r :$ On trouvera d'ailleurs les produits $qq''' = q'' + q^* = p''$, $7' < /'' = \bullet q'' q'z = p'$; d'où il suit que y et $7'''$ seront les racines de l'équation $7^* - /y q + p'' = 0$ q' et $7'' 7^* - P'f / + P - 0 7''$ et $7' ' , f - p'' q + p' = 0$ Au reste il est aisé de voir qu'en prenant pour p'' la racine négative de l'équation (A), l'équation $q' \sim -pq + p'' - 0$ aura les deux racines $q = a \cos. > 7'' == - a \cos. \sim j$; avec la racine positive q on formera une racine de l'équation $X = 0$, savoir: $x = \cos.^{\wedge} + 1 / - 1 \sin.^{\wedge}$, (1) On remarquera dans la notation des indices de y , le même ordre qui serait suivi, si, dans la période (13 : 1) ou (1, 2, 4, 8. . . 10.7) comprenant toutes les racines, on prenait les termes de six en six; ce qui donnerait la suite des périodes de deux termes, $y = (i : ia)$, $y' - (a : 11)$, etc. Rien par conséquent n'est arbiDigitized by Google

The text on this page is estimated to be only 26.07% accurate

CINQUIÈME PARTIE. a,9 laquelle donnera toutes les autres par ses puissances successives $r, r^2, r^3, \dots, r^n$. S'il ne s'agit que de la division de la circonférence en 13 parties, il suffit de connaître la racine $y = \cos a$, ce qu'on obtient, conformément à la théorie générale, par la résolution de l'équation (A) du troisième degré, et par celle de l'équation du second degré $7x^2 - 13x + 6 = 0$. Exemple IV. $m = 17$. ■ - * k. , (533) D'après la racine primitive $g = Z$ qui satisfait à l'équation $g^{17} - 1 = 0$, les puissances de r qui sont les racines de l'équation $X = 0$, doivent être rangées dans l'ordre des exposants i , 3, 9, 10, 13, 5, 15, 11 ; 16, 14, 8, 7, 4, 12, 6. Ces racines se décomposent en deux périodes $(8 : 1)$, $(8 : 3)$, dont les valeurs sont, en indiquant seulement les puissances de r par leurs exposants, $p = (8 : i) = (i, 9, 13, 15, 16, 8, 4, 2)$ $p' = (8 : 3) = (3, 10, 5, 11, 14, 7, 13, 6)$. Ces valeurs donnent $pp' = \{8 : 4\} 4 - (8 : 1) 1) 4 - (8 : 6) - + - (8 : 12) + (8 : 15) + (8 : 8) 4 - (8 : 13) + (8 : 7) = ip + ^p = z - 4$; donc les deux quantités p et p' sont les racines de l'équation $p^2 - \lambda p - 4 = 0$ Il faut ensuite décomposer la période p ou $(8 : 1)$ en deux autres de quatre termes $(4 : 1)$, $(4 : 9)$ » que nous désignerons par q et q' ; de même la période p' ou $(8 : 3)$ en deux autres $(4 : 3)$ et $(4 : 10)$ que nous désignerons par q et q' comme il suit : $P = (9, 5, 8, 4)$ $q' = (3, 5, 14, 12)$ $f = (10, 11, 7, 6)$. $p' = q' + q$ a8 Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 23.96% accurate

CINQUIÈME PARTIE. 22 « Il n'y en a pas un plus grand nombre, parce que $17 - k$ et en général $17 - k$ donne le même résultat que k . Pour obtenir de» résultats numériques, on peut faire d'abord $t = 2 \cos. <$, » désignant l'arc, ce qui donnera $t = 2 \cos. u$, $\wedge = 2 \cos. 3w$, $\text{f}'' = 2 \cos. 9w$, $\text{f}''' = 2 \cos. 7w$ /'' = $\text{acos. } i3$, $<' = \text{acos. } 5w$, $r = \text{acos. } i5<^*$, $\text{f}' = \text{acos. } iu$. Ces valeurs substituées dans celles de q donneront $q = 2 \cos. (0 + 2 \cos. 13 \ll = 4 \cos. () u \cos. 7w <' = 2 \cos. 3 <u 2 \cos. 5o \gg = 4 \cos. w \cos. 4 \ll = \text{acos. } y \ll -+- 2 \cos. i''') < \gg = 4 \cos. 3 \ll \cos. 12 \gg = U \cos. 7w + 2 \cos. I I w = 4 \cos. 2w \cos. 9w$. ttnfiri on conclut de celles-ci : $p = 4 \cos. 6w \cos. 7w + 4 \cos. 3w \cos. IUu /?' = 4 \cos. w \cos. 4 \ll + 4 \cos. 2 \ll \cos. 9 \gg$. (535) Ces formules ont lieu sans supposer aucune valeur particulière kk ; soit $k = i$, ce qui donne $<^* = \wedge$, alors on reconnaît immédiatement et sans calcul, que q et q' sont positifs, q'' et q''' négatifs; on a en même temps $p = \wedge \cos. \sim \cos. \sim - 4 \cos. - \cos. \wedge \text{ et } /' = 4 \cos. \wedge \cos. \wedge - 4 \cos. \wedge \cos. \wedge$, ce qui prouve que p est positif et / négatif. Ces signes suffisent pour diriger la solution de manière à éviter toute ambiguïté. En effet p et p étant les racines de l'équation $p' + p - 4 = 0$, on en tire $/> = -i + \hat{t}/17$, $/>' = -7 - i/17$, ensuite l'équation qui donne 9 et 9'' étant $q^* - pq - 1 = 0$) on en tire $<1 = \sqrt{P + \text{f}'(\wedge + 4)}$, $?'' = t/> - tK(/>' + 4)$, soit pour abréger $a = \sqrt{S7jel 6 = 1/(2 \ll - 2 \ll)}$, on aura $q = |(\ll - 1 + g)$ Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 23.40% accurate

THÉORIE DES \OMBRES. $q'' = \backslash$ (« — A l'égard de q qui doit être positif on peut l'«* déduire de l'équation $q^* - p q - i = 0$, qui donne $'/ = J.P + \backslash \{ \backslash p'' + \blacksquare \} = * [- \ll - i + 1/(a\ll' + 2\ll)]$ Connaissant 7 et $</$, l'équation ** — $qt - h q' = o y i \{ \backslash n$ a pour racines $/ = \text{racos}$. — , $r = \text{acos}$. — = $\text{asin}^\wedge$; , donnera 17 17 34 $\text{sin}^\wedge = ; y^\wedge (7 - 4^\wedge = TT(\ll - \ll + C - TV / [(\ll + 3)(\ll - Te)])$. Ainsi au moyen de trois extractions de racines carrées, on aura la valeur de $\text{asin}^\wedge$, côté du polygone de 34 cotés, et celle de $2(1 - \cos^\wedge)$, carré du côté du polygone de 17 côtés. On aura en même temps par la formule $jc = \text{co}\$.^{\text{TM}} + \backslash - 1 \text{sin}^\wedge - \blacksquare >$ une ra'7 '7 cinède l'équation $X = o$; laquelle servira à déterminer toutes les autres. (* > 36) S'il s'agissait de résoudre l'équation — $1 = 0011$ de diviser la circonférence en 2J7 parties égales, le problème ne serait guère plus compliqué que celui qu'on vient de résoudre; il y aurait seuielement quatre expiations du second degré de plus à résoudre, de sorte que le polygone de 267 côtés pourrait s'inscrire géométriquement comme celui de 17. 11 en est de même du polygone de a'J-+- 1 ou $C > Y)3y$ côtés, qui est inscriptible géométriquement, ainsi que ceux de 2"etdea'6 — 1 côtés, puisque $a'6 - 1 = (a' - 1)(a^* + 1) = a > j.257 = i5. 17.257$. En effet, si sur une circonférence donnée C on peut construire l'arc égal à $\backslash C$ et l'arc égal à — C , leur différence sera , $-r\ddot{e}C$, et la moitié de cette différence donne l'arc égal à $\sim C$. De même conDigitized by Google

The text on this page is estimated to be only 22.06% accurate

CINQUIÈME PARTIE. ;.a3 naissant cet arc et l'arc égal à $\wedge C$, on connaît l'arc égal à $(-U \wedge Cou, \_2 e C$, dont la moitié est sous-tendue par le $\backslash a5a 357/ a55.a57 ' r$ côté du polygone qui a 05535 côtés. Exemple V. $/i = 4i$.
 '. r - . ■« • (537) En mettant $n - 1$ sous la forme $8x5$, nous formerons d'abord l'équation du cinquième degré qui a pour racines les périodes $p = (8 : .) , // = (8 : g) , // ' = (8 : g') , // '' = (8 : g >) , // \bullet = (8 : \wedge \text{ racines simples comprises dans ces périodes sont déterminées comme il suit, d'après la racine primitive } g = i3 (1) \text{ qui satisfait à l'équation } g''' - i - 1 \wedge 3iL(4i), \text{ ou simplement } g'' - 1, \text{ sans qu'on ait } /> = (1, 38, 9, i4, 4o, 3, 32, 27) // = (i3, 2, 35, 18, 28, 39, 6, 23) /7'' = (5, 26, 4, 29, 36, 15, 37, 12) />''' = (24, 10, 11, 8, 17, 3i, 3o, 33) // ' = (25, 7, 20, 22, 16, 34, 21, 19)$. De là on tire par le théorème de l'art. 500 les valeurs linéaires de $pp', pp''yp \backslash$ et celles qui en dérivent, comme il suit : $p p = 3p + *p'' + p''' + '2pr p p'' - \%p + 2/7' + 2/7'' + p''' + p'' p' p'' = 3p' + 2p'' + p'' + 2P p p'' = 2p + 2p'' + 2p'' + p'' + p p'' p''' = z3p'' + ap'' + p + zp' p'p'' = ap'' + ap'' + ap'' + p + p p''' p'' = 3p''' + 2p + p + ap'' p''p = ap''' + *p'' + ap + p + p'' p''p = 3p'' + zp' + p'' + zp''' p''p' = 2p'' + ap + 2/7' + p'' + p''' p' = 8 + 3// + 2// ' + 2/7''' p'' = 8 + 3/7'' + 2/7''' + 2/T p''' = 8 + 3p'' + 2p'' + 2/7 p'''' = S + 3p'' + 2/; + 2/7' p''' = 8 + 3/7 + 2/ + 2/7''$. (1) On a choisi $i3$ parmi les 16 valeurs que peut avoir dans ce cas la racine primitive : ces 16 valeurs sont $\pm(6, 7, 11, la, i3, i5, 17, 19)$.

The text on this page is estimated to be only 25.04% accurate

224 THÉORIE DES NOMBRES. Au moyen de ces équations il est facile de déterminer les valeurs de p, p', p'', p''', p'''' , exprimées par le moyen de p , ce qui conduira assez, promptement à l'équation du cinquième degré en p . En effet la valeur de p combinée avec l'équation $0 = i + p - p' + p'' - p''' + p''''$ donne d'abord $p' = np - \frac{1}{2}p''$. Multipliant chaque membre par p et substituant dans le second les valeurs linéaires de pp' et pp'' on aura $pi - \frac{1}{2}p'p'' = \frac{1}{2}p''^2$. Multipliant celle-ci par p et faisant de semblables réductions, on aura $p' + ip' - p''p' = \frac{1}{2}p''^2 + G = \frac{3}{2}p'' + 3p''$. Enlin multipliant de nouveau par p , il viendra $p - \frac{1}{2}p'' + \frac{1}{2}p''^2 = \frac{1}{2}p''^2 + 8p'' - 3p - \frac{1}{2}p''^2 = \frac{1}{2}p''^2 + Zp''$. De ces équations on tire deux valeurs de p'' qui étant égalées entre elles donnent l'équation cherchée $4p''^2 + pk - \frac{1}{2}p'' + 2i - 9 = 0$. (A) C'est ce qu'on obtiendrait directement par les formules de l'art. 503. Ces mêmes équations donnent les valeurs de p, p', p'', p''' , exprimées en fonctions de p , comme il suit : $gp = 2p^* + np^* - 29p^* - 10p + 12gp'' = pt + \hat{u}p^* - iop' - 34p + 6gp''' = \frac{1}{2}ip' - jpi + 58p + igp - 60gp'' = p^* + p' - igp^* - \frac{1}{2}p + 33$, ou plus simplement $\frac{3}{2} = p' - io + 6p - \frac{3}{2}p = p + zp' - \frac{1}{2}p - 5 + \frac{3}{2}p'' = -\frac{1}{2}J - \frac{1}{2}p'' + 13p + 8 - \frac{3}{2}p'' = -\frac{1}{2}p'' - \frac{1}{2}p - 4 +$

The text on this page is estimated to be only 27.13% accurate

CINQUIEME PARTIE. 22> Voici pour fixer les idées, les valeurs approchées de ces racines, en désignant par p la plus grande des racines positives $p = 3.0645390796$ $p = 0.4461014296$ $p'' = 1.0164875038$ $p''' = 1.1958668406$ $p'''' = 4.390611734$. (538) Il faut maintenant partager les cinq périodes de 8 ternies désignées par p, p , etc. , chacune en deux autres désignées par $< y$, comme il suit : $q = (1, 9, 40, 3a)$ $g' = (38, 14, 3, 27)$ $q = (i3, 35, a8, 6)$ $f = (2, i8, 39, a3)$ $j q'' = (5, 4, 36, 37)$ $I q''' = (26, 29, i5, la)$ $j 7''' = (a4, ii, i7, 3o)$ $j 0'''' = (lO, 8, 3i, 33)$ $q'' = (y.5, ao, 16, ai)$ $q'' = (7, 23, 34, H)$. Le produit qq'' est la somme des quatre périodes $(4 : 39)$, $(4 : 15)$, (4^4) , $(4:28)$; ces périodes sont $(f \setminus 7''', 7'', q^*,$ et leur somme $= p + p''$ donc l'équation du second degré dont les racines sont q et f , est $q^* - pq - p' + p'' = 0$; d'après cette équation on obtient toutes les autres, comme il suit : racines q et q'' équation $q^* - pq + p + p'' = 0$ q et q'' $q' - p'q + p'' + p'' = 0$ q'' et $7'''$ $q^* - p'q + p''' + p'' = 0$ q'' et $< f - p'''q + p'' + p = 0$ $9''$ et q'' $q^* - P''q + P + p' = 0$. IL «9 $P = 7 + 7T$ $p 9 = 7 + 7''$ II $p = < l \blacksquare + \blacksquare ?''^* p'' < M = -7' + 7''' p'' 4 - 7''$

The text on this page is estimated to be only 17.69% accurate

aaO THEORIE DES NOMBRES. (53g) Enfin il reste à partager chaque période de 4 termes désignée par y, en deux autres de deux termes désignées par t; voici les valeurs de t et les équations qui les contiennent deux à deux : <1 — t + r q = t' + t'' q'' = / + r q'' z = f + t''' q > == r + f'' q' = r + t'' y'' = t'' + tT' y''' = r'' - f r'' // ■ y / i - 9 _ i _ r1*) 1 f'' * i * 1 1 « > ■ ** 3 < i ' J ~ f / T / t'' r* ' - i - r' 7 1 .. II. r'' r3'' 1 ' fji _ 1 _ » - r' 1 f' 1 r'' - l - r'' » f » i » il * • > \ t r + r 7 i r / • * + r19 / • - f - r' 3 \ r'' j. » 6 j, < 5 i r'' r'' - + - r'' r'' - 4 - r'' i r,, , r' + H' ! '' r' - + - r1* r'' - + - r'' f f — qt + y''' = r o y' / 4 - ?'' = o V — q'' t + q = o r — q''' t + q' = o f — q - t + q'' = o t' — q' t + q''' = o t' — q'' t - + - y* — o t' — q''' t + q < = o r ~ q''' t + q'' = o t > - ~ q'' t + q''' = o [. l'équation du second degré qui a pour racines y et y'' ne détermine pas celle des deux racines qui doit être prise pour y, - il en est de même de l'équation qui a pour racines y' et yT' et des trois autres semblables. Pour faire disparaître à cet égard toute indétermination , autre que celle qui est inévitable entre y et y*, il faudra chercher, conformément à la théorie précédente, les valeurs des puissances y', y1, '/' » y* de la racine q, exprimées en termes linéaires , y', y'' . . . y''; on réduira ces valeurs à ne contenir que les in

The text on this page is estimated to be only 23.14% accurate

CINQUIÈME PARTIE. —, a7 nues f/ , 7 " , 7 '" , 7" , puisqu'on peut substituer pour les autres racines les expressions $r = p - 7$, $7'' = // - < j \backslash f j''' = p'' - q''$, $q''' = p''' - (f \backslash 7'' = // * - 7''$. De cette manière on aura quatre équations au moyen desquelles on pourra exprimer 7' , 7 " , 7" . 7" par les puissances de 7 , sans aucune ambiguïté, ce qui déterminera en même temps les autres racines 7* , 7" . . . 7" . (54o) Le choix étant donc fait pour la valeur de 7 entre les deux racines de l'équation $7' - p 7 \blacksquare + \bullet p' - hp'' = 0$, toutes les autres quan. tités 7' , 7" , etc. , deviennent connues et déterminées. Lorsqu'on passe ensuite des périodes 7 de quatre termes aux périodes t de deux termes, déterminées par dix équations du second degré, on rencontre une première ambiguïté inévitable dans la valeur de / qui peut être indifféremment l'une des deux racines de l'équation $/ * - 7* + 7''' = 0$; on pourra ensuite éviter toute ambiguïté pour la détermination des 19 autres racines t, t' . . en faisant usage du même procédé que nous avons indiqué pour les racines 7' , 7" . . . 7" . Mais ces calculs sont d'une longueur rebutante , et il faut avouer que c'est un défaut de la méthode dont nous donnons ici le développement, de ne présenter aucun moyen simple, pris dans la même analyse, d'écarter toute ambiguïté dans la détermination des périodes déduites des périodes d'un ordre supérieur. M. Gauss, auteur de cette méthode, a senti cet inconvénient, et il a proposé pour y remédier d'employer les valeurs approchées «les différents termes que l'on cherche en les tirant d'une table de sinus naturels. Ainsi , , « • , a fiv , j 2 kit dans notre exemple ou 1 on a $r = \cos. \sim - \backslash - 1 \text{ sm. } - ^{-}$, ce qui donne en général $r'' + r'' \sim * = a \cos.$, si on fait jxrör abréger $X \blacksquare = 1$, on aura $ra + r'' \sim a = a \cos.$. Au moyen de cette formule les quantités 7, 7' , etc. , s'expriment très-simplement et d'une manière déterminée, comme il suit : a9.

The text on this page is estimated to be only 26.41% accurate

u28 THÉORIE DES M OMBRES. air . 181c «=2 COS. -r- 4- 2
 COS. -t— 41 41 261c iair 7 =2C0S.— + 2COS.— „ ioir 81c 7 = 1 COS. -
 jp- -4- 2COS. — etc. Lorsque ensuite on passe des périodes de quatre
 termes désignées par 7 aux périodes de deux ternies désignées par t, on a
 pour ces dernières les valeurs très-simples, 2 ir „ 1 8 n t =2cos.T , t' = acos.-
 — 4» 4i ./ a6w 12 iç f ~ 2COS.-T— , f =2COS.-r.a 101c 8it / = 2COS.-r
 — , F" = a COS. -7etc. etc. Et d'après les valeurs approchées de ces
 quantités, combinées avec leurs signes, il n'y a plus d'ambiguïté à craindre
 dans la résolution des équations du second degré qui donnent les diverses
 valeurs de 7 et de t. (54i) On voit d'ailleurs a priori pourquoi la solution
 générale est sujette à des ambiguïtés nmultipliées, même en usant de toutes
 les ressources que fournit la méthode pour déduire d'une période donnée
 toutes les autres périodes d'un même nombre de termes; c'est que la solution
 générale a lieu quel que soit le nombre entier k ; et puisque ce nombre peut
 prendre toutes les valeurs de 1 à n — 1 , il est évident que chaque
 changement fait dans la valeur de k, doit intervertir l'ordre des périodes
 composées d'un même nombre de termes. Dans l'exemple dont nous nous
 occupons n — 1 =4o, ainsi il y a \o valeurs différentes à prendre pour k ,
 lesquelles prises deux à deux produisent les mêmes valeurs de*, puisque la
 valeur f = acos.-^ nechange pas en mettant n — k à la place de k. On doit
 donc trouver

The text on this page is estimated to be only 28.03% accurate

CINQUIÈME PARTIE. 229

ao valeurs différentes pour une même racine t^* dans laquelle « serait constant, et ces 20 valeurs, différentes entre elles, représentent la suite entière $t, t', f, \dots, f'$. Le nombre 20 de ces combinaisons, composé des trois facteurs 5.2.2, s'explique naturellement par les cinq valeurs de p déduites de l'équation (A), par les deux de q déduites de l'équation. . . 7' — $pq + // -f- // = 0$, et par les deux de t déduites de l'équation $V - qt + q''u = 0$. (542) Si on n'a pour but que d'obtenir le résultat final, soit pour avoir toutes les racines de l'équation $X=0$, soit pour diviser la circonférence en n parties égales, on pourra éviter en très-grande partie les difficultés que nous venons de signaler, et il ne faudra jamais qu'un petit nombre de essais pour parvenir à une ou plusieurs solutions réduites à la forme la plus simple dont elles sont susceptibles. C'est ce que nous allons faire voir dans le cas de $n = 4$ > Il faut d'abord chercher la valeur approchée d'une racine de l'équation, puis déduire de cette racine, désignée par p , les quatre autres désignées par p, p', p'', p''' \

voici le résultat de cette opération pour laquelle on a donné ci-dessus les formules nécessaires, Racines approchées. $p = 3.0625390796$ $p' = 0.4461014^{96}$ $p'' = 1.2162875038 = -i.958668406$ $P'' = -4.5290611724$

Leurs logarithmes. 0.4860816392 $\hat{O} 9.649433ai5o$ 0.08503624496 0.0776828238 0.6560081866 Au moyen de ces racines on calculera les valeurs de q et q'' , ainsi que celles de q' et q''' , savoir : $a.3573430658$, et f par la formule $q^p \pm (^{-p} -, \dots) = j^{5, ^{3, \dots}}$ f et r • pr la formule $W - / * -, ^ \setminus J^g \gg JjJ$

The text on this page is estimated to be only 20.72% accurate

a3o THÉORIE DES NOMBRES. Remarquons ensuite que parmi les équations qui déterminent deux à deux les 20 valeurs de t , on trouve l'équation $V - q''t + q = 0$ (qui donne ces deux valeurs $t = 7q/q''$) $- q$. Or par le résultat précédent, q doit être l'un des deux nombres $2.307 \dots$, $0.705 \dots$, et q'' l'un des deux $3.0769 \dots$, $-1.8606 \dots$. Ainsi on n'aura que ces quatre suppositions à faire : j ($q = a.3173430658$ h j $q = a.3573430658$ { $<y''$ $1=3.0769019087$ ' $q'' = -1.8606144''49$ ni $q = 0.7051960138$ | $q = 0.7051960138$ $q'' = 3.0769019087$ \ $q'' = -1.8606144''49$ }
La seconde supposition ne peut avoir lieu parce que les valeurs de t qui en résultent seraient imaginaires; la troisième n'a pas lieu non plus, parce qu'il en résulterait une valeur de t plus grande que 2, laquelle par conséquent ne pourrait être représentée, comme elle doit l'être, par $3\cos. w$. Ainsi il ne reste à calculer que les valeurs de t qui résultent de la première et de la quatrième hypothèse. Ces valeurs sont : $1 \leq 1.635858705 = \arccos(35^\circ 7' 10'' .0244$: Dans la I^{re} hyp. $1 (= i.44u) 43i88a = \arccos(43e54' 8''.7804j$ nain la IV^e hvi. $' * = \sim^\circ - ^6 300385 = 2\cos.(105' ai' 57''.073i \dots | / = - i.3306'5 \ll 40105 = 2005.(131^\circ 4'^{''}.34i57)$ or on a $35 - i.9'' .02439, ^6 = 43 \ll 54' 8''.78049 ^6 -- = 105'' 21' 57'' .07317, ^6 jf - 1 i 1^\circ \& ^6 \cdot ^4 1 ^6$
Ainsi on peut conclure de là que les quatre valeurs trouvées pour θ dans nos deux hypothèses, seraient égales rigoureusement à $2 \cos. \sim$, $2 \cos. ^6$, $2 \cos. 24^\circ$, $2 \cos. ^6$, si on substituait dans les formules $4' 4' 4'$ les valeurs exactes des racines $/;$, $//$, $/\prime$, $/\prime\prime$, $/>$. De là résultent ces quatre solutions.

Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 22.45% accurate

CINQUIEME PARTIE. . a3i Br. 9 =7/> -Hf(/>' -4p'-4p") l»Sol. a
 COS. ^.=:iî"+l|/{?*" _4y) a' sol. aco8.^=i?"-^(y'''-4?) 4' sol. acos.|r'=i?'-
 ii/(?"-4!?) (?"=i/>"-TW'(/"-4/>" , -4/>") Une seule de ces solutions suffit
 pour avoir toutes les racines de 4i l'équation $X = 0$; car si on fait, par
 exemple, $r = \cos.^{-t1/} - \hat{i}$ sin cette racine fera connaître toutes les autres
 par les puissances successives $r^1, \#^* \blacksquare^1. \dots r^4$ ". (M3) Voyons maintenant
 l'usage de la même analyse pour décomposer la fonction X du degré $n - i$
 en facteurs des degrés sousmultiples de $ii - \hat{i}$. Si on veut seulement la
 partager en deux facteurs du degré $m = \sim \backslash n - i$, il suffira de mettre $4X$.
 sous la forme $Y^* \pm / * Z'$, savoir : $Y^* - f - n'D$ si n est de la forme $4 * - i$ et Y'
 $- nZ^*$ si n est de la forme $4 i + i$. Dans ce dernier cas seulement les
 facteurs du degré m sont réels puisqu'on a $4X = (Y - f - Z/n)(Y - Z/| \ll)$. En
 général si on fait $n - i - mk$, on pourra décomposer le polynôme X du
 degré mk , en k polynômes du degré m , ce qui fera autant de décompositions
 possibles qu'il y a de manières de partager « $- i$ en deux facteurs. Dans
 l'exemple dont nous nous occupons où $n - i = 40 = a^* . 5$, on pourra
 décomposer le polynôme X du 40TM degré de cinq manières différentes,
 savoir: en deux facteurs du degré 40 en quatre du degré 10 en cinq du degré
 8 en dix du degré 4 et en vingt du degré 2. Nous allons développer ces
 différents cas. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 27.87% accurate

a32 THÉORIE DES NOMBRES. D'après les calculs précédents les vingt facteurs du degré a, sont: $T = x' - t x - i T = x' - t'x + i T'' = x' - t''x + i * T''' = .r, -rx + 1$. Par le produit des deux facteurs T et T'' on formera le facteur Q du quatrième degré; de même par le produit des deux facteurs T', T' , on formera le facteur Q' et ainsi jusqu'au facteur Q''; de sorte que les dix facteurs Q, Q' , Q'' . • Q''% seront ainsi exprimés : $Q = (x > + ly - x(x' + i)q + q'''x' Q' = + i)' - x\{x^0 + \backslash\}q + q''x' Q'' = (x^* + i)' - x(x > + i)q'' + qx' * Q'' - (x' + iy \sim x(x' + i)q'' + q''x'$. Les facteurs du huitième degré se formeront par la réunion de deux facteurs du quatrième en cette sorte $P = QQ'$, $IV = Q'Q^* \% P'' = Q'Q^*, P'' = : Q'''Q'''' , P'' = Q''Q''$. Or en effectuant la multiplication, on a $p = (x > + ly - x(x > + iy(q + q')) + x'(x' + iy(q''' + q'''' + qq^*)) - x \backslash x' + i)(qq''' + qyq'''') + x^* q''' q^{\circ} \backslash$ Dans cette expression les coefficients réduits d'abord à la forme linéaire, s'expriment ultérieurement par le moyen des racines p, et parce que la valeur du facteur P fait connaître les quatre autre» facteurs , le système de ces facteurs sera comme il suit : Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 15.75% accurate

CINQUIÈME PARTIE. a33 $P = (. * \bullet -i- i)^* \text{---} x (o?' -+ \blacksquare i) > + x'$
 $(x^* -I- i) \bullet (p + ^ -h //") + x'(x'+ i)(i+p) + *(p+P'') P' = (x'+ P/ \text{---} 4- \backslash Jp + x >$
 $\{x'+ \backslash Y \{p'' + p'' + p''\} + Jj(i'+i)(i+p) + xt\{p'+p\} p'' o \ll \text{---} iy \{p'' + p'' + p\} + x \backslash x > +$
 $i)(, + p'') + x^*(p'' + p) p'' = (x'+ i)^* \text{---} x \{x^* + iyp'' + x > (x' + iy(p'' + p + p) + X > \{x' +$
 $i)(i + p''') + x'(p''' + p'') P'' = r(.f' 1)^* \text{---} .x(x' -+ - oy + x'(x^* 4- iy \{p + p + p''\}) H- xJ$
 $(.r^* + i) (i + p'^*) + x4 (>" + //"). (544) \text{ On a déjà formé les deux facteurs}$
du vingtième degré qui divisent le polynôme X ; cherchons maintenant les
quatre facteurs du dixième degré. Pour cela il faut d'abord avoir les valeurs
des quatre périodes $p = (i o : i)$, $p' = (i o : g)$, $P'' = (i o : g^*)$, $p''' = (i o :$
 $g \gg)$, dont le développement est, en supposant toujours $g = i3$: $P = (i, u5,$
 $10, 4 > 18; 4^o > i6 \backslash 3i, 37, a3) p' = (i3, 38, 7, 11, 29; 28, 3, 34, 3o, 12) p'' \bullet = ($
 $5, 2, 9, 20, 8; 3G, 39, 32, 21, 33) P''' = (24, 26, 35, 14, 22; \gg 7, .5, 6, 27, 19).$
;/ De là résulte suivant le théorème de l'art. 500 $p- = 8 - ap + f' + ap''$, $pp' = -$
 $a + 2p$, $pp'^{-} + p + p' e'' = 8 \text{---} ap' + P''' + 2p$, $p'p'' = \text{---} a + ap''$, $p'p- =: \text{---} a + p'$
 $+ r p''' r = 8 \text{---} ap' + p -+ -a, / , f' P''' = - \gg + \gg Pm. p'' = 8 \text{---} ap'' + p' -f -af''$, $p''p$
 $= r_a + ap$ Pour avoir l'équation du quatrième degré qui détermine p , je
forme les équations successives $\bullet . ' \gg \bullet \bullet] . -." 1 h; ; p' + 2p \_ 8 = p'' + 2p''' ; ; f ; |$
 $pJ 4- 2p^* \text{---} l3p -4- () = p'' p \ll + ap \gg - \_ 1. Sp \ll + 5p + a = p'' l$ et $j > ar$ les deux
dernières j'ai l'équation cherchée H. 3o

The text on this page is estimated to be only 20.03% accurate

a34 THÉORIE DES NOMBRES. $P^* - + - p^3 - 1 5p'' - h 18 p - 4$
 $= 0$, résultat qu'on obtiendrait directement par la formule du n° 517', et
qu'on trouve dans le tableau du 11° 5*22. Connaissant une racine p de cette
équation, on aura les trois autres de la manière la plus simple par les
formules $2 - p' P - 1 - p' P p'$ Au reste l'équation dont il s'agit se
décompose en deux équations du second degré qui sont, en faisant $a = 1/4$ «
» on en tire $p - ip(« - + 5) = 0$ $p' - * - 7p(« + 0 - U« + 5) = 0$, $P' ^$
 $j = r1K« + 0 \pm il''(a«' + ««>«) \cdot P$) Les valeurs numériques approchées sont $a =$
 $6.403ia 4^3809 \vee \{ \pi < t - io« \} = t \setminus . 2389J 7i38i6 1/ (3 «' - f - I O a) = 1 2 .$
 $08433 872337 p = 0.29104 177498 p' = 1 . 17030 3621 32 \blacklozenge p'' - 2.4io52$
 $0344^{\circ}65 ; p'' = -4.871 86 5820365$. Par les fractions continues on
trouverait les valeurs suivantes qui se déduisent les unes des autres, et qui
sont à peu près aussi approchées que les précédentes, 5065 , 34806 ,, 29741
,, 24676 Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 22.01% accurate

CINQUIÈME PARTIE. 35 Il est remarquable que les racines p, p', p'', P'' se déduiraient des valeurs trouvées ci-dessus pour $\sqrt{p}$ etc. On a en effet $p' = \sqrt{p} + r + r^2, + i''' p'' = \sqrt{p} - r + r^2 + r^3 - \dots$ $p''' = \sqrt{p} + r'' + r + r^2$. Ainsi les valeurs de p qui s'expriment par de simples racines carrées, s'expriment aussi par les quantités t qui dépendent chacune d'une équation du cinquième degré et de deux du second; identité qu'il serait comme impossible de constater a posteriori, d'après les valeurs de p que nous donnerons ci-après.

(545) Maintenant si on veut avoir le facteur du dixième degré qui contient toutes les racines de la période p , il suffira de former le produit $(y-t) (Cr-t) (tr-r'') (tr-\sqrt{p})$, dans lequel $y = \dots$. Représentons ce produit développé par $j > (y) - (y + t - y + y - y)$. Nous aurons d'abord $a = p$; ensuite des valeurs $t = r + r^2, \dots t'' = z, r, s - r, S, t''' = r'' + r''', r' = r^2 + r^3, e'' = r^4 - r^5$, on tire $\epsilon = S(\sqrt{p}) + S(\sqrt{p}) = i - p + \{Y = S(trr'') + S(\sqrt{p}) = -2 - p + p' = S(\sqrt{p} - r - r^2) = -3 - P'' - 3 P''', = \dots$ $rrr = i - p$; donc le polynôme cherché du dixième degré est $(jr' + i)J - Px(a, + i)4 - (i + p - p'')^2(x + i)J - h(a + p - pO^{x^2+1}V - (3 + p'')^2 - 30 - (i - p)ar^2$.

30.

a36 THÉORIE DES NOMBRES. Cette fonction jointe aux trois autres qui s'en déduisent, en avançant chaque lettre p d'un rang, donnera les quatre facteurs dont le produit $=X$. Ainsi l'équation $X = 0$ du quarantième degré est immédiatement décomposée en quatre autres du dixième degré dont les coefficients ne dépendent que des quantités p déterminées par de simples extractions de racines carrées.

CINQUIÈME PARTIE. a?7 § IV. Méthode de réduction pour compléter la théorie précédente. (546) Il ne sera pas inutile de résumer ici en peu de mots la théorie que nous avons développée. Étant proposée l'équation $x^n - 1 = 0$ où l'exposant n est un nombre premier, et mettant à part le facteur $x - 1$, tout se réduit à trouver les racines imaginaires de l'équation $X = 0$; et parce que chaque racine doit être de la forme $\cos. \frac{2\pi}{n} + i \sin. \frac{2\pi}{n}$, il suffit d'avoir l'une des valeurs réelles de $x + \frac{1}{x}$ qui sera toujours représentée par $2 \cos.$ C'est à quoi on parvient par la résolution d'une suite d'équations dont les degrés, multipliés entre eux, donnent le produit $\frac{n-1}{2}$, et qui auront toutes leurs racines réelles. Soit k le plus grand nombre premier qui divise $n - 1$, et soit $n - 1 = m k$; on formera d'abord l'équation du degré k qui a pour racines les périodes de m termes, savoir : $(m : 1), (\frac{n-1}{m} : g), (m : g^2), \dots, (m : g^{m-1})$, g étant l'une des racines primitives de n . Cette équation, qui sera de la forme $x^k + p_1 x^{k-1} + p_2 x^{k-2} + \dots + p_{k-1} x + p_k = 0$, et dont les coefficients «', €', etc. seront toujours des nombres entiers, jouit de ces deux propriétés remarquables : 1° Les racines $p, p', p'', \dots$, étant les valeurs des périodes de m termes rangées dans l'ordre $(m : 1), (m : g), (m : g^2), \dots$, ou en général dans l'ordre $(m : a), (m : a^g), (m : a^{g^2}), \dots$, l'une de ces racines étant connue et désignée par p , toutes les suivantes $p, p', p'', \dots$ se déduiront de p et de ses puissances successives $p^g, p^{g^2}, \dots$, par une expression de la forme $A + Bp + Cp' + \dots + hp^{g^{m-1}}$ dans laquelle les coefficients $A, B, \dots$ seront rationnels; 2° Étant donnée une fonction θ rationnelle et entière des racines

1 38 THÉORIE DES NOMBRES. $p, p', p'', \text{ etc.}$, ou de quelques-unes d'entre elles seulement, si on avance les lettres p d'un rang pour passer successivement de la fonction θ à la fonction θ' , puis de la fonction θ' à la fonction θ'' , etc., jusqu'à ce qu'on parvienne à la fonction de rang $k - i$, la somme de ces k fonctions désignée par $\theta(\theta)$ sera égale à un nombre entier. Dans ces changements progressifs de la fonction θ , chaque racine qui y est contenue prendra successivement toutes les valeurs $\theta(\blacksquare), \theta(*+\bullet), \theta(C\langle+\rangle), \dots \theta(\langle-\bullet\rangle)$, contenues dans la suite $p, p', p'', \dots$ qui est rentrante sur elle-même, et dont un terme quelconque peut être pris pour le premier terme. (547)

L'équation en p étant résolue, appelons k' le plus grand nombre premier qui divise m (k' pouvant être égal à k), et soit $m = m'k'$ il faudra partager la période $p = (m : \langle) \text{ en } k'$ périodes de m' termes, savoir : $(m : a), (m' : \langle A), (m' : ah'), (m' : aA^* \sim ')$, où l'on a $h = gk$. Ces périodes désignées par $q, qW\}q(**), \dots q_l?*$ — seront les racines d'une équation en q du degré k' , dont tous les coefficients s'exprimeront d'une manière linéaire par les racines connues $p, p \setminus p$, etc. Les autres périodes de m termes, savoir : $(m : \langle g), (/ \langle : \langle tg')$, etc., se partageront de même en k' périodes de m' termes, au moyen d'une suite d'équations en q qui dérivent de la première équation trouvée, en avançant successivement les lettres p d'un rang. Mais il suffit de résoudre la première de ces équations ; car d'une racine donnée q de cette équation, on peut déduire les valeurs de toutes les autres périodes de m termes, par des expressions rationnelles et qui ne laissent aucune indétermination. On trouve de même que toute fonction θ rationnelle et entière des racines q ou de quelques-unes d'entre elles, prenant kk' valeurs successives, lorsqu'on fait parcourir à chaque racine $q'^{\wedge}$ le cercle entier des valeurs dont elle est susceptible, la somme de toutes ces fonctions désignée par $\theta(\theta)$, pourra être exprimée d'une manière linéaire par les racines connues $p, p \setminus p''$, etc.

Continuant ces subdivisions jusqu'à ce que le dernier terme de

CINQUIÈME PARTIE. 23g la suite $m, m', m'', \dots$, etc. soit 2, on aura enfin les équations qui ont pour racines les périodes de deux termes, représentées en général par $+af\sqrt[A]{A}$, et qui donneront ainsi la solution complète du problème. (548) La théorie dont nous venons d'indiquer les principaux résultats, laisse à résoudre les équations en p, q , etc. qui sont pourvues de tous leurs termes, et qui pourraient à quelques égards présenter des difficultés plus grandes que l'équation $x^n - 1 = 0$ qui est le principal objet de ces recherches. Pour obvier à cet inconvénient, M. Gauss a indiqué une méthode particulière au moyen de laquelle la résolution des équations auxiliaires dont nous parlons se réduit dans chaque cas à celle d'une équation à deux termes de même degré, dont le terme connu est de la forme $a - \sqrt[n]{b}$; de sorte qu'alors une équation complète du degré k peut se résoudre par la section d'un angle dont le cosinus et le sinus sont connus, ou du moins sont déterminés, en supposant connue la division du cercle en k parties égales. Cette méthode de réduction est d'autant plus remarquable qu'à l'époque où son auteur l'a publiée, les géomètres pouvaient la regarder comme le premier exemple un peu général qui eût été produit jusqu'alors, de la résolution des équations au-delà du quatrième degré. Nous nous proposons ici d'exposer cette méthode sous un nouveau point de vue qui en facilitera beaucoup les applications et fera disparaître entièrement la prolixité qui avait jusqu'ici paru inévitable dans cette sorte de calculs. Pour qu'on saisisse plus facilement l'esprit de la méthode et la loi des résultats, nous ne considérons pas seulement un cas particulier, mais nous allons résoudre en général l'équation du cinquième degré qui a pour racines les cinq périodes de m termes qui ont lieu en supposant $n = 5m + 1$. Nous ferons voir ensuite comment on peut résoudre l'équation du septième degré qui a lieu lorsque $n = 7m + 1$. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 29.00% accurate

THÉORIE DES NOMBRES. De l'équation auxiliaire du cinquième degré qu'il faut résoudre lorsque $n=5m + i$. fo4<)) Cette équation que avons représentée ci-dessus par $o=P_i + P^* + iy - Q// + R_p - n$ a pour racines les cinq périodes de m termes dans lesquelles se par tage la période $(5m, i)$ comprenant toutes les racines de l'équation $X = o$. Soient $/?, //, /', /?''', />$, les cinq racines de l'équation dont il s'agit, nous supposons $T=p + p'R + p''R' + p''' R> + p'' R_4$, R étant une des racines imaginaires de l'équation $R_5 - 1=0$; si on élève au carré la valeur de T et qu'on le mette sous la forme $T^2 = a + bR^* + cW + dR_6 + cW$, il est facile de voir qu'on aura $a = />' + 2 p'p'' \blacksquare + \blacksquare 2 p''p'' b - p + a/> p + 2p p \text{ II. } , /// I \text{ ,, } C=p^* + 2/> p + 2p''p d = p'''' a p''p'' + *pp e - p^{\wedge'} - i - a pp'' 4 - 2 p'p''$. Dans chaque cas particulier il faudra , d'après la valeur prise pour la racine primitive $^{\wedge}$ -, réduire ces coefficients à la forme linéaire, et on voit d'avance que si le coefficient a s'exprime par $*p + ep' + yp'' + Sp'' + tp''$ le coefficient b s'exprimera par la même formule dans laquelle on avancera les lettres p d'un rang , en considérant $/?$ comme égal à p . On procédera de même pour avoir l'expression des coefficients sui

The text on this page is estimated to be only 26.26% accurate

CINQUIÈME PARTIE. -^r vants b , c , d , e, et de cette manière la Valeur de T1 sera ainsi exprimée : $T' = *p + ep' + yp'' + \$p'' + tp'' H - R'^{\wedge} + \epsilon p'' + yph' + tp'' + tp) 4 - R^*(ap'' 4 - \epsilon p'' 4 - yp'' + \&p 4 - tp') 4 - R8 Up'' + \hat{e}p'' + yp 4 - \$/?' + tp'') 4 - R'(\ll/?w 4 - g/? 4 - y/?' 4 - \grave{a}p' + tp'').$ (55o) Je remarque maintenant que cette même valeur ordonnée par rapport aux racines p, p', p'' p''' prendra la forme suivante : $T' = p (ot + eR' + \wedge R^{\wedge} - f - yR^{\wedge} eR' + p (e + aR' + eR' + SR' + yR'') + p''(y + \acute{e}R > 4 - \ll R^* + \ll R6 4 - \hat{I}R') 4 - pm(t 4 - 7R' 4 - 6R4 4 - a R6 4 - 6R1) 4 - /?''(* + *R' + Y R4 + 6 R6 4 - \ll R^*).$ Appelons A la fonction de R qui multiplie p , il est aisé de voir que AR', AR*, AR6, AR'' , seront semblablement les fonctions de R qui multiplient /?', /?', /?''', /?''; ainsi en faisant $A = a4 - tR, 4 - *R44 - yR64 - \epsilon R'$, on aura $T^* = A (/? + p R^* + p R^* 4 - p'' R6 4 - p'' R^*),$ formule où le second membre est le produit de A , fonction de R seule, par le polynôme $p + p'R' + p'' R4 4 - p''' R' 4 - /?'' R'$, qui n'est autre chose que le polynôme T dans lequel on met R' à la place de R. Oh pourrait semblablement mettre RJ et R4 à la place de R et former ainsi les quatre polynômes $T = /?4 - //R + p''R' + p''R\ + p''R^* T = p + p' R' 4 - // R^* 4 - // "Rs 4 - p''R^* (i) T'' = p 4 - p'Rs + p'' R6 4 - // "R9 4 - p''R'' T'' = p 4 - p R4 4 - f R' + p'''R'' 4 - /?''R'6.$ II. 3i

a4a THÉORIE DES NOMBRES. Il convient aussi de considérer les quatre polynômes semblablement formés par le moyen du premier A ; savoir : $A = a + eR' + \text{\$}R^4 + yR^6 + \text{\text{€}}iR$ $A' = ct - h^*R^4 + \hat{i}R^* + yR'' - 4gR''$ (a) $A'' = aH - tR^6 + iR'' + TR'' + \hat{e}R'^4$ $A''' = a + eR' + SR'^6 - 4yR'^4 + 6R^3^*$. Et ces deux sortes de fonctions vont nous fournir des théorèmes aussi généraux qu'intéressants. (55 1) Le premier de ces théorèmes est celui que présente le résultat contenu dans l'équation déjà trouvée $T' = AT$. Il a lieu quel que soit le nombre premier n de forme $5m + i$ auquel répond l'équation à résoudre. Voyons maintenant les conséquences qu'on peut déduire de ce premier résultat. L'équation $T' = AT'$, où l'on peut mettre successivement R' , R^1 , R^4 , à la place de R , en fournit trois autres, de sorte qu'on a les quatre équations (3) $T' = sAT$, $T'' = AT'$, $T''' = A'T$, $T'''' = A''T''$, qui étant multipliées entre elles donnent $TT'T''T''' = AA'A''A''^*$. On voit aussi que les trois polynômes T , T'' , T''' , peuvent s'exprimer rationnellement par le moyen de T de la manière suivante : $1 \text{ --- } T' \text{ } 1 \text{ } \hat{A}1^* \text{ } ' \text{ } 1 \text{ } A^* \text{ } A'^* \text{ } A''' \text{ } '$ valeurs qui étant substituées dans l'équation $TT'T''T''' = AA'A''A''^*$, ou dans l'équation $T''' = A''T$, donneront également pour résultat (4) $T^5 = A'A^4A''''A''$. Ainsi nous avons déjà un moyen de déterminer le polynôme T en

CINQUIÈME PARTIE. *43 fonction des quantités A qui sont toutes connues; car le nombre n étant donné, il est facile de connaître les coefficients a, g, y, i, « qui entrent dans la valeur linéaire de $a - p^* - 2p''p''' + zp'p''$, et qui sont tous des nombres entiers. Ainsi en faisant $\ll = 4i$ et prenant pour racine primitive le nombre $g = i^3$, on trouve par l'art. 537 $a = -np + 3p' + ip'' - 4p'''$ i ce qui donne dans ce cas $a = -2$, $6 = 3$, $y = a$, $8 = -4$ » $\ll = 0$. Connaissant T on en déduira, par les formules précédentes, les valeurs de T', T'', T'''. Puis ajoutant les quatre équations (1) auxquelles on joindra l'équation $-i = p + p' + p'' - p''' + p''''$, on aura pour déterminer p , l'équation (5) $5p = -n - T - i - T' + T'' + T'''$. On voit donc immédiatement la possibilité de déterminer la racine p par le moyen des quantités A qui sont des fonctions de R. Mais cette solution serait trop composée, puisqu'elle déterminerait T par l'équation (4), c'est-à-dire par l'extraction d'une racine 15''''*, tandis qu'il est facile de la déterminer par une racine 5''''* seulement, comme nous allons le faire voir. (55a) Si on multiplie entre eux les deux polynômes T et T''' qui sont des fonctions semblables de R et de R⁴, le produit sera $TT''' = p^5 + Rfp'p'' + R'fpp'' + KVpp''' + Wfpp''''$. Mais en faisant toujours $n = 5m + i$, on a trouvé ci-dessus (art. 537), $fp' = n - m$, $fpp'' = fpp''' = fpp'''' = -m$. Donc $TF = i - m(i - 1 - R + R' + R'' + R''')$, ou simplement $TT''' = w$, car l'équation $R^5 - 1 = 0$, dont le premier membre $= (R - 1)(1 + R + R' + R'' + R''')$, exige qu'on ait $0 = 1 + R + R' + R'' + R'''$, puisqu'on ne peut supposer $R - 1 = 0$. On trouverait semblablement $TT'' = \ll$, mais il est facile de voir 3i.

The text on this page is estimated to be only 17.39% accurate

a/4 THÉORIE D6£ NOMBft&S. que cette équation n'est qu'une conséquence de la précédente. En effet si T est désigné par $*R$, on a $T' = *(\ddot{V})$, $T'' = *(R)$, $T''' = *(K)$, « t l'équation $JT''' = n$ deviendra $*(J^*)*(R^4) = 'n$. Mettons dans cette équation R' à la place de R et connue alors R'' se réduit à W , nous aurons $\langle \zeta(R) \rangle *(R) = \ll$, on $T'T'' = /?$, ($>5i3$) Les propriétés que nous venons de démontrer pour les fonctions T , ont lieu également pour les fonctions, A . En effet si la seconde et la troisième des équations (3) sont multipliées entre elles, le produit donne $(T'T'') = A'A''TT''$, ou $i, ^n A'A''$; donc $A'' = n$. ■ De même en multipliant la première par la quatrième, on aura $(TT''') = AA'''T'T''$, ou $n' = \ll AA'''$; donc $AA''' = \ll$; on a donc ces deux séries d'équations (6) $n = AA''' = A'A''$. Comme on peut supposer en général $R = \cos. ^\ell + \vee - i \sin. \sim; *$, h étant l'un des nombres $i, 2, 3, 4$ * 'I est visible que la quantité A , fonction rationnelle et entière de R , pourra s'exprimer par la formule $A = r (\cos. 0 + 1/ - 1 \sin. 6)$. Et puisqu'on a $AA''' = \ll$, il en résulte $A''' = (\cos. 9 - \vee - 1 \sin. \hat{o})$. D'un autre côté on a la valeur $A - HA''^{\wedge} \ll + \ell(R' + ^) + a(R^4 + ^T)$ Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 25.42% accurate

CINQUIÈME PARTIE. 2*5 d'où il suit que $A + A'''$ est une quantité réelle ainsi exprimée : $A + A''' = 2a \cos \theta - 2e \cos \phi$. Donc il faut qu'on ait $r = 0$, ou $r = V/\omega$. Donc on a en général $A = n \cos \theta + i n \sin \theta$; c'est-à-dire que le module réel de la quantité imaginaire A est toujours égal à n ; on trouvera semblablement $A' = n \cos \theta' + i n \sin \theta'$, et par ces deux formules, on aura $A'' = n \cos \theta'' + i n \sin \theta''$, $A''' = n \cos \theta''' + i n \sin \theta'''$. (554) Il faut maintenant faire voir a priori que la forme des valeurs de T sera la même que celle des quantités A , et que n servira encore de module à ces quantités. En effet on a trouvé $T = n$, et la somme des quantités T, T'' pouvant se mettre sous la forme $T + T'' = p + p' (R + i) + p'' (R - i)$. On voit que cette somme est égale à la quantité réelle $p + p' \cos \theta + p'' \cos \theta'$. Supposant donc de nouveau $T = n \cos \theta + i n \sin \theta$, on aura $T'' = n \cos \theta'' + i n \sin \theta''$, et puisque $T + T''$ est une quantité réelle, il faudra qu'on ait $p \sin \theta = 0$ ou $p = n$. Donc les deux quan

The text on this page is estimated to be only 28.67% accurate

a4<i THÉORIE DES NOMBRES, tités T et T" devront être de la forme t T —n~ (cos. 9 1/ — 1 sin. ç) T" = «~(cos.«p — √— i sin.ç). On démontrera la même chose des quantités T et T", pour lesquelles on aura T = n » (cos. 9+ 1/— i sin. ?) T" = /iT (cos. ç — 1/ — i sin. ç'). Mais cette propriété se déduit plus immédiatement des valeurs de T, Y, T', T", qu'on peut exprimer par le moyen des quantités A, A\A'\A\' ' (555) En effet les deux équations T* = AT', T'=À'T", donnent T*=A.*V'=: A* A' T"', et par conséquent T5 = nA'A'. Substituant les valeurs A = n * (cos. 6 + 1/ — J sin. 6), A' = n* (cos. 0' V— i sin. O'), on aura Ts= n~> [cos. (a 6 + 6') + 1/— i sin. (a 6 + 6')], et par conséquent T = n ' I cos. g + 1/ — i sin. — ^ — I, ■ expression où l'on voit que le facteur n~ est en effet le module réel de la quantité imaginaire T. La valeur de T qu'on vient de trouver renferme implicitement cinq valeurs différentes. Car la quantité qui exprime TJ peut être écrite ainsi : Ts = n 7 [cos. (a 6 + e' + 2 1 *) + 1/ — i sin. (a 0 6' a tir)], /* étant l'un des nombres o, i, a, 3, 4, à volonté. De là résultent Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 25.71% accurate

CINQUIÈME PARTIE. a47 les cinq solutions suivantes où l'on a fait $\phi = \frac{\pi}{2}$, $T = n \cdot (\cos. \phi + V \cdot i \sin. \phi)$ $T = n \cdot [\cos. \phi + 1 \cdot i \sin. \phi]$ $T = n \cdot [\cos. (\phi + \frac{\pi}{2}) + i \sin. (\phi + \frac{\pi}{2})]$ $T = n \cdot [\cos. (\phi + \frac{\pi}{4}) + V \cdot i \sin. (\phi + \frac{\pi}{4})]$ $T = n \cdot [\cos. (\phi + \frac{\pi}{6}) + V \cdot i \sin. (\phi + \frac{\pi}{6})]$ (556) Ayant pris à volonté pour T l'une de ces cinq valeurs les trois autres quantités T, T', T'' , deviennent entièrement déterminées. ■ En effet supposant $T = n \cdot (\cos. \phi + V \cdot i \sin. \phi)$, si on substitue cette valeur ainsi que celle de $A = \frac{1}{n} (\cos. \phi + 1 \cdot i \sin. \phi)$ dans l'équation $f = p$ on aura $T = n \cdot [\cos. (\phi + \frac{\pi}{2}) + V \cdot i \sin. (\phi + \frac{\pi}{2})]$. Ensuite des équations $TT' = \frac{1}{n}$, $T'T'' = \frac{1}{n}$, on déduira $T'' = \frac{1}{nT}$ $[\cos. (\phi + \frac{\pi}{2}) + V \cdot i \sin. (\phi + \frac{\pi}{2})]$ $T''' = n \cdot (\cos. \phi + V \cdot i \sin. \phi)$. Maintenant pour déterminer les racines p, p', p'', p''' , il ne reste qu'à substituer les valeurs de T, T', T'', T''' , dans l'équation (5), et on aura $p = \frac{1}{n} \cdot [\cos. \phi + \frac{1}{n} \cos. (\phi + \frac{\pi}{2})]$. Cette formule qui donne la valeur de la racine p , donnera également celle des quatre autres racines p', p'', p''' , soit dans l'ordre déterminé par la racine primitive g soit dans l'ordre inverse, pourvu Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 18.91% accurate

a'18 THÉORIE DES NOMBRES. qu'à la place de o on mette successivement u -4- w + w-f- ~. On obtient donc ainsi la résolution générale de l'équation proposée, laquelle ne dépend que de la quintisection d'un angle u = a 0 -f- 6' qu'on peut construire géométriquement (557) Revenons aux formules qui donnent les valeurs des angles 0 et 6'. Si on fait -g- = |x , on aura R — eos. |a -4- V/ — 1 sin. ^ R' = ros.aft + 1/ — 1 sin. a^ R3 = cos.a{t — V — 1 sin. a|* R4==co8. |i — 1/ — 1 sin. (x; et l'équation 0 = 1 +R+R, + R1 + R4 deviendra 0=1 -f- acos.ji-t- acos. Cette équation , qu'on peut mettre sous la forme o = 4cos-Y+ acos.f* — 1 , donne en général cos. p.=~I'~/^5, de sorte que cosljt aura toujours l'une ou l'autre de ces deux valeurs, quelque soit le nombre k, pourvu qu'il ne soit pas divisible par 5. Si l'on fait, par exemple, rt=i,ou (x = ^ = 72% ou aura — 1 + 1/5 _i_v/5 eos.|A= - , cos.a(*= ^ Cela posé si l'on substitue la valeur de R dans l'équation A = a + eR,-f-*R* + yR6+eR\ et qu oH metteeïmême temps pour A sa valeur nï (cos ô+ l/— i sin.O), Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 22.61% accurate

CINQUIÈME PARTIE. a% on aura , pour détanmaer 6 , te» àem. équartioirs (î), /ITCOS. t — « -t- (y -f- î)co\$.u + (e -+■ S)C0S. *(* /i>»- sin.ft=i(y — i)aia. p. (*— S)sm<. a^ . Il suffira ensuite de mettre 2p. à la place de p., pour avoir la valeur de A' représentée par *T (ces, 6'+ √~- i si». *)r de sorte qu'on aura /fCOS.e^ a ■*- (y + *) COS. 2(1 + (e + é) COS. fi k n • sin. ft' — î) siru ap, — (« — 6) sin. pt. Dans les cas particuliers fe valeur donnée d'or nombre premier n = 5m + i , et celle du nombre g racine primitive de n, feront connaître les valeurs des coefficients a, 6, y, 4, «, comme on la vu dans le cas de »=^4r> g~ i3 (art. 55 1) , où nous avons trouvé «=s — a , 6=3,y = a,î = — 4i«=o- Ainsi on doit regarder comme bien déterminés par les formules précédentes , les angles G et 6', d'où résulte a> = a ?" ; il ne reste donc plus rien d'inconnu dans l'expression de la racine p, qui contient implicitement celle des autres racines p\ p" , p" , p\ Mais nous allons profiter des équations1 en 9 et 6', pour établir quelques relations générales entre les coefficient» (i) On voit ici deux équation* pour déterminer l'angle oul'arc^; la raison en est que l'extrémité de l'arc Q est un point de la circonférence qui ne peut être entièrement détecmin* que gar ses deua coordonnées cas. 0 et sin. 6, dont les valeurs doivent être connues aussi bien que les signes. Sion ne connaissait qu'une de ces coordonnées, elle serait commune à deux points de la circonférence et il y aurait incertitude sur celui des deux points qui doit terminer l'arc 8. Quant au multiplicateur n~ qui affecte cos. 6 et sin. 6, il doit toujours être pris positivement comme représentant le nwdu.'c d'une, quantité imaginaire. En effet, dans la formule r (cos.ç-f- √ — i sin.ç) qui représente une quantité imaginaire quelconque , le module r doit toujours être suppose positif, puisqu'on est maître de changer à volonté le signe dé cette quantité, en mettant ir-f- ç à la place de ç. H. 3a Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 17.77% accurate

a5o THÉORIE DES NOMBRES. (558) Nous observerons d'abord qu'on a en général Car ayant fait ci-dessus « $=p' + 2/;"/\rangle$ » $^*-2/*'/'$, puis ayant représenté cette même quantité réduite en termes linéaires, par la formule $<r = <t// + \epsilon p + yp'' + \epsilon p''' + tp''$, si l'on considère les quatre autres coefficients h, c, d, c déduits du coefficient», en avançant successivement d'un rang chacune des lettres p, p', p'', p''' , $/'$, et mettant p à la place de $/'$, la somme des cinq valeurs de a ainsi formées aura deux expressions; la première sera, $. fa = \langle t// + 2/p''p''' + afp'p''$; mais $fp' = n - m$, $fp''p''' - fpp = -m$, $fp'p'' = /pp'' = -ni$; donc $fa = n - fim = i$. La seconde expression sera $^? fa = (ot - l - \hat{e} + y - | - 5 + t)fp$, et puisque $fp = -1$, la comparaison des deux valeurs de fa donne A , ou $st + \epsilon - l - y - + - \mathcal{L} + \langle = -1$. Maintenant si on élève au carré les deux équations qui donnent les valeurs de n » $\cos. \hat{O}$ et $n \cdot \sin. O$, on trouvera en les ajoutant $II - at' + 2$ et $(y - 4 - \$) \cos. jt - + - 2 <x(\rangle + 6) \cos. 2|i + 6' + y' + + \langle' - 4 - 2y\$ \cos. 2 + 2\hat{e} \langle \cos. pt - f - 2(ye + \epsilon \$) \cos. p + 2 (6 y - I - \$ e) \cos. 2|t$; ou si l'on fait $p = a' + 6 > + y' + * \langle + e' = /V Q = \langle y + e^* + ye + + e\hat{e} = /ay R = \langle e + \hat{e} y - f - y^4 + * \langle + ea = / \langle 6$, Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 25.75% accurate

