

This book was produced in EPUB format by the Internet Archive.

The book pages were scanned and converted to EPUB format automatically. This process relies on optical character recognition, and is somewhat susceptible to errors. The book may not offer the correct reading sequence, and there may be weird characters, non-words, and incorrect guesses at structure. Some page numbers and headers or footers may remain from the scanned page. The process which identifies images might have found stray marks on the page which are not actually images from the book. The hidden page numbering which may be available to your ereader corresponds to the numbered pages in the print edition, but is not an exact match; page numbers will increment at the same rate as the corresponding print edition, but we may have started numbering before the print book's visible page numbers. The Internet Archive is working to improve the scanning process and resulting books, but in the meantime, we hope that this book will be useful to you.

The Internet Archive was founded in 1996 to build an Internet library and to promote universal access to all knowledge. The Archive's purposes include offering permanent access for researchers, historians, scholars, people with disabilities, and the general public to historical collections that exist in digital format. The Internet Archive includes texts, audio, moving images, and software as well as archived web pages, and provides specialized services for information access for the blind and other persons with disabilities.

Created with hocr-to-epub (v.1.0.0)

Google This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online. It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover. Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you. Usage guidelines Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying. We also ask that you:

- + Make non-commercial use of the files We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for Personal, non-commercial purposes.
- + Refrain from automated querying Do not send automated queries of any sort to Google's System: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + Maintain attribution The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + Keep it legal Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe. About Google

Book Search Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>

Google A propos de ce livre Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne. Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public. Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains. Consignes d'utilisation Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées. Nous vous demandons également de: + Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial. + Ne pas procéder à des requêtes automatisées N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter Nous encourageons pour la réalisation de ce type de

travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile. + Ne pas supprimer l'attribution Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas. + Rester dans la légalité Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère. A propos du service Google Recherche de Livres En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse <http://books.google.co.il>

The text on this page is estimated to be only 11.14% accurate

THÉORIE NOUVELLE M LA ROTATION DES CORPS.

The text on this page is estimated to be only 20.00% accurate

LIBRAIRIE DE BACHELIER.

The text on this page is estimated to be only 6.35% accurate

THÉORIE NOUVELLE DP. LA ROTATION DES CORPS 1
yot[^]kia/[^] Membre de l'InstUat et da Boreaa def Kongllodo*. pI[^]JK:[^]>. / ■ '
[^]\> « / PARIS, BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE 4e l'Éc*le
PalytecIntHIHe •« dit Bui«mi des I

The text on this page is estimated to be only 27.71% accurate

WM «V%^\% *««r%^\«W««MM^\%«i«M>«VV
l^««%«MrM%« TABLE DES MATIÈRES. PREMIÈRE PARTIE.
Page*CHAPITRE P'. -^ Du mouyembitt dbs corps coNSiDiaiL en Lui-
MiiiE 3 § p'. — Idée de la rotation simple et de la vitesse angulaire Jb, § II.
— Composition des mouvements de rotation 4 § III. — Parallélogramme
des rota^ons • 5 § IV. — Composition de deux rotations autour de deux
axes parallèles. ... 8 § V. — Des couples de rotations • lo § VI. —
Composition générale des rotations autour d'axes situés comme on voudra
dans Tespace 1 1 § VII. — Idée de la rotation autour d'un point i5 § vm. —
Image sensible de cette rotation i6 § IX. — Des différentes choses que Ton
peut naturellement considérer dans l'étude du mouvement d'un corps autour
d'un point, et de la dé* pendance mutuelle de ces choses 20 § X. — Idée du
mouvement le plus général que puisse avoir un corps dans l'espace absolu . .
. • 24 CHAPITRE II. — Des forces capables d'un mouvement DONiri 27 §
P**. — Des forces capables d'un pur mouvement de translation 29 § II. —
Des forces capables d'une pure rotation sur un axe donné 3o Réduction de
ces forces ib. Des forces capables d'un mouvement quelconque; et,
réciproquement, du mouvement que prend un corps en vertu de forces
quelconques données Si

The text on this page is estimated to be only 28.82% accurate

▼ 1 TABLE DES MATIERES. § III. — Des forces centrifuges qui naissent de la rotation 35 Rédaction des forces centrifuges à une seule force et à un seul couple 37 § IV. — Du mouvement d'un corps autour d'un axe fixe 41 § V. — Conservation des forces et conservation des couples dans le mouvement d'un corps libre 45 CHAPITRE III. — Sur la théorie des moments D'INERTIE 50 § V. — Des moments d'inertie d'un corps de figure quelconque autour de différents axes qui se croisent en un même point 1b. Du système des droites ou axes A, autour desquels le moment d'inertie du corps a toujours la même valeur H. • 52 Des axes principaux d'inertie 1h. Comment on détermine les axes principaux 54 Propriétés des trois axes principaux 55 Équation la plus simple de l'ellipsoïde conique formée par la suite des axes autour desquels le moment d'inertie du corps a la même valeur 58 SECONDE PARTIE. CHAPITRE I". — Solution du PROBLÈME de la « Rotation des corps libres 65 § 1^{er} — Définitions analytiques 1b. De l'ellipsoïde central des corps 66 De la rotation du corps au premier instant 68 Expression nouvelle des théorèmes qui précèdent 70 De la rotation du corps dans toute la suite du temps 73 Réflexion générale • 78 CHAPITRE II. — DÉVELOPPEMENT DE LA SOLUTION 81 § I". — De la courbe décrite par le pôle instantané sur la surface de l'ellipsoïde central 82 § II. — De la courbe décrite par le pôle instantané dans l'espace absolu 84 § III. — Des variétés que les deux courbes peuvent offrir dans certains cas particuliers 86

The text on this page is estimated to be only 25.01% accurate

.<_ i="" table="" des="" matieres="" v="" ly="" de="" ce=""
qui="" fait="" la="" mesure="" stabilit="" pour="" chacun="" deui=""
axes="" extr="" cle="" l="" central="" .="" y="" doms="" qu=""
pourrait="" donner="" aux="" courbes="" et="" a="" d="" par="" le=""
p="" instantan="" rotation="" gs="" vi="" diflerentielles="" ces="" sur=""
les="" donn="" cette="" analyse="" g6="" abr="" analytiques=""
maxhna="" minima="" rayons="" vecteurs="" polhodie="" suite=""
relations="" entre="" quantit="" e="" c="" tare="" s="" rayon=""
vecteur="" u="" io4="" a="" polaire="" m="" couii="" cas="" singulier=""
:=6," o="" rherpolhodie="" devient="" une="" spirale=""="" vii.=""
id="" du="" lieu="" corps="" au="" bout="" temps="" chapitre="" iii.=""
rappeoghk="" pe="" celle="" i="" l3="" mouvement="" rotation.="" ib.=""
ii.="" goment="" on="" aurait="" pu="" notre="" th="" trois="" pr=""
troisi="" partie.="" dikveloppement="" calculs="" poue=""
dixeemiilation="" dd="" coeps="" changement="" variables="" dans=""
formules="" application="" quelques="" particuliers="" n="" pas=""
emploi="" transcendantes="" elliptiques="" i="" relatifs="" position=""
couple="" jb="" solution="" h=":" b="" i35="" />

The text on this page is estimated to be only 7.23% accurate

Yiii TABLE DES MATIERES. CHAPITRE II. — NoDVBLLE
wacb dk u bot&tiuh dis cokh 137 Résumé de notre théorie 147

tW^W\t^yytt^MltMV*t^AiV^^I^*MtMVk^MiMi%n^V^*M^y^
^^%or\r,^f^\ %4A^^\>^A^W\MA \AA\%V%<<^

W>^I^^WM»%»%»VWX»t^VU»»H»»VW»A%W» %V <<% V.« THÉORIE
NOUVELLE DE LA ROTATION DES CORPS, Pab m. poinsof Elirait du
Journal de Umihématiiittespure\$ et appliquées, tome XVI, i85f.] Voici une
des questions qui m'ont le plus souvent occupé, et, si Ton me permet de
parler ainsi, une des choses que j'ai le pins désiré de savoir en Dynamique.
Tout le monde se fait une idée claire du mouvement d'un point, c'est-à-dire
du mouvement d'un corpuscule qu'on suppose infiniment petit , et qu'on
réduit en quelque sorte par la pensée à un point mathématique. Car il ne
reste plus alors qu'à se représenter la ligne , droite ou courbe, que ce point
peut décrire, et la vitesse avec laquelle il se meut suivant cette ligne. Mais,
s'il s'agit du mouvement d'un corps de grandeur sensible et de figure
quelconque, il faut convenir qu'on ne s'en fait qu'une idée très-obscuré. A la
vérité, cette idée parait d'abord s'éclaircir ou se résoudre naturellement en
deux autres. Car, si l'on s'attache à regarder un seul et même point du corps,
on peut suivre^ d'un côté, le mouvement de ce point qui ne peut décrire
qu'une certaine ligne dans l'espace, et, de l'autre côté, le mouvement du
corps qui ne peut que tourner en même temps sur ce point , comme autour
d'un centre fixe. Mais ce second mouvement, c'est-à-dire celui d'un corps
mobile autour d'un point , sur lequel il a la liberté de pirouetter dans tous les
sens , ne présente lui-même qu'une idée très-obscuré. Ce n'est pas qu'en
rapportant les points du corps à des plans ou objets fixes dans l'espace, on
n'ait su trouver ce qu'on appelle les équations différentielles de ce
mouvement, et même qu'on ne soit P. 1

1 THÉORIE NOUVELLE venu à bout à[^] intégrer ces équations, ou du moins d'en ramener les intégrales aux quadratures[^] dans le cas simple d'un corps libre de toute action étrangère. Euler et d'Alembert , à peu près dans le même temps, et par des méthodes différentes, ont les premiers résolu cette importante et difficile question de la Mécanique; et Ton sait que depuis , l'illustre Lagrange a repris de nouveau ce fameux problème , pour l'approfondir et le développer à sa manière , je veux dire par une suite de formules et de transformations analytiques qui présentent beaucoup d'ordre et de symétrie. Mais il faut convenir que, dans toutes ces solutions, on ne voit guère que des calculs, sans aucune image nette de la rotation du corps. On peut bien , par ces calculs plus ou moins longs et compliqués, parvenir à déterminer le lieu où se trouvera le corps au bout d'un temps donné ; mais on ne voit point du tout comment le corps y arrive : on le perd entièrement de vue ; tandis qu'on voudrait l'observer et le suivre , pour ainsi dire , des yeux dans tout le cours de sa rotation. Or c'est cette idée claire du mouvement de rotation que j'ai tâché de découvrir, afin de mettre sous les yeux ce que personne ne s'était encore représenté. Il en résulte une solution toute nouvelle du problème de la rotation d'un corps abandonné à lui-même, soit qu'il tourne librement sur son centre de gravité, ou sur tout autre point fixe autour duquel il serait forcé de se mouvoir: véritable solution du problème, en ce qu'elle fait image, et qu'on y voit le mouvement du Corps avec autant de clarté que le mouvement d'un point. Et si, de cette démonstration géométrique de la rotation des corps, on veut passer au calcul, pour mesurer toutes les différentes propriétés ou affections de ce mouvement, on n'a plus que des formules directes et toujours claires, parce que chacune d'elles n'y est que l'expression d'un théorème dynamique dont on a l'idée, et qui tend à son objet. Ainsi, notre analyse présente encore cet avantage, que tout s'y exprime et s'y développe par les seules données immédiates du problème, sans aucun mélange de ces angles ou de ces coordonnées étrangères qui ne tiennent point à la nature de la question, et qui ne viennent que de la méthode indirecte qu'on emploie pour la résoudre. Car c'est une remarque que nous pouvons faire dans toutes nos recherches mathématiques : ces quan

DE LA ROTATION DES œRPS. 3 tités auxiliaires, ces calculs longs et difficiles où Ton se trouve entraîné, y sont presque toujours la preuve que notre esprit n*a point, dès le commencement, considéré les choses en elles-mêmes et d'une vue assez directe , puisqu'il nous faut tant d'artifices et de détours pour y arriver; tandis que tout s'abrège et se simplifie sitôt qu'on se place au vrai point de vue. J'ai donc pensé qu'une solution si simple, et si propre à jeter un nouveau jour sur les questions les plus difficiles de la Dynamique, pouvait servir à l'avancement réel de la science, et méritait ainsi l'attention des géomètres; et c'est cette considération philosophique qui m*a surtout déterminé à composer le nouvel ouvrage qu'on va lire, et dont j'ai présenté l'analyse à l'Académie [*]. Je le divise en trois parties : dans la première, après avoir considéré le mouvement des corps en lui-même, je cherche les forces qui seraient capables de le produire, afin de voir réciproquement quel est le mouvement que doit prendre im corps en vertu de forces quelconques données, ce qui est le problème naturel de la Dynamique; dans la deuxième partie, je donne la solution du problème de la rotation des corps libres; et, dans la troisième, je développe les calculs qui se rapportent à cette solution. PREMIÈRE PARTIE. CHAPITRE PREMIER. DU MOUVEMENT DES CORPS CONSIDJÉRÉ EN LUI-MEME. I. Idée de la rotation simple et de la vitesse angulaire. 1. Le seul mouvement de rotation dont nous ayons une idée claire est celui d'un corps qui tourne sur un axe immobile, ou dont la direction reste la même et dans le corps et dans l'espace. Car on voit [*] Séance dn 19 mai i834.

4 THÉORIE NOUVELLE clairement tous les différents cercles que les points du corps décrivent dans des plans perpendiculaires à cet axe : et il est évident que tous ces mouvements simultanés sont possibles, je veux dire qu'ils peuvent s'exécuter ensemble sans que la disposition mutuelle des points, ou ce qu'on peut nommer la figure du corps existante soit en rien changée. 2. Nous avons également une idée nette de la quantité ou de la mesure de cette rotation. Car, comme tous les points décrivent en même temps des arcs de cercle semblables, c'est-à-dire de longueurs proportionnelles à leurs rayons, le rapport de la vitesse d'un point au rayon du cercle qu'il décrit est le même pour tous les points du corps; et c'est ce rapport constant qui fait la mesure, ou ce qu'on nomme la vitesse angulaire, de la rotation. Cette vitesse angulaire n'est donc autre chose que la vitesse absolue d'un point quelconque du corps pris à l'unité de distance de l'axe de rotation : de sorte que, en nommant Q cette vitesse, on a Qr pour la vitesse d'un point pris à la distance r du même axe. II. Composition des mouvements de rotation. 3. On peut voir avec la même clarté que de semblables rotations, que des causes quelconques tendraient à imprimer à un corps autour de différents axes passant par un même point, se composent exactement par la même loi que de simples forces appliquées en ce point. C'est ce que la théorie des couples rend manifeste en considérant plusieurs couples appliqués sur une sphère homogène. Car il est évident, par la régularité parfaite du corps, que chaque couple, s'il agissait seul, ferait tourner la sphère sur le diamètre perpendiculaire au plan de ce couple, et, par conséquent, sur l'axe du couple lui-même, et avec une vitesse angulaire proportionnelle à son moment; que, par conséquent, si tous les couples agissent à la fois, comme leur effet est le même que celui du couple résultant, la sphère doit tourner sur l'axe de ce couple avec une vitesse angulaire proportionnelle à son moment. D'où l'on voit que les mouvements de rotation se corn

DE LA ROTATION DES CORPS. 5 posent et se décomposent exactement par les mêmes lois que les couples, et partant que les simples forces. 4- Mais cette composition des mouvements de rotation, il faut ici FiG. i. la démontrer par la simple géométrie; puisque, dans ces premiers principes, on ne s'occupe que du mouvement des corps considéré en lui-même, c'est-à-dire abstraction faite des forces qui le produisent, et de la nature du corps qui le reçoit. Mais pour avoir ici des expressions aussi claires que dans la théorie des couples, nous représenterons de même les rotations par de simples lignes terminées Op, Oq, etc., prises sur leurs axes; et l'abscisse de ces lignes, telle que Op, représentera à la fois l'angle et la grandeur de cette rotation p, et en indiquera encore le sens par cette convention qu'en se plaçant à l'extrémité p considérée comme le nord, pour regarder devant soi le point O considéré comme le midi, la rotation se fera de droite à gauche, comme se fait, à nos yeux, le mouvement du soleil. III. Parallélogramme des rotations, 5. Si par deux causes quelconques, un corps tend à la fois à FiG. 12. prendre deux rotations p et q, représentées par les deux côtés Op, Oq d'un parallélogramme OpQq, le corps prendra une rotation unique d représentée par la diagonale Od de ce parallélogramme. En effet, considérez un point quelconque m du corps, pris dans le plan du parallélogramme, et, par exemple, vers la droite dans le supplément de l'angle que font entre eux les deux côtés; et nommons X et Y les deux perpendiculaires abaissées de ce point m sur ces côtés. Il est clair que, par la seule rotation p le point m tend à s'élever au-dessus du plan avec une vitesse px (n^2); et que, par la seule rotation q, il tend à s'élever avec une vitesse qy , et qu'ainsi, en vertu des deux causes agissant à la fois, il a, suivant la normale, la vitesse $px + qy$. Or, en nommant h la perpendiculaire abaissée du point m sur la diagonale d, on a toujours l'équation $px + qy = h^2$ comme on le sait par un théorème très-connu de géométrie. Donc la

6 THÉORIE NOUVELLE vitesse que prend le point m est égale à $Qh^{\wedge}$ c'est-à-dire à la vitesse qu'il aurait si le corps tournait sur la diagonale avec la vitesse angulaire 0 . Et comme la même chose peut se dire de tout autre point du plan, et que le mouvement du plan entraîne celui du corps, on peut dire qu'un point quelconque du corps prend, par les deux rotations p et $q^{\wedge}$ le même mouvement qu'il prendrait par la seule rotation 0 . Donc, etc.

Remarque. Fi G. 3. C'est uniquement pour abrégé la démonstration que j'ai pris le point i dans le supplément de Tangle que font entre eux les deux côtés du parallélogramme. Si ce point était pris entre les côtés mêmes, on trouverait que s'il s'élève au-dessus du plan avec la vitesse pXy il s'abaisse au-dessous avec la vitesse $qj^{\wedge}$: de sorte que sa vitesse suivant la normale serait la différence $px - qjr$. Mais, par le même théorème de géométrie, on aurait alors $px - qjr = eh$; c'est-à-dire que le point a toujours la même vitesse Oh que si le corps tournait sur la diagonale.