CINQUIÈME PARTIE. r»i on aura $n = P + aQ \cos. \frac{1}{2} 4 - aR \cos. \frac{1}{2} 4$
Mettant $2p$ à la place de p , on aura le résultat que donneraient
semblablement les deux équations qui déterminent l'angle $8'$, savoir : • la' «
 $= P + aQ \cos. \frac{1}{2} 4 - aR \cos. \frac{1}{2} 4$. Comparant ces deux équations, il en résulte
d'abord ensuite $n = P + Q (2 \cos. a y. + a \cos. fi) = P - Q$. Mais $P + aQ +$
 aR est visiblement le carré de la somme... $*+64-y + i+ \epsilon$, et puisque cette
somme $= -1$, on aura $P + 4 Q = -1$ donc $n = 1 - 5Q$, et $Q = -m /$ d'où
l'on voit que les coefficients «, 6, y, i, é, satisfont à ces trois équations $1 +$
 $4/» = ra' + e' 4 - y^* + + - OT = «6-+-6y-Hy\hat{i}+Je-|- e$ et $= */ * \epsilon - /W = «y +$
 $6\$ + ye-t-iot-t- e6 = /ay$, dont une est la suite de l'équation $- i = \hat{i} + « + T + i$
 $+ ,$. I~i première fait voir en général que la plus grande des quantités «, 6, y,
 $\hat{i}$, ϵ , sans égard à son signe, doit être plus petite que $1/(1 + ^m)$, et plus
grande que $\sqrt{5}$ (55q) Puisque nous n'avons que trois équations pour
déterminer les cinq quantités a, 6, y, l, e, on voit que la question de les
déduire a priori du seul nombre premier $n = 5m + 1$; est fort indéterminée.
Nous avons trouvé ci-dessus les formules $pp = Ap + \backslash p' + Cp'' + Dp''' + Ep''$
 $pp'' = Mp + Cp' + C>'' + Dp'' + Dp''$, où il y a six coefficients A, b\ A, C, C,
D, entre lesquels on a les 3a. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 18.45% accurate

52 THÉORIE DBS NOMBRES. deux équations simples : $A + \sqrt{m} = 2C - D$ $A' + C'^m - C - sI$. et deux autres plus composées, savoir : $A'C' + AB = (A + B - I)' + C' - CD + []$, $-C - D A' (A - B) = C' - "C(Ah - *B - D - 4 - i) - 4 - A * 4 - B \gg D - iD^*$; d'où l'on voit qu'il restait à disposer de deux indéterminées sur six, comme nous venons de trouver qu'il reste à disposer de deux indéterminées sur les cinq «, €, y, «. On accordera facilement ces résultats en mettant la valeur de a qui est $a^{**} - f - ap^{pm} + a p p^{**}$ sous la forme $Knéarre a.p + \epsilon p + yp^{**} + \ll/?$, ce qui donnera $\ll = i - am + >(C - + - D) \hat{=} aC - B - D y = aA - C - C * = aB - A - C e = a A' - A - D$. Car en substituant ces valeurs dans l'équation $\ll' + y^* + 1'' + \ll = 4m - 4 - \ddot{i}$, on aura pour résultat l'équation de condition : $AB + A'C = m' - (4m + i)(C + D) + 5C + 7CD + D'$, qui peut se mettre sous la forme suivante où Ton a fait $\hat{u} = C + D$, $* = C - D$, $t = A - B$., $\ll = A' - C$, $o = 4m' - 4a (5m - 4 - a) - f - a5a^* - 4 - 56^* + af^* - \blacklozenge - au'$. Une seconde équation de condition se déduira de l'équation . . . o . = /«." — /«y, qu'on peut écrire ainsi : Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 26.34% accurate

CINQUIÈME PARTIE. $a^2 > 3$ Or on trouve aisément que ces deux équations de condition s'accordent avec les deux que nous avons rapportées dans l'art. précédent, lesquelles ont été trouvées ci-dessus par une voie très-différente; et il ne paraît pas qu'il en existe une troisième propre à diminuer l'indétermination qui reste sur les coefficients A, B, A', C, C, O . Au reste cette indétermination est dans la nature des choses, puisque les coefficients dont il s'agit dépendent du choix « pion - » eut faire entre les différentes racines primitives qui servent à les déterminer; «sais d'un autre côté il faut observer qu'aucun de ces coefficients ne peut être négatif, et on peut conclure des résultats déjà trouvés, que l'indétermination qui subsiste encore à leur égard, se réduit à ce que $A - B$ soit échangé avec $C - A'$ en même temps que C avec D . C'est aussi ce que confirment les quatre équations données, art. 563, pour déterminer ϕ et θ' . Car comme ces angles doivent rester les mêmes, quelque valeur qu'on ait prise pour la racine primitive, et qu'ils peuvent seulement être échangés entre eux ;
 ^changement de la racine primitive ne pourra avoir d'autre effet sur les quantités ϕ, y, s que de remplacer y et $\hat{i}$ par ϕ et e , ainsi que $\hat{x}$ et t par l et y ; dans tous les cas « restera le même. (560) Si nous faisons maintenant l'application des formules précédentes au cas de $n = \hat{x}i$, qui donne $m = 8$, nous tirerons de l'art. 568 les valeurs $A = 3, B = o, C = a, D = i, A - 2, C - u$, d'où résultera « — — $a, \phi = 3, y = a, 4 = -4, e = o$. On connaîtra ensuite les angles ϕ et θ' par les équations suivantes où l'on a $\phi = c^{\wedge}, n \sim \cos. \phi = -a - a \cos. n - 3 \cos. 4\phi \quad n \sim \sin. \theta' = \pm 6 \sin. \theta - 3 \sin. 4\theta - 3 \sin. 8\theta$ — $S \sin. a^{\wedge} / T \cos. 8' = -a - a \cos. a (i + 3 \cos. (* n \sim \sin. 8' = 6 \sin. \theta - 3 \sin. 4\theta - 3 \sin. 8\theta$, Soit $k = i$, on aura comme dans l'art. 557 » Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 16.31% accurate

a54 THÉORIE DES NOMBRES. — $1 + \frac{1}{5} - i - \sqrt[5]{1} \lll ' ' \ggg$
 COS. u. = 2 » COS. 2 11 = " 4 4 Substituant ces valeurs dans celles de cos. O
 et cos. 0f, ou aura cos. $\sqrt[5]{-5/5}$, cos. $6' = \sqrt[5]{9 + 5^5} \text{ al}/4i \text{ 1 21/41 '}$ ou plus
 simplement pour le calcul trigonométrique, sin. $\hat{o} = |(\sqrt[5]{\cos. 72^*})$, sin. $6 = 1/$
 cos. 36°), ce qui donne, eu égard à la valeur négative de cos. 6, 0
 $= r4i^\circ. r > 9'. a6". 2i|3o \hat{o}' = 85 . G.f > 9 . 81875 26 4 - \hat{o}' = 3G9 . 5 . 5a . 24735 w =$
 $7 3^* . 4g'. 10". 44947$ D'après ces valeurs de 6, 6', et w, les cinq valeurs de la
 racine p, tant exactes qu'approchées, seront ainsi exprimées : $p = -t -$
 $K(40Mco) - \ll + co \ll (att - 6) = 3.06a539o84o$ $p_z = -i + |(4i)^\wedge [co] . (w +$
 $(i) - + - \cos. (aw + a(i - \bullet)) = -4 - 5aoo6 11770 p - 1 4. i (4 1) \ddot{i} [\cos. (u + \hat{i}|i) +$
 $\cos. (a w 4 - 4 (1 - 6j) = -1 . 19586 684an 1 - ^ + t(4 \ll)' [\cos. (\gg + 3 (i) +$
 $\cos. (2 w - | - 6(i - 6)) = 1.21628 7.5o5o p - - ^4 - i(4i)^\wedge [\cos. (\ll 4 - 4!A) + \text{tos.}$
 $(2o) + 8(i - 6)"] = 0.446io 14295$ Quant à l'ordre qui règne parmi ces cinq
 racines, il est l'inverse de celui que donnent les formules de l'art. 537. On
 aura ainsi, en taisant $o = 3.06a53 9o84j$ les mêmes valeurs de p, $p' \setminus p''$, p''' ,
 qui ont été trouvées ci-dessus, sauf les petites erreurs qui peuvent être
 attribuées aux tables trigonométriques à dix décimales. Au moyen de ces
 valeurs de p, p', etc., on connaîtra comme au n° 542 l'une des quantités
 $\cos.^\wedge^\wedge os. etc.$ qui servent, soit à résoudre complètement l'équation du $4o^{*''}$
 degré $X = o$, soit à diDigitized by Google

The text on this page is estimated to be only 26.40% accurate

CINQUIÈME PARTIE. a5', viser la circonférence en 4* parties égales; et puisque les quantités/? dont on a donné les valeurs approchées, peuvent s'exprimer exactement par des radicaux cinquièmes appliqués à des quantités de la forme $M + N \sqrt[5]{-i}$, il est clair qu'on pourra aussi exprimer par ces radicaux, concurremment avec des radicaux du second degré, toutes les racines de l'équation $x^m - i = 0$. (56i) Si on appliquait la même méthode de réduction à l'équation auxiliaire $ps + p^2 - Ap - 1 - 'dp' + 3p + i = 0$, qui se rapporte adéquation $1 = 0$, on parviendrait aux mêmes résultats qui se trouvent dans les Mémoires de l'Académie des Sciences, an. 1771, pag. 4 16. Il paraît donc que c'est à Vandermonde qu'est due la première idée de cette sorte d'analyse qui permet d'exprimer d'une manière explicite toutes les racines d'une équation du 54- degré, dont dépend l'équation $x^m - 1 = 0$. On doit même ajouter que cet auteur a proposé sa méthode comme étant applicable à la résolution de toute équation à deux termes ; mais il ne lui a pas donné les développem'ents nécessaires pour justifier son assertion.

- . De l'équation au,ciiaire du septième degré qui a pour racines les périodes de m termes, en supposant $n = 7m + 1$. < (5fia) Nous représenterons par $p, p^2, p^3, p^4, p^5, p^6$, les ratines de l'équation à résoudre qui sera toujours de la forme $p^7 + p^6 - Vp^5 - \dots - a = 0$. k Cela posé désignant par R une des racines imaginaires de l'équation $R^7 - 1 = 0$, e'esthà-d ire, faisant $>. i .. R = \cos. \frac{1}{7} - \sqrt{-1} \sin. \frac{1}{7}$, 7 7 M étant l'un des nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, nous supposerons

Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 13.84% accurate

-jrrf THÉORÎH DES NOMBRES. $rT = p + pK + pR^* + \text{>}''' RJ + \text{>} \sim R^* + y^{\wedge} R1 + pr R^*$, P«m» élevai** cette quantité au carré et, faisant $T^* = a + b R' 4 - c R4 + rfRa + e R' + R'' 4 - gR''$, il est aisé de voir qu'on aura $a = p^* + a \text{>}' \text{>}^* - + \blacksquare a/T/?' + zp''' pn b = J)1' + zp'p \blacksquare + \blacksquare ip'' p'' + aP''P^* C = p''' \blacksquare + - V - P^{\wedge} p^* - t - 2 \gg \text{>}'' \text{>} Zp'p^* d = s = p''' + *p''p'' + Hprp' - \text{>} Xpnp \text{exBp1}^* - \text{>} zpwp m H - *p'kp'' + \pm pf \} f = zp'' - t - 9.p''p'' \pm *pji'' - 4g^{\wedge} p'' \text{>} + appw - t - 2.p' p'' - f - vtp''p'''$. Il faut ensuite réduire ces coefficients à la forme linéaire, en sorte qu'on ait $(i^*2^*p + \epsilon p' + y \text{>}' - * - *p''' - f - \bullet \text{>}'' - 4^* + n \text{>}''$, et on voit que l'expression de a fera connaître celle des coefficients suivants b, c, d, etc. ; car pour passer d'un terme au suivant, il suffit d'avancer d'un rang toutes les lettres p, p etc., les coefficients « ϵ, y , etc. restant les mêmes. On aura donc l'expression suivante de T : $T' = ap - t - y + S// + \wedge' - \blacklozenge r R^* (\ll yw - + * \ll /' y/?''' + \blacksquare ip'' \blacksquare + \text{>} - K/j'' + R'(a/i'' + \epsilon //'' \bullet + ip'' + Sp^* + tp^* + Xtp + , //) - t - R6 (*//'' + y/?^* - f + tp + Kp' + *p'') + R^* (\ll y/' \blacklozenge + y/\gg^* - *^* \text{>} + Kp'' + * \text{>}''' \text{>} + R \text{>} \text{>}' + \hat{e} // '4 - y \text{>} - \text{>}^* f + h - R't - yp'' + e/? + y/ + * \text{>}'' + \ll \text{>}''' + tp'' + v^*)$ (5G3) Cette même quantité ordonnée par rapport aux racines $\text{>} . p', p''$: etc., sera Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 20.69% accurate

CINQUIÈME PARTIE. $a^7 T = (a + 7iR^4 - CR^4 - eR', H \rightarrow R, + TR'', + eR'')^4 - (e + aR'H - T)R^4 + CR^6 + eR, -4 \cdot R, ^\circ + yR'')^4 - />' (Y^4 - \ll R' 4 - aR^4 4 - \gg R^6 4 - \zeta R' 4 - e R'' 4 - \cdot R'')^4 - /''' (\$4 - yR^{14} - 6R^{44} - \langle xR^*4 - viR^*4 - \zeta R'' + e R'') + p'' (e^{\wedge} R^{\wedge} R^{\wedge} eR^{\wedge} i - aR^{\wedge} R^{\wedge} CR'')^4 - /?T (? : ^{-} eR, - ^{-} A^4 - ^{-} YR^6 ^{-} \hat{e}R, + \ll R, 0 - ^{-} iJR',)^4 - p''^1 (d + \zeta R' 4 - e R^4 4 - \cdot R^6 4 - y R^* 4 - 6 R, c 4 - a R'').$ Maintenant si on appelle A le coefficient de p , il est facile de voir que AR', AR⁴, AR⁶, etc., seront les coefficients de p', p'' p''' e\ v., en sorte qu'on aura T = A(p + p' R' + p' R* 4 - />' R, + />' R* 4 - p' R'*4 - />' R''), et le second membre se réduit à AT' en désignant par T' ce que devient T lorsqu'on met R* à la place de R. Nous désignerons semblablement par T'' ce que devient T lorsqu'on met T' à la place de R , et continuant ainsi nous formerons les six polynômes : $T = p + p'R + j/R^* + /TR \gg + p''R^* + />TRS^4 - />T^1Rs^T = p + p'R^* + p'R^* + p'''Rt + />'R \gg + p^*R'' + p''R'' T'' = />4 - /R, 4 - />'R^* 4 - /TR \gg ^{-} iD''R'' - 4 - />'R'i - ^{-} /?'R^{\bullet}, T'' = ^{-} + /7, R^* - ^{-} />'R, 4 - />'R'' 4 - /i'R^6 4 - /?'R^6 4 - /?'R'' + p'' RM Trt = ^{-} + yRt 4 - /7''R'' 4 - />'R, \&H - />'R^* + /?'TR^* 1 + /7'', R\hat{i}'' T'' = ^{-} + ^{-} R^6 + /R'' + /?'R'', -i - ip''R, 44 - />'R^3 o - ^{-} ip''RM.$ I^e septième qu'on formerait par analogie sous le nom de T'' se réduirait à p 4- p' + p'' + p''' + p'' + p' 4- p'' > quantité égale à — i. U est nécessaire aussi de rapporter le tableau des valeurs de A , comme il suit : $A = \ll + t, R' - KR^4 + \ll R^6 4 - SR^* 4 - TR''^* 4 - 6R'' A' = \ll - i - tiR^4 - ^{-} \zeta R^* 4 - tR'' 4 - \cdot Ru! 4 - yR'' 4 - 6RM A'' = \ll 4 - T) R^6 KR'' 4 - eR' 4 - SR'^* + 7R, ^* 4 - 6R^* A''' = et 4 - tiR^* 4 - \zeta R' 64 - eR' 44 - \&RU 4 - yR'^* 4 - \ll R^4^* A'' = \ll + ,, R'' 4 - i; R, 04 - iR^3 4 - \cdot R^4, 4 - rRii 4 - SR^4 A'' = \ll 4 - \gg R'' 4 - CR^* 44 - eRJ^* 4 - \hat{I}R^4 4 - TR^* 4 - 6R^*.$ II 33 Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 27.61% accurate

258 THÉORIE DES NOMBRES. (56 i) Cela posé l'équation $T' = AT'$, dans laquelle on mettra successivement R^* , R_5 , R^* , R_s , R_6 au lieu de R , fournira les six équations suivantes : $T \wedge AT$, $T'' = A'T'''$, $T'''' = A'T \setminus T''' = A''T$, $T'' > A''T''$, $T'1 = AT T''$. Si on multiplie ensuite les valeurs de T et T^* , on aura $TT = \wedge' + R'fpp'' + WppM + typP'' + Wfppt + typP''$ Maison a en général $fp' = n - m$, $fpp' = fpp'' = fpp''' = fpp'' = Jpp'$ $= fpp'' = w$. Donc $TT' = i - m(i - t - R - + - R' + R_3 - + - R_4 + R_s + R_6) = j$. Une semblable analyse donnera $T'T'' = n$ et $T''T''' = n$; d'ailleurs ces deux équations se déduisent aisément de la première $TT' = \ll$, mise sous la forme $*(R)^*(g) = \ll$, il sortit pour cela de mettre dans celle-ci R^* et R_3 à la place de R . Enfin on démontrera comme dans l'art 554 que les quantités T , T' , T'' , etc. sont toutes de la forme $\ll T(\cos.\zeta + 1/ - i \sin.^)$, de sorte que le module réel de ces quantités imaginaires est constamment $n \sim$ Il en est de même des quantités A , A' , etc. , ce qu'on peut démontrer directement ; mais ces propriétés peuvent être déduites de celles des polynômes T . En effet , si on multiplie entre elles les deux équations $T' = AT \setminus T. = *A''P \setminus$ on aura $(TT')' = A AT'T''$, ou $n' = flAA'$; donc $AA' = h$; on trouvera de même $A'A'' = n$ et $A''A''' = \ll$. Enfin de ce qu'on peut supposer $T = nT(\cos.<p + 1/ - i \sin.\zeta)$, 2. T' $T' - n > (\cos.\zeta' + \vee - i \sin.\zeta')$, il s'ensuit qu'on a ou $A = n \gg [\cos. (a <p - \zeta') + 1/ - i \sin.(a\zeta - <p)]$, et ainsi le module réel de A est encore n^7 , ce qui a également lieu pour les autres quantités analogues A' , A'' , etc. (565) Voyons maintenant comment on peut exprimer la valeur de T en fonction des quantités A . Nous aurons d'abord $PssA'T'ss A' AT'''$; de là $T' = A_4 A'' T''' = A_4 Af^* A''T$, ou $T_7 = A_4 A'1 A'''$, Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 21.29% accurate

CINQUIÈME PARTIE. *5<) ainsi le polynôme T peut s'exprimer par les quantités A qui sont fonctions de R seule. Si on fait $\theta = p$, A^* étant l'un des nombres $i, a, 3, 4, 5, 6$ à volonté, on aura $R = \cos. ji - \frac{1}{\sin. \{ < . R^{\cos. ajji} + \frac{1}{\sin. ap} RJ = \cos. 3ji - \frac{1}{\sin. 3ji} R^4 = \cos. 3ft - \frac{1}{\sin. 3ji} A R^5 = \cos. 2(A - \frac{1}{\sin. a p} R^6 = \cos. p - \frac{1}{\sin. jt}$. Et comme l'équation $R^7 - i = -o$ dégagée du facteur $R - i$, n'est autre chose que $o = i - R + R' + R'' + R''' - t R^4$, l'angle p . satisfera à l'équation $0 = I - f - a \cos. jt + 2 \cos. 2 | A - f - a \cos. 3 \pi$, ou en faisant $2 \cos. | t = r, 0 = X_i - X^* 2X - i$, et les trois racines de cette équation seront $2 \cos. p, 2 \cos. 2p, 2 \cos. 3p$, dont une positive et deux négatives. Si l'on fait par exemple $k = i$, on aura par approximation $6388q * * n r \% 2 \cos. | x = 1.2469796037$
 $2 \cos. 2 \{ * = \frac{1}{\sin. \{ < . 0.44504 18678 2 \cos. 3ji = -1 \}$
 77362 Substituant les valeurs de R et de ses puissances dans la formule 1
 $A = \ll 4 - m R^* + \frac{1}{\sin. 4} R^4 + \text{etc.} = \frac{1}{i7} (\cos. \hat{o} + \frac{1}{\sin. \hat{o}} t \sin. \hat{o})$, on aura pour déterminer l'angle 6 les équations 33. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 20.56% accurate

a<k> THÉORIE DES NOMBRES. n' COS. 0 — a + (» 4- €)
 COS. a p 4- (Ç 4- y) COS. 3 (i 4- (t + 9) COS. jt rt'sin.e = (t; — 6)sin. 2(iH-
 (y — Ç)sin. 3fi4-(i — e)sin. |i. ■ Semblablement si l'on fait A' = /i»(cos. fi'
 4-1/ — isin.fi'), A" = «' (cos. fi" 4- √ — i sin. ô"), A"'= n • (cos. fi" — 1/ —
 I sin. 6 ") ; on aura pour déterminer fi' et ô" des équations qui se déduisent
 des précédentes en mettant successivement 2p. et 3p. à la place de a, ce qui
 donnera /»» cos.fi' =:« + (« + 6)eo».3p4-(Ç4-y)c06.p -+-(« 4 *)cos. 2p n1
 'sin.fi' = — (ti — ç)sin.3p — (y — Os»n«(* — e) sin. a p. «•cos.fi"=« + (d
 + S)coa.|t 4-(Ç4-y)cos.ap4-(i 4-*)cos.3p «*sin.fi"= — (ti — 6)sin.p 4-(y —
 £)sin.ap4-(\$ — e)sin. 3p.. Ces trois angles étant ainsi déterminés de 0° à
 360°, la substitution des valeurs de A dans l'équation T7 = A4 A" A",
 donnera T' = /« '[cos.(40 4- afi'— fi")-f-l/— isin.(4fi-l-afi'~fi")]. Ainsi en
 faisant u— , on aura T = n' (cos. w 4- √ — i sin. u) , et l'on remarquera que
 dans cette valeur qui en renferme implicitement sept, on peut augmenter ta
 graduellement de — , — , — , 7 7 7 81c iok iaTt (566) Il faut maintenant
 d'après la valeur de T déterminer, sans aucune ambiguïté , les valeurs de T",
 T", T", T", T\ Pour cela nous avons les équations T = T"'=^ , T"=^, T'=£,
 T~ , d'où l'on tire Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 13.68% accurate

CINQUIÈME PARTIE. a6i T = « 7 [cos. (a » — 6) -l- 1/ — î sin. (a« — 6)] T'''= /i»[cos.(4« — ae — <0+l/ — isin.(4« — aô — 6')] T'' = « - [cos. (4 « - a 6 — 0') — l/ — î sin . (4 « — a 6 — 8')] T, = »'[cos.(2w--0) — i sin.(2« — 0)] T'' = /i»[cosw — |V — i sin.c*]. Mais en ajoutant toutes les valeurs de 'T > V jusqu'à T'' ou — i , on a — i + T + V + T' + T'' + T''' = jp; donc p = — J + 2yl[cos.w + cos.(aw — ô) + cos. (4 w — »6 — 8')] Cette formule servira en même temps à trouver les six autres valeurs de/» , il suffira pour cela de mettre successivement pour «*, w+ tl ? u -+- , ... 4» H • 7 7 Dans les applications aux valeurs particulières de n, il faudra déterminer par les voies ordinaires tes coefficients «,ê,y. . .yi, ce qui se fait au moyen d'une valeur de la racine primitive g qu'on choisira à volonté. (5f>7) Nous remarquerons encore que les équations trouvées fournissent trois équations de condition entre les sept coefficients a, 6, y. . .î), outre l'équation connue — i=«-fê + y + J + i + i; + ,. En effet, si on élève au car ré les valeurs trouvées pour »• cos.O, «vsin.e, on trouvera , en ajoutant ces deux carrés^ l'équation de condition : n = i, + 2 M cos. ji -4- aN cos.ap. -t- aPcos.3u, dans laquelle L=r«" -+- €■ + y" + \$• + »* -h C + *'«:/«' M = «\$-f- ffe + y>;+ + ea + Cê-l- Tiy=/*«A N = «ee + gy+yi + î« H-eÇ-l-^ + Ti«= /«e Pas «y + 6* + y , + * Ç + «, + Ç« + „6==/«y, Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 21.92% accurate

uii-2 THÉORIE DES NOMBRES. et il faut remarquer que $L - a$ $M + aN - aP$ est le carré de $a + 6y + \sqrt{e - t - \zeta + t}$, quantité égale à i , et qu'ainsi on a $i = L + aM + aN + 2P$. On peut ensuite dans notre équation changer p en $a p$, ce qui donnera le résultat qu'on déduirait des valeurs de $\cos. 6'$ et $t // \sin. 6'$, de même qu'on peut changer p en $3 p$, ce qui donnera le résultat dû à l'élimination de δ . Donc on aura les deux autres équations $n = L - aM \cos. ap - aN \cos. 3p + aP \cos. p$ $n = h + aM \cos. 3p - aN \cos. u + 2 P \cos. a p$. Maintenant si on met à la place de $a \cos. 3 p$ sa valeur $i - a \cos. p - a \cos. a p$, on aura « $L - P + a (M - P) \cos. p + a (N - P) \cos. a p$. Et parce que les quantités $\cos. pt.$, $\cos. a p$, sont des irrationnelles non-réductibles l'une de l'autre, il faut pour que cette équation subsiste qu'on ait $M = P$, $N = P$; ainsi on aura $n = L - M$, d'ailleurs nous avons trouvé $i = L + aM + aN - aP$, donc $i = L + 6M$, ou $h - i = 6 M$, ce qui donne $n = i - 7M$; donc $M = N = P = m$, ft $L = i + 6 m$. On aura donc les quatre équations de condition : $i + f = a' + e' + y$, $i' + e' + !$, $v = A' - W = ocê + \text{fy}4 - y\$ - f - \text{f} e e ^ + \zeta t, \sim - r, x = J < x \text{€} - m \blacksquare = *f + + ft - \text{h tr, - H } \zeta a - 4 - t j 6 = y \ll y - W = + + y \zeta 4 - *ii - + - \ll + \zeta \hat{e} - Hii) y = / a \$$, au moyen desquelles l'équation $a + S + y + i - k e - f - \zeta - t - i i = i$ se trouve exprimée et ne fournit pas une nouvelle équation. On voit aussi par la première équation que la plus grande des quantités $a, \text{€}, y, . . x >$ est $< / (i + 6m)$ et $(J - \text{^}568)$
Ayant développé suffisamment la nouvelle méthode de réDigitiz

CINQUIÈME PARTIE. 26S duction pour les cas généraux de $n = 5m - 4 - 1$ et $n = -jm + 1$, il nous paraît inutile de pousser plus loin ces applications, et on voit que, quel que soit le nombre premier k , compris dans la valeur $n = km + i$, on parviendra toujours à résoudre aussi simplement qu'il est possible, l'équation auxiliaire du degré k qui a pour racines les périodes de m termes dans lesquelles se partage la période (« — 1, 1) comprenant toutes les racines de l'équation proposée $X = 0$. L'équation auxiliaire du 3^e degré qui a lieu lorsque « = $3m + r$, et dont nous avons donné le type général (art. 5i4), étant facile à traiter par les méthodes ordinaires, nous n'avons pas cru devoir nous en occuper jusqu'à présent. Cependant, pour mettre plus d'uniformité dans cette théorie, il ne sera pas inutile d'appliquer aussi à cette équation notre méthode générale de réduction. (569) L'équation à résoudre pour le cas de $n = 3m - 1$, est $p' + P' - mp + \sqrt{rC - nC} = 0$. Il faut pour déterminer C mettre 4 h sous la forme $\sqrt[n]{a' + \sqrt[n]{yb'}}$, comme cela est toujours possible, et on aura $C = \sqrt[n]{a' + \sqrt[n]{yb'}}$, le signe ambigu étant déterminé de manière que soit un entier. Cela posé, désignant par $\sqrt[n]{p}$ les racines de l'équation précédente si on fait suivant la méthode générale, $T = p + p'K + p''R$ et $T = p + p'K' + p''R$ R étant une racine imaginaire de l'équation $R^* - 1 = 0$, on supposera $T = \sqrt[n]{a' + \sqrt[n]{yb'}}$ et on aura $a' = p' + zp'p''$, $b' = p' + *p''p$, $c = p'h + zpp$. Il faudra à l'ordinaire réduire le coefficient « à la forme linéaire, Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 16.96% accurate

264 THÉORIE DES NOMBRES, et de cette valeur de a , on déduira celles des deux autres coefficient» b et c , en avançant successivement d'un rang les quantités p et regardant p'' comme égal à p . Si on ordonne ensuite la valeur de T_1 par rapport kp , et qu'on fasse $A = a + YR > + eR^* A' = \ll + YR^4 + eR'$, on aura $T' = AT'$ et $T' = A'T$. Enfin on trouvera par les moyens déjà indiqués $TT' = /, < e$ qui prouve qu'on peut faire à-la-foi* $T = nv(\cos.\ll + 1/ - i \sin.w) T = \gg' (\cos.w - 1/ - i \sin.w)$. Maintenant des deux équations $T' = AT \setminus T'3 - A'T$, on tire $(TTV = A A'T T$, et par conséquent $AA' = TT' = A1, < \blacksquare^*$ qui permet de supposer à-la-fois $A - /iT(\cos.\hat{o} + 1/ - i \sin.e) \blacksquare A' = w(\cos.\hat{o} - V - i \sin.9)$. Mais des deux équations $T' = AT'$, $T'^* = A'T$, on tire entre $T^4 = A - T'' = rA' A T$, ou Ainsi des que A sera connu on aura immédiatement la valeur de T . Or si on appelle p . l'angle k étant i ou a , on aura $R = \cos. p + V - i \sin. j^* \setminus \setminus ' = ws. a - V - !$
bin.p.. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 22.61% accurate

CINQUIÈME PARTIE. a65 L'équation $o=i+R+R''$ donnera donc $o=i \pm \arccos p$. ou. $\cos. \theta = -7$, et on aura également $\cos. \theta = -7$. Substituant les valeurs de R et de R' dans l'équation $A = \langle -yR' + \epsilon R \rangle - n$ ($\cos. 8 + V - 1 \sin. 6$), on aura pour déterminer θ les deux équations : ■ $W \cos. 8 = a + (y - \epsilon) \cos. (\theta = a - Hy + 6) - i \sin. \theta = (6 - y) \sin. \theta$; et parce qu'on a toujours $a + 6 - \theta = -1$, la première équation donne $\theta = \arccos(3a)$. Mais au moyen des valeurs linéaires de θ et de p , on trouve en général $a = 3C - m - i$; donc $\cos. 6 = j(9C - \theta - i) = \pm a$, ou $\cos. 8 = \pm V/2$, Dans cette valeur de $\cos. 6$ le signe $\pm$ n'est pas arbitraire ; il est déterminé par la condition que $n - 1 \pm a$ soit divisible par 9; ainsi il n'y aura à choisir qu'entre les deux valeurs 9 et -0 , ou 1 entre 8 et $277 - 8$; mais l'autre équation $i \sin. \theta = (6 - y) \sin. \theta$ qui détermine le signe de $\sin. \theta$, fera connaître celle des deux valeurs qui doit être admise. (5/o) L'angle θ étant ainsi déterminé par le concours des valeurs θ de $\cos. 8$ et $\sin. 6$, l'équation $T' = i A = \langle \cos. 8 - h V - i \sin. 8 \rangle$, combinée avec l'équation $TT=n$, donnera les deux valeurs θ , $T = \arccos(\cos. 8 + 1 - i \sin. 8)$ $T' = i \arccos(\cos. 8 - 1 - i \sin. 8)$. Mais en ajoutant les trois équations $i = p - h p' + p''$ $T = p + p'R + j > R^*$ $T' = p + p'H + p''R^*$, on a $Zp = -1 + T + T'$, donc n II. 34 Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 18.41% accurate

THÉORIE DES NOMBRES. i an i et parce qu'à la place de h on peut mettre successivement $6 + 2$ et $\hat{o} + 4^*i$ trois racines de l'équation à résoudre seront ainsi exprimées ■ i an' 6 $P = \text{---} S + T^{\wedge} \hat{a} i \text{ an}^* 0 + aie^{\wedge} = -3 + \text{---} \cos. -31 \text{ an}'' 6-4-4^* /, == \sim 3H--r0OS-T-' (371)$ Nous avons dit que la même solution se trouverait plus promptement par la méthode ordinaire. En effet , si dans l'équation proposée on fait $p = \text{---} 3 \text{---} > 0,1 a,,ra l'1$ transformée d'où l'on déduit par la formule de Cardan , $x = V > [\pm^{\wedge} b l / -b] + V > [\pm^{\wedge} b \gg / -b]$. Soit donc $\pm = / \ddot{i} co \ll . e, ^{\wedge} = / \ddot{i} T \sin . O$, on aura ' a a jr = $V / [\ll \bullet (\cos. 9 -4- IV \text{---} 1 \sin. 6)] -4- 1 / [\hat{i} T (\cos. e \text{---} 1 / \text{---} 1 \sin. 6)]$, ou $x = in^* \cos. y 0$, ce qui s'accorde avec le résultat précédent. Soit par exemple $n = ggi , 1$ équation à résoudre sera (art. 5 1 5), $p^* + p' \text{---} 33o/? \text{---} *349 = o$; alors on aura , $\backslash n = 6i' -4- ay.3^*$, ce qui donne $a = 6i$, $b = 3i$, et comme a doit être pris avec le signe 4- pour que « -4- 1 -4- a soit divisible par 9, il faudra faire $\cos. \hat{o} \text{---} iV/^{\wedge} ty$ et le^* racines de l'équation dont il s'agit seront : Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 29.21% accurate

CINQUIÈME PARTIE. t anT '» P = — â + T008ⁱ i a«J ft-J-air „ i
 an» 8 + 4* ~3 + — COS — Cette équation aura en outre la propriété
 qu'une racine p étant donnée, les deux autres p et p" peuvent s'exprimer
 rationnellement par les formules — -i,7— i*p ^—117—^ H P + 9 7 y + »
 (572) Nous avons vu qu'après avoir résolu l'équation en p du degré ky on a
 à résoudre successivement les k équations en q du degré k' , puis les
 équations en /• du degré k", et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on parvienne aux
 équations qui embrassent les ~~ périodes de deux termes. Dans ces
 auxiliaires successives des degrés k',k",etc, les coefficients s'exprimeront
 toujours d'une manière linéaire par les racines de l'équation précédente, et
 on pourra appliquera chacune d'entre elles la méthode de réduction que
 nous avons exposée pour la résolution de l'équation en p. Mais on voit que
 les formules se compliquent beaucoup, s'il y a plusieurs degrés d'auxiliaires,
 selon le nombre des facteurs de ri — 1 ; elles donneraient lieu aussi à des
 ambiguïtés qui augmenteraient en passant d'une auxiliaire à la suivante, de
 sorte qu'il sera très-difficile de parvenir par cette voie au résultat final qui
 donne la valeur de chaque période de deux termes représentée par x ^ -4- ou
 par la quantité réelle acos.^Heureusement qu'on peut se dispenser de
 résoudre successivement les différentes auxiliaires, et qu'il y a un moyen
 beaucoup plus simple de parvenir directement au résultat désiré. Il consiste
 à cons^érer tout d'un coup l'équation en p du degré qui a 34. Digitized by
 Google

The text on this page is estimated to be only 27.55% accurate

268 THEORIE DES NOMBRES, pour racines les périodes à deux termes représentées par $+r^{\sim\sim\wedge}$ ou par $\text{acos.}^{\wedge\wedge}$. Cette équation dont tous les coefficients sont des nombres entiers connus, se résoudra par la menu* méthode de réduction que nous'avons appliquée aux valeurs $X = 5, 7, 3$, et les formules géuérales qu'on en déduira seront infiniment plus simples que celles qu'on obtiendrait par la résolution des auxiliaires successives. C'est ce que nous allons faire voir dans le paragraphe suivant.

The text on this page is estimated to be only 27.69% accurate

CINQUIÈME PARTIE. § V. Méthode pour parvenir à la
résolution générale de l'équation $X = 0$. (573) Au moyen de la substitution $x + \frac{p}{X}$, l'équation $X = 0$, qui est du degré $n - 1 = ak$, peut être réduite à une
équation du degré k , savoir : (A) $0 = p - \{k-x\}p^H j - \wedge P r^{\wedge} - P \text{ «-été. } k-t \cdot$
 $\cdot -3 A -3.J -4 \cdot -5 \cdot -4. \cdot -5. \cdot -6 \cdot -7 \cdot + P -i \cdot -*)P + -T^{\wedge} r P i.a.3 P + \epsilon t C'$ En effet
désignons par P^* le polynôme $\cdot N A -a. \cdot -3 \cdot -4 \cdot -3. \cdot -4 \cdot -5 A - 6$ qui devra
être borné au nombre de termes ou $-g-$ selon que k est pair ou impair; si
on forme semblablement les polynômes P^*_a , en mettant $k - 1$ et $k - a$
à la place de k , il est facile de voir qu'on aura en général $V_k = p V_{k-i} -$
 $P a_-$ », de sorte que la suite infinie $P, -+ P, z -+ P, z' \dots \blacksquare + P t z^* + \text{etc.}$,
sera une suite récurrente formée par le développement d'une fraction dont le
dénominateur est $1 - pz + z'$; d'ailleurs comme on a $p - x + x'$, ce
dénominateur sera le produit des deux facteurs $(1 - xz)\{t - x'z\}$; d'où il
suit que le terme général P^* peut être ainsi exprimé : $P_t = z e^{i X l} + 6^{*-}$, a et ξ
étant des constantes.

The text on this page is estimated to be only 24.05% accurate

ayo THEORJE DES NOMBRES. Mais si l'on fait successivement
 $k = 0$ et $k = 1$ ce qui donne $P_0 = 1$, et $P_1 = p - x - x^2$ on aura pour
 déterminer a et b , les deux équations $i = \langle -f - 6x - f - x^2 \rangle = a.x + -Gx^2$, $x^1 I$
 d'où résulte $\langle = r, \epsilon - \rangle$; . Donc on a $:r-4 - x \langle - P^* = i - x^1 \blacklozenge$ et enfin
 $P \langle + P_4 - \rangle - X - 4. t - \rangle, c X$. Donc l'équation $X=0$ est représentée
 généralement par une équation en p du degré k , laquelle est $P^* - \langle - P^* \rangle, = 0$.
 (574) Maintenant il faut appliquer à équation (A) où l'on a $k = \wedge \wedge -$, la même
 méthode de réduction dont nous avons donné divers exemples dans le
 paragraphe précédent. Mais cette méthode, déjà sujette à quelques
 modifications lorsque k n'est pas un nombre premier, exige des
 changements assez notables, lorsque k est un nombre pair et surtout lorsque
 ce nombre a plusieurs diviseurs. C'est pourquoi nous allons considérer
 successivement diverses valeurs de n , choisies de manière que les différents
 exemples dont nous donnerons la solution, réunissent à peu près toutes les
 difficultés qui peuvent se présenter dans tout autre cas proposé. Exemple I.
 $\langle = 3i, A = j5$. (575) Alors l'équation en p qu'il s'agit de résoudre sera $0 =$
 $p^* - \langle \langle p^1 - \rangle - \wedge Hp^2 - aao/\wedge - \rangle - 33o/?' - a5y./ > 5 + 84/\wedge - Sp I \setminus 3p^2 - i - 66p^3 \sim$
 $i65p^4 + 2ivp^6 - i36pi + \hat{t}ap^7 - i$. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 21.77% accurate

CINQUIÈME PARTIE. a?i et on sait a priori que toutes se* racines sont réelles et de la forme $\frac{9}{1}C \wedge \text{acos.}^-$. Si Ton prend pour racine primitive de 3i le nombre $\xi = 3$, les différentes racines de notre équation seront ainsi exprimées, suivant l'ordre qui leur est assigné par les valeurs $p = (a, i)\%p' = (iyg \setminus />'' = (a, f') > \text{etc.}$ $p = r^* - + - / - ' p'' = r^* - 4 - r \sim s p l = r^* + r \sim h />' = ^ + r - J /?' = r, s - H r - s // ' = r l l + r - 1 p'' = r \gg + r \sim \gg = r l^* + r \sim^* p''' = r^* + r \sim^* p'' = r^* + r \sim^* p''' = r'' + r - ' p^{*''} = r 7 + r'' l p'' = r'' + r \sim'' p' l h = r^* + r \sim^* p''' = r, a + r \sim$. D'après ces valeurs il faut réduire à la forme linéaire le coefficient $a = p' - j - a p' p'' + a p'' p''' + a p''' p^{*''} + a 4 - a />>' \blacksquare + - a /;'' /; \bullet^* + a p^{\wedge'} p^{TM}$. Or on trouve immédiatement la valeur développée des différents termes qui composent le second membre, savoir : $/>' = \hat{i} + p'' p'' p^{\%} x - p + p^* p' p^{*''} = p'' + p^{*''} p' p^* = p - + - />''' p'' p T n = p'' + p'' p'' p'' = - + - y? l' p''' p''' = p'' + p'' p^{*''} p^{TM} = p + p \setminus$ De là on déduit $a = 2 + b p + a p + \dot{p} p'' + a p' + a />'' + a />^{TM} - 4 - 3 /?^{**} + 4 /^{**} + 4 />, + a />^{TM}$, ou en mettant au lieu de a sa valeur $- a /> - a /?' - a />''$, etc. , $a = : z p - a />'' - a / 7' 4 - ^, 1 - \gg - a />, + a / \gg^* - a /?' - a />'' \setminus$ (576) Soit R une racine imaginaire de l'équation $R'' - l = 0$, prise parmi celles qui ont la propriété de produire par leurs puis Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 20.04% accurate

CINQUIÈME PARTIE. a73 « — A A*«" = A' A''' = A" A" = A'''
A'=A" A"=A* A''' =A" A*". Ces équations contiennent les principaux
éléments de la solution générale que nous allons développer. (577) Il faut
d'abord procéder à la détermination des angles ϕ, ϕ', ϕ'' , etc. qui donnent les
valeurs des quantités A, A', A'', etc., suivant la formule générale $A > y = n^*$
 $(\cos. ex' + y / — \sin. O^{\wedge})$ Pour cela ayant déjà fait $R = \cos. p. + \sqrt{— 1}$ «in. et
 $j i = ^{\wedge} = a4\%$ nous savons que $K > ^{\wedge}$ se déduit de A en mettant $R''1-^*1$ au
lieu de R dans l'expression de A; ainsi on aura en général, d'après l'équation
(1) : $A(\ll) = a\_a r^{TM+>}\_ a R^{\wedge+6} + a R^{\wedge+S} + a R^{\ll TM+}\gg$ formule qui, à cause
de $R, s = 1$, se réduit à la suivante : $AW = z-2R^{TM+*}\_ a R6''+6 + a R8m+8 +$
 $a Ri\ll-+i\gg^{\wedge} j^{\wedge} iam-Hia aft5\gg M-5$ De là on tirera deux équations générales
pour déterminer l'angle $0f'\}$, savoir : $1 n \bullet \cos. b(m) = a — a \cos. (am 4- a)$
 $[t — a \cos.(5 m +- 5) p — a \cos. (6m + (>) ji 4- a \cos.(8/7t-)-8)(i4- a \cos.(io/n-$
 $f- io)]^*$. — $a \cos.(i 1 m+ 1 -+- \cos. (la/n ia)|A \ll * \sin. — a \sin.(am + a)|\& — a$
 $\sin (5m-f-5)jt — a \sin. (6 m -1- 6) p -+- a \sin. (8/n +8) [i-f- a \sin. (iom+ 10)$
 $p. — a \sin.^{\wedge} i im+n)(i \bullet + \blacksquare \sin. (\ddot{a}m + ia)ji.$ Mais puisque $i5fi = ait$, on a en
général $\cos. (i5n i^{\wedge} fi^{\wedge} eos.\&p$ II. 35 Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 16.90% accurate

»71 THÉORIE DES NOMBRES. et $\sin. (i5a \pm 6)fi = \pm \sin. fc \{t$, ce qui réduit ces deux équations à la forme suivante : $n \cdot \cos. 8H = 2 - a \cos. (\hat{m}+2)ji + \cos. (3m + 3)p. - a \cos. (4m 4-4)n - a \cos. (Gm -4- 6)ji 4- a \cos. (7 /> 4- 7)p. \ll \bullet \sin. ft^{\wedge} r - a \sin. (a \gg) + a)(i - \sin. (3m 4- 3)jt 4- a \sin. (4m 4- 4)j^* - 4 \sin. (5m -> -5)^{\wedge}. - 2 \sin. (6m 4- G)f^* - a \sin. (7m + 7)\pi$. De là résultent les formules particulières $n' \cos. 0 = 2 - a \cos. a (i4 - \cos. 3u. - a \cos. 4p - a \cos. 6u. 4- a \cos. 711 n > \sin. 6 = - a \sin. ajt - \sin. 3ji + - a \sin. 4(\gg - 4 \ll n. 5ji - a \sin. 6^{\wedge} - a \sin. 7(i n 7 \cos. 8' = 2 - a \cos. 4, a 4- \cos. 6(t - a \cos. - a \cos. 3|i 4- a \cos. u c n^* \sin. 8' = - a \sin. 4p. - \sin. Gu, - a \sin. 4- 4 \sin. 5(i4- a \sin. 3p 4- a \sin. p \ll \bullet \cos. 8'' = a 4- \cos. Gp - 4 \cos. 3p 1 n r \sin. 6''^{\wedge} = - 4 \sin. 3p - 3 \sin. 6p n > \cos. 8 = 2 - a \cos. ft + a \cos. au - \cos. 6|i - a \cos. 7n \ll \bullet \sin. e''' = a \sin. ii 4- a \sin. aft 4- 801.3^{\wedge} - 48^{\wedge}. 5(4 4- a \sin. 6|i 4- a \sin. 7|i 1 / t 7 \cos. 8, T = 1 - a \cos. r > p = a n 7 \sin. 8'' = 6 \sin. 5u. = 3 1/3 n^* \cos. 8' = 2 4- \cos. 3p - 4 \cos. 6p t n 7 \sin. 8' = 3 \sin. 3p - 4s \gg n - 6p 1 n^* \cos. 6''' = a - a \cos. p - a \cos. 2p. - a \cos. 3p 4- a \cos. 4|^* + \cos. 6p \blacksquare \ll 7 \sin. 8''' = - 2 \sin. p 4- 2 \sin. au. - a \sin. 3(t 4- a \sin. 4p 4- 4^* \gg - 5p 4- \sin. 6p$. Ces valeurs peuvent se simplifier au moyen des propriétés connues de l'angle $p = \hat{=} a 4^* \hat{=}$ en effet par ces propriétés on a Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 17.53% accurate

CINQUIÈME PARTIE. a75 COS.4ft= > 4- COS. 3p — COS. p
cos. 5p = — v cos.6p= — ; — cos.3p , sin.6|i=sin.4ft — sin. p cos. 7 p = —
cos. a (a — cos. 3 p , sin. 7 p = sin. 3 p — sin. 3 p. Il en résulte les valeurs
suivantes, tant exactes qu'approchées : /i'cos.6 = 3 4-2cos.p1 — 4cos-
*>~*co8' 3ft = o. 84 1 55 i4954/5 /i«co&.&' = 7 + 4co8.p4-acos.3p— 3cos.
3p < n • cos. 6" = { — 5 cos. 3 p « 7 cos. 8''' = 3 — a cos. p. 4- 4 cos. a p 4-
5cos. 3 p /1 'cos.0''=a ■ n • cos. 0' = 4 4- 5 cos. 3 p /i*cos.ft'',=7 — 4cos«(i
— a cos. 2p— cos.3p ■ /i7sin.t=ta«n.p — 3iin.3[x -^4s>t»- V ■ /»7sin.O'
=asin.ap — 3 sin. 6 p 4- 4 sin. 5 p n*sin.o'' = — 4 sin. 3 p — 3 sin. 6 p 1 n7
sin. 0'''= 3 sin. 3p 4- 2sin.4p — 4SU1- 5p ■ /i7sin.e'' = 6 sin. 5p _■_
n'ain.0* =3sin.3p — 4s'n.6p = 4.565%ao6oi63 =—0 . o45o8 497 1875 =*
5.3945i 648aoa5 s= 3 = 5.545o8497l8 75 = — a . 801 46 00376 63 sa— 5 .
Ô0379 78778 7 1 = 3.i87o355o93i? == — 5.56758 18330 57 3= 1 .3781 1
07343 8/i = 5. 19615 3433706 = o . 5o303 85397 1 ^ n7 sin. 0''*= 2 sin. 3p
— asin.3 p4»3sin-.6p +4 sin. 5 p= 4 • 8 1 1 63 3ooo3 80 Par ces valeurs
numérique on vèit que dé*6ep< dnyles . .6*", deux, savoir 0 et ont des sinus
négatifs, c'est-à-dire sont comptés entre i8ô*et Sfio* * tes chiq autres sont
coiripris éntre zéro et 180'. Voici le résultat du calcul de ces angles où la
préoisioa a été portée jusqu'à la 6e décimale de seconde. 35.

The text on this page is estimated to be only 20.90% accurate

u76 THÉORIE DES NOMBRES. $0 = -8r 18 \cdot 23''$. $727116 6' = 34 55 6$, $050634 6'' = -90 27 50$, $475 \ll 8 0''' = 14 19 50$. $090193 6'' = 68 56 53$. $792033 = 5 10 a_3$. $569784 9''' = 120 12 3 \ll$. 728371 Nous connaissons par conséquent toutes les valeurs des auxiliaires A, A', A'' jusqu'à A''' ; car on a en général $I A''' 0 = n' (\cos. 0 \{''\}) \vee -1 \sin. h(m))$, et son complément $AfJ - \gg = /i (\cos. 6H - V / -1 \sin. 9f - \gg)$. (578) Venons maintenant à la détermination des quantités T , qui est l'objet principal de ces calculs ; on déduira d'abord des équations (3) les valeurs suivantes : $T - II T''' IH \underline{H} \underline{A}' \sim \sim A' - A' A'' T_{,,} \underline{r} \underline{t} \gg 1 \sim - Jr \sim JJ \hat{A}' \underline{T}^* \gg ! A'' - A \gg A' A' \gg A'''$ La dernière donne $T' \wedge A' \wedge A''' \wedge$, ou en substituant les valeurs de A, A', A'', A^* , $T'i = n^{\wedge} [\cos. (8e-4-4\delta'+20''' + 6'')^{\wedge} - i 3 \sin. (88+4e'4-ar+0^{**})]$ Donc si on prend l'angle m tel qu'on ait la valeur de T sera $8 \ll + 40' + w = TE'$ Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 22.31% accurate

CINQUIEME PARTIE. a77 $T = \langle T(\cos. \langle -\backslash \backslash - i \sin. w) \rangle$. T étant connu, si on fait $T = n \gg (\cos. \langle ' + 1/ - i \sin. m) \rangle$, $T'' = n' * (\cos. \langle " - h l/ - i \sin. **''') \rangle$, et en général $T_w = n \bullet (\cos. \gg (-> + 1/ - i \sin. a > M) \rangle$, les équations $T = , T'' - ^7 - , T'' ^ - ^$; donneront immédiatement $J = 2w - 0 ^ " \blacksquare = 80 - 4e - a o' - e''$. Ainsi on connaît déjà les quatre fonctions T, T', T'', T''' , et leurs compléments $T, , , , T'''$, Tlf T'' ; et on voit que la somme de ces huit fonctions est représentée par $a n \bullet [\cos. \langle -1 - \cos. (a \langle - e) + \cos. (4 \langle - a f t - f l O + \cos. ^ u - ^ - a \hat{o}' - \bullet''') \rangle] \bullet$ (579) Pour avoir les fonctions T' et T' , j'observe que des équations (3), on tire $- A'' ' - " \hat{A} 7'' - A''' A^*$ Ensuite comme on a $T'' T'' - n$, il en résulte $r/s = n A w' A^*$, ou $T^* = n \hat{[} coi. (ae'' + 0^*) + 1 \sin. (a 0'' + \bullet') \rangle] \bullet$ Donc si l'on fait on aura $T' = i \gg ^ (\cos. \langle " + V ^ - 1 \sin. \langle " \rangle)$. De cette valeur on déduira ensuite

The text on this page is estimated to be only 24.19% accurate

a73 THÉORIE DES NOMBRES. et ces deux fonctions feront connaître leurs compléments ou inverses T'' et T''' , savoir : $f T'' = n * (\cos. \langle " - 1 / - i \sin. u ") T_m = n \rangle [\cos. (2Ww - 9") + 1 / - i \sin. (aw'' - 0")]$; d'où l'on voit que la somme de ces quatre fonctions serait $2 n \cdot [\cos. w'' + \cos. (2 * > " - 6")]$; mais ici il se présente une difficulté. Lorsque nous avons déduit T'' de T''' , l'angle $26'' - * - 6T$ compris dans l'expression de T''^5 , au lieu d'être désigné simplement par $26'' + \hat{o}'$, pouvait l'être par $2 e'' + 0 * + a < ir$, / étant un nombre entier quelconque, positif ou négatif. Ainsi la valeur de ta'' que nous en avons tirée, pouvait être exprimée plus généralement par $w = -5 - + T11$ y a donc réellement cinq valeurs différentes de T'' qui résultent de cinq valeurs de $\rangle "$, lesquelles sont : $\rangle , a8r' + 8 \rangle , a 8'' + * . an \rangle , a 8'' - + * 4 * w - \S ' w = -5 - + ^ - 5 h \sim 5 \sim ' , a \&'' - + - 0' 61c \rangle , a0'' - 4 - ft T 8 *$ Pour savoir laquelle de ces cinq valeurs doit être employée , il faut trouver moyen de déduire directement T'' de T sans ambiguïté. TT' (58o) Pour cela soit $- ^ - = M$, je dis que M sera une fonction de R seule , indépendante des racines p ; en effet, si on avance d'un rang $T T' T''$ les quantités p , les polynômes T, T, T'' , deviendront $g, j^{\wedge}$; donc $-Tp$ restera constant. H ne s'agit d'ôtic que de trouver la fonction M d'après l'équation $T T' = M T$, et il résulte de cette équation' que M devra être de la forme $V (\cos^e + V / - 1 \sin. e) >$ car

comme Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 27.25% accurate

CINQUIÈME PARTIE. 279 on a $T = n \sim (\cos. \langle \blacksquare \rangle - i \sin. \langle \rangle) T$
 $= \langle \rangle^* (\cos. \langle \rangle - f \frac{1}{\dots} - i \sin. \langle \rangle) T = \hat{\imath} (\cos. M'' + \frac{1}{\dots} - i \sin. \langle \rangle)$, il s'ensuit que la
 valeur de M est $t M = n^* [\cos. (\langle \rangle \bullet + - \langle \rangle - \text{un}) - f \frac{1}{\dots} - i \sin. (\langle \rangle + \rangle' - \langle \rangle^*)]$. Ainsi on devra avoir $\langle t \blacksquare + \blacksquare - \rangle = e$, et lorsque O sera connu, on
 déduira de cette équation la valeur de P . Pour avoir la valeur de M il faudra
 développer le produit des deux polynômes, $T = p + pR + \frac{1}{7}R^* - \frac{h}{R}Ri - \frac{1}{R}R^*$
 $T = \frac{1}{\dots} + \frac{1}{\dots}R' + p''K^* + p'''R^* + p'''R''$, et réduire les différents termes à la
 forme linéaire en p, p', p'' etc. Dans ce développement on peut se borner aux
 seuls termes qui contiennent p ; car comme on doit avoir $TT = MT'' = M(\frac{1}{\dots}$
 $+ \frac{1}{\dots}R' + \frac{1}{\dots}R^* + \text{etc.})$, il est évident que M sera égal à la somme des termes
 qui multiplient p . J'observe d'abord que le terme constant a se trouve dans
 l'expression des carrés $p^* = a$, $p'' = a + p^0 \dots p''' = a - \frac{1}{\dots}$, etc., et que a
 peut être remplacé par sa valeur $-a p - a p' - \frac{a}{\dots} \dots - \frac{a}{\dots}^*$; ainsi le
 produit TT contient une première partie affectée de p , savoir : $- \frac{a}{\dots} + R' +$
 $R^* + R^{\langle \rangle \langle \rangle}$, provenant des termes $p^* - \frac{h}{p} \frac{1}{R} \frac{1}{4} - \frac{1}{\dots}^* R' + \text{etc.}$. Mais il est
 facile de voir que cette partie se réduit à zéro, car elle $i - R^4 \hat{i} - R^*s$ est
 égale à $- \frac{a}{\dots} \cdot t_u = - \langle xp. (i - t - R - \frac{1}{\dots} + R^*)$; or on est convenu de prendre
 pour R une valeur imaginaire qui rend $R^* = i$, sans rendre $R_s = i$. Ainsi les
 termes du produit TT' affectés des

The text on this page is estimated to be only 26.82% accurate

a8o THÉORIE DES NOMBRES. carrés $p \setminus p \setminus$ etc. , ne produisent aucun terme linéaire affecté de p , si ce n'est le terme R , qui se réduit à $(a + \sqrt{a}) R^1$, et qui donne ainsi dans la valeur de M une première partie R^* ou R^* . Maintenant si les racines p , exprimées en général par $ra + r \sim$, sont rangées dans l'ordre numérique des exposants et, on aura $P = r^6 + r \sim^* p''' = r'' + \sqrt{a} p'' = r^* + r'' p''' = r^7 + \sqrt{a} r^7 / \sqrt{a} = r'' - \sqrt{a} / \sqrt{a} t p = r \ddot{r} + \sqrt{a} p x'' = r^* + r \sim^* - r, J - + - r'', J$ tu $p = r^* + r''^4 P'' = r^9 + r \sim^* p''' = r^* + r \sim^* = S + r > p^1'' = r, e + r \sim p'' = r, i + r \setminus$ Par cette disposition on voit immédiatement que dans le produit TT le terme linéaire affecté de $\sqrt{a}$, ne peut résulter que du produit de deux termes consécutifs de la suite précédente, savoir des termes, $pp'', p''p, pp'' \setminus p''y pr''p''$ Et comme chacun de ces produits $p_m p_n$ appartient à deux ternies $/; p R, p p tt$. du produit $1 1$, il en résultera deux termes $R_{m+a}'' - t - n^2 1''^{\wedge}$ dans la valeur de M . Ajoutant donc toutes les quantités ainsi formées, réduisant les exposants, lorsqu'il y a lieu, d'après l'équation $R, i = i$, et joignant à cette somme la partie déjà trouvée R^1 , on aura la quantité cherchée $M = 2 + 2 + 2R + 4R \ddot{r} + 3R^* + 4R^1 + aR \ll + aR' R^* - t - R' + aR'' - t - 4 R'' + R^1 + R^*$. Or il existe des réductions générales dans les puissances de R ; on a d'abord l'équation $0 = i - 4 - R + R' - f - RJ R^4$. Ensuite puisque la valeur de R est choisie de manière qu'on n'a ni $i - RJ = 0$, ni $i - Rs = 0$, on pourra déduire de l'équation $i - R, 6 = 0$ les deux suivantes : Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 24.37% accurate

CINQUIEME PARTIE. a8i 0=1 + R' + R' + R' + R" o = i+Rs + R'o, au moyen desquelles la valeur de M peut s'exprimer ainsi : M=—
 2R+3R3 + aR4 -+- aR*— aRé + aR'. Substituant les valeurs M = n* (cos. 0
 4- V — i sin. 0), R = cos. p. + 1/ — i sin. (i), on aura les équations n 7 cos.
 0 = i — 4 cos. jt — a cos.a |*— 5 cos. 3 p. = — a . 4473 5 807 1 4 1 3
 /*~sin.0 = — a sin. a (* -+- 5 sin. 3 (a + a sin. 5(i= 5.0oio4 3738090, d'où
 résulte 0=n6"4/3a".57io39. (58 1) I^s valeurs trouvées de e , ô' , , donnent
 par approximation i5w=-36i854'3a". 7o5635; on peut prendre simplement
 i5w=— i'54'3a".7o5635, ce qui suppose 1 5 » = 8 6 4- 4 0' 4- a 0"" 4- 6™ 4-
 a w , et on aura u =— o" 7' 38".i8o376 aw_ô = a/= 81 3 7 .366364 au —
 6'=ù»"= ia7 11 8 .683094. Pour avoir ensuite la vraie valeur de c'est-à-dire
 celle qui doit correspondre à la valeur prise pour «*, il faut la déduire de
 l'équation u,"—u-\- a — 0; on aura ainsi *" = _35-9'3"385o5i, valeur qui
 s'accorde sufliamment avec la première des cinq que nous avons données
 ci-dessus, savoir : w" = = - 35» 9' 3" . 385o54II. 36 Digitized by Google

28a THÉORIE DES NOMBRES. Nous en concluons que l'angle ϕ satisfait exactement, et non pas simplement par approximation, à la condition $\odot = \alpha + \beta' - i(\alpha \cos \phi - 0) = 3\alpha' - 6 - |(\alpha \sin \phi + eT)$ ou $50 = i5\alpha - 58 - \alpha \phi' - e' = \alpha' + 3e + 4\phi' - h26''' + e''' - \phi \backslash$ Connaissant w , l'équation $T'' = A''T$ donnera la valeur de T^* , au moyen de l'angle $w' = \alpha \cos \phi - d'' = 60 - 20 - 20 - 0$. Donc la somme des deux termes $T' + T$ jointe à celle de leurs compléments $T'' + T'''$, sera $t \frac{2}{i7} [\cos.(3w - 6 - \odot) + \cos.(6 - u - 26 - 6'' 20)]$. (58a) Pour former la somme de toutes les quantités $T, T', T'', \dots, T'''$, il ne reste plus qu'à trouver la valeur de T'' et de son complément T''' ; or on a $T'' = A''T^*$, et par conséquent $T, T^* = A, TT^* T'' = iA'$; faisant donc à l'ordinaire $T, T = i * (\cos. \alpha) - + \bullet \sqrt{-1} \sin. \alpha$, on aura $3w - 6'' = 0, 37T$, ou 4^* , ce qui donne α^* égal à l'une des quantités $3' \sim ' - 5$ — Pour savoir laquelle de ces trois valeurs doit être employée concurremment avec celle de u , il faut recourir au même principe qui nous a servi à déterminer la valeur de α . Pour cet effet soit $TT' = M'T''$, on prouvera aisément que M' doit être une fonction de R indépendante des racines p . Donc M' sera le coefficient de p dans la valeur du produit TT'' , développée de manière que les différents termes ne contiennent les racines $p, p \backslash p'' \dots$ que sous forme linéaire. Or par une analyse semblable à celle qui nous a donné la valeur de M dans l'équation $TT' = MT''$, Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 28.36% accurate

CINQUIÈME PARTIE. *83 od trouvera $M' = 2R' + 2R_8 + aR' + aR_8$ — $5R''$; cette quantité étant représentée à l'ordinaire par $n^{\wedge}(\cos.e' - t - V / \dots$ isin.6'), on aura pour déterminer $0'$, les deux équations $n \gg \cos. 0 = 7 - 6 \cos. 3 p = \dots \hat{1} . 354 1 o 1 9662 5o / \gg \bullet \sin. e' = 4 \sin. a | i - 2 \sin. 3 fi - h 5 \sin. 5 y. = 5 . 4oo5o, 32882 4 1 \gg$ d'où résulte $0' = io4,4'3a''.57io39$. Comparant cette valeur à celle de 0, il est manifeste qu'on doit avoir $0' = 0 - ia^* = 0$ — et en effet cette équation peut être démontrée rigoureusement au moyen des équations qui déterminent les cosinus et sinus des angles 0 et 0'. (583) Connaissant $0'$ on aura la valeur de «" correspondante à celle de w, savoir : $w'' = \dots - h 0' = 22' 58' 57''. 930679$. Mais d'un autre côté on a $76'' = 22^{\circ} 58' 57''. 930679$. Ainsi la valeur de w'' coïncide exactement avec celle de $-j$, d'où résulte la nouvelle équation de condition $w - t - \ll''' = 0' + je''$, ou $5 w - 2 e - 0' = \odot' + y o, r = \odot - 1 2' + \pm r$. Multipliant cette équation par 3 et mettant au lieu de $i5o>$ sa valeur $86 + 4 \hat{o}' + 2 \hat{o}''' + 6''' + 360^{\circ}$, on aura $30 = 2\hat{o} + \hat{o}' + 26'''$ Enfin la comparaison des valeurs de ces différents angles donne l'équation $0 = 0 + 6' - 0'' + 72^{\circ}$ qu'on pourrait sans doute dénion36.

Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 25.97% accurate

a84 THÉORIE DES NOMBRES. trer rigoureusement par nos formules. Ainsi nous avons entre les angles 6 deux équations , savoir : — 6 4-6'+ G"— ô'= i80° 26 -+-Ô'— 3e" = 2 ô'" — 6' 4- 6V"* , lesquelles peuvent servir à déterminer deux de ces éléments par le moyen des cinq autres. Si on réunit maintenant dans une seule somme toutes les valeurs de T depuis T, T', T" . . . jusqu'à T*" , et qu'on y joigne l'équation — i = p + p+p " • • • +/*****» on aura pour déterminer p l'équation $1 \frac{5}{7} = \frac{14}{\cos.w \cos.w' - \cos.u \cos.w'' - \cos.w'' - \cos.w^* \cos.w''}$ (cos.w 4- COS.w'-+- COS.u" 4- COS. 4- COS. w" -+- COS.w* 4- COS.»"), où il ne reste plus qu'à substituer les valeurs des angles w, déterminées par les calculs précédents. Voici les valeurs de ces angles, tant exactes qu'approchées : $01 = w \ u' = aw + \ll' u'' = 5w + a'' \ w'' = 3w + \ll'' <a = 6 \gg \ 4- a^* \ W''' = 4o)4-\ll'' \gg''' = 8W4-\ll T'' \ll = \frac{0}{8ie \ i8'a3''} .727116 \ \ll'' = \frac{0}{0} = \frac{34 \ 46 \ 8}{.843924} \ \ll''' = \frac{2\hat{o} - e'}{127 \ 41 \ 41} .403598 \ \ll'' = x''' - 0 + \hat{i}(i = 23 \ 37 \ 8 .832558 \ a' = \frac{26}{6''} - \frac{2 \ 0}{20 \ 55 \ 32} .559670 \ \ll''' = \frac{40}{26'} - e''' = \frac{118 \ 56 \ 27}{.282997} (584)$ H nous reste à substituer dans la formule générale la valeur trouvée ci-dessus pour o> , afin de calculer au moins approximativement cette formule , ce qui fera connaître celle des racines p = ^ que la formule représente. Voici donc la valeur des différents angles <o dont il faudra calculer les cosinus : Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 26.86% accurate

CINQUIÈME PARTIE. $85^{\circ} 0' = 0^{\circ} 7' 38'' . 180376 u - 81 i3$
 $7 . 366363 \llcorner = 35 9 3 . 385054 \llcorner = 137 11 8 . 682091 \grave{u} \llcorner = 22 58 57$
 $.930675 \llcorner / = 20 9 43 . 477410 \llcorner = 119 57 32 . 726010$ Il suffirait pour
notre objet de calculer ces cosinus par le moyen des tables à sept décimales
seulement, mais pour plus d'exactitude nous donnons ici le résultat du
calcul fait avec des tables à quatorze décimales : $2 \llcorner (C0S.a > + COS.\llcorner) =$
 $12.8674902836 4577 2 n \gg (\cos. \llcorner + \cos. uS) = 19. 55799 2^{\circ} 44a fyfi0$
 $2/ivcos.w" = 10. a5i6i 707829619 42.6770994062 11 56 - 1 + 2 h \gg (\cos.$
 $\llcorner + \cos. \llcorner) = 13 . 29 1 20 1 1 688 23 1 1 3ocos.^ = 29.3858g 83373$
 $8845 \cos-3T == ^{\circ} -9795a .994 124628$ Or par les tables de la Trig. Brit. , on
trouve $008.^ = 0.97952 99412 5247.$, On voit par conséquent que la valeur
de $\sim p$ donnée par notre formule est celle de $\cos.^(585)$ Si la valeur de $\llcorner$ est
augmentée successivement de $jx, 2(1, 3 p. , etc. , (i \acute{e}tant ^ ou 24^*$, et que
d'après chaque valeur de $u >$ on forme les valeurs correspondantes de $<*\ \llcorner$
 $\dots wT, WT"$, la formule donnera successivement toutes les autres valeurs
de p ou de $2 \cos. -$

The text on this page is estimated to be only 25.17% accurate

286 THÉORIE DES NOMBRES, dans l'ordre $p, p \backslash p'' \dots / ?^*$,
indiqué par la racine primitive que nous avons adoptée ou dans l'ordre
inverse. Ainsi à partir de $a \cos.$ — que nous avons déterminé, on obtiendra
les valeurs des quinze racines $a \cos.^{\wedge}$, soit dans l'ordre arc $6n \text{ i}8r \text{ Sx aAir}$
 $a \cos.$, $2 \cos.$, $a \cos.^{-\wedge}$, $a \cos. > 2C0s \_ Jp \text{ iott } 3oic \text{ 28t: aaic An } a \cos.^{-\wedge} \text{ — }.$
 $a \cos. \text{ —} \text{ —}$, $a \cos.^{-*} \text{ —}$, $a \cos. \text{ —}5 \text{ —}$, $a \cos.^{-01} \text{ 7 } 3i \text{ ii } 01 \text{ 3i } \hat{a}^* \text{ a6ir i6w iAt}$
 $aow \text{ a } \cos. \text{ —}3 \text{ —}$, $a \cos.$, $a \cos.$, $a \cos. \text{ —J—}$, $a \cos. \text{ —yj—}$, indiqué par la racine
primitive $\# = 3$, soit dans l'ordre inverse $air \text{ aow } \hat{a}it \text{ 16lc } a \cos.y^{\wedge}$, $a \cos.^{-\wedge}j \text{ —}$,
 $a \cos.^{-yj} \text{ —}$, $a \cos.^{-\wedge}$, etc. On déterminera aisément lequel de ces deux ordres a
lieu, en calculant la formule d'après la valeur de 0 augmentée de 24° ,
c'est-à-dire d'après la valeur $w = a3^{\circ} 5a' ai'' .8a$, etc. L'addition de $\wedge$ à la
valeur de w en produit une de $a \text{ p}$ sur la valeur de u , de 3π sur celle de $\llcorner$,
etc. On aura donc les valeurs suivantes: $a, = a3^{\circ} 5a' 2i'' .8u \text{ w} = 1 \text{ 29 } 3 \text{ 7} .3y$
 $* >'' = 36 \text{ r} > o \text{ 56} .Gi5 \text{ o}'' = aa3 \text{ ii } 8 .68 \text{ u}'' = i4a \text{ 58 } 57 .93 \text{ WT} = 164 \text{ 9 } 43$
 $.48 \text{ w}''' = 72 \text{ 2 } 27 .27$ Et en se bornant à sept décimales le calcul de la
formule donnera $\backslash p = \text{ — } 0.44039437$: ce cosinus répond aussi exactement
qu'il est possible à l'angle $y^{\wedge} = 1 \text{ 16}^* \text{ 7' } 44''^{\wedge} 2$, Digitized by Google

CINQUIÈME PARTIE. a87 Ainsi en augmentant successivement de p ou a^4 la valeur de w , et calculant les valeurs correspondantes de $*\gg T$, on obtient toutes les racines de l'équation proposée dans l'ordre p, p'', p''' . inverse de celui qui est indiqué par la racine primitive $\# = 3$. Ces racines suivraient l'ordre direct si, au lieu d'augmenter continuellement la valeur de u , on la diminuait de la même quantité en mettant successivement au lieu de u les valeurs $u - p, u - 2p, u - 3p, \dots$ (586) Quoi qu'il en soit la formule générale $\cos \frac{2\pi j}{n} = \cos \frac{2\pi}{n} [\cos \frac{2\pi}{n} \cos \frac{2\pi}{n} (a^4 - a') - h \cos \frac{2\pi}{n} (3a^4 - f - et') - \cos \frac{2\pi}{n} (4w^4 - a'') - \cos \frac{2\pi}{n} (5u^4 - a'') - \cos \frac{2\pi}{n} (6a^4 - a^*) - \cos \frac{2\pi}{n} (8a^4 - a''')]$, qui donne la valeur exacte de la racine $\cos \frac{2\pi}{n}$, lorsqu'on fait $\frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi}{86}$ $\frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi}{46}$ $\frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi}{8}$ $\frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi}{6}$ $\frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi}{5}$ donnera aussi à volonté la valeur de toute autre racine désignée par $\cos \frac{2\pi}{n}$; il suffit pour cela de mettre dans la formule $w^4 - m p$ à la place de o , m étant le rang de a dans la suite $a^0, a^4, a^8, a^{12}, a^{16}, a^{20}, a^{24}, a^{28}, a^{32}, a^{36}, a^{40}, a^{44}, a^{48}, a^{52}, a^{56}, a^{60}, a^{64}, a^{68}, a^{72}, a^{76}, a^{80}, a^{84}, a^{88}, a^{92}, a^{96}, a^{100}, a^{104}, a^{108}, a^{112}, a^{116}, a^{120}, a^{124}, a^{128}, a^{132}, a^{136}, a^{140}, a^{144}, a^{148}, a^{152}, a^{156}, a^{160}, a^{164}, a^{168}, a^{172}, a^{176}, a^{180}, a^{184}, a^{188}, a^{192}, a^{196}, a^{200}, a^{204}, a^{208}, a^{212}, a^{216}, a^{220}, a^{224}, a^{228}, a^{232}, a^{236}, a^{240}, a^{244}, a^{248}, a^{252}, a^{256}, a^{260}, a^{264}, a^{268}, a^{272}, a^{276}, a^{280}, a^{284}, a^{288}, a^{292}, a^{296}, a^{300}, a^{304}, a^{308}, a^{312}, a^{316}, a^{320}, a^{324}, a^{328}, a^{332}, a^{336}, a^{340}, a^{344}, a^{348}, a^{352}, a^{356}, a^{360}$. Par exemple, pour obtenir directement la valeur de $\cos \frac{2\pi}{n}$ ou de $-\cos \frac{2\pi}{n}$ il faudra mettre dans la formule $\cos \frac{2\pi}{n}$ ou $-\cos \frac{2\pi}{n}$ à la place de w . Nous sommes donc parvenus à une formule générale qui donne à volonté toutes les racines de l'équation en p , ou toutes les valeurs de $\cos \frac{2\pi}{n}$, n étant tout nombre proposé de 1 à 15. Dans cet exemple tous les angles $\frac{2\pi}{n}$ peuvent se construire géométriquement, puisque les angles p dont ils dépendent, supposent seu

a88 THÉORIE DES NOMBRES. lément la division delà
 circonférence en 15 parties. Par conséquent la division de la circonférence
 en 3i parties peut s'exécuter par la division en 15 parties d'un arc 15 u
 déterminable géométriquement. Cette division en 15 parties s'opère par la
 division dn même arc en 5 et en 3 parties. Si suivant la méthode ordinaire
 nous eussions résolu l'équation en p, d'abord par une équation du 5e degré,
 puis par une équation du 3e degré, la première aurait exigé la division d'un
 arc en 5 parties, et la seconde la division d'un autre arc en 3 parties; à cet
 égard comme à plusieurs autres la solution eût été moins simple que celle
 que nous venons d'exposer. Exemple IL » = i3, k—6. (5Sj) Dans ce cas
 l'équation à résoudre est $o=p^6+p^5-5p^4-4p^3+6p^2+Sp-i$. Soient p,
 p', p'', p''', p''', p1, les racines de cette équation; si on prend pour racine
 primitive de i3 le nombre #=a, ces racines représenteront les périodes de
 deux termes (2 : i), (a : a), (2 : 4), (a : 5), (a: 3), (a: 6), et en désignant par r
 une racine imaginaire quelconque de l'équation $x^3-1=0$, on aura $p = r' +$
 $r'' p''' = r^5 + r^2 p = r^* + r^2 p = r^* + r^2 p = r^* + r^2 p = r^* + r^2 p$. De là on
 tire les carrés et les produits deux à deux des racines, réduits à la forme
 linéaire, comme il suit : $p' = 2+p' pp = p+p'' PP'' = P''' + P'' pp'' = p'' + p'$
 $p'' = 2+p'' p'p'' = p+p^* pp'' = p'' + p^* p'p'' = p''' + p p''' = 2 + p''' p''p''' = p'' + p p''F = p$
 $+p py = p'' + p' p'''' = 2+p p'''p'' = p''' + p' P'y = p+p' />'*• = 2 + />' p''p^* = p'' + p''$
 $p''p = p' + p'' y?' » — 2+ /> p p — p + p p' p = p + p$ Digitized by Google

CINQUIEME PARTIE. a89 (588) Soit R une racine imaginaire de l'équation $R^5 - 1 = 0$; nous prendrons $R = \cos. - i \sin. j$ en faisant $j = \sqrt[5]{60}$ (on pourrait prendre également $n = \sqrt[5]{60}$). Nous ferons ensuite $T = p + p'R + p''R' + p'''Ri + p''''R^* + p''''''R^s$, et nous désignerons à l'ordinaire par T, T', T'', T''', T'''' , ce que devient le polynôme T , lorsqu'au lieu de R on met R', R'', R''', R'''' , respectivement. Lorsque k est pair comme dans cet exemple et dans tous ceux où n est de la forme $\sqrt[5]{60} + i$, on ne peut plus supposer la valeur de T composée seulement avec des puissances paires de R , comme nous l'avons fait pour les cas où le nombre k est impair; il faut alors supposer $T = a + a'R + a''R^* + bR + b'Ri + b''Ri$, et on continuerait ces suites plus loin, savoir jusqu'à la puissance R^{k-1} , si k était plus grand que 6. Dans cette formule les coefficients a, a', a'' , seront assujétis à une loi, et les coefficients b, b', b'' , à une autre loi. On aura en effet $a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt[5]{60} - i a' p' p y - \frac{1}{2} \sqrt[5]{60} a'' = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt[5]{60} + 2 p' p'' - \frac{1}{2} \sqrt[5]{60} p' p'' b = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt[5]{60} + 2 p' p'' b' = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt[5]{60} + 2 p' p'' b'' = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt[5]{60} + 2 p' p'' b''' = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt[5]{60} + 2 p' p'' b''''$ Ces coefficients doivent être réduits à la forme linéaire, mais il suffira de calculer les deux premiers a et b , car on voit bien que les autres se déduiront de ceux-ci en avançant progressivement d'un rang les lettres $p, p', \dots, p^{(k)}$. On trouvera de cette manière $a = a - p' - p'' b = \frac{1}{2} \sqrt[5]{60} - \frac{1}{2} \sqrt[5]{60} a' = \frac{1}{2} \sqrt[5]{60} - \frac{1}{2} \sqrt[5]{60} p' b' = \frac{1}{2} \sqrt[5]{60} + \frac{1}{2} \sqrt[5]{60} p' b'' = \frac{1}{2} \sqrt[5]{60} + \frac{1}{2} \sqrt[5]{60} p' b''' = \frac{1}{2} \sqrt[5]{60} + \frac{1}{2} \sqrt[5]{60} p' b''''$ IL

The text on this page is estimated to be only 20.43% accurate

CINQUIÈME PARTIE. a_{9i} (589) La valeur de A peut se trouver d'une manière plus simple en observant que A doit être égale au coefficient de p dans la valeur de T* développée et réduite à la forme linéaire. Mais d'abord il convient de ranger les racines p, toutes de la forme $r^* + r$ », suivant l'ordre numérique des exposants «, comme on le voit ici : $p = r' + p = r' + r''$, $p'' = r_s + r \sim$ $p'' = r^* + r^*$, $p'^{rfi} + r^*$, $p^* = r^* + r^{-6}$. Il en résulte que les seuls produits de deux lettres qui produisent p, soient pp' , $p'p''$, $p > y$, $p''p'''$, $p''y$. Cela posé le développement de T' donne une première partie $p^* + p'' R' + p''' W + p'''' R_6 + p' T > R^* + /?'. R' \%$ dans laquelle il faut substituer les valeurs $a^{-*} - //, // == \gg + / >$, $y^* = 2$ etc. ; et d'abord comme le terme constant a contenu dans toutes ces valeurs, est équivalent à $— np — zpf — a / > — a / ?''' — a / \gg — a / ?^*$, la partie que ce terme constant introduit dans A sera $— a (1 4- R'' + R_4 + R_6 - + R^* + R'')$. Elle pourrait être négligée pour la détermination de A et de A', mais elle ne peut l'être pour la détermination de A'', parce que l'équation $0 = n - R_1 + R_{44} - R' + R' + R''$ cesse d'avoir lieu lorsqu'on met R₁ à la place de R. On observera encore que le terme $p''^* R''$, où l'on a $p'^* = a - t - p$, donne un coefficient R'* ou R₄ qui doit faire partie de A. La seconde partie du développement de T* à laquelle il faut avoir égard est celle que fournissent les termes $a^R + a^> \bullet^R s + a^V R^+ + V > , R_5 + a / > y R^$ elle donne dans l'expression de A une troisième partie $aR - h aR' + aR \ll + aR \gg + aR'$, laquelle étant réunie aux deux autres, forme la valeur complète de 37. Digitized by Google

id2 THÉORIE DES NOMBRES. A , savoir : (t) $A = -2 + 2R - aR' - 3R^* + 4R$ », ce qui s'accorde avec le résultat déjà trouvé. (690)

L'équation $T' = AT$ dans laquelle on mettra successivement $R', RJ, R4, Rs$, à la place de R , produit cette suite d'équations : $T^* = AT, T' = A'T'', T' = A'' T^* = -A''$, où il faut remarquer que dans la troisième $T''' = -A''$, on a mis -1 à la place de T' , parce que T' étant ce que devient le polynôme T lorsqu'on met R^* ou 1 à la place de R , on a $T^* = x^j + jp' - 4p'' + p''' + p'' + /?^* = -1$, et par conséquent $T''' = -A''$. D'un autre côté A'' étant la valeur de A lorsqu'on met $R1$ à la place de R^* , j'observe que la valeur de R tirée de l'équation $R6 - 1 = 0$ est choisie de manière qu'elle ne satisfait pas à l'équation $Ri - 1 = 0$, sans quoi les puissances successives de R ne donneraient pas toutes les racines de l'équation $R6 - 1 = 0$; donc cette valeur satisfait à l'équation $R3 + 1 = 0$. Mais en substituant dans l'équation (1) la valeur $RJ = -1$ à la place de R , le second membre se réduit à $-i3 = -n$; donc on a $A'' = -n$, et par conséquent $T''^* = \ll$, ou $T'' = fcl/\ll$. Ce résultat s'accorde avec celui de l'art. 509 ; car T'' n'étant autre chose que le polynôme T dans lequel on substitue $R1$ ou -1 à la place de R , on a $T'' = p - p' + p'' - p''' + p'' - p^*$, quantité qui d'après l'art, cité a pour valeur

L'ambiguïté du signe se justifie ici , parce que la série des racines $P^*P'^*P'''^*$ ' P' Peut commencer par tel terme qu'on voudra. Ainsi en supposant $P \sim P' + P'''' P f'' + P'' - p' = +i/n$, Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 29.95% accurate

CINQUIÈME PARTIE. ag3 on aura en même temps $p' - p'' + p''' - p'' + p' - p = -1/n$. Les autres conséquences qu'on peut tirer des équations (a), sont $TT'' = AA''$, $T'T''' = A'A'''$. Or il est facile de prouver qu'on a $TT'' = TT''' = n$, et qu'ainsi on aura semblablement $AA'' = A'A''' = *$. En effet si on développe le produit des deux polynômes $T = p + p'R + j > "R' + /TR' + p''R^* + p'R > T'' = p + p'Rs + p''R'' + p'''R's - i - p''R'' + p^* R, s$, on aura, comme on l'a vu dans des cas semblables, $TT'' = fp' + Rfpp' + R'/PP'' + W/PP''' + W/pp' + Rypp'$. Ory > ' = a.6- i = i3-2 = « — a, fpp = fpp'' = fpp''' = fpp'' = fpp* = z — 2; donc $TT'' = n - a(i + R + R, + R' + R^* + R1) = ft$. On trouverait de même $T' T'' = n$ et $(T'y = n$; ainsi on a la double série d'équations (3) / > = $TT'' = TT''' = (T'') \setminus n = AA'' = A'A'''$. (591) Maintenant il est facile de déterminer les quantités T en fonctions de A. En effet il résulte des équations (a), qu'on a $T^* = \ll A^* A'$; soit donc $1 A = /iT(\cos.9 + / — isin.e) A' = ir (\cos.O' + 1/ — 1 \sin.\hat{o}')$, on aura $T^{\wedge}/t \gg [\cos. (3 e H - e^{\wedge}H - 1 \sin. (3 0 + *'))]$, et par conséquent $t T = rii (\cos. \gg + 1/ — 1 \sin. * \gg)$, en faisant « = 2! + i Ensuite de l'équation $T' = AT$, on déduira

Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 19.32% accurate

au4 THÉORIE DES NOMBRES. $T' = r\alpha [\cos. (a \ll - \hat{o}) h - V - i \sin. (a \ll - \bullet)]$. Par les quantités T et T' on connaît leurs inverses T'' et T''' en changeant simplement le signe de $|/ - i$. Substituant ensuite ces valeurs et celle de $T'' = \pm \sqrt{n}$, dans l'équation $6p = -i + T + T' + T'' + T''' + T''''$, on aura (4) $\rightarrow = \sim \xi i \xi + ^{[\cos. M + \cos. (fl \ll - - *)]}$, formule qui contient implicitement les six racines de l'équation proposée. Il ne reste plus qu'à calculer les angles ϕ et θ ; pour cela il faut dans l'équation (i) substituer la valeur $R = \cos. p \ 1 / - \hat{i} \sin. p$, ce qui donnera : $n \cos. \phi = - 3 - \hat{h} \cos. |i - a \cos. a \ p. - 3 \cos. 4p + 4 \cos. 5f \ll, n' s \ in. 8 = i \sin. ft - a \sin. 2(1 - 3 \sin. 4| * + 4 * in - 5|i$. Mettant R' à la place de R ou $a^{\wedge}$ à la place de p , on aura semblablement $i \ n T \cos. 6's = 5 - a + a \cos. ap - a \cos. 4 \ p - 3 \cos. 8 \ p - 4 \cos. iop \ n 7 \sin. \hat{o}' = a \sin. a|i - a \sin. 4 \{ t - 3 \sin. 8 (* + 4 \sin. iop$; ces équations dans lesquelles, l'angle ($i = -^{\wedge} = 60''$), se réduisent aux suivantes : $- 7' \ I \ n * \cos. 6 = 4 - \cos. (i = * T \sin. \hat{O} = - \sin. |i = - 1/3 \ll 5' i . 3 \ n 1 \ oos \ 6' = - i - 3 \cos. p = - , /i \gg \sin. 6' = - 3 \sin. p = - 1^{\wedge} 3$, d'où l'on déduit les valeurs approchées $j \ 6 = - i 3 \ll 53' 5^{\wedge} . 3904939 \ e' = -, i 33 \gg 53' 5a'' . 3904929$. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 24.60% accurate

CINQUIÈME PARTIE. 296 Elles montrent qu'on a exactement
 $6'0'' \pm \dots$ — $\hat{\alpha}0\%$ < Je qu'on peut vérifier par les formules précédentes, d'où
l'on tire $\cos.(6 - \cos. 2 \text{ jt et sin. } (6 - \hat{\alpha}')) = \sin. a p$. Connaissant 6 et $6' = 6$
— $120''$, on aura $w = \dots y + 60^\circ t$ et par conséquent $\ll r = \dots$ — $29^* 1' 54''$
 $.92699520' a \gg$ — $8 = \dots 44 37 57 .46349763$. (592) Avant de substituer ces
valeurs dans la formule (4), si on veut savoir quel signe on doit prendre
pour n_v , il faudra chercher a priori la valeur que doit avoir T'' pour
correspondre à la valeur prise pour $\ll$. Pour cela il faut déterminer T'' par
l'équation $TT' = MT''$, où M doit être une fonction de R seule. Cette fonction
qu'il s'agit de déterminer sera le coefficient de p dans le produit TT'
développé et réduit à la forme linéaire. Or si on multiplie entre eux les deux
polynômes : $T = p + p'K + p''R' + p'''RJ + \dots R^* + \dots RJ$ $V = p + p'Rt + p''R^4 + \dots p''$
 $R^6 - \dots p''R^* p'R - \dots$, on aura une première partie $p' + p''R + p'''R^2 + \dots$
 $\dots R^* - \dots p'''R^* + p''R^* p'R$ dans laquelle il faut substituer les
valeurs $\dots = 2 + \dots / \dots = 2 + \dots$.. $p' = 2 + p$; à raison du terme constant 2, on
aura dans M la partie $2(1 + R + R^* + R^* + R'' + R, S)$; et parce qu'on peut
supposer $R_i = \dots 1$, cette partie se réduit à zéro. Ensuite le terme p contenu
dans $\dots$, produit dans M le terme R^* ou simplement $\dots 1$. La seconde
partie du produit TT' à laquelle il faut avoir égard est $pp(K + R^*) + pp''(R^6$
 $+ R^*) + p''p''(R' + R'') + p''p''n(R' + R^1) + \dots > (R'' + R'')$; Digitized by
Google

The text on this page is estimated to be only 19.48% accurate

296 THÉORIE DES NOMBRES. elle donne dans M les termes R + R1 + R* ■+■ R9 + etc. , lesquels étant ajoutés au terme déjà trouvé — i donnent M=-I+R+R•+R6+R»+R,+R'0+R7+R,^R■,-^R,,. Réduisant cette valeur d'après l'équation R^ — i , on trouve. . M=— i+aR+aR*=— 3+4 R. SoitM=«'(cos.e-i-l/— i sin.e), on aura n~cos.e = — 3 + 4 cos. jx = — i i /i»sin.6 = 4sin.ji = al/3; de là on tire la valeur exacte 0=8 + 1200. Ensuite l'équation. . T T = M T" donnera T"=«T[cos. (3u — 0 — e) + 1/— i sin. (3«— ft — 6)], ou T"=/i'cos.(— i8o°)=— n7, valeur dont le signe est maintenant déterminé. (593) Il ne reste plus qu'à calculer la formule _i_ > P= — g — ~6+~S~ CC0S' w + C0S* (2 w — 6)] pour savoir laquelle des six valeurs de p représentées par a cos. ^ , correspond à la valeur prise pour «. Voici le résultat du calcul : ^cos.«= 1 .o4845 32790 y cos. (a w — ô) = o . 855a6 80937 i .9037a 13727 i(i + n7) = 0.76759 18792 j 2COS.^= I. 13612 04935 cos. ^ — o . 568o6 47467 5 Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 27.88% accurate

CINQUIEME PARTIE. 297 Or on trouve que ce cosinus répond à car la valeur de $\cos. ^\wedge$ calculée par les tables de la Trig.Brit., en ayant égard aux troisièmes différences, est ■ $\cos. t| — o . 56806\ 47467\ 3\ 1\ 1\ 55$. Pour avoir les autres valeurs de p il faut mettre progressivement dans la formule « + jt , iû + 2(i,« + 3|t, etc. à la place de « , et changer à chaque fois le signe du terme n> qui représente T". Et d'abord si on ajoute 60* à la première valeur w = — 29' 1 5' 54" . 926995 , on aura une seconde valeur *» = 30°44' 5". 073005, au moyen de laquelle la formule à calculer sera $p = — i + ^{-4-} [\cos. « + \cos. (2 « — fl)]$: elle donne pour résultat i/?=0.88545 60254 6, ' • ce qui est la valeur décos. — 17 Or les racines p,p'p", p'''yP%P'y rangées dans l'ordre que leur donne la racine primitive #=2, sont ait ieit ae'ic a*1* 10*1: 2C0S.-^, 2COS.-^-, 2C0S.-^-, 2C0S.-^-, 2C0S.-^-, 2C0S.^, ou en réduisant : a* Ar. 81c 10* 6k iar 2 cos. -3, 2003.^3,2005.-^, 2cos.-rj12cos.T5, acos.-^n. 38 Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 15.27% accurate

*98 THÉORIE DES NOMBRES. On voit donc qu'en commençant par $a \cos$. L'ordre des racines sera l'inverse de celui que donnerait notre formule. Quoi qu'il en soit, les six racines de notre équation pourront être exprimées de la manière suivante, au moyen des valeurs $** = \frac{a \cos}{i 5' 54''} \dots$, $6 = \frac{i 3^\circ 53' 54''}{2} \dots$: $2^* 1 \dots n \sim a n \gg f / * \backslash / a n M 2 \cos - 7 J = - \xi + 6 + \sim [\cos - (w + S) + + 1)] * \bullet a \cos. ^ = \frac{g}{\sim 6 + \sim f T L \cos - w + \cos - (2^* > \frac{\hat{o}}{I} a \cos. * J = - J + ^ - f - 2 f [\cos. (w - |) + \cos. (a \ll - ^ - 0)] \blacksquare$
 $1 \text{ ioit } 1 n \bullet a n \gg f / a r \backslash / 4 r c . VI 2 \cos \sim \hat{T} \sim 6 6 \sim + \sim 6 \sim [\cos, V w - T y + \cos - V 2 u 5'' \sim v J \blacksquare i a \cos. = \frac{g}{4} - g - - f - \frac{g}{4} [\cos. (w - r) + \cos. (a w - H) \backslash i \blacksquare$
 $la \dot{ic} t n \sim * a n 7 T / 4^* T \backslash / a i r A \backslash 2 \cos. ^ - - s - g - + - 6 - [\cos. (w - l -) + \cos. (a \ll <) - T - - e) J. \bullet j^*$ On peut aussi par une seule formule exprimer toutes ces racines; cette formule est : $a \cos. - ^ = - 5 \_ 4 \_ [\cos. (^ - - r >) + \cos. (j \gg t t 3 e J J , m \text{ étant le rang qu'occupe } a i \text{ dans la suite } 8, 10, 6, 12, 4$ Dans ce cas la solution générale du problème s'obtient par la simple trisection d'un arc $0'$ déterminable géométriquement, puis $l \text{ atf } , i r \dots / . a i r$ qu'on a $M = r - j + g$, et $\ll s \ll$ Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 23.00% accurate

CINQUIÈME PARTIE. 299 Exemple III. $n = 4i$, $A = ao$. (504)

Alors l'équation en p du degré 30, qu'il s'agit de résoudre, sera et les valeurs des racines $p, p^2, p^3, \dots, p^{29}$, sont les mêmes qu'on a désignées ci-dessus ($n^\circ 53c$) par $r, f, f^2, \dots, f^{29}$, en supposant toutefois qu'on continue de prendre i^3 pour racine primitive de $4i$. Voici les valeurs de ces racines exprimées en fonctions de r , r étant une des racines imaginaires de l'équation $x^4 - 1 = 0$. $p = rx^4 - r^2$ $p^2 = r^2 - j - r - 1$ $px = r^2 + r^3$ $p^2 = r^4 - 4r^5$ $p^3 = r^4 - 4r^5$ $p^4 = r^4 - 4r^5$ $p^5 = r^4 - 4r^5$ $p^6 = r^4 - 4r^5$ $p^7 = r^4 - 4r^5$ $p^8 = r^4 - 4r^5$ $p^9 = r^4 - 4r^5$ $p^{10} = r^4 - 4r^5$ $p^{11} = r^4 - 4r^5$ $p^{12} = r^4 - 4r^5$ $p^{13} = r^4 - 4r^5$ $p^{14} = r^4 - 4r^5$ $p^{15} = r^4 - 4r^5$ $p^{16} = r^4 - 4r^5$ $p^{17} = r^4 - 4r^5$ $p^{18} = r^4 - 4r^5$ $p^{19} = r^4 - 4r^5$ $p^{20} = r^4 - 4r^5$ $p^{21} = r^4 - 4r^5$ $p^{22} = r^4 - 4r^5$ $p^{23} = r^4 - 4r^5$ $p^{24} = r^4 - 4r^5$ $p^{25} = r^4 - 4r^5$ $p^{26} = r^4 - 4r^5$ $p^{27} = r^4 - 4r^5$ $p^{28} = r^4 - 4r^5$ $p^{29} = r^4 - 4r^5$ Ces mêmes racines rangées dans l'ordre numérique des exposants de r , forment le tableau suivant : $p^0 = r^0$ $p^1 = r^1$ $p^2 = r^2$ $p^3 = r^3$ $p^4 = r^4$ $p^5 = r^5$ $p^6 = r^6$ $p^7 = r^7$ $p^8 = r^8$ $p^9 = r^9$ $p^{10} = r^{10}$ $p^{11} = r^{11}$ $p^{12} = r^{12}$ $p^{13} = r^{13}$ $p^{14} = r^{14}$ $p^{15} = r^{15}$ $p^{16} = r^{16}$ $p^{17} = r^{17}$ $p^{18} = r^{18}$ $p^{19} = r^{19}$ $p^{20} = r^{20}$ $p^{21} = r^{21}$ $p^{22} = r^{22}$ $p^{23} = r^{23}$ $p^{24} = r^{24}$ $p^{25} = r^{25}$ $p^{26} = r^{26}$ $p^{27} = r^{27}$ $p^{28} = r^{28}$ $p^{29} = r^{29}$ Soit R une racine imaginaire de l'équation $R^4 - 1 = 0$, racine qui doit être prise de manière que par ses puissances successives elle donne toutes les racines de l'équation $R^4 - 1 = 0$; cette condition sera remplie si dans la valeur $R = \cos(i + \sqrt{-1} \sin. j)$, on fait $j = \frac{2\pi}{4}$ ou le serait également si on, faisait $p = \sim$, 1 étant Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 27.41% accurate

300 THÉORIE DES NOMBRES. l'un des huit nombres plus petits que ao et premiers à ao , savoir : 1,3,7,9,11,13,17, 19. Cela posé nous ferons à l'ordinaire : $T = p + p'R + p''R' + p'''R > -H/7 - R'$ », et nous désignerons par T'' , T''' , T'''' . . . T'''''' , les polynômes semblablement formés en mettant successivement R'' , R''' , R'''' . . . R'''''' à la place de R . Il s'agit ensuite de trouver la quantité A , fonction de R seule, qui satisfait à l'équation $T = AT''$. On peut, pour cet effet, mettre T' sous la forme que donne son développement, savoir : $T' = \ll + \ll'R^* + a'' R^* - t - a'' R^6 + a'' R'' - + - b R + b' R \gg + b'' IV + V'' R' + b' \ll R' \% \text{ et alors on aura } a + (/ > \bullet)' + 2/// >''' + a/ >''/7\hat{I}''M4 - a/ >'''' . . . + 2p''p'' b = 2pp' + a p' p x'' - t - np'''p'''''' a p''pv'' . . . + a p x p''$, valeurs qui serviront à trouver l'expression des autres coefficients a' , a'' . . . $./, \pounds''$. . . , en avançant les lettres p d'un rang quand on passe de a à a' , de a' à a'' , etc. Mais il suffira de faire cette opération sur les valeurs des coefficients a et b réduits à la forme linéaire; ces valeurs sont, d'après les différents produits des deux lettres p , qui supposent la racine primitive $g = i^3$ (art. 537), $n = \text{---} ip \text{---} 'A p \text{---} a/'' \text{---} 4 / >'' \text{---} a p' \text{---} p'' \text{---} a^{\wedge}'' \text{---} 4^{\wedge}'' \text{---} \pm p'' \text{---} a/ \text{---} a/?1'' \text{---} a/;''' \text{---} 4/ >''^* \text{---} a/;'' \text{---} / >''1 - 2p''' \text{---} 4pm'' \text{---} zp''m 6 = ap + 2p' + ap' + *p''' + f p'' + !\ p' + [p''x + 2// + a/'' - Ha/'' + ap^* \bullet \blacksquare + 4^{\wedge}'' + 4/ > ; \ddot{i} + 4/ >''''$. Au moyen de ces valeurs on trouve immédiatement le coefficient de dans chacun des termes du polynôme $a + o'R^* + a''R^* . . . + a''R''$, leur somme est $\text{---} a \text{---} aR^* \sim 4R^4 \text{---} aR \ll \text{---} R^* \text{---} aR^{\circ} \text{---} 4R_{,,} \sim a R^4 \text{---} a R^*$; prenant de même le coefficient de p dans chacun- des termes du polynôme $bR + b'R^* + \pounds''R \setminus . . + ^{\wedge}''R$, la somme de ces coefficients sera $aR + 4R^4 - 4R'' + 4R'' + aR_{,,} - 4 - aR, 7 - l - 2R''$. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 29.09% accurate

CINQUIÈME PARTIE. 301 Réunissant ces deux sommes on aura la valeur totale de A, savoir: $i - 2 - aR^* - 4R^4 - aR^6 - R^* - aR''' - 4R'' - aRu - aR_{,c} (2) A - j \setminus + a r + 4 R^7 + 4R'' + 4 r.i + a r^* + a R''^4 - aR''$. (5g6) On aurait pu trouver plus simplement cette valeur par le procédé indiqué art. SBg. Voici ce second calcul confirmatif du premier. Considérons d'abord dans T^* la partie affectée des carrés des racines $p, p \setminus p''$. . cette partie est $p^* + pu R^* 4 - p^H R^* 4 - p''' R^* . . . 4 - p''' R''$. Si Tony substitue les valeurs $/?^* = a^4 - r \setminus /' = a + p'' \setminus$ etc., le terme constant a pour lequel on doit mettre $- a /) - a / - a / >'' . . . - a / >'' \% *$ donne dans la valeur de A un coefficient de p égal à la suite $- a (i 4 - R^* 4 - R^4 4 - R^6 . . . - h R'')$, valeur qui se réduit à zéro non-seulement pour A mais pour tous ses dérivés $A', A'', A''' . . . A^{*''''}$, excepté seulement pour A^* , qui résulte de A en mettant R'' à la place de R, et alors la suite précédente, au lieu de se réduire à zéro, devient égale à $- 4 \diamond >$ c'est-à-dire en général à $- n 4 - i$. Ainsi pour avoir un résultat absolument général nous devons conserver la suite précédente dans laquelle seulement on peut faire $R'' = i$, ce qui la réduit à $- 4 (i + R' + R^* + R^9 . . . + R'')$. Nous avons en outre le terme $px''' R''$, dans lequel $p''w^* = a + p$, ce qui donne dans A le coefficient R'' ou R^* . Il ne reste plus qu'à tenir compte des termes de T^* qui sont de la forme $a / ? l^* / ? v R J A''^4 v$; or parmi ces termes les seuls qui, réduits à la forme linéaire, contiennent p, sont d'après le tableau (i), $app'' R^9 + ap'' p' R'' + a / > 7 > , , R' i 4 - a / > l , , / >'' R , \ll 4 - 2 p'' p' R^* + apt, p'' R'' + 2 p'' pm'' R^1 + y'^ R'' - + - np' p'''' R , , + a /)'''' / l , , R'' + a / ? , , / >'''' R^1 , ^ \bullet a / ^'''' / R , ' 4 - a / > >'' R^* 6 + a ^ 7 ?'''' R'' + 2 p'' p'' R'' + 2 p'' p'' R + * p'' pm R' \gg 4 - a p'' p M R'' 4 - zpr' p^*'' R''$ Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 23.12% accurate

302 THÉORIE DES NOMBRES. La partie de A qui en résulte est donc $aR^* + 2R'' + aR'' + aR_{,4-t} - 2R_{,jh} - 2R_{-4} - aR_{,7+2R''} + aR'' + aR'' - f - 2R^{**} - \dots - 2R'' + aR'' + aR'' - 4 - 2R'' - 4 - 2RT - 4 - aR^* \ll + 2R_u + 2R_M$, ou en réduisant les exposants d'après l'équation $R'' = 1$, $a + 2R + 2R' + 2R_s + 4R_7 + 2R^* - 4 - 2R'' - \dots - 4R'' + 4R_{,J} + 2aR'^5 - 2R_6 + 2R'' + 4R'_1 + aR'$. On peut encore réduire cette valeur d'après l'équation $o = n - R + R' + \dots + R'^*$, ce qui donnera $-aR_1 - aR^* - aR_s + aR' - aR' - t - aR'' - aR'' + 2R_{,,} + 2R''$. Si l'on ajoute maintenant les trois parties trouvées, on aura $A = -4(i + R' + R_4 + R^* + R^* + R'' + R'' - t - R'_4 + R' - R'_1) - 4 - R' - aR_5 - 2R_4 - aR_s + 2R_7 - 2R_{,,} + aR'' - aR'' + aR'_1 + aR_u$, valeur qui étant combinée avec l'équation $0 = 1 + R + R' + R_1 + \dots - R''_9$, donnera le résultat déjà trouvé dans l'équation (a).

(597) Maintenant que nous connaissons une valeur de A de laquelle on peut déduire toutes les dérivées $A', A'', \dots A'''$ sans exception, nous pouvons établir la série d'équations qui résultent de la formule $T' = AT$: voici cette série $T' = AT, T'' = AT'', T''' = A''T, T'''' = A'''T, T'''' = A''''T, \dots A''T \setminus T' = A^*T'', T'' \gg = A''T''''$, $T_{,,J} = A'''T''$, $T'' \bullet \gg = A''$, $T''U, T'_1 \gg - A - T^*1$ (3) $T^* = A''T' T''^* A''T'' T'_1^* A''T^* T''''1 A'''' Ty$. Parmi ces équations on remarquera l'équation $T'' \ll = A''T^*$ dans laquelle T_1 étant ce que devient T lorsqu'on met R'' ou 1 à la place $A''TT''$, $TM \gg = ' \gg = AM, T$

The text on this page is estimated to be only 29.11% accurate

CINQUIÈME PARTIE. 3o3 de Rf on a $T''' = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}}} i$, et par conséquent $T'' = -A''$. Mais T'' étant ce que devient T lorsqu'on met R'^0 ou -1 à la place de Il , on aura $T'' = p - p' + pH - p''' + p'' - p' + p^{TM} - p''$, et cette suite, relative au nombre premier $n = 41$, est égale à $\pm \sqrt{2n}$ suivant la formule de l'art. 500, ; donc pour que l'équation. . . . $T^* = -A''$ subsiste, il faut qu'on ait $A'' = -n = -41$. C'est en effet la valeur qu'on tirera de la formule (a) en mettant R'' ou $-i$ à la place de R . Ainsi l'équation dont il s'agit est vérifiée dans le cas de $n = 41$ ou $m = 10$. Mais en général une semblable équation aura lieu pour toute valeur du nombre premier $n = 4m + 1$; cette équation sera $(T - i)' = A - i - T'' = 1$, $w = i$ et $\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}}} i$ étant des indices et non des exposants. En effet $T^* =$ « représente la série $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64} - \frac{1}{128} + \frac{1}{256} - \frac{1}{512} + \frac{1}{1024} - \frac{1}{2048} + \frac{1}{4096} - \frac{1}{8192} + \frac{1}{16384} - \frac{1}{32768} + \frac{1}{65536} - \frac{1}{131072} + \frac{1}{262144} - \frac{1}{524288} + \frac{1}{1048576} - \frac{1}{2097152} + \frac{1}{4194304} - \frac{1}{8388608} + \frac{1}{16777216} - \frac{1}{33554432} + \frac{1}{67108864} - \frac{1}{134217728} + \frac{1}{268435456} - \frac{1}{536870912} + \frac{1}{1073741824} - \frac{1}{2147483648} + \frac{1}{4294967296} - \frac{1}{8589934592} + \frac{1}{17179869184} - \frac{1}{34359738368} + \frac{1}{68719476736} - \frac{1}{137438953472} + \frac{1}{274877906944} - \frac{1}{549755813888} + \frac{1}{1099511627776} - \frac{1}{2199023255552} + \frac{1}{4398046511104} - \frac{1}{8796093022208} + \frac{1}{17592186044416} - \frac{1}{35184372088832} + \frac{1}{70368744177664} - \frac{1}{140737488355328} + \frac{1}{281474976710656} - \frac{1}{562949953421312} + \frac{1}{1125899906842624} - \frac{1}{2251799813685248} + \frac{1}{4503599627370496} - \frac{1}{9007199254740992} + \frac{1}{18014398509481984} - \frac{1}{36028797018963968} + \frac{1}{72057594037927936} - \frac{1}{144115188075855872} + \frac{1}{288230376151711744} - \frac{1}{576460752303423488} + \frac{1}{1152921504606846976} - \frac{1}{2305843009213693952} + \frac{1}{4611686018427387904} - \frac{1}{9223372036854775808} + \frac{1}{18446744073709551616} - \frac{1}{36893488147419103232} + \frac{1}{73786976294838206464} - \frac{1}{147573952589676412928} + \frac{1}{295147905179352825856} - \frac{1}{590295810358705651712} + \frac{1}{1180591620717411303424} - \frac{1}{2361183241434822606848} + \frac{1}{4722366482869645213696} - \frac{1}{9444732965739290427392} + \frac{1}{18889465931478580854784} - \frac{1}{37778931862957161709568} + \frac{1}{75557863725914323419136} - \frac{1}{151115727451828646838272} + \frac{1}{302231454903657293676544} - \frac{1}{604462909807314587353088} + \frac{1}{1208925819614629174706176} - \frac{1}{2417851639229258349412352} + \frac{1}{4835703278458516698824704} - \frac{1}{9671406556917033397649408} + \frac{1}{19342813113834066795298816} - \frac{1}{38685626227668133590597632} + \frac{1}{77371252455336267181195264} - \frac{1}{154742504910672534362390528} + \frac{1}{309485009821345068724781056} - \frac{1}{618970019642690137449562112} + \frac{1}{1237940039285380274899124224} - \frac{1}{2475880078570760549798248448} + \frac{1}{4951760157141521099596496896} - \frac{1}{9903520314283042199192993792} + \frac{1}{19807040628566084398385987584} - \frac{1}{39614081257132168796771975168} + \frac{1}{79228162514264337593543950336} - \frac{1}{158456325028528675187087900672} + \frac{1}{316912650057057350374175801344} - \frac{1}{633825300114114700748351602688} + \frac{1}{1267650600228229401496703205376} - \frac{1}{2535301200456458802993406410752} + \frac{1}{5070602400912917605986812821504} - \frac{1}{10141204801825835211973625643008} + \frac{1}{20282409603651670423947251286016} - \frac{1}{40564819207303340847894502572032} + \frac{1}{81129638414606681695789005144064} - \frac{1}{162259276829213363391578010288128} + \frac{1}{324518553658426726783156020576256} - \frac{1}{649037107316853453566312041152512} + \frac{1}{1298074214633706907132624082305024} - \frac{1}{2596148429267413814265248164610048} + \frac{1}{5192296858534827628530496329220096} - \frac{1}{10384593717069655257060992658440192} + \frac{1}{20769187434139310514121985316880384} - \frac{1}{41538374868278621028243970633760768} + \frac{1}{83076749736557242056487941267521536} - \frac{1}{166153499473114484112975882535043072} + \frac{1}{332306998946228968225951765070086144} - \frac{1}{664613997892457936451903530140172288} + \frac{1}{1329227995784915872903807060280344576} - \frac{1}{2658455991569831745807614120560689152} + \frac{1}{5316911983139663491615228241121378304} - \frac{1}{10633823966279326983230456482242756608} + \frac{1}{21267647932558653966460912964485513216} - \frac{1}{42535295865117307932921825928971026432} + \frac{1}{85070591730234615865843651857942052864} - \frac{1}{170141183460469231731687303715884105728} + \frac{1}{340282366920938463463374607431768211456} - \frac{1}{680564733841876926926749214863536422912} + \frac{1}{1361129467683753853853498429727072845824} - \frac{1}{2722258935367507707706996859454145691648} + \frac{1}{5444517870735015415413993718908291383296} - \frac{1}{10889035741470030830827987437816582766592} + \frac{1}{21778071482940061661655974875633165533184} - \frac{1}{43556142965880123323311949751266331066368} + \frac{1}{87112285931760246646623899502532662132736} - \frac{1}{174224571863520493293247799005065324265472} + \frac{1}{348449143727040986586495598010130648530944} - \frac{1}{696898287454081973172991196020261297061888} + \frac{1}{1393796574908163946345982392040522594123776} - \frac{1}{2787593149816327892691964784081045188247552} + \frac{1}{5575186299632655785383929568162090376495104} - \frac{1}{11150372599265311570767859136324180752990208} + \frac{1}{22300745198530623141535718272648361505980416} - \frac{1}{44601490397061246283071436545296723011960832} + \frac{1}{89202980794122492566142873090593446023921664} - \frac{1}{178405961588244985132285746181186892047843328} + \frac{1}{356811923176489970264571492362373784095686656} - \frac{1}{713623846352979940529142984724747568191373312} + \frac{1}{1427247692705959881058285969449495136382746624} - \frac{1}{2854495385411919762116571938898990272765493248} + \frac{1}{5708990770823839524233143877797980545530986496} - \frac{1}{11417981541647679048466287755595961091061972992} + \frac{1}{22835963083295358096932575511191922182123945984} - \frac{1}{45671926166590716193865151022383844364247891968} + \frac{1}{91343852333181432387730302044767688728495783936} - \frac{1}{182687704666362864775460604089535377456991567872} + \frac{1}{365375409332725729550921208179070754913983135744} - \frac{1}{730750818665451459101842416358141509827966271488} + \frac{1}{1461501637330902918203684832716283019655932542976} - \frac{1}{2923003274661805836407369665432566039311865085952} + \frac{1}{5846006549323611672814739330865132078623730171904} - \frac{1}{11692013098647223345629478661730264157247460343808} + \frac{1}{23384026197294446691258957323460528314494920687616} - \frac{1}{46768052394588893382517914646921056628989841375232} + \frac{1}{93536104789177786765035829293842113257979682750464} - \frac{1}{187072209578355573530071658587684226515959365500928} + \frac{1}{374144419156711147060143317175368453031918731001856} - \frac{1}{748288838313422294120286634350736906063837462003712} + \frac{1}{1496577676626844588240573268701473812127674924007424} - \frac{1}{2993155353253689176481146537402947624255349848014848} + \frac{1}{5986310706507378352962293074805895248510699696029696} - \frac{1}{11972621413014756705924586149611790497021399392059392} + \frac{1}{23945242826029513411849172299223580994042798784118784} - \frac{1}{47890485652059026823698344598447161988085597568237568} + \frac{1}{95780971304118053647396689196894323976171195136475136} - \frac{1}{191561942608236107294793378393788647952342390272950272} + \frac{1}{383123885216472214589586756787577295904684780545900544} - \frac{1}{766247770432944429179173513575154591809369561091801088} + \frac{1}{1532495540865888858358347027150309183618739122183602176} - \frac{1}{3064991081731777716716694054300618367237478244367204352} + \frac{1}{6129982163463555433433388108601236734474956488734408704} - \frac{1}{12259964326927110866866776217202473468949912977468817408} + \frac{1}{24519928653854221733733552434404946937899825954937634816} - \frac{1}{49039857307708443467467104868809893875799651909875269632} + \frac{1}{98079714615416886934934209737619787751599303819750539264} - \frac{1}{196159429230833773869868419475239575503198607639501078528} + \frac{1}{392318858461667547739736838950479151006397215279002157056} - \frac{1}{784637716923335095479473677900958302012794430558004314112} + \frac{1}{1569275433846670190958947355801916604025588861116008628224} - \frac{1}{3138550867693340381917894711603833208051177722232017256448} + \frac{1}{6277101735386680763835789423207666416102355444464034512896} - \frac{1}{12554203470773361527671578846415332832204710888928069025792} + \frac{1}{25108406941546723055343157692830665664409421777856138051584} - \frac{1}{50216813883093446110686315385661331328818843555712276103168} + \frac{1}{100433627766186892221372630771322662657637687111424552206336} - \frac{1}{200867255532373784442745261542645325315275374222849104412672} + \frac{1}{401734511064747568885490523085290650630550748445698208825344} - \frac{1}{803469022129495137770981046170581301261101496891396417650688} + \frac{1}{1606938044258990275541962092341162602522202993782792835301376} - \frac{1}{3213876088517980551083924184682325205044405987565585670602752} + \frac{1}{6427752177035961102167848369364650410088811975131171341205504} - \frac{1}{12855504354071922204335696738729300820177623950262342682411008} + \frac{1}{25711008708143844408671393477458601640355247900524685364822016} - \frac{1}{51422017416287688817342786954917203280710495801049370729644032} + \frac{1}{102844034832575377634685573909834406561420991602098741459288064} - \frac{1}{205688069665150755269371147819668813122841983204197482918576128} + \frac{1}{411376139330301510538742295639337626245683966408394965837152256} - \frac{1}{822752278660603021077484591278675252491367932816789931674304512} + \frac{1}{1645504557321206042154969182557350504982735865633579863348609024} - \frac{1}{3291009114642412084309938365114701009965471731267159726697218048} + \frac{1}{6582018229284824168619876730229402019930943462534319453394436096} - \frac{1}{13164036458569648337239753460458804039861886925068638906788872192} + \frac{1}{26328072917139296674479506920917608079723773850137277813577744384} - \frac{1}{52656145834278593348959013841835216159447547700274555627155488768} + \frac{1}{105312291668557186697918027683670432318895095400549111254310977536} - \frac{1}{210624583337114373395836055367340864637790190801098222508621955072} + \frac{1}{421249166674228746791672110734681729275580381602196445017243910144} - \frac{1}{842498333348457493583344221469363458551160763204392890034487820288} + \frac{1}{1684996666696914987166688442938726917102321526408785780068975640576} - \frac{1}{3369993333393829974333376885877453834204643052817571560137951281152} + \frac{1}{6739986666787659948666753771754907668409286105635143120275902562304} - \frac{1}{13479973333575319897333507543509815336818572211270286240551805124608} + \frac{1}{26959946667150639794667015087019630673637144422540572481103610249216} - \frac{1}{53919893334301279589334030174039261347274288845081144962207220498432} + \frac{1}{107839786668602559178668060348078522694548577690162289924414440996864} - \frac{1}{215679573337205118357336120696157045389097155380324579848828881993728} + \frac{1}{431359146674410236714672241392314090778194310760649159697657763987456} - \frac{1}{862718293348820473429344482784628181556388621521298319395315527974912} + \frac{1}{1725436586697640946858688965569256363112777243042596638790631055949824} - \frac{1}{3450873173395281893717377931138512726225554486085193277581262111899648} + \frac{1}{6901746346790563787434755862277025452451108972170386555162524223799296} - \frac{1}{13803492693581127574869511724554050904902217944340773110325048447598592} + \frac{1}{27606985387162255149739023449108101809804435888681546220650096895197184} - \frac{1}{55213970774324510299478046898216203619608871777363092441300193790394368} + \frac{1}{110427941548649020598956093796432407239217743554726184882600387580788736} - \frac{1}{220855883097298041197912187592864814478435487109452369765200775161577472} + \frac{1}{441711766194596082395824375185729628956870974218904739530401550323154944} - \frac{1}{883423532389192164791648750371459257913741948437809479060803100646309888} + \frac{1}{1766847064778384329583297500742918515827483896875618958121606201292619776} - \frac{1}{3533694129556768659166595001485837031654967793751237916243212402585239552} + \frac{1}{7067388259113537318333190002971674063309935587502475832486424805170479104} - \frac{1}{14134776518227074636666380005943348126619871175004951664972849610340958208} + \frac{1}{28269553036454149273332760011886696253239742350009903329945699220681916416} - \frac{1}{56539106072908298546665520023773392506479484700019806659891398441363832832} + \frac{1}{113078212145816597093331040047546785012958969400039613319782796882727665664} - \frac{1}{226156424291633194186662080095093570025917938800079226639565593765455331328} + \frac{1}{452312848583266388373324160190187140051835877600158453279131187530910662656} - \frac{1}{904625697166532776746648320380374280103671755200316906558262375061821325312} + \frac{1}{1809251394333065553493296640760748560207343510400633813116524750123642650624} - \frac{1}{3618502788666131106986593281521497120414687020801267626233049500247285301248} + \frac{1}{7237005577332262213973186563042994240829374041602535252466099000494570602496} - \frac{1}{14474011154664524427946373126085988481658748083205070504932198000989141204992} + \frac{1}{28948022309329048855892746252171976963317496166410141009864396001978282409984} - \frac{1}{57896044618658097711785492504343953926634992332820282019728792003956564819968} + \frac{1}{115792089237316195423570985008687907853269984665640564039457584007913129639936} - \frac{1}{231584178474632390847141970017$