6. Au reste, ceci nous donne l'idée d'un théorème de géométrie plus général que le précédent, et dont celui-ci n'est en quelque sorte qu'un cas particulier. FiG. 4. Car, supposez le point m pris où l'on voudra dans l'espace, et nommez de même $x^{\wedge}j$ - et h les trois perpendiculaires abaissées de ce point sur les deux côtés $/?$ et 9 , et la diagonale 9 du parallélogramme $pOqd$; vous aurez de même pXy qjr et Oh pour les vitesses que les trois rotations p , q et 0 tendraient à imprimer au point m . Mais ici ces vitesses, au lieu d'être dans la même direction, seraient respectivement perpendiculaires aux plans des trois triangles mOp , $mOç$, mOO : les lignes qui les représentent font donc entre elles les mêmes angles que les plans de ces triangles; et elles sont d'ailleurs proportionnelles à leurs aires respectives. Or, puisque le point m , en vertu des deux rotations $petq^{\wedge}$ doit se mouvoir comme il le ferait en vertu de la simple rotation 0 , il s'en

DE LA ROTATION DES CORPS. 7 suit que la ligne 6 h doit être la diagonale du parallélogramme nstn]it sur les deux autres px et qjr. On a donc ce théorème de géométrie : •¹ d'un point quelconque m de Vespacej comme sommet[^] on mène trois triangles qui aient pour bases les deux côtés O/?, O[^] et la diagonale O 0 d'un parallélogramme, il y a toujours entre les aii es de ces trois triangles la même relation qu'entre les côtés et la diagonale d'un parallélogramme construit sous les inclinaisons mutuelles de ces trois plans. Ainsi les deux premiers triangles se composent en quelque sorte pour former le troisième, comme se composeraient entre elles, pour former leur résultante, deux forces proportionnelles aux aires de ces triangles, et qui auraient entre elles la même inclinaison. 7. Et maintenant remarquez que ce théorème, tiré de considérations dynamiques, se voit sur-le-champ par la géométrie. Car, au lieu des trois triangles, considérez les trois parallélogrammes ou rhombes faits sur le même côté Om, appuyés sur les mêmes bases O/7, Oçr, Od, et dont les aires sont mesurées par px[^] qy[^] \$h. Il est évident que ces rhombes, qui forment les deux plans adjacents avec le plan diagonal d'un même rhomboïde , étant vus comme appuyés sur la commune base O/7», sont entre eux comme leurs hauteurs, et, par conséquent, comme les trois lignes qui résulteraient de l'intersection du rhomboïde par un plan perpendiculaire à l'arête Om. Or ces lignes forment évidemment les deux côtés et la diagonale d'un parallélogramme construit sous les inclinaisons mutuelles des trois plans. Donc, etc. Actuellement, si l'on imagine que le point m descende de l'espace, perpendiculairement au plan du parallélogramme, et pour tomber dans le supplément de l'angle pOq des deux côtés, ou de son opposé au sommet, il est visible que l'inclinaison mutuelle des deux triangles mOp[^] mOq va en diminuant, et devient enfin nulle; et alors le triangle mOO construit sur la diagonale devient égal à la somme des deux autres, comme la diagonale d'un parallélogramme devient égaie à la somme des deux côtés qui la comprennent, quand l'inclinaison de ces côtés devient nulle. Si le point m descend de même pour tomber dans l'angle même

8 THÉORIE NOUVELLE pOq, ou dans son opposé au sommet, il est visible que l'inclinaison mutuelle des deux triangles mOp, mOq va en augmentant et devient enfin égale à deux angles droits: et alors le triangle mOQ construit sur la diagonale devient égal à la différence des deux autres; comme la diagonale d'un parallélogramme devient égale à la différence des deux côtés quand leur inclinaison mutuelle devient égale à deux angles droits. Ainsi ce théorème très-connu, que Lagrange attribue à Varignon y et qu'il regarde comme un beau théorème de géométrie, n'est qu'un cas particulier du nôtre: et comme celui-ci est très-facile à démontrer directement y on en peut tirer réciproquement une démonstration du parallélogramme des rotations, encore plus nette que la première, puisqu'on y prend où Ton veut le point m dont on examine le mouvement, sans avoir besoin de supposer que ce point est situé dans le plan des axes des deux rotations composantes. COROLLAIRE. 8. De ce parallélogramme des rotations il est clair qu'on peut s'élever à la composition de tant de rotations qu'on voudra, $Op^{\wedge} Oq, Or, \text{ etc.}$, et parvenir ainsi à leur résultante générale O9 en les composant successivement deux à deux , à la manière des simples forces appliquées sur un point. Et cette similitude de composition n'est pas bornée à des rotations sur différents axes qui se croisent en un même point; mais, ce qui est très-digne de remarque , elle s'étend à des rotations autour d'axes qui seraient situés d'une manière quelconque dans l'espace : théorie neuve qui mérite d'être développée. IV. Composition de deux rotations autour de deux axes parallèles. 9. Deux rotations p et q de même sens[^] autour de deux axes parallèles, se composent en une seule 0 égale à leur somme /? -f- y, autour d'un axe parallèle aux deux premiers et qui divise leur distance

DE LA ROTATION DES CORPS. 9 mutuelle dans la raison inverse des deux rotations composantes p et q . Soient, en effet, Ap et Bq les deux lignes parallèles qui, menées Fig.5. des points A et B d'un même côté de l'espace, représentent les deux rotations de même sens p et q dont il s'agit, et considérons un point quelconque m pris hors de ces axes parallèles, mais dans leur plan, vers la droite. Si Ton nomme x et j les deux perpendiculaires abaissées de ce point m sur les lignes Ap et $B^{\wedge}$, il est clair que, par la rotation $/?$, le point m tend à s'élever au-dessus du plan avec la vitesse $px^{\wedge}$ et que, par la rotation $\wp$, il tend à s'élever avec la vitesse $qj^{\wedge}$ et qu'ainsi, par les deux rotations à la fois, il a, suivant la normale, la vitesse $px - h qj$. Or, qu'on mène entre Ap et Bq la parallèle Cd , si l'on nomme h la perpendiculaire abaissée sur elle du point w , on aura $x = h$ pour sa distance à la parallèle $A/$, et $A = h$ pour sa distance à la parallèle $A^{\wedge}$. Si donc on suppose CO menée telle que les deux distances soient en raison inverse de p et $q^{\wedge}$ on aura $x^{\wedge}h = h^{\wedge}j$ ou $px - h qj = z \{p - h q^{\wedge}\}h$. Or $ip - h q^{\wedge}$ exprime la vitesse que prendrait le point m par une rotation unique $\theta = p - h q^{\wedge}$ autour de l'axe CQ . Donc, en vertu des deux rotations parallèles et de même sens p et $q^{\wedge}$ le mouvement d'un point quelconque du plan, et, par conséquent, le mouvement du corps, est le même que si le corps tournait simplement avec une vitesse angulaire θ égale $h p - h q^{\wedge}$ sur un axe parallèle qui divise la distance mutuelle des deux premiers en raison inverse des deux rotations composantes p et q . 10. Si les deux rotations parallèles p et q étaient de sens contraires, Fig. 6. on verrait de même qu'elles se composent en une seule θ égale à leur différence $p - q^{\wedge}$ et autour d'un axe parallèle $C\theta$ dont on trouverait la position comme on trouverait celle de la résultante de deux forces parallèles et contraires y et q . Ainsi, en nommant $/$ la distance de G au premier axe $A/$, par exemple, et D la distance mutuelle de kp et $A y$, on aurait $/ = D - \theta$. P. a

The text on this page is estimated to be only 26.79% accurate

10 THÉORIE NOUVELLE F'io. -j. II. Si α et 4° différaient très-peu l'une de l'autre, la rotation $r \sin \alpha = p - q$ serait très-petite ; et la distance i de son axe au premier Kp serait très-grande; de sorte que si p et α deviennent parfoitement égales, on trouve une rotation infinie autour d'un axe situé à une distance infinie : ce qui n'apprend plus rien . ou plutôt ce qui nous avertit que, dans ce cas singulier, il n'y a plus, à proprement parler, de rotation résultante, et que le mouvement du corps doit changer de nature. C'est, en effet, ce qui arrive; car on va voir que, de ces deux rotations parallèles, égales et contraires, il ne peut résulter pour le corps qu'un pur mouvement de translation dans l'espace. Des couples de rotations. FIG. 8.

12. Deux rotations p et $-p$, égales et de sens contraires, autour de deux axes parallèles, forment ensemble ce que j'appelle un couple de rotations : on peut voir à priori qu'un tel couple est irréductible, ou qu'il forme, pour ainsi dire, une rotation simple, qui ne peut jamais être ramenée à une rotation simple autour d'aucun axe quel qu'il soit. Le mouvement qui résulte d'un couple de rotations p et $-p$ est une pure translation de tous les points du corps suivant des lignes perpendiculaires au plan de ce couple, et avec une commune vitesse mesurée par le moment du couple, c'est-à-dire par le produit pD de l'une p des deux rotations, multipliée par la distance D qui sépare leurs axes parallèles. Et, en effet, considérez un point quelconque m du corps, pris dans le plan de ce couple, à la distance x du premier axe 1° , et, par conséquent, à la distance $r - D$ du second $-p$. Par la rotation p , le point m s'élève suivant la perpendiculaire au plan avec la vitesse $p x$; par la rotation $-p$ il s'abaisse en sens contraire avec la vitesse $p(r - D)$: de sorte qu'il a, suivant la normale, la vitesse $p x - p(r - D) = p(x - r)$. Donc, comme x n'entre plus dans cette expression, tous les points du plan, et, par conséquent, tous ceux

DE LA ROTATION DES CORPS. $i j$ du corps. Oui la même vitesse pH su^lTaDi la perpendiculaire au plan du couple. Donc 9 etc. 15. On voit par là qu'un couple de rotations peut être tourné et transporté comme on voudra dans son plan, ou dans tout autre plan parallèle, sans que le mouvement du corps en soit changé; et de plus, que ce couple peut être transformé en un autre composé de nouvelles rotations p' et $\text{---}/>$, avec un nouveau bras D' , pourvu que le moment $p'TY$ soit égal au premier $pT>$. 14. De cette propriété et au parallélogramme des rotations simples, on peut conclure sur-le-champ que des couples de rotations[^] situés comme on voudra dans des plans quelconques, peuvent toujours se composer en un seul par la même loi que les couples de forces, et, par conséquent, comme de simples forces agissant sur un point : qu'en un mot, on peut appliquer à ces nouveaux couples, et sans en rien excepter, tous les théorèmes qui concernent les couples ordinaires. 15. C'est, d'ailleurs, ce qu'on verrait sous un nouveau jour, si l'on voulait considérer la cause capable de donner au corps le même mouvement qui résulte d'un couple de rotations. Car, comme ce mouvement n'est qu'une pure translation dans l'espace, il est clair qu'on pourrait le produire par une simple force qu'on appliquerait au centre de gravité du corps, dans une direction perpendiculaire au plan du couple, et en prenant cette force égale au produit du moment de ce couple par la masse entière du corps dont il s'agit. Tous les couples de rotations pourraient donc être ainsi remplacés par autant de forces proportionnelles appliquées au centre de gravité du corps. D'où résulte, pour ces couples, une composition exactement la même que celle des forces autour d'un point. Mais dans cette théorie du mouvement considéré en lui-même, il faut tout tirer de la géométrie, sans rien emprunter à la Dynamique. VI. Composition générale des rotations autour d'axes situés comme ou voudra dans l'espace, 16. Considérons d'abord une simple rotation $/?$, autour d'un SI..

The text on this page is estimated to be only 21.66% accurate

12 THÉORIE NOUVELLE axe A.p passant par un point
quelconque A du corps. Si, en un autre point O, pris où l'on voudra , on
imagine deux rotations contraires p' et $-p'$, égales et parallèles à la
première p , il est clair que ces deux rotations se détruisent d'elles-mêmes, et
que le mouvement du corps

DE LA ROTATION DES CORPS. i3 résultante 6 sera toujours la même en quelque lieu qu'on ait pris ce point ou ce centre O, où l'on transporte les rotations: si Ton fait varier la position de ce point, la résultante Q ne fera que se trans porter parallèlement à elle-même en divers lieux de l'espace; mais le plan et la grandeur du couple de rotations (θ , — p) changeront nécessairement. 18. Si Ton veut une réduction générale où il n'y ait rien d'arbitraire, on pourra toujours choisir le point O de manière que le plan du couple résultant soit perpendiculaire à l'axe de la rotation résultante. En effet, tout étant d'abord réduit à la rotation 6 et au couple de rotations (p, — p) relativement à un point quelconque O de l'espace, décomposez le couple (p, — p) en deux: l'un (p', — p') dans un plan perpendiculaire à l'axe Od; l'autre (p'' — $p'^{\wedge}$), dans un plan conduit par cet axe Si vous transportez la rotation 0 dans ce plan et parallèlement à elle-même jusqu'en O'd, de manière que le couple produit (θ , — 0) soit égal et contraire au couple (p'' — p''), et par conséquent le détruise, il ne restera que la rotation 6 autour du nouvel axe O'd, avec le couple (p', — p') dans un plan perpendiculaire au même axe, ce qu'il fallait trouver; et cet axe singulier O'd, qui se détermine exactement comme celui que j'ai nommé en Statique l'axe central des moments ou des couples de forces , peut aussi être nommé l'axe central des couples de rotations. Ainsi un système quelconque de rotations est toujours réductible à une seule rotation autour d'un certain axe déterminé, et à un couple de rotations situé dans un plan perpendiculaire à cet axe. Et il est clair que ce couple résultant est le minimum de tous ceux qu'on trouverait relativement à tous les points ou centres O qui seraient pris hors de cet axe central. Car si l'on transportait partout ailleurs la rotation θ , elle produirait un couple (θ , — 6) perpendiculaire sur le couple (p', — pO ; et ces deux couples étant rectangulaires entre eux ^ donneraient par leur composition un couple résultant supérieur au couple (p', — p'). 19. Comme un couple de rotations équivaut à une pure translation du corps suivant la perpendiculaire au plan de ce couple, il s'ensuit que tout le mouvement d'un corps, en vertu de tant de rotations

The text on this page is estimated to be only 15.06% accurate

i4 THÉORIE NOUVELLE qu'on vomira, se réduit, en dernière analyse, à tourner sur une certaine droite et à glisser en même temps le long de cette droite : ce qui est , comme on le verra plus loin , le mouvement le plus général que puisse avoir un corps dans l'espace absolu. 20- Si le couple résultant minimum est nul , tout le mouvement

DE LA. ROTATION DES CORPS. is sur un axe, et la composition de semblables rotations autour d'axes situés d'une manière quelconque dans l'espace. Mais il faut se faire maintenant une idée du mouvement d'un corps mobile autour d'un point fixe sur lequel il semble pirouetter en tous sens. Vil. Idée de la rotation autour d'un point. ' 22. Le mouvement d'un corps qui tourne sur un axe immobile étant le seul dont nous ayons une idée claire, c'est donc à cette idée qu'il faut tâcher de réduire celle du mouvement d'un corps qui pirouette d'une manière quelconque autour d'un point ou centre fixe O. Or je dis que ce mouvement, quel qu'il soit, si Ton ne le regarde que durant un instant, n'est autre chose qu'une rotation simple autour d'un certain axe passant par le point O et dont la direction reste immobile pendant cet instant. En effet, considérons deux points quelconques A et B du corps, lesquels avec le centre O forment le triangle OAB. De quelque manière que le corps se meuve, il est certain qu'au bout d'un instant on trouvera que le point A est arrivé quelque autre part en A', et le point B en B' de manière que le triangle OAB aura pris dans l'espace la position infiniment voisine OA'B'. Or il est clair que ce mouvement pourrait être produit par deux rotations successives : l'une p autour de la commune intersection OS des deux plans de ces triangles, et qui amènerait le triangle OAB dans un même plan avec son égal OA'B'; l'autre f/, autour de la perpendiculaire OH à ce plan, et qui amènerait le point A sur A' et, par conséquent, B sur B'. Mais ces deux rotations p et q autour de deux axes qui se croisent au point O, peuvent toujours se réduire à une seule θ autour d'un axe OI passant par le même point. Donc, de quelque manière qu'un corps se meuve autour d'un point fixe son mouvement ne peut être dans l'instant que l'on considère, qu'une simple rotation de ce corps autour d'un axe passant par ce point et qui reste immobile dans le corps et dans l'espace pendant cet instant. ifoxx y on peut conclure que, dans l'instant suivant, c'est de même une rotation simple, mais autour d'un autre axe; et ainsi de suite d'un instant à l'autre : de sorte que le mouvement du corps peut être

The text on this page is estimated to be only 19.52% accurate

i6 THÉORIE NOUVETXE considéré comme une suite de ces mouvements simples dont chacun ne présente à l'esprit qu'une idée nette. C'est ainsi que, pour sa faire l'idée du mouvement d'un point en ligne courbe, on se représente ce point comme décrivant les côtés successifs d'un polygone infinitésimal qu'on imagine inscrit à cette courbe. On a donc ce théorème : ïïï. Le mouvement d'un corps qui tourne ef'une manière quelconque sur un point fixe, n'est autre chose qu'une rotation de ce corps

DE LA ROTATION DES CX)RPS. 17 rotation changeante. Il faut donc tâcher d'éclaircir encore cette idée, et de présenter à l'esprit quelque image plus nette et plus sensible. Or on vient de démontrer qu'un mouvement quelconque d'un corps autour d'un point fixe ne peut être qu'une rotation de ce corps sur un certain axe qui change de position d'un instant à l'autre. Donc, puisque cet axe instantané passe toujours par le point fixe, il est évident qu'il ne peut décrire dans l'espace qu'une certaine surface conique dont le sommet est en ce point; et de même, il est évident qu'il ne peut décrire dans l'intérieur du corps qu'une autre surface conique de même sommet. Soit donc O ce commun sommet, et OI l'axe instantané dans la F16. 9. position actuelle que Ton considère; et concevons du centre O et d'un rayon quelconque OI une sphère décrite qui coupe les deux surfaces coniques suivant deux courbes qui seront comme les bases de ces deux surfaces. De ces deux courbes, la première a est fixe dans l'espace absolu, et la seconde s est fixe dans le corps, et, par conséquent, mobile avec lui dans l'espace. Divisons le temps t en particules égales infiniment petites dt que nous nommerons des instants; et soient marqués, sur la courbe fixe a, les points successifs a, j, y, e, etc., où vient passer d'un instant à l'autre le pôle I de l'axe de rotation. Joignons la, aj, jy, etc., par des arcs de grands cercles, et considérons la courbe comme un polygone sphérique d'une infinité de côtés la, aj, jy, etc. Si l'on divise maintenant l'autre courbe s qui sert de base au cône mobile, en arcs de grands cercles li, ab, bc, etc., respectivement égaux aux premiers, il est clair qu'au premier instant dt le corps qui tourne sur OI amène le point a du corps sur le point a de l'espace; que dans l'instant suivant, le corps qui tourne sur Oa amène le point b du corps sur le point a de l'espace; et ainsi de suite, d'un instant à l'autre : de sorte que la courbe J, qui sert de base au cône mobile, vient appliquer l'un après l'autre tous ses divers éléments sur les éléments respectivement égaux de l'autre courbe a, qui sert de base à la surface du cône fixe. D'où je conclus que le mouvement du corps pourrait être produit par le cône mobile qui roulerait, sans glisser sur le cône fixe dont il s'agit.

P. 3

18 THÉORIE NOUVELLE 26. Nous avons donc ce nouveau théorème : De quelque manière qu'un corps se meu^e en tournant autour d'un point fixe, ce mouvement ne peut être autre chose que celui d'un certain cône, dont le sommet est en ce point, et qui roule actuellement, sans glisser, sur la surface d'un autre cône fixe de même sommet. Je veux dire que le cône mobile, considéré comme attaché au corps et Tenant avec soi, s'il vient à rouler sur l'autre cône qui est fixe dans l'espace absolu, fera décrire à ce corps le mouvement précis dont on le suppose animé; que la ligne de contact de ces deux cônes sera, à chaque instant, l'axe autour duquel le corps tourne dans cet instant ou ce qu'on appelle l'axe instantané : d'où l'on voit comment cet axe est à la fois mobile dans le corps et dans l'espace absolu; décrivant dans l'espace la surface du cône fixe, et dans l'intérieur du corps, la surface du cône mobile dont on vient de parler.

27. Tel est, je crois, le plus haut point de clarté où l'on puisse porter l'idée si complexe et si obscure du mouvement d'un corps qui tourne d'une manière quelconque autour d'un centre fixe. Il n'y a point de mouvement de cette nature qu'on ne puisse exactement produire en faisant rouler un certain cône sur un autre cône fixe de même sommet; de sorte que, si l'on imagine tous les cônes possibles qu'on ferait ainsi rouler, l'un sur l'autre, on a l'image fidèle de tous les mouvements possibles dont un corps soit capable autour d'un point sur lequel il a la liberté de pirouetter en tous sens. Et même, s'il s'agissait d'un mouvement de rotation qui fût discontinu, c'est-à-dire où l'axe de rotation, au lieu de changer de position par degrés insensibles, sauterait brusquement d'une position à l'autre par un angle fini, on pourrait également imiter le mouvement du corps en prenant, au lieu de deux cônes, deux pyramides de même sommet, et de faces respectivement égales, et faisant rouler l'une sur l'autre, de manière que la pyramide mobile tournant sur la commune arête, vint appliquer, l'une après l'autre, toutes ses différentes faces sur les faces respectivement égales de la pyramide fixe. C'est, en effet, ce qui résulte de la démonstration même que j'ai donnée plus haut.

The text on this page is estimated to be only 28.65% accurate

DE LA ROTATION DBS C»RPS. 19 Remarque I. 28. Au reste ^ il est bon de remarquer, dans cette démonstration , t{ue si j'ai pris , sur l'axe instantané 01 , une ligne OI de longueur constante j c'était uniquement pour mieux fixer les idées y en montrant les deux courbes décrites par le pôle instantané comme étant tracées sur une même sphère. Mais il est évident que la démonstration se ferait de la même manière en prenant sur l'axe instantané une ligne OI de longueur variable^ suivant une loi quelconque, et considérant les deux courbes décrites par son extrémité I, l'une dans l'intérieur du corps, l'autre dans l'espace absolu. On aurait toujours les deux mêmes sur* faces coniques , mais terminées ici par ces deux nouvelles courbes qui leur serviraient de bases; et l'on verrait de même que la courbe mobile vient appliquer^ l'un après l'autre, tous ses éléments successifs sur les éléments respectivement égaux de la courbe fixe : (Pou l'on tirerait exactement le même théorème. Remarque IL 29. Il n'est peut-être pas inutile de faire aussi une remarque sur l'idée nette qu'il faut attacher aux mots quand on dit le mouifement de l'axe instantané, ou qu'on emploie quelque autre terme qui suppose la mobilité àe cet axe, soit dans le corps, soit dans l'espace. Ce n'est ici qu'une manière de s'exprimer. L'axe instantané ne se meut point : car il est immobile de sa nature pendant un instant, et au bout de cet instant, c'est une autre ligne qui devient à son tour l'axe de la rotation. Mais en se figurant l'ensemble de toutes ces lignes, menées d'avance, les unes dans le corps et ks autres dans l'espace, et leur donnant le commun nom d'axe instantané, on peut dire naturellement la surface décrite yM cet axe, au lieu de dire la surface formée par la suite de toutes ces lignes dont chacune doit devenir à son tour I axe de rotation. Et de même, au lieu de l'angle df compris entre deux génératrices consécutives de cette surface , on peut dire l'angle décrit en un instant dt par l'axe instantané, et nommer ainsi le rapport ■— la vitesse angulaire avec laquelle cet axe trace à la fois les 3..

20 THÉORIE NOUVELLE deux surfaces coniques dont il s'agit.

C'est dans le même sens qu'on nomme le rapport $-j$ ou le rapport $—$ qui lui est égal, la vitesse avec laquelle le pôle instantané I se meut le long des deux courbes $\wedge$ et c , l'une dans le corps et l'autre dans l'espace, quoique le point du corps qui fait en ce moment le pôle instantané n'ait de sa nature aucune vitesse. Car ce point du corps, tant qu'il fait le pôle, est immobile; et sitôt qu'il se meut, il n'est plus le pôle de la rotation. IX. Des différentes choses que Von peut naturellement considérer dans l'étude du mouvement d'un corps autour d'un points et de la dépendance mutuelle de ces choses.

30. Si les deux courbes γ et g^* , qui servent de bases aux deux surfaces coniques, sont données, avec la vitesse angulaire ω de rotation autour de l'axe instantané OI , il est évident que le mouvement du corps sera entièrement déterminé. Si, la vitesse angulaire ω étant toujours connue, une seule de ces deux courbes est donnée avec la vitesse du pôle qui la décrit, l'autre courbe sera nécessairement donnée. Supposons, par exemple, que la courbe fixe c soit donnée avec la vitesse $-j$ du pôle instantané I le long de cette courbe. Comme le corps tourne sur OI avec une vitesse angulaire ω aussi donnée, il est clair que le point du corps qui, au bout de l'instant dt , doit venir tomber sur la courbe fixe a pour y être à son tour le pôle instantané, est un point déjà déterminé dans le corps; et il en est de même des autres points du corps que les rotations successives doivent amener l'un après l'autre, comme pôles, sur la courbe fixe et donnée c d'où Ton voit que l'autre courbe $\wedge$, qui marque la route du pôle dans l'intérieur du corps, est entièrement déterminée. Et réciproquement, si, au lieu de la courbe fixe c , on se donne la courbe mobile j , avec la vitesse j et la rotation ω , on verra de même que la courbe fixe γ se trouvera entièrement déterminée dans l'espace.

DE LA ROTATION DES CORPS. ai 5t. En général, dans l'étude du mouvement d'un corps autour d'un point fixe, il se présente naturellement plusieurs quantités simples à considérer, telles que la vitesse angulaire ω de rotation autour de l'axe instantané OI ; la vitesse angulaire ω avec laquelle cet axe trace les deux surfaces coniques S et 1 qu'il décrit en même temps, l'une dans l'intérieur du corps, l'autre dans l'espace absolu; les rayons de courbure r et p de ces deux surfaces; les mouvements angulaires $\dot{\theta}$ et $\dot{\phi}$ du pôle, l'un autour de l'axe OP du cône osculateur de la surface mobile S , et l'autre autour de l'axe OII du cône osculateur de la surface fixe 2 ; etc. Et si, de ces différentes choses, trois quelconques sont connues, on peut dire que les autres le sont aussi, et que le mouvement du corps est entièrement déterminé. On peut se faire une idée nette de ces relations mutuelles, en prenant sur l'axe instantané une longueur constante $OI = 1$, et considérant les deux courbes θ et ϕ , décrites par le pôle 1 , comme deux polygones sphériques d'une infinité de côtés. Car, pendant l'instant dt où le pôle reste immobile en I , le côté ds du polygone sphérique mobile s décrit, pour venir se coucher sur le Fig. ii . côté égal dd du polygone fixe o , un angle formé par la somme de l'angle extérieur de du polygone mobile et de l'angle extérieur de du polygone fixe, ou par la différence de ces deux angles, si les deux courbes θ et ϕ ont leurs convexités tournées dans le même sens. La vitesse angulaire d , autour de l'axe instantané OI , est donc exprimée par la somme ou par la différence de ces deux angles, divisée par l'élément dt du temps; de sorte qu'on a $\omega = \frac{d\theta \pm d\phi}{dt}$ (le signe $\pm$: selon que les deux courbes θ et ϕ ont, au point de contact I , leurs convexités opposées l'une à l'autre, ou tournées dans le même sens). Or l'angle extérieur de du polygone sphérique s n'est autre chose que l'angle extérieur dièdre, formé par le prolongement d'une face avec la face suivante, dans la pyramide centrale dont ce polygone sphérique est la base; et cet angle dièdre étant égal à celui que font entre elles les deux perpendiculaires élevées sur les faces voisines, a

The text on this page is estimated to be only 23.87% accurate

a^ THÉORIE NOUVELLE pour mesure — » si Ton nomme r le rayon de courbure de la surface conique au point I que Ton considère. On a donc et l'on a de même $> \text{lis } r$ 9 en nommant p le rayon de courbure de l'autre surface au même point I : d'où résulte, en substituant ces valeurs dans l'équation précédente, on a rdt pdt Mais $\wedge$ [ou $\sim$ qui lui est toujours égal u marque la vitesse angulaire avec laquelle l'axe instantané OI trace à la fois les deux surfaces coniques; en faisant donc ds du ce qui donne une relation très-simple entre la rotation 9, le mouvement angulaire cj de Taxe instantané, et les rayons de courbure r et p des deux surfaces coniques qu'il décrit. Fi G. 12. 32. Si l'on suppose menés ces deux rayons de courbure $IP = r$, $m = p$, et qu'on joigne OP et OK , on aura les axes des deux cônes droits et circulaires osculateurs des deux surfaces; et les deux perpendiculaires abaissées à pôle I sur ces deux axes OP et On , seront les rayons a et a des cercles qui servent de bases à ces cônes osculateurs. Or on a, par la f^iire, $r^* = -, /3^* = \blacksquare$, Ainsi l'on peut introduire dans Téquatioii précédente, au lieu des rayo»» de courbure r et $|9$ des deux cônes, les rayons $\wedge$ et a des deux cercles

The text on this page is estimated to be only 23.98% accurate

DE LA ROTATION DES CORPS. a3 qui leur fervent de bases; et l'équation devient a a iMais (k) étant la vitesse angulaire de l'axe instantané sur la surface du cône, il est clair que - est la vitesse angulaire de la projection de cet axe OI sur la base, et, par conséquent, c'est le mouvement angulaire du pôle I autour de l'axe OP de ce cône; et ω de même, - est son mouvement angulaire autour de l'axe OI' de l'autre cône. Si donc on désigne ces deux mouvements angulaires par p et ω ou qu'on fasse $\omega = \omega' \frac{Pf}{P'f} = \frac{TT}{T'}$ on en tire d'abord la proportion $P : \omega :: a : a'$, et ensuite, d'après l'équation précédente, $0 = \omega' \frac{v'i}{a} - \frac{a^*}{T} \pm \frac{TTy}{I} - a'$. D'où l'on voit que les mouvements angulaires du pôle, autour des axes des cônes osculateurs, ne sont autre chose que la rotation ω décomposée en deux p et ω autour des mêmes axes : car, OI étant égal à I, il est clair qu'en nommant x et ω' les inclinaisons de OI sur les axes OP et OI', on a $a = \sin X$ et $a' = \sin \omega'$; de sorte que les deux relations précédentes équivalent à cette suite de rapports égaux : $p : \omega : d : : \sin H : \sin \alpha : \sin (x - \frac{1}{2}C)$; ce qui montre que p et ω sont les deux côtés d'un parallélogramme dont ω est la diagonale. 33. On voit donc comment ces diverses quantités sont liées entre elles et peuvent se trouver quand on en connaît trois en fonction du temps. Si ces trois quantités données sont constantes, toutes les autres le sont aussi; et le mouvement du corps est celui d'un cône droit à base

a4 THÉOBIE NOUVELLE circulaire qui roule uniformément sur un cône fixe également droit et circulaire. Ainsi, la terre tourne en un jour sur son axe OI, tandis que cet axe décrit, en sens contraire, un cône droit autour de Taxe On de l'écliptique, sous un angle ζ de $26^{\circ} 8'$ et avec une vitesse angulaire n mesurée par le mouvement rétrograde des équinoxes, et qui est d'environ 4^{e} tierces centésimales par jour. On connaît donc la rotation θ autour de Taxe instantané, le cône fixe Σ que cet axe décrit dans l'espace, et la vitesse angulaire n qu'il a dans ce mouvement. On peut donc déterminer dans la terre le cône S qui, roulant sur le premier Σ , et en dedans de sa surface, ferait décrire à la terre le mouvement précis qu'on y observe. Car, en prenant le jour pour unité de temps, on aura $Q = \theta/n = 400^{\text{e}}$, $n = 4a^{\text{e}}$ et $\sin \zeta = \sin 26^{\circ} 8' \approx 0.44$ et les équations précédentes donnent $\sin \alpha = \frac{400 \sin \zeta}{\sqrt{400^2 + 4^2 \cos^2 \zeta}} \approx 0.44$ d'où l'on conclut le rayon $\sin \alpha$ du petit cercle qui sert de base à ce cône mobile S : ce qui donne à peu près $i^{\text{TM}},684$ à la longueur à la petite circonférence que le pôle instantané de rotation de la terre décrit chaque jour à sa surface (tout ceci, d'ailleurs, dans l'hypothèse d'une rotation et d'une précession diurnes parfaitement uniformes). X. Idée du mouvement le plus général que puisse avoir un corps dans l'espace absolu. Fig. i3. 34. Considérez un point quelconque O du corps, et la vitesse actuelle u qu'il a dans l'espace ; il est clair que tout le mouvement du corps, quel qu'il soit, peut être vu, dans cet instant, comme composé : 1^o d'une simple translation qui emporterait toutes les molécules avec la même vitesse u suivant des lignes parallèles à la direction de cette vitesse ; et 2^o d'une simple rotation θ autour d'un certain axe OI passant par le point O que l'on considère. Car, en vertu du premier

DE LA ROTATION DES CORPS. a 5 de ces deux mouvements , le point O sera porté dans l'espace au lieu même où il doit être au bout d'un instant; et par le second autour d'un axe OI bien choisi, le corps pourra venir dans la position quelconque qu'on lui suppose au bout du roéro instant. Or, s'il arrivait que la direction OU de la translation u fut perpen- FiG- i4diculaire à l'axe OI de la rotation 9 , tout le mouvement pourrait se réduire à une simple rotation Q autour d'un certain axe O'S parallèle à OI. Car menez suivant OI le plan perpendiculaire à OU , et supposez que dans ce plan, et du coté de l'axe où la vitesse de rotation des molécules est de sens contraire à leur vitesse de translation , on prenne un point O' à la distance $x = -$ de cet axe OI; il est évident que ce point O' aura dans l'espace une vitesse nulle $x\mathbf{B} - \mathbf{w}$, et qu'il en sera de même pour tous les points du corps situés sur la ligne O'S parallèle à OI. Donc, dans le cas particulier -de OU perpendiculaire à l'axe instantané OI , le double mouvement du corps se réduit à une simple rotation autour d'un certain axe déterminé O'S, et qu'on nomme Vaxe spontané de rotation. Actuellement, si OU n'est pas perpendiculaire à OI (ce qui est le Fie. i5. cas le plus général), imaginez qu'on décompose la vitesse u de translation en deux , l'une v perpendiculaire à OI , et l'autre $s^\wedge$ parallèle au même axe. La première p, combinée avec la rotation 9, donnera lieu à une rotation spontanée autour d'un certain axe parallèle à OI, comme on vient de le voir tout à l'heure; et la seconde s/ transportera tous les points du corps dans une direction parallèle à cet axe spontané. Donc, dans le cas le plus général, tout le mous^ement d'un corps se réduit à tourner sur un certain axe et à glisser en même temps le long de cet axe : de sorte que ce mouvement est exactement le même que celui d'une vis qui tourne dans son écrou. Tous les points du corps décrivent donc, sur des cylindres concentriques, de petits arcs d'hélices qui ont toutes le même pas. Dans l'instant suivant , c'est une autre vis, d'un autre axe et d'un pas différent; et ainsi de suite d'un instant à l'autre : d'où l'on voit comment se forment les courbes simultanées que décrivent tous les points du corps, et le long desquelles ils se meuvent comme en autjint de canaux curvilignes où ilr* seraient enfermés. p. 4

The text on this page is estimated to be only 19.77% accurate

a6 • THÉORIE NOUVELLE 3£». On conçoit parfaitement le mouvement de translation , par lequel tous les points d'un corps sont portés suivant des lignes égales et parallèles dans l'espace; on conçoit avec autant de clarté le mouvement de rotation autour d'un axe qui demeure immobile : mais on ne voit pas si bien le mouvement unique et réel qui vient de la combinaison de ces deux-là pour chaque point du corps; et c'est la coexis

DE LA ROTATION DES CORPS. %j CHAPITRE II. DES FORCES CAPABLES d'UN MOUVEMENT DONNÉ. 37. Après avoir considéré le mouvement des corps en lui-même, il faut chercher les forces capables de le produire, afin de voir réciproquement quel est le mouvement que doit prendre un corps en vertu de forces quelconques données, ce qui est le problème naturel de la Dynamique. Et d'abord je rappelle l'idée précise qu'il faut attacher au mot de force dans la théorie du mouvement. J'entends [^]div force toute cause capable d'imprimer un mouvement uniforme et rectiligne à un corps libre, considéré comme un point matériel, c'est-à-dire comme un point où Ton conçoit qu'une certaine quantité de matière se trouve concentrée. La direction et le sens du mouvement de ce point font la direction et le sens de la force ; et la grandeur de cette force a pour mesure le produit de la masse par la vitesse imprimée. 38. Cette définition de la force étant posée, je dis que, quel que soit le mouvement d'un corps dans l'espace , il y [^] toujours des forces qui, étant appliquées à ce corps supposé en repos, sont capables d'y produire le mouvement qu'on y observe. Et en effet, dans ce mouvement , chaque molécule dm du corps ayant dans l'espace une certaine vitesse ^{^^}, il est évident que cette molécule pourrait être regardée comme en repos, mais animée tout à coup par une force udm qui produirait sa vitesse. Donc, si l'on considère l'infinité des forces semblables udm appliquées à toutes les molécules respectives du corps, on aura certainement des forces capables de produire sur le corps le mouvement donné. Donc , si l'on imagine que, par les lois statiques de la composition des forces, on ait réduit toutes ces forces élémentaires udm à d'autres P, Q, R , etc., on aura un autre système de forces également capables du mouvement donné. 59. Mais il y a une différence essentielle à remarquer entre Je système des forces udm appliquées à tous les éléments du corps , et les forces $P \gg Q$, etc., auxquelles on les aurait réduites par la compo4..