304 THÉORIE DES NOMBRES. (398) Les propriétés des fonctions T et A sont comprises en grande partie dans les équations (3), mais on a de plus deux autres séries d'équations particulières à chacune de ces fonctions. La première est le développement de 1 équation générale $TWIV-*$ - «) = «, elle comprend dans le cas présent les dix équations suivantes : $\wedge rp f_j, \gg \langle iii \_ rrw fpi \rangle ii r f \text{ " 'y iTi rrtf, / rr * iT \langle pu 'pu \rangle (5)$
 $== TTT, ,, \wedge = T " T * " ' j, \gg \langle \rangle fp \langle ' rp \gg m' j, \langle \_ \wedge ' pii \wedge i$ Il suffirait de donner la démonstration d'une de ces équations, d'où l'on déduirait aisément celle de toutes les autres, mais cette démonstration serait entièrement semblable à celles que nous avons données dans plusieurs autres exemples , et il est inutile de nous y arrêter. Maintenant si on multiplie entre elles les deux équations $T^* = AT'$, $T'''' = A^* " T''$, ĩ prises dans le tableau (3), on aura $(TTI'' , ,) l = 0 r T'''' (AA'''')$, ou $/i' = n AA''''$; donc $/i = AA'' m$. Dans cette équation la fonction A peut être désignée par $*(R)$, et alors la fonction $A^* "$ sera désigné par $*(R^* 9)$ ou $*(\wedge)$; on aura donc $*R^* g = n$; mettant dans cette équation R'/R' , etc. à la place de R , on aura $\$R, Qjp = n, \$R3\$j^y = n$, etc., ce qui donnera $n = A' A''' ' , n = A'' A''' ,$ etc. , d'où l'on voit qu'on aura pour les fonctions A une série d'équations semblable à la série (5) qui a lieu pour les fonctions T , savoir : $n = A A^* "" = A' A^* "" * = A'' A^* ' = AWA'' = A'' A''' (' S = ATA1, " = A'' A, " = A'' , A'' = A'' , , A'$; mais cette série de neuf équations ne s'étend pas jusqu'à la dixième, comme cela a lieu pour la série (5), car on a prouvé que l'équa* tion $(A'')^* = \langle \rangle$ serait inexacte, et doit être remplacée par l'équation $A' = \text{---} n$. (599) Nous concluons des deux séries (5) et (6), que $n \neq 7$

est le Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 21.32% accurate

CINQUIÈME PARTIE. Soit α réel des quantités
imaginaires T et A , de sorte qu'on peut faire $T = \frac{1}{i} \left(\cos \frac{4-t}{2} - i \sin \frac{4-t}{2} \right)$,
 $A = \frac{1}{i} \left(\cos \frac{4-t}{2} + i \sin \frac{4-t}{2} \right)$, et en général $TW = \frac{1}{i} \left(\cos \frac{J+1}{2} - i \sin \frac{J+1}{2} \right)$, $AW = \frac{1}{i} \left(\cos \frac{J+1}{2} + i \sin \frac{J+1}{2} \right)$,
(De plus on voit que les fonctions inverses de T et $A(m)$, savoir :
 $j(-a-i)$ et $j(a-i)$ s'expriment en $\cos$ et $\sin$, changeant simplement le signe de i dans les valeurs de T et $A(m)$; de sorte qu'on a $T^{-1} = \frac{1}{T}$, $A^{-1}(m) = \frac{1}{A(m)}$,
Donc si on réunit la somme des fonctions $T + T' + T'' + \dots + T^{(n)}$ à celle de leurs inverses $\frac{1}{T} + \frac{1}{T'} + \dots + \frac{1}{T^{(n)}}$, la somme totale
est $n \cdot \left(\cos \frac{u}{2} + \cos \frac{u'}{2} + \dots + \cos \frac{u^{(n)}}{2} \right)$. Si l'on joint ensuite à cette
somme la fonction $T^{(n)} \pm$ et la fonction $T^{(n)}$ qui n'est autre chose que $p \cdot \pi - jf' \dots + p1'' - i$, on aura l'équation (7) $20f = I \pm \frac{7-4-2}{1v} (\cos w + \cos \alpha' + \cos \alpha) \dots + \cos \alpha'' \dots$, de laquelle on pourra
déduire toutes les racines de l'équation $cm \cdot p$, et par conséquent toutes celles
de l'équation proposée $X = 0$. Car chaque racine p étant de la forme
 $p = \cos \frac{\alpha}{2}$, on en tire deux racines de l'équation $X = 0$, savoir : $x = \cos \frac{\alpha}{2}$
 $= \frac{1}{2} \left(e^{i\alpha/2} + e^{-i\alpha/2} \right)$. Tout se réduit donc à trouver les valeurs des angles α ,
 α' , $\alpha'' \dots$ U. 39 Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 19.98% accurate

306 THÉORIE DES NOMBRES. mais pour cela il faut connaître préalablement celles des angles $e, \hat{0}', 0'' \dots 6^{\text{TM}*}$ qui servent à déterminer les quantités $A, A', A'' \dots A'''$. (Goo) Pour rendre la formule (4) applicable à tout terme A'' de la série $A, A', A'' \dots A'''$, il faut substituer $RI+m$ à R , et on aura généralement $A<\langle\rangle = \_a R^{3+3*} \_2 R^{4+4} \_2 R^{5+5} \langle + a R^{7+7m} + R^{8+8} \langle \_a R^{9+9} \rangle + a R'' + II'' \_a RI^{2+} \wedge / i + a Ri^{3-*} - i^3 \langle I + a Ri^{8+i8} \langle$ Faisant ensuite $R = \cos. \wedge^{4-1} / \_ i \sin. p.$, et $A(m) = \langle t (\cos. 0^{\wedge 4} - V / \_ i \sin. \hat{0}^{\wedge})$, on aura pour déterminer $b[m]$ les deux équations $n * \cos. 6(\prime) = _ a \cos. (3 4- 3 m) p. _ a \cos. (4 4- 4 \prime) \{ * _ 2 \cos. (5 + 5 m) p. 4- a \cos. (74-7^{\wedge}) 11 - h \cos. (8 -f- 8 m) p. _ a \cos. (9 + 4- a \cos. (1 1 4- 1 1 m) ji _ a \cos. (i a 4- 1 a/ra) p. -+- a \cos. (1 3 4- 1 3 m) p, 4- a \cos. (184- i8w) \{ t. i n \rangle \sin. 6w = _ a \sin. (34-3/7i) p. _ a \sin. (4+4^{\wedge})^{\wedge} _ a \sin. (54- 5m) p. H- a \sin. (7 + 7 m) p. + \sin. (8 4- 8 m) p. _ a \sin. (9 4- 9 /n) p. 4- a \sin. (i 1 4- 1 iw) n _ usinai a + 1 2/n) p. 4- a \sin. (i34- i3m) | * 4- a \sin. (i8+ i8m) (t. Réduisant ces deux équations d'après la valeur $tt=\wedge$, qui donne pour un entier quelconque a , $\cos. (20 a p. \pm \pounds p.) = \cos. \hat{0} p.$, $\sin. (ao a pi bft) = dzaîn.bp$, on aura $\blacksquare n' \cos. = a \cos. (2 4- 2 m) pi \_ 2 \cos. (3 4- 3 m) p. \_ 2 \cos. (4 4- 4 m) p. 4- 4 \cos. (7 4- 7 \cos. (8 4- 8 m) p, 4- a \sin. \sim \blacksquare n v si n . 9, >> = \_ a si n . (2 4- 2 / \rangle) (t \_ a \sin. (3 4- 3 m) p. \_ a \sin. (4 4- 4 m) p. 4- 3 \sin. (8 4- 8 m) p. \_ 4 \sin. (9 4- 9 m) p. \_ 2 \cos. \_ .$ Digitized by Google$

The text on this page is estimated to be only 12.27% accurate

308 THÉORIE DES NOMBRES, milieu qui donnent et /<'eos.6"
 $=j=)^6\cos.i^* - \cos.2\{^* = -5,0j535Go92i\ 45871 \ll \sin.9T' w- 6\sin.p.$
 $- 3 \sin.3\ fx - \text{fin}.4\ y, = -3 \cdot 98072\ 8987\ 1 \ll 978a\ 6'' \ll -1\ 4\ 1^* 3^{\wedge}$
 $38''\ 45 \ll 73\ 63 = \hat{o} - a\ \pi. /i'\cos.\hat{o}'' - -7\ -4- 5\cos.2|i. = 0.5450849718$
 $74/35 \ll \gg \sin.6'''s=: 6\sin.2(i+- 3 \sin.4p. = 6.37988\ 10626\ 4 \gg 300\ e'' =$
 $6i5^*0' 59''. 81\ 861\ 7o3=6'-\gg-81i \blacksquare \ll T\cos.\hat{o}T, = 1\ 4- \cos.2\ p + Cco^*. 3|^* =$
 $5.3357a85o8i\ 3978\ f) n' \sin. ()'''=: -\sin.2|i - 6\sin.3|i4- a\sin.4|^* = -3 \cdot$
 $53977\ 4^* 85g\ 5\ 1\ 846''' = -33, > 33'38''. 45673\ 63 = 0 + 4i^* \text{ Rapprochant tous}$
ces résultats, on a le tableau suivant des valeurs de b , où l'on voit que
quatre de ces quantités telle* que 6 , 6', $\hat{o}'''$, V suffisent pour déterminer Jes
cinq autres $\hat{o} = -105^\circ 33' 38'' . 45673\ 63\ 1' = -58\ 53\ o . i8i38a97\ \hat{u}'' = 2\ 26$
 $21 . 5432637 = 0\ 1080\ h''' = i4i\ 26 . aj43ooo993\ (9)\ \hat{o}'' = -1\ 4\ 1\ 20\ 24$
 $. 6902852726\ \$r\ \alpha\ 69\ 5g\ 26 . 2i43o\ 00993\ jx\ h''' - 7a^* r \ll s - i4i\ 33\ 38$
 $. 4567363\ s=e - 36^\circ\ \hat{o}^*'' = 85\ 6\ 59 . 81861703 = 6' -f- i44^\circ 9-' = -33\ 33\ 38 .$
 $45673\ 63 = e\ 4- 72e\ (60\ 1) \text{ Venons maintenant au calcul des angles } <^* . \text{ On a}$
par les équations (3) $T - II\ T''' - 111 - T - 1^* \cdot \cdot \cdot T > A' A' A' A' ' 1 -$
 $A'' \sim A < A'' A''' ' T \gg - mi: - i'' 1 - A''' \sim A \ll A'' A'' i7X^{\wedge} \text{ Multipliant la}$
valeur de T'' par celle de T'', et observant que par Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 17.66% accurate

CINQUIÈME PARTIE. 309 If* équation* (5) po a T" T 'm », Je p
 rodait donne T,<=/[^]A*•A',A'¥•A",. Substituant dans cette équation les
 râteaux de A, A', A"', AT" , exprimées en fonctions de ê , ô' , fl"', 0*" ;
 substituant également pour T sa valeur en fonction de », on aura et par
 conséquent (16) a— ">*+w+**"+ se+a^r^ 7a« Substituant enfin dans cette
 formule les valeurs approchées des angles 0, on a la valeur approchée
 o»=-49aa'46".6«i35 3o3i. Cette valeurst nécessaire poiirnous diriger dans
 la détermination des autres angles de manière à éviter toute espèce
 d'ambiguïté dans la formule générale de solution, ■-'■•! M 1 . m étant
 connu on a les valeurs tant exactes qu'approchées des angles «', o»"', «o"',
 «avoir : * »' =2u—H = faS' 5".i34o3oa38 «'//=4«— û' *=73 Ag 10
 .449443446 «*"'=8«— 4e— a 6'— e"'= 5 38 54 . 68458 6793 Ces premiers
 résultats font connaître la valeur des quatre fonctions T, T\ T\T" et de leurs
 inverses T""", T""", T", T". (<ioa) Pour aller plus loin il faut commencer par
 chercher la valeur de T' au moyen des deux équations T"* = A'T", T*»=
 A"T", d'où l'on tire T"4 = A"" A* T" = HJïllÛl et par conséquent
 4«"=aô"+6T— 1 Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 29.85% accurate

310 THÉORIE DES NOMBRES. Mais comme le second membre de cette équation peut être augmenté à volonté de $2ir$, $4;r$ et $6r$, on aura quatre valeurs de t , savoir : $w = \_$, $w = 1$, $a\hat{o}''-+ft' \rightarrow \gg''$, $a''+8 \rightarrow w'''$, $W \rightarrow \wedge h\hat{i}T$, $W = \wedge hT7C$, entre lesquelles il faut choisir celle qui devra correspondre à la valeur prise pour u . Pour faire ce choix il faut recourir au principe dont nous avons déjà donné diverses applications; il consiste à déduire T'' du produit TT' , au moyen de l'équation $TT'=M T''$ dans laquelle M doit être une fonction de R seule qu'il s'agit de déterminer. Je remarque d'abord que cette quantité M , en tant qu'elle résulte de l'équation $TT' M = -yr$, a pour expression $M=f$ [cos. (« $W \rightarrow \ll O+W \rightarrow i \sin.(\ll + \ll' \rightarrow \gg)$ »)] > ce qui assimile sa forme à celle des quantités T , A , T , A' , etc. Si donc on trouve directement $i M = /i \gg (\cos.e + l/ \rightarrow i \sin.0)$, on aura $\ll - + \bullet \bullet \gg' \rightarrow \ll'' = 0$, et par conséquent $\ll'' = \ll \bullet \gg + w' \rightarrow 0 = 3 \ll \rightarrow 9 \rightarrow 0$. Comparant ensuite cette valeur aux quatre déjà trouvées, on verra laquelle de ces quatre valeurs doit être adoptée. Tout se réduit donc à trouver la valeur de M d'après l'équation $TT'=MT''$, et on voit que M doit être égal au coefficient de p dans le produit développé et réduit à la forme linéaire des deux jxriynomes $T = p + p'R + /R' + /R' + p''' R \gg T = p + />'R' - t - p''R + />''' R \ll + p''*W$. Considérons d'abord la partie Digitized by Google

CINQUIÈME PARTIE. $3n p^2 + p^2 W + p^3 R_6 + p^4 R_7 + R_7$, dans laquelle il faudra substituer les valeurs des carrés $p^2 = 2 + p^2 y$ $p^2 = a + p^2$, etc. : le terme constant 2, commun à tous ces carrés, étant la même chose que $1 p$ — etc., le coefficient de p qui en résulte pour faire partie de M , est $— a(i + R_J + R_s + R_9 + R_i 7)$. Cette quantité multipliée par $1 — R'$ qui n'est pas nulle (même quand 011 mettrait à la place de R un terme quelconque de la suite R^* , R_3 , R^* , . . . R_9), donne le produit $— a(i — R_6)$ qui est nul : elle peut donc être entièrement omise dans la valeur de M . Il ne faut donc considérer dans cette première partie du produit TT que le seul terme $y^2, , R_4' = fa - + - / >) R_4'$ qui donnera dans M le terme R_4' ou R^* . Soient $/ > ^, / > v$ deux termes consécutifs du tableau (1), il y aura dans le produit TT deux termes $p^V - p \backslash R^{+*} + R^{*+}$, qui, à raison de la partie p comprise dans $/ > ^, / > v$, donneront dans M les deux termes $R_4' + V H - R_4^{*4} * \backslash$ Voici le résultat de tous les termes formés semblablement d'après le tableau (1), pp^2 . . . $R' + R^2 p m^2 p^*$. . . $R_M + R_4^* P^4 P^2 > . R^2 + R^2 p^0 p^2$. . . $R' V R^2 p^2 p^4$. . . $R^* h - R^{**} p^2 p^4$. . . $R, 0 - t - R^2 p^2 p^4$. . . $R^2 + R_9 p^4 p^4$. . . $R^2 - i - R_4^2 p^2 p^4$. . . $R^2 + R_M p^2 p^4$. . . $R^2 + R_6 p^4 p^4$. . . $R_4^2 - t - R_4' p^2 p^4$. . . $R_s, + R^* < p^2 p^4$. . . $R_s, + R_4^* p^2 p^4$. . . $R_9 - > - R^2 p^2 Y$. . . $R_4 - h R_s' p^2 p^4$. . . $R_9 + R, p^2 p^4$. . . $R^2 - h R_1' p^2 p^4$. . . $R_M + R_4 S p^2 p^4$. . . $R^2 + R_J 7$ Ajoutant toutes ces puissances de R au terme déjà trouvé R' , et réduisant les exposants d'après l'équation $R^2 = 1$, on aura

The text on this page is estimated to be only 18.56% accurate

3ia THÉORIE DES NOMBRES. $M = 3R' - hR' + R^{\wedge}R^* + 4R_s 4 - 2$
 $R' 4 - R^* - t - 4R' + R^* 4 - 4R_{,,} + aR'' + aR'4 + 4R_{,i} + 3R'' + 3R_{,H} - 2R', + R''$. Cette
quantité, réduite ultérieurement au moyen des équations $R''^* \gg i, i \gg R' -$
 $h R_1 \gg -R_6 + R^* = 0$, donne enfin (ia) $M \gg 5R + aR_J \gg 4R_4 + 2R$. (6o3)
Substituant dans cette formule les valeurs $R^{\wedge} \cos.n + l \gg i \sin.i, M^{\wedge}/i^*$
 $(\cos.0 + l \gg i \sin.0)$, on aura pour déterminer G les deux équations, « $\bullet \cos.$
 $0 = \gg j \cos.ji - f^* 2 \cos.3f^* \gg 5.48182 5roo48i n^* \sin.0 = \gg 3 \gg \sin.jt = \gg$
 3.309016994375 d'où l'on tire $0 \gg 148' 53' o'' 18 1 38 297 = 0' \gg 7$ ». Il
suffit d'ailleurs de comparer les formules qui donnent 0 et 6' pour s'assurer
que l'équation $0 = \% ' \gg 7$, n'est pas seulement approchée, mais qu'elle est
rigoureuse. Connaissant 0, l'équation $m''^* = o \& \gg 0$ donnera tofttfi 8".
65406 o 1 77. D'un autre côté on a $\hat{O} \pm^{\wedge} = 1 r 18' 1 8''$. 654o6 01 77, on
voit donc que parmi les quatre valeurs de «" rapportées ci-dessus, celle
qu'on doit choisir pour correspondre à la valeur prise $|K \gg ur u \text{ est } \gg = j - y - ; -$
k. On a aussi en d'autres termes $J' \gg m - + \bullet \gg ' \gg 0$, ou Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 22.15% accurate

CINQUIÈME PARTIE. 3i3 T''' ensuite to* se déduira de l'équation $T = -\frac{1}{2}r$ qui donne $\frac{1}{2}aw''_6 = 6co - a\hat{o} - a\hat{o}' - Q'' - 4x$, ou $o, T = 6 \gg - 3e - i o' + 7a'' = a i a^* i o' 15''$. 76485 6654 Au moyen des angles $\langle \blacksquare \rangle''$ et $* \gg'$ on connaît maintenant les fonctions T'' et $T\%$ ainsi que leurs inverses T''' et $T^{*''}$. Il ne nous reste plus à trouver que les valeurs de T'' , T'' et T''' qui feront connaître leurs inverses T''' , T''' et T' . (6o4) La valeur de T'' peut être tirée des équations $T'' \ll A^* T''$, $T'' \gg = n$, d'où résulte $T''^* = i A'^*$, et par conséquent $4^* \gg'' = 20'' + 2/**$, ou $w'' = Te'' 4 - 7/1 \gg$, // devant avoir l'une des valeurs 0, 1, 2, 3. Pour fixer cette incertitude nous aurons recours à l'équation $TT'' = NT''$ où N doit être une fonction de R seule, ainsi $\text{expri} N = i7 [\cos. (\ll + \frac{1}{2} \vee - 1 \sin. (\gg - + - \ll''))]$. Donc si on trouve directement $N = \frac{1}{i} T (\cos. A - + - V / - 1 \sin. A)$, on aura $w - t - \ll'' = A$, ou $* \gg'' c = u W - A$; on aura donc aussi $w + u''' - A = j8'' - t - 7 A^*$, 011 $A = M W - \hat{ir} \sim 7 A \ll = 5 \ll - 2 \ll - e' - f\hat{o}'' - 7/ir$. D'ailleurs on a $5M = fe + T\hat{o}' + 78'' \blacksquare + \blacksquare 36''$; donc $A = T(e + 6'') + 36^\circ - 'thir$, ou en valeurs numériques $a = 95 - 26' 36''$. 1 3323 3o5 1 — { h «. n. 40 Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 27.88% accurate

3i4 THÉORIE DES NOMBRES. Maintenant la valeur de N , calculée directement, n'est autre chose que le coefficient de p dans la valeur du produit TT''' développé et réduit à la forme linéaire; or, par le même procédé qui nous a servi à déterminer le coefficient M , on trouve (i3) $N = -io(n-R\hat{4}-R,*+R,i)+R,^{\circ}+2-MR+aR*+3R,+R4+Rs+3R64-3R'+aR,+3R\rangle+2R'-H-3R,,+aR',+R',+R,5+R'6+R''+3R'9$. Cette valeur de N a lieu quand même au lieu de R on mettrait $R', R'', R4. . .$ jusqu'à R'' , ce qui changerait N en $N', N'', N'''. . . N''''$. Mais pour les valeurs $N, N'', N'''. . . N''''$ dont l'indice est pair, on pourra simplifier la formule en faisant $R'' = -i$, et $i - R* + R* - R6 f - R' = 0$, ce qui donnera la valeur réduite (i4) $N = -2 + 4R + R5 - R4 + 3R6 + 3R$. Comme il ne s'agit ici que de la première valeur de N qui répond à la valeur $R = \cos. ji \vee - 1 \sin. ji$, et qui est représentée par $n1 (\cos. A + \wedge - 1 \sin. A)$, on aura les deux équations suivantes pour déterminer A , $1 n \cdot \cos. A = 4 \cos. ji - 4 \cos. 3 \{ * - 2 \cos. 3(a = -0.60741 24169 04i 18 w) \sin. A = 2 -4- 8 \sin jz + \bullet \sin. 4f* = 6.374^{8987589876}$ Ces équations donnent $A = 95-26'36''.13324$, d'où il suit qu'on a $h = 0$ et $\ll = 7(1''$, ou par approximation $\ll = -70' 40' 1'' . 345i4 26363$. On peut aussi mettre $\ll$ sous la forme $= 5\ll - \ddot{i} 0 - \backslash \bullet - \pm e''' + \pounds 6'' - 36^*$, comprise dans la formule générale $\ll w = (m+i)^* \rangle - \rangle - aw$, $\ll w$ étant une quantité qui ne dépend que des quatre angles $0, 0', 0''', 0''$, et de l'angle $|i| = 180$. Digitized by Google

CINQUIÈME PARTIE. 315 La valeur [de T'' étant connue par celle de w'' , on connaît en même temps son inverse T''' ; de plus cette même valeur détermine celle de T'' par l'équation T'^{-1} ; car ayant $w'T = -\frac{1}{6}$, on a $T, * = \frac{1}{i}(\cos.9'' - f/l - i \sin.8'') = \frac{1}{i} A'$ et par conséquent $T'' = nY$. Nous savions déjà que $T'1$ ne pouvait être que $-h n \sim$ ou $-nT$; ainsi il ne reste plus d'incertitude sur cette détermination. (605) Venons maintenant aux fonctions T'' et T''' , les seules qui nous restent à déterminer avec leurs inverses $T^{*''}$ et T'' . On peut tirer T'' de l'équation $T^{*'} = A''T', M = \hat{i} \sim$, qui donne $2w'' = J'' - m^*$ ou $2u'' = 9'' - \langle T + as, \text{ et par conséquent } 0'' M \rangle \& \gg \langle Ci \rangle \gg \langle \blacksquare \rangle = OU U \gg = h 77. a a$ De même T''' peut être tiré de l'équation $TT_{,,} \gg = AT'', TIT'' = \wedge \xi, \sim$ qui donne les deux valeurs $8^{TM} - b)' * >''' = - -, \langle S''' = - +T. a a$ Ensuite pour décider, dans chacun de ces cas, quelle est la valeur qu'on doit adopter, on pourrait recourir à la méthode ordinaire qui consiste à chercher les quantités P et Q , fonctions de R seule, d'après les équations $TTT, = PT''$, $TT'' = QT'''$. Car connaissant T et T^{TM} , ces équations donneront les valeurs de T'' et T''' , ou celles des angles w'' et ta''' . Mais il se présente dans ce cas un moyen plus simple de parvenir aux résultats cherchés; et ce moyen qui pourra être employé dans des cas semblables, a l'avantage de fournir une nouvelle suite de théorèmes sur les fonctions T . (606) Reprenons l'équation $TT' = MT''$ et supposons que dans cette équation on substitue successivement $R', R \setminus R4. . .$ jusqu'à $R \gg$ à la place de R ; ce qui changera M en $M', M'', M''' . . . M''''$. On formera ainsi une nouvelle série d'équations qui sont autant de théo4o. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 22.40% accurate

3io THÉORIE DES NOMBRES, rèmes sur les fonctions T, savoir : $rrr=Mr, TT''=MT, rT=M'', ri'', t''T',,=m''T'', 'L, "T'1 M''T'' T'' T'' ^{[*rJ, ",, rj, \langle irj, *i \rangle i M^*1 T r V^* ' ' T^{**} M^*, rY''' ^ i ^ ^ \langle m'j'itii \rangle \backslash ['''T'' f_j''^*T''I, \sim M'^T''' XJX' M'T^{**} T^* ' T^{**} M'' T^{**} 'j, \rangle n'j, \rangle =]y| \langle ii, j, \rangle \langle iii rptiiifp \rangle ii\_iy^{\rangle ni} > p > rj, \rangle i \rangle fp < \rangle \_ '^ \xi in'p(f rpi \rangle \rangle pii \_ ^| \langle 'p \rangle ii$ Dans la série précédente si on multiplie entre elles les équations extrêmes , ainsi que deux équations quelconques également éloignées des extrêmes, les produits offriront une propriété des fonctions M analogue à celle des fonctions A, et contenue dans les équations suivantes : $h = M M'''' = M' M'''' = M'' M'''' = M'''' M'''' = M'' M'''' = M' M'''' (I \} = M'' M'''' = M'''' M'''' = M'''' M''''$ Cette suite ne s'étend pas jusqu'à l'équation $/i = (M'')$ qui serait inexacte; on voit au contraire par la io* des équations (i5) qu'on a $M'' = T'''' = i$. Il résulte de ces équations qu'un ternie quelconque delà suite M, M', M'', etc. peut se représenter par la formule $M(m) = \langle U \cos.e(mW-i \sin.eOT) \rangle$. Dans le cas de $m = 0$, nous avons déjà trouvé par la formule (la), $M \Rightarrow T(\cos.0-f-l/ - i \sin.0), 0=d' - jit.I/orsque/w$ sera un nombre pair , ce qui a lieu pour tous les termes M'', M'' , M'' , etc. , on pourra calculer encore par la formule (la) l'angle ew qui répond à Mw, en mettant dans cette formule $R''1-''1$ ou $RJI+I$ à la place de R : il en résultera les deux équations, $tt7COS.0va') = - 5cOS.(2t + + 2COS.(6^* + 3)|A . - 4cos.(io/+5) \{ i + 2cos.(i8t + 9)lu n 1 \sin.0v - - 5sin. (ai + + 2sin.(6t + 3)|^* - 4sin.(ioi + 5)|^* + asin.(i8t + y)|A$. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 27.04% accurate

CINQUIÈME PARTIE. 3i7 Par exemple pour trouver la valeur de θ'' dans la formule $M'' = \frac{1}{i} (\cos.e'' + l - i \sin.e'')$, on fera $2l = 2$, ce qui donnera les deux équations $n \gg \cos. e'' = -2 \cos. jx - 7 \cos. 3 \text{ } 11 \ll 1 \sin. \theta'' = 3 - \sin. 3$ (i. Comparant ces équations à celles qui déterminent h'' (art. Co0) , on en déduira De même pour avoir la valeur de θ'' qui donne 1 $M'' = n \sim (\cos \theta'' 4 - W - 1 \sin. \theta'')$, il faut faire $2 i = 6$, et on aura $n \bullet \cos. \theta'' = 2 \cos. [i - f - 7 \cos. 3 (t \text{ } 1 / t \text{ } T \sin. \theta'' = 3 - \sin. 3 \text{ } u..$ Donc $\theta'' = * - \theta'' = 7ic - 6 \setminus$ Ces deux résultats vont nous servir à compléter la solution de notre problème. (607) Pour revenir aux équations (i 5) qui sont autant de théorèmes nouveaux sur les fonctions T , nous remarquerons que les coefficients de rang pair $M', M'', M^*, \text{ etc.}$, produits par la substitution de $R^*, R_4, R', \text{ etc.}$ au lieu de R dans M , doivent se tirer de la formule générale (n) et non de la formule réduite (12) qui n'a pas lieu pour ces coefficients de rang pair. En effet l'équation $R,0 = -1$ que suppose la formule (12), cesse d'être exacte, lorsqu'au lieu de R on met R', R_4 , ou en général $R \gg'$, puisqu'on n'a pas $R \gg'^o = -1$, mais bien $R^{*o} = -+- 1$. Ainsi, par exemple, pour avoir la valeur de M' on mettra R' au lieu de R dans la formule (1 1), et on aura $M' = -4 - 3R' - aRs - aR \gg n' \cos. \odot' = -5 + \cos. 2 jx \ll \bullet \sin. \theta' = -5 \sin. 2ji - 2 \sin. 4 \{ *$.

The text on this page is estimated to be only 26.19% accurate

Ji8 THÉORIE DES NOMBRES. De là on tire la valeur exacte qui donne $M = \ll \text{£} [\cos. (0 - 4 \ 10 + 1/- i \sin. (\ll' - 4 \ j t)]$. Par cette valeur de M' on calculera directement celle de T^* au moyen de l'équation $Tr=M'T'$, et on aura $wT=w ->- w''' - 6' H- 4^1$ ou valeur qui s'accorde avec celle que nous avons déjà trouvée $w^* = 60 > - a \ 0 - 1 \ 0 - \hat{o}'' + i \ o \ (/ . ;$ car en les égalant on trouve $6'' = 6 + 6(i$, ce qui est en effet la valeur de $8''$. Après avoir déduit des équations $T' = A \ T'$, $T \ T' = M \ T$ les deux suites de théorèmes compris dans les équations (3) et (i5), on doit voir maintenant qu'il serait facile de déduire une suite de théorèmes semblables de l'équation $TT''=NT''$, et de beaucoup d'autres de la même nature telles que $TT''=BT'''$, $TT''=DT'$, etc. Mais ces théorèmes, si faciles à multiplier, sont inutiles pour l'objet que nous avons en vue, c'est-à-dire, pour la détermination des divers polynômes T, T', T'' , etc. en fonctions de la racine R ; car le petit nombre d'applications que nous avons faites de la série (i5) et de l'équation $TT'''=NT''$, suffit pour la détermination dont il s'agit, ainsi que pour la résolution générale de l'équation $X=0$ dans le cas de $/\gg = 4i(608)$ En effet, au moyen de la valeur $6'' = 0*4- -j- k$, qui détermine M'' , l'équation $T''TT - M'' \ T'''$ qui est la troisième des équations (1 5), donnera l'angle $w^{TM'}$ qui détermine TT''' , savoir : $== J' + u'' - \odot'' = 9 < u - 36 - 3 \ 9' - e'' + * - e'$, ou $w'' \gg = gw - 40 - 3o' - o''' + i44^*$. En second lieu, la valeur $G''z = .\r. - \hat{O}' = i62\# - 0'''$ qui détermine M'' , fera connaître «" par l'équation $T'' = : ^7J = M \ TT$, prise

Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 18.77% accurate

CINQUIÈME PARTIE. 3i9 dans la série (id), et d'où résulte = +
 0" = 7 u — 2 0 — 2 6' — 6" — 0''' + 2 r — 1 8* , ou en négligeant a* , W" = 711
 — 36 — aô' — 6''' — ia6«. Ces valeurs de a." et s'accordent avec celles de
 l'art. 6o5 , en les choisissant de cette manière , 8" — M* ftT"> — li>' Au
 reste dans ces comparaisons une différence de 2k ou d'un multiple de a» est
 regardée comme nulle, parce qu'elle ne change rien à la position du point
 qu'elles déterminent sur la circonférence. (609) Pour rassembler sous un
 même point de vue tous les résultats des calculs précédents, nous avons
 formé le tableau suivant : « = — — = — 49 2 46 .obi35 3o3i «' = 2» + .' =
 7-28' 5".i34o3o238 »" = 3«-h«" = 107 18 18 .6540G0177 = 4" + *"' = 73 49
 10 .44944 3446 «,, = 5«-*-" = — 70 40 12 .345i4a636 (A) < ** = 6« + a* =
 — 147 49 44 .235 143346 »" = 7cn + a" = — 176 5j 57 .110796477 */•«
 = 8« + aT" = 5 38 54 .68458 6793 »"' = 9W + «"' = 15929 8 .20461 673i « =
 — 6 = io5« 33' 38" .45673 63 «" = — « — + = a54 26 38 .63811927 = — ao
 — e' = a7o o 17 .o9485557 = -'ô-i6'-5r+ïô"-^ = i74 33 4o .96162252 a' = —
 3e — 20'+^ = ,46 »6 55 .73û974«4 «" = -3e-ue'-e'-^ = -i93 32 3o .48i32 5a6
 «"■ = 4e-ao'-6''' = 38 1 7 .9754i 104 a- =: 40-3e'-r-^ = -II9 5 5, .8432o599
 Digitized by Google

iao THÉORIE DES NOMBRES. Si l'on substitue maintenant les
 valeurs trouvées pour u , «... dans la formule $1 + \cos 7a$, , , , , , $N P \sim$ —
 $-4 - (\cos W + \cos o) - 4 - \cos \dots + \cos W^*$), on trouvera , en faisant
 le calcul par les tables à sept décimales seulement $\cos^{-1} \cos 79^\circ 17' 8''$.
 Cette valeur est à très-peu près celle de $\cos^{-1}$; ainsi on connaît la racine
 que représente exactement la formule calculée d'après la première valeur de
 w . (610) Pour avoir les autres racines il faut à la place de w substi. $a \sim At$: 610
 . , v 38 tuer successivement $a \sim (1i+ -)uH$ jusqu'à wH ; $ao \sim ao' \sim ao j n \sim ao$ »
 et il faut observer i° que chaque substitution le terme $n \sim$ qui représente T''
 doit changer de signe, parce que la série des racines p qui peut être
 représentée par $\cos x$, $\cos Xg$, $2\cos Xg$, $J 2\cos Xg$, etc., g étant la
 racine primitive de n , donne en général pour T'' la valeur $\cos x - \cos x^g -$
 $t - \cos x^{g^2} - \cos x^{g^3} - 1$, etc., laquelle change de signe lorsque le premier
 terme $2\cos X$ est remplacé par le suivant $\cos Xg$ ou a'' qu'en augmentant du
 multiple $A p$. ou $/^*$. — , on doit augmenter en même temps w' de $zhp.$, u'' de
 $3h$ (a , ta'' de $4'$) (M et ainsi de suite, comme on le voit par les équations (A)
 que nous venons de rapporter. Cela posé si l'on fait le calcul en augmentant
 u de $18''$, c'est-à-dire en donnant à u la nouvelle valeur $u^* = u + 18''$.66,
 et augmentant dans la proportion indiquée les autres angles Digitized by
 Google

The text on this page is estimated to be only 22.13% accurate

CINQUIÈME PARTIE. 3a i «".. la formule dans laquelle on changera le signe de donnera pour résultat acos.^{TM} Or je remarque que dans la série des racines déterminées par la racine primitive $\xi=i3$, la racine $\text{acos.}^{\wedge}$ précède la racine acos. D'où il suit que les substitutions successives de $w-j-njw-t-ajj^{\wedge}w-^{\wedge}ji$, etc' * 'a P'ace $^{\wedge}e w'$ donneront toutes les racines de l'équation proposée dans l'ordre inverse de celui qu'indique la racine primitive $g=i3$; en vertu de cette valeur de g , on aurait, à partir de la racine $p = a \text{cos.}^{\wedge}$ » la série des racines $p, p \backslash p''$, etc. dans l'ordre suivant : -aie , a6ic n ion ,, 34 « $p^{\wedge}-\text{acos.}^{\wedge}/^{\ast} = \text{acos.}^{77}/>^{\wedge}\text{acos.}^{-\wedge}/>^{\wedge}\text{aces.}^{-\wedge}$, 3a ic _ 6w _ . 4* ... 3ott $\text{acos.}^{\wedge}\text{acos.}^{\wedge}/?" = \text{acos.}^{\wedge}/>^{\ast} = \text{acos.}^{-\wedge}$, ,, aox ,, i4« _ i8k tait />"«■ = $\text{acos.}^{-j\ddot{i}}>P = 2\text{COS.}^{\text{---}}\text{tpx} = 2\text{Cos.}^{-\wedge}/>" = \text{acos.}^{\text{---}}$, ... 8ic aaic ... Aoit aSrr /j1" = $\text{acos.}^{j-t}/>^{\ast} = a \text{cos.}^{\wedge}/>^{\ast} = a \text{cos.}^{-\wedge}/>" = \text{acos.}^{-\wedge}$, = a cos. , * = a cos. , $^{\wedge}n$, = a cos . , $p''' = a \text{cos.}^{\bullet}$ • La formule donnera donc, à partir du premier terme $\text{acos.}^{-\wedge}p$ qu'on peut toujours désigner par p , les termes de la même série pris dans un ordre inverse , de sorte qu'on aura successivement i8ir i n » a«»r , » . , 0 />\ $\text{acos.}^{-t} = H 1 \text{cos.}^{\ast}4 -4- \text{cos.} (a w + b) + \text{cos.} (Jw+a) 41 \text{ao ao ao v x ' + COS.}(4ca+^{\ast})' \bullet .-+^{\bullet}\text{COS.}(9ft)^{\wedge}-a",,)] a \text{cos.}^{\text{---}} = \text{---} - - - + \text{---} - [\text{cos.} (\bullet + f) + \text{cos.} (a \ll + a p + \ll \bullet) + \text{COS.} (3\ll^{\ast}+3|t-Ha"). . . + \text{COS.}(9\ll 4-9ji4-^{\ast}''''')] > \bullet \text{acos.}^{\wedge} = \text{---} i + 21 + ^{\wedge}tl [\text{cos.} (\bullet -f-afi) + \text{cos.}(a\ll + 4n + \ll') + \text{COS.}(3\gg+6^{\wedge}+a'). \bullet . + \text{COS.}(9\ll+18PL+aT^{\ast})]$, etc. n. 4i

The text on this page is estimated to be only 22.93% accurate

327. THÉORIE DES NOMBRES. En général on pourra exprimer une racine quelconque $\cos.\sqrt[n]{a}$ par la formule $a^{1/n} \cdot \cos.\frac{2k\pi}{n}$; $a \cos.\frac{2k\pi}{n}$ — 1 $\sqrt[n]{a}$ $\cos.\frac{2k\pi}{n}$ (2 $\sqrt[n]{a}$ $\cos.\frac{2k\pi}{n}$ et') 4- $\cos.\frac{2k\pi}{n}$ (3 $\sqrt[n]{a}$ $\cos.\frac{2k\pi}{n}$ «") -4- $\cos.\frac{2k\pi}{n}$ (4 $\sqrt[n]{a}$ $\cos.\frac{2k\pi}{n}$) + $\cos.\frac{2k\pi}{n}$ (5 il 4- a, v) 4- $\cos.\frac{2k\pi}{n}$ (6 $\sqrt[n]{a}$ $\cos.\frac{2k\pi}{n}$ et') H- $\cos.\frac{2k\pi}{n}$ (jS1 + a) 4- $\cos.\frac{2k\pi}{n}$ (8 $\sqrt[n]{a}$ $\cos.\frac{2k\pi}{n}$ »••■) 4- $\cos.\frac{2k\pi}{n}$ (911 4- a, v)] , en faisant $\sqrt[n]{a} = w - j - m j x / \sqrt[n]{a}$ 1 étant le rang qu'occupe 2/ dans la suite 18, i4, 20, etc., comme on le voit ici : $a' = 18, 14, 20, 30, 4; 6, 3a, 34, 10, af>; a, 38, 1(>, 24, 36; 28, 40, 2a, 8, 12 />= 0, 1, 2, 3, 4; 5, (>, 7, 8, 0 ; io, 11, 12, i3, i4; i5, if), 17, 18, 19$ Par exemple pour que la formule exprime la valeur de $2\cos.\sqrt[n]{a}$, il faudra faire $m = 10$ et $\sqrt[n]{a} = t > > 4 - ioa = w + it$, ce qui donnera le résultat suivant : $\sqrt[n]{a} = 1 / > \bullet \bullet \cos.\frac{2k\pi}{n} = h - 41 a o a o 4 - [- \cos.\frac{2k\pi}{n} w 4 - \cos.\frac{2k\pi}{n} (2 w 4 - a') - \cos.\frac{2k\pi}{n} (3 a^* 4 - et") 4 - \cos.\frac{2k\pi}{n} (4 w 4 - et") - \dots - \cos.\frac{2k\pi}{n} (C/w 4 - a'')]$ J. Ces divers exemples dont les calculs ont été développés avec toute l'étendue nécessaire, prouvent qu'il est toujours possible de trouver une formule générale qui contienne et donne à volonté toutes les racines de l'équation en p , d'où l'on peut déduire toutes celles de l'équation $X=0$, n étant un nombre premier quelconque. Exemple IV. «=17, $\sqrt[n]{a} = 8$. (bu) Quoique la résolution de cet exemple ait été déjà donnée (art. 535), cependant il ne sera pas inutile de faire voir comment notre nouvelle méthode conduit à une formule générale qui comDigitized by Google

The text on this page is estimated to be only 27.43% accurate

CINQUIÈME PARTIE. 3a3 prend sous la forme la plus simple toutes les racines de l'équation à résoudre. Cette équation est : $x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 10x^3 - 4x^2 + 1 = 0$, et nous supposons à l'ordinaire que ses racines sont $p, p', p'' \dots p''''$. Si on prend la valeur $n=3$ pour racine primitive de 17, ces racines désigneront les huit périodes à deux termes (2: 1), (2:g-), (2 : g') ... (2 : g1) , et en conséquence elles devront être rangées dans l'ordre suivant : $p = r' + r - p'' - r^4 p = r^1 - I - p'' = r^* - t - r^s$
 $p'' = r^* + p^1 = r^1 + r - 1$ $p''' = r^i + r'''$ r^6 On peut aussi, pour les applications que nous avons à faire, ranger ces mêmes racines dans l'ordre des exposants de r , comme il suit : $p = r' + r''$ $p'' = r''$ $p''' = r^8$ $p^4 = r^6$ (0 $p' = f^3$ $-t- r^s$ $p''' = r' + r^4$ $p'' = r^8 + r^*$ $p'' = r^8$ $4- a--'$. (612) Nous supposons à l'ordinaire $T = p + p'R + p'R^* - t - r^*$ $R^* \dots + r^*$ R' , R étant une racine imaginaire de l'équation $R' - 1 = 0$, racine qui doit être choisie de manière que par ses puissances successives elle donne toutes les racines de la même équation. Telle est par exemple, la racine $R = \cos. \frac{4\pi}{17} + i \sin. \frac{4\pi}{17}$ en faisant $\alpha = 45^\circ$. Nous désignerons également par T', T'', T''', T'''' , ce que devient la fonction T , lorsqu'on met successivement R', R^1, R^5, R^6, R^7 à la place de R . Cela posé nous avons vu en général que dans l'équation $T' = AT'$, A doit être une fonction de R indépendante des racines p , et qu'ainsi 4i. Digitized by Google

3a4 THÉORIE DES NOMBRES. A est égale au coefficient de p dans la valeur du carré T', développée et réduite à la forme linéaire A.p + ftp'~h Cp''+ etc. Dans ce développement nous devons d'abord considérer la partie p1 + /?' R* + p''' R* + p''''K6 +p''> R* -h/^R'' -+- p''> R' R4 , où il faut substituer les valeurs pt=a+p'''ip,,=n+p''''tp'''=2-i-p, p''' =2+p\ etc. Et parce que le terme constant 2 qui se trouve dans chacune de ces valeurs, est l'équivalent de — o.p — 20' — ao'' — etc., il est visible que les termes de A, dus à cette première partie du développement de T' , sont : — 2(n-R' + R4...-f-R'') + R<. La seconde partie du développement de T' est composée d'une suite de termes de la forme 2/?'A/?vRfA+v; mais parmi ces termes nous ne devons considérer que ceux dans lesquels le produit p^pv contient p, et nous voyons par le tableau (1) qu'il n'y a que sept de ces produits qui remplissent cette condition, savoir: pp'\ p''p, pp'\ p''p\ p'''p\ p'''p''. Chaque produit p^p* donnera dans A le coefficient aR^1 ; et la somme de ces coefficients donnera dans la valeur de A la partie 2R6 + aR7-t- 2R5 + aR9 + 2R''+ 2R''f a R\ Réunissant donc ces deux parties on aura la valeur totale de A , savoir : / _a(n-R,+R4+R4+R* + R*°+R''-i-R'<) + R* W —\ +4Rs + 2R« + 2R'+2R,'+2R''-t-2R'\ (61 3) On sait par la théorie précédente qu'il ne suffit pas de connaître la quantité A , mais qu'il faut aussi connaître les quantités A' , A'', A''' ... A'', déduites de A en mettant R', RJ , R* . . . R' à la place de R, ce qui est la même loi suivant laquelle les fonctions T',T'', T'''. . .T'' se déduisent de T. Il faut donc regarder la formule (2) Digitized by Google

CINQUIÈME PARTIE. 3a5 comme représentant sept quantités différentes A, A', A'', ... A'', qui résulteront des substitutions indiquées ; or à l'égard de toutes ces quantités, excepté seulement A''', on peut supposer la partie. . . — 2(1 + R' + R4 - t - . . . R'4) égale à zéro, parce que cette partie multipliée par 1 — R' (qui n'est zéro que quand au lieu de R on met R4, afin d'avoir A''') donne pour produit — 2(1 — R, s) = 0. Ainsi la valeur de A se réduira dans tous les cas dont il s'agit (excepté celui de A''') à la forme plus simple $A = R^4 + 4 R s + 2 R' + 2 R^7 + 2 R' t - a R' - h 2 R$. Celle-ci étant réduite de nouveau au moyen de l'équation $R(= 1$, de laquelle on peut exclure la racine $R = 1$, et qui devient ainsi $0 = 1 - t - R + R'H - R^i + R^4 + R^5 + R^8 + R^i$, on aura (3) $A = — a - aR' + R' + aR^*$. Cette formule très-simple va nous donner successivement les valeurs de A , A', A'', A, T, A* et A'' ; quant à celle de A''', elle doit être déduite immédiatement de la formule (2) en mettant R4 , c'est-à-dire — 1 à la place de R; car l'équation $0 = 1 — R' = (i — R^4) (1 + R^4)$ ne peut subsister qu'en supposant $R^4 = — 1$, puisqu'on ne peut pas avoir $R^4 = 1$. Substituant donc — 1 à la place de R dans l'équation (2) , on aura Atft ce qui s'accorde avec la théorie que nous avons développée dans d'autres exemples. (61 4) Maintenant si dans la formule (3) on substitue les valeurs $A = n' (\cos. 0 + 1/ — 1 \sin. i. O)$, $R = \cos. ^ + 1/ — 1 \sin. p$, on aura pour déterminer 0 les deux équations : $n^7 \cos. 8 = — 2 — 2 \cos. 3 (x - 1 - \cos. 4 j^* + 2 \cos. 5 p ^ / i T \sin. 6 = — 2 \sin. 3 p + \sin. 4 [A + 2 \sin. 5 j i$. Puis faisant $^ = ^ = 45^\circ$ on aura Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 22.41% accurate

3a6 THÉORIE DES NOMBRES. « $\sqrt{\cos.Q} = \frac{1}{3}$, $\frac{1}{i}\sin.6 = \frac{1}{a}$, d'où résulte la valeur approchée $6 = \frac{1}{3}G^* 4i'$ io". ia. Pour avoir la valeur de $\hat{o}'$ qui donne celle de A il suffira de mettre $a^\wedge$ à la place de p dans les équations (4), ce qui revient à mettre R' au lieu de R dans l'équation (3) ; on aura ainsi « $\cos.\hat{o}' = \frac{1}{a} - \cos.GjA-t- \cos. Spt + \cos. lOp. = \frac{1}{i} n \sim \sin. b' = \sqrt{2} \sin. 6 p. + \sin. 8|x -f- a \sin. iop = 4$, ce qui donne $H' = io4"a'$ io".48 Pour avoir $6''$ on mettra semblablement $3|i$ à la place de jt dans les équations (4), ce qui donnera $>_ \cos.e'' = \frac{1}{a} - a \cos. 9 \cos. i2(A+\cos. i5|a = \frac{1}{3} \ll \sin. 6'' = \frac{1}{a} \sin. 9 ft -h \sin. ta^\wedge + a \sin. i5|i = \frac{1}{a}$; donc $6'' = e = \frac{1}{3}6 \ll 4i'$ io".ia. Comme on a déjà déterminée'', qui est le cas d'exception, il est inutile d'aller plus loin , parce qu'on sait a priori qu'on doit avoir $A''A'' = rc$, $A'A^* = \frac{1}{i}$, $AA'' = \ll$, et qu'ainsi on doit trouver... $6'' = \frac{1}{3}6'' = \frac{1}{3}\hat{o}, \hat{u}' = \frac{1}{3}6'$, $6'' = \frac{1}{3}6$. C'est aussi ce qu'on déduirait aisément des équations (4). Car pour avoir $0''$ par exemple, il faut mettre $5jt$ à la place de p dans les équation (4), ce qui donnera $n \cdot \cos. 6'' = \frac{1}{a} - a \cos. 15 p. + \cos. 20 f^* + 2 \cos. a5 p = \frac{1}{3} /zT \sin. 6'' = \frac{1}{a} \sin. 15 u + \sin. 20 p-t- a \sin. 25p. = a/2$; donc $0'' = \frac{1}{3}6''$. De même si on met $6ji$ à la place de jt , on aura $1 n1 \cos. 6'' = \frac{1}{a} - a \cos. i8p. + \cos. a4p-t- \cos. 3o(i = \frac{1}{i} n \sin. 6^* = \frac{1}{2} \sin. i8pt + \sin. a4|A + 2 \sin. 3oja = \frac{1}{3}4$; donc $6'' = \frac{1}{3}6'$. On trouverait enfin $\hat{o}'' = \frac{1}{3}6$; ce qui est une nouvelle vérification des propriétés connues des quantités A .

Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 21.27% accurate

CINQUIÈME PARTIE. 3a7 (6 1 5) Venons maintenant à la détermination des fonctions T ; nous aurons pour cet effet la série d'équations $T^{\wedge}AT$, $T''=A'T''\backslash T'''=A''T'$, $T''''=A''T''\backslash W T''>=A''T'$, $T^*=A'T''$, $T'T_*=A''T'r$ à laquelle on peut joindre les deux séries $n = T T'' = T'T^* - T'T'' = T'''$ (' $n = A A'' = A' AT = A'' A'' = - A'''$. On trouve d'abord par les équations (5) $T_4=\langle TA^* A'$, d'où il suit qu'en supposant à l'ordinaire $T = n \blacksquare$ $(\cos.o>+l/ - i \sin. w)$, on aura $u = \hat{i}i+i = \_4a-ao' 2''$. 44. T' Connaissant m et par conséquent T , on aura T' — ce qui donne $w'=2w - 0=52^\circ i'5''.24$; et ensuite l'équation $T''=$ donne $a \gg =2u - 6=4 w 20 - 6 =o$. Cette valeur apprend que $T' = n >$; l'équation $T''''*=A'''T''$, dans laquelle $A'''= - n$, et $T''''= - i$, donnerait $T''' = n$, et par conséquent $T''' - \pm 1/rc$.- l'incertitude des signes est fixée par la valeur nulle de qui donne $T''= -+- 1/w$. Nous connaissons T et T' , ainsi que leurs inverses T'' et T' , il ne reste plus à déterminer que la fonction T'' qui fera connaître $n'A''$ son inverse T'' . Pour cela nous avons l'équation $T''' = A'' T'== -t^{\wedge}$ qui donne $2u'' = d'' - w'$ ou $0'' - w -4-$ as. Donc la valeur de w'' ne peut être que l'une des deux $4 - 2 \gg w - \sim$ Digitized by Google

3a8 THÉORIE DES NOMBRES, ou en valeurs numériques $w'' =$
 $— 94-ai'7''.68 \ll ''=4- 85-38' 5a''$. 3a. (6 16) Pour décider a priori laquelle de
ces deux valeurs doit être prise pour correspondre à la valeur de u , il faut
avoir recours à l'équation $TT'=MT''$, dans laquelle M doit être une fonction
de R seule; et l'on voit que M sera le coefficient de $y?$ dans le produit TT
développé et réduit à la forme linéaire. Or on trouve par la méthode dont
nous avons déjà donné plusieurs exemples, $M=a 4- 3R4-RJ4- R44-$
 $3R^*+4R' + R7$, valeur qui, au moyen de l'équation $R4= — i$, se réduit à la
forme très-simple $M=i — 4R^*$. Fa isan t donc $M = n\sim (\cos. 6 4- \vee — i \sin.$
 $0)$ et $R = \cos.\text{fi} 4- \vee — i \sin$. on aura pour déterminer 0 les deux équations
 $n\sim \cos. 0=i — 4\cos.2|a= i$, $n^* \sin.\odot= — 4^*\text{in}.2[t= — 4$; mais on a trouvé
ci-dessus $/i\gg\cos.6 = — i$ et $n1 \sin. 0 =4$; donc $6 = 0'—^*$. Cela posé, de
l'équation $TT=MT''$ on tirera $\ll ''=u + ^*\gg'— 0 = u -f- \ll '—6' 4- \gg$, OU
 $w''=3w-e-e' 4- ^*=—+^*$. a Ainsi on voit que c'est la seconde des deux
valeurs trouvées ci-dessus qui doit avoir lieu, savoir : $tt''=3\gg-9-e'4-^*=85-$
 $38'5a''$.3a. Maintenant si on fait une somme des trois quantités T, T', T'' et de
leurs inverses T'', T', T ; si ensuite à cette somme on ajoute Digitized by
Google

The text on this page is estimated to be only 25.06% accurate

CINQUIÈME PARTIE. 3ac, i T"=nT et T*" = — i , on aura la formule * ■ i «• an», i . ,> . ^ — -g- + -g- (cos. » ■+• COS. •> -f- COS.**). Calculant cette formule d'après les valeurs trouvées pour «,«' et on trouve |/> = cos.~o. g3a47 aa3 : ce cosinus diffère à peine de la vraie valeur de cos. — laquelle est o.o,3a47 217; d'où l'on voit que la formule calculée d'après des valeurs rigoureuses de 6 et b' donnerait la valeur exacte de acos.~(617) Si l'on met dans la formule « -+- p. ou «* -f- 45° à la place de », il faudra augmenter J de 900 et «" de i35% ce qui donnera w=e a* 39' 67". 56 ta =- i4a 1 5 . a4 »"=aao 38 5a .3a d'où résulte a«T(cos.« 4-cos.o/+cos.«") == — 4»5i9°484 Il faudra pour cette seconde valeur de u pren1 dre n > avec le signe — , et retrancher par conséquent de la quantité précédente 1 + nT=5. ia3io o55 — 5. ia3io55 ce qui donnera pour la seconde valeur de ~p. . . . — o.6oa6346a. Or ce cosinus est celui de ~ à très-peu près. Donc en augmentant m de p. la racine p , qui était a cos. ~ , est suivie de la racine a cos. — • Mais les racines p, p\p . rangées suivant Tordre déterminé par la racine primitive #=3, et mises sous la forme aco«.^~ sont ^acos.— ,/^acos.— ,/»=acos.— yp =acos.-A-, P " =acos.-,/7' =acos.— ,^" =acos.^, ^" =acos.— . II 4» Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 28.70% accurate

330 THÉORIE DES NOMBRES. Ainsi on voit que pour passer d'un ternie de cette série au ternie précédent, il faut augmenter simultanément $\angle$ de 2π , J de $2p$, u de 3π , et changer le signe de n . On obtiendra ainsi toutes les racines de l'équation proposée, dans un ordre inverse de celui qui est indiqué par la racine primitive $g=3$. On obtiendrait l'ordre direct, en diminuant progressivement u de p , $\angle$ de 2π , et ta de 3π . (G 18) Cela posé nous aurons la formule générale $\cos \frac{2\pi m}{n} = \cos \frac{2\pi}{n} \cos \frac{2\pi m}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} \sin \frac{2\pi m}{n}$ dans laquelle $m+1$ est le rang qu'occupe a_i dans la suite 2, 6, 16, 4, 8, 10, 4, 12. On peut dire aussi que m se déduira du nombre donné i par la condition que $3^m \pm 1$ soit divisible par 17. Les données qui entrent dans notre formule générale se réduisent aux seuls angles 6 et $0'$ déterminés par les équations $3 \cos \frac{2\pi}{n} = 1$, $\sin \frac{2\pi}{n} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Car par ces angles qu'on peut construire géométriquement, on construira semblablement la troisième donnée $w = -j$; on pourra donc au moyen de notre formule construire géométriquement les diverses valeurs de $\cos \frac{2\pi m}{n}$, ce qui confirme tout ce qu'on a dit et répété sur la division de la circonférence en 17 parties égales. Digitized by Google

SIXIÈME PARTIE DÉMONSTRATION DE DIVERS

THÉORÈMES D'ANALYSE INDÉTERMINÉE. § I où l'on se propose de décomposer un nombre donné en quatre carrés, de manière que la somme de leurs racines, prises positivement, soit égale à un nombre donné. ((il 9) I l s'agit en général de satisfaire aux deux équations $a = s' + r + u' + v'$ ($0 b = s + t + u + v$, dans lesquelles a et b sont des nombres donnés, et où l'on suppose les quatre racines s, t, u, v positives. J'observe d'abord que $x^* - 1 - x$ étant toujours un nombre pair, il faut que $a + b$ soit aussi un nombre pair; ainsi les nombres donnés a et b devront être de la même espèce, c'est-à-dire tous deux pairs, ou tous deux impairs. En second lieu, si les quatre nombres s, t, u, v étaient égaux, on aurait $a = 4A$ $b = 4s$, d'où $b = \sqrt[4]{a}$; et si, de ces quatre nombres, trois étaient nuls, on aurait $a = s^4$ $b = s$, ce qui donnerait $h = \sqrt[4]{a}$; donc en général b doit toujours être compris entre les limites $\sqrt[4]{a}$ et $\sqrt[4]{4a}$. Ces conditions ne sont pas les seules qui doivent avoir lieu pour que le problème soit possible; mais avant de le considérer dans toute sa généralité, nous examinerons d'abord le cas où l'un des nombres s, t, u, v serait zéro. 4».