28 THÉORIE NOUVELLE sition. Si le mouvement produit est le même dans les deux cas, l'état intérieur du corps ne sera pas le même au premier instant. Car il est évident que les forces élémentaires u_i étant individuellement appliquées à chacune des molécules de ce corps, sont capables d'y produire le mouvement donné, même en supposant que ces molécules ne soient pas liées entre elles au premier instant; et par conséquent sans exciter d'abord, dans les liens qui les unissent, aucune compression, ou traction brusque qui tendrait à les rompre. Sous l'action de ces forces élémentaires u_i le mouvement du corps est donc comme spontané; c'est-à-dire que les liens du corps ne sont pas nécessaires au premier instant; et si, dans la suite du mouvement, ces liens se trouvent tendus, ce ne peut être que par les forces centrifuges qui naissent des mouvements curvilignes que les molécules sont obligées de suivre à cause de leur liaison mutuelle. Mais si, au lieu de ces forces élémentaires u_i , on applique au corps leurs réduites P, Q , etc., il faut nécessairement supposer que les molécules soient liées entre elles dès le premier instant, afin que ces forces P, Q , etc., puissent réellement se décomposer dans les forces élémentaires u_i seules capables du mouvement spontané du corps. Ainsi, sous l'action des forces P, Q , etc., les liens du corps sont nécessaires au premier instant; car ils commencent par ressentir une action brusque et finie à laquelle ils doivent d'abord résister : et tout se passe ensuite comme dans le premier cas, où les liens ne souffrent plus que les tensions qui naissent à chaque instant des forces centrifuges. 40. Cette distinction qu'on vient de faire, qui est nulle quant au mouvement produit sur le corps, est donc essentielle quant à l'état intérieur initial de ce corps : car il peut être affecté, au commencement, d'autant de manières différentes qu'on peut lui appliquer de différents systèmes de forces, également capables de lui imprimer le mouvement qui l'anime. Mais, si l'on ne considère que le mouvement du corps, sans s'occuper des secousses ou tractions brusques qu'il peut ressentir dans son intérieur, et qu'il doit détruire par sa solidité, il est permis de composer les forces élémentaires u_i , et de les réduire ainsi à d'autres, comme, par exemple, à une seule force et à

DE LA ROTATION DES CORPS- ag un seul couple, dont l'ensemble sera également capable du mouvement donné : c'est ce qu'on va faire dans les articles suivants ; après quoi on réduira de même les forces centrifuges qui naissent de la rotation. Des forces capables d'un pur mouvement de translation. 41. Si un corps n'a dans l'espace qu'un pur mouvement de translation, de sorti! que toutes les molécules s'avancent dans le même sens, avec la même vitesse U_y suivant des droites parallèles, il est clair que toutes les forces élémentaires u_{dm} dont ces molécules sont animées sont aussi parallèles, de même sens et proportionnelles aux masses respectives dm de ces molécules. Or on sait que de telles forces sont toujours réductibles à une seule R , parallèle et de même sens, égale à leur somme $\sum u_{dm}$, et passant par le centre de gravité du corps. Donc, réciproquement, si une force quelconque R est appliquée au centre de gravité d'un corps solide, comme elle pourra toujours se décomposer en forces parallèles et de même sens, appliquées aux molécules de ce corps, et proportionnelles aux masses de ces molécules, l'effet de cette force R sera de transporter toutes les parties du corps, suivant sa propre direction et avec une commune vitesse $w = R : m$, c'est-à-dire égale à la grandeur de cette force divisée par la masse entière m du corps dont il s'agit. Ce qui était, pour ainsi dire, évident de soi-même. 42. Si cette force R , passant toujours par le centre du corps, changeait de direction et de grandeur à chaque instant par l'action de quelque force accélératrice étrangère passant par le même centre, le mouvement du corps n'en serait pas moins un pur mouvement de translation, je veux dire que le corps n'aurait aucune rotation sur lui-même. Tous les points de ce corps décriraient, il est vrai, des lignes courbes; mais tous les éléments simultanés de ces courbes décrites seraient égaux et parallèles entre eux : de sorte qu'en regardant un plan quelconque attaché au corps, et par conséquent mobile avec lui dans »'

The text on this page is estimated to be only 15.48% accurate

3o THÉORIE NOUVEIXE l'espace, on trouverait ce plan toujours parallèle à lui-même dans la suite du mouvement. II. Desjorces capables d'une pure rotation sur un axe donné. Fu;. i6.

DE LA ROTATION DES CORPS. Si appliquées en O suivant les axes mêmes OX et OY ; ensuite , trois couples L, M, N autour des trois axes respectifs des x^j , y^j , z^j , et dont les moments sont exprimés par $(Yz - Zy)$, $(Zx - Xz)$, $(Xy - Yx)$; ce qui donne, en mettant pour X, Y, Z leurs valeurs, $L = \int yz \, dm$, $M = \int xz \, dm$, $N = \int xy \, dm$. Donc, si Ton fait pour chaque force δF la même transformation , et qu'on indique par le signe / la somme de tous les termes semblables à celui qu'on écrit sous ce signe y toutes les forces δF capables de la rotation donnée se trouveront réduites aux forces et aux couples suivants , savoir : I®. Deux forces $X = \int y \, \delta F$ $Y = - \int x \, \delta F$ Tune suivant OX, l'autre suivant OY, forces qu'on peut réduire à une seule P, perpendiculaire à OZ, et dont la valeur sera $P = \sqrt{(\int x \, \delta F)^2 + (\int y \, \delta F)^2}$ ou , si l'on veut , en nommant D la perpendiculaire abaissée du centre de gravité du corps sur l'axe OZ, on aura, pour la valeur de cette force , l'expression plus simple $P = \omega D$; a**. Deux couples $L = \int yz \, \delta F$, $M = \int xz \, \delta F$ autour des deux premiers axes OX et OY, couples qu'on peut réduire à un seul K, dont le plan passe par OZ et dont le moment est $K = \sqrt{(\int xz \, \delta F)^2 + (\int yz \, \delta F)^2}$; 3°. Et enfin on aura le couple N dont le moment est $N = \int xy \, \delta F = \int x^2 y \, \delta F$, . et qui agit dans un plan perpendiculaire à l'axe donné OZ. Ainsi, en prenant les cinq intégrales $\int x \, dm$, $\int y \, dm$, $\int xz \, dm$, $\int yz \, dm$, $\int xy \, dm$, qu'il faut étendre à la masse entière m du corps, on déterminera conv

The text on this page is estimated to be only 18.92% accurate

32 THÉORIE NOUVELI[^] plètement la force P , le couple R et le couple N dont l'ensemble P, K, N est capable de la rotation $\$$ autour de l'axe donné OZ . 45. Si cet axe OZ passe par le centre de gravité du corps, on aura $\int x dm = 0$, $\int y dm = 0$, d'où $P \wedge 0$; angle dont le cosinus $y^r =$ ne peut être nul! à moins qu'on n'ait $K = 0$. Corollaire II.

DE LA ROTATION DES CORPS. 33 couple Q Jr^{dm} de même grandeur et de même position que le couple donné N . On a donc ce théorème simple et facile à retenir : Si un couple est appliqué sur un corps libre dans un plan perpendiculaire à l'un de ses axes principaux, son effet sera de faire tourner le corps sur cet axe lui-même avec une vitesse angulaire égale au moment de ce couple, divisé par le moment d'inertie du corps autour de cet axe principal. COROLLAIRE III. 47. Par ce seul théorème particulier, on peut trouver sur-le-champ l'effet d'un couple G appliqué au corps dans tel plan qu'on voudra. Car en décomposant ce couple donné en trois autres L , M , N perpendiculaires aux trois axes principaux du corps « et nommant A , B y C les trois moments d'inertie qui se rapportent à ces axes, on aura L M N pour les trois rotations respectives p [^] q , r que ces couples tendent à produire autour des mêmes axes : de sorte que si l'on compose ces trois rotations en une seule d , on aura $Taxe$ et la grandeur de la rotation à laquelle le couple proposé G tend à donner naissance au premier instant; ce qui est, comme on voit, de la plus grande simplicité. Corollaire I. Des forces capables d'un mouvement quelconque; et, réciproquement, du mouvement que prend un corps en vertu de forces quelconques données. 48. D'après ce qu'on vient de dire ^ il est bien facile de trouver la force et le couple dont l'ensemble est capable d'un mouvement quelconque donné. Car, quel que soit ce mouvement, vous pouvez toujours le concevoir comme décomposé en deux : l'un, qui consiste dans une pure translation égale et parallèle au mouvement du centre de gravité du corps; et l'autre, dans une simple rotation autour d'un axe passant par le même centre. On n'aura donc qu'à prendre la P. 5

The text on this page is estimated to be only 20.49% accurate

34 THÉOBIE NOUVELLE force R capable du premier de ces deux mouvements, et le couple G capable du second, et le problème sera résolu. 49. Réciproquement, quelles que soient les forces appliquées à un corps, imaginez qu'on les transporte toutes parallèlement à elles-mêmes au point qui fait le centre de gravité de ce corps : elles viendront s'y composer en une seule R , et tous les couples qui proviennent de leurs translations se composeront en un seul G .

DE LA ROTATION DES CORPS. 35 ce 9 ont de petits arcs à hélices décrites du même pas sur des cylindres concentriques autour d'un certain axe O'S, qui n'est point l'axe instantané OI, mais qui lui est toujours parallèle, et que j'ai nommé l'axe spontané glissant. III. Des forces centrifuges qui naissent de la rotation. 51 . Nous avons considéré plus haut (n° 43) les forces finies $\rho \, dr$, dont toutes les molécules d'un corps sont animées quand ce corps tourne avec une vitesse angulaire Q autour d'un axe donné OZ. Mais de cette rotation même il naît, à chaque instant, pour chaque molécule

SUR LA ROTATION DES CORPS. 3^e séquent, sans que cette rotation pût affecter en rien l'état intérieur du corps. Dans la question qui nous occupe, chaque molécule dm n'est poussée que par la force tangentielle $dm \cdot \omega r$, et il n'y a point de force centripète — $dm \cdot \omega^2 r$ qui intervienne pour la faire tourner librement autour de l'axe OZ. Mais je considère que si cette force — $dm \cdot \omega^2 r$ n'y est point, rien n'empêche de la supposer, pourvu qu'on en suppose une autre égale et contraire — $dm \cdot d\omega^2 r$. Ainsi, à la seule force d'impulsion $dm \cdot \omega r$, il est toujours permis de substituer l'ensemble des trois forces $Qrdm$, — $dm \cdot d\omega^2 r$, — $dm \cdot \omega^2 r$. Mais alors on peut imaginer que pendant l'instant dt , les deux premières forces sont employées à faire tourner librement la molécule par un arc de cercle $Qrdt$, tandis que la troisième force — $K dm \cdot \omega^2 r$ tire cette même molécule dans le sens où elle tend à l'éloigner du centre; et voilà précisément ce que j'appelle la force centrifuge née de la rotation du corps. Toutes les molécules sont donc tirées à chaque instant par des forces semblables, uniquement dues au mouvement de rotation : forces réelles, qui affectent l'état intérieur du corps par les tensions qu'elles produisent sur les liens, quels qu'ils soient, qui retiennent les molécules. Réduction des forces centrifuges à une seule force et à un seul couple. [^]. Toutes les forces centrifuges qui naissent de la rotation Q étant Fio. 18. ainsi représentées par $dm \cdot \omega^2 r$ elles ont, au facteur près $6dt$, la même expression que les forces finies $Qrdm$, dont les molécules sont actuellement animées. Mais, au lieu d'agir suivant les tangentes, elles agissent suivant les rayons des cercles décrits; et elles sont ainsi perpendiculaires à ces premières forces $Qrdm$ et à l'axe donné OZ. Si donc on les réduit de la même manière, en les transportant au même point O, elles donneront pour leur résultante T , analogue à la résultante P des premières forces, $T = \sum dm \cdot \omega^2 r$ et pour leur couple résultant C , analogue au couple R , et

The text on this page is estimated to be only 29.54% accurate

38 THÉORIE NOUVELLE même par Taxe donné OZ, et ii n'y aura point de couple analogue au couple N autour de OZ, puisque les directions de ces forces centrifuges passent toutes par l'axe OZ lui-même. S5. Telles sont donc les valeurs de la force accélératrice et du couple accélérateur qui résultent des forces centrifuges. Quant à la position de cette force tt , et à celle du couple $\int f$, elles se voient presque immédiatement. Car, comme toutes les forces centrifuges $dm \cdot O^r$, qui donnent la résultante tt , sont respectivement perpendiculaires et proportionnelles aux forces d'impulsion $6rf/m$ qui donnent la résultante P , il est évident que n est perpendiculaire à P . Par la même raison, l'axe du couple accélérateur $\wedge$ est perpendiculaire à celui du couple K ; et comme il est perpendiculaire à OZ qui est l'axe du couple N , il est aussi perpendiculaire à Taxe du couple G , qui est le résultant de N et K : on peut donc dire que l'axe du couple $\wedge$ dû aux forces centrifuges est perpendiculaire à la fois à l'axe de la rotation & et sur celui du couple d'impulsion G . Ainsi, P et G étant deux lignes qui, partant du point O , représentent, l'une la direction et la grandeur de la force P , l'autre l'axe et la grandeur du couple G , dont l'ensemble P et G est capable de la rotation d autour de l'axe libre OZ; si l'on nomme ϕ l'inclinaison de G à l'axe de cette rotation 6 (ce qui donne $R = G \sin \phi$), on a, pour la force et le couple accélérateurs tt et $\wedge$ qui naissent des forces centrifuges, ces expressions très-simples $n = ev \cdot \phi = \hat{O}G \sin \phi$, TT étant perpendiculaire à la fois à P et à l'axe 6 . et $\int f$ étant perpendiculaire à la fois à G et au même axe 6 . Remarque. SB. Quant aux sens de ces forces et de ces couples, ils sont bien faciles à reconnaître. Car on peut remarquer que si la direction de chaque force centrifuge faisait un quart de révolution dans le sens même où le corps tourne, elle deviendrait de même sens que la force d'impulsion. Donc les deux lignes On et $O\wedge$, qui répondent à la ré

DE LA ROTATION DES CORPS. Soit un corps et au couple résultant des forces centrifuges, doivent être tellement posées par rapport aux lignes OP et OR qui répondent aux forces d'impulsion y que si $O; r$ et $O^\wedge$ venaient à tourner d'un angle droit dans le sens même de la rotation $9^\wedge$ la ligne Ott viendrait se coucher sur OP, et la ligne $O;^\wedge$ sur OK. D'où Ton voit avec clarté les positions précises qu'il faut donner aux lignes qu'on emploie dans la figure, pour représenter complètement les forces et les couples que l'on considère. On voit que si δ change de signe, comme P et K en changeront aussi, n et $^\wedge$ n'en doivent pas changer : et c'est en effet ce qui doit être, car il est évident que les forces centrifuges sont les mêmes, soit que le corps tourne dans un sens, soit qu'il tourne dans le sens contraire.

Corollaires. 57. Lorsque l'axe OZ de la rotation passe par le centre de gravité du corps, on a $fx_{dm} = 0$ et $Jy_{dni} = 0$, et partant, $tt = 0$, et toutes les forces centrifuges se réduisent au couple xSi , de plus, l'axe OZ est un des trois axes principaux de ce corps, on a $fx_{9din} = 0$ et $fjrz_{dm} = 0$, et partant, $;(= 0$, et toutes les forces centrifuges se font équilibre. Et réciproquement, il n'y a qu'un tel axe autour duquel les forces centrifuges nées de la rotation puissent se contre-balancer mutuellement. Car pour l'équilibre, il faut avoir $tt = 0$ et $;f = 0$: or i^* tt ne peut être nul à moins qu'on n'ait à la fois $fjcdm = 0$ et $fjrdm = 0$, c'est-à-dire à moins que l'axe OZ ne passe par le centre de gravité; 2° $f^\wedge$ ne peut être nul à moins qu'on n'ait à la fois $Jxz_{dm} = 0$ et $Jjz_{dm} = 0$, c'est-à-dire à moins que l'axe OZ ne soit un des axes principaux.

Remarque. 58. On voit par là qu'en Mécanique on peut chercher les axes principaux d'un corps par deux considérations différentes, mais qui mènent sur-le-champ aux mêmes équations : car on peut demander.

The text on this page is estimated to be only 23.82% accurate

4o THÉORIE NOUVELLE autour (de que] axe un corps doit-il tourner pour que les forces actuelles $Brdm$ qui animent ses molécules se réduisent à un couple N perpendiculaire à cet axe? ou bien, autour de quel axe le corps doit-il tourner pour que les forces centrifuges $5^* rdm$ qui naissent de la rotation se fassent mutuellement équilibre? En représentant cet axe inconnu par la ligne OZ , et considérant deux autres axes quelconques OX et OY perpendiculaires entre eux que, dans l'un et l'autre cas, il faut avoir $y_{din} = 0$, d'où résulte que l'axe inconnu de gravité du corps; et ensuite, qu'il faut $:f^m = 0$, d'où l'on tire la direction de cet axe. Ainsi les deux problèmes ne peuvent conduire qu'aux mêmes axes. Au reste, on verra plus loin, par la géométrie, que, dans un corps quelconque, il existe toujours trois axes de cette nature et qui sont rectangulaires entre eux.

DE LA ROTATION DES CORPS. 4i frouver Texpression du moment d*inerHe du corps autour d*un autre axe mené comme on voudra par le même centre; et de là on peut passer, par une autre expression encore plus simple , au moment dMnertie relatif à un axe quelconque parallèle à celui-là. C'est une théorie purement géométrique que je développerai avec quelque détail dans le chapitre suivant. Mais . avant de terminer celui-ci, je veux dire deux mots de la rotation d'un corps sur un axe fixe, afin de montrer, d'une manière nette, i^ les percussions que cet axe doit ressentir, au premier instant, de la part des forces d'impulsion qui ont été appliquées au corps; o? les pressions que cet axe devra soutenir, dans tout le cours du mouvement, pour résister aux forces centrifuges qui naissent à chaque instant de la rotation. Enfin, revenant aux propriétés générales du mouvement d'un corps entièrement libre, je montrerai, dans un nouveau paragraphe, que le principe de la conservation des forces et le principe de la conservation des couples auraient pu être tirés , comme corollaires , de la théorie des forces centrifuges. IV. Du mouvement d'un corps autour d'un axe fixe, 61. Quelles que soient les forces appliquées à ce corps, on peut toujours les réduire à une seule R appliquée en un point quelconque 0 de l'axe fixe, et à un seul couple G. Or il est évident que la force R passant par un point de l'axe fixe y est détruite, et que, par conséquent, cet axe OZ reçoit d'abord au point O une percussion représentée par la force donnée R ; ou , si l'on veut, en nommant a l'inclinaison de R à OZ, cet axe fixe reçoit deux percussions, l'une $R \cos a$ dans le sens de sa longueur, et l'autre $R \sin a$ dans une direction perpendiculaire. Ensuite, en désignant par v l'inclinaison de Taxe du couple G au même axe fixe, on peut décomposer ce couple en deux : l'un $N = G \cos v$, perpendiculaire à l'axe fixe; l'autre $N' = G \sin v$, dans un plan conduit par cet axe. Or il est visible que ce dernier couple N' P. 6

The text on this page is estimated to be only 20.05% accurate

43 THÉORIE NOUVEJLE se trouve détruit : de sorte que l'axe fixe doit encore ressentir la percussion d'un couple $N' = G \sin v$. Ainsi, TOit à deux percussions tout à fait inutiles au mouvement du corps, et qui ne peuvent qu'ébranler l'axe fixe : d'où l'on voit que si l'on n'a d'autre objet que de faire tourner le corps, en ménageant les appuis, il est bon de n'employer que des forces qui aient F_k ; 19.

DE LA ROTATION DES CORPS. 43 comme frappé par le seul couple donné N , je puis le considérer comme frappé à la fois par les trois couples N , K , K' et les deux forces P et P' . Or, par hypothèse, les couples N , R , et la force P , combinés ensemble, sont capables de faire tourner le corps sur l'axe OZ avec une vitesse angulaire $Q = \dot{\theta}$, sans causer à cet état fixe la moindre percussion. Donc, si le corps prendra réellement cette rotation déterminée θ ; car la force et le couple restants P' et K' passant tous deux par l'axe fixe, peuvent être regardés comme détruits par la résistance de cet axe. Donc, si cet axe fixe ressentira deux percussions représentées Tune par la force P' appliquée au point O , l'autre par le couple K' dont le plan passe par le même axe; et Ton aura, pour ces deux espèces de percussions : $P' = -P$ et $K' = -K$. Ce qu'il fallait d'abord trouver. 65. Si l'axe OZ , au lieu d'être fixe dans toute sa longueur, était simplement retenu par deux points fixes A et B , et qu'on voulût trouver les deux percussions individuelles ressenties par ces points, on décomposerait la force P en deux autres parallèles appliquées, l'une au point A , l'autre au point B ; ensuite on changerait le couple K' en un autre équivalent appliqué à angle droit sur AB ; et, réduisant alors à une seule les deux forces qu'on trouverait en A , et de même à une seule les deux forces qui agiraient en B , on aurait les deux percussions individuelles que le couple proposé N produit au premier instant sur les deux points fixes A et B . 64. Il est évident que les percussions dont il s'agit ne sont ressenties par l'axe fixe qu'au premier instant : car une fois que l'axe a détruit la force P' et le couple K' , le corps n'est plus sollicité au mouvement que par les couples N , R et la force P . Or ce système de forces étant capable de faire tourner spontanément sur OZ , c'est-à-dire quand bien même OZ ne serait pas fixe, il est manifeste que la résistance de cet axe n'a plus rien à détruire, et qu'il ne reçoit plus aucune percussion. 6..

44 THÉORIE NOUVELLE On Toit, par la , que si Ton veut ménager le plus possible l'axe fixe de rotation, sans regarder à la dépense des forces, il faut appliquer des forces qui se réduisent d'elles-mêmes à la force P et au couple G résultant de N et K . Cet ensemble P et G , ou son équivalent P, N, K , feront tourner sur l'axe fixe sans lui causer aucune percussion. On peut se représenter que, dans le cas dont il s'agit, la chose se passe de cette manière : on peut voir le couple N comme étant employé à faire tourner sur l'axe, tandis que la force P et le couple K sont employés à soutenir cet axe, ou, si Ton veut, à détruire les deux percussions — P et $\sim K$ qui lui viendraient du couple N , si ce couple agissait tout seul. Ainsi, quand on veut ménager le plus possible la résistance de l'axe, il faut appliquer le système de forces représenté par N, P et K : mais si Ton veut ménager la dépense des forces, il faut appliquer le seul couple N ; et alors l'axe reçoit deux percussions — P et $\sim K$, qu'il est obligé de détruire. 65. Après la destruction du couple K' et de la force P par l'axe fixe, le corps tend donc à tourner librement sur cet axe avec la vitesse angulaire d . Mais de cette rotation naissent alors les forces centrifuges dont il faut examiner l'effet ; ce qui est le troisième point de notre démonstration. Or il est évident que toutes ces forces étant dirigées vers l'axe fixe, y seront détruites à chaque instant : d'où je conclus d'abord que la rotation d du corps sera uniforme; que, dans toute la suite du mouvement, l'axe fixe n'aura plus qu'à supporter les pressions dues aux forces centrifuges; et que cet axe devra être retenu dans tous les sens, pour résister à ces pressions qui changent continuellement de directions par le mouvement même du corps. Or on a vu que les forces centrifuges Q^{rdm} sont réductibles à une seule $w = \frac{1}{2} P = e \gg \frac{1}{2} S x d m Y^{\wedge} U r^{\wedge \wedge} Y^{\wedge}$ et k un seul couple de sorte que l'axe est chargé, à chaque instant dt , d'une pression ndt appliquée en O , et d'un couple $) (^{dt}$ passant continuellement par cet

DE LA ROTATION DES CORPS. 45 axe : pressions qu'on pourra réduire, comme ci-dessus, à deux forces appliquées aux points A et B si l'axe n'est retenu que par deux points fixes; etc., etc. Remarque, Dans le mouvement que je viens de considérer, il est bien clair que la force P et le couple G, dont le corps est à chaque instant animé, restent toujours les mêmes de grandeur et de position dans l'intérieur du corps. Les deux lignes OP et OG qui les représentent ne font, pour ainsi dire, que tourner avec le corps et du même mouvement angulaire d , autour de l'axe fixe. Si tout à coup cet axe devenait libre, et que le corps fût ainsi abandonné à lui-même, on sait, par les principes généraux de la Dynamique, que P et G seraient également conservés de grandeur et de position, non plus dans l'intérieur du corps, mais dans l'espace absolu. Or je veux faire voir ici que ces principes, qu'on peut nommer la conservation des forces et la conservation des couples, auraient pu être tirés, comme de simples corollaires, de la théorie des forces centrifuges : déduction délicate et qui me paraît assez curieuse pour n'être point omise dans un Mémoire de Mécanique rationnelle.

V. Conservation des forces et conservation des couples dans le mouvement d'un corps libre. De l'analyse exacte des forces centrifuges, on peut tirer ces deux belles conséquences : c'est que les forces centrifuges qui naissent du mouvement d'un corps ne peuvent jamais altérer ni la grandeur ni la direction des forces primitives d'impulsion qui ont mis le corps en mouvement. Je veux dire que si à une époque quelconque, on vient à rechercher la résultante et le couple résultant des forces finies qui animent le corps à cette époque, on retrouvera la même force et le même couple, et situés dans les mêmes lieux de l'espace. Ces propriétés ne sont, il est vrai, qu'un corollaire de ce principe, ou de cette loi générale de la Dynamique, par laquelle les forces qui ani

The text on this page is estimated to be only 22.74% accurate

^6 THÉORIE NOUVELLE ment toutes les molécules d'un système quelconque, variable ou non, donnent toujours , relativement à un même point de l'espace, la même résultante R et le même couple résultant G, pourvu que le système soit abandonné à lui-même, c'est-à-dire considéré comme libre de tout obstacle et de toute force accélératrice étrangère. Ce principe général

DE LA ROTATION DES CORPS. 4? couple $Y^{\wedge}dt$ qui ne sont point nul» d'eux-mêmes. Il n'est donc pas inutile d'entrer ici dans une explication plus complète, et de montrer comment cette force et ce couple, nés des forces centrifuges, ne peuvent jamais troubler ni la grandeur ni la position dans l'espace, de la résultante R et du couple résultant G . Et cela même nous paraît d'autant plus curieux à examiner, que non-seulement ces forces centrifuges ne troublent ni R ni G , mais qu'elles sont même nécessaires à leur conservation: de sorte que si, à chaque instant, on venait à détruire la force ndt et le couple $x^{\wedge}$ » R et G ne se conserveraient plus dans l'espace absolu. Démonstration. Quel que soit le mouvement d'un corps, nous avons vu que ce mouvement peut être considéré, à chaque instant $dt^{\wedge}$ comme composé d'une rotation Q autour d'un certain axe déterminé ON , et d'une translation u parallèle à cet axe que nous avons nommé l'axe spontané glissant. Soient donc P, K, N la force et les deux couples capables de cette Fig. 20. rotation θ sur l'axe. ON , et Q la force qui, appliquée au centre de gravité g , est capable de la translation u suivant la direction du même axe. En nommant m la masse du corps, et faisant $gO = r$, on aura $P = ma^{\wedge}$ et $Q = mM, *$ comme on l'a dit plus haut. Cela posé, au bout d'un instant $dt^{\wedge}$ le corps sera descendu le long de ON , par un espace $00''^{\wedge} = udt^{\wedge}$ et en même temps il aura tourné autour de ON par un angle Qdt . Supposons donc que dans ce mouvement il ait entraîné avec lui toutes les lignes OP, OK, ON, Og que l'on considère dans la figure. Il est clair qu'en vertu du premier mouvement, toutes ces lignes seront d'abord descendues dans les positions parallèles $O'P', O'K', O'N', O'g'$; et qu'en vertu du second, elles auront tourné ensemble d'un même angle $Qdt^{\wedge}$ pour venir, dans les positions $O'P'', O'K'', O'N'', O'g''$: de manière que les extrémités $P',$

The text on this page is estimated to be only 18.77% accurate

48 THÉORIE NOUVELLE K', g' auront décrit les arcs
semblables $P'P^{\wedge} = P9flt$, $K'K' = Kerf(, g'g'—addt$. Mais, au bout de cet
instant, il sera provenu des forces centrifuges: i°une force $ntlt = PSiY^*$,
peipendiculaire à P', et qui, com

' DE LA ROTATION DES CORPS. 49 On peut même voir comment la chose se passe d'un instant à l'autre. Car au bout d'un instant, le corps ayant changé de position dans l'espace, et les forces ayant gardé la leur, le corps ne s'y présente plus de la même manière, et son mouvement va changer, c'est-à-dire qu'il va se faire autour de quelque autre axe spontané glissant on. Mais comme ce mouvement sera dû au même système (P, K, N, Q), ce système est nécessairement réductible à un système semblable $[p^k n^q]$ capable de ce mouvement autour du nouvel axe on dont il s'agit. Or, par la même démonstration qui précède, ce second système serait aussi conservé durant un instant : donc puisqu'il est réductible au premier (P, K, M, Q), celui-ci se conserve de même, c'est-à-dire qu'il peut représenter les forces et les couples qui animent le corps, non-seulement au bout du premier $\wedge$ mais encore au bout du $\wedge$ con $\wedge$ instant, et ainsi de suite à l'infini: d'où l'on voit comment cette conservation des forces et des couples doit s'étendre à tout le cours du mouvement. Et réciproquement, si l'on voulait partir de ce principe général (dont la démonstration directe est très-facile), on serait conduit, par une marche inverse, à reconnaître que, du mouvement même d'un corps solide, il doit nécessairement provenir de certaines forces infiniment petites, telles que, étant combinées à chaque instant avec les forces acquises, le principe de consen $\wedge$ ation dont il s'agit soit rigoureusement observé : et l'on retrouverait ainsi pour ces forces infiniment petites les mêmes expressions $ndt^\wedge X^\wedge^\wedge$ qu'on a tirées de la théorie des forces centrifuges. Au reste, il n'est pas surprenant qu'on arrive au même résultat par les deux méthodes, puisque l'une et l'autre partent également de cette loi fondamentale qu'on appelle la loi d'inertie. P.

The text on this page is estimated to be only 24.50% accurate

THÉORIE NOUVELLE CHAPITRE III. SUR LA THEORIE
DES MOMENTS d'iNERTIB [*]. I.

The text on this page is estimated to be only 19.02% accurate

DE LA ROTATION DES CORPS. Si θ étant l'inclinaison mutuelle de d et A ; on a donc $r = a \sin \theta = a (\frac{1}{2} - \cos \theta)$, et comme on a, par la géométrie, $C = 8$

The text on this page is estimated to be only 18.89% accurate

5a THÉORIE NOUVELLE Du système des droites ou axes h ,
autour desquels le moment d'inertie du corps a toujours la même valeur H .
67. Si dans l'équation précédente on regarde H comme une constante
donnée, et les angles α , β , γ comme variables, on aura évidemment
l'équation de la surface conique formée par la suite des

DE LA ROTATION DES CORPS. 53 l'équation transformée les trois rectangles de ces nouvelles coordonnées. Cette transformation , comme on le verra par la géométrie analytique, est toujours possible; et l'équation de la surface ne contient plus alors que les trois carrés des coordonnées : elle est réduite à sa forme la plus simple , et la surface conique est rapportée , comme on dit , à son centre et à ses axes ou diamètres rectangulaires. Si donc, dès le commencement, au lieu de prendre trois axes quelconques, on avait pris les trois diamètres dont je viens de parler, et qu'on eût cherché de même la surface formée par la suite des droites d'un même moment d'inertie H , on aurait trouvé exactement la même équation , et toute réduite à la forme la plus simple. Or, par rapport à trois axes quelconques, cette équation est, comme on Ta vu, de la forme $(H - A)x'^2 - H(H - B)y'^2 - h(H - C)z'^2 - 2\{lxx' - hmxz' - nyz'\} = 0$, où A, B, C, l, m, n désignent les six intégrales $\int (x'^2 - y'^2 - z'^2) H dm$, etc., $\int x' y' z' dm$ etc., relatives aux axes que l'on considère. Mais puisque cette équation, rapportée aux trois diamètres particuliers dont il s'agit, ne doit plus contenir les rectangles $x'y', y'z', z'x'$ des coordonnées, il s'ensuit que, relativement à ces mêmes diamètres, on aurait trouvé les intégrales $\int x'y' dm, \int y'z' dm, \int z'x' dm$, c'est-à-dire $\int x'y' dm, \int x'z' dm, \int y'z' dm$ toutes trois égales à zéro. 70. Donc, par la même raison qu'il y a pour une surface conique du second ordre , trois axes rectangulaires par rapport auxquels les coefficients des trois rectangles $x'y', y'z', z'x'$ sont nuls dans l'équation de cette surface, il y a dans un corps de figure quelconque, et en tel point de l'espace qu'on voudra considérer, trois axes rectangulaires par rapport auxquels les trois intégrales $\int x'y' dm, \int x'z' dm, \int y'z' dm$, relatives à ces axes, sont égales à zéro. Et ces trois axes, qu'on nomme les axes principaux du corps, ne sont autre chose que les trois diamètres rectangulaires de la surface conique du second ordre formée autour de l'origine, comme sommet , par la suite des droites autour desquelles le corps a toujours 1^{er} même moment d'inertie.

The text on this page is estimated to be only 15.79% accurate

54 THÉORIE KOUVELtX Comment on détermine les axes
principaux. 71. On peut donc déterminer la position des trois axes
principaux d'un corps, exactement comme on détermine celle des trois axes
ou diamètres rectangulaires d'une surface du second ordre. $PX' - h$ $Qj' - i$ -
 Rz'

The text on this page is estimated to be only 26.36% accurate

DE LA ROTATION DES CORPS. 55 disparaisse de l'équation transformée. Si l'on désigne par ϕ l'inclinaison de OX à Ox , on a $X = x' \cos \phi - y' \sin \phi$, $y = z' \sin \phi + x' \cos \phi$, et substituant ces valeurs dans l'équation, on trouve pour le coefficient du rectangle $x'y'$ $(A - B) \sin \phi \cos \phi - H \sin 2\phi$, ou bien $(A - B) \sin \phi \cos \phi - H \sin 2\phi$, lequel, étant égalé à zéro, nous donne, pour déterminer ϕ , l'équation très-simple $\tan 2\phi = \frac{H}{A - B}$. Ainsi, relativement aux trois axes $x'y'z'$ et z qui sont rectangulaires entre eux, l'équation de la surface conique sera réduite à la forme et ces trois axes seront ainsi les trois axes principaux du corps que l'on considère, de sorte qu'on aura $fx'y'z' = 0$, $fx'z'dn = 0$, $Oy'z'dn = 0$. On voit que les deux dernières équations s'accordent avec les deux qu'on avait supposées, savoir $fxz = 0$, $Jyz = 0$: car par la forme des expressions ci-dessus de x et y , en x' et y' ou réciproquement, il est facile de voir que $Jx'z = 0$ et $Jyz = 0$ entraînent les deux équations $fxz = 0$ et $fyz = 0$, et réciproquement; et cela même, indépendamment de l'inclinaison ϕ à OX . Propriétés des trois axes principaux. 74. Si nous rapportons toutes les particules du corps aux trois axes principaux y nous aurons donc, en nommant toujours H le moment d'inertie relatif à une droite h menée par l'origine sous les angles α , β , γ avec ces mêmes axes, $H = A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + G \cos^2 \gamma$,

56 IBÉORIE NOUVELLE où A, B, C sont les valeurs des moments d'inertie du corps relatifs aux trois axes principaux. 75. De cette expression très-simple, il résulte d'abord que le moment d'inertie H sera toujours une quantité moyenne entre les moments principaux A, B, C . Car, supposez qu'on range Ces trois quantités par ordre de grandeur $A < B < C$; je dis que A est la plus petite valeur que puisse obtenir H , et que C est la plus grande. En effet, à cause de $\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma = 0$ » on peut mettre l'expression précédente sous la forme $H = A + \frac{1}{2}(B - A)\cos^2 \alpha - \frac{1}{2}(C - A)\cos^2 \gamma$; or $(B - A)$ et $(C - A)$ sont tous deux positifs par hypothèse; donc on a toujours $H > A$. Si l'on suppose que H passe à cette valeur minimum A , il vient $0 = (B - A)\cos^2 \alpha - (C - A)\cos^2 \gamma$, équation qui ne peut subsister à moins qu'on n'ait $\cos^2 \alpha = 0$, $\cos^2 \gamma = 0$, et partant $\cos \alpha = 1$, ce qui fait tomber h sur l'axe principal lui-même du moment A . Ainsi 9 entre tous les axes qu'on peut mener par l'origine, l'axe du moment d'inertie minimum est unique, et c'est le premier axe principal. Maintenant, si l'on met l'expression de H sous la forme $H = C - \frac{1}{2}(A - C)\cos^2 \alpha - \frac{1}{2}(B - C)\cos^2 \beta$, on voit de même que $(A - C)$ et $(B - C)$ sont tous deux négatifs par hypothèse; donc on a toujours $H < C$. Ainsi la valeur générale de H est toujours intermédiaire entre A et C , comme je l'avais avancé. Si l'on suppose que H arrive à cette valeur maximum C , il vient $0 = (A - C)\cos^2 \alpha - (B - C)\cos^2 \beta$,

DE LA ROTATION DES CORPS. 57 équation qui ne peut subsister à moins qu'on n'ait $\cos \alpha = 0$, $\cos \beta = 0$, et par conséquent, $\cos \gamma = 1$, ce qui fait coïncider h avec l'axe principal du moment G . Ainsi l'axe du moment d'inertie maximum est aussi un axe unique; et c'est le second axe principal du corps. Enfin si l'on met l'expression de H sous la forme $H = B - (A - B) \cos^2 \alpha - (G - B) \cos^2 \gamma$, on voit que $(A - B)$ étant négatif et $(G - B)$ positif, la valeur de H peut se trouver au-dessus ou au-dessous de B , selon que $(G - B) \cos^2 \gamma$ sera plus grand ou plus petit que $(B - A) \cos^2 \alpha$. Si l'on suppose que H prenne la valeur B , il vient $0 = (A - B) \cos^2 \alpha - (G - B) \cos^2 \gamma$, équation qui donne simplement, entre les angles α et γ , la condition $\tan^2 \alpha = \frac{B - G}{A - B} \tan^2 \gamma$ ou bien, entre les coordonnées z et x d'un point quelconque pris sur la droite h , l'équation $X^2 - V(C - B) = 0$. Il y a donc une infinité d'axes du moment d'inertie B ; et l'on voit que tous ces axes forment deux plans conduits par l'axe principal des y ou du moment B , et faisant à droite et à gauche sur le plan xz deux angles égaux dont la tangente est $\pm \sqrt{\frac{B - G}{A - B}}$. Entre tous ces axes de même moment d'inertie B , il y en a un distingué de tous les autres; c'est celui qui est à la fois dans l'un et l'autre des deux plans dont je viens de parler, ou qui est à la fois perpendiculaire aux deux premiers axes principaux : c'est le troisième axe principal du corps. Cet axe, comme on voit, ne jouit pas, comme les deux autres, d'une propriété de maximum ou de minimum. Il n'est pas un axe unique quant à la grandeur du moment d'inertie qui s'y rapporte, P. 8

The text on this page is estimated to be only 17.49% accurate

58 THÉORIE NOUVELLE mais il est unique quant à sa position particulière entre tous ceux du troisième moment d'inertie B. Équation la plus simple de la surface conique formée par la suite des axes autour desquels le moment d'inertie du corps a la même valeur.