The text on this page is estimated to be only 29.23% accurate

33a THÉORIE DES NOMBRES. (620) Nous aurons, dans ce cas, à résoudre les deux équations $b = t + u - v$, et voici les conditions de leur possibilité. i^* Il faut que a ne soit pas de la forme $4^*(8n + 7)$; car on sait qu'aucun nombre de cette forme n'est la somme de trois carrés. a Le nombre b doit toujours être de même espèce que a ; mais il faudra de plus, dans ce cas, que b soit compris entre les limites $1/\sqrt{3}a$ et $1/3 a$. En effet, si les trois nombres t, u, v étaient égaux, on aurait $a = 3t, b = 3t$, ce qui donnerait $b = \sqrt{3}a$; c'est la plus grande valeur de b ; la plus petite est, comme dans le cas général. Cela posé, des trois nombres t, u, v , l'un au moins sera de même fsj)ècc que a . Soit t ce nombre, les deux autres u et v devront être tous deux pairs ou tous deux impairs. Faisant donc $u + v = 2p, u - v = q$, ce qui donne $u = p + q, v = p - q, t = b - a/3$, il restera à satisfaire à l'équation $a = (b - a/3)^2 - (p + q)^2 + (p - q)^2$, ou à la suivante : De là on voit que la troisième condition nécessaire pour la possibilité de la solution, est que le nombre a se réduise à la forme $x^2 - 3y^2$, ce qui aura lieu si a n'a que des facteurs simples de la forme $6k + 1$, auxquels peuvent se joindre le facteur 3, si b est divisible par 3, et le facteur 4, si a est de la forme $8k + 3$, ou si a est divisible par 4^* , auquel cas b doit être divisible par a^* . Ayant donc fait $3 < 1/a = f/3$ on en tirera $q = g > P - b - y^*$ et si les trois valeurs $t = b - ip, u = p + q, v = p - q$, sont toutes positives, on aura la solution des équations (2). (62 1 } Exemple I. Soit $a = 678, b = 40$, les deux premières

The text on this page is estimated to be only 27.30% accurate

SIXIÈME PARTIE. 333 dirions seront satisfaites ; on aura ensuite $4(3a - 6) = a^2 - 7 = 7 \cdot 3 \cdot 1$, et puisque les facteurs 7 et 3 sont de la forme $6n + 1$, la troisième condition est encore remplie. Il reste à mettre 7.31 sous la forme $f^2 + 3g^2$, ce qu'on peut faire de deux manières, soit par les valeurs $f=5, g=8$ soit par les valeurs $f=13, g=4$ et parce que, dans les deux cas, on trouve des valeurs positives pour les indéterminées t, u, v , il en résulte les deux solutions suivantes : $f^2 + 3g^2 = 10^2 + 3 \cdot 3^2 = 121 = 11^2$ et $13^2 + 3 \cdot 4^2 = 169 = 13^2$. Exemple II. Soit $a = 8003, b = 141$, les deux premières conditions sont remplies; la troisième Test également, puisqu'on a $(3a - b) = 468 \cdot 4 = 4 \cdot 117$ et que 117 est un nombre premier de la forme $6n + 1$. Ce nombre peut se mettre sous la forme $3a' + 3 \cdot 7$, et sou produit par 4 ou $i^2 + 3 \cdot 1^2$, prend les deux formes $53^2 + 3 \cdot 1^2$ et $11^2 + 3 \cdot 39^2$; mais ces deux formes ne conduisent qu'à une seule solution, laquelle est $8003 = 83^2 + 3 \cdot 33^2 + 5 \cdot 1^2 = 83^2 + 33^2 + 5$. ($\ll a^3$) Au moyen des formules précédentes on pourra, dans beaucoup de cas, non-seulement décomposer en trois carrés un nombre donné qui n'est pas de la forme $4 \cdot (8k + 7)$, mais de plus, faire en sorte que la somme des racines de ces carrés soit égale à un nombre nonne. Si on veut décomposer un nombre donné N en trois triangulaires dont les côtés pris ensemble fassent une somme donnée c , il faudra satisfaire aux deux équations $x' + x + y' + y + z' + z = c$ et $x^2 + y^2 + z^2 = N$. Or il est visible que ce problème est renfermé dans celui que nous

Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 28.47% accurate

334 THÉORIE DES NOMBRES. venons de résoudre. Il faudra faire $a = SN + 3y$ et $2c+3$, et après avoir trouvé les valeurs de t, u, v , on en déduira celles de t, u, v par r, j, z , savoir, $x = \dots, y = \dots, z = \dots$. Par exemple, soit $N = 1000$ et $c = 5$, on aura $a = 8003$ et $b = 141$, ce qui donnera, d'après l'exemple II, la solution $a = 4i, y = 16, r = a$. On a en effet, $a^2 - 5p^2 = 41^2 - 16^2 = a$. (6a4) Venons maintenant à la résolution générale des équations (1) ; elles donnent d'abord ce résultat remarquable, $4a - b^2 = (s + 1 - u - (s + u - t - v))' + (s + v - t - u)'$; d'où l'on voit que $4a - b^2$ doit être décomposable en trois carrés, et qu'ainsi une troisième condition nécessaire pour la possibilité du problème, est que $4a - b^2$ ne soit pas de la forme $4k(n + 7)$. Si $4a - b^2$ n'est pas de cette forme, il sera toujours possible de satisfaire, d'une ou de plusieurs manières, à l'équation on regardera donc x, y, z comme connus, et en supposant que s, t, u, v soient rangés par ordre de grandeur, ainsi que x, y, z , on aura, pour déterminer s, t, u, v , les quatre équations $s - t - u + v = b, s^2 + t^2 - 11 - l' = X, s + 11 - t - v = y, s^2 - v^2 - u^2 = \pm z$. On a mis dans la troisième $\pm z$, parce que, quoiqu'on ait par hypothèse $s > t > u > v$, il n'arrivera cependant pas toujours que la somme $s + v$ soit plus grande que $t + u$. Il faut maintenant que les valeurs de s, t, u, v , déduites des

SIXIÈME PARTIE. 335 équations précédentes, soient positives, sans quoi le problème ne serait qu'improprement résolu. Or cette condition peut toujours être remplie en limitant convenablement la valeur de b . Pour le faire voir, il faut examiner successivement le cas où a et b sont impairs, et celui où ils sont pairs. Premier cas, a et b impairs. (6a5) Dans ce cas, $4 \ll b^*$ sera de la forme $8n + 3$, et on pourra toujours satisfaire à l'équation (3) $hci - b = x' + y - z$ où $x' + y + z^*$ désigne l'une des formes trinaires du nombre $4 \ll b$. Ensuite on déduira des équations de l'article précédent les valeurs des indéterminées s, t, u, v , comme il suit : (4) $s = 4, t = \sim s, u = S, v = \wedge^*$ ■ Puisque les nombres b, x, y, z sont tous impairs, il faudra que l'un des nombres $b + x + y + z, b + x + y - z$ soit de la forme $4 \ll$, et l'autre de la forme $4^* - a$; donc, en prenant convenablement le signe de dans l'expression de r , on aura un nombre entier pour la valeur de s , ce qui donnera ensuite des nombres entiers pour les valeurs des trois autres indéterminées. On voit par là qu'il n'y a qu'un des deux signes de z qui puisse être employé, et qu'ainsi on n'a qu'une solution pour chaque forme trinaire de $4 \ll b^*$. (C2G) Maintenant, puisque nous avons supposé $x > \langle X \rangle z$ il est clair que les valeurs de s, t, u, v seront toujours positives, si celle de v l'est dans le cas le moins favorable, c'est-à-dire si l'on a $b - z \cdot b - x - y - 2 \wedge - J > 0$, ou $\wedge > 0$. Il suffit, pour cela, qu'on ait $x + y + z < b + 4$, car $b - x - y - z$ doit toujours être divisible par 4, dans le cas dont il s'agit. Or, d'après l'équation $4 \ll b^* = x' + y^* + z$ on a $x + y + z < \sqrt[3]{3(a - b')}$, et

336 THÉORIE DES NOMBRES. en faisant $(b + 4)' = 3(4\alpha -$,
on tirera de cette équation $b = 1/(3\alpha - 3) - i$. Si donc A , qui doit toujours être
plus petit que $1/A''$, est supposé en même temps plus grand que la limite
 $1/(3\alpha - 3) - i$, on sera assuré que les valeurs des indéterminées s, t, u, v ,
dédites des formules précédentes, seront toutes positives, et qu'ainsi le
problème sera résolu. Un seul cas fait exception, c'est celui où l'on aurait à-
la-fois $x=y=z = \sqrt{4\alpha - 3}$ et $6 = 1/(3\alpha - 3) - i$; car alors il en résulterait
 $x+y-z = b + 4$, et par conséquent $v = -i$. Mais il est facile de faire en
sorte que ce cas particulier ne puisse avoir lieu, il suffit pour cela
d'augmenter aussi peu qu'on voudra la limite inférieure de b . Nous
supposerons donc désormais que les limites de b sont $b > 1/(3\alpha - 3) - i$,
 $b < \sqrt{4\alpha - 3}$; et dans cette hypothèse les formules (4) donneront toujours des
valeurs positives pour les quatre indéterminées s, t, u, v , même quand b
serait égale à sa limite inférieure. (637) En admettant la limite $b > 1/(3\alpha -$
 $\alpha) - 1$, on a la certitude que la solution sera donnée toujours en nombres
positifs. Mais il ne s'ensuit pas que si on prenait b plus petit que cette limite
(et cependant plus grand que $\sqrt{4\alpha - 3}$), le problème ne pourrait être résolu en
nombres positifs. Il arrivera, au contraire, assez souvent, surtout si α est un
grand nombre, que des valeurs de b plus petites que la limite assignée
donneront des solutions en nombres positifs; et ces solutions se trouveront
également par les formules (4), toutes les fois qu'elles pourront avoir lieu.
C'est ce dont on verra un grand nombre d'exemples ci-après. Second cas, α
et b pairs. (628) Les nombres α et b étant pairs, $4\alpha - 6$ sera divisible par

SIXIÈME PARTIE. 337 4 ; et puisque cette quantité est représentée par $ar^*-t-y+z$, il faudra que les trois nombres x, y, z soient pairs. On simplifiera donc l'équation en mettant nx, ny, az à la place de x, y, z , ce qui donnera (5) $rt - (\backslash b)' = X' + y + Z \backslash$ Cela posé , si $a - ('-b)'$ n'est pas de la forme $4 * \{Sn + 7\}$, cette équation sera satisfaite par toute forme trinaire , propre ou impropre, du nombre $a - (t^{\wedge})'$ - Connaissant donc les trois nombres x, y, z , on aura pour déterminer s, t, u, v , les quatre équations $s + t + u + v = b$, $s - t - u - v = 2X$, $s + u - t - v = ay$, $S + V - t U = \pm 2Z$, d'où l'on tire les valeurs (6) $s = \frac{b+x}{2}$, $t = \frac{b-s}{2}$, $u = \frac{bs+y}{2}$, $v = \frac{ib-s}{2}$. Ces valeurs seront des nombres entiers dans les deux cas que présente le signe ambigu; ainsi il en résultera toujours deux solutions, excepté le cas de $z=0$, où les deux solutions se réduisent à une seule. (Gag) Maintenant, pour que ces solutions soient admissibles, il faut que les quatre nombres s, t, u, v soient positifs, ce qui aura lieu si dans le cas le moins favorable, v est positif, ou si l'on a $\{ b - x - Y - z^{\wedge} - \dots > 0 \}$. Cette condition sera remplie comme dans le premier cas , en supposant $\frac{b}{3a - a} > i$. D'ailleurs on devra faire les mêmes observations que dans l'art. 627, relativement aux solutions qui peuvent avoir lieu dans certains cas où b serait inférieur à la limite assignée. (63o) Il y a diverses remarques à faire sur la solution du problème précédent, selon les diverses formes du nombre a . II. 43

The text on this page is estimated to be only 23.97% accurate

338 THÉORIE DES NOMBRES. i* Si a est de la forme $4n + a$, le nombre $a - b^*$ sera de l'une des formes $4n + 1$, $f \cdot n + a$, lesquelles sont toujours décomposables en trois carrés, d'après la théorie exposée dans la troisième partie. Donc dans ce cas, les équations proposées seront toujours résolubles. a* Si a est de la forme $8n + 4$, on pourra satisfaire aux équations proposées de deux manières, les nombres s, t, u, v étant tous pairs ou tous impairs: ces deux solutions seront données par les formules (6); mais il faut, dans ce cas, que $a - b'$ ne soit pas de la forme $44(8\alpha + 7)$. 3* Si n est de la forme $8(2n + 1)$, les nombres s, t, u, v devront être pairs, et en général si a est de la forme $a4 + (2\alpha - 1)$, ces nombres devront être divisibles par $a4$; leur somme b devra donc être aussi divisible par 2^* et même par $a^* + 1$, parce que le quotient devra être pair. Soit donc $a = 2^* \hat{A} a \backslash b - 24f'$, $f = a4/$, $f = a4/$, $u = o^* u \backslash i \gg a^* v'y$ la solution des équations proposées se réduira à celle des équations $a = s'' + t'^* + i\ddot{i}' + v \backslash b' = s - ht' + 11v$; elle sera donc toujours possible, puisqu'alors $a!$ est de la forme $/jn - f - 2$. Mais on remarquera que dans ce cas il ne suffit pas que b soit compris entre les limites $1/4\alpha$ et $1/(3\alpha - 2) - 1$, il faut encore que b soit divisible par $?/+ \alpha$. Les autres valeurs de 6 comprises entre les limites assignées, ne pouvant satisfaire, on trouverait qu'elles réduisent $a - \sim b'$ à la forme $44(8\alpha + 7)$. On pourra descendre au-dessous de la limite $1/(3\alpha - 2) - 1$, pour essayer s'il y a d'autres solutions; mais il faudra toujours que les valeurs de b soient divisibles par $a' - * - '$. 4" Enfin si a est de la forme $aa^* + \gg (a/t - f - 1)$, $/ \bullet$ n'étant pas zéro, il faudra que chacun des nombres s, t, u, v soit divisible par $a4$, et leur somme b par $a4 + \gg$. C'est pourquoi faisant $a = a \gg 4 a \backslash b = aAb'$, $s = a^* V$, $f = a4 /$, $u = 2^* v = a4 v'$, les équations proposées se réDigitized by Google

SIXIÈME PARTIE. 330 d'uiront aux suivantes , $a = s^2 - 4t^2 + u^2 + v^2$
 $b' = s^2 + t^2 + u^2 + v^2$ dans lesquelles a' sera de la forme $4n + 1$, et qui se
 rapporteront ainsi au second cas, comme le précédent se rapporte au
 premier. (63 1) La théorie exposée dans ce chapitre, est la base de la
 démonstration générale du théorème de Fermât, dont nous nous occuperons
 dans le chapitre suivant; elle peut être utile dans plusieurs autres recherches
 d'analyse indéterminée. On voit déjà que cette théorie donne une extension
 remarquable aux deux premiers cas du théorème sur les nombres polygones
 , puisqu'elle offre les moyens non-seulement de décomposer un nombre
 donné en trois ou en quatre carrés, mais de faire en sorte que la somme des
 racines de ces carrés soit égale à un nombre donné pris entre certaines
 limites.

THÉORIE DES NOMBRES. § II. Démonstration du Théorème de Fermât, sur les nombres polygones, et de quelques autres Théorèmes analogues. (63a) On a fait voir ci-dessus (art. 156) qu'un nombre polygone de l'ordre m -f- a , a pour expression générale $x^m(x-1) + x$, x désignant le côté de ce polygone, ou le rang qu'il tient parmi les polygones du même ordre. Cette expression prouve que 0 et 1 sont deux termes communs aux polygones de tous les ordres. Les nombres triangulaires résultent de la supposition $m = 3$, et les carrés de la supposition $m = 4$; dans ces deux premiers cas, il est indifférent de prendre x positif ou négatif, et on n'obtient qu'une seule et même suite, celle des nombres triangulaires ou celle des carrés. Mais m étant $> a$, l'expression générale des nombres polygones donne deux suites différentes pour chaque ordre, selon qu'on suppose x positif ou négatif. Ces deux suites sont liées entre elles par une même loi, de sorte que l'une n'est que le prolongement de l'autre; mais dans l'application au théorème de Fermât, on fait toujours abstraction de la suite formée avec des valeurs négatives de x , et on ne considère que celle qui est formée avec les valeurs positives, comme les présente le tableau du n° 156. (633) Cela posé, il faut démontrer qu'un nombre quelconque est composé d'autant de polygones de l'ordre m -h- a , qu'il y a d'unités dans m -t- a . Le nombre des polygones qui composent un nombre donné, pourrait cependant être moindre que m -f- a ; mais en regardant 0

SIXIÈME PARTIE. 34 1 comme un polygone complétif , le nombre des polygones pourra toujours être censé $m a$, conformément à l'énoncé de la proposition. Ce théorème ayant été démontré dans le Traité précédent, pour le cas des nombres triangulaires et pour celui des carrés, qui sont les deux premiers de la proposition générale, nous ne considérerons que les cas ultérieurs où l'on a $m > a$, savoir , $m = 3$ pour les nombres pentagones, $m = 4$ pour les hexagones, et ainsi de suite. Or d'après ce qui a été démontré dans le § précédent, il ne reste plus à établir qu'un petit nombre de propositions subsidiaires pour parvenir à celle qui fait l'objet de ce chapitre. (634) Théorème I. « a étant un nombre impair quelconque, non « compris dans les dix suivants 1 , 3, 5, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, « il existe toujours deux nombres impairs consécutifs $c, c - a$, tels « qu'en faisant successivement $b = c$ et $b = c - a$, on pourra, dans « les deux cas, satisfaire aux équations $a = s' + f + u' + V$, « avec la condition que les racines s, t, u, v soient toutes positives.» En effet, 1° si la différence entre les limites $V/4$ et $V(3a - 2) - 1$, est égale à 4 ou plu* grand que 4 il y aura au moins quatre nombres entiers consécutifs compris entre ces limites. De ces quatre nombres, deux seront impairs et pourront être pris pour b ; les équations proposées seront donc résolubles, dans les deux cas, par les formules de l'art. 6a 5. Or en faisant $V(1/a) = 1/(3a - 2) + 1 = 4$, on trouve $a = 121$; donc le nombre 121 et tous les nombres impairs plus grands que 121, jouissent de la propriété mentionnée. 2° Si ensuite on examine tous les nombres impairs au-dessous de 121 , on trouvera que pour une partie de ces nombres, il existe deux valeurs de b comprises entre les limites $1/4$ « et $V(3a - 2) - 1$. et que pour l'autre partie il n'existe qu'une seule valeur de b .

Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 24.81% accurate

SIXIÈME PARTIE. 3*3 1 5 et i3 , comprises entre les limites $t/260$ et $i/7g\hat{1} - 1$. Les mêmes valeurs auraient également lieu pour les nombres G3, 61 , 5t), 67 ; aussi voit-on dans le tableau , que pour tous les nombres impairs de (>5 à 5j, les valeurs correspondantes de b sont 1 5 et i3. Second cas. Si on fait $a = \backslash \hat{1}$, on trouve qu'il n'y a que le nombre impair 1 1 qui soit compris entre les limites $I/\tilde{64}$ et $l/T\tilde{T} - 1$; mais si on essaie la valeur suivante $\pounds = 9$, quoiqu'inférieure à la limite $i/T-Ti - i$, on trouve par les formules du n' 62 5, qu'elle satisfait aussi, puisqu'on a $4 \gg = 6^* + a^* + 1^*$ et $9 = 6 + 2 + 1$. On a donc mis dans la table les valeurs $A = 11$, $b = 9$, correspondantes au nombre « = 4i; mais on a distingué par une * la seconde valeur y, pour avertir quelle est inférieure à la limite $1/(3 a - 2) - 1$. Troisième cas. Si on fait $a = 7 1$, on ne trouve qu'un nombre impair i5, compris entre les limites qui conviennent à cette valeur de a , savoir , $1/154$ et $V\tilde{T}\tilde{i} - 1$. Si ensuite ou essaie la valeur $b = 1 3$, on trouve par les/brmule\$;du 11* 6a5, qu'elle n'est pas admissible, . parce que l'une des indéterminées s, t, u, v serait négative. On n'a donc mis dans le tableau que la seule valeur $b = 1 5$, correspondante au nombre « = 71. " (f>36) Théorème II. « Soit a tin « ombre impair quelconque-; soient « c, $c - a$, $c - 4 >$ - • • • d> les diverses valeurs successives de ô'avec a lesquelles on peut résoudre en nombres positifs les équations (1) ; n soit enfin r un terme quelconque de la suite o , 1 , a, 3. . . m — 2. « Si on considère la fonction $7, =^{TM} (a - b) + b + r$, « dans laquelle b et r sont des termes pris à volonté dans les suites « qui leur sont propres, et qu'on appelle P ou P(«) la plus petite a valeur de cette fonction, Q ou Q(a) la plus grande; on aura $\blacksquare P \{ \grave{a} \} = * \tilde{i}(a-c) + c$, $Q(fl) = \wedge(a - d) + d + m - 2$

344 THÉORIE DES NOMBRES. « Cela posé, je dis , i • que tous les nombres entiers compris depuis « P(ff) jusqu'à Q(«), seront représentés par la fonction Z; a° que « tous ces nombres pourront être décomposés chacun en m + a « polygones de l'ordre m a. » En effet , 1 ° soit $Z = P(a) - tp$, p étant un nombre pris à volonté depuis i jusqu'à $Q(a) - P(a)$, on aura pour déterminer b et r, l'équation $p = -\{m - a\} (5 = *) + r$; or puisque p et $m - a$ sont deux nombres donnés, on voit que r est le reste de la division de p par $m - 2$, et que si on appelle q le quotient de cette division , on aura $c - \sim = q$, ou $b = c - aq$. Il suit de là que pour chaque valeur donnée de p on n'a qu'une solution , excepté lorsque le reste r est zéro ; car alors on peut faire indifféremment $r = 0$ ou $r = m - a$, et il y aura deux solutions. Cependant s'il s'agit du dernier des nombres $P(a) + p$, qui est Q(«), il faudra prendre $r = m - 2$, et il n'y aura qu'une solution, parce qu'en faisant $r = 0$, on aurait $b = d - a$, nombre qui n'est pas compris dans la suite c, $c - 4 > d$. 20 $P(a) - \backslash - p$ ou $P + p$ étant un nombre quelconque pris dans la suite P, $P + 1$, $P + a$ Q, puisqu'on peut toujours supposer $p = {}^{\text{TM}}(a - b) + b + r$, si on substitue dans cette expression les valeurs de a et b données par les équations (1), on aura $P + p = V - t + u' - u + v' - v) + r + s + t + u + v$. Donc si on désigne en général par pol. a;, le polygone de l'ordre m + a dont le côté est p, on aura $P + p^{\wedge} = \text{pol. } j \blacksquare + \blacksquare \text{ pol. } t \blacksquare + \blacksquare \text{ pol. } u + \text{pol } v + r \text{pol. } 1$; c'est-à-dire que le nombre $V + p$ sera composé de quatre polygones dont les côtés sont s, t, u, v, et de r polygones égaux à l'imité; Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 20.25% accurate

SIXIÈME PARTIE. 345 donc comme r est $\leq$ — a ou tout au plus* il s'ensuit que le nombre $P + p$ sera composé de a polygones de l'ordre $m - 4 - a$, dont $m - a$ sont égaux indifféremment à a ou à l'unité. (637)

Théorème III. « Lorsque $\ll = \text{la}$, la plus grande valeur $\ll$ de b est $a - 1$, et alors on a $P(a) = -(a - b) + b - 50m + zt$, nom« ère qui, suivant la proposition précédente , est la somme de quatre « polygones de l'ordre $n - t - a$. « Gela pose, je dis que tout nombre entier plus grand que $50m + ai$, « est la somme de $m + a$ polygones de l'ordre $m + a$, dont $m - a$ « seront égaux à zéro ou à l'unité. » En effet , soit a un nombre impair quelconque plus grand que $1 + i$, il existera toujours, suivant le théorème I, deux nombres impairs consécutifs $ctc - a$, compris entre les limites $1/Ja$ et $1/(3a - 2) - 1$, et il suit du théorème précédent que si l'on fait $P(a) = f(a - c) + c$. $Q(u) = *(^{\circ} - c + a) + c - a + m - a$, totts les nombres entiers compris depuis $P(a)$ jusqu'à $Q(a)$ inclusivement, seront la somme de $m + a$ polygones de l'ordre $m + a$. Considérons maintenant le nombre $P(\leq t - 4) a$, et soit tf le plus grand nombre impair compris dans $1/(4a - 8)$, comme c est le plus grand nombre impair compris dans ; il faut distinguer deux cas, selon qu'on a $c' - c$, on $c' = c + a$; car il est évident qu'on ne peut faire aucune autre supposition sur la valeur de c^* . (638) Si l'on a $c' = c$, il suffira de mettre $a + a$ au lieu de a , dans l'expression de $P(a)$, et on aura $P(a + a) = (a + z - c) + c$; comparant cette valeur avec celle de $Q(a)$, on en tire $P(a + a) = * = \diamond (\ll) - m - r - 4$. H. 44

The text on this page is estimated to be only 28.22% accurate

346 THÉORIE DES NOMBRES. Or la moindre valeur de m étant 3, on voit que le nombre $P(a - h - 2)$ ne surpasse $Q(a)$ que dans le seul cas de $m = 3$, où l'on a $P(o + 2) = Q(\ll) - f - 1$. Dans tout autre cas, $P(a - t^* - 2)$ est compris dans la suite $P(tf), P(\ll) + i, P(a) + 2, Q(o)$. Mais on a vu que tous les nombres de cette suite sont composés de $m - 4 - 2$ polygones de l'ordre $m - h - a$, et dans le cas où le terme $P(a + a)$ sortirait de cette suite, pour y ajouter le terme suivant $Q(a) - 1$, ce terme serait composé de quatre polygones seulement; donc tous les nombres entiers compris depuis $P(\ll)$ jusqu'à $P(a + 2)$ inclusivement, sont composés de $m - f - 2$ polygones de l'ordre $m - h - a$. (639) En second lieu, soit $c' = c + a$, on aura $P(rt + 2) = T^m(a - c) + r +$ et par conséquent $P(\ll + a) = P(a) - \gg - a = Q(a) - a(m - 3)$. De là on voit que $P(a - f - a)$ est toujours plus petit que $Q(a)$, excepté dans le seul cas de $m = 3$, où l'on a $P(rt + a) = Q(a)$; donc tous les nombres entiers compris depuis $P(tf)$ jusqu'à $P(\ll + a)$ inclusivement, sont décomposables en $m + a$ polygones de l'ordre $m - f - a$. (640) Si on observe maintenant que dans le premier cas on a $P(\ll + a) = P(n) + mJ$ et dans le second $P(a + a) = P(a) - f - 2$; on pourra en conclure qu'à compter d'un nombre donné a tel que $a = 121$, la suite $P(\ll), P(\ll - \gg - 2), P(a + 4)$, etc., formée en augmentant toujours a de deux unités, s'étend à l'infini. Donc tous les nombres entiers compris depuis $P(i ai)$, ou $5o/w - 4 - ai$ jusqu'à l'infini, sont décomposables en $m - f - a$ polygones de l'ordre $m + a$. Il reste à démontrer que tous les nombres inférieurs à $.boni - f - ai$, jouissent de la même propriété; c'est l'objet de la proposition suivante, qui complète la démonstration générale du théorème de Fermât. (> 4 1)

Théorème IV. « Tout nombre entier plus petit que $P(1 a 1)$, « ou $5o m - f - 2$ 1, est la somme de $m - f - a$ polygones de l'ordre $m + a$, « dont $//i - 2$ sont égaux à zéro ou à l'unité. » • Digitized by Google

SIXIÈME PARTIE 347 Soit d'abord $a = 5$; on voit par le tableau du n° 634 que 3 est la seule valeur correspondante de b ; faisant donc $c=d = \hat{o}$, les formules du n° 636 donneront $P(5) = m + 3$, $Q(5) = aw + i$. Au-dessous de $P(5)$, on a les nombres $i, a, 3 \dots m + a$, qui sont composés d'autant de polygones égaux à i qu'ils contiennent d'unités; ainsi le théorème est vrai à leur égard, on voit que même que le dernier de ces nombres $m + 2$ est exprimé par un seul polygone, savoir, pol. a . Les nombres de $P(5)$ à $Q(5)$ sont composés comme l'énonce le théorème, puisque cette propriété a lieu en général pour tous les nombres de $P(a)$ à $Q(rt)$. Ainsi le théorème est vérifié jusqu'au nombre $Q(5) = am + i$. Soit maintenant $a = 7$, on aura, par la table du n° 634 » $c = 5$, ce qui donne $P(7) = m + 5$, $Q(7) = 2/rc + 3$. Comme la moindre valeur de m est 3, on voit que $P(7)$ ne surpasse $Q(5)$ que dans le seul cas où $m = 3$, «t alors on a $P(7) = Q(5) - 4$. Donc la propriété générale est vérifiée par tous les nombres depuis 1 jusqu'à $Q(7) = am + 3$. On pourrait continuer ainsi l'examen des cas particuliers jusqu'à $P(ia)$; mais nous nous bornerons à un petit nombre de cas généraux qui renferment la solution de tous les cas particuliers. Il s'agit en général d'examiner si tous les nombres compris «le $P(a)$ à $P(rt+a)$ satisfont au théorème, ou s'il y a exception pour quelques-uns de ces nombres. (642)

Premier cas. Supposons que pour le nombre a il y ait deux valeurs correspondantes de b , savoir c et $c - a$, et que pour $a - 4$ il y ait une ou plusieurs valeurs de b , dont la plus grande soit c , on trouvera, comme dans l'article 638, que tous les nombres de $P(a)$ à $P(a + 2)$ satisfont au théorème.

The text on this page is estimated to be only 27.79% accurate

348 THÉORIE DES NOMBRES. Second cas. Supposons que c
 t) t c — - a étant les deux, vafeur&de b correspondante* au nombre a, on ait
 c + % pour la plu» grande ou la seule valeur de & correspondante au
 nombre « + 9; on trouvera encore , comme dans le n* 639 , que tous les
 nombres de P («) à P(o + a) satisfont au théorème. Troisième cas.
 Supposons que b n'ait que la seule valeur c correspondante au nombre a, et
 que pour a -f- a on ait une ou plusieurs valeurs de b, dont la plus grande soit
 c+ a, on aura, dans ce cas, $P(\ll) = i(\ll - + Q(\ll) = (\ll - c) + e + m - 2$, $P(fl + a) = (a - c) + c + j$. De là on voit, que P(a a) ne peut surpasser Q(a) que dans le
 seul cas de m = 3; qu'alors on a $P(a 2) = Q(a) + 1$; que dans tous les autres
 cas P(a + a) sera plus petit que Q(a), ou tout au plus égal à Q(a) , et qu'ainsi
 tous les nombres de P(a)àP(«+ a) satisfont au théorème. Quatrième cas.
 Supposons enfin que relativement à a on ait la seule valeur b~c, et
 relativement, à « + a, une on deux valeurs de b, dont la plus grande soit c,
 alors an a $P(<0 = *C\ll - *) + c$, $Q(\ll) = *(\ll \sim c) + c + /n - 2$, $P(n - f - a) = 2(a + a - c) + e$. On voit dans ce cas qu'il y a une lacune entre Q(a) et P(« + 2),
 car on a $P(a - f - a) = Q(a) - | - a$, et l'intermédiaire qui manque est Q(a) -f- 1 .
 Ainsi, sauf cette exception , le théorème démontré jusqu'à P(fl), le sera
 jusqu'à P(« -+- 2). (643) Il suffit maintenant de jeter un eoup-d'ceil sur le
 tableau du

The text on this page is estimated to be only 20.56% accurate

SIXIÈME PARTIE. 349 u° 634, pour trouver quel» sont les nombres $Q(a) \pm 1$ qui tomberont dans l'exception du quatrième cas. Ces nombres se réduisent à quatre, $\bullet C4V/U \bullet Q(7)^1 = c \text{ aflt} \bullet 4 > Q(i5) + r = S m - t - 6, Q(a^3) + p = 5m + 8, Q(37) + i = i4 \gg t + io$; or l'expression générale, de pol. x (art. 63a) donne pol. $a = m - f - a$, pol. $3 = 3m - 1 - 3$, pol. $4 = 6m + 4i$ pol. $5 = iom - I - 5$, et par le moyen de ces polygone* on pourra exprimer les quatre nombres précédents comme t\ soit $\bullet am - f - 4 = aP^o l - 3, 5m + 6^4 \text{ pol. } a + (m - a) \text{ pol. } i, \& m \bullet - 8 =; pcd, 4 - H \text{ apoJLa, } i4m + jo = \text{pol. } 5 + \text{pol. } 3 - t - poA.a$. Un seul cas, celui de $5/n+6$, exige $m - 4$ a polygones; les trois autres n'en exigent que deux ou trois. Donc les exceptions rentrent dans la proposition générale ; donc , tout nombre entier est la somme de $m \pm a$ polygones de l'ordre $m - ha$, dont $m - 2$ seront égaux à zéro ou à V unité. (644) La démonstration que nous venons de donner du théorème de Fermât , ne suppose connue que la démonstration du premier cas de ce théorème , concernant les nombres triangulaires. Or cette proposition fait partie de la théorie générale des formes trinaires des nombres , exposée dans la troisième partie. Nous avons d'ailleurs prouvé ($n^* 157$), qu'en supposant ce premier cas démontré, on en déduit immédiatement que tout nombre entier est la somme de

350 THÉORIE DES NOMBRES. quatre carres , ce qui est le second cas du théorème de Fermât. Ainsi 'du premier cas on déduit tous les autres. Comme on ne peut guère douter que Fermât n'ait été réellement en possession de la démonstration générale de son théorème sur les nombres polygones, il est à croire que cette démonstration était totalement différente de celle que nous venons d'exposer. En effet, il paraît d'abord que Fermât n'avait aucune connaissance de la théorie des formes trinaires des nombres , excepté dans le cas des nombres $8n + 3$, qui revient au premier cas de son théorème, mais dont il ne fait pas mention, et dans le cas des nombres premiers $Hn - i$, qu'il assure être de la forme $x^2 - y^2 - t^2 - ar^2$, dont le double est la somme de trois carrés. Si Fermât eût connu la théorie dont il s'agit , il n'aurait pas restreint cette dernière propriété aux nombres premiers $8n - i$, puisqu'elle s'étend généralement à tous les nombres impairs. En second lieu, si la démonstration de Fermât eût été la même que la précédente, ou fondée sur les mêmes principes , il iaurait pas manqué d'ajouter au théorème la condition qui lui donne plus de précision et d'élégance, savoir , que sur les $m + a$ polygones de l'ordre $m - a$ qui composent un nombre donné, il y en a toujours $m - a$ qu'on peut supposer égaux à zéro ou à l'unité. M. Cauchy a donc fait une découverte importante dans la théorie des nombres, en donnant le premier la démonstration du théorème de Fermât, devenu plus précis par la condition qu'il y a ajoutée. Riais on peut aller encore plus loin en démontrant que , passé une certaine limite facile à assigner pour chaque ordre de polygones, tout nombre donné peut être décomposé en quatre polygones ou en cinq au plus. Cette nouvelle proposition fera l'objet des recherches suivantes. (645) Supposons que le nombre donné A soit décomposable en quatre polygones de l'ordre m , il faudra faire $A = (x^m + y^m + z^m + t^m) + a$. et déterminer les nombres a et b de manière qu'on puisse résoudre en nombres entiers positifs les équations

SIXIÈME PARTIE. 35i $a = s' + t' + u' + v^*$, $b = s + t + u + v$; or il sera possible de satisfaire à ces équations, si a et b sont de même espèce, si b est compris entre les limites $\sqrt{a}$ et $\sqrt{(3a - a) - i}$, enfin si a est impair ou double d'un impair. Il y aurait d'autres valeurs de a et de b qui permettraient d'effectuer la résolution des équations (i); mais il suffira de considérer celles dont nous venons de faire mention. (646) Si l'on fait successivement $b = 1/4$ « et $b = 1/(3a - a) - i$, on trouvera que les limites de b correspondantes au nombre donné A , sont et si on suppose que A est un grand nombre, on aura à peu près

Connaissant les diverses valeurs de a par ces limites, on connaîtra a par l'équation $a - b + (A - b)$; et comme $a - b$ doit être pair, il s'ensuit que a est un entier. Soit cet entier $-x$, on aura $m b = A - mx$, $a - b + ax$. Cela posé, on peut démontrer les propositions suivantes. (647) Théorème V. « m étant un nombre impair, si A est un nombre donné quelconque $> a/8$, je dis que A sera décomposable en quatre polygones de l'ordre $m + a$. » Les limites de b étant connues, on connaîtra celles de x par l'équation $x = \sqrt{a}$. Supposons que la différence des limites de a soit égale à a/n ou plus grande que a/m , alors la différence des limites de x sera égale à a ou plus grande que a ; donc x aura au moins deux

Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 26.03% accurate

35a THÉORIE DES NOMBRES. valeurs consécutives $h, h + i$;
et puisque m est impair, les deux valeurs correspondantes de $*$, tirées de
l'équation $b = A - mx$, seront l'une paire l'autre impaire. En prenant la
valeur impaire, le nombre a sera aussi impair, puisqu'on a $a = b + rx$; on
pourra donc résoudre les équations (i). Donc pour que le nombre A soit
décomposable en quatre polygones de l'ordre $m + a$, il suffit qu'on ait $\sqrt{A} > am$,
ou $A > a^2 m$, ou plus simplement $A > a^2 m$; ce qui
s'accorde avec l'énoncé du théorème. On voit que ce théorème est d'une
grande généralité, puisqu'il s'applique à tous les nombres plus grands que la
limite $a^2 m$, et qu'il suppose seulement que l'ordre des polygones, désigné
par $m + a$, est impair. (648) Théorème VI. « m étant pair, tout nombre
impair $A > 7m$, « sera décomposable en quatre polygones de l'ordre $m + a$;
et tout « nombre pair $A \geq 7m$ sera décomposable en cinq polygones
« dont un sera égal à l'unité. » En effet, si A est impair et m pair, il résulte
immédiatement des équations (a) que b et c sont des nombres impairs, quel
que soit x , ainsi la solution sera toujours possible s'il y a une valeur de j
comprise entre les limites requises, c'est-à-dire si les limites de b diffèrent
entre elles d'une quantité plus grande que m . On devra donc avoir $\sqrt{A} > am$ -
 $\sqrt{A} > am$. Quant à la seconde partie du théorème, elle suit
immédiatement de la première, puisque retranchant 1 du nombre pair
donné, ou d'un nombre impair qui est décomposable en quatre polygones de
l'ordre $m + n$. (649) Théorème VII. a Si m est pair ou de la forme «
 $4k$ » tout nombre pair $A \geq 4m$ sera décomposable en quatre polygones
de l'ordre « k » + a . » Car puisqu'on a $a = A - (m + a)x$, s'il y a deux valeurs
 $x = h, h + i$, Digitized by Google

SIXIÈME PARTIE. 353 $x = a - h i$, comprises entre les limites qui conviennent à x , ou si l'on a $A > 28 m^*$, et qu'on appelle a, a , les deux valeurs correspondantes de a , on aura $a - a' = m - 2 = 4 \ll - a$; donc des deux nombres a, a , il y en aura un impair et l'autre pair, et la solution sera possible. (650) Théorème VIII. « Si m est impairement pair ou de la forme $4n + a$, tout nombre impairement pair $A > m$ sera décomposable en quatre polygones de l'ordre $m + a$. » Car puisqu'on a $A = (m - a)x$, et que $m - a$ est de la forme $4n + y$ le nombre a sera impairement pair, quel que soit x . Il suffit donc que x ait une valeur, c'est-à-dire qu'on ait $A > 7 m'$, et la solution sera toujours possible. Au moyen de ces propositions, il est démontré que tout nombre A qui passe une certaine limite, est décomposable en quatre polygones de l'ordre $m + a$, excepté seulement le cas où $m + a$ et A seraient l'un et l'autre divisibles par 4. Or ce cas même peut être réduit à la moitié de son étendue par la proposition suivante. (651) Théorème IX. « Si m est impairement pair, ou de la forme $4n + a$, tout nombre pairement pair $4A' > 8 m$ sera décomposable en quatre polygones de l'ordre $m + a$, pourvu que $A' - m$ soit impair. » Car puisqu'on a $a = 4A' - m$ et $b = A' - a$, si l'on fait $a = a$ et $b = b$ la résolution des équations (1) pourra être donnée par celles des mêmes équations où l'on mettrait a et b' à la place de a et b ; alors on aurait $a = A' - m$, $b' = x$. Or puisqu'on suppose $A' - m$ impair, si on a une valeur impaire de x , les nombres a et b' seront impairs, et on pourra résoudre les équations (1), Il suffit donc pour cela que les limites de a et b' soient telles que $A' - m$ soit impair. 45 Digitized by Google

354 THÉORIE DES NOMBRES. rent entre elles de deux unités au moins, ce qui aura lieu si on a $4A > 8m$. Il est inutile de pousser plus loin ces recherches, puisque s'il existe des cas où un nombre pairment $|>air$ qui surpasse la limite $28m5$, ou telle autre qu'on pourrait assigner, n'est pas décomposable en quatre polygones, on est sûr que ce même nombre sera décomposable en cinq polygones dont l'un sera égal à l'unité. Nous allons faire voir maintenant, par un exemple, comment on peut déterminer directement les polygones dont se compose un nombre donné quelconque.

(65a) Soit proposé de décomposer le nombre 6484 en huit ou en un moindre nombre d'octogones. Il faut, d'après le théorème général, que $A - r$ soit décomposable en quatre octogones, A étant le nombre proposé 6484, et r étant égal à l'un des nombres 0, 1, 2, 3, 4. Or dans le cas de $m = 6$, les limites de b sont, suivant les formules de l'art. 646, $* > 1/(A-r-3)$, $* < \{ + 1/[i(A-r) + ^]$. On satisfera toujours à ces limites, en faisant dans la première $r=0$, et dans la seconde $r=4$, ce qui donnera Ainsi on pourra prendre pour b un terme quelconque de la suite 81, 8a, 83 94. Pour déterminer x , on a l'équation $j := ^{^^} = io8o$ — d'où il résulte que doit être un entier; ainsi le nombre b devra être de l'une des formes $\&/^ -f- o, 1, a, 3, 4$, auxquelles répondent les valeurs $r = 4, 3, a, 1, 0$. Cela posé, en se conformant aux limites trouvées, on aura les valeurs de b et r , ensuite celles de j et a , comme il suit :

Digitized by Google

SIXIÈME PARTIE. $ft=8i$, $r=i$, $a:=1067$, $a=aaia$, $f=82$, $x=1067$,
 $rt=22lf>$, $o=84$, $r=4$, $a?=1000$, « $=2216$, $6=8.5$, $r=3$, en $X=IODO$, « $=$
 2217 , $6=86$, $r=2$, $\# = IO66$, « $=2218$, $5=87$, $r=i$, $x=io66$, « $=2219$, $6=88$, $r=o$,
 $a?=io66$, « $=2220$, $\#=9^\circ$ » $r=4$, $x=io65$, $a=2220$, $6=91$, $r=3$, $ar=io65$, $a=$
 2221 , $6=92$, $r=2$, $io65$, $fl=2222$, $\#=93$, $\# = io6'5$, $a=2223$, $\#=94$, $r=o$, $x=$
 $io65$, « $=2224$, De là se déduisent plusieurs solutions du problème proposé.
i° Les trois valeurs impaires de a et b auxquelles correspond la valeur $r=1$,
donneront trois solutions dont le résultat est que le nombre proposé 6484 se
forme de quatre octogones et d'un cinquième égal à l'unité. 2° Les deux
valeurs impaires de a et b auxquelles répond la valeur $r=3$, donneront deux
solutions par lesquelles le nombre proposé se décompose en sept octogones
, dont trois sont égaux à l'unité. 3° Les deux valeurs impairement paires de «
qui correspondent à la valeur $r=2$, donneront deux solutions par
lesquelles le nombre proposé se décompose en six octogones dont deux sont
égaux à l'unité. 4° Les deux valeurs pairement paires de a auxquelles
répond la valeur $r=4$, sont encore admissibles, parce que le nombre $a —$
 jb^* qui en résulte, peut être décomposé en trois carrés. On obtient par là
deux autres décompositions du nombre donné en huit octogones, dont
quatre sont égaux à l'unité. 5° Enfin si on voulait déduire trois autres
solutions des valeurs de a et b qui correspondent à la valeur $r=o$, on
trouverait que ces solutions ne peuvent avoir lieu, parce que dans ces trois
cas le nombre $a — jb'$ se rapporte à la forme $4^* (8 — 1)$, qui n'est point
45.

m THÉORIE DES NOMBRES. décomposable en trois carrés.

Nous concluons de là qu'il n'est pas possible de décomposer le nombre donné 6484 en quatre octogones seulement, au moins tant qu'on prend b supérieur à la limite $\sqrt{(3a - a) - i}$. Mais il peut arriver qu'en prenant des valeurs de b inférieures à cette limite, on trouve des solutions admissibles. En effet, les valeurs de b qui répondent à $r = 0$, étant 94, 88 et 8a, celle qui suit immédiatement est $\xi = 76$; cette valeur donne $a - 2a \mid a$, et $a - \wedge b^* = 768 = 4 \cdot 4 \cdot 3$, nombre qui est décomposable en trois carrés. On trouve ensuite, par les formules de l'art. 6a8, que l'une des solutions est admissible, puisqu'elle donne $\xi = 43$, $t - u = v = 1 \mid 1$; donc le nombre proposé 6484 est égal à la somme des quatre octogones dont les cotés sont 43, 1 1, 1 1, 1 1. On remarquera que le nombre 6484 > a8mJ a été choisi de manière qu'il ne soit pas compris dans le théorème IX, et cependant il se trouve décomposable en quatre octogones seulement. Digitized by Googl

357 S III. De l'équation $x^3 + y^3 + z^3 = 0$. (653) Nous supposons qu'il existe trois nombres entiers x, y, z , positifs ou négatifs, qui satisfont à l'équation $x^3 + y^3 - z^3 = 0$, avec la condition que ces trois nombres soient premiers entre eux, deux étant impairs et le troisième pair; nous verrons quelles conséquences résultent de cette supposition. Notre démonstration sera divisée en trois parties. I^{re}. L'un des nombres x, y, z , doit être divisible par 3. En effet, tout nombre non-divisible par 3, positif ou négatif, est de la forme $3m \pm 1$, et son cube $(3m \pm 1)^3 = 27m^3 \pm 27m^2 \pm 9m \pm 1$ est de la forme $9Q \pm 1$. Si donc aucun des nombres x, y, z , n'était divisible par 3, la somme de leurs cubes $x^3 + y^3 - z^3$ devrait être de l'une des quatre formes $9/1 \pm 1$, $9n \pm 3$, et ne pourrait par conséquent se réduire à zéro. Donc l'un des nombres x, y, z , est nécessairement divisible par 3. II^{de}. Celle des indéterminées qui est paire, est en même temps divisible par 3. Désignons par z l'indéterminée divisible par 3, et soit $z = 3a$, « étant un nombre impair, de sorte qu'on ait l'équation je dis que u devra être divisible par 3. En effet supposons, s'il est possible, que u ne soit pas divisible par 3; le premier membre $x^3 + y^3$ est le produit de deux facteurs $x + y$ et $(x + y)^2 - 3xy$ qui ne peuvent avoir que 3 pour commun

358 THÉORIE DES NOMBRES. diviseur; et puisque 3 ne divise pas le second membre $a^2 - m^2$, il s'ensuit que ces deux facteurs sont premiers entre eux. Leur produit doit être un cube, il faut donc que chacun d'eux soit un cube; si l'on observe d'ailleurs que $x^2 - xy - y^2$ est toujours un nombre impair, on en conclura que a^2 doit être facteur de $x + y$; ainsi on devra faire $x^2 - xy = ce$ qui suppose « e étant positif et premier à ». Maintenant si l'on met la seconde équation sous cette forme $x^2 = (x \pm y)^2 - 4xy$, on voit que le second membre étant de la forme $px + 3^q$; son diviseur 6, qui est un nombre impair, devra être de la même forme. Faisant donc $e = f + 3g$, ensuite $(f + g\sqrt{-3})^2 = F + G\sqrt{-3}$, ce qui donne $F = f^2 - 3g^2$, $G = 2fg$. on aura $e = f + 3g$; de sorte qu'on satisfera généralement à l'équation précédente en faisant ce qui donnera Or z étant supposé non-divisible par 3, il faudra que l'un des nombres x, y , soit divisible, ce qui exige que e soit aussi divisible par 3. Mais alors les deux nombres x et y seraient divisibles par 3, ainsi que le troisième z , ce qui est contre la supposition. Donc l'indéterminée z divisible par a doit l'être aussi par 3, et on doit faire en général $z = 3m$, m étant premier au nom

The text on this page is estimated to be only 29.56% accurate

SIXIÈME PARTIE. 359 bre 6; de sorte que l'équation proposée sera toujours de la forme $x^2 + y^2 = a^2$. IIIe. L'équation $x^2 + y^2 = a^2$ est impossible. Car supposons pour un moment qu'elle puisse être satisfaite, sans que l'une des indéterminées soit zéro, les deux facteurs du premier membre, savoir $x + y$ et $x - y$, ont pour commun diviseur 3 et non une puissance plus élevée de 3, puisque 3 ne peut pas diviser xy ; d'ailleurs le second facteur est impair; ainsi l'équation dont il s'agit se partagera nécessairement en deux autres comme il suit : $x + y = 3^m$ et $x - y = 3^n$, et on aura en même temps $a = 3^k$. La seconde de ces équations peut être mise sous la forme : $x = 3^m + y$ d'où il suit que 6 est encore de la forme $3^k + 3^n$. Faisant donc comme ci-dessus $6 = 3^m + 3^n$ et $6 = 3^k + 3^n$, on aura l'équation $3^m + 3^n = 3^k + 3^n$, à laquelle on satisfait généralement en prenant $m = k$, $n = n$. Cette dernière donne, en faisant les substitutions, $a = 3^k$. Dans cette équation où 3^k est impair, puisque $3^k + 3^n$ l'est, il faut que 3^n soit divisible par 3^k ; soit donc $3^n = 3^k \cdot A$, $3^m = 3^k + 3^n = 3^k + 3^k \cdot A = 3^k(1 + A)$, on aura $(3^m)^2 = 3^{2k}(1 + A)^2 = AB^2C$. Maintenant puisque le produit ABC est un cube et que les facteurs A, B, C sont premiers entre eux, il faut que chacun de ces facteurs soit un cube; ainsi on devra faire $A = X^3, B = a^3, C = v^3$, ce qui donnera $3^m + 3^n = 3^k(1 + X^3 + a^3 + v^3)$, et en même temps $X^3 + a^3 + v^3 = 3 - 1$ « On tire de là l'équation

360 THÉORIE DES NOMBRES. p1 — $S=2g= a'-X1$, semblable à la proposée, où il faut observer que l'un des trois nombres X, p, v , doit contenir le facteur 3—. Or, d'après ce qui a été démontré dans la seconde partie, le terme $2''$ déjà divisible par a , est nécessairement aussi divisible par 3; donc il faut faire $X = 3''_{\hat{o}}$, ce qui donnera $^{\wedge}_{\wedge} v^* = (a-3— \hat{o})$. Ainsi de l'équation $x^* + J5 = (2'' 3' uf$, où l'une des indéterminées est divisible par $3''$, on déduit une équation semblable où l'indéterminée correspondante est divisible par $3'''$. Continuant donc ces transformations autant de fois qu'il y a d'unités dans n , on parviendra à une dernière transformée $v_i + y_i = z_i$ dans laquelle aucun des nombres x', y, z ne serait divisible par 3. Cette équation est impossible en vertu de la première partie ; donc l'équation proposée $x^3 + y^* + z = 0$ est pareillement impossible. Digitized by Google

SIXIÈME PARTIE. 36 1 § IV. De l'équation $x^* + yz = 0$. (654)

Il est facile de prouver que l'une des indéterminées doit être divisible par 5, et même par 5^2 ; soit x cette indéterminée, on en conclura que l'équation $y + z = \frac{x}{5}$ se partage nécessairement en deux autres de cette manière :

$y + z = 5t$ et $y' - y^2 + yz' - yz + z^2 = 5r^2$, (a) ce qui suppose $a = 5tr$, r étant un nombre impair, positif et premier à 5. Cela posé, il y a deux cas à distinguer selon que x sera pair ou impair. Premier cas, où l'on suppose x pair. (655) Alors t est pair, y et z sont impairs et la seconde des équations (a) pourra se mettre sous la forme $5(\pm 1)B - (r' + Y''^2) = 5r^2$. Divisant par 5 et mettant au lieu de $y^2 + yz + z^2$ sa valeur $5t^2$, on aura $\pm 5B - (r' + Y''^2) = 5r^2$ ou $\pm B - (\frac{r'}{5} + \frac{Y''^2}{5}) = r^2$. Dans notre hypothèse, les nombres $\frac{r'}{5} + \frac{Y''^2}{5}$ et $\frac{5t^2}{5}$ sont des entiers; d'ailleurs puisque le premier membre est de la forme $p' - 5q^2$, son diviseur r devra être de la même forme, de sorte qu'on pourra supposer $r = \frac{p'' - 5q'^2}{5}$, puis faisant $(\frac{p'' - 5q'^2}{5})^2 = F + G/5$, II. 46 Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 23.66% accurate

36a THÉORIE DES NOMBRES, ce qui donne $F = (f + 5o/V + ia5^5)$, on aura $r5 = F^* - 5 G'$, et par conséquent Pour avoir une solution générale de cette équation, il faut prendre deux nombres m et n , tels qu'on ait $(9 \pm 4 \cdot 1^5)^* = m + \ll 1/5$, Aétant 1111 entier quelconque, ces nombres satisferont en général à l'équation $m^* - 5n' = 1$, et on pourra supposer $rl \pm f + \wedge ilV5 = (F + Gl^5)(m + \ll 1/5)$, ce qui donnera $(j - + z') = \ll iF + 5 \ll Gl \cdot i.5'r = mG + \gg F$. (656) Ces formules contiennent une infinité de solutions, puisqu'on peut prendre pour k un entier quelconque; mais ces solutions en nombre infini, ne sont susceptibles que de cinq formes différentes. En effet, quel que soit l'exposant $*$, il sera toujours de l'une des cinq formes 5^* , $5t \pm 1$, $5rrfca$. Mais j'observe que la partie indéterminée $5t$ peut être supprimée comme étant comprise dans l'expression de r . Car on peut faire $(/+gV5) (9 \pm 4l/5 > = /' + \wedge V5$, et on aura de nouveau $r - f > - r)g$, de sorte qu'il suffira de mettre f et g' à la place de/et g dans les valeurs de F et G . Il ne reste donc à considérer que les cinq valeurs $\# = 0, \pm 1$, $dr 2$, auxquelles répondent les valeurs de m et n , comme il suit : $*n = i, 9, 161$, $\ll = 0, \pm 4, = b 72$, (657) Nows observerons encore que titans l'équation ; $' - . 5? \ddot{i} = m G 4 - n F$, où G est toujours divisible par 5, le terme $n F$ Digitized by Google

SIXIÈME PARTIE. 363 ne peut être divisible par 5 qu'autant que n le sera : car r étant premier à St, et sa valeur étant $/* - 5^i$, /ne peut être divisible par 5, ni par conséquent F. Donc des cinq valeurs de n on ne peut admettre que la valeur $n=0$ qui répond à m-i, ce qui donnera fjour seule solution admissible ■:-.S»l"=sG=5*C/4+io/Y+5tf4)f ou î.5tt"=g(fi+ to/'g' + 5g*). Dans cette équation, les deux facteurs du second membre sont premiers entre eux, et il faut supposer g pair; car si g était impair, y* devrait être pair, et le second membre de notre équation serait impair, tandis que le premier est divisible par a', puisque t est pair. On en conclura que l'équation précédente ne peut se partager en deux autres que de la manière suivante qui suppose $f=a\langle r'$, $g=5\backslash 2^*U"> f'+ io/V + 5^4=r"\backslash$ Dans la seconde équation, le premier membre peut se mettre sous la forme $(f' + Sg'Y - 5 (a g^*)^*$; donc son diviseur r' doit être de la forme $p1 - 5 q'$; il en est de même de r^* , et on pourra par conséquent faire $r''=/' - 5g'^0\%$ ce qui donnera $r'''= F'' - 5G\backslash F$ et G' étant des fonctions semblables à F et G; on aura donc l'équation $(/' + 5^*)' - 5(2ér>)'=F''-5G\backslash$ dans laquelle $ag-'= 5''$. a» m'', et on trouvera comme ci-dessus que la seule solution admissible est $5\backslash^*>ur=g'(fi+ io/V + V)$ Faisant encore $u = u r'\backslash r''$ étant premier à io u', cette équation ne pourra se partager en deux autres que de cette manière $s'•=5,,.a.,»M'»•$, $fi+iof'g'' + 5gf^*=\{r''r$. 46. Digitized by Google

364 THÉORIE DES NOMBRES. (658) Nous retombons ainsi sur des équations qui sont toujours de même forme et dont la série peut se continuer à l'infini. Or ayant fait successivement $x = 5tr$, $t = \text{nur}'yu = ur''$, $f' = a''r'''$, etc, il s'ensuit que $f = a\langle r' = auVr'' = aa'Vr'V''$, etc. ; de sorte que le nombre des facteurs r augmente continuellement dans l'expression de t . Chacun de ces facteurs déterminé par une équation de la forme $r'''m = f^* \blacksquare + \blacksquare$ $iof'g^* + 5g^*$, où f et g sont des nombres toujours croissans, puisqu'on a $g' = j(2g^*)' \% f^* > 5g''$, est certainement plus grand que 1, et ne peut comme nombre en tier, être moindre que 2. Donc en supposant même que la suite u, u', u'' , etc., eût pour limite 1, la valeur de t composée d'un nombre indéfini de facteurs 2, r, r'', r''' , etc., qui ne peuvent être moindres que 2, surpassera bientôt toute quantité donnée, ce qui ne peut s'accorder avec la supposition faite que les valeurs primitives de x, y, z , sont données en nombres finis. Donc l'équation proposée est impossible, dans le premier cas où l'on suppose que l'une des indéterminées est divisible à la fois par 2 et par 5. Second cas, où l'on suppose x impair. (65g) Alors les deux indéterminées y et z seront l'une paire, l'autre impaire, et la seconde des équations (a) pourra se mettre sous la forme $\{y \cdot - hyz + * \blacksquare\}' = 5 (irzy = 5r1$, où l'on voit que $\backslash yz$ sera toujours un nombre entier, et que $\dots y^* - \backslash yz - z'$ doit être divisible par 5; en effet on $\& y^* - \backslash yz - z^* \sim \{y + z\}' = 5(\hat{y}^*) = 5^*t'' = 5(\hat{1}/z)$. L'équation précédente peut donc s'écrire ainsi : $ar^*)--5f\sim T+''\)'=-r$., et puisque le nombre impair r est diviseur d'un nombre de la forme $p' = 5q'$, ou p, q sont premiers entre eux, il sera lui-même de cette forme ; il en est de même de $-r$; car on sait que tout nombre

The text on this page is estimated to be only 29.03% accurate

SIXIÈME PARTIE. 365 de la forme $p^* - 5r'$ est en même temps de la forme $5\langle * - b^* \setminus$ nous pouvons donc supposer $r = f^* - 5g^*$, et faisant comme ci-dessus $(/+ \#1/5)s = F + G \ 1/5$, nous aurons $r \ s = F^* - 5 \ G'$, et l'équation à résoudre sera $(\lfloor jr \rangle)' - .5(r' - f + ,,) = F' - 5G'$. Supposant de nouveau $m - + \bullet \langle 1/5 = (9 \pm 41/5)'$, la résolution générale de cette équation s'obtiendra en faisant $|7S + ^{-} ^{-} z + tV5 = (F + G1/5)(m - hnl/5j >$ ce qui donne $7jz = mF + 5/iG$, $Ky - vp + z' = mG + nF$. On tire de ces deux équations $T(j - + - z)' = (m + n)F + (ro + 5/i)G$, ou $5'f, D - (m - + -. n)F - l - (m + 5n)G$. (660) Puisque G est toujours divisible par 5 et que F ne l'est pas, cette équation ne peut subsister à moins que $m + n$ ne soit divisible par 5. Or d'après les cinq valeurs de m et n rapportées ci-dessus, on trouve que cette condition ne peut être remplie qu'en supposant $\wedge = 9$, $n - - 4 >$ ce qui donnera $5'r^* = 5F - 11G$, ou en divisant par 5 et substituant les valeurs de F et de G , $5\langle f \blacksquare \bullet = '(-1, g) + ,o/V(5/-11g) + 5^{(a5/-11g)}$. On voit par cette équation que $-g$ doit être divisible par 5; soit donc $= g + h$, h étant un nombre divisible par 5, et on aura $f + g \setminus o = \grave{a} + 1/5$, de sorte qu'on pourra faire directement

The text on this page is estimated to be only 23.87% accurate

366 THÉORIE DES NOMBRES. $F + Gt/5 = [A + (i+1/5)]_s = h^* + 5h^*g(i + 1/5) - \dots$ On déduit de là les valeurs séparées de F et G, mais comme nous n'avons besoin que de la quantité $F - V^{**}$ nous pourrions, dans cette équation, mettre $\wedge$ à la place de $1/5$, ce qui donnera $F - V - G = A(A^* - 6/*J\mathfrak{f} + i6A'^\wedge - i6hg> + i6g^*)y - V^{**} - 6A3\# - h i6A'g>' - \hat{A}^\wedge - 16^\wedge$. (661) Sachant déjà que A est divisible par 5 et que g ne l'est pas, observant de plus que h doit être impair, et qu'ainsi les deux facteurs du second membre sont premiers entre eux, la seule manière de satisfaire à cette équation est de la partager en deux autres, comme il suit : $h = 6u \setminus h^* - 6hig + i6htg' - i6hg> + i6^\wedge = r'''$, ce qui suppose $t = \ll *r' \gg$, r' étant premier à $5/*$. La seconde équation peut se mettre sous la forme $r''' = (h^* - 3gh + 6\#)' - 5(g h - a\#*) \setminus$ d'où l'on voit que r' doit être de la forme $p\% - 5y'$; il en est de même de $r'1$; on pourra donc faire $r'^\wedge f - 5g' \setminus$ ce qui donnera $rf, \_p, - 5G'^*$, et on satisfera généralement à l'équation précédente en faisant $h^* - 3gh + 6^\wedge = mF + 5/iG \setminus gh - 2g' = n\mathfrak{F} + - mG'$, ce qui donne enfin A' ou $5''u'' = (m + 3n)F + (3m - h 5\gg) G'$.

Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 23.18% accurate

SIXIÈME PARTIE. 36; Puisque G' est divisible par 5 et que F ne l'est pas, cette équation ne peut subsister à moins que $m + 3$ ne soit divisible par 5. Les seules valeurs de m et n à prendre pour cela sont $m = 1$ et $n = 7$, ce qui donnera, en divisant par 5, $5W = -11G' - 11F$, ou en substituant les valeurs de F et G' , $5 - i = (3 - 11) + 10/V(1 - 55)$ (66a) Cette équation fait voir que $3g' - 1/v$ est divisible par 5; soit donc $f = 3g' - A'$, on aura $F + GV5 = [-A' + (3 + 1/5)]5$, ou en faisant le développement : $F + GV5 = -A' + 5AV(3 + 1/5) - 10AV(7 + 3V/5) + 80AV(9 + 41/5) - 40V^4(47 + 11/5) + 16(133 + 551/5)$. Multipliant tout par -1 et mettant au lieu de $1 + 1/5$ la valeur fictive -1 on aura $4G' - 11F$, ou $5u = A'(1 - A' - 4aAV + 64A'' - 1 - 8h'f + 16/4)$. Maintenant A' étant divisible par 5 et ne l'étant pas, cette équation ne peut se partager en deux autres que de cette manière $A' = 5m - 4aAV + 64A'' - 48AV + 16 = 0$, ce qui suppose $u - ur$ et r premier à 5. Cette dernière équation peut être mise sous la forme $4r''' = (8 - 10A' + 7A'') - 5A'$, d'où il suit que r doit être de la forme $p - 5^k$; il en est de même de r^4 , on peut donc faire $r''' = 5g''$ ce qui donnera

368 THÉORIE DES NOMBRES. $r'' \sim F'' - 5G''$ Soit maintenant $4 = \sqrt{57}$, p . et v étant des nombres impairs, on pourra supposer $8g \equiv -$
 $ia_1 V_1 + 7h'' + A''/5 = (F' + G'V_1/5)(u + v/5)$, ce qui donnera $A'' = r_1 G'' + F'$
Mais puisque t' et G'' sont divisibles par 5 et que F'' ne l'est pas, cette
équation ne peut subsister à moins que v ne soit divisible par 5. Et comme
on a en général $p + v/5 = (3 + i/5)(m - n/5)$, ce qui donne $f_1 = 3m + 5/i$,
 $v = m + 3n$, on ne pourra admettre que les valeurs $m = i_1 a_1$, $r_1 = -7a_1$, d'où
résultent $j_1 = ia_1^3$, $v = -55$, de sorte qu'on aura h'' ou $5'' \ll '' = ia_1^3 G'' - 55F'$.
(663) Nous retombons ainsi sur une équation semblable à l'équation déjà
considérée $5'' t'' = ia_1^3 G' - 55F$; d'où il suit que les mêmes transformations
pourront être continuées à l'infini, ce qui supposerait infinies les valeurs
primitives des indéterminées. Car ayant fait successivement $x = -Str$, $t =$
 $ur \setminus u - u'r''$, $u = d'r'' \setminus$ etc., on aura $t = ur = u'r'' = u''r' r'' r'''$, etc., de sorte que
le nombre des facteurs r augmente continuellement dans l'expression de t .
Ces facteurs sont déterminés par des équations qu'on peut réduire à la même
forme, savoir $r/M = r^* 5 rh^* \blacksquare + \blacksquare 5 h^*$, $r''' = r^* + 5 r'' A' + 5 A'^4$, etc.,
d'ailleurs on a $A = 5V\%$ $h = 5'' \ll ''\%$ $h'' = 5'' \ll ''^4\%$ etc., de sorte que la suite h ,
 h' , h'' etc., est rapidement croissante, même en supposant que les nombres
 u , u' , u'' , etc., aient l'unité pour limite. Donc les nombres r , r' , r'' , etc.,
toujours plus grands que 1, ne pourront être moindres que a , ce qui rendra
infinie la valeur de t . Donc l'équation $a^2 + y + zs = 0$ n'admet aucune solution
en nombres entiers (1). (1) On peut voir dans les Mémoires de l'Académie,
année 1803, quelques autres recherches sur l'équation $0 = ar + y - x^n$, n étant
un nombre premier plus grand que 5. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 27.85% accurate

SIXIÈME PARTIE. 369 § V. Théorèmes d'analyse suivis de formules nouvelles pour les sections angulaires. (664) Théorème I. n étant un nombre premier quelconque, a excepté, si on fait $aT - y' = (x - j)P$, P désignant le polynôme $x^n - ' + yx^n - ' + y^*x - \dots$, on pourra toujours satisfaire à l'équation $4P = Q' = t^*R'$, savoir $4P = Q^* + nR\%$ si n est de la forme $4m + 3$, et $4P = Q^* - R\%$ si « est de la forme $4m + 1$ ». Ce théorème a été démontré ci-dessus, n° 510; on a fait voir de plus quelle est la manière de déterminer dans les deux cas les valeurs des fonctions Q et R ; et quoique les formules auxquelles nous renvoyons supposent $y = i$, elles s'appliquent sans difficulté à une valeur quelconque de y en observant la loi des homogènes. (665) Théorème II. Soit n un nombre premier $4m + 1$; si l'on fait $(x + gW)^n = F + Gx^m$, ensuite $F = P$, $G = nQ$, ce qui donne $p = \sqrt[n]{h - \dots}$, $\dots$ $f + \dots$ $V + \dots$ je dis que les polynômes P et Q peuvent en général se mettre sous la forme $X^m - Y^m$, de sorte qu'on pourra faire $P = A' - nB'$, $Q = C' - nD'$, A, B, C, D , étant des polynômes en x et g , du degré m dont les coefficients sont des entiers. II. 47 Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 25.88% accurate

370 THEORIE DES NOMBRES. En effet, si on fait $p = J + g\sqrt{n}$, $q = f - g\sqrt{n}$, on aura p — mais en vertu du théorème I, la fonction $4P$ peut être mise sous la forme $X^* = \langle Y', \text{ dans laquelle on aura } X = ap \rangle - p > - > q + a, p \rightarrow q' + a) p'' - > q\hat{1} + \text{ etc. } j \ 4 - a / > V / * - 2 - f - a. p \ 1 \ q - ' + \text{ etc. } j \sim F \ H$
 $Y = (p - q + \sqrt{p - q} \sqrt{b} + e). j. \_ j + p q t m - + b, p' q'' - + b J p i q' \sim - i + \text{ etc. } J \ ' P \ H$
 Et comme en général pq est rationnel, ainsi que $p^* + q\hat{A}$, k étant un entier quelconque, il s'ensuit que X et Y se réduisent à des polynômes en f et g , homogènes et du degré uni; ces polynômes divisés par a , seront les valeurs de A et B dans l'équation $P = A^* - nB$. On voit en même temps que la fonction P est composée des deux facteurs réels $A + B\sqrt{n}$, $A - B\sqrt{n}$, qui ne contiennent d'autre irrationnelle que $\sqrt{n}$. On aura semblablement $Q = \sqrt{p - q}$; mais en faisant $p' - q' = (P - f) H$ le théorème I donne encore
 $4H = 4 \langle Q = X'' - nY' \rangle$ et on aura $\sqrt{3} q'' + p q' m - ' + a, p t q'' - a i p \ 1 \ q - ' + \text{ etc. } j \ v$
 $Y' = f - p i m - ' q + K p'' \sim \hat{1} - b i p'' - i q i + \text{ etc. }) . ,) m - p q'' - ' + b, p' q'' - ' - \rangle - t - \text{ etc. } I \ ' V \ ' \text{ valeurs qui se réduiront de même à des polynômes rationnels en } y$
 et g . Mais d'après l'équation $4^* Q = X'^* - \langle Y''$, il faut que X' soit divisible par n ; faisant donc $X' = iZ'$, on aura $4Q = \langle Z'' - Y'''$. Enfin n étant un nombre premier de la forme $4m + 1$, la fonction Q pourra toujours se réduire à la forme $C^* - iD^*$; il suffit pour ce'a de faire $C - D\sqrt{n} = (iY' + jZ'\sqrt{n}) (f - w\sqrt{n})$, t et u étant les plus petits nombres qui satisfont à l'équation $t^* - nu^* = -1$. (066) THÉORÈME III. Soit n un nombre premier $4m + 1$; *»

Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 24.57% accurate

SIXIÈME PARTIE. 37i on fait $(+g-l/-n)'' = F+Gl/-n$, ensuite $F=P$, $G = ngQ$, ce qui donne $Py - .n./i - i 4 - . \blacksquare . . n.n - i.n - 2.n - 3 \cdot , \cdot = f - f^{**} \blacksquare nS + OT4 f - n'g > -$ etc. $= / - ' ^3 - / + ^3 7 4 ^{-} V ^{.ny}$ -etc. je dis que les polynômes P et Q pourront être partagés, chacun en deux facteurs rationnels, de sorte qu'on aura $P = AB$, $Q = CD$, A, B, C, D étant des polynômes en y et g , du degré $l - (n - 1)$. En effet, soit $p = f + g \sqrt{-n}$, $q = f - g \sqrt{-n}$ on aura... $P = \xi -$, et d'après cette forme on pourra faire $4 P = X' 4 - n Y'$, en supposant $x_2 / > - \sim M - p^0 m q + a t p - q' - a, / > \bullet'' - ^{-} - + \blacksquare$ etc. - ha $y - '*' - p q x m + a, p l q, m - ' - a) p i q^* m - 1 - + -$ etc. $Y (/''' f - 7' + b > P^{\wedge \sim *}$ $q^3 -$ etc. $I - / ? 7''' q^{*''''} - p^* q - ' -$ etc. Or les quantités pq et $p^* - \gg -$ étant réelles et rationnelles, la quantité X le sera également. Quant à la valeur de Y , elle est égale au produit de $/ ? - q$ par le polynôme $z^{\wedge \hat{i}} \gg ^{-} W^{\wedge \wedge} E f^{\wedge} V v'^{\wedge - *}$ dont la valeur est réelle et rationnelle comme celle de X ; donc puisque $p - ^{\wedge} = a g V - n$, on aura $4 P = X^* - \hat{u} n' g' Z'$; donc P est égal au produit des deux polynômes $[X + ngZ, \backslash \backslash - ngZ^0]$ lesquels seront les valeurs de A et B . On aura semblablement $Q - * >$ on pourra donc supposer $4 \gg Q = X''' + / * Y'^*$, et en même temps 47

Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 21.51% accurate

37a THÉORIE DES NOMBRES. | $ap''+-'p'''q-ha,p''-qt + aip''-$
 $'q1+elc. \sim I - iq'''*-' - pq''-a,p'(/m- - fi>p'<] - ' - etc. \sim | -f- />7''' +$
 $b,p' 7''- + bipiqtm-> + etc.$ La valeur de Y' se réduit à une quantité réelle et
rationnelle; quant à la fonction X' , elle est le produit $\hat{a}ep-q$ ou $-igV-n$ par
le polynôme $V=*t^{\wedge}=S^{\wedge}+pg.r^{\wedge\wedge} + etc.$, dont la valeur est réelle et
rationnelle. Donc on aura $X/=2\#ZV- \ll$, et $4Q=Y'' - 4g'',Z''$. Donc Q se
décompose en deux facteurs rationnels ' $Y'+\#7/$, ; $-Y - g7',y$ qui seront
les valeurs de C et D . (667) Par exemple, dans le cas de $\ll=7$, le polynôme
 $P=/6- 3</V + SnTt- ''V$ se décomposera en deux facteurs, savoir: Dans le
même cas le polynôme $Q=/6- 5/i/V + \ll'^{\wedge}$ se décomposera en deux
facteurs, savoir : $C=f>-nfg + nfg> + ng> n=r + nfg+nfg'-ng>$. De même
dans le cas de $/i= 1 1$, les polynômes $P=/'^{\circ}- 5\#i,/V+ 3o</V- 4a\ll W+$
 $i5\ll y\ggé''\sim\ll V'' Q=f''-ir->nf>g^{*} + fan'f'g'-5onif^{*}(f-i- 5n^{*}f'g^{*} - n^{*}g''$, se
décomposeront, le premier en deux facteurs $B =/* - 3 \ll/\ll g- + aii'/V- 2$
 $n'f>gs-nlfg^{*} + \ll Y$, Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 23.15% accurate

-I 374 THÉORIE DES NOMBRES. Premier cas, $n = m + i$.
 (669) Nous avons fait voir que pour les nombres premiers de cette forme la fonction $X = \_J$ peut toujours se réduire à la forme $j\zeta^i - nZ^>$ composée des deux facteurs réels $7 Y - vZ/\ll, ; Y = \blacksquare J - Zl/i$, pour lesquels on aura $ai'' + x \sim 'Y - a, xlm \sim *y^* + a, af - V - 4$ etc.) } -f- ci $jcT > +27 - arjr^* - ' + a.xy - -4 - ' +$ etc.) " * Nous avons donné d'ailleurs les moyens de déterminer dans tous les cas les coefficients $a, \ll, \dots a,, btybz$. . Cela posé soit $a = \cos. 9 - 1/ - 1 \sin. 9$, $y = \cos. 9 - l/ - 1 \sin. 9$, on aura $X = a'' \sim r^{\wedge} = s'n, "9$ et les valeurs de $7 Y$ et TZ seront $x - y \sin. 9 \setminus Y = a \cos. a m 9 + \cos. (2 m - a) 9 + a, \cos. (a m - 4) 9 - a, \cos. (a m - 6)9. \dots \forall am ; Z = \cos.(a\#rc - 2)9 + \pounds, \cos.(am - 4)? + *jCOs. (am - 6)9 + bt \cos. (2 m - 8)9 \dots$ + Faisant donc $A = fY + TZV/\ll, B = ; Y - \setminus Z \setminus Sn$, ce qui donne $A = a \cos.am 9 - (1 + 1/\ll) \cos.(2/w - 2)9 + [a^0 + bt \setminus n) \cos.(am - 4)9 + (a, + \pounds, lV/i) \cos.(2/w - 6)9 \dots + 7 (\ll + * - iVn) B = a \cos. \ddot{m} ? + (i - \gg V \ll) \cos.(2 m - 2)9 + (a, - 6, / \ll) \cos. (am - 4)9 + (flj - *ilV/i) \cos. (3/71 - 6)9. \dots + \{ (a. - bm \setminus n)$, on aura en général $-j^f - = AB$, de sorte que A et B seront les deux facteurs dont le produit est égal au polynôme $\cos. - J 9 \sin. ' 9 \gg 3 - -4 \cos/-, \sin / < ?$ _etc 1. a. 3. 4-5 Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 21.86% accurate

SIXIÈME PARTIE. 375 propriété d'autant plus remarquable qu'elle n'aurait pas lieu si le nombre n de forme $km \pm 1$ n'était pas un nombre premier. Pour avoir semblablement la valeur de — — -, il suffit de mettre $\cos. 9 \mid 71c - 9$ à la place de 9 dans les formules précédentes. Soit donc $C = a \cos.a / W9 - (1 \mid \ll) \cos.(a m - a) 9 + (a, bt \vee rC) \cos.(a m - 4) 9 - (a, + 6, l/t) \cos.(am - 6) 9 . . - + - \setminus (a, + 6, l/*)(- \text{if } D = a \cos.a m 9 - (1 - 1/\ll) \cos.(am - 3) 9 + (a, - \&, l/i) \cos.(am - 4) 9 - (\ll) - \pounds, l/i) \cos.(a/n - 6) 9 . . 4 - T(a. - i.l/n) (- 1)-$, et on aura $\cos^{\wedge} = CD$. desortequeGet D seront les deux facteurs co». $9 * \text{ dont le produit est égal au polynôme } \cos. - 9 - \cos.-1 9 \sin.'9-f- \hat{a}'^{''''''} 3 \cos''S ? \sin-V - \text{etc}(fiyo)$ Si on fait $''^{\circ\wedge} = o$, ou $AB=o$, les valeurs de 9 qui satisfont à cette équation «ont en général $9=\sim$, * étant un entier quelconque non-divisible par n ; car cette valeur rend $\sin. \langle 9=0$, sans qu'on ait en même temps $\sin. 9=0$. Soit $\cot. 9=3$, ! équation $AB = o$ deviendra . . $b./i - 1 .n - 2 i.w - 1...JI - 4 . t ^{\circ} = nz r., ; 3 - ^ + K.a...5 z \sim \text{etc}$ et les « — 1 racines de cette équation seront $z=\pm(\cot. -, \cot. - , \cot. - ... \cot.)$ • H s'agit maintenant de faire voir comment ces/ $i - 1$ racines se partagent entre les deux équations $A = o$, $B = o$. Pour cela il faut reprendre la valeur $a b = ^{\wedge} 7 = + + sr \sim 3y \bullet \bullet \bullet$

Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 23.25% accurate

176 THÉORIE DES NOMBRES. Or on sait que ce polynôme du degré $n - i$ ou $4m$ est le produit des $4m$ facteurs $(x - r y) \{x - r'y\} (x - rJ y) \dots (x - r^*my)$, dans lesquels on peut supposer $r = \cos. \frac{h}{m} - i \sin. \frac{h}{m}$, et si on désigne par g une des racines primitives de les mêmes facteurs pourront être rangés dans l'ordre suivant : $x - y^{\cos. \frac{h}{m} - i \sin. \frac{h}{m}}$ $x_{-}(\cos. \frac{h}{m} + i \sin. \frac{h}{m}) x - y \{ \cos. \frac{h}{m} - i \sin. \frac{h}{m} \} \cos. \frac{h}{m} + i \sin. \frac{h}{m}$ *
 n Il résulte encore de la théorie déjà exposée que le produit de ces 4 facteurs, désigné par $-(Y' - nZ')$ se partage en deux groupes de a m facteurs chacun, l'un composé des termes de rang impair, savoir : $x - y f \cos. \frac{h}{m} + i \sin. \frac{h}{m} - J \cos. \frac{h}{m} - i \sin. \frac{h}{m} - J \cos. \frac{h}{m} - i \sin. \frac{h}{m} - J \cos. \frac{h}{m} - i \sin. \frac{h}{m}$)
 l'autre composé de termes de rang pair, savoir : Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 24.40% accurate

SIXIEME PARTIE. $x = y (\cos. \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin. \frac{1}{2})$ $x = j (\cos. \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin. \frac{1}{2})$ $y = f \cos. \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin. \frac{1}{2}$ $J = x - y (\cos. \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin. \frac{1}{2})$ $K = x + y (\cos. \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin. \frac{1}{2})$ Ces groupes de m facteurs sont les valeurs de A et B ; mais ce ne sera que dans les cas particuliers qu'on pourra décider lequel des deux est égal à A , l'autre étant égal à B . (671) Soit $x = \cos. \frac{a}{2} + \frac{1}{2} \sin. \frac{a}{2}$ a) l'un des facteurs simples compris dans le groupe qui représente la valeur de A ; puisqu'en rejetant les multiples de n , on a $g^m = 1$, chaque valeur de $a = \frac{2k\pi}{m}$, où k est moindre que $2m$, sera accompagnée dans le même groupe d'une valeur $-\cos. \frac{a}{2} - \frac{1}{2} \sin. \frac{a}{2}$, de sorte qu'on aura à la fois les deux facteurs simples $x = y (\cos. \frac{a}{2} + \frac{1}{2} \sin. \frac{a}{2})$ $x = y (\cos. \frac{a}{2} - \frac{1}{2} \sin. \frac{a}{2})$, d'où résulte le facteur réel du second ordre $x^2 + y^2 - 2 \cos. \frac{a}{2} x y$. Substituant t les valeurs $x = \cos. \frac{a}{2} - \frac{1}{2} \sin. \frac{a}{2}$, $y = \cos. \frac{a}{2} + \frac{1}{2} \sin. \frac{a}{2}$, ce facteur devient $2 \cos. \frac{a}{2} - 2 \cos. \frac{a}{2}$. Donc en faisant $2 \cos. \frac{a}{2} = t$, l'un des facteurs A et B sera exprimé par le produit de m facteurs simples $(\cos. \frac{a}{2}) (f - \cos. \frac{a}{2}) \dots (\cos. \frac{a}{2})$ II. 48

378 THÉORIE DES NOMBRES, et l'autre le sera par le produit
 $((\cos, \sin), (\cos, \sin))$ Ces formes s'accordent très-bien
avec les valeurs trouvées ci-dessus pour A et B; car en substituant pour $\cos.$
 4° , $\cos. 6^\circ$, etc. leurs valeurs connues en fonctions de $\cos. a = t^*$, la
valeur de A se réduira à la forme $A = r + \dots$, dont les
coefficients ne contiennent d'autre irrationnelle que $\sqrt[n]{n}$; il en est de même
de la valeur de B. Les équations $A = 0$, $B = 0$, ayant en général toutes leurs
racines réelles, comprises dans les deux suites $f = \cos.$, $\cos. -$, $\cos. -$
 $\dots \cos. -$ $f = \cos. -$, $\cos. -$, $\cos. -$ $\dots \cos. -$, on connaîtra pour
chaque suite la somme des puissances de même degré des différents termes
qui la composent, laquelle sera exprimée par les coefficients de l'équation
correspondante, et ne contiendra par conséquent d'autre irrationnelle que
 $1/n$. C'est en cela que consistent les nouvelles formules relatives aux
sections angulaires que nous avons annoncées dans le titre de ce
paragraphe, et «fui ne sont pas comprises parmi les formules connues. De
semblables résultats s'appliquent aux fonctions C et D dont le produit est
égal à mais les formules qu'on en déduit pour les sections angulaires, ne
diffèrent pas de celles qui sont données par les fonctions A et B. Voici
quelques applications de ces formules. Exemple I. (67a) Soit $n = 3$, ou aura
 $m = 3$; dans ce cas les valeurs de Y Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 21.71% accurate

SIXIÈME PARTIE. 379 et de Z prises dans le tableau de l'art. 5 1 a , donnent « , = 4 , o } = — i , b , = o , b > — i ; d'où résultent les valeurs $A = \cos. 60^\circ - (i - hV/i3)\cos. 49^\circ + 4\cos. a\varphi - 7 + |l/i3|$ ' $B = \cos. 60^\circ + (i - V/i3)\cos. 49^\circ + 4\cos. 29^\circ - \sqrt{-1}/i3$. Faisant $2003.29 = *$, on aura $A = ti + \pm(i + 1/i3) \sqrt{-1} - f - \{ \sqrt{-1}/i3 B = \sqrt{-1} + (i - i/i3)r - A + ii/i3$. Ensuite si l'on prend la racine primitive $\xi = 2$, on devra supposer $A = (t - 2\cos. (t - 2\cos.) Q - 2\cos.) = (\sqrt{-1} - \sqrt{-1}) (\sqrt{-1} - a) - T (\sqrt{-1} - \sqrt{-1} - T)$ car de cette manière le dernier terme du premier produit, savoir: $-2, \cos. \sqrt{-1} \cos. \sqrt{-1} \cos. \sqrt{-1}$ est négatif et pourra être égalé au dernier terme de A, savoir: $-f - \sqrt{-1}/i3$. En même temps le dernier terme du second produit, savoir : $-a' \cos. - \cos. - \cos. -$, sera positif et égal à $- \xi \sqrt{-1}/i3$, dernier terme de B. De là on voit l'que s'il s'agit de diviser la circonférence en i3 parties égales, le problème pourra être résolu soit au moyen de l'équation $0 = \sqrt{-1} - 1(1/13 - i)r - * - i + i\sqrt{-1}/i3, \bullet$. 1 air $5^* 61c$ dont les trois racines sont $f = 2\cos. \sqrt{-1}$, $f = - \cos. \sqrt{-1}j$, $f = \cos. \sqrt{-1}j$, soit au moyen de l'équation $0 = * + j(Wi3 + i)r - t - i - ji/3$, dont les racines sont $f = \cos. / = - \cos. t = - \cos. \bullet i3' i3' i.1 a^*$ Que les racines de ces équations, élevées successivement aux puissances 1 , a, 3, etc. , donnent les formules 48. .

The text on this page is estimated to be only 15.20% accurate

380 THÉORIE DES NOMBRES. 2TC 5IT OIT , / . j n \
 $\cos'73'' \sim \cos-73 + \cos-73 = H^*3 - 0 \text{ C08.}'^{\wedge} + \cos.'5| + \cos.'^{\wedge} = \backslash (11 - Wi3)$
 $\cos.^{\wedge} - \cos.J^{\wedge} + \cos.Jg = i(1/i3 - i)$ etc. $\cos.j^{\wedge} - \cos- - H^1^{\wedge} \text{''}^0$
 $\cos.'^{\wedge} + \cos.*^{\wedge} + \cos.'^{\wedge} = \backslash \{ i - H/13 \}$ $\cos.J^{\wedge} - \cos.\hat{i}^{\wedge} \sim \cos.\hat{i}^{\wedge} = -KW/i3 + 0$ etc.
 Exemple II. (673) Soit $n=y$, $m=4$; les valeurs de Y et Z, prises dans le
 tableau du $n^* 5ia$, donnent pour ce cas «, = 5, «j = 7, $i4=4$ » 1, $b_5=1$, &4=a,
 d'où résultent les valeurs $A = \text{acos.}8\zeta + (i + |i7)\text{cos.}6\zeta + (5 + \gg/i7)\text{cos.}4?$
 $\blacksquare + \blacksquare (7 - + -1/i7)\text{cos.}29 + a + I/17 B = 2 \text{cos.}89 + (1 - V/i7) \text{cos.}69 + (5 -$
 $V17) \text{cos.}4? + (7 - 1/17)005.29 + 2 - 1/17$, au moyen desquelles on aura
 $\sin. i79 = AB \sin.9$. Si l'on fait $a \cos. 29 = t$, les valeurs de A et B deviennent
 $A^{\wedge} + iCi - H/^K + KV/iJ - 3)r + (a - 1/i7)' - B^{\wedge} + tCi - ^K - \{(I/17 + 3)r +$
 $(a + V/i7)' - \gg \bullet$ Dans ce même cas on pourra supposer $g=3$, ce cpîi donnera A
 $= (< - *co, .6T^*)(< - (* \text{---}^{\wedge})(' \text{---} --40 B = (/ - \text{acos.}^{\wedge}) (< - * \langle, \gg \bullet \pounds) (\langle - \gg \langle \langle .!!)$
 $(\gg - \gg \langle \langle - . * =) \bullet$ Soit x le côté du polygone de 17 côté», on aura $x = a - \text{acos.}''$;
 Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 20.12% accurate

SIXIÈME PARTIE. 38 1 ainsi ce côté se déterminera par la plus grande racine positive de l'équation du 4e degré $B=0$; d'ailleurs on sait par la théorie précédente que cette équation peut se décomposer en deux équations du second degré. Comparant les racines des équations $A=0$, $B=0$, avec leurs coefficients, on en déduira les formules suivantes: $\cos. + \cos. -4- \cos. — — \cos. - = i iy 1 7 — I) Y — j ax''*+'' + x'''y + o-^-'y + aiX^-'y^3 + etc. — j — aj*-' — xj — a,«*y — ' — a,^-' — etc. \sim \setminus + *y- 4- bts? jr- + hx'y — * -+- etc. Soit $x = \cos.\zeta + l/ — i \sin.f, ^ = \cos.? — \sqrt{—} i \sin.?$, on aura Second cas. $/ * = 4 - \blacklozenge - 3$. Digitized by Google$

$$\cos.^3 \frac{2\pi}{17} + \cos.^3 \frac{4\pi}{17} + \cos.^3 \frac{8\pi}{17} + \cos.^3 \frac{\pi}{17} = \frac{1}{8} (15 + \sqrt{17})$$

$$\cos.^3 \frac{2\pi}{17} + \cos.^3 \frac{4\pi}{17} + \cos.^3 \frac{8\pi}{17} - \cos.^3 \frac{\pi}{17} = \frac{1}{8} (\sqrt{17} - 2)$$

$$\cos. \frac{\pi}{17} \cos. \frac{2\pi}{17} \cos. \frac{4\pi}{17} \cos. \frac{8\pi}{17} = \frac{1}{16}$$

$$\cos. \frac{3\pi}{17} + \cos. \frac{5\pi}{17} + \cos. \frac{7\pi}{17} - \cos. \frac{6\pi}{17} = \frac{1}{4} (\sqrt{17} + 1)$$

$$\cos.^3 \frac{3\pi}{17} + \cos.^3 \frac{5\pi}{17} + \cos.^3 \frac{7\pi}{17} + \cos.^3 \frac{6\pi}{17} = \frac{1}{8} (15 - \sqrt{17})$$

$$\cos.^3 \frac{3\pi}{17} + \cos.^3 \frac{5\pi}{17} + \cos.^3 \frac{7\pi}{17} - \cos.^3 \frac{6\pi}{17} = \frac{1}{8} (\sqrt{17} + 2)$$

$$\cos. \frac{3\pi}{17} \cos. \frac{5\pi}{17} \cos. \frac{6\pi}{17} \cos. \frac{7\pi}{17} = \frac{1}{16}$$

The text on this page is estimated to be only 20.69% accurate

38a THÉORIE DES NOMBRES. -Y $y = a \sin.(am - i)9 - \sin.(am - 1)9 + a, \sin.(am - 3)9 - 4 \sin.(am - 5)9 + \text{etc.}$ $vZ = \cos.(am - 1)9 + \cos.(am - 3)9 - 6 \cos.(am - 5)9 + \text{etc.}$ Soit donc $A = a \sin.(am - w)9 - 4 \sin.(am - 1)9 - a, \sin.(am - 3)9 - a \sin.(am - 5)9 + \text{etc.}$ $H = \sqrt{n} [\cos.(am - 1)9 + b, \cos.(am - 3)9 - b, \cos.(am - 5)9 + \text{etc.}]$ $B = -a \sin.(am - 1)9 - \sin.(am - 1)9 - a, \sin.(2m - 3)9 - a \sin.(am - 5)9 - \text{etc.} + \sqrt{n} [\cos.(am - 1)9 + b, \cos.(am - 3)9 + b, \cos.(am - 5)9 + \text{etc.}]$ et on aura en général $= AB$. w un. 9 Si l'on met* -9 à la place de 9, on aura un second système de formules, savoir: $C = a \cos.(am - i - 1)9 - \cos.(am - 1)9 + a, \cos.(am - 3)9 - a, \cos.(am - 5)9 + \text{etc.}$ $-4/n [\sin.(am - 1)9 - b, \sin.(am - 3)9 + b, \sin.(am - 5)9 - \text{etc.}]$ $D = -a \cos.(am + 1)9 - \cos.(am - 1)9 - a, \cos.(am - 3)9 + a, \cos.(2m - 5)9 - \text{etc.}$ $+1/n [\sin.(am - 1)9 - b, \sin.(am - 3)9 + b, \sin.(am - 5)9 + \text{etc.}]$ $\cos 1/n \_ CD$ $\cos. 9$ Maintenant pour trouver une autre expression des deux facteurs de $X = \sqrt[n]{}$, appelons de nouveau g une racine primitive de n et soit r^* une racine quelconque imaginaire de l'équation $r^n - 1 = 0$, en sorte qu'on ait $r^* = \cos.^{-1/n} - 1 \sin.^p$, A étant l'un des termes de la série $ijg > g \backslash gs - g^{***}$ i la fonction X sera égale au produit de tous les facteurs $x - yrk$ dans lesquels on donnera successivement à k les $n - 1$ valeurs précédentes, lesquelles Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 28.77% accurate

SIXIÈME PARTIE. 383 représentent dans un autre ordre la suite des nombres naturels $i, a, 3, \dots i$. Cela posé si on substitue les valeurs $x = \cos. \theta + i \sin. \theta$, $y = \cos. \theta - i \sin. \theta$, le facteur $x - r^*y$, dans lequel $r^* = \cos. \theta + i \sin. \theta$ deviendra $(i - r^*)(\cos. \theta - \sin. \theta \cot. \theta)$, ou en faisant $\cot. \theta = u$ $(1 - r^*) \sin. \theta (u - \cot. \theta)$. Prenons successivement pour k les $m + 1$ valeurs $1, \dots$ et appelons a le produit correspondant de tous les coefficients $1 - r^*$, nous aurons pour l'un des deux facteurs de X , l'expression $P = a(\sin. \theta)^m + (\dots - \cot. \theta)(a - \cot. \theta)(w - \cot. \theta) \dots (\dots - \cot. \theta)$. De même en donnant à k les valeurs successives $g, g^2, \dots$ et appelant S le produit correspondant des coefficients $1 - r'$, on aura pour l'autre facteur de X l'expression $Q = e(\sin. \theta)^m + (\dots - \cot. \theta)(\dots - \cot. \theta)(\dots - \cot. \theta) \dots (u - \cot. \theta)^m$ et parce qu'en rejetant les multiples de n dans les valeurs $g, g^2, \dots$, on a $g^m = 1$ et par suite $g = 1$ il s'ensuit que la valeur de Q peut encore s'exprimer ainsi : $Q = e(\sin. \theta)^m + (\dots + \cot. \theta)(\dots + \cot. \theta)(\dots + \cot. \theta) \dots (u + \cot. \theta)^m$, c'est-à-dire que les racines de l'équation $Q = 0$ ne diffèrent que par le signe des racines de l'équation $P = 0$, ou que l'une de ces équations se déduit de l'autre en changeant seulement le signe de u . Tels sont les deux facteurs dont le produit $PQ = X$, et comme dans le cas de $\theta = 0$, qui donne $x = 1$ et $y = 1$, on doit avoir $X = n$, il s'ensuit qu'on aura $n = 6$, et qu'ainsi on pourra supposer

The text on this page is estimated to be only 28.31% accurate

384 THÉORIE DES NOMBRES. C'est aussi ce qu'on déduirait des valeurs de A et B ; car en (àisant $f = 0$, on a $A = B = |Z^0 V_n$, Z^0 étant la valeur de Z dans le cas de $? = 0$. Mais dans le même cas on a $X = t$, $Y = 0$, et l'équation $4X = Y^* + iZ'$ donne $Z' = 2$, d'où résulte $A = B = V_n$ (675) Les valeurs trouvées pour P et Q représentent celles des fonctions A et B que nous avons exprimées d'une manière linéaire par les sinus et cosinus des multiples impairs de l'angle θ ; mais ce n'est que dans les cas particuliers qu'on pourra décider Inquelle de ces deux valeurs doit être prise pour A et l'autre pour B. Cela sera toujours facile en égalant à P celle des valeurs de A et B dont le dernier terme est de même signe que $-\cot^* \cot.^\wedge \text{--} \cot^\wedge \text{--}$. . $\text{--} \cot.^\wedge \text{--}$. Soit en général $(u \sqrt{-1})B = F(a) + i \sqrt{-1} G(a)$, ce qui donne $F(a) = a - \sqrt{-1} \text{--} i \text{--} 1^* \text{--} \ll + i.a.3',4 \text{ lua} \sim K \text{--} \text{etcw } i.a.J \text{ i.a.}3.4.5$ Si au moyen des fonctions F (a), G (a), on détermine de nouvelles fonctions U et V, telles que $V = 1) F(2m - 1) + bt(W + 1) \bullet F(2m - 3) + bt(u' + 1)3 F(am - 5) + \text{etc.}$ $V = aG(2m+i) + (B'+i)G(am-i) + \ll, (\ll, + i)'G(am-3) + \text{etc.}$, la première étant une fonction impaire de u, du degré $\backslash(n - 1)$, ou $2m - 1$, dont le premier terme est a^{***} , et la seconde une fonction paire du degré $2m$, on aura les valeurs $A = \sin. \gg^\wedge \text{ç}(UV//i-i-V) B = \sin. \sim + "? (UK \ll - V)$. Mais suivant l'art. 669 la valeur de AB est égale au produit de $\sin. \text{--} f$ ou $\sin.4 \sim ^* \text{--} \text{--} p$ par le polynôme Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 24.69% accurate

SIXIÈME PARTIE. 385 donc le polynôme en u du degré $n - i$ peut en général se décomposer en deux facteurs $U/V_i + V$, $U/w - V$, dont l'un sera représenté par le produit $\prod_{i=1}^n (w_{\text{col.}i} (u - \cot S_i)) \dots ((- \cot^i)$, et l'autre par le produit $\prod_{i=1}^n (u + \cot^i Q \text{ } \text{Ç} u + \cot^i) ((-h \cot^i) \dots (u - f - \cot^i)$ • Si l'on veut diviser la circonférence en n parties, on aura à résoudre l'équation $U V_n \text{ dr } V = 0$ du degré $am + i$ et dont les racines sont, en déterminant convenablement le signe ambigu, $U = \cot. -$, $\text{COt. } -2-$, $\text{COt. } \dots \text{COt. } -2$ On pourrait résoudre directement la même question[^] par l'équation $G(i) = 0$, laquelle en faisant $u' = v$, devient $0 // v' \sim + - ' 5 - \text{vim } H * \text{vim} \sim -$ etc. 1.3.3 i.a.i./f.S de sorte qu'elle est aussi du degré $a m - 4 - 1$; mais l'équation en u est plus simple, et ses racines, connues a priori, donnent lieu à de nouvelles propriétés, comme on va le voir dans les exemples suivants : (676) Exemple I. Soit $n - 7$ ou $m - i$, on aura par le tableau du n° 5ia, $\ll, = 0$, $b, = 0$, ce qui donne $\sin. 79 = A B \sin. < p A = \text{itcos.} \text{ç} - + - a \sin. 3 \text{ ç } - \text{♦} - \sin. 9 B = n 7 \cos. < p - a \sin. 3 \text{ ç } - \sin. 9$. Faisant ensuite $\cot. 9 = u$, on aura $U = (w'' + i) F(i) = \ll 3 + w V = a G(3) + (a' + i) G(i) = 7 \ll - i A = \sin., 9(n T U + V) B = \sin. J 9 (^U - V)$. « 49

The text on this page is estimated to be only 17.47% accurate

386 THÉORIE DES NOMBRES. ■ t Donc $\sin.79 = (\sin.(p))^7(\ll T$
 $U+V)(/i'' U - V)$; mais on a aussi directement $\sin. 7 < p = (\sin.9):G(\ll)$, en
désignant par $G(n)$ le polynôme $nub - \hat{n}ut + Snu^* - i$. Donc ce polynôme
est le produit des deux facteurs il f ■ ■ i $n > V - V = n \sim u^* - // // ' + n ' u$
 $+ t$, ee qui est facile à vérifier. Dans ce même cas on peut faire $\wedge=3$, ce qui
donne $\cot.^p = \cot. -$, $\cot.\text{f} - \wedge = \cot. - = - \cot. -$ Dès lors il est facile de
voir n n n n qu'on aura les deux équations $n 7 wJ - n u' - + - n \sim u + \backslash = n 7 Qt$
 $- \cot. \text{Çti} - \cot. ^ \text{Çu} \blacksquare + \cot. n7i\grave{a} + nu'+n hi - i = /i7^\ll + eot.^* ^ \ll - f -$
 $\cot^Q \text{Çu} - \cot.^)$ qui se déduisent l une de l'autre en changeant
simplement le signe de u. La division de la circonférence en 7 parties égales
se fera donc au moyen de l'équation du troisième degré : $0 = 7^* \ll' - 7// ' +$
 $71 u - + - 1$, dont les racines sont $\ll = \cot.-$, $// = \cot. -$, $u - - \cot. -$, et il en
7 7 7 . résulte les propriétés suivantes : $\cot. * + \cot. - - \cot. - = 7$; 7 7 7 7
 $\cot.1 - + \cot.' - + \cot.' - = 5 7 7 7 T J15 3 \gg -$, $\cot. - \cot. - \cot. - = 7$, 7
7 7 ' qu'il est facile de vériBer par le calcul trigonométrique. Digitized by
Google

The text on this page is estimated to be only 18.44% accurate

SIXIÈME PARTIE. [^] (677) Exemple//. Soit $a=ii$ ou $w = a$, on aura suivant le tableau du n° 5ia, $= -a$, $A, =0$, ee qui donne $U = (a^*+i)F(3) = ai - a \ll J - 3 \ll V = aG(5) + (M'+.)G(3) - a(\ll'+[])'G(i) = \ll \ll ^2, w-, \sin. 11 \zeta = (\sin.?)''(U/7i+V)(Uv/w-V)$. Mais on a aussi $\sin. 11 9 = (\sin.?)''G(\ll)$, en désignant par $G(\ll)$ le polynôme $nu^* - i5/.w' - \gg - 42/itt6 - 3o/jm4 + 5nu' - 1$. Donc ee polynôme est le produit des deux facteurs $M = /i'us + nu^* - 2/1 'f*5 - a. nu1 - 3n^u 1$ ce qui donnera $\sin. 11 9 = (\sin.?)'' M N$. Dans ce cas on peut supposer la racine primitive $g = a$, puisque cette valeur donne $g^3 + 1 = 0$ (1 1); ainsi l'une des équations $M = 0$, $N = 0$, aura les cinq racines $u = \cot. ^ \cot. ^, \cot. - , \cot. ^, 3 '' ^ w n * \cot. - ,$ dont quatre sont positives et la cinquième négative. Or la succession des signes de l'équation $N = 0$, fait voir que c'est à cette équation que se rapporte la propriété dont il s'agit; donc on aura en général $N = , T(o\_C0t .7)(B\_cot .\pounds) (\ll - \ll, .\pounds) (u + \cot \hat{t} j!) (\ll - \cot. ^) M = \ll T(., + \cot. ^ (., + \cot .\pounds)(B + \cot .^)(tt\_c,,, .\pounds)(B + C0,.i\ddot{i})$. Ainsi pour diviser la circonférence en 11 parties égales, il faudra résoudre l'équation dont les racines sont $W = \cot. ? \ll = \cot \sim, \ll \ll \cot. ^, M = CCot \sim$

The text on this page is estimated to be only 16.14% accurate

388 THÉORIE DES NOMBRES. «= — cot—*; on en déduit les propriétés suivantes : ir 3w . 4* . Sir ^ air i cot. 1- eot. h cot. — 4- cot eot. — = 1 1 » ii ii ii ii ii cot.'^- + cot.' - + eot*^ + cot'^ + cof= 1 5 ii ii ii ii ii cot.J-+ cot.1- + cot^ + cot.3— COt.J- = I 1 • II II II 11 II . . . 3lt . i Ait . , 5lt . , air , cot.4 — 1- cot* — h cot.4 — + cot.4 h cot.4 — = i4i II II II II II « a* . 3« . 4* t 5* — cot. — cot. — cot. — cot. — cot. — = I I II II II II II Au reste la somme des puissances de degré pair se tirerait plus simplement de l'équation $G(n) = o$ qui dans ce cas est $o=u'' = i5m^*4-42\ll 8 - 3o^{4-t-5M}$, — Elle donne immédiatement $ful = i5, /7/4 = i4i f 5J5$, etc. (678)
Exemple III. Soit $/^* = 19$ ou $m = 4$, on aura suivant le tableau du n°512, $a, = -4$, « $i = 3, a4 = 5, />, = o, \&j = -1, ^ = 1$, ce qui donne $A = \sqrt{n} [\cos. 79 - \cos. 3 \wp -4- \cos. 9] + \text{asin.}99 - t - \sin.79 - 4\sin.59 + 3\sin.39 + 5\sin.9$ $B = \sqrt{n} [\cos. 79 - \cos. 39 + \cos. 9] - \text{asin.}99 - \sin.79 - i - 4\sin.59 - 3 \sin. 39 - 5\sin > 9$ $\sin. n 9 = A B \sin. 9$. On aura aussi sous une autre forme $\sin./i9 = (\sin.9)^*$
 $(U/\ll + V) U = (a^* + 1) F(7) - (\ll' + 1 y F(3) + (\ll\rangle + 1) \bullet F(1)$
 $V = aG(9)4 - (tf' + i)G(7) - 4(tt, + i)'G(5) - i - 3(a,4 - i)iG(3) + 5(k - + i)4G(i)$, ou en faisant les substitutions , ■ Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 27.12% accurate

SIXIÈME PARTIE. $38g \setminus \} = u? - iGtt' + aGi^{\wedge} + ^{\wedge}u' - 3\ll \setminus - nu^* - 8/\hat{m}^* - f- \setminus 8ni\grave{a} - r$. On connaît donc en fonction de u , les deux facteurs $U/\setminus \rangle + V$, $U/\setminus i - V$, dont le produit est égal à $^{\wedge}n"J0$ ou à la fonction $G(n) = n m'^* - 5 inu'' + 6 1 a n u'^* - a65a n u'' + 486a n u^{\circ} - 3978 n u^* 4- 1 4a8 n u' - ao4 n m^* + 9 n \ll' - 1$. Dans le même cas on peut supposer $g = a$, ce qui donne les neuf racines de l'équation $o = U/\ll = fcV$, savoir : $w = \cot. -$, $\cot -$, $\cot -$, $\cot -$, $\cot.Z^{\wedge}$, $\cot.^{\wedge}$, $- \cot.^{\wedge}$, $- COt -$, $- COt. -$, dont six sont positives et trois négatives. Par cette raison le dernier terme de l'équation devra être positif; cette équation sera donc $U/\setminus n - V = o$, ou $o = n^{\wedge}(w) - i6\ll\hat{i} - i - a6Mi + 4o\ll\hat{i} - 3w) - n\{u^{\circ} - Su6 + i8u^*) + i$, et le second membre sera le produit de nT par les neuf facteurs $(\ll - \cot.?) (\ll - \ll^*.f) (\ll\_ \cot.f) (\ll - \cot.f) (\ll - \ll^*.f) (\ll - \cot. f) (\ll + \cot?) (11 + \ll^*.f) (\ll - \cot^{\wedge})$; c'est donc cette équation du 9e degré qu'on aurait à résoudre immédiatement pour diviser la circonférence en 19 parties égales; mais on a vu ci-dessus les moyens de réduire la difficulté à deux équations du 3e degré. Au reste cette équation donnerait, entre ses racines, des relations semblables à celles qu'on a vues dans d'autres exemples, mais elles deviennent moins intéressantes à mesure que le nombre n devient plus grand.

The text on this page is estimated to be only 29.43% accurate

300 THÉORIE DES NOMBRES. Nous avons suffisamment développé les propriétés de la fonction égale à $\pi^2/6$; on pourrait développer semblaiblement celles de la fonction égale à $\pi^2/12$ mais comme celle-ci résulte de la première en mettant simplement $\sim$ — $\leq$ à la place de 9, nous n'avons pas cru devoir entrer dans de nouveaux détails à ce sujet. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 28.44% accurate

SIXIÈME PARTIE. 39i § VI. Nouvelle démonstration de la loi de réciprocité qui existe entre deux nombres premiers. (679) Soit T ou $a-m$ un nombre premier quelconque, a excepté; soit g une des racines primitives qui répondent à ce nombre, de sorte qu'on ait $g^{m+1} \equiv 1 \pmod{a}$; nous avons vu dans l'art. 609, que les a racines de l'équation $X^a = 1$, où $X \neq 1$, peuvent être représentées par la suite $(0, (*), (*^2), (*^3), \dots, (*^{a-1}))$ dont chaque terme («) est l'expression de r^* , r étant une racine imaginaire quelconque de l'équation $x^p - 1 = 0$. Soit Σ la somme des termes de rang impair et Σ' celle des termes de rang pair, en sorte qu'on ait $\Sigma = (0 + (*^2) + (*^4) + \dots + (*^{a-2}))$ et $\Sigma' = (* + (*^3) + (*^5) + \dots + (*^{a-1}))$; on a trouvé dans l'art. cité deux formules pour déterminer Σ et Σ' , l'une qui suppose p de la forme $4k+1$, l'autre qui le suppose de la forme $4k+3$; ces deux formules s'appliquent aisément aux deux cas en leur donnant la forme suivante : $\Sigma = r - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} + (-1)^k \right)$ Le signe ambigu qui s'y trouve dépend de la racine r qui peut être prise à volonté parmi toutes les racines de l'équation $X^a = 1$; mais Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 29.67% accurate

3çp THÉORIE DES NOMBRES. cette ambiguïté n'a aucune influence sur le résultat que nous allons exposer. Appelons P la différence $y - z$ ainsi exprimée nous aurons (680) Soit maintenant q un nombre premier quelconque, différent de p , et supposons qu'on veuille élever le polynôme P à la puissance q . Cette puissance contiendra d'abord les puissances q des différents termes du polynôme P pris séparément; et comme la puissance q du terme $(\ll)$ ou ra est r^q ou $(qa)^q$ on aura une première partie $Q = (*) - fo(*) - (7*0. \bullet \bullet + for -) - (** - \blacksquare)$. Elle contiendra ensuite un grand nombre de produits partiels qui seront tous de la forme $q Arx$, A étant un nombre entier et x un exposant aussi entier qui pourra être supposé moindre que p , puisqu'on a $rP - i$. Désignons par $2(q Arx)$ la somme de tous ces termes, tant positifs que négatifs, nous aurons l'équation $P^q = Q + 2(q Ar^*)$. Maintenant, quel que soit le nombre premier q différent de p , on aura nécessairement $(*) = \gg$ ou $(?) = -1$; dans le premier cas q serait ce qu'on appelle un résidu carré de p , et on pourrait supposer $q = g^2$; dans le second q serait un non-résidu et on aurait $q = g^2 \cdot h$ valeurs qui ont lieu en négligeant les multiples de p . (681) Soit $i^*(J) = 1$ ou $q = g^2$, l'exposant n étant toujours compris dans la suite $0, a, f, 6, \dots$ im — a , on aura $Q = (r)^{-\wedge} + (\wedge) - \bullet - (* -) + (\ll) - \& + <(*)$. $\bullet - Hr$). Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 26.84% accurate

SIXIEME PARTIE. 393 quantité dont les termes forment une suite rentrante sur elle-même où l'on pourra prendre (i) pour premier terme et qui se réduira ainsi à $(0 - te) + \bullet \bullet - (g''^* \sim') >$ de sorte qu'on aura $Q = P$. Soit $a^\circ (= - i, \text{ ou } q = g''^* \sim')$, on aura $Q = (^{-}) - (r) + (rM -) - \bullet \bullet + \grave{u}r'' - (i) + (\acute{e}r) - r \bullet \bullet - fr - o. \text{ ou } Q = \_ P$. Donc on a dans les deux cas $Q = ^{-} JP$, ce qui donne l'équation générale $P^7 = (?)P + ?^2(Ar^*)$ ou $^* - \_ (i) = .ss^*a$. Substituant dans le premier membre la valeur de P, il se réduit à $y - t p - i y - i, - (\_) \bullet - \_ (?)$, quantité toujours égale à un nombre entier. Quant au second membre $y.Z^{pr} \setminus$ il devra donc aussi se réduire à un nombre entier; et comme l'irrationnelle $P = \pm V / [/ > (- i) \gg]$ n'est pas divisible par q, il faudra que $^{\wedge} - 1$ se réduise généralement à un entier A', de sorte qu'on aura $y - i p - I y - I p - (\_) - . A'$. Supprimant de part et d'autre les multiples de q, ce qui réduit $p \sim^* \sim$ à l'expression . on aura enfin l'équation $p - i a - i (\$)(\_,$ dans laquelle consiste la loi de réciprocité entre les deux nombres premiers p et q. II. 5o Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 26.00% accurate

Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 21.23% accurate

APPENDICE. Section I. Méthodes nouvelles pour la résolution approchée des équations numériques. Nous nous proposons de faire voir comment on peut trouver, avec tel degré d'approximation qu'on voudra, les racines réelles d'une équation proposée, sans qu'on ait aucune connaissance préliminaire de la grandeur et du nombre de ces racines. Les méthodes que nous donnerons pour cet objet, ne supposent que des préparations qui tiennent à la nature de ces méthodes, et peuvent s'appliquer directement à toute équation proposée. La première exige cependant qu'on connaisse une limite supérieure à la plus grande des racines; la recherche de cette limite est donc le premier objet dont nous allons nous occuper.

Limites des Racines réelles. V) Il suffira de chercher la limite des racines positives; car en mettant $-x$ à la place de x , ou changeant les signes des termes de rang pair, les racines qui étaient négatives deviendront positives à leur tour; de sorte que la règle trouvée pour les racines positives, s'appliquera également, mutatis mutandis, aux racines négatives. Soit l'équation proposée du degré n , $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1x + a_0 = 0$, dans laquelle i est le coefficient du premier terme, et A_i est le coefficient du terme affecté de la puissance x^{n-i} ; pour avoir la limite supérieure des racines réelles et positives, il faut distinguer deux cas. Si le second terme a un coefficient négatif qui ne soit surpassé par aucun des autres coefficients négatifs; je dis que ce coefficient, Oo. Digitized by Google

396 APPENDICE. .augmenté d'une unité, sera plus grand que la plus grande racine positive. En effet , si une valeur positive de a pouvait être plus grande que $1 + A$, ce serait dans le cas où tous les coefficients seraient négatifs et égaux à A , en sorte que l'équation à résoudre fut $x^n - A x^{n-1} - A x^{n-2} - \dots - A x - A = 0$. Mais dans ce cas même, si l'on fait $x = 1 + A$, on aura $x^n - A x^{n-1} - A x^{n-2} - \dots - A x - A = 1$, etc. , de sorte que le premier membre se réduit à $+1$; donc on a toujours $x < 1 + A$. Si le plus grand coefficient négatif n'est pas celui du second terme, soient A , et A_i , les deux coefficients négatifs pour lesquels $|A|$, et $|A_i|$ sont les plus grands possibles; je dis qu'on aura toujours $x < 1/A + 1/A_i$. En effet, soit a le plus grand de ces deux radicaux , et b l'autre; il n'y aura, par hypothèse, qu'un seul terme négatif de l'équation représenté par $-a x^m$; tous les autres qu'on peut représenter généralement par $-c x^k$ seront tels qu'on a $c < b$ pour l'un au moins de ces termes , et $c < b$ pour tous les autres. Donc l'hypothèse qui rend x le plus grand est celle où l'équation à résoudre serait $x^n - b x^{n-1} - a x^m = 0$. Le premier membre se réduit à $x^n - x^{n-1}(a + b)$ et si l'on fait $x = a + b$, il devient quantité toujours positive, puisqu'on suppose $a > b$, et qu'on a en général $(a + b)^n > a^n + b^n$. Donc la plus grande racine positive de l'équation proposée est plus petite que $a + b$, ou $< 1/A + 1/A_i$. Si l'équation proposée n'avait qu'un seul terme négatif $-A x^m$, Digitized by Google

SECTION I. 397 la limite de x serait simplement $1/A$, ce qui peut se vérifier immédiatement. Définition des fonctions omale. (a) Nous appellerons fonction omale de x , toute fonction qui a la propriété d'être toujours croissante ou toujours décroissante à mesure que x augmente dans le sens positif, depuis $x=0$ jusqu'à $x = \infty$. Nous supposerons toujours x positif, et cependant la fonction omale, considérée comme l'ordonnée d'une courbe, pourrait être positive dans une partie de la ligne des abscisses, et négative dans l'autre ; mais nous ne considérerons que les fonctions omale qui demeurent constamment positives pour toute valeur de x , depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \infty$. il suit de notre définition, que pour toute fonction omale $\phi(x)$, le coefficient différentiel $\phi'(x)$ est toujours de même signe, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \infty$. Il sera positif pour les fonctions omale croissantes, et négatif pour les fonctions omale décroissantes. (3) On peut donner, comme exemples des fonctions omale, les valeurs suivantes de $\phi(x)$, dans lesquelles nous supposons tous les coefficients positifs, $\phi(x) = Ax^m + Bx^n + Cx^p + K$, . N $Ax^m + Bx^n + Cx^p + K$? $W = a 1 c$ » + - + ? + etc. La première et la seconde sont croissantes, l'une depuis $\phi(0)=K$ jusqu'à $y (\infty) = \infty$, l'autre depuis $\phi(0) = 0$ jusqu'à $\phi(\infty) = \infty$; la ABC troisième décroît continuellement depuis $\phi(0)=1 - 1 - - + ^ - + - -$ jusqu'à $\phi(\infty)=i$.