DE LA NOTATION DES CORPS. 59 principal, et inclinés sur l'axe x du moment minimum d'un angle dont la tangente est $K/q^{1/2}$ ce qui s'accorde parfaitement avec ce qu'on a dit plus haut. Ces deux plans, dans les quatre coins qu'ils forment autour de l'axe du moment d'inertie B , comprennent toute la surface du corps, ou plus généralement comprennent tout l'espace. Dans les deux coins opposés au sommet où passe l'axe du moment minimum A , tous les axes menés à la surface ont des moments H inférieurs à B et supérieurs à A , qui est le plus petit de tous. Dans les deux autres coins, où passe l'axe du moment maximum C , tous les axes menés du centre à la surface ont des moments H supérieurs à B et inférieurs à C , qui est le plus grand de tous. Enfin, dans les plans mêmes qui forment les quatre coins, tous les axes ont des moments d'inertie égaux à B . Si l'on avait, comme cela arrive dans les corps de révolution et dans une infinité d'autres, deux des trois moments d'inertie A, B, C , égaux entre eux, les surfaces coniques dont j'ai parlé seraient celles de cônes droits à base circulaire autour du troisième axe principal, et les deux autres plans se confondraient en un seul perpendiculaire au même axe : de sorte que tous les axes possibles menés dans ce plan seraient des axes principaux d'égal moment d'inertie. Si l'on avait les trois moments d'inertie A, B, C égaux entre eux, comme dans la sphère et dans une infinité d'autres corps, tous les axes possibles seraient des axes principaux de même moment. 76. De l'expression générale $H = A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma$, il résulte encore des conséquences faciles et très-importantes pour simplifier la considération du mouvement d'un corps de figure quelconque. On voit, en effet, par cette expression que si deux corps quelconques avaient les mêmes moments d'inertie A, B, C par rapport à leurs axes principaux x, y, z , ces deux corps auraient aussi le même moment d'inertie H par rapport à toute autre droite h faisant les mêmes angles α, β, γ avec les axes principaux. Donc quand on ne considère que les moments d'inertie, on peut toujours faire abstraction..

60 THÉORIE NOUVELLE tion de la figure du corps, on plutôt on peut toujours la supposer réduite à celle de quelque corps plus régulier tel qu'un ellipsoïde, ou même un simple parallépipède rectangle, qui aurait les mêmes moments principaux d'inertie. Supposons, par exemple, deux corps libres qui auraient le même centre de gravité, les mêmes axes principaux et les mêmes moments d'inertie par rapport à tous les axes possibles menés par le centre. Et si deux couples de même grandeur et de même sens les frappaient à la fois, leur rotation, qui ne dépend à chaque instant que des moments d'inertie relatifs aux différents axes qui passent par le centre de gravité, serait exactement la même dans tout le cours du mouvement : de sorte que ces deux corps suivraient les mêmes rotations sans se nuire ou se favoriser en aucune manière. Ainsi le mouvement d'un corps irrégulier projeté d'une manière quelconque dans l'espace est le même que celui d'un simple rhomboïde rectangle, ou de l'assemblage de trois verges rectilignes qui se croisent à angles droits dans leurs milieux, ou de tout autre corps régulier qui aurait les mêmes moments principaux d'inertie. Par cette considération, on éclaircit le problème de la rotation des corps, en substituant une figure plus simple et plus facile à concevoir, comme dans le mouvement de translation on réduit le corps à un seul point qui est le centre de gravité. Mais il y a encore une expression plus claire de tout ce qui regarde les moments d'inertie d'un corps, comme nous le verrons dans la seconde partie de cet ouvrage. En attendant, il faut montrer comment on peut trouver le moment d'inertie d'un corps autour d'un axe quelconque, quand on connaît les axes, et les moments principaux d'inertie A, B, C, qui se rapportent au centre de gravité de ce corps. 77. Nous avons déjà vu que, pour un axe quelconque h qui passerait par le centre de gravité, le moment d'inertie H serait exprimé par la formule $H = A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma$, α, β, γ étant les inclinaisons de cet axe sur les trois axes principaux du corps. Or il est facile de trouver le moment d'inertie d'un corps autour d'un axe quelconque h'j par le moment d'inertie H autour d'un axe parallèle mené par le centre de gravité de ce corps.

DE LA ROTATION DES CORPS. 6i Et» en effet, soit r' la distance d'une molécule dm du corps à l'axe h que l'on considère, r sa distance à l'axe parallèle mené par le centre, et D la distance mutuelle de ces deux axes ; on aura, dans le triangle formé par les trois lignes r , r' et D , $r'^2 = r^2 + D^2 - 2rD \cos f$, (f étant l'inclinaison de r à D). On aura donc $\int r'^2 dm = \int r^2 dm + D^2 \int dm - 2D \int r \cos f dm$ ou bien $H' = H + D^2 M - 2D \int r \cos f dm$. Mais $\int r \cos f dm$ marque la distance de la molécule dm au plan qui serait mené par le centre de gravité perpendiculairement à la ligne D ; on a donc, puisque ce plan passe par le centre, $\int r \cos f dm = 0$, et partant, c'est-à-dire que le moment d'inertie d'un corps autour d'un axe mené comme on voudra dans l'espace se trouve en prenant le moment d'inertie autour d'un axe parallèle mené par le centre de gravité et y ajoutant le produit de la masse par le carré de la distance de ce centre à l'axe extérieur que l'on considère. 78. On voit par là que les moments d'inertie d'un corps sont égaux pour tous les axes parallèles h' qui sont à égale distance D du centre c de gravité de ce corps, ou qui forment la surface d'un cylindre droit et circulaire autour de ce centre. Si l'on conçoit ce cylindre décrit, et qu'on le fasse tourner autour du même centre, dans une infinité de positions différentes, les moments d'inertie du corps relatifs aux génératrices h' auront bien la même valeur sur chaque cylindre, mais ils varieront de grandeur d'un cylindre à l'autre. Mais si l'on fait tourner le cylindre dont il s'agit de manière que son axe décrive la surface conique qui répond à l'équation $A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma = H = \text{constante}$, les moments d'inertie du corps seront égaux par rapport à toutes les génératrices de cette infinité de cylindres. Mais le système de toutes ces droites n'épuise pas encore l'infinité

62 TBÊOtJE NOUVELLE t des axes autour desquels le corps peut avoir un même moment d'inertie donné. Car si ïon fait Varier à la fois H et D de manière que la somme $H + mD^2$ reste constante ^ on Toit qu'on aura encore une in* finité de systèmes d'axes tels que les précédents, et autour desquels le corps aura le même moment d'inertie. Quand on ne considère que des axes qui se croisent en un même point quelconque $O^{\wedge}$ tous tes axes d'un moment d'inertie donné forment une surface conique du second ordre décrite autour de ce point. Quand on ne considère que des axes parallèles entre eux , tons les axes d'un moment d'inertie donné forment l^ surface d'un cylindre droit à base circulaire autour du centre de gravité du corps. Mais quand on regarde indistinctement tous les axes possibles de l'espace, il y en a une infinité d'infinités qui répondent au même moment d'inertie donné. Toutes ces droites, néanmoins, ne remplissent pas tout l'espace; car H' étant donné, et H étant nécessairement compris entre le plus petit A et le plus grand C des trois moments principaux A, B, C, il est clair que la ligne D ne peut varier qu'entre certaines limites, qui sont $\sqrt{m}$ y $\sqrt{m}$ Ainsi, en concevant autour du centre de gravité du corps deux sphères décrites des rayons D et D', aucun des axes qui peuvent répondre au même moment d'inertie H' ne peut entrer dans la sphère au rayon D , ni sortir de la sphère au rayon D'. 79. De cette relation simple $H' = H - mD^2$ on tire encore cette conséquence : c'est que si , d'un point O pris sur Tun quelconque ga des trois axes principaux ga^ gby gc relatifs au centre de gravité g du corps, on mène des parallèles aux deux autres, ces deux droites Oft', Oc' seront avec la première Og les trois axes principaux du même corps par rapport au point O. Car Og étant axe principal relatif au centre g, l'est aussi au point O de sa direction; et, par conséquent, les deux autres axes sont dans le plan mené en O perpendiculairement à Og. Or, qu^on fasse mouvoir, autour de g et O, deux axes gh^Ohf parallèles entre eux et perpendiculaires à gO; la

The text on this page is estimated to be only 23.96% accurate

DE LÀ BOTATIiOir DE5 CORPS. 63 distance D de ces deux axes étam alors constante , l^s variations des moments d'ioeriê H et H' sont les mêmes. Ainsi H' et H arrivent ensemble à leur maximum ou minimum. Mais, par hypothèse, H atteint cette valeur singulière quand gÀ se confond avec gc ou g 6; doiiic H' y arrive quand Oh' est parallèle à l'un ou à l'autre de ces axes. Doue, etc C'est d'ailiers ce qu'oo pourrait voir d'une manière directe en rapportant les molécules du corps à trois axes Oafy Oj^, 0%' parallèles aux premiers %Xy g/, gx : car, en nommant X, fi., v les trois coordonnées du poittt O ^ on trouve que les trois intégrales /jC^ dm , fafz' dm jy t' dm se réckâisent aux trois produits m . Xft , tu . Xv , m . fx v, et que , par conséc|uent ^ pour les reiindre toutes trois nulles , il suffit d^aler à zéro deux quelconques des trois coordonnées X , fx , v du point O , c'est-à-dire de prendre ce point sur Tun quelconque des axes principaux g^, g6, gc. On voit même qu'eu &isant nulle une seule de ces trois coordonnées , on rend nulles deux des trois intégrales dont il s^agit; d'où l'od conclut que tout axe parallèle à l'un des trois axes principaux relatifs a«i centre g, est lui-même un axe principal relatif au point O où il perce le plan des deux autres. 80. De la même relation H'=H-hllîD^ on tire encore la démonstration la plus simple d'un théorème assez curieux [^] qui peut être utile dans quelques applications. fin donnant, pour abréger, le simple nom d^axes égaux aux différents axes par rapport auxquels le corps a un égal moment d'inertie, on demande si , dans un corps quelconque , il pourrait y avoir quelque point ou centre O autour duquel tous les axes possibles seraient des axes égaux, comme il arrive dans la sphère, les corps réguliers, etc., relativement aux axes qui partent de leur centre. Soient donc O un tel point s'il est possible, g le centre de gravité du corps : faisons la ligne g O = D , et menons au point O le plan MN perpendiculaire à cette ligne. Il est clair que tous les axes menés du [*] Ce théorème est dû à M. Binet qui l'a donné, en i8i i, dans un Mémoire présenté à la première classe de llnstitut.

64 THÉORIE NOTJVELLE point O dans ce plan sont des axes
^aux , puisque cela même est vrai , par hypothèse, de tous les axes possibles
émanés de ce point. Cela posé, tous les axes menés du centre de gravité g,
dans un plan parailèle à MN, seront aussi des axes égaux entre eux, comme
étant à la même distance D des premiers^ situés dans le plan MN. Donc , en
premier lieu , le point cherché O ne peut exister à moins que le corps n'ait
deux de ses axes principaux, relatifs à son centre de gravité g, égaux entre
eux; et si ce point O existe, il est situé sur ia perpendiculaire gO au plan de
ces deux axes égaux, et, par conséquent, sur la direction du troisième axe
principal du corps. Pour le déterminer, soit A la commune valeur du
moment d'inertie autour des deux premiers , et C le moment d'inertie autour
du troisième gO : on aura , pour le moment d'inertie H' autour des axes
situés dans le plan MN , $H' = A - mD^2$. Mais H' devant être le même pour
tous les axes qui partent du point O dans tous les sens, doit être le même
pour Taxe Og : or autour de cet axe le moment d'inertie du corps est C; il
faut donc qu'on ait $C = A - mD^2$, et par conséquent, $C = A - mD^2$: d'où l'on tire,
pour la distance D du point O au centre g, $D = \pm \sqrt{\frac{A-C}{m}}$: m double valeur qui
n'est réelle que dans le cas de $C > A$. Ainsi il ne peut y avoir dans un corps
de centre O autour duquel tous les axes d'inertie soient égaux, à moins que
le corps n'ait deux de ses axes naturels égaux entre eux , et que le moment
d'inertie relatif au troisième ne surpasse celui qui se rapporte aux deux
autres. Mais si ces conditions ont lieu , comme , par exemple , dans un
sphéroïde homogène aplati vers les pôles, ce point singulier O existe
réellement, et il y en a même deux de cette nature : ils sont situés sur l'axe
naturel du plus grand moment d'inertie, l'un à gauche, l'autre à droite du
centre de gravité, et à la même distance $D = \sqrt{\frac{A-C}{m}}$ de ce centre.

DE LA ROTATION DES CORPS. 65 SECONDE PARTIE.

CHAPITRE PREMIER. SOLUTION DU PROBLÈME DE LA ROTATION DES CORPS LIBRES. I. Définitions analytiques. 1. Soient O le point qui

est le centre de la rotation du corps; Ox, Oy, Oz les directions rectangulaires des trois axes principaux; et A, B, C les trois moments d'inertie de ce corps autour des mêmes axes. On vient de voir que, si l'on considère un autre axe quelconque OI , on aura, en désignant par I la valeur du moment d'inertie qui s'y rapporte, l'expression $I = A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma$, où α, β, γ sont les inclinaisons respectives de l'axe OI aux trois axes principaux Ox, Oy, Oz . 2. Ce qu'on appelle le moment d'inertie d'un corps autour d'un axe quelconque, n'étant autre chose que la somme des produits de toutes les molécules dm de ce corps par les carrés de leurs distances r à cet axe, on peut toujours en représenter la valeur $\sum r^2 dm$ par le simple produit $m \cdot K^2$; en désignant par m la masse entière du corps, ou le nombre de toutes ses molécules supposées égales entre elles, et par K^2 , le carré moyen entre tous les carrés des distances de ces molécules à l'axe dont il s'agit. Le moment d'inertie du corps étant ainsi représenté par mK^2 , c'est-à-dire comme le serait celui d'un point chargé de toute la masse et placé à une certaine distance K de l'axe que l'on considère, il serait très-naturel de nommer cette ligne K le bras de levier de l'inertie, ou simplement le bras de l'inertie, autour de cet axe : et c'est ce que nous ferons désormais pour simplifier le discours, où l'on aura soin

The text on this page is estimated to be only 18.28% accurate

66 THÉORIE NOUVELLE de se rappeler que cette ligne, nommée le bras de l'inertie., n'est autre chose que le côté du carré moyen entre les carrés des distances de toutes les molécules égales du corps à l'axe que l'on considère. Ainsi, au lieu des lettres A, B, C qu'on emploie d'ordinaire pour désigner les trois moments d'inertie autour des axes principaux, je prendrai les expressions

DE LA ROTATION DES CORPS. 67 axes. Or, ce qui est très remarquable, c'est que la même propriété s'étend à tous les diamètres, je veux dire que, dans cet ellipsoïde, un diamètre quelconque est réciproque au bras de l'inertie du corps autour de ce diamètre; et vice versa. Ainsi, de même que le produit $m a^2$ exprime le moment d'inertie du corps autour de l'axe principal dont la demi-longueur est a , le produit $m d^2$ exprime le moment d'inertie autour d'un diamètre quelconque dont la demi-longueur est d . Soient, en effet, x, y, z les trois coordonnées de l'un des bouts de ce diamètre; les fractions $\frac{x}{d}, \frac{y}{d}, \frac{z}{d}$ seront les cosinus de ses inclinaisons aux trois axes principaux. Or, en désignant par $m d^2$ le moment d'inertie du corps autour de ce diamètre, on a, par la formule citée (n° 1), $\frac{x^2}{d^2} + \frac{y^2}{d^2} + \frac{z^2}{d^2} = 1$, ou $x^2 + y^2 + z^2 = d^2$ à cause $\frac{x^2}{d^2} + \frac{y^2}{d^2} + \frac{z^2}{d^2} = 1$ ou $(\frac{x}{d})^2 + (\frac{y}{d})^2 + (\frac{z}{d})^2 = 1$, ce qu'il fallait démontrer. 4. L'ellipsoïde que je viens de définir jouit donc de cette propriété remarquable, qu'autour d'un quelconque de ses diamètres, le moment d'inertie du corps est réciproque au carré de ce diamètre : et c'est cet ellipsoïde, dont la considération va jeter le plus grand jour sur la théorie de la rotation des corps, que je nommerai désormais V ellipsoïde central. Quelles que soient la figure et la constitution du corps dont on étudie le mouvement, on va donc ici en faire entièrement « abstraction », pour ne plus voir que celle de cet ellipsoïde central qu'on vient de lui inscrire, et qui a ce triple avantage de mettre à la fois sous nos yeux le centre et les axes principaux du corps ; de nous donner tous les moments d'inertie qu'on pourrait avoir à considérer, en montrant chacun d'eux, autour d'un diamètre quelconque, comme exprimé par une même fonction simple de la longueur de ce diamètre; et enfin

The text on this page is estimated to be only 18.76% accurate

68 THÉORIE NOUVELLE de nous offrir, comme on le verra plus loin. l'expression la plus claire et la plus précise du théorème relatif à la position que prend l'axe instantané par rapport au plan du couple d'impulsion qui lui donne naissance. La grandeur absolue de cet ellipsoïde n'est pas déterminée : car si les bras de l'inertie a, b, c sont toujours donnés de longueur pour