The text on this page is estimated to be only 20.86% accurate

398 APPENDICE. Si on trace la courbe qui a pour équation $y = \zeta(x)$, cette courbe montera ou descendra graduellement, depuis la première ordonnée $\zeta(o)$ jusqu'à la dernière $\zeta(a)$ en sorte que la même ordonnée ne pourra jamais répondre à deux abscisses différentes. Douer étant un nombre positif donné compris entre $\zeta(o)$ et $\zeta(a)$, l'équation $c = \zeta(x)$ aura toujours une racine positive, mais elle n'en pourra avoir qu'une. Si a n'était pas compris entre les limites $\zeta(o)$ et $\zeta(a)$, l'équation $c = \zeta(x)$ n'aurait aucune racine positive. Résolution de l'Équation ormale $c = \zeta(x)$. (4)

Imaginons qu'on décrive la courbe dont l'équation est $y = f(x)$, et supposons d'abord que la fonction $f(x)$ soit croissante, et qu'en même temps la courbe soit concave vers l'axe. Fig. 1. Soit A le premier point de cette courbe, où l'on a $x = o, y = y(o)$; à l' distance c de l'axe des x menons la droite CM parallèle à cet axe, laquelle rencontre en C l'ordonnée prolongée du point A, et en M la courbe A M; il faut déterminer l'abscisse du point M qui sera la valeur de la racine cherchée. Pour cela, menons eu A la tangente Ak, qui rencontre en k la droite CM, et appelons k l'abscisse du point nous aurons en supposant $d = y - y(o) = c$ (J-O, L—C — $\zeta(x)$) $\zeta'(x)$ ' Par le point A menons une perpendiculaire h Ck, qui rencontre la courbe en au point n menons la tangente nk qui rencontre en /' la droite CM ; si on appelle l'abscisse du point k', on aura de nouveau Déterminant de même k" par l'équation

Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 26.86% accurate

SECTION I. 399 et ainsi de suite, il est évident que la limite vers laquelle convergent les termes de la série croissante k, k', k'' etc. sera la valeur cherchée de x . On voit donc que pour résoudre l'équation omale $e=f(jr)$, il faudra calculer successivement les quantités k, k', k'' etc. d'après les formules $c = \zeta(o) *' = * + ? (*)$ etc. et la dernière des quantités $k, k'',$ etc., ou la limite vers laquelle elles tendent, sera la valeur de x . (5) Il est bon de remarquer, l'que les premiers termes de la suite k, k', k'' etc. n'ont pas besoin d'être calculés très-exactement; ce n'est que lorsqu'on est parvenu à deux termes peu différents l'un de l'autre, qu'il importe de continuer le calcul avec toute la précision qu'on veut obtenir dans le résultat. 20 Que si on sait d'avance que x doit être $> k$, alors il faudra supprimer la première des équations de l'article précédent, et partir de la valeur donnée k pour déterminer toutes les autres $k', k'',$ etc., ce qui abrégera le calcul. (6) Supposons maintenant que $\eta(x)$ soit une fonction décroissante, 1 telle cependant qu'on ait $\eta(0)$ égale à une quantité finie; alors la construction se fera comme elle est indiquée dans la figure 2 ; et parce que $\eta(x)$ devient négatif dans ce cas, les formules pour calculer successivement $k, k', k'',$ etc. devront être écrites comme il suit : 1 $\eta(<0) = g - * + -\eta(*)' v' - v . \eta(*0 -$ e etc. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 29.10% accurate

SECTION I. Soit la fonction $y = f(x)$ sera une fonction omale croissante de x , et on aura à résoudre l'équation $x = f(x)$. Pour cela supposons que l'on construise sur la même ligne des f abscisses, et dans le sens positif seulement, les deux courbes dont les équations sont $y = x$ et $y = f(x)$; désignons par P le point d'intersection de ces deux courbes qui répond à la plus grande racine $x = r$; la racine r étant plus petite que a , si on fait $x = u$ dans $f(x)$, on aura une ordonnée $f(u)$ plus grande que l'ordonnée r du point P ; car $f(x)$ étant une fonction omale croissante, si l'on a $a > r$, il faut qu'on ait aussi $f(a) > f(r)$, ou $f(a) > r$. Soit i le point de la courbe $y = f(x)$ qui répond à l'abscisse $x = a$; si on mène par le point i une parallèle à la ligne des abscisses qui rencontre en m la courbe $y = x$, l'abscisse correspondante au point m étant nommée a' , l'ordonnée en m sera $(a')^2$; ainsi on aura $(a')^2 = f(a)$, il en est par conséquent $a' = \sqrt{f(a)}$. Comme on a $f(i) > r$, il s'ensuit qu'on a aussi $a' > r$; mais a' est plus approchée de r que a . L'abscisse a' détermine sur la courbe $y = f(x)$ un second point n dont l'ordonnée est $f(a')$; si par ce point on mène une parallèle à la ligne des abscisses qui rencontre en m' la courbe $y = x$, l'abscisse a'' correspondante au point m' étant nommée a'' , on aura $a'' = \sqrt{f(a')}$, et l'abscisse a'' sera encore plus grande que celle qui répond au point d'intersection P , mais elle doit en approcher plus que a' . Il est inutile d'entrer dans de plus grands détails, et on voit qu'en partant de la limite supérieure $a > x$, si on calcule les termes successifs $a', a'',$ etc. par les formules $a' = \sqrt{f(a)}$, $a'' = \sqrt{f(a')}$, etc., la plus grande racine positive r de l'équation proposée sera la limite vers laquelle convergent les termes de la série décroissante $a, a', a'',$ etc. Cette suite devra être plus ou moins prolongée, selon qu'on veut II. 51

The text on this page is estimated to be only 27.59% accurate

40a APPENDICE. obtenir une plus ou moins grande «approximation ; mais en général la convergence deviendra manifeste après un petit nombre de termes. (8) i^es premiers termes de la suite <*, a, x'', etc. pouvant être fort éloignés de la racine que l'on cherche, il ne sera pas nécessaire de calculer avec beaucoup de précision ces premiers termes; mais lorsque deux termes consécutifs commenceront à différer peu l'un de l'autre, il faudra augmenter progressivement le nombre des décimales, jusqu'à ce qu'on obtienne deux termes consécutifs qui ne diffèrent que dans l'ordre de décimales qu'on veut négliger. Pour parvenir plus promptement au résultat, on pourra employer le moyen suivant. Désignons par a, «', a'' les trois dernières valeurs approchées de r; aux points de l'axe qui correspondent à ces abscisses, menons des ordonnées p, p', p'' égales respectivement aux distances m ri, tri n'', m'' ri'', qui ont pour expression a* — a''' — ç(*) > «''* — ç(0)» faisons passer une courbe parabolique par les extrémités de ces ordonnées, et soit y = A — Qz + Cc l'équation de cette courbe, z étant l'abscisse comptée du point où x — «. On aura, pour déterminer A, B, C, les équations P = A, // = A — Bf* — *) + C(« — «y, p'' = A — B(« — a'') - f- C(« — «''y. Faisant ensuite j — o, on aura _ aA d'où l'on tire l'abscisse cherchée du point d'intersection r = * — z. (9) Si l'équation proposée ne devait avoir aucune racine positive, on trouverait que la suite «, a'', «''', etc. n'a point de limite, et que les ternies décroissent successivement jusqu'à devenir nuls. On n'en conclura cependant pas qu'il y a une racine égale à zéro, car cette racine est toujours exclue. On peut d'ailleurs, pour abrégé le calcul, chercher d'avance la limite inférieure des racines positives. Il faut pour cela faire Digitized by Google

SECTION I. 403 et après avoir trouvé, par la méthode de l'article i , la limite supérieure de z , qu'on appellera X , on en conclura que la plus petite valeur positive de x est $> j$. Donc , dès que la suite « , «' , a'' , etc. descendra jusqu'à un terme on sera sûr que la racine cherchée n'existe pas. Ce procédé s'applique au cas où , ayant déjà déterminé toutes les racines positives $r, r', r'' > r$, etc., la recherche d'une racine de plus doit conduire à une impossibilité. Manière de trouver les autres racines positives de la même équation . (10) La plus grande racine r étant trouvée, nous chercherons d'abord celle qui la suit immédiatement par ordre de grandeur, et que nous désignerons par r' . Pour cela, le moyen le plus simple est de revenir à l'équation primitive $X = 0$, et de diviser son premier membre par $x - r$; on aura l'équation du degré $n - j$ qui contient les autres racines , parmi lesquelles celle que nous cherchons maintenant, et que nous avons désignée par r' , est la plus grande. La nouvelle équation à résoudre pourra être mise sous la forme $a^{(n)} = \phi(x)$, $\phi(x)$ étant une fonction omale de x . On procédera donc à sa résolution par la même méthode qui a été suivie pour l'équation $x^n = 9(x)$, et en observant que la limite des racines est connue d'avance, puisqu'on doit avoir $r' < r$. Il est clair qu'en continuant ces opérations on trouvera successivement les autres, racines positives r'', r''' , etc. , s'il en existe : et lorsque la racine cherchée n'existe pas , le calcul en manifestera de lui-même l'impossibilité, comme nous l'avons remarqué dans l'article 9. (11) La division de l'équation proposée par $x - r$ peut s'exécuter de la manière suivante. En prenant la même valeur de $y(x)$ que dans l'article 7 , l'équation proposée $x' = f(x)$ exprimée de la manière ordinaire, est 5i. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 24.68% accurate

104 APPENDICE $x^m + faT' + g^{**} + \text{etc.} = a + b xT'^1 - \dots - c x^1 -$
 $+ \text{etc.}$ Soit le premier membre $= P(x - r) - t - p$, et le second $= Q(x - r) + q$, p
et q étant les restes de la division des deux membres par $x - r$; puisque la
valeur $x = r$ satisfait à l'équation, on devra avoir $p = q$, et par conséquent
l'équation du degré $n - i$ qui reste à résoudre, est $P = Q$. Soit $V = x^{n-i} + f x^{n-i-1}$
 $+ g x^{n-i-2} + h x^{n-i-3} + \text{etc.}$, $Q = a x^{n-i} + O x^{n-i-1} + c x^{n-i-2} + \text{etc.}$; on aura
évidemment $f' = f + r$, $a' = a$; $g' = g + fr$, $b' = b + dr$, $h' = h + g'r$, $c' = c + b'r$, etc. etc.
Nous aurons donc l'équation $x^{n-i} - f x^{n-i-1} + g' x^{n-i-2} + \text{etc.} = (i x' + b' xT'^{**} + c$
 $x^{n-i-1} + \text{etc.})$, que l'on peut mettre sous la forme $x^{n-i} = 9(x)$, en prenant une
nouvelle fonction omale $\zeta(x)$, ainsi exprimée : $?(*) = T' i^{++} J i + \text{etc.}$ Il
faut observer cependant que comme le polynôme $r^{n-i} - J x^{n-i} - g' x^{n-i-1} +$
 etc. , contiendra nécessairement toutes les puissances de a : inférieures à $n -$
 1 , il y aura des réductions à effectuer entre les derniers termes de ce
polynôme et ceux du polynôme $d x^{n-i} + b' x^{n-i-1} + e U'$. En général, dans
la valeur de (x) il faudra réduire le terme $M x^{n-i-1}$, pris dans le numérateur,
avec le terme $N r^{n-i-1}$, pris dans le dénominateur, et porter la différence des
coefficients où il y aura excès, c'est-à-dire mettre $(M - N) x^{n-i-1}$ dans le
numérateur, si on a $M >$ et $(N - M) r^{n-i-1}$ dans le dénominateur, si on a $M <$
 N . Digitized by Google

SECTION I. 40:>

Cette opération étant faite, on aura à résoudre l'équation j^{n-r} (or), < on sait que la plus grande racine r' doit être $< r$. Connaissant cette seconde racine r' , on procédera semblablement pour avoir la troisième r'' , et les suivantes, s'il y a lieu. (1a) La méthode que nous venons d'indiquer s'applique de même aux racines négatives; ainsi on peut trouver par son moyen toutes les racines réelles d'une équation numérique : peut-être cette méthode est-elle ce qu'on peut proposer de plus simple et de plus général pour la résolution des équations numériques, au moins tant qu'il n'y a pas de circonstance particulière qui puisse aider à trouver les racines. On pourrait, sans changer la forme de l'équation proposée $x'^n = y$ trouver successivement toutes ses racines, au moyen d'une construction géométrique qui ferait connaître les divers points d'intersection P, F, P'' , etc. des deux courbes $y = x^n, y = y(x)$; mais la détermination du second point P' , et en général de tous ceux qui ont un rang pair, serait beaucoup moins facile que celle du premier point P et de tous ceux dont le rang est impair. Et puisque tout embarras peut être évité par les divisions successives ou les opérations équivalentes que nous avons indiquées, nous nous abstenons d'entrer dans d'autres détails sur ces recherches. Seconde méthode pour la résolution des équations numériques. (i3) Étant proposé l'équation du degré n , $i^n + fx^{n-1} - t-gaT^{n-2} + kx^{n-3} + \text{etc.} = 0$, dont nous désignerons le premier membre par $F(x)$, prenons un nombre n de facteurs $i - a, a - x, 3 - x, \dots, i - f x$, et supposons que le premier membre soit divisé par le produit de tous ces facteurs; on aura d'abord le quotient 1 égal au coefficient du premier terme, ensuite on pourra supposer que le reste est décomposé en fractions partielles, de manière que l'équation proposée prendra la forme

The text on this page is estimated to be only 23.51% accurate

406 APPENDICE. $i + x^i + x^3 + \dots + x^n$ dans laquelle (i) , (a) , (3) , etc. sont des coefficients qu'on déterminera de la manière suivante. Soit en général $x + k$ l'un des facteurs $x^4 - i$, $x^a - m$, et $Q(\#)$ le produit de tous les autres; on pourra faire $* \cdot (*)$, W' p ce qui donne $A = F(x^* + gyx^* > Q^{\wedge})$. Soit dans cette équation, $x = -A$, on aura «-» c'est l'expression générale du numérateur de la fraction partielle qui a pour dénominateur $k - x$. Dans cette expression, $Q(-k)$ est le produit de tous les facteurs $(i - k)(a - k)(3 - k) \dots (n - A)$, excepté celui qui devient zéro pour une valeur déterminée de k . Ainsi on aura successivement $Q(-1) = 1.2.3 \dots /! - i$, $Q(-a) = -dr$, $Q(-0) = q(-o = - \dots - * \dots - 3 < ?(-))$ etc. De sorte que $Q(-k)$ sera positif pour toutes les valeurs impaires de k , et négatif pour les valeurs paires. Si $F(x)$ reste constamment positif pour toutes les suppositions $\# = -i, -a, -3 \dots -n$, il est visible que le coefficient (k) aura le même signe que $Q(-k)$, c'est-à-dire qu'il sera positif pour toutes les valeurs impaires de k , et négatif pour toutes les valeurs paires. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 22.72% accurate

SECTION I. 407 l« contraire aura lieu si $F(x)$ reste constamment négatif dans toutes ces suppositions. Mais cet ordre sera troublé si $F(x)$ ne conserve pas le même signe, dans les diverses suppositions $x = -1, -a, -3, \dots -n$; en général, si $F(-k)$ et $F(-k-1)$ sont de signes contraires, ce qui indiquerait une racine négative entre $-k$ et $-k-1$, les coefficients $(k)(k+1)$ seront de même signe; et ils seront toujours de signes différents si $F(-k)$ et $F(-k-1)$ sont de même signe.

(14) Désignons en général par $^+x, ^-x, \dots$ etc. les termes $JT+Z'$ dans $^+es<luels$ (*) est positif et par $^-j, ^- \hat{a}^+Tr' B'' - tr+x^* etc^*$ ceux dans $^-es<luels$ (*) négatif; si on fait $f \setminus A A' A'' < p [x] = - : h -, h -tz h etc. , . f \gg B B' B''$ l'équation proposée se réduira à la forme $^+ + ^+ (*) = + (*) \gg$ où $y(x)$ et $4 \gg (x)$ sont deux fonctions omiales décroissantes de t . Cette équation peut aussi être représentée par $t \gg \bullet / "Ai$ en désignant par $^+j^+$ la somme des termes qui composent et une somme semblable pour $ty(x)$. Suivant ce qui a déjà été dit, on voit, 1" que les diverses valeurs de a seront tous les nombres impairs, et les diverses valeurs de b tous les nombres pairs moindres que n , si $F(-k)$ est constamment positif; a' que l'inverse aura lieu si $F(-k)$ est constamment négatif; 3* que cet ordre ne peut être troublé que lorsque $F(-k)$ et $F(-k-1)$ sont de signes différents, auquel cas les deux termes qui ont pour dé

The text on this page is estimated to be only 26.29% accurate

408 APPENDICE. nominateurs $k - x$, $k + n - x$ appartiennent à une même fonction $\phi(x)$ ou $\psi(x)$. Donc quand il arrive que deux dénominateurs consécutifs $k + x$ et $k - h + x$ se trouvent dans la même fonction $\phi(x)$ ou $\psi(x)$, on en doit conclure qu'il y a une racine négative entre $x = h$ et $x = k - 1$. C'est d'ailleurs ce qu'on peut démontrer immédiatement. En effet, supposons, par exemple, que dans $\phi(x)$ se trouvent les A et A' deux termes $5 - x$; si on fait successivement $x = 3$ et $x = 4$, w étant infiniment petit, on obtient deux résultats, dont l'un est infini positif et l'autre infini négatif. Donc il y a une racine entre 3 et 4 . (15) Maintenant pour procéder à la résolution de l'équation ainsi exprimée par deux fonctions omiales simples, il faut imaginer qu'on construise, dans le sens des x positifs seulement, les deux courbes qui ont pour équations $y = 1 + \phi(x)$, $y = \psi(x)$, et les diverses intersections de ces courbes donneront les diverses racines positives qu'on veut déterminer. Prenons d'abord une idée de la figure de ces courbes. (16) Soit OX la ligne des abscisses commune aux deux courbes, O et J' l'origine des x ; la première et la plus grande ordonnée de la courbe $y = 1 + \phi(x)$ est représentée par $OA = 1 + \phi(0)$. Passé le point A , l'ordonnée diminue de plus en plus, à mesure que l'abscisse augmente; elle finit par être égale à 1 , lorsqu'on fait $x = \infty$. Ainsi en prenant $OC = 1$, et menant par le point C une parallèle à la ligne des abscisses, cette parallèle CL sera l'asymptote de la courbe $y = 1 + \phi(x)$. L'autre courbe $y = \psi(x)$, représentée par BP , a pour première et plus grande ordonnée $BO = \psi(0)$. Passé le point B , l'ordonnée diminue continuellement et devient zéro lorsque $x = r$. Cette courbe a donc pour asymptote la ligne des x . (16) De cette description sommaire on peut déjà tirer plusieurs conséquences relatives au nombre et à la limite supérieure des racines positives. Si l'on veut déterminer le point L ou la courbe $y = \psi(x)$ renDigitized by Google

SECTION I. 409 contre la droite C L qui est l'asymptote de l'autre courbe $y(x)$, il faudra résoudre l'équation omale Soit \ la valeur de x tirée de cette équation , par la méthode de l'art. G; il est évident que s'il y a des intersections entre les deux courbes, elles ne peuvent avoir lieu qu'en-deçà du point L. Donc x est plus grande que la plus grande racine de l'équation proposée. Si donc l'équation proposée doit avoir m racines positives, il faut que l'arc BL soit coupé en m points par l'autre courbe. Ces intersections ne peuvent guère être rendues sensibles dans la construction graphique des deux courbes, convexes d'un même côté, à moins d'opérer sur une très-grande échelle, mais il suffit pour notre objet d'en concevoir la possibilité. a' Si l'ordonnée du point B est plus grande que celle du point A, R*. 4 c'est-à-dire, si l'on a $9(o) > 1-4-9(0)$, H y aura nécessairement au moins une intersection. En général le nombre des intersections , qui est celui des racines positives de l'équation proposée, devra être impair, puisque la courbe BL, qui d'abord est élevée au-dessus de l'autre courbe, passe nécessairement au-dessous dans la région du point L. 3* On ne peut avoir $9(o) = i + 9(0)$, c'est-à-dire que le point B ne peut pas coïncider avec le point A, parce qu'alors on aurait la racine $x=0$, cas qui est exclu, ainsi que celui où l'équation proposée aurait des racines égales. 4* Il ne reste donc à considérer que le cas de $9(o) < 1 + 9(o)$. Alors fig. 5. le point B étant situé au-dessous de A , s'il y a une première intersection , il y en aura nécessairement une seconde, et en général le nombre des intersections devra être pair. 5' S'il arrivait qu'on eût $i, (o) < 1$, le point B tomberait au-dessous de C; il n'y aurait donc alors aucune intersection , ni par conséquent aucune racine positive. (17) Voici donc les symptômes des différents cas généraux qui peuvent avoir lieu. n. 5a Digitized by Google

410 APPENDICE. 1° Si l'on a $a^{(0)} > i + 9(0)$, l'équation proposée aura au moins une racine positive; elle pourra en avoir trois, cinq, et en général un nombre impair. 2° Si l'on a $a^{(0)} < i + 9(0)$, l'équation proposée n'aura aucune racine positive, ou elle en aura un nombre pair. 3° Si l'on a $9(0) < 1$, l'équation proposée n'aura aucune racine positive. Venons maintenant à la résolution effective de l'équation proposée: elle consiste à déterminer les valeurs numériques des racines positives, ou à prouver qu'il n'existe aucune de ces racines. Il y a deux manières de faire ces calculs; Tune en commençant par la plus grande racine, l'autre en commençant par la plus petite. Nous allons exposer ces deux moyens successivement.

Recherche de la plus grande racine. Fig. 6, ((8) On connaît déjà la limite de la plus grande racine, par la résolution de l'équation normale $1 =$ cette limite est l'abscisse du point L. Soit k le point de la courbe $y = 1 - 9(x)$ qui a la même abscisse que le point L; si par le point k on mène une parallèle à l'axe qui rencontre en i^* la courbe $y = |(.r)$, et qu'on appelle a l'abscisse du point i, on déterminera a en résolvant l'équation $1 - 9(0) = K^*)$ Soit ensuite k' le point de la courbe P^* qui a la même abscisse que le point i, et dont l'ordonnée est par conséquent $1 + 9(\ll)$; si par le point k' on mène une parallèle à l'axe qui rencontre en i' la courbe $y = ty(x)$, et qu'on appelle $*$ l'abscisse du point i' on déterminera $*$ par l'équation $1 + 9(\ll) = 9(a)$. De là on voit qu'il faut calculer successivement les quantités X, $\ll$, a', a'', etc. par la résolution des équations $n-9(*) = \ll K\ll$, $i + 9(\ll) = 9(0)$, etc.,

Digitized by Google

SECTION I. $4n$ et le dernier terme de la suite décroissante a', a'' , etc. sera la valeur de la racine cherchée r . Nous remarquerons comme ci-dessus, que le calcul des termes x, a, a'' , etc. n'exige beaucoup de précision que lorsqu'on est parvenu à deux termes consécutifs très-peu différents l'un de l'autre. Nous remarquerons encore qu'au moyen du dernier terme trouvé, qui approche déjà beaucoup de la valeur de x , on peut achever le calcul de la manière suivante. Soit p ce dernier terme, et soit $x = p + w$, w ne pouvant être qu'une très-petite quantité, si on substitue cette valeur dans l'équation proposée $1 + 9(x) = ty(x)$, le résultat sera de la forme $c = F M + G u$, où l'on a fait, pour abrégier, $\ll = ! + ? (/ >) \text{ — } \blacklozenge (/ \gg)$. On aura donc, en négligeant seulement les quantités de l'ordre et de là $x = p + w$.

Détermination de la plus petite racine. (19) Il y a deux cas à considérer, selon que $1 + 9(o)$ est plus petit ou plus grand que $9(0)$. Premier cas, $1 + 9(0) < 9(0)$. Alors le point A, origine de la F^* . 4.. courbe $7 = 1 + 9^{\wedge}$, étant situé au-dessous du point B, origine de la courbe $y = 9(x)$, je mène A b parallèle à l'axe qui rencontre en b l'autre courbe. Soit a l'abscisse du point b, on trouvera a en résolvant l'équation omale $1 + 9(0) = 9(a)$, et « sera une première approxi5a. Digitized by Google

41a APPENDICE. ■ nation vers la moindre racine $x = r$ qui est l'abscisse du premier point d'intersection P. L'ordonnée menée au point b coupe la courbe inférieure en un point a dont l'ordonnée $= i + ? (a)$. Par le point a menons une parallèle à l'axe qui rencontre la courbe supérieure en b1; si on appelle a l'abscisse du point b\ on trouvera a' par la résolution de l'équation $i + 9 (a) = <|>(a)$. Continuant ainsi indéfiniment, on voit que l'abscisse qui convient au point d'intersection P, sera le dernier terme de la suite a, «', «'', etc. Donc pour avoir la plus petite racine $x = r$, il faut déterminer successivement les termes a, a', a'', etc. par la résolution des équations omales $i + \zeta(o) = v(a)$, $i + v(a) = + (a)$, $i + * (a') = + (a'')$ etc., et la dernière des quantités croissantes a, et', a'', etc., ou la limite vers laquelle tendent ces quantités, sera la racine cherchée $ar = r$. Fig. 5. (ao) Second cas, $i - t - \zeta > (o) > | (o)$. Alors le point B étant situé au-dessous de A, on mènera par le point B une parallèle à l'axe qui rencontrera en a la courbe supérieure A P. Soit a l'abscisse du point a, on trouvera a en résolvant l'équation omale $(J)(o) = i +$ et « sera une première approximation vers la racine cherchée. L'ordonnée au point a rencontre la courbe inférieure en un point b dont l'ordonnée $= |(a)$. Par le point b menons une parallèle à l'axe qui rencontre en a la courbe supérieure; si l'on appelle * l'abscisse du point a', on trouvera «' en résolvant l'équation omale $(j, (et) = I - f - 9 (et')$. On voit maintenant, sans entrer dans de plus grands détails, que si on détermine successivement les termes a, «', «'', etc., par les équations

SECTION I. 4i3 *(a)-i=?('), H«)-i=? (0, etc., le dernier terme de la suite o, a", etc. sera la valeur cherchée de la plus petite racine $x = r$. (ai) Dans les deux cas, la difficulté se réduit toujours à résoudre un certain nombre d'équations omiales simples, par les formules de l'art. 6. Nous avons d'ailleurs observé que les premiers termes de la suite «, a", etc. n'ont pas besoin d'être calculés avec beaucoup de précision ; ainsi , à cet égard, les calculs peuvent être notablement abrégés. On voit ensuite par la nature de ces opérations , que les points a, ai , a", s'approchent rapidement du point d'intersections P; de sorte qu'on n'aura jamais à résoudre qu'un petit nombre d'équations omiales simples. D'ailleurs la détermination de la limite pourra être abrégée, si on le juge à propos, par le procédé de l'art. j8. Il pourra arriver aussi qu'on sache d'avance que la racine cherchée r est plus grande qu'une quantité connue X; dans ce cas, on partira de la valeur « =\ pour déterminer toutes les autres a , a", etc., ce qui abrégera le calcul. Nous observerons encore que dans le second cas, il pourrait arriver qu'on ne trouvât pas de solution; alors la suite <|»(«), Y(«"), etc., dont le premier terme est > i , en offrirait bientôt un < i , ce qui prouverait qu'il n'y a aucune intersection entre les deux courbes, ni par conséquent aucune racine positive de l'équation proposée. La détermination de la plus petite racine peut être effectuée par une suite plus convergente que celle dont nous venons de montrer l'usage ; mais avant d'exposer cette seconde solution , nous avons à résoudre le problème suivant.

M APPENDICE. De l'intersection d'une droite quelconque avec la courbe $y = z^x$. Fig. 7 (22) Soit BNG la courbe décrite d'après l'équation $y = z^x$ étant une fonction omale simple qu'on peut représenter par $l > \_ \wedge \wedge$ Soit F un point donné sur le prolongement de l'ordonnée du point N ; si par le point F on mène sous un angle donné N FG, la droite F G qui rencontre la courbe au point G, il s'agit de déterminer l'abscisse du point G. Soit y l'abscisse donnée du point F, la distance donnée $FN = c$, et m la tangente de l'angle que fait la droite F G avec l'axe; si on appelle x l'abscisse du point G , on aura pour déterminer x, l'équation $X - J$ Or je remarque que le second membre de cette équation est une fonction omale décroissante de x ; car à mesure que x augmente , ou à mesure que le point G avance sur la courbe dans le sens des x , il est visible que le second membre qui représente la tangente de l'angle que fait F G avec la parallèle à l'axe menée par le point F , diminue continuellement. Au reste cette fonction peut être présentée sous une forme entièrement développée ; car ayant fait $\langle | \rangle (x) = Jj^{\wedge}, 1 B B B(\text{or} - f) c$. si on observe que $J^{\wedge} = T + f \sim (*+ /)$ $(*+ \langle \rangle) ' \circ n P^{\circ} Urra fa, re f B 1$ et comme $jj^{\wedge} y^{\wedge} sX$ la même chose que $(/)$, l'équation à résoudre se réduira à cette forme (1) $m = \_ \pounds \_ . + y l \pounds \_$, où l'on a fait, pour abrégé, $C = j^{\wedge}$ Comme x doit être plus grand que f, on voit que le second membre

SECTION I. 4i5 de cette équation est en effet une fonction omale simple de x , à compter de j'observe de plus que cette fonction étant infinie lorsque $x=f$, et nulle lorsque $x = \infty$, l'équation sera toujours possible, quel que soit m , pourvu qu'il soit positif; c'est-à-dire, pourvu que la droite FG soit menée par le point F , de manière à rencontrer l'axe dans la partie indéfinie $/X$. Nous remarquerons encore que si l'on a $c = 0$, ou si le point F coïncide avec le point N , alors l'équation à résoudre devient c'est l'équation qui détermine le point d'intersection de la courbe $y=ty(x)t$ avec la droite menée par un point N de cette courbe, en sorte qu'elle fasse avec l'axe des x , un angle dont la tangente $= m$. (a3) Dans le cas où c n'est pas nulle, la résolution de l'équation (i) se rapporte à l'art 6, et il faudra, pour effectuer la solution, connaître une première valeur approchée de x . Or puisqu'on doit avoir $m > -\frac{f}{j}$ il en résulte $x > f + \frac{f}{m}$: on peut donc partir du premier terme $k = -\frac{f}{m}$, pour calculer successivement les autres termes k', k'' , etc., dont la limite est la valeur cherchée de x . (a4) On peut encore déterminer l'abscisse du point d'intersection G par le procédé suivant. Par le point N menez une parallèle à l'axe qui rencontre la droite FG en I ; du point I abaissez une perpendiculaire à l'axe qui rencontrera la courbe au point N' ; par le point N' menez de même $N'T$ parallèle à l'axe, puis $I'N''$ perpendiculaire, et ainsi de suite. Soit l' l'abscisse du point N' , l'' celle du point N'' , etc., on calculera les termes successifs $l', l'',$ etc. par les formules $l' = \frac{f}{m} + \frac{K}{m^2}$, etc. Digitized by Google

416 APPENDICE. et il est visible que la limite vers laquelle tendent les termes de la suite $f, f', f'', \dots$ sera la valeur cherchée de l'abscisse du point G. Cette méthode est plus simple que la précédente; mais elle ne peut être employée lorsque $c = 0$; elle ne peut pas l'être non plus lorsque $m = 0$, c'est-à-dire lorsque la droite FG est parallèle à l'axe, parce qu'il n'y a point d'intersection dans le sens où x est > 0 . Seconde manière de déterminer la plus petite racine. (a5) Nous supposons qu'on a $9(0) > i + ?(0)$, parce que, dans ce cas, l'équation $i - ?(x) = \wedge(x)$ a toujours au moins une racine positive. f'g Par le premier point B de la courbe $\wedge(x)$, soit menée la tangente Ba qui rencontre en a la courbe $\wedge(x)$, et soit a l'abscisse du point a, on trouvera, par la formule de l'art. a?, que « est la racine de l'équation dans laquelle on a $c = t\}(0) - i - 9(0)$, et où la fonction $\wedge(x)$ est déduite de la fonction $9(x) = J^{\wedge\wedge}$, en divisant chaque terme de celle-ci par la valeur correspondante de a. On appliquera donc à cette équation les formules de l'art 5, en prenant pour première valeur de A, d'après l'art. C, $\wedge = \wedge$. Par le point a ainsi déterminé, menez une perpendiculaire à l'axe qui rencontre la courbe supérieure en b; au point b menez la tangente ba qui rencontre la courbe inférieure en a, et ainsi de suite. Si on appelle o', etc. les abscisses des points a', a'', etc., on trouvera que les différents termes a, «, «'', etc. se déterminent par la résolution des équations successives $\wedge(x) - 1 - 9(0) = 0$. /*A:a 11 < — K») = $T^M x + J_i + i'$ dou* = «, -vm-*@2=?@+P%&, d'oïlie=" etc. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 28.00% accurate

section r. 4«7 -et la limite vers laquelle convergent les termes de la suite croissante «, a', a'', etc., sera la valeur de la plus petite racine cherchée. Au reste ces formules étant moins simples que celle de l'art.' 19, nous nous bornerons au cas qui vient d'être résolu, et nous n'examinerons pas celui où l'on aurait $9(0) < i-f-9(0)$. Connaissant la plus grande ou la plus petite racine jwsitive, déterminer toutes les autres. (26) On pourrait chercher successivement toutes les racines par les intersections des deux courbes que nous avons tracées, sans changer la forme de l'équation proposée qui détermine ces courbes. Mais il est beaucoup plus simple, après avoir trouvé la racine $r=r$, de supprimer de l'équation proposée le facteur $x - r$, afin d'avoir l'équation du degré immédiatement inférieur, qui contient les autres racines, et dans laquelle r sera la limite de la racine r' qui doit suivre immédiatement r . Voici le procédé qu'il convient de mettre en usage pour cet objet. Nous avons supposé que l'équation proposée du degré n est divisée par le produit $(1 + x)(a + x) \dots (n + a-)$, afin de mettre cette équation sous la forme $1 < \zeta(x) = ty(x)$. Lorsque le degré de l'équation se réduit à $n - 1$, on doit donc faire disparaître le plus grand dénominateur $n - \lambda - x$, afin que le plus grand de ceux qui restent soit $n - 1 + x$, conformément au degré de l'équation. Pour cela il faut multiplier par $w + x$ les différents termes de l'équation $1 - 4 - \zeta(x) = 9\{ar\}$, et faire en sorte que le produit soit divisible par $x - r$. $g^A (/i+x) Af/i-f-r) Afn - a)(r - x) \gg r$. Or on a $v, ; = v / -4- - - r;;$ donc si on fait $\{n - a) . - - - i=A,,$ on aura $9(x) = f - \sim = (n-h r) f \sim - + (r - x) f - ^ \sim$ De même en faisant $B - fi$ on aura $u + r' h 53$

The text on this page is estimated to be only 28.68% accurate

418 APPENDICE. Substituant ces valeurs et observant qu'on a $J - \sim = y(r)$ et $j - j = i(r)$, l'équation $i + \langle j, (ar) = | (x)$ deviendra « $+ x$ 4- (a 4- /•)*(!•) 4- (r-ar) (» + r) * (r) + (r—xtf-fe. Mais puisque la valeur $x = r$ satisfait à l'équation $i + \zeta (x) = \$ (x)$, on a $i + \hat{i}(r) = \wedge(r)$; effaçant donc dans l'équation précédente les termes qui se détruisent, et divisant le reste par $r - x$, il viendra $J a + x J a + x$ Cette équation qu'on peut mettre sous la forme $i 4- \langle | \rangle, (x) = 9, (x)$, est entièrement semblable à la proposée; mais elle a un terme de moins, car par les valeurs des coefficients A, B , on voit que le terme qui avait pour dénominateur $n + x$, disparaîtra, soit qu'il appartienne à la fonction $\langle \zeta(x)$ ou à $ty(x)$. D'ailleurs on doit observer que comme n est le plus grand des nombres a et b , les coefficients A , et B , seront toujours positifs, de sorte que le passage de l'équation proposée $1 - f - \zeta(j;t) = \langle J^*(j;)$, à la suivante $1 4- (\{i, (x) - \zeta, (x)$, qui contient une racine de moins, ne fait quoter un ternie de l'une des fonctions $\wedge(\#)$, $\langle \{^* (.x)$, sans en faire passer aucun de l'une dans l'autre, comme cela aurait lieu si quelqu'un des coefficients A, B , devenait négatif. Il n'y a que le terme constant 1 qui change de signe ou qui passe d'un membre dans l'autre. (27) On voit donc que la division de l'équation proposée, par $x - r$, s'exécute par un procédé très-simple qui consiste à transposer X * le terme constant 1, et à remplacer dans chacun des termes et, f, le coefficient A par $\wedge n \sim a$ et le coefficient B par $-(T^{\wedge o} + x 1 a - r' b - r$ Maintenant nous n'avons aucune règle nouvelle à donner pour la résolution de l'équation $1 4- ty, (x) = \langle f, (x)$. On appliquera à cette équation les formules des articles 19 et suivants; et sachant d'avance que la plus petite racine r' est $> r$, on parviendra plus facilement

Digitized by Google

SECTION I. 419 encore au résultat. Après avoir trouvé la racine ;* qui est la seconde de l'équation proposée, on formera semblablement une troisième équation $1 + \zeta, (\#) = 4$, (a?), qui contiendra les « — a autres racines. On aura donc ainsi successivement, par des équations qui se simplifient de plus en plus, les diverses racines positives $r, r', r'',$ etc. de l'équation proposée, et ce calcul sera terminé lorsqu'on sera parvenu à une transformée qui n'est plus résoluble, ce qu'on reconnaîtra aux conditions que nous avons indiquées dans la solution générale. (a8) même méthode fera connaître les racines négatives en partant de l'équation proposée, dans laquelle on changera le signe dex, et que l'on mettra ensuite sous la forme $14- <p(x) = (.r)$. Mais il sera plus simple de prendre la dernière des transformées $1 -k-ty,(x)=y,(x), f -H 9,(x) = (j/, (x),$ etc., laquelle ne contient plus de racines positives, mais peut en contenir de négatives. Pour obtenir celles-ci on réduira cette transformée à la forme ordinaire, débarrassée de fractions, et après avoir changé le signe de x , on lui appliquera la méthode du $n^* 1 3$, pour la réduire de nouveau à la forme $1 -f- 9(x) = | (.r)$, dont il faudra chercher les racines positives. (29) Il reste donc à faire voir comment on peut résoudre une équation qui n'a que des racines imaginaires; mais ce problème est beaucoup plus difficile que celui qui consiste à trouver les racines réelles, et nous ne nous flattons pas que les méthodes précédentes fournissent de grands secours pour sa solution. Il est vrai qu'on pourrait trouver les racines imaginaires d'une équation du degré n , au moyen des racines réelles d'une équation du degré $n^n 1 \backslash$ Mais $|K>ur$ peu que n surpasse $4 >$ l'extrême complication d'une telle transformée et des calculs nécessaires pour y parvenir, rend l'usage de ce moyen toutà-fait illusoire. C'est donc dans l'équation proposée elle-même, et non dans une transformée d'un ordre plus élevé, qu'il faut chercher les moyen d'obtenir les valeurs numériques des racines imaginaires. Nous avons déjà indiqué, art. 119 du Traité précédent, une méthode qui aurait l'avantage de conduire assez facilement à ce but, 53. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 27.14% accurate

ho APPKNDrCHL si on pouvait donner quelques lumières au
ealeulateur sur le choix de la première valeur hypothétique de la racine
exprimée par $a + \sqrt[n]{V} - i$ ou r (pos. $\hat{0} 4 - \sqrt[n]{V} - i \sin. \hat{u}$). Mais en attendant
que cette méthode reçoive les améliorations dont elle est susceptible, nous
allons donner les formules qui, dans l'application de la méthode précédente,
conviennent au cas des racines imaginaires; et d'abord une racine
imaginaire étant représentée par $r(\cos. \frac{\pi}{6} + \frac{1}{\sqrt{3}} - i \sin. \frac{\pi}{6})$ nous chercherons
les limites de la quantité r , qui est en quelque sorte la mesure de grandeur
ou le module de cette racine, puisque la valeur d'une puissance quelconque
 m de $\#$ ne peut jamais surpasser r^m , mais peut en différer aussi peu qu'on
voudra. Limites de la quantité réelle qui sert de module aux racines
imaginaires. (3o) L'équation proposée dont toutes les racines sont
imaginaires étant désignée par $x^n \pm A, \text{ ou } x^n \pm A, x^{n-1} \pm A, x^{n-2} \pm A, \dots, x \pm A, A = 0$, si on
suppose $x = r(\cos. \theta + i \sin. \theta)$, cette équation se partage en deux autres,
savoir, $;- \cos. \frac{n\theta}{2} : A r^n \sim \cos. \frac{n\theta}{2} : A r^n \cdot \cos. (n - 2) \frac{\pi}{6} \dots - i - A = 0$,
 $r^n \sin. \frac{n\theta}{2} : A r^n \sim \sin. \frac{n\theta}{2} : A r^n \cdot \sin. \frac{(n - 2)\pi}{6} \dots \pm A = 0$.
Multipliant la première par $\cos. \frac{n\theta}{2}$, la seconde par $\sin. \frac{n\theta}{2}$, et ajoutant les
produits, on a $r^n \pm A, r^{n-1} \cos. \hat{\theta} \pm A, r^{n-2} \cos. a\theta \dots + A, \cos. n\frac{\pi}{6} = 0$. Or il est
visible que l'hypothèse qui rendra r le plus grand, est celle où l'on aurait r^n
 $= A, r^{n-1} \cos. \frac{\pi}{2} + A, r^{n-2} \cos. \frac{\pi}{2} + A, r^{n-3} \cos. \frac{\pi}{2} \dots - A$, les coefficients $A, A, A, \dots$, etc.
étant tous pris positivement dans le Digitized by Google

SECTION I. 421 second membre, et alors en appliquant ce qui à été trouvé dans le cas des racines réelles, art. 1, on pourra en conclure, î' Que si A_1 , coefficient du second terme, n'est surpassé en grandeur par aucun des autres coefficients $A_2, A_3, \dots, A_n$, on a $r < i + A_1$. 2a Que si A_1 et A_2 sont les deux coefficients pour lesquels $1/A_1$ et $\sqrt{K/k}$ sont les plus grands, on aura $r < \sqrt{V} A_1 + \sqrt{A_1}$: telle est donc, dans ce cas, la limite supérieure de la quantité $\sqrt{\bullet}$ qui sert de module aux racines imaginaires. (3i) Pour avoir la limite inférieure de cette même quantité, j'observe que l'équation proposée n'ayant, par hypothèse, que des racines imaginaires, son dernier terme A_n doit être le produit de toutes les quantités $r', r'', r''', \dots, r^{(n-1)}$, etc., qui résultent des différentes couples de racines imaginaires. Soit donc r la plus grande des quantités $r, r', r'', \dots, r^{(n-1)}$, etc., et r^{**} ou p la plus petite, on aura $r > l > A_n$ et $p < l > A_n$: le plus grand des modules r doit donc être compris entre les limites suivantes : $r > l > A_n$ $r < \sqrt{V} A_1 + l > A_4$. Quant aux limites du plus petit module p , nous n'avons encore que ■ la supérieure $p < 1/A_1$; mais il est aisé d'avoir la limite inférieure. Pour cela il faut, dans l'équation proposée, faire $x = 1$, ce qui donnera une équation de la forme $z^* \pm B.z = f c B.z + B = 0$, et il faudra considérer deux cas. i* Si B_1 , coefficient du second terme, est au moins aussi grand Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 27.17% accurate

/pa APPENDICE. qu'aucun autre coefficient, on aura, en prenant B , positivement $2 < I+B$,. 2° Si B , et B^* sont les deux coefficients pour lesquels I/B , et $1/B$, sont les plus grands, on aura, en appelant a et b ces deux radicaux, $z < a - t - b$. Donc, dans le premier cas, on aura $p > t$, et dans le second F Forme des équations à résoudre dans le cas des racines imaginaires. (32) Soit $F(x)=0$ l'équation proposée du degré n , dont toutes les racines sont imaginaires; si on substitue pour x une valeur quelconque $x=k$, le premier membre $F(k)$ sera toujours une quantité positive. Il suit de là que si on procède comme dans l'article 13, et qu'on divise l'équation proposée par le produit des facteurs $t + x$, $2+a \dots n+x$, afin de lui donner la forme $i + \zeta(r) = ty(x)$, ou $1 - J'a^x - J'f^{\sim}(\dots)$ les différentes valeurs de a seront les nombres impairs $1, 3, 5, \dots n - 1$, tandis que celles de b seront les nombres pairs $2, 4, 6, \dots n$. Ainsi, dans le cas des racines imaginaires, les fonctions $\zeta(x)$, $\wedge(x)$ sont constamment de la forme suivante : $TV' i-hx^3 + \dots 5-f-r n - i + x' YW a-f-x 44-\dots 6+x n + .r'$ de sorte qu'elles ont le même nombre de termes. (33) Cela posé, si l'on fait $x=r(\cos.G + \sqrt{-1} \sin.6)$, on aura $A A . A(a+rcos.Q - V - i .r)in.<) a+x \ll+r(\cos.0+\gg/- i sin.6) a' + 2arcw.9+r'$ et par conséquent Digitized by Googl

The text on this page is estimated to be only 29.85% accurate

SECTION I. 4a3 De là on voit que l'équation $i^j + x \sim \sim f b^{\wedge} x s < *$ Partaſcra en deux autres, savoir, $\wedge/a'-t-a\cos.fl-t-r' J b'-h\grave{n}r\cos.Q-t-r' y f A$
 $\_f B J a' + iarco^*.l+ r'' J \acute{e}^*-f-a^*r\cos.fr-W \gg '$ Dans le premier membre, a
aura toutes les valeurs impaires i , 3, 5. . . /» — i , et dans le second , b aura
toutes les valeurs paires a , 4 , (y. . . .n. Telles sont donc les deux équations
qu'il faut résoudre pour trouver les valeurs de r et de fr qui appartiennent à
chaque couple de racines imaginaires. Le nombre r est toujours positif :
quant au nombre rcos. 6 , il peut être positif ou négatif ; et à cet égard , on
pourrait distinguer deux sortes de racines imaginaires, les unes positives
lorsque la partie réelle rcos.fr est positive, les autres négatives lorsque cette
partie est négative. (34) Les équations précédentes peuvent être censées
formées dans la supposition de rcos. fr positif. On pourrait en former de
semblables dans la supposition de rcos. 0 négatif. Pour cela il faudrait
changer le signe de x dans l'équation proposée , et procéder de même, après
ce changement, pour réduire l'équation sous la forme $i -fr^{\wedge}g Jz \sim fr[>$
ensuite on ferait $x=r(\cos.6 -f- \vee \text{ — } i \sin.fr)$, ce qui donnerait deux équations
semblables aux équations (*), mais dont les coefficients seraient différents.
Ce qui semble nécessiter cette distinction , c'est que si on laissait les
équations («) sous la même forme lorsque cos. 0 est négatif, la fonction f t-,
A L , . ne serait plus une fonction omale de r. En effet cette fonction étant
différentiée par rapport à r, donnerait le coefficient différentiel f
aAfr+acos.ô) J (a'+aarcos.O + r)' ' Digitized by Google

4ai APPENDICE. lequel ne conserverait pas le même signe depuis $r=0$ jusqu'à $r=oc$, contre la nature des fonctions onna les. Il faudra donc, pour la solution complète de l'équation proposée, considérer deux systèmes semblables au système («), et dans chacun desquels $\cos.6$ sera supposé positif. (35) Soit maintenant $r\cos.e=;$, $r'=q$, les deux équations à résoudre seront $i + f Ka = [D^* J a' + iap + q J b^* + *bp + q'] > f - = f \ddot{E} \bullet J al - \backslash - zap + q J b^{\wedge} + ibp + q^{\wedge}$ on peut même les représenter plus simplement par $, + f Ka - Q (*^{\circ} f A = o J a' + zap + q^{\circ} >$ en convenant que A sera toujours positive pour toute valeur impaire $a=i, 3, 5 n - \hat{1}$, et négative pour toute valeur paire $a = a, 4 \gg 6 n$. Ces équations sont d'une forme assez simple; cependant comme elles contiennent deux inconnues p et q , il ne paraît pas qu'on puisse les résoudre par une méthode analogue à celles que nous avons données pour le cas des racines réelles, qui n'offre qu'une inconnue. Si donc on veut éviter les longueurs de l'élimination, par laquelle on pourrait réduire les deux inconnues à une seule, il faudra se borner à résoudre ces équations par une sorte de tâtonnement, en ne supposant autre chose, sinon que q ou r^* est compris entre des limites données, et qu'on a toujours $p < \sqrt{q}$. On pourrait ne trouver aucune solution pour les équations précédentes qui représentent le système (a); mais alors les deux équations semblables qui représentent l'autre système, dans la supposition que les racines imaginaires, c'est-à-dire leurs parties réelles, sont négatives, contiendraient nécessairement toutes les « racines Digitized by Google

SECTION I. 4a5 imaginaires de l'équation proposée; de sorte que si la résolution ne réussissait pas dans un cas, elle réussira nécessairement dans l'autre. On peut même ne point changer la forme des équations précédentes, et se contenter de changer le signe de $\sqrt{}$, ce qui reviendra au second système. En effet, la dernière forme («'»), sous laquelle nous avons mis les équations à résoudre, en employant les inconnues p et q au lieu de r et 6 , n'a plus l'inconvénient remarqué dans l'art. 34, et les quatre fonctions r Aa r a r $B3$ r b Ja $\sqrt{ap+\zeta}$ Ja $\sqrt{ap+q}$ Ju $\sqrt{ibp+q}$ Jb $\sqrt{ibp+q}$ considérées tant par rapport à p que par rapport à q , sont toujours des fonctions omiales, puisque p doit toujours être renfermé entre les limites $\sqrt{0}$, $p=\sqrt{q}$. (36*) Supposons qu'après quelques essais on a trouvé des valeurs de p et q qui approchent de satisfaire aux équations (a'). Soient ces valeurs $p=f$, $q=g$ et supposons qu'elles donnent f Aa 1 $\sim i$ $\sim Jn'+za/+g$ $\sim I1$ $\sim ji$ et v étant des quantités assez petites. Pour avoir des valeurs plus approchées on fera $p=f+tf$, $qz=g+lg$, et on aura pour déterminer lf et $\&g$, les équations Soit, ponr abréger, F Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 24.85% accurate

4*6 APPENDICE, on aura d'où l'on tire $alUf+G^*g=z-a, >r i$ Fit
 $— Gv . Hw— Gu$ Ainsi les valeurs corrigées de/? et y sont $^i Fa— Gv Hv$
 $— Ga + G'— FH'$ Il faut observer, à l'égard des quantités F, G, H, qu'on a
 faisant donc $H = — g- F — a/G-f-v$, et négligeant les termes qui
 contiendraient deux dimension» des quantités u et v, on aura „ $_/• .$ » $Fa —$
 $Gv a G'+a/FG+^F''$ „ $_$ „ $_$ $^ + (gy + a/G)v \setminus 6 Vg-h-2/FG+^F'A$ Ces valeurs
 serviront à leur tour à en faire connaître de plus approchées, s'il est
 nécessaire. (37) Appelons de nouveau fetg les valeurs corrigées de p et q,
 on en déduira les deux racines imaginaires $x—f-àz \vee \{/* — g$). Pour avoir
 ensuite les autres racines de la même équation, il faut former l'équation qui
 les contient. Soient $x—r, x=.r''$ les deux racines qu'on vient de déterminer, il
 faudra dans l'équation proposée $1 4-^-=0$, remplacer le coefficient A par un
 nouveau coefficient $A_(n—a)(n-i — a)$ A C'est en effet la conséquence qui
 résulte des formules de l'article 26; Digitized by Google

SECTION I. 4*7 et comme on a $(a^4 - r')(a^4 - r'') = a^4 + za^2 + g$, la valeur de A, sera Cela posé, la nouvelle équation du degré $n - 2$ à résoudre sera et par la substitution $x = pz \sqrt{(p^2 - y)}$, cette équation se partage en deux autres, savoir, $r A, - J a^4 + aap + q^2$. Ces équations sont entièrement semblables à celles de l'art. 35, mais elles contiennent chacune deux termes de moins, puisque les valeurs de A, qui répondent aux valeurs $n - n, a - n - i$, sont nulles. Ainsi la dernière des valeurs de a sera $n - 2$, parce qu'en effet l'équation à résoudre n'est que du degré $n - 2$. (38) Au moyen de cette analyse, on forme avec beaucoup de facilité les diverses équations qui restent successivement à résoudre, à mesure qu'on trouve deux des racines imaginaires de l'équation proposée. le procédé pour passer d'un système au suivant, consiste à supprimer deux termes dans chacune des deux équations du système, et à modifier les coefficients des autres termes suivant une loi constante. Ce procédé donne immédiatement le résultat qu'on obtiendrait en divisant l'équation proposée par le facteur correspondant aux deux racines trouvées, et mettant ensuite le quotient sous la forme qui convient à notre méthode. Lorsque les opérations nécessaires pour obtenir les racines réelles sont terminées, et qu'il ne reste plus à résoudre qu'une équation de degré pair dont toutes les racines sont imaginaires, on est assuré d'avance que la résolution est possible. Si donc la recherche qu'elle occasionne devient longue par les tâtonnements qu'on ne peut guère

4a8 APPENDICE. é v iter , au moins elle ne sera jamais infructueuse. D'ailleurs à mesure que les opérations avancent, elles se simplifient progressivement par la diminution du nombre des termes qui devient successivement $n - a$, $m - 4$, $n - 6$, etc. , comme le degré de l'équation; et lorsqu'on est parvenu à une transformée du quatrième degré, la solution peut être achevée sans tâtonnement. (3q) La méthode que nous venons de développer est encore fort imparfaite; mais elle a quelques avantages particuliers qu'elle doit à la simplicité et à l'élégance des formules. Le plus considérable de ces avantages consiste en ce que , si l'on substitue différentes valeurs pour p ou q , afin d'en trouver qui satisfassent aux équations, la substitution se fait dans chaque dénominateur $a' - f - iap + q$, sans exiger aucune opération complexe. Il n'en est pas de même lorsqu'en faisant $x=r(\cos.\theta - \frac{V}{r} - i\sin.\theta)$, on a à substituer une nouvelle valeur de r ou une de θ , dans les équations dont ces inconnues dépendent, art. 1 19. Ces substitutions exigent des opérations compliquées , surtout pour avoir les sinus et cosinus des multiples de θ : ce premier avantage est déjà très-grand. Il y en a un second qui n'est pas moins remarquable. Il consiste en ce que les deux équations à vérifier se forment simultanément d'une manière très-simple. En effet, si en attribuant des valeurs particulières à θ et q , on trouve chaque terme g , $g = \pm F(a)$, savoir, $+ F(a)$ si a est impair, et $- F(a)$ si a est pair, la première des deux équations (a) étant ainsi formée, $1 + F(i) - 1 - F(3) + F(5) + 1 - F(a) - F(4) - F(6) - 1$ on en déduit immédiatement la seconde qui est

SECTION I. 4a<> Il devient donc très-facile de vérifier les deux équations à la fois. (40) Nous croyons avoir expliqué les méthodes précédentes avec assez de détails, pour qu'il soit superflu de produire des exemples de leur usage. Nous ferons seulement une observation générale qui pourra être utile dans les applications; c'est que si la grandeur des coefficients de l'équation proposée, ou le calcul de la limite supérieure des racines, indique que ces racines doivent être de grands nombres, il conviendra de les réduire à une grandeur médiocre, en faisant $x = mjr$, m étant 10, 100, ou tel autre nombre qu'on voudra, au moyen duquel les valeurs de y ne puissent contenir que des unités ou des dizaines au plus. De même si les coefficients de l'équation proposée étaient tellement petits qu'on dût en conclure que les racines sont beaucoup plus petites que l'unité, il faudrait faire et prendre m de manière que la plus grande valeur de y pût aller jusqu'à un ou deux chiffres en nombres entiers. La transformation est utile dans le second cas surtout, pour éviter que les racines ne soient rapprochées dans un trop petit espace, et qu'on n'en omette quelqu'une dans les approximations successives. (41) Nous terminerons ces Recherches par une remarque nécessaire pour compléter la résolution de l'équation omale $e = \phi(r)$, donnée dans les art. 4 et suiv. On a supposé tacitement, dans ces articles, que la courbe décrite d'après l'équation $e = \phi(x)$, était toute concave ou toute convexe vers l'axe, dans la partie soumise au calcul, savoir, depuis $x = 0$ ou $x = \infty$, jusqu'à $x = r$, r étant l'abscisse du point d'intersection M . Cette propriété en vertu de laquelle la suite t, k, k', k'' etc. est continuellement croissante vers la limite cherchée r , a lieu dans une infinité de fonctions omales, et notamment dans toutes celles dont on fait usage dans notre seconde méthode. Mais en général la définition des fonctions omales n'exige qu'une seule condition, savoir, que le coefficient différentiel $dV(x)$ conserve le même signe dans toute l'étendue des x positives. Il peut donc arriver que le coefficient du

430 APPENDICE. second ordre $\sim f''^2$ change une ou plusieurs fois de signe dans la même étendue, et alors la courbe $y = f(x)$ éprouvera une ou plusieurs inflexions ou changements de courbure. Supposons, par exemple, qu'un changement de cette sorte ait lieu entre les deux points k' et k'' , ce qu'on reconnaîtra par les deux différences $y(k') - c$ et $y(k'') - c$ qui devront être de signes différents; si on continue les calculs d'après les formules des art. 4 et 6, afin d'obtenir la valeur du terme suivant k'' on trouvera $X''' < A$, de sorte que la suite k, k', k'', k''' cesse d'être croissante après le terme k'' . Cependant si l'on a en même temps $X''' > k$ on pourra continuer le calcul des termes suivants par les mêmes formules, et on arrivera également au résultat, qui est la limite des termes k'', k''', k'''' etc. Mais il pourrait arriver qu'on eût $A''' < X'$, et alors en continuant le calcul par les mêmes formules, on s'éloignerait de plus en plus du vrai résultat que l'on cherche. Pour obvier à cet inconvénient, le moyen le plus simple est de joindre les deux points k et k'' par une droite qui coupera la droite CM en un point dont il est facile de déterminer la position. Soit k''' l'abscisse de ce point, on aura $k''' = k' + \frac{1}{2} \{ y(k') - y(k'') \} / \{ y'(k') - y'(k'') \}$ et k''' sera une valeur très-approchée de la racine r . On continuera ensuite par les formules ordinaires le calcul des termes suivants etc., et la limite de cette suite sera la racine cherchée. En général les exceptions dont nous venons de parler ne se rencontrent que dans des cas où la résolution se simplifie d'elle-même, puisque sachant que la racine cherchée doit être comprise entre k' et k'' il est facile ensuite de resserrer ces limites à volonté. Digitized by Google

SECTION II. Section II. De quelques équations dont la propriété est telle qu'une racine connue sert à déterminer rationnellement toutes les autres. (4a) Nous supposons que la racine x étant connue, une autre racine x' est déterminée par la formule très-simple $x' = j^{\wedge}$, où a, b, c sont des coefficients connus, cette propriété devant être générale pour toutes les racines. Il faudra qu'en substituant au lieu de x dans l'équation à résoudre, on retombe sur la même équation. Et la loi qui permet de déduire la racine x' de la racine x , permettra semblablement de déduire une troisième racine x'' de x , une quatrième x''' de x'' , et ainsi de suite, ce qui se fera par les équations successives $a - bx, a + bx', a + bx'' \dots a + bx^{(i)} + cx^{(i-1)} + cx^{(i-2)} \dots$ etc. Donc si l'équation proposée est du degré n , il faudra que la $n^{\text{ième}}$ des racines $x, x', x'' \dots$ désignée par $x^{(n)}$ soit égale à la racine primitive x . Voyons comment cette condition générale peut être exprimée analytiquement. (43) Soit x_k un terme quelconque de la suite $x', x'', x''' \dots x^{(n)}$, le terme suivant x_{k+1} se trouvera par la formule $T + cx_k$. Supposons x_k exprimée par la formule $\mathcal{F}$ où p et q sont de la forme $A - t - Bx$ et $C + Dx$, nous désignerons en même temps x_{k+1} par $\mathcal{G}$, Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 21.22% accurate

432 APPENDICE, et nous aurons $aq + bp \ q' \ q + Cj > *$ ce qui permet de supposer $p = aq + bp \ f = q + cp$, et par suite $p' + ^q' \text{---} ^b \ 4\text{---} \text{crfp} + (a + u.)q$. Déterminons la constante $|^*$ de manière qu'on ait et nous aurons $/+, *gr' = (* + cl0(/> + |if)$. (44) Appelons la fonction γ , nous aurons $?(k + i) = (* + ou, -\xi i \pm i l = ;$ d'où l'on voit que chaque membre de cette équation doit être une constante et qu'ainsi on aura Si on appelle $p!$ la seconde racine de l'équation $a + jt = \{b + c^t\}$ ^ on aura de même $/, + 0, / = :A'(\& + CfA')> . .$ De là Donc^, ou Maintenant lorsque l'indice $= 0$, on $a^{**} = J$, donc $> H'A \text{---} pk' A/ X \text{---} A' \text{---} A \gg A \sim x +$

The text on this page is estimated to be only 22.24% accurate

SECTION II. 433 et enfui $r_{-}^{\wedge}(x, -nx)(3+gFL)^{*}-ti(x-htt,)(*+g|i/\forall$
 $\sim \{x + \{L'\}(6 + CiL' / \text{---}(T + [L])(b+CV.y (45)$ Il faut maintenant exprimer la
condition $x'=x$, au moyen de laquelle l'équation donnée du degré n aura n
racines $x, x, x'' \dots x\{''\sim\backslash$ qui forment une suite rentrante dont chaque terme
 x_l se déduit du précédent $x^{*}\sim'$ au moyen de la formule I^{*} condition dont il
s'agit se réduit en général à cette équation Or en vertu de l'équation $cp.' -f-$
 $(b \text{ --- } \backslash)y. = a$, on a les deux racines $c|t=i^{\wedge*}-fi/[(i-\grave{e})- + 4\ll c] + 4 \ll 4$ Donc $\pounds +$
 $\langle \rangle '=I\pm-' + 1 V/[(i \text{ --- } + 4 \ll c] * -I- C[t = l\pm*-il/[(i -ft)' + 4 a c]$. Soit pour
abréger $R=|/[(i \text{ --- } \pounds)' + 4ac]$, il faudra en général «mon ait $(i + \& + R)'' = (i$
 $+ b \text{ --- } R)\backslash$ (46) Soit $r n=3$, cette équation donnera $3(i + b)' + \wedge = 0$, d'où
résulte $1 + b + b\% + ac \text{---} o$. Soit $a'' n = / \gg$, l'équation générale donnera $(1 -$
 $+ - b)' 4- R' = o$, ou $1 + i' + aac = o$. Soit $3^{*} \ll = 5$, on aura $5(i + *)4 +$
 $io(i+*) > R' + R \ll = o$, U 55 Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 24.32% accurate

434 APPENDICE, équation qui se réduit à la forme $o = rt'c' + ac(3 + bb + 3b') - h i + b + bx + bl + b \backslash$ ou $o = (aac + 3 + 46 + 3è') * \text{---} 5(i +$ On voit dans ces trois cas que Π' est négatif, ce qui aura lieu généralement pour toute valeur de n . Car si R était réel, comme b est supposé l'être ainsi que a et c , il est visible que les quantités réelles $i - 4 - b - \backslash - R$, $i - + - b \text{---} R$ étant inégales, leurs puissances du degré n seraient inégales aussi. (47) Puisque R' est négatif, on pourra faire $i + b \text{---} rl / [(i \text{---} + 4 \ll c] = p(\cos. O \text{ } i \text{ } \sin. 6)$, a ce qui donnera $p' = b \text{---} ac \text{ } eos. e = \text{---} - \bullet a \text{ } p$ Cela posé la condition dont il s'agit exige qu'on ait $p''(\cos. \ll 0 + V / \text{---} i \text{ } \sin. \ll 0) = p''(\cos. \ll \hat{o} \text{---} V / \text{---} i \text{ } \sin. \ll 6)$. Par conséquent cette condition se réduit à 1 équation $\sin. / i O = o$, ou $Q = \text{---}$, i étant un nombre entier quelconque. Cette condition peut être mise sous la forme $(b \text{---} a \text{ } c) \cos. ' \text{---} z = ^{(i + b)}$ Lorsque $n = 3$, on a la seule valeur $t \text{---} i$, parce que i ne doit pas surpasser il s'ensuit $\cos. | = *$, et la condition devient $o = I + b + b' H - ac$. Lorsque $/i = 4$, il faut faire encore $i = i$, ce qui donne $eos. '^ = ^$, Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 26.35% accurate

SECTION II. 435 et la condition est $o = i + b' + a \ll c$. Lorsque $n=5$, on peut faire $i = i$ et $\ll = 2$, de sorte qu'il faut que l'une des deux équations suivantes soit satisfaite, Développement du 3e degré. (48) L'équation de condition est $i + b + b' + ac = 0$ ou $b - oc = (t + by) = m$. L'équation $x = \wedge \wedge$ étant mise sous la forme $(ex - b)(cx - i) = ac - b = -m$, si on fait $ex - b = y$, $ex - i = z$, ou on aura $yz = -m$. Soit l'équation en x $x^2 - Ax' + Hx - C = 0$, elle devra être satisfaite en y substituant pour x les valeurs $x = J \sim \wedge$, de sorte que si on fait pour abréger $cA = \ll$, $c'B^{\wedge} \hat{e}$, $\hat{e} C = y$, la substitution des deux valeurs de ex dans l'équation proposée qui devient alors $-\ll c^{\wedge} - i - Ccx - y = 0$, donnera les deux équations $0 = zi - (3 + a)z' + (3a\ll + \hat{e})z - (i4 - a + \epsilon + <y)0 = / + (3fc - a)y + (3b' - zbx + fyy + V - b'^* + b\ddot{e} - 7$. Maintenant comme on a $yz = -m$, si on substitue dans l'équation 55.

Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 28.99% accurate

436 APPENDICE. en z la valeur $z = -$, ce qui donne le résultat $o = w\hat{1} + (3 + a)TO' + (i + 2\langle + 6)m / (i + \langle + g + y) / 1$, il faudra que cette équation s'accorde avec l'équation en y déjà trouvée. (4g) Soit pour abréger $M = \wedge - b'a + b \ 6 - Y$, et l'identité de ces deux équations donnera les trois équations de condition $mJ = M(i + \langle + \ddot{e} + y) \ m'(3\pounds - \langle) = M(3 + aa + \pounds) i \rangle (36^* - a^* \langle + 6) = M(3 + a)$. Des deux dernières on tire, en faisant $M = m \langle N$, et se rappelant que $m^* = i - + - h$, $3(* - N) / 0_3(*, + N) a = i + N \rangle 6 - TTn'$ Ces valeurs substituées dans la première donneront $T = N \ 1 \ T + W >$ et enfin substituant les valeurs de $\langle$, y, dans l'équation $M = // * - +. b \pounds - y = (i + byH$, on aura pour déterminer N l'équation $NJ + i = 0$, d'où résulte $N = - i$, car si on prenait pour N l'une des deux valeurs imaginaires données par cette équation, les coefficients de l'équation à résoudre deviendraient imaginaires, ce qui est un cas dont on peut faire abstraction. (5o) Maintenant la valeur $N = - i$ rendant infinies celles de $\langle$, 6, y, il faut en conclure que les équations du premier degré d'où on a déduit les valeurs de $\langle$, 6, y, ne sont pas indépendantes entre elles et qu'il y en a une comprise dans les deux autres, de sorte qu'il restera l'un des coefficients $\langle, \pounds, y$ indéterminé. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 22.70% accurate

SECTION II. 437 En effet les deux équations $rr\ddot{r} (3b - \ll) = M(3 + m\{5b' - a^*\ll + f\ddot{r}) = M(3 + \ll)$, dans lesquelles on substituera les valeurs $M = (i + b)\backslash m = (i$ se réduisent à la seule équation $0 = 3(1 + \wedge + 6') + - b) + 6$, d où l'on déduit $6 = - 3(i + \grave{e})\ll = 3ac - (\hat{i} -$ ensuite on aura $y = - i -$ et $- 6 - (i$ ou $Y = i - b^* \sim ba$. L'équation cherchée $Jx^* - \ll c'a?' + 6 ex - y = o$ deviendra donc de la forme $o = cixs + 3c'ax - i + bJ - ot(c', r^* + (i - b)cx - b)$, où a reste indéterminé. On voit par là qu'il y a une infinité d'équations du troisième degré qui sont telles qu'une racine x se déduit d'une autre racine x par la formule $x > a + bx i + ex'$ dans laquelle les trois coefficients a , b , c , satisfont à la condition $i + b + b^* + a c = o$. Les trois racines de cette équation, désignées par x , $x \backslash x''$, seront donc telles qu'on aura $a + -bx$ „ $a - \backslash - bx' a - x X$ ----- $- - \sim'' \sim - . X - - - - - \bullet i + ct' i - \backslash - cx ex - b$ (5i) Soit par exemple $a = 3$, $b = - a$, $c = - i$, l'équation cherchée sera eu général $o = x' - gx + g + *(x^* - 3x a)$, Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 29.81% accurate

438 APPENDICE. d'où résultent une infinité d'équations particulières, telles que $o=x^* - 9 o=xi - 3>r' \blacksquare + \blacksquare 3 o = rs 3x' - i8x -h i5$ etc. Elles jouissent toutes de la même propriété, en vertu de laquelle une racine connue x sert à déterminer rationnellement les deux autres x et x' par les formules $x'= 3\sim ax j'' - 3\sim'g$. (5a) Puisque l'équation du troisième degré à laquelle nous sommes parvenus, contient trois indéterminées c, b, a , il semble qu'on peut réduire à cette forme toute équation proposée du même degré telle que $o==xl - px' qx - r$. Pour cet effet il faudra déterminer les quantités a, b, c , par les équations $a c=P$ Et parce qu'on a $a c= - i - b - b'$, si l'on fait pour abréger $ter - ri)$ on aura pour déterminer b l'équation $'= < \bullet \bullet$ d'où résulte $a (n - i) b$ étant connu, on aura c et « par les formules - — «

The text on this page is estimated to be only 28.17% accurate

SECTION II. 439 9r—pq r Pour que la valeur de b soit réelle, il faut que n soit positif et < 4 , conditions qui seront remplies si en faisant $H=p'q' - \sqrt{p^2r-h^2}pq - 4r^2$ on a $H > 0$. De plus si, en supposant p,q,r rationnels, la quantité H est un carré, on voit que b sera rationnelle ainsi que c et «, de sorte que la formule $\sqrt{a + f}x + t - cx$ donnera l'expression rationnelle de la seconde racine af par le moyen de la première x, et semblablement celle de la troisième x" par le moyen de la seconde x. Les trois racines seront donc rationnelles s'il y en a une qui le soit. (53) Soit proposé, par exemple, l'équation $x^3 - 6x - 7 = 0$, on aura $p = -1$, $q = -6$, $r = 7$, ce qui donne $n = 3$, $b = -7$ ou a. Soit d'abord $b = -7$, on aura $c = (IZI W \text{ } = 1^*) = \sqrt{1}$, $9r - p^2x = 9 \cdot 7 - 1 \cdot x = 63 - x$, $ac = -1 \cdot \sqrt{1} = -1$, $b' = -a = 7$. Ainsi la racine x' se déduira de x par l'équation $3 - 1 - X$. Soit en second lieu $b = -2$, on aura $c = 1$, $a = -1$, $a = -r > 0$ et $3 - u = 1 - f - x$. Au reste cette solution revient à la précédente, car de celle-ci on déduit $af = \sqrt{3^2 - 4r} = \sqrt{9 - 28} = \sqrt{-19}$ c'est-à-dire qu'au lieu de considérer les trois racines dans l'ordre x, x, x", on les considère dans l'ordre inverse x, x" yx.

Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 28.01% accurate

4\$0 APPENDICE. (54) Toutes les fois que la quantité H sera positive, les valeurs de a, b, c sont réelles; ainsi, en partant de la racine x qu'on peut toujours supposer réelle, les deux autres x et x" seront exprimées par les formules $\sqrt[3]{a + bx}$, $\sqrt[3]{a + bx^2}$ et $\sqrt[3]{a + bx^3}$ et par conséquent seront réelles. Nous sommes donc conduits par cette analyse, à une démonstration très-rigoureuse de la propriété qu'ont les équations du troisième degré, d'avoir leurs trois racines réelles dans le cas irréductible. On a en même temps deux formules très-simples pour exprimer deux de ces racines par le moyen de la troisième. Soit par exemple l'équation $x^3 - 3x^2 - 10x + 8 = 0$, dont on sait d'avance que les racines sont a, -3, et 4; les formules précédentes donneront $b = -3$, $c = 4$, d'où résulte la formule $\sqrt[3]{\frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + 4b^2})} - \sqrt[3]{\frac{1}{2}(a - \sqrt{a^2 + 4b^2})}$. Soit $x = a$, on aura $a^3 = 3a^2 - 10a + 8$; soit $x = -3$, on aura $x^3 = -27$. Développement du quatrième degré. (55) L'équation de condition est $i + i' + aac = 0$, d'où résulte $b = ac$; $(i b)' = m$. Soit l'équation cherchée $o - c'.r^* - acV + Sc''^2 - ycx + i$, on doit y satisfaire par les deux valeurs $cx = z - 1$, $cx = y + b$, ce qui donnera deux équations en y et en z, savoir : $o = \frac{1}{4} + (4^* - *)y + (6b - 3^*b + \epsilon)y + W - 3b'^* + 2b\zeta - y)y + bi - bi^* + b'G - by + S$ $o = z^4 - (4 - t - \epsilon)^2 - i - (6 - I - 3\epsilon - He)s' - (4^* - 3^* + a6 - t - y)z - f - ! - * - <^* + 6 + y^4 - i$.

The text on this page is estimated to be only 16.92% accurate

SECTION II. 44 1 Et puisqu'on a $z = -\sqrt{}$, il faudra rendre identiques les deux équations $o = \sqrt{-(4x - a)/(6A' - 3/\sqrt{a + E})}j, 4 - (4i, \sim 3A' \sqrt{+2\hat{e} - Y})ri$ $o = \sqrt{M^* + (4 - + - \sqrt{a})/w}j + (6 - 4 - 3a + x) - f - (4 - + - 3a + 2S + y)W$ $Jj(1 + a + \hat{e} + y + \sqrt{a} - 1j$ Soit pour abréger $h1 - i'a + i'\hat{E} - xy + \$ = m'N$, et on aura les quatre équations de condition $m' = S(i + \sqrt{4 - g + y + X})m(4^* - \sqrt{a}) = N(4 + 3\sqrt{a} + a\sqrt{6} + y)66' - 3x\sqrt{a} + 6 = N(G + 3a + 6)4^{\wedge}J - 36'a2^{\wedge}6 - 7 = OIN(4 + a)$. De là on tirera $46(aN + i) - (N + a; e - 6iN' - f - (i - aS - M')?) - M'] - 4N' - a(i - \sqrt{a}) - N + 4^{\wedge}a^{\wedge}N' - 4 - 4N - 1 - i^* = TT + N - + 4N - M$ Substituai! t ces valeurs dans l'équation $b^* - bl a - h b^* 6 - \sqrt{y} - + - i = w^* N$, on aura pour déterminer N l'équation $N^4 - i = o$, qui a les deux racines réelles $N = i$, $N = -i$. (56) La racine $N = i$ donne $\sqrt{a} = -2(1 - \sqrt{6})$, $6 = 2(1 - \sqrt{b - i - b1})$, $y = -i + b - b^* + b^*$, $i = -(\sqrt{1 + b^*})'$. Mais l'équation qui résulte de ces valeurs n'est pas véritablement du quatrième degré, car elle n'est autre chose que le carré de l'équation du second degré $o = c'x' + (1 - b)ex + y(\sqrt{1 + b^*})$. II. 56 Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 15.15% accurate

44« APPENDICE. Il n'y a donc que la racine $X = -i$ qui jmjsse donner nne solution; on en tire les valeurs $a = -a (i - b)$ $\zeta = -Gb y--=$, $+3*-b' \hat{=} - - 6b' + b^*)$. Ces coefficients sont, comme on voit, fonctions île b seule; ainsi prenant b arbitrairement et déterminant a et c par la condition $a c \sim - 7(1 + b')$, les valeurs de a, 6, y, $\hat{=}$, que nous venons de trouver dans la seule hypothèse admissible donneront généralement l'équation $o = c*xi - \ddot{ic}V + \epsilon c'x' - + 5$, dont une racine étant désignée par x, les trois autres x, $x' \setminus x''$. seront données par les formules, $a + b x$,, $a-t-bx' 2a + (i> - i)x$,, $x - a X i + ex' "r 1 -+ ex' 1 - b-\-icx ' '* b - ex$ (57) Soit par exemple $b = 3$, $a = - "$ », $c = 1$, valeurs qui satisfont à l'équation $1 b1 + a a c \sim o$, on aura l'équation $0=s=a?' - 4-e3 - iH.r* 4- Ha -7$, dont une racine étant nommée a, les trois autres .r', x",x", seront, $- 5-k-' .ix$,, $x - .*>$,, $x-f-\hat{i} 1 x - 1 3 - x$ Par le calcul numérique on trouve des relations entre les racines qui prouvent que l'équation proposée se décompose en deux dit second degré, savoir : $o - x' - Gx+i$ d'où résulte $j=3\pm al/a$ $o^x'r-ax - 7 x = - irfcaVa$. Voici l'ordre qu'elles suivent d'après nos formules . $1 = 3 - a V/a$, $x = \gg = -r- 1 - a l^a$, $3 \setminus - \% \setminus x$, $.t \bullet''' = - 1 + al/a$. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 17.00% accurate

SECTION II. 443 Dans cet ordre elles se déduisent chacune de la précédente comme il suit : / — 5 + Sx — 5 + „, — 5 + 3 x" •i — , % »*' — 1 , 1 « jc — ■ — -, — , .1 — — .1'. 1 + X ' 1 + 3? 1 I -hX ' (58) En général l'équation à laquelle on est parvenu par la solution précédente, savoir : $0 = \sqrt[4]{2(1 - by^{\wedge} - Gôc'x' - ii + \$b - 3b' - bi)cj - 1(1 - 6^{\wedge} + ^{\wedge})}$ est le produit des deux équations du second degré $o = c \backslash r' - zbex - \sim(i - h nb - b') o = c \backslash r' 4 - acr 4 - j(i - 26 -$ dont les racines sont $cx = b \pm (i + b) \backslash \backslash cx = -i \pm (i + b) l / -t$. On n'obtient donc pour le quatrième degré que des solutions très limitées et qui n'appartiennent proprement qu'au second degré. Développement du cinquième degré. (59) Alors on devra faire $b = \langle c = ^{(i 4 - dbl/5)}' = w, m' = (1 4 - b) p = I \sim a V^{\wedge} 5$ ou $p \cdot * = (*. = !$, et pour former l'équation cherchée que nous représenterons ainsi $0 = CiXi - aC^*X^* + êc^{\wedge}X3 - y C'X' 4 - \$ C X - 1$, il faudra résoudre les six équations suivantes : $\rangle i^{\wedge}N = 6' - ab' + èb' - yb' + ib - e$ (1) $m' = N(i + \langle + - € + \ddot{i} + \hat{i} + e)$.(2) $m1^* (5b - \langle) = N(5 + 4 \langle . * - 3ê + 2y + *)$ (3) $m^{\wedge}ioi1 - 46 \langle + 6) = N(io 4 - 6a 4 - 36 4 - y)$ (4) $10b1 - 6b'^* + 3bÇ - y = /n \rangle N(io4^*4cr4-6)$ (5) $5 A^* - 4^{\wedge} \langle 4 - 3 6 - a^*y + N(5 - 4 - \langle)$ (6) 56.

Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 14.84% accurate

111 APPENDICE. F -- G a (60) Des équations (4) et (5) on déduit $6 = -g -$, en supposant $F = ioN(i - b + b') - io^{(N^* + ^)} G = bN(i - b) - 4f^*(N > - b) n = - 3x4 - ^{(^+1)}$. Les mêmes équations donnent $^{lo^} - ioaX(n - /;) - a[G6' + 4|t. \backslash(i + \pounds)] - 1_g[3^ - ^{(i + b)}]$. Si on élimine * des équations (3) et (6) et qu'on mette $(1 - + - \pounds)V$ à la place de m , on aura entre *, S et y l'équation $(, + *)^{(5^*_a)} - (. + *)yN(5\ 4 - \ll) = 5(i - b + fr - 6l) + 4a(i - \pounds + + 36(i - b) + a Y$. Substituant la valeur trouvée pour y, on aura entre a et 6 cette seconde équation $= 5(i - ab + 3^*) - 20^{^}\backslash + 4a(i - 2^ - 2^N) + S(3 - a^N)$, d'où en éliminant 6 et substituant les valeurs $pt = p. + 1, jx^{ap} 4 - iT$ on tire la valeur de jf, savoir: $g_{(3,u-4-a)^*} - (\& - M^*)N - (i + ^)N' + (3|.-4-a) > - \gg (1 - N)^{j^*} + 9 + (i + 4i^*)X + \{3j\gg + a)N'\}$ F --■ G a Ensuite 6 se déterminera semblablement par l'équation $6 = - jy -$, et on trouvera après beaucoup de réductions, $(6|x + 4) A'' + \bullet [4 !^* + \blacksquare a + 4 A (, " + x) + a f^{**} '] N - [*p - M^*(l^* + i)4 - (4!^* - f a)^*]N' - (6j^* - H)N^* 5 (1 - N^K + a + ^ + ON + ^ + aïN']$ Substituant ces deux valeurs dans l'expression de y, on aura Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 20.82% accurate

SECTION II. 445 $(6^{\wedge} + 4)4 \gg (6 + i^*b + 6b' + a^*)N - (a + 12$
 $A^* + 6f >)N \cdot 5 - (t - N)[(3^{\wedge} + a) + (4^* + i)N4 - (3|^{*+a})N']$ Enfin l'équation $((>))$
dans laquelle on substituera les valeurs de $a, 6, y, 5'$ donnera la valeur de $=$,
comme il suit : $(3v. + i)b^* + (8 + 2ob + i8b' + 8bi + b^*)' \$ - (i + 8b + i8b' + 2obi$
 $+ 8l > i)ii' + 3^* b + \hat{i}o b' + iaA, + aA \ll N \sim !^*(a + ia^* + 3oi' + 3^*6^* + i3A^*)N' -$
 $(3|x + a)NJ S - (i - N) [3k \gg + (4^{\wedge}i)N + (3^{\wedge} + 3)N']$ La même valeur se
trouverait plus simplement au moyen de l'équation (3) qui donne (61) Il
reste à éliminer e des équations (1) et (a) , ce qui donnera l'équation $(1 - f -$
 $\pounds)y(N4 - \pounds) = i + b > + (t - + + V)y + \{i + tyt.$ Substituant d'abord les valeurs
de $a, C, y, \$$ dans la partie... $(1 - (1 + \&^*))\ddot{i} : -t - (i - b') \setminus 4 - (1 4 - A)^{\wedge}, 011$
trouve qu'en faisant $3\ 3\ 3\ 0$ pour abréger $b \bullet + - a b \% + itf + \grave{e}4 = B$, cette
partie se réduit à l'expression assez simple $(3ti + a)B(n - N + N')4 - (3|x4 -$
 $3)aK(i4 - *5) - HBN(i9 - > - 3ia) (3j^* + a)(i + N') - |(4, i - M)N$ L'inconnue qui
reste à déterminer étant N , il convient de faire $1\ 4 - N' = \pounds N$ et la quantité
précédente deviendra $(3|i' + a)\pounds + 4l \ll + i$ Cette quantité doit en vertu de notre
équation, être l'équivalent de Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 23.63% accurate

446 APPENDICE. ; (i ■+■ by (i.4 C — { (i + ; on aura donc pour déterminer Ç l'équation $(3fi-+2)^{(\pounds+>)}1\hat{i}:(3(A+2)(i+4>)Ç\_ (4|1+i)(,+y) + (4jA-4-i)(n-6)V5\ddot{i} = 5ft4B\hat{i};+ iO(t*(i -t-^)+ 5B(\{t4 + 3i |i + 19).$ Mettant à la place de 5 B sa valeur $(1 + bj — 1 — bs$, le second membre deviendra $^K(1 +bf+ IO^{(l\ 4-^)}4-(ix» + 3l^{\wedge}-H — (1\ \pounds s) — (^ + 3\ 1\ p + 1\ 9) (1 -f bs)$, et on trouve que lequation se réduit à cette forme très-simple , d'où résulte $r=\sim l^{\wedge}x/j$. Ces deux valeurs deÇétant moindres que a, l'équation $N' -+- 1 = N\ Ç$ ne donnerait que des valeurs imaginaires de \ qui doivent être rejetées. Mais il faut observer que le facteur $1 — N$ qui se trouve dans le dénominateur des valeurs de a, 6, y, a disparu dans la suite des opérations, et qu'ainsi ce facteur égalé à zéro doit satisfaire à l'équation finale. Il nous reste donc à examiner la valeur $N = 1$. (6a) Alors les valeurs de « , é,y,* ,e, deviendraient infinies, ce qui prouve que ces quantités ne peuvent pas être toutes déterminées, et qu'il en reste nécessairement une d'indéterminée, comme nous l'avons déjà expérimenté dans le troisième degré. Prenant donc a pour cette indéterminée et faisant $N= 1$, on trouvera que toutes nos équations sont satisfaites par les valeurs suivantes des coefficients « , y, S , • , Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 17.12% accurate

SECTION H. 44? I / = — 10(1 + b + b') — + vtb + b') (7) 1 f' = 1
 $g^* = 2 + ib /' - io iob^* + iO(t(j 4- b - b' - b1) g' = - - ji(a + 4f + af')$
 $S + 35\& + 45 f' + 35^{\wedge} + 5^{\wedge}, + 10(1(1 + 5\grave{e} + 86' + 5f^* - 4- b1) ^{\sim} 1 + ^{\wedge}(2 +$
 $\ll f - 20^* - 2^{\wedge}) \_3 \_IO f - \_5 f' + 5^*, + io f^* - f 3A1 - ^{\wedge}(5 + 15^{\wedge} + 10^{\wedge} - 10^{\wedge} -$
 $i5f4 - 56 > \$ + 3f' + ^{\wedge} + fi(3^* + 4^{\wedge} + a^*1) = T + \acute{e}r 1 r = (63)$ D'après ces
valeurs on aura l'équation générale $0 = ^{\wedge} - ac \ll ^{\wedge} + (Z + ^{\wedge} ayx^3 - C^{\wedge} + ^{\wedge} at)^{\wedge} . ^{\wedge} C$
 $J + (/'' + \acute{e} /' *)^{\wedge} - (r'' + ^{\wedge}''' a)$, qui jouit de cette propriété que la racine x étant
connue , une seconde racine x' sera exprimée par la formule $a - \backslash - bx i + cr '$ et
la même loi aura lieu entre deux termes consécutifs de la suite des cinq
racines x , af, x'', x'', de sorte que la racine connue servira à calculer les
quatre autres racines d'une manière rationnelle. Les trois nombres a, b,
c/que nous supposons réels, doivent satisfaire à l'équation $f - a < ? s = (i + p$
eUne racine de l'équation — p. — i = o; ainsi on peut prendre à volonté
pour «. l'une des deux valeurs $7(1 + 1/3), ;(i - 1/5)$. (64) On pourra aussi
faire $cc = 1$ sans diminuer la généralité des résultats, ce qui donnera la
formule $x' = a \sim * \sim \% bx$. En effet, c étant ' * » + * pris à volonté, si on fait
 $cx = y, ac - d$, l'équation Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 28.71% accurate

448 APPENDICE. deviendra $y \sim -jz + rf$ • Ainsi l'équation en x se ramène immédiatement à une équation en y où Ton a $c = t$. On peut donc supposer que le type des équations du cinquième degré qui jouissent de la propriété mentionnée est réduit à la forme Et on voit qu'il y a une infinité d'exemples à produire de cette classe d'équations, puisque même en supposant $c = i$, il reste deux indéterminées « et b auxquelles on peut donner telles valeurs qu'on voudra. Le choix d'une valeur de b , combinée avec l'une des deux valeurs de p , détermine immédiatement tous les coefficients f, g, h, g, y etc. qui ne dépendent que de b et de p ; on a en même temps la valeur de a , savoir : on a donc ainsi le type général d'une infinité d'équations du cinquième degré qui ont leurs cinq racines réelles, pour toutes valeurs des indéterminées « et b . (65) Soit par exemple $a = i$, $b = i$, $m = \frac{1}{5}$, on aura l'équation $o = a^* - x^* - (5o - 20y^5)x^3 + (10 - 41/5)o - 1 + 25(o - 4i/5).r - (9 - 41^5)$, qui étant multipliée par $9 + 4 \frac{1}{5}$, prend cette forme (10) $o = A(x^i - x^*) - 5Bx^3 + Bx + n5x - it$ où l'on a $A = 9 + 41/5$, $\log. A = 1.2539584i5$ $h = 10 + 41/5$, $\log. B = 1.2774779186$. Si l'on procède à la résolution de cette équation on trouvera la plus petite racine Digitized by Google

SECTION II. $x = 0.0390708a55$, 449 d'où résulte la seconde racine $x' = \sqrt[n]{x}$ dans laquelle $n = 5 - 2 \frac{1}{5} = 0.5278640450004s$. On formera donc ainsi les quatre autres racines et de plus la cinquième qui devra coïncider avec la première XV $x = x^{\frac{1}{5}} = 0.4704137653x'' = \sqrt[n]{x} = 0.8850i46492(11) x''' = \sqrt[n]{x} = 2.7a637i4742 x^{****} = \sqrt[n]{x} = 0.5899861i50 x^* = \sqrt[n]{x} = 0.0390708a55 = x$, et par ce dernier résultat les calculs précédents sont confirmés de la manière la plus satisfaisante. (66) L'équation particulière du cinquième degré dont nous venons de nous occuper, peut être résolue algébriquement par une méthode semblable à celle dont nous avons fait usage pour résoudre l'équation en p du § V de la cinquième partie. C'est ce que nous allons faire voir avec tous les détails que mérite une solution dont il n'y a encore d'exemple que dans les équations relatives à la division de la circonférence. Nous avons à résoudre l'équation $0 = x^5 - x^4 - 5x^3 - x^2 - x^{**} - 25x - \dots$), dont la propriété est telle que ses cinq racines étant désignées par v, x', x'', x''', x'''' , on a entre deux termes consécutifs de cette suite rentrante, les équations de forme semblable $x^n, x'^n, x''^n, x'''^n, x''''^n$, grⁿ — n jçT' — n x'' — n r+x' x ~T+P, > x — t+x7'' x — r+v5' t+^>

II. 57 ■ Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 28.79% accurate

450 APPENDICE. clans lesquelles $n \sim 5 - 2 \frac{1}{5} = 0.52786^*$
 40450 00420 G072. Soit R une racine imaginaire de l'équation $R^5 - 1 = 0$,
 pour laquelle on peut prendre $R = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}$. et $p = 72^*$. Nous
 supposons, conformément à la méthode citée, $T = r + Ra; + RV - t - R V'' +$
 $R4a'' T = x + R > x' + RV + R \ll r''' + R \backslash r''$, et faisant $T' = M T'$, on prouvera
 aisément que M est une fonction de R seule, indépendante des racines x, x,
 etc. En effet la loi qui existe entre deux racines permet d'exprimer d'une
 manière linéaire, les carrés et les produits deux à deux des racines, ce dont
 on va bientôt s'assurer; il en serait de même des puissances plus élevées des
 racines et de leurs produits de plusieurs dimensions. On peut donc supposer
 que le carré du polynôme T sera représenté par la formule $T' = aX + \langle x' +$
 $fx'' + \$ x'' + tx''$, dont tous les coefficients sont fonctions de R, et où il n'entre
 point de terme sans .r, car si un terme constant C se trouvait dans la valeur
 de T', on pourrait, à la place de ce terme, mettre $C(*r - + - x' + x'' + x''' + .r'')$,
 puisque la somme des racines de l'équation proposée est égale à 1,
 coefficient du second terme. Maintenant comme on peut donner à T la
 forme $T = R(.r' - * - Rx' + R'x'' + R \backslash r'' + Wx)$, il est visible que le carré de ce
 polynôme sera égal à R^* multiplié par ce que devient la valeur précédente
 de T' lorsqu'on avance d'un rang les lettres x, a/, a:", $x'' \backslash x' \backslash$ en regardant la
 première comme suivant la dernière. On aura donc aussi $T = R, (\ll *' + \grave{e} x'' +$
 $Ya/' + S x'' + tx)$. Comparant cette seconde expression à la première, on en
 tire $6 = *R >$, $y = \ll R4$, $\$ = aR^0$ « = « R^* , et par conséquent Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 28.11% accurate

SECTION II. 45 1 T' = «(x + RV + R' / + RV + R'x''), ce qui prouve que la quantité désignée par M est la même que «, et qu'ainsi elle est fonction de R seule. Il s'agit maintenant de déterminer la valeur de cette quantité, mais d'abord il faut faire voir comment on peut trouver l'expression sous forme linéaire, des carrés des racines et de leurs produits deux à deux. (67)

Reprenons pour cet effet les deux équations, $x - n$, ad $- n$ jt(i - n) - a n X 1 X 1 + x' i - B + a* ' on en déduira immédiatement les valeurs linéaires des produits de deux racines, comme il suit : $xx - x - x - n xx'' = ? \sim ? (x - x'') - n x'' x' = *' - x'' - n * V'' = L = ^ V - x''') - n ' (1 \gg) x''' x'' = x'' - x''' - n x'' x'' = ^ (x'' - \sim *) - * x'' x''' = x''' - x'' - n x''' x = L ^ (x''' - x) - n xx'' = x'' - x - n x'' x' = i = ^ (x'' - x') - n$. m. Il conviendra cependant de remplacer, conformément à l'observation déjà faite, le terme $- n$ de ces formules par son équivalent $- n (x - t - x' + x'' + x''' + x'')$. Supposons qu'on ait trouvé semblablement pour valeur linéaire de x^* la formule $x^* = ax + bx' + cx'' + dx''' + ex''$, d'où résultent les cinq expressions a?1 $- ax \setminus - bx' + ex'' + dx''' - \setminus ex'' x' l = ax' + bx'' + cx''' + dx'' + ex (i3) x'' \geq : ax'' + bx''' + cx'' + dx - h ex' x''' = ax''' + bx'' + ex - h dx + ex'' ax'' + bx 4 - ex + dx'' 4 - ex l$, 57. Digitized by Google

45a APPENDICE. il deviendra très-facile de trouver le coefficient M au moyen de l'équation $T^* = MT'$; en effet M ne sera autre chose que le coefficient de x dans la valeur de T' réduite à la forme linéaire, sans aucun terme constant. Or dans l'expression de T' on trouve d'abord la partie $x^4 - R x^3 - K x^2 - R V x - R'^2$, dans laquelle le développement des carrés donne pour coefficient de x la suite $a + eR' + dK - cR - bR'$. Ensuite la partie comprenant les produits des ternies pris deux à deux, donnera dans M les termes suivants dans lesquels on a désigné provisoirement par (a^x) le coefficient de x dans le produit développé XY-X*: $aR(xXe) + aR'\{x x^2 - 2R^3(x x^2) - aR^*(x^2) - aR_s(x'x^2) - 2R(x'x^2) + R^s(x^2) + aRJ(x^2) + 2Rt(x^2) + aR'(\dots)\}$. Substituant au lieu de chaque symbole (jrcx') sa valeur donnée par le tableau (i 3) et réunissant cette seconde partie à la première déjà trouvée, on aura $M = a + eR'^4 - rfR^* + cR^4 + R' - \frac{1}{t}(aR + aR' + 4R^5 + 4R^* + 4R_1 + 2R' + aR_0 - aR - 2R^4 + \dots)(2R' - aRJ)$. Pour réduire cette quantité, j'observe que R devant être imaginaire, on peut mettre à la place de R l'une des racines R. R₁, R_J, R₁, mais non R_s qui serait égale à l'unité; dès-lors on peut toujours supposer $o = i^4 - R^4 - R^* - R_1 - R_4$, ce qui réduit à zéro le coefficient de $\dots$; on aura donc plus simplement $M = a - eR'^4 - dR - cR^4 - bR_1 - \dots - aR - aR^4 - (i - n)(R - RJ)$. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 26.03% accurate

SECTION II. 453 Ainsi tout se réduit à trouver la valeur linéaire de a ? qui fera connaître celle des coefficients a, b, c, d, e . (68) Nous avons $x' = \frac{1}{x} = i - \frac{1}{x}$; pour convertir cette valeur en une fonction entière de x , il faut diviser par $x + i$ l'équation proposée $0 = Ax^5 - Ax^4 - 5(A + i)x^3 - f(A + i)x^2 + a5x - i$, on aura pour quotient $0 = A(x^4 - a^{**}) - (3A + 5)x^3 - f(4A + 6)x^2 - i9 - 4A + 4f = i?$. Le dernier terme de cette nouvelle équation $= 4^{\circ} = i^{\circ} f_0(I - \frac{1}{x} = 8(a + 1/5)(i - x) = (aA - a)(-a?)$. On aura donc en divisant tout par A et substituant au lieu de A sa valeur $9 + 41/5$, $0 = xK - a x^3 - (48 - a0/5)ax^2 + (58 - a4/5)x - h i5i - 681/5 - 8(1/5 - a)x$. En second lieu on a l'équation $x'' = \frac{1}{x^2} = i + 2 - \frac{1}{x} y$ et en $\leq j i$ visant l'équation proposée par $x - \hat{i}$, on en déduit $0 = A^{\wedge} - 5(A - m)^{\wedge} - 4(A + i)x + ai - 4A - f^{\wedge}$. XI Mettant au lieu du dernier terme sa valeur $*^{\wedge} + x''$, et divisant tout par A , on aura $0 = x^* - (50 - a0/5)x'' - (a0 - i6i/5)^* + 169 - 761/5 + 8(1/5 - a)x''$. Une troisième équation se tirera de la valeur $x'' = x'^n - 1 \sim n i - f^* a$ et on obtiendra ainsi les trois résultats suivants :

The text on this page is estimated to be only 20.73% accurate

454 APPENDICE. $o = ar^4 - a x^* - (48 - 20 \frac{1}{5}) a? + (58 - 24 \frac{1}{5})^* + i5i - 68 \frac{1}{5} - 8 (1/5 - a)^* o = au - (5o - 20/5)a? - (4^ - 1 \text{ G } 1/5) a - + i6q - 7j > 1/5 + 8(1/5 - 2) o = - (1/5 - 1) x^3 - (43 - + (7 \text{ } 3 \text{ } 1/5 - 1 \text{ } 6 \text{ } 1) x + 71 \frac{1}{5} - 158 + 8(9 - 41/5)3?''$. Il ne s'agit plus que d'éliminer de ces équations les termes x_i et $x \backslash$ et on aura la valeur de x' sous forme linéaire, laquelle sera $r' = 22 - 9 \frac{1}{5} + Q/5 - i)(x + 30 + 0^* 1/5 - 4)^*'' - (3 - 1/5]^*^$ Ensuite au lieu du terme constant $22 - 9 \frac{1}{5}$, il faudra mettre sa valeur $(22 - 9 y/5) (a? + x' + x'' + x''' + x'')$, ce qui donnera $g' = (2i - 8 \frac{1}{5})(a; + x_0 + (i8 - 7 \frac{1}{5})x'' + (22 - 9 \frac{1}{5}).r,,; + (19 - 8 \frac{1}{5}) a?''$. Si cette équation est appliquée successivement aux carrés x' , $o;'''$, $x''' \backslash x''^*$, et qu'on fasse la somme de toutes on aura $fx' = (101 - 4^0 \frac{1}{5})y.r = 10 \text{ } 1 - 4o \text{ } 1/5$. En effet la somme des carrés des racines de l'équation proposée $o = xs - x^* - 5(i + i)^*3 - \text{etc.}$, est $1 + Io(AA+i) = 10 + io(g - 4t/5) = i\hat{u}i - 4^0 \text{ } 1^5^* (69)$ La valeur de x^* étant connue, on aura les coefficients $a = ai - 8 \frac{1}{5}$ $fe = ai - 8 \frac{1}{5}$ $c = 18 - 7 \frac{1}{5}$ $d = 22, - 9 \frac{1}{5}$ $f - 1 \text{ } 9 - 8 \frac{1}{5}$ qui étant substitués dans la valeur de M , donnent $(i5) Ms = Q/5 - i)R - (6 - ay/5)R' - (2j/5 - 4)R - (i + 1/5)R^*$.

The text on this page is estimated to be only 20.65% accurate

SECTION IL 455 Cette formule donnera non-seulement la valeur de la fonction , M , mais encore celles des fonctions M', M'', M''', qui se déduisent de M en mettant successivement R', 111, R4 à la place de R. Soit maintenant $M = r (\cos. 6 + 1/5 - i \sin. 0)$, si on substitue cette valeur et celle de $R = \cos. \frac{1}{5} - i \sin. p.$ dans l'équation (i5), on aura pour déterminer r et 9, les deux équations $r \cos. 9 = (1/5 - i) \cos. \frac{1}{5} - (6 - 21/5) \cos. 2a - (1/5 - 4) \cos. 3^* - (1 + 1/5) \cos. 4^* = -a \cos. ft$
 $2 \cos. 2i = 1/5 \sin. 0 = (1/5 - i) \sin. p. - (6 - 21/5) \sin. 2u - (21/5 - 4) 3u - (i + 1/5) \sin. 4u = 21/5 \sin. \frac{1}{5} - (41/5 - i) \sin. 2i.$ Delà on tire $r' = i2G - 501/5 = i4 - 196601126010515181$ s'il $\cos. \hat{o} = \sim$, $\tan. 9 = 5 \ll (1/5 - 2)^* = 5 < (2 \cos. u)^* \log. r = 0.57609219017251 \log. \cos. 8 = 9.4^{390} 780982749 \log. \tan. 6 = 0.56023104504510 \log. \sin. 6 = 9.98413885487259$
 $0 = 74^\circ . 36' 3a'' . 49907 C6973.$ Si dans la valeur de M on met R* à la place de R ou 2 ^ à la place de (x, on aura la valeur de $M' = r' (\cos. 9' + 1/5 - 1 \sin. O')$, d'où l'on déduira $1/5 \cos. 6 = (1/5 - i) \cos. \frac{1}{5} - (6 - a1/5) \cos. 4 - (a1/5 - 4) \cos. \frac{1}{5} - (14 - 1/5) \cos. 8 \{^* = -2 \cos. u - 2 \cos. 2u = 1$
 $r' \sin. e' = (1/5 - 1) \sin. 2a - (6 - 21/5) \sin. 4p - (a1/5 - 4) \sin. - (1 + 1/5) \sin. 8p = 21/5 \sin. 2u - (10 - 41/5) \sin. u.$ La valeur $r' \sin. \hat{o}'$ se trouvant être la même que celle de $r \sin. \hat{o}$, puisque $r' \cos. 6'$ est égal aussi à $r \cos. 6$, on en conclut que $r' = r$, et $0' = 0$; par conséquent $M' = M$. Si Ton met encore RJ à la place de R, ou 3a à la place de M Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 20.95% accurate

456 APPENDICE se change en M'' , et faisant $M'' = r'' (\cos. 8'' V - \ll \sin. 8'')$, on aura $r'' \cos. 8'' = (1/5 - i) \cos. 3 - (6 - a/5) \cos. 6 \text{ jt} - (a/5 - 4) \cos. 9^\wedge - (i + 1/5) \cos. 11 \text{ i} = - \cos. aj^* - \cos. jx = i r'' \sin. 0'' = (1/5 - i) \sin. 3, i - (6 - 31/5) 5^\wedge. 6^\wedge - (a/5 - 4) \sin. 91^* - (1 + 1/5) \sin. 1a \text{ jt} = (4V/5 - io) \sin. ft - a/5 \sin. 2 \text{ A} - r' \sin. 8' = - r \sin. e$. Donc $r'' = r$ et $6'' = -8$, ce qui donne $M'' = r(\cos. 8 - 1/ - 1 \sin. 8)$ et par conséquent $M'' M' = r \backslash$. Enfin si on met $R4$ à la place de R ou $4p$ à la place de f_i , on aura la valeur de $M_m = r''' (\cos. 8''' - t - 1/ - 1 \sin. 8''')$, au moyen des équations $r''' \cos. \hat{\delta}''' = (1/5 - i) \cos. 4 \text{ i} - (6 - a/5) \cos. 8 \{ t - (aV/5 - 4) \cos. 1 aj^* - (1 + 1/5) \cos. 16 \text{ jt} = - 2c0s.pt. - \cos. ap = 1 r''' \sin. 6''' = (1/5 - i) \sin. 4 \text{ jt} - (6 - a/5) \sin. 8 (i - (aV/5 - 4) \sin. 1a \text{ pi} - (14 - 1/5) \sin. 16 (t = (io - 4V/5) \sin. a (t - 2 1/5 \sin. jx = - r \sin. 8$. Donc $r'' = r$, et $8''' = -8$, par conséquent $M''' = M'' = r(\cos. e - V/ - 1 \sin. 8)$ et $M''' M = r \backslash$ (70) Il faut procéder maintenant à la détermination des fonctions T , or l'équation $T' = MT \backslash$ jointe aux trois autres qu'on en peut déduire, forme la série (16) $T^* = MT$, $T'' = M'T''$, $T''' = M''T$, $T'''' = M'''T''$, d'où l'on tire les valeurs des quantités T', T'', T''' , en fonctions de T , savoir : $rwv T' rrv i / T'' T^* r^{TM} T'' T' T - r' - T'' - *F - M'' M'^* M'''' M'^*$ La dernière donne $T l = M i M'^* M'''' M'' = r \ll M \gg$, ou plus simplement $T_s = r'M, = r'i(\cos. 38 - * - l / - i \sin. 38)$; soit donc $y = \ll$, et on

The text on this page is estimated to be only 26.81% accurate

SECTION H. 457 aura $T = r (\cos. \frac{1}{2} \sin. \theta)$. « Ainsi on voit que les fonctions M et T , ainsi que toutes celles qui en dérivent, ont le même module r , ce qui est une propriété fort remarquable. On aura en particulier $T = r(\cos. \frac{1}{2} \sin. \theta)$ $T = r[\cos.(\frac{1}{2} \sin. \theta) + V - \sin.(\frac{1}{2} \sin. \theta)]$ $T'' = r[\cos.(\frac{1}{2} \sin. \theta) + V - \sin.(\frac{1}{2} \sin. \theta)]$ $T'' = r[\cos.(\frac{1}{2} \sin. \theta) + V - \sin.(\frac{1}{2} \sin. \theta)]$ $T'' = r[\cos.(\frac{1}{2} \sin. \theta) + V - \sin.(\frac{1}{2} \sin. \theta)]$. Il résulte de ces valeurs qu'on a les deux équations (17) $TT'' = r^2$ $T''T = r^2$ propriétés analogues à celles des fonctions M , puisque nous avons déjà trouvé $MM'' = r^2 = M'M''$. (71) Il ne reste plus qu'à trouver la valeur d'une racine quelconque x ; pour cela il faut faire une somme des cinq équations $i = x + x' + x'' + x''' + x''''$ $T = x + Rx + R'x' + R''x'' + R'''x''' + R''''x''''$ $T = x + R'ar' + RV + R''x'' + R'''x''' + R''''x''''$ $T' = x + RV + R'x'' + R''x''' + R'''x'''' - R''''x''''$, et on aura par les propriétés connues de la fonction R , $5^* = n - T + T' + T'' + T'''$. Mais les valeurs trouvées donnent $T + T'' = \arcsin. i$, et $T + T' = \arcsin. (a - e)$, donc $x = g + \sqrt{[cqs. u + \cos. (a - e)]}$. D'après un premier essai fondé sur les valeurs approchées de r , 4 il. 58 Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 18.28% accurate

458 APPENDICE. et w, on trouve que cette formule désigne la plus grande racine positive x'' ; et si on met $<0 + p$ au lieu de $*$, la même formule désignera la plus grande racine négative $.r''$; on aura donc les cinq racines de l'équation proposée ainsi exprimées : $x'' = 1 + \sqrt{[\cos. w + \cos. (a - w - 8)]}$ $x'' = \frac{1}{2} \sqrt{[\cos. (w + fi) - \cos. (2a + 2(1 - 6))]}$ $I^2 F x + y$ $[\cos. (* - 2|i) + \cos. (a + 4|t - 0)]$ $X - y [\cos. (w + 3|i) + \cos. (2 - t - 6j|i - 8)]$ $VIF \cdot 1 \cdot T = 5 + [\cos. (w - t - 4 ft) + \cos. (a - 4 - 8fi - G)]J.$

Maintenant pour calculer les valeurs numériques de ces racines, nous prendrons dans les résultats précédents les données nécessaires, comme il suit : $i = 26 - 50V/5$ $' \cos. 8 = \tan. 6 = 25V/5(t/5 - a) = 5''$ $'(acos. jjiV = a5/? \log. r = 0.57009 21901 72r)i \log. \cos. 6 = 9.4a3 < jo 78098 2749 \blacksquare \log. \tan. \hat{O} = 0.560a3 io45o45io \log. \sin. 6 = 9.984 1 3 885^8 72D9 \hat{o} = 74^\circ 36' 3a'' . 49907 66970 2 \bullet - 0 = ; 8 = 1 4^* 55' 1 8'' . 4998 1 533g4 \bullet = ; h = r 44 \gg 45' 55'' . 49944 60 1 82 (72)$ Avec ces données nous allons faire le calcul de la racine x. Soit pour abréger $a = [t - \} 8 = 3'4'4i'' . 50oi8 46606$, si on observe que $\cos. (w - 4 - 3j^*) + \cos. (2w + 6|i - 8) = \sin. \ll - \sin. 3 \ll = - 2 \sin. a \cos. 2 a$, la formule à calculer sera $1 4rsin.etcos. a \ll ^ = 5 5 >$ or a étant un angle fort petit il conviendra d'appliquer la formule Digitized by GoOgle

The text on this page is estimated to be only 26.82% accurate

SECTION H. 4% log. sin. $a = \log. <z - pa' - p'a^* - p''a^6 - \text{etc.},$
dans laquelle $\log. /> = 8.85963\ 30609\ 17$, $\log. // = 7.38251\ 18062$, $\log. />'' = 6.$
 $i85a3\ 125$, on trouvera log. sin. $a = 8\ .\ 72996\ 44848\ 00033$;
et parce que $\log. \cos. 2a = \log. (i - 2\sin.'a) = \sim mp^i + f + ^ + \text{etc})$, en faisant $p =$
 $2\sin.'a$, et log. $m = 9\ .\ 63778\ 43\ 1\ 1\ 3$, on aura log. $\cos. 2a = -0.00251$
 18783944 », de là et enfin log. $(4r\sin.'a\cos. 2a) = 9\ .\ 90560\ 47879\ 0609\ 4$
 $r\sin.'a\cos. 2a = 0\ .\ 80464\ 58725\ 5856$, $x = 0.03907\ 08254\ 8829$. D'après
cette valeur de x on trouve celles des quatre autres racines au moyen des
formules algébriques propres à la question, savoir : $* = r^{\wedge} = -$
 $0.47041376537777\ x'' = -1\ .\ 8850\ 1\ 464g3\ 9000\ 3?' - n\ x''' = -^{\wedge} -^{\wedge} - p =$
 $2\ .\ 72637\ 1\ 4742\ 50\ 1\ 7\ x'' = 0\ .\ 58998\ 6\ 1\ 1\ 50\ 29\ 54$ et semblablement
de la valeur de x'' on déduirait celle de x au moyen de la formule $x = TT^{\wedge} =$
 $0\ .\ 039^{\circ}7\ 08a54\ 8829$. Cette valeur est la même qu'on a supposée ,
cependant si on ajoute les cinq racines on trouve que leur somme excède
l'unité de 23 unités décimales du quatorzième ordre. Cet excès s'applique
aisément par l'erreur des tables à i4 décimales dont on a fait usage, erreur
qui influe sur la 1 3e décimale dans les valeurs de x'' et x'' composées de
58. Digitized by Google

The text on this page is estimated to be only 25.03% accurate

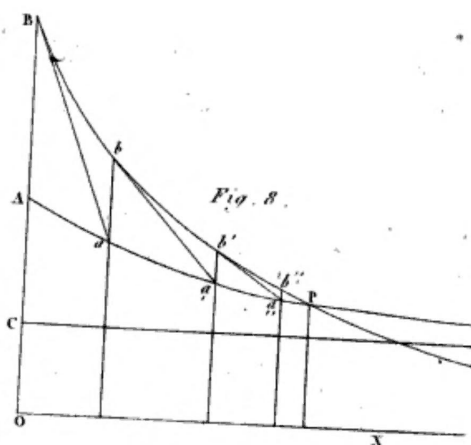
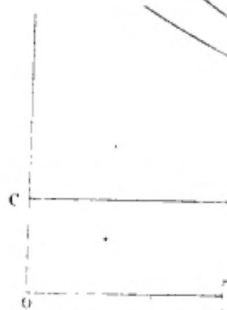
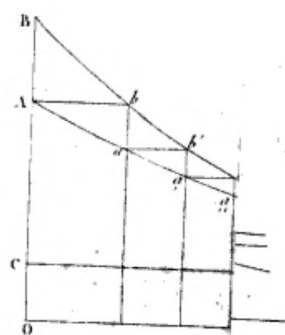
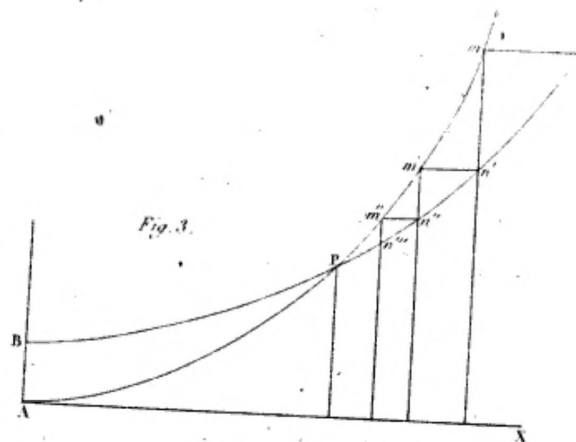
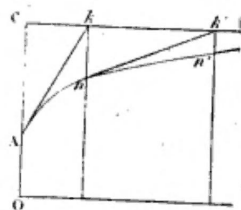
4<>o APPENDICE. 1 5 chiffres significatifs. Mais d'ailleurs il est facile de faire disparaître l'excès dont il s'agit en corrigeant d'une quantité très-petite la valeur que nous avons attribuée kx ; supposant que cette valeur corrigée soit $x + dx$, on trouvera aisément, par la loi qui existe entre deux racines consécutives, les corrections à faire aux autres racines, ces corrections sont: $dx = \dots$ $dx' = dx(i \cdot i4 > 5)$ $dx'' = JT^{ytlx'} = dx\{7.7io5\}$ $dx''' = \{J^{ytlx''} - \langle lx\{-0^i\} dx = 1^{yidx''} = dx\{i \cdot 6544\}$. Il en résulte $dx + dx' + dx'' + dx''' + dx'' + dx'' = dx\{tf\} \cdot 54a6$; donc pour faire disparaître l'erreur $-+ - a^3$ dans la somme des x , il faut faire $\langle (a6 \cdot 54ati) = - a^3$, ce qui donnera $dx = - 0.8665$, $= - 0.9891$, $\langle / * = - 6.68i4$ rfa?w = $- i3.0a93$, $\langle / * \bullet = - 1.4336$, ou en nombres entiers $dx = - 1$, $dx = - 1$, $dx'' = - 7$, $dx''' = - i3$, $dx'' = - 1$. A Ou aura donc finalement $x = 0.03907083548828$ $x = - 0.47041376537778$ $x'' = - 1.885o1464939007$ $\langle r = 2.73637i4''4\hat{>}$ $5oo4 x'' = 0.689986115oag53$ valeurs dont la somme est égale à l'unité. (73) Dans la théorie qui vient d'être développée, nous avons choisi une formule très-simple pour exprimer la loi suivant laquelle un terme quelconque de la série des racines se déduit du terme préDigitized by Google

SECTION II. 46 1 cèdent. Supposons maintenant qu'étant proposée l'équation $0 = x^n + (i) a x^{n-1} + \dots + (a) x - \dots$ etc., dont le degré n est un nombre premier, les racines forment une série $x, x', x'', \dots, x^{(n-1)}$, dans laquelle chaque terme soit une fonction rationnelle quelconque du précédent, en sorte qu'on ait $x' = f(x), x'' = f(x'), x''' = f(x'') \dots x^{(n-1)} = f(x^{(n-2)})$, et de plus $x = f(x^{(n-1)})$ afin que la série soit rentrante et qu'on puisse prendre un terme quelconque pour le premier terme. La fonction $y(x)$, quand même elle serait fractionnaire, pourra toujours se réduire à une fonction entière, c'est-à-dire à un polynôme en x qui ne surpassera pas le degré $n - 1$, puisque l'équation proposée donne le moyen d'éliminer x^n et les puissances supérieures à x^n . Ainsi on pourra supposer $x = A + Bx' + Cx'' + \dots + Lx^{(n-1)}$, $A, B, C, \dots, L$ étant des coefficients connus, et la substitution de cette valeur à la place de x , dans l'équation proposée, donnera n équations de condition entre les coefficients de la valeur de x , et les coefficients de la proposée. Si dans la valeur de x on met x' à la place de x , on aura la valeur de x'' exprimée en fonction de x' ; mais ensuite on pourra mettre la valeur de x'' en x' , et l'expression de x'' deviendra une fonction entière de x' , où l'on peut éliminer la puissance x'^n et les puissances plus élevées, de sorte que la racine x'' sera encore exprimée par un polynôme en x' du degré $n - 1$. Il en est de même des autres racines, d'où il suit qu'on pourra former les $n - 1$ équations suivantes qui déterminent les racines $x', x'', \dots, x^{(n-1)}$ en fonctions de la première x : $x = A + Bx' + Cx'' + Dx''' + \dots + Lx^{(n-1)}$ — $A' - B'x' + C'x'' + D'x''' + \dots + L'a - x'^n = A'' + K''x' + C'V + D'a.1. \dots + L''x'^{n-1} = a \{ \dots + B'x'^{n-1} - \dots + x'^{n-1} + \dots \}$ — . Digitized by Google

46a APPENDICE. Réciproquement de ces équations on peut déduire les valeurs de $r, x, x', x'', \dots, x^{(n)}$ exprimées d'une manière linéaire par les racines $x, x'', \dots, x^{(n)}$. La valeur de x est inutile à chercher, puisqu'on sait d'après l'équation proposée, quelle doit être (i) $x - x'' - x''' \dots - ar < - >$; mais il importe surtout d'avoir la valeur de x' que nous mettrons sous la forme $x' = ax + bx' + cx'' + dx''' \dots + lx^{(n)}$, dans laquelle il n'y a pas de terme constant; car si un pareil terme c en faisait partie, on pourrait mettre à sa place $x + x'' + x''' \dots + x^{(n)}$. Maintenant il est facile de voir que les produits de deux racines $xx', xx'', x'x'',$ etc. et en général les produits de plusieurs racines ou de leurs puissances, s'exprimeront d'une manière linéaire par les racines simples, comme on vient de le faire pour x' . D'ailleurs il est évident que la valeur connue de x' , donne celle des autres carrés x'^2, x''^2, x'''^2 , etc. en avançant successivement d'un rang les termes compris dans l'expression du carré précédent; ce qu'on pourra pratiquer également pour la valeur de xx' qui donnera celle de $x'x''y, x''x''^2, x'''x''^2$, etc., et semblablement pour les autres produits. (74) Sans entrer dans d'autres détails, on voit qu'en désignant par R une racine imaginaire de l'équation $R^n - 1 = 0$, et en donnant aux fonctions T et M , et à leurs dérivées $T', M', T'', M'',$ etc. les mêmes significations qui ont été employées dans toutes nos recherches, on aura d'abord l'équation $T' = M T'$, qui en fournit plusieurs autres semblables telles que $T'' = M' T''$, $T''' = M'' T'''$ etc., ensuite la valeur de M sera donnée par une fonction de R , d'où l'on déduira également celles de $M', M'',$ etc. Soit en général $M = r(\cos.\hat{\theta} + 1/- \sin.\hat{\theta})$, $M' = r'(\cos.\hat{\theta}' + 1/- \sin.\hat{\theta}')$, $M'' = r''(\cos.\hat{\theta}'' + 1/- \sin.\hat{\theta}'')$, etc., toutes valeurs qui seront connues par le moyen d'une seule et même formule; on déduira de là toutes les valeurs de $T, T', T'',$ etc. désignées en général par

SECTION II. 463 $T(i) = p\{\sqrt[n]{\cos. + \sqrt[n]{-i \sin. w(<)}}\}$; on déduira en particulier les modules p des modules r, par les équations $p' = rp'$, $p'^n = r^n p'$, etc. ; et s'il arrive que tous les modules r, r', r'', etc. soient égaux entre eux, on aura pareillement $p = p' = p'' = p''' \dots = r$. Enfin connaissant toutes les valeurs de T, on aura une racine quelconques de l'équation proposée, au moyen de la formule générale (i) + 2 p cos. u' H - 2 p' cos. w'' + etc. OC — - — • n (j5) Nous ne pousserons pas plus loin ces recherches sur les cas où il est possible de résoudre algébriquement une équation proposée, et nous invitons à consulter sur cette matière l'excellent Mémoire de M. Abel, imprimé dans le Journal de Crelle, an. 1829, n° 8. L'auteur y donne les bases d'après lesquelles on pourrait former dans chaque degré, diverses classes d'équations résolubles algébriquement ou décomposables (si le degré n'est pas un nombre premier) en équations d'un degré inférieur; d'où il résulte que les équations non comprises dans ces catégories doivent être regardées comme insolubles, et qu'ainsi il n'existe point de formules générales pour la résolution des équations passées le quatrième degré. Il est fort à regretter que M. Abel, enlevé prématurément aux sciences qu'il avait déjà enrichies de plusieurs belles découvertes, n'ait pas eu le temps de développer complètement ses idées sur la théorie dont il a posé les bases ; mais on peut espérer que les travaux ultérieurs des géomètres confirmeront les résultats annoncés par M. Abel, et qu'on obtiendra la résolution effective des équations algébriques dans tous les cas où elle est possible. Il est à croire aussi qu'un examen approfondi de cette matière conduira à la conclusion, ' que dans chaque degré le nombre des équations résolubles ou décomposables est infiniment plus petit que celui des équations qui ne sont ni résolubles algébriquement ni décomposables. FIN. Digitized by Google

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google