DE LA ROTATION DES CORPS. 69 mêmes axes. Or, chacun de ces couples étant perpendiculaire sur un axe principal on a démontré que ce couple, s'il agissait seul, ferait tourner le corps sur cet axe lui-même, et avec une vitesse angulaire mesurée par la grandeur de ce couple divisée par le moment d'inertie du corps autour de cet axe principal. Les trois couples L, M, N tendent donc à faire tourner autour des trois axes principaux Oo, Oj, Oz avec des vitesses angulaires respectives p, q, r proportionnelles aux grandeurs L, M, N de ces couples et réciproques aux trois moments principaux d'inertie m_{xx}, m_{yy}, m_{zz} ; de sorte qu'on a $p = \frac{L}{m_{xx}}, q = \frac{M}{m_{yy}}, r = \frac{N}{m_{zz}}$. Or ces trois rotations p, q, r se composent en une seule représentée, pour son axe et pour sa grandeur, par la diagonale du rhomboïde rectangle construit sur les trois lignes qui représenteraient à la fois les axes et les grandeurs de ces trois rotations p, q, r . 6. Donc, au premier instant, le couple d'impulsion G tend à faire tourner le corps avec une vitesse angulaire d exprimée par et autour d'un axe dont les inclinaisons respectives aux trois axes principaux du corps ont pour cosinus p, q, r . Ainsi, en mettant dans ces expressions, au lieu de p, q, r leurs valeurs tirées des trois équations précédentes, on aura par les données L, M, N , l'axe et la grandeur de la rotation d à laquelle le couple G donne naissance au premier instant, comme on l'a vu (1^{re} partie, n° 47). 7. Réciproquement, si Ton considère un corps qui tourne actuellement autour d'un axe avec une vitesse donnée Q , et qu'on cherche l'axe et la grandeur du couple inconnu G qui, appliqué au corps en repos, serait capable d'y produire la rotation actuelle qui l'anime, on décomposera cette rotation Q en trois autres p, q, r autour des trois

70 THÉORIE NOUVELLE axes principaux du corps; et les mêmes équations précédentes, mais où Ton regarde maintenant $p^{\wedge}q^{\wedge}r$ comme données, feront connaître les valeurs L, M, N des trois couples qui tendraient à produire ces trois rotations respectives: d'où il viendra, pour la grandeur du couple G qui produit la rotation donnée 9, $G = v'L' - h M > -h N\%$ et, pour les trois cosinus de l'inclinaison de son axe aux trois axes du corps, $L M N g' g' g''$ 8. Les rotations $p, \wp, r$ autour des trois axes principaux du corps, étant en raison directe des couples L, M, N qui les produisent, et en raison inverse des moments d'inertie du corps autour des mêmes axes, et ces moments d'inertie étant en général inégaux, on voit que $p^{\wedge} (j, r$ ne sont pas proportionnelles à L, M, N , et que le rhomboïde rectangle où se composent les rotations n'est pas semblable au rhomboïde où se composent les couples : de sorte que les deux diagonales ont des directions différentes; et qu'ainsi l'axe instantané de la rotation n'est pas, en général, l'axe du couple qui la produit. Ces deux axes ne se confondent que dans le cas où l'axe du couple appliqué se trouve être un des axes principaux du corps. Dans tout autre cas, l'axe instantané est incliné à l'axe du couple, et il résulte des expressions précédentes qu'en désignant par i l'inclinaison mutuelle de ces deux axes, on a, par la formule connue, Mais voici, par la considération de notre ellipsoïde central, une expression bien plus claire de ce qui regarde la position relative du couple et de l'axe instantané dans l'intérieur du corps. Expression nouvelle des théorèmes qui précèdent. 9. Considérons le point I où l'axe instantané va rencontrer la surface de l'ellipsoïde central, lequel point marque sur cette surface ce que nous nommerons désormais le pôle instantané de la rotation.

The text on this page is estimated to be only 27.83% accurate

DE LA ROTATION DES ODRPS. 71 Si Ton désigne par x'^{jr} , $\%'$ les coordonnées de ce pôle I, on aura pour le plan qui touche en I Tellipsoïde, ou plutôt, pour le plan diamétral parallèle k ce plan tangent, Téquation — $-+- \text{ } ^{-+-} \text{ } =$

The text on this page is estimated to be only 1.74% accurate

;v TBÉOEIE JiOir^TLU. »-*-^*xit qu* r'qaaK« an pUo de ce
cwijiV «s* Lx — M^ — 5ï = o: »^'|"JT- f»*r t/>ri*H^i^Til, ti Ton lott »a
itra de L. M. 5 ieun Taittir» A/», A^, Cr. ceo^ -éq'jtioo den«ztt A/>x — R'jj
— Crî = o.

DE LA ROTATION DES œRPS. 73 paraît un des théorèmes les plus simples et les plus élégants qu'on puisse offrir en dynamique sur la théorie si difficile et si obscure de la rotation des corps. On voit toutes les conséquences claires et faciles qui découlent de cette lumineuse proposition : mais je ne veux point ici m'y arrêter; il faut que j'avance, et que, par le seul raisonnement, j'arrive de suite à la solution complète du problème qu'on se propose : car il ne s'agit pas seulement de déterminer la rotation du corps au premier instant, mais il faut voir comment cette rotation change d'un instant à l'autre, et peindre, pour ainsi dire, le mouvement du corps dans toute la suite de son cours. De la rotation du corps dans toute la suite du temps. 12. Et d'abord il est bien clair que cet axe OI , qu'on appelle instantané n'est, en effet, immobile qu'un instant: car de la rotation même Q autour de cet axe, il naît, pour toutes les molécules égales du corps, des forces centrifuges toutes proportionnelles aux rayons des cercles décrits, et dirigées suivant ces rayons. Or l'axe OI n'étant point, par hypothèse, un des axes principaux du corps, ces forces centrifuges ne se font point équilibre entre elles : étant transportées parallèlement à elles-mêmes au centre O , elles donnent bien une résultante qui est nulle d'elle-même si ce point est le centre de gravité du corps, ou qui est détruite si ce centre O est un point fixe ; mais leur couple résultant g n'est pas nul. Il provient donc de la rotation même du corps un couple accélérateur g dont le effort gdt pour un instant dt imprime à ce corps une rotation infiniment petite ydt laquelle se compose avec la rotation actuelle ϕ , et fait varier l'axe et la grandeur de cette rotation. 13. Pour étudier le mouvement du corps, il faut donc commencer par chercher ce couple accélérateur qui naît des forces centrifuges dues à la rotation Q autour de l'axe instantané OI . Or on a démontré que l'axe de ce couple g est perpendiculaire à la fois à l'axe instantané et à l'axe du couple ϕ qui produit la rotation actuelle ϕ ; et que la grandeur de ce couple g est exprimée par $G \phi \sin i$, / étant l'inclinaison. 10

74 THÉORIE NOUVELLE naison mutuelle des deux axes 6 et 0 ;
théorème qu'on peut énoncer de la manière suivante : Si Von prend deux
lignes dont l'une représente Vaxe et la grandeur du couple d'impulsion[^] et
Vautra Vaxe et la grandeur de la rotation instantanée[^] le couple accélérateur
dû aux forces centrifuges est toujours représenté, et pour son plan, et pour
sa quantité, par la sur/ace du parallélogramme construit sur les deux lignes
que Von considère. 14. De ce simple théorème on pourrait conclure le
principe de la conservation du couple d'impulsion 6 dans toute la suite du
mouvement du corps; et réciproquement , de ce principe on pourrait tirer la
démonstration du théorème, comme on Ta vu (i"* partie, chap. II, art. V).
Nous pourrions encore montrer en passant que ce théorème sur les forces
centrifuges, si Ton veut le traduire en analyse, donne surle-champ les trois
équations si élégantes qu'Euler a trouvées le premier pour la rotation des
corps, mais qu'on ne démontre d'ordinaire que par de longs circuits de
calculs et de trigonométrie. Mais nous reviendrons plus tard sur ces
expressions analytiques : il faut ici reprendre et suivre le fil de notre
raisonnement. 15. On vient de voir que le couple g, qui naît des forces
centrifuges, est toujours situé dans le plan GOI de l'axe du couple
d'impulsion G et de Taxe instantané de la rotation B. Donc, par le théorème
démontré plus haut (n[^],9), l'axe sur lequel ce couple g tend à faire tourner le
corps n'est autre chose que le diamètre O7 conjugué au plan GOI dans
Vellipsoïde central. Mais le diamètre conjugué à ce plan doit Tétre à toutes
les droites menées par son pied O dans ce plan , et , par conséquent , il est
conjugué à l'axe 01 : et de cela seul il résulte que ce diamètre O7 est situé
dans le plan même du couple d'impulsion G ; car, ce plan étant conjugué à
Taxe instantané 01 (n® 10) , il est le lieu de toutes les droites qui peuvent
être conjuguées àOL Donc Vaxe O y de la rotation 7 ebie au couple
accélérateur g qui pros[^]ient des forces centrifuges, est toujours situé dans le
plan même du couple d'impulsion G dont le corps est actuellement animé.

DE LA ROTATION DES CORPS. - 76 16. Donc, si Ton prend deux lignes, Tune θ qui représente la rotation actuelle θ l'autre $Oy' = y$ dt qui représente la rotation que le couple g fait naître en un instant dt et que sur ces deux lignes on achève le parallélogramme, afin d'avoir dans la diagonale θ' la ligne qui représente l'axe et la grandeur de la rotation au bout d'un instant dt , on voit que l'extrémité de cette diagonale θ' est, au-dessus du plan du couple G , à la même hauteur que l'extrémité du côté y ; puisque le côté θ étant dans le plan même de ce couple, le côté opposé du parallélogramme est parallèle à ce plan. Mais la hauteur de l'extrémité de la ligne θ' , au-dessus du plan du couple, est évidemment exprimée par $\theta \cos i$: donc on a cette équation remarquable $\theta \cos i = \text{constante}$ c'est-à-dire que la vitesse angulaire θ estimée autour de l'axe fixe du couple d'impulsion reste la même dans tout le cours du mouvement. 17. De cette même équation résulte encore ce qu'on appelle le principe des forces vives. Car si $\cos i$ est constante, comme G est aussi constant, on a $G \theta \cos i = \text{constante}$. Or le facteur $G \cos i$, qui n'est autre chose que le couple G estimé autour de OI , est évidemment égal à $\frac{d^2\theta}{dt^2}$, en désignant par I le moment d'inertie du corps autour de l'axe instantané OI . On a donc $G \theta \cos i = \frac{d^2\theta}{dt^2} I = \text{constante}$. Mais I désignant, par hypothèse, la somme des produits de toutes les molécules du corps par les carrés de leurs distances à l'axe de rotation, il est clair que $\frac{d^2\theta}{dt^2} I$ exprime la somme des produits de ces molécules par les carrés de leurs vitesses; et comme chacun de ces produits se nomme la force vive de la molécule que Ton considère, on peut dire que la somme des forces vives de toutes les molécules du corps demeure constante dans tout le cours de la rotation : ce qui est ici, non pas un nouveau principe, mais un simple corollaire du principe de la Conservation des couples ou des aires, quand ce principe est complètement exprimé; c'est-à-dire, quand on exprime que G est invariable, non-seulement de grandeur mais aussi de position dans l'espace absolu. 10..

76 THÉORIE NOUVELLE Je fais en passant cette remarque parce qu'elle intéresse la doctrine» et que, dans la théorie du mouvement d'un corps ou système invariable défigure, ce serait une faute de dire , comme on le fait quelquefois, que telle ou telle vérité dynamique se démontre par la combinaison du principe des aires avec le principe des forces vives: car, ce second principe étant ici essentiellement renfermé dans le premier, cette locution serait une preuve qu'on n'entend bien ni l'un ni l'autre.

DE LA ROTATION DES CORPS. 77 du couple reste toujours parallèle à lui-même : donc ce plan, qui touche sans cesse l'ellipsoïde central au pôle instantané de rotation, est toujours un seul et même plan fixe dans l'espace absolu. Donc le mouvement du corps, ou, ce qui est la même chose, le mouvement de l'ellipsoïde central est de telle nature, que cet ellipsoïde reste en contact avec un même plan fixe dans l'espace absolu ; qu'il tourne à chaque instant sur le rayon vecteur qui va du centre au point de contact , et qu'il tourne avec une vitesse angulaire proportionnelle à la longueur même de ce rayon. 21. Cet ellipsoïde ne fait donc que rouler, sans glisser, sur le plan fixe que l'on considère : car comme tout son mouvement consiste à tourner pendant un instant sur la ligne menée du centre au point de contact, l'ellipsoïde amène au bout de cet instant un nouveau point de sa surface en contact avec ce plan; et ce nouveau point, qui devient le pôle de la rotation pour l'instant suivant , reste à son tour immobile pendant cet instant, et ainsi de suite à l'infini; d'où il est manifeste qu'aucun de ces points par lesquels l'ellipsoïde vient se mettre en contact avec le plan fixe, ne peut jamais glisser sur ce même plan. 22. Telle est donc enfin l'idée claire et nouvelle qu'on peut se former du mouvement si compliqué et si obscur d'un corps de figure quelconque qui tourne librement , soit autour de son centre de gravité, soit autour d'un point fixe quelconque, en vertu d'un couple dont il a reçu primitivement l'impulsion dans tel plan donné qu'on voudra : Considérez le centre de gravité du corps, ou, si le corps n'est pas libre, le point fixe qui fait le centre de sa rotation, jetez autour de ce point, et sur les directions des trois axes principaux d'inertie qui s'y rapportent, imaginez un ellipsoïde construit avec trois axes de longueurs réciproques aux bras de l'inertie du corps autour des mêmes axes; et faites maintenant abstraction de la figure du corps pour n'y plus voir que celle de cet ellipsoïde que J'ai nommé l'ellipsoïde central. Si vous supposez que cet ellipsoïde, dont le centre est retenu immobile au même point de l'espace, roule sans glisser sur un plan fixe avec

78 THÉORIE NOUVELLE

kifuel on l'a mis en eantaci, vous autiez la représeniaion exacte du mouifemeni géoméirhpie que suU le corps en venu du couple qui l'a frappé dans le plan fixe que l'on considère : et si vous ajoutez que la vitesse angulaire ai^ec laquelle il tourne à chaque instant sur le rajron mené du centre au point de contact, est proportionnelle à la longueur même de ce rajron, vous aurez à la fois le mous^ement géométrique et dynamique de ce corps; c'est-à-dire que vous verrez av^ec clarté^ nonseulement la suite continue des lieux que le corps doit venir occuper ^ nuiis encore la propoition des temps qu'il met à les parcourir; ce qui est l'idée complète du mouvement du corps considéré dans le cours infini de sa rotation. Réflexion générale. 25. Nous voilà donc conduits par le seul raisonnement à une idée claire que les géomètres n'ont pu tirer des formules de lanalyse. C'est un nouvel exemple qui montre l'avantage de cette méthode simple et naturelle de considérer les choses en elles-mêmes, et sans les perdre de vue dans le cours du raisonnement. Car, si l'on se contente, comme on le fait d'ordinaire, de traduire les problèmes en équations, et qu'on n'eu rapporte ensuite aux transformations du calcul pour mettre au jour la solution qu'on a en vue, on trouvera lé plus souvent que cette solution est encore plus cachée dans ces symboles analytiques, qu'elle ne Tétait dans la nature même de la question proposée. Ce n'est donc point dans le calcul que réside cet art qui nous fait découvrir; mais dans cette considération attentive des choses, où l'esprit cherche avant tout à s'en faire une idée, en essayant, par l'analyse proprement dite, de les décomposer en d'autres plus simples, afin de les revoir ensuite comme si elles étaient formées par la réunion (le ces choses simples dont il a une pleine connaissance. Ce n'est pas que les choses soient composées de cette manière, mais c'est notre seule manière de les voir, de nous en faire une idée, et partant de les connaître. Ainsi notre vraie méthode n'est que cet heureux mélange de l'analyse et de la synthèse, où le calcul n'est employé que comme un instrument. Instrument précieux et nécessaire sans doute, parce qu'il assure et facilite notre marche; mais qui n'a par lui-même

DE LA ROTATION DES CORPS. 79 aucune vertu propre; qui ne dirige point Tesprit, mais que TespHt doit diriger comme tout autre instrument. Ce qui a pu faire illusion à quelques esprits sur cette espèce de force qu'ils supposent aux formules de l'analyse, c'est qu'on en retire y avec assez de facilité, des vérités déjà connues «t qu'on y a , pour ainsi dire, soi-même introduites, et il semble alors que l'analyse nous donne ce qu'elle ne fait que nous rendre dans un autre langage. Quand un théorème est connu , on n'a qu'à l'exprimer par. des équations; si le théorème est vrai , chacune d'elles ne peut manquer d'être exacte, aussi bien que les transformées qu'on en peut déduire : et si l'on arrive ainsi à quelque formule évidente, ou bien établie d'ailleurs, oh n'a qu'à prendre cette expression comme. un point de départ, à revenir sur ses pas , et le calcul seul paraît avoir conduit comme de lui-même au théorème dont il s'agit. Mais c'est en cela que le lecteur est trompé. Ainsi , pour prendre notre exemple dans la question même qui fait l'objet de ce Mémoire ^ il est bien clair qu'aujourd'hui rien ne serait plis aisé que de retrouver nos théorèmes dans les expressions analytiques d'Euler ou de Lagrange, et même de les en dégager avec un air de facilité qui ferait croire que ces formules devaient les produire spontanément. Cependant, comme ces idées ont échappé jusqu'ici à tant de géomètres qui ont transformé ces formules de tant de manières, il faut convenir que cette analyse ne les donnait point, puisque, pour les y voir, il aura fallu attendre qu'un autre y parvint par une voie toute différente. Nous aurions bien d'autres réflexions à faire, et de plus grands exemples à produire, si nous voulions montrer, d'une part, tout ce que l'esprit doit de lumière à cette méthode naturelle, telle que je l'ai définie plus haut et qui constitue notre véritable analyse, et de l'autre, le peu de vérités nouvelles qu'on a su tirer de ces formules analytiques où l'on croit enfermer une question, et quelquefois même une science tout entière. Sans doute, la science y est contenue, comme elle le serait dans tout autre principe énoncé en termes généraux ; mais la difficulté reste de l'en faire sortir : et cette difficulté n'en devient-elle pas plus grande? Et, par exemple, ne faut-il pas bien connaître à la fois et la mécanique et les artifices de l'analyse , pour tirer de la seule formule générale des vitesses virtuelles^ je ne dis pas

80 THÉORIE NOUVELLE quelque nouveau théorème (ce dont je ne vois guère d'exemples) , mais seulement les propositions particulières qui nous sont déjà le mieux connues? La traduction n'est-elle pas souvent plus difficile que le texte lui-même, je veux dire que la considération immédiate des choses que Ton veut étudier? L'illustre auteur qui a voulu transformer la mécanique en une question de calcul, a sans doute rempli son objet avec toute la clarté et toute l'élégance qu'on en pouvait attendre. Mais si la véritable analyse brille quelque part dans la Mécanique analytique , j'oserai dire que c'est bien moins dans ces calculs que l'auteur range avec tant d'ordre et de symétrie, que dans ces lumineux rapprochements qu'il indique entre les méthodes, et surtout dans ces admirables préfaces qu'il a placées à la tête des différents livres de son ouvrage, où il examine et discute les principes fondamentaux de la science, et fait l'histoire instructive du mouvement de l'esprit humain dans cette suite délicate d'idées fines et de solutions ingénieuses qui ont peu à peu formé la science de la Mécanique. C'est par là que ce bel ouvrage pourra servir aux progrès ultérieurs de l'esprit, en lui montrant la route qu'il a suivie, et qui est encore la route où il doit continuer de marcher. Car, encore une fois, gardons-nous de croire qu'une science soit faite quand on l'a réduite à des formules analytiques. Bien ne nous dispense d'étudier les choses en elles-mêmes , et de nous bien rendre compte des idées qui font l'objet de nos spéculations. N'oublions point que les résultats de nos calculs ont presque toujours besoin d'être vérifiés, d'un autre côté, par quelque raisonnement simple, ou par l'expérience. Que si le calcul seul peut quelquefois nous offrir une vérité nouvelle, il ne faut pas croire que, sur ce point même, l'esprit n'ait plus rien à faire : mais, au contraire, il faut songer que, cette vérité étant indépendante des méthodes ou des artifices qui ont pu nous y conduire, il existe certainement quelque démonstration simple qui pourrait la porter à l'évidence; ce qui doit être le grand objet et le dernier résultat de la science mathématique. Qu'on me pardonne ces réflexions que je fais , j'ose le dire , dans l'unique intérêt de la science. Je connais le caractère propre et distinctif de l'analyse algébrique, et je pourrais même dire avec précision en quoi cet art a pu perfectionner la logique ordinaire du dis

DE LA ROTATION DES CORPS. 8i cours : je sais tout ce que tes bons esprits doivent au calcul; mais je tâche d'éclairer ceux qui se trompent sur la nature de cet instrument , et en même temps, de prévenir l'abus que d'autres en peuvent faire en profitant de cette illusion même. Car, sitôt qu'un auteur ingénieux a su parvenir à quelque vérité nouvelle, n'est-il pas à craindre que le calculateur le plus stérile ne s'empresse d'aller vite la rechercher dans ses formules, de la découvrir une seconde fois, et à sa manière, qu'il dit être la bonne et la véritable; de telle sorte qu'on ne s'en croie plus redevable qu'à son analyse, et que l'auteur lui-même, quelquefois peu exercé, ou même étranger k ce langage et à ces symboles sous lesquels on lui dérobe ses idées, ose à peine réclamer ce qui lui appartient , et se retire presque confus , comme s'il avait mal inventé ce qu'il a si bien découvert? Singulier artifice, que je n'ai pas besoin de caractériser davantage, mais qu'il est bon de signaler comme un des plus nuisibles aux progrès des sciences, parce qu'il est sans contredit un des plus propres à décourager les inventeurs ! Mais je n'étendrai pas plus loin ces réflexions générales; et si le peu que j'ai dit est assez sensible par les exemples qui précèdent , on le verra se confirmer encore par ceux qui pourront suivre.

CHAPITRE n. DÉVELOPPEMENT DE LA SOLUTION. Dans cette image si claire que nous avons donnée de la rotation des corps, on voit sur-le-champ toutes les circonstances et toutes les variétés que ce mouvement peut offrir, et l'on est conduit , comme par la main, aux opérations et aux calculs qu'il faut faire, si l'on veut en mesurer toutes les différentes affections. 24. Et d'abord , cette suite de points par lesquels l'ellipsoïde central du corps vient se mettre en contact avec le plan fixe du couple, d'impulsion , étant considérée sur la surface de l'ellipsoïde, y marque la route du pôle instantané dans l'intérieur du corps; et ces mêmes points étant considérés sur le plan fixe, y marquent sa route dans l'espace absolu. On peut donc déterminer sur«-le-chaBip ces deux P. II

The text on this page is estimated to be only 24.58% accurate

8a THÉORIE NOUVELLE lignes courbes; et, par conséquent, les considérer amuae les bases de deux surikces coniques de même sommet , dont Tune, mc^ile avec le corps, roulant sur l'autre qui est 6xe dans l'espace absolu, donnerait à œ corps le mouvement précis qui l'anime. De la courbe décrite par le pôle instaniane sur la surface de V ellipsoïde central. 25. Pour trouver cette courbe , qui est à double courbure , et que je désignerai par j, il n'y a donc qu'à chercher la suite des points par lesquels un dlipsoide, aux rayons principaux Uf bj c^ serait touché par un plan qui resterait toujours à une même distance donnée h du centre de cet ellipsoïde : ou, ce qui est la même diose, la suite des points de contact d'un plan qui se mouvrait en toudiant à la fois cet ellipsoïde , et une sphère concentrique au rayon donné k. Or il est dair que cette courbe s est un orbe fermé , à double oonribure , espèce de roue elliplique, dont l'axe ou l'essieu est , ou le rajron majeur a de l'ellipsoïde central » ou le rayon mineur Cj sdm que le rayon A de la sphère est donné plus grand ou plus petit que le rayon moyen h de cet ellipsoïde. 26. Cest, au reste, ce qu'on peut voir par le calcul le plus simple, car l'équation de la surface de l'ellipsoide étant la distance du centre au plan tangent est exprimée par ■■√i Xjy, z désignant les coordonnées du point de contact. En égalant donc cette expression à la distance donnée A , on a cette seconde équation (a; . ^ . _ a* b* c" A» d'où , en éliminant tenir à tour, au moyen de la première, chacune

DE LA ROTATION DES CORPS. 83 des trois coordonnées x^y^z , on tire les équations suivantes : $tft - fti j . ^{-} \cdot a A \gg - \bullet$ qui donnent les projections de la courbe sur les trois plans principaux. Or, $a^h y C$ étant toujours supposés rangés dans cet ordre de grandeur et h étant une ligne toujours intermédiaire entre les deux rayons extrêmes a et c , il est visible que si A est > 6 , la courbe s donne une ellipse sur le plan principal perpendiculaire au rayon majeur a ; et que, si h est $< b$, elle donne une ellipse sur le plan perpendiculaire au rayon mineur c , 27. En général, on voit que cet orbe à double courbure se projette en une ellipse entière sur l'un des deux plans perpendiculaires aux axes extrêmes a et c de l'ellipsoïde central, en un arc d'ellipse sur l'autre plan; et toujours en un arc d'hyperbole sur le plan perpendiculaire à l'axe moyen h . 28. Dans le cas singulier de $A = b$, la courbe devient plane; c'est une ellipse dont le demi-petit axe est le rayon moyen h de l'ellipsoïde, et le demi-grand axe une ligne j_3 dont la valeur est $t/a' - c' - \bullet$. 29. Et enfin, dans les deux cas particuliers de $A = a$ et de $A = c$, la courbe se réduit à un point qui est ou le pôle A ou le pôle C de l'ellipsoïde central. 30. On pourrait remarquer que la courbe s est en quelque sorte double; car, tandis que le pôle instantané I décrit cette courbe j , il est évident que le pôle opposé I' en décrit une autre s' parfaitement 1 !..

84 THÉORIE NOUVELLE [^]gale dans Tautre partie de
 Tellipsoïde; mais il suffit d'en coasidérer une seule. 31* On voit que cette
 courbe à double courbure a, comme une ellipse y quatre sommets
 principaux où elle est divisée en quatre parties ^{^^}ales et symétriques , et il
 est évident que ces sommets sont les quatre points où la courbe traverse les
 deux plans principaux conduits par Taxe qui lui sert comme d'essieu : c'est
 en ces points que le rayon vecteur OI atteint ses valeurs maxima on mimma,
 comme il est Êicile de le voir en cherchant le maximum de l'expression $u = \sqrt{x^2 - 4J - h z^2}$, où les variables x , z sont liées par les équations
 précédentes i) et (2; U. De la courbe décrite par le pôle instantané dans
 l'espace absolu. 32. La courbe s que le pôle instantané 1 de la rotation trace
 à la surface de rellipsoïde central , étant ainsi déterminée , il est faicile de
 trouver la courbe a que le pôle instantané décrit sur le plan fixe. Car, en
 considérant l'orbe fermé s comme la base d'une surface conique dont le
 sommet est au centre G de l'ellipsoïde , il est clair que , pendant le
 mouvement du corps , ce cône tourne sans cesse autour de sa génératrice OI
 en appuyant le contour de sa base sur le plan fixe, et qu'ainsi ce contour / y
 trace en roulant la courbe plane a que le pôle instantané décrit dans l'espace
 absolu. Les arcs infiniment petits da de cette courbe plane sont donc
 parfaitement égaux aux arcs successifs ds de cette roue mobile s qui les
 produit : de sorte que si l'on a l'équation de celle-ci entre la longueur s de
 son arc et son rayon vecteur u il suffit d'y changer 5 en a pour avoir
 l'équation de la courbe a entre son arc a et le même rayon u émané du centre
 O de Tellipsoide. 33. Mais comme cette courbe a est plane , si l'on aime
 mieux la rapporter à des rayons vecteurs s émanés d'un point pris dans le
 plan même de la courbe, on peut choisir, pour ce nouveau centre, le pied P
 de la perpendiculaire abaissée du centre O de l'ellipsoïde sur

DE LA ROTATION DES CORPS. 85 le plan fixe que l'on considère ;. et alors il suffit de changer u en $h^* + f^*$ dans l'équation dont il s'agit. 34. Le rayon vecteur v de la courbe plane a n'étant autre chose que la projection continuelle du rayon u de la roue s dont les éléments ds viennent s'appliquer l'un après l'autre sur le plan pour former les éléments égaux da de la courbe plane a , il est clair que le rayon v va, comme le rayon u , d'un maximum à un minimum et de ce minimum à un maximum suivant, parfaitement égal au premier ; et ainsi de suite à l'infini : et cela par des intervalles ou longueurs d'arcs da parfaitement égaux entre eux, et au quart de la génératrice s . On voit donc que la courbe a décrite par le pôle instantané dans l'espace absolu est une courbe plane régulièrement ondulée autour d'un même centre; c'est-à-dire une courbe formée par une suite d'ondes égales et régulières, dont les sommets sont équidistants, et qui serpente à l'infini entre deux cercles concentriques dont elle va toucher alternativement l'une et l'autre circonférence' 35.. Si l'angle au centre, qui répond à deux sommets consécutifs supérieurs ou inférieurs, de la courbe ondulée a est commensurable avec quatre angles droits, et qu'on désigne par n le plus petit nombre entier de cercles que cet angle ou ce secteur mesure, la courbe a se fermera; et le pôle qui la décrit reprendra exactement sa première route après avoir fait n fois le tour entier de l'espace angulaire. Mais, comme l'intervalle de deux sommets consécutifs de même nom ne répond qu'à une moitié de Torbe mobile s , il est clair qu'il faut doubler ce nombre de révolutions si l'on veut que le pôle instantané se retrouve, non-seulement au même lieu dans l'espace absolu, mais encore au même lieu sur la surface de l'ellipsoïde central. 36. Si l'angle dont il s'agit n'est pas commensurable avec quatre angles droits, la courbe ondulée a ira à l'infini sans pouvoir jamais se fermer; et le pôle instantané, qui reviendra toujours périodiquement au même lieu dans le corps, ne pourra jamais retomber en même temps au même lieu dans l'espace. 37. Telles sont, en général, les deux courbes décrites par le pôle instantané, l'une dans l'intérieur du corps, et l'autre dans l'espace

86 THÉORIE NOUVELLE absolu. Et quoique ces courbes soient de formes si différentes, comme c'est un seul et même point qui décrit à la fois l'une et l'autre, leurs équations prises entre le rayon vecteur émané du centre O, et la longueur de Tare décrit, sont exactement une seule et même équation. Le cône roulant $\wedge$ à la surface duquel la première courbe s sert de base, est simplement un cône droit du secomi degrés mais le cône fixe sur lequel il roule est un cône transcendant dont la surface ondule à l'infini autour de l'axe fixe du couple; c'est aussi une espèce de cône droit et circulaire, mais dont la surface serait, pour ainsi dire, can-nelée suivant le contour régulièrement ondulé de la courbe a qui lui sert de base. m. Des variétés que les deux courbes s et a peuvent offrir dans certains cas particuliers. 38. Ces deux courbes ne dépendent, comme on voit, que de quatre données, savoir : les trois demi-axes ou rayons principaux a, b, c de l'ellipsoïde central, lesquels sont toujours donnés par la nature du coqis; et ensuite la hauteur h du centre au-dessus du plan tangent du couple, laquelle est donnée par la direction du couple d'impulsion. Les variétés que ces deux courbes peuvent offrir, pour un même corps, ne dépendent donc que des valeurs particulières qu'on peut donner à la ligne constante h. Or cette ligne étant la distance du centre de l'ellipsoïde à l'un de ses plans tangents $\wedge$ est nécessairement intermédiaire entre le plus grand et le plus petit rayon de cet ellipsoïde ; de sorte que les trois rayons principaux $a \wedge b, c$ étant, comme on l'a dit, rangés dans cet ordre de grandeur $a > b > c$ on ne peut avoir à distinguer que deux cas généraux, savoir, h compris entre a et b, et h entre b et c; ensuite deux cas particuliers, savoir, $A = a, A = c$; et enfin, un cas que je nommerai singulier et qui est celui de $h = \wedge$ au rayon moyen b.

The text on this page is estimated to be only 26.99% accurate

DE LA ROTATION DES CORPS. 87 Dans les deux cas généraux, les courbes q et p sont celles qu'on vient de décrire; Dans les deux cas particuliers de $h = a$, $h = c$ chacune d'elles se réduit à un point qui est, ou le pôle A, ou le pôle C de Tellipsoïde; et le corps tourne uniformément autour de l'un ou de l'autre des deux axes principaux aa ou ac, lequel axe demeure immobile dans l'espace absolu, aussi bien que celui du couple G avec lequel il se confond dans toute la suite du mouvement. 39. Mais dans le cas singulier de h égal au rayon moyen h de l'ellipsoïde central, la courbe s ne se réduit pas à un point; car, sur la surface de Tellipsoïde, outre le pôle moyen B, où le plan tangent est à une distance $A = 6$ du centre O, il y a une infinité d'autres points où le plan tangent peut se trouver à cette même distance b du centre de cet ellipsoïde, et la suite de ces points forme deux ellipses égales, dont les plans se croisent suivant l'axe moyen a , et sont inclinés au plan principal $\{ab\}$ d'un angle dont la tangente est $\pm \frac{b}{p} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$; de sorte que ces deux ellipses, qui ont, pour leur commun petit axe la ligne ab , ont pour leur grand axe une ligne ac qui est ce qui se voit sur-le-champ par les équations de l'orbite, en y supposant $h = z$. 40. Dans ce cas singulier de $A = b$, la courbe s est donc produite par le mouvement de l'une de ces deux ellipses, dont on retiendrait le centre immobile en O, à une hauteur b au-dessus du plan fixe, et dont on ferait rouler la circonférence sur ce plan, avec lequel on l'aurait mise en contact. Or il est aisé de voir que, dans ce cas, la courbe décrite par le point de contact est une ligne spirale qui va en tournant autour du centre P, et s'en rapproche sans cesse, de plus près que tout ce qu'on voudra, comme d'un point asymptotique, sans pouvoir jamais l'atteindre. Cette spirale, considérée dans toute son étendue, est une courbe symétrique à gauche et à droite d'un certain point qui la divise en deux parties parfaitement égales. Car, en rêve

88 THÉORIE NOUVELLE liant sur ses pas , en faisant rouler l'ellipse en sens contraire , le rayon vecteur $i>$ revient en augmentant jusqu'à une certaine valeur qui est son maximum; après quoi il diminue par les mêmes degrés, de sorte que son extrémité I décrit de l'autre côté une spirale parfaitement égale à la première, et qui fait comme la moitié de la courbe entière et continue g dont il s'agit. Cette courbe a donc un sommet[^] à gauche et à droite duquel elle jette deux branches égales qui vont en sens contraires tourner en spirales autour d'un seul et même centre P; et quoique chacune de ses branches fasse un nombre infini de révolutions autour de ce centre sans jamais l'atteindre, la longueur totale de la courbe est finie et parfaitement égale à la demi-circonférence de l'ellipse roulante qui la produit. Le pôle I, qui décrit cette spirale de longueur finie, ne peut jamais la parcourir dans toute son étendue : quelque près qu'on le suppose déjà du centre P, dont il s'approche, il lui faut encore un temps infini pour achever le petit arc qui reste à décrire, ou, pour parler exactement, il ne pourra jamais l'achever. Dans ce cas[^] singulier du mouvement des corps , le pôle instantané de la rotation est donc un point toujours nouveau, et dans le corps, et dans l'espace absolu; je veux dire que, dans le cours infini de la rotation , le pôle ne peut jamais revenir au même lieu, ni dans le corps ni dans l'espace, quoiqu'il ne décrive qu'une ligne finie, et dont la longueur serait tout au plus égale à la demi-circonférence de l'ellipse, en supposant le temps infini, non-seulement avant, mais encore après l'époque que l'on considère. Tel est donc le mouvement du pôle quand on suppose $h = b^{\wedge} c$ c'est-à-dire quand le plan du couple appliqué touche l'ellipsoïde central en un point qui appartient à l'une ou à l'autre de ces deux ellipses singulières dont nous venons de parler. 41. Mais s'il arrivait que le plan touchât précisément au pôle moyen B où se croisent ces deux ellipses, le pôle I, qui se confon-* drait alors avec B et le centre fixe P, resterait parfaitement immobile, et le corps ne cesserait de tourner uniformément autour de Taxe

DE LA ROTATION DES CORPS. 89 « moyen OB, comme il ferait autour de l'axe majeur OA » ou de l'axe mineur OC j si le plan Au couple était tangent au pôle A , ou au pôle C de l'ellipsoïde. En effet, il n'y aurait aucune raison pour que le pôle I , qui ne peut décrire à la surface que l'une des deux ellipses dont on vient de parler, et qui tombe en ce moment à l'extrémité B de leur axe commun, décrive l'une plutôt que l'autre de ces deux ellipses parfaitement égales et symétriques; d'où l'on voit qu'à la rigueur l'axe moyen de l'ellipsoïde central est, comme les deux autres, un axe permanent de rotation . 42. Mais il y a cette différence , c'est que, autour de cet axe moyen, la rotation n'a point de stabilité : je veux dire que, pour peu que le pôle I, en vertu d'un petit couple étranger appliqué au corps, vienne à s'écarter du pôle moyen B, il tendra à s'en écarter davantage; s'en allant alors décrire, à la surface, un orbe elliptique, soit autour du grand axe, soit autour du petit axe, selon que ce déplacement accidentel du pôle aura fait augmenter ou diminuer la distance h du plan tangent: et si le déplacement est tel, que h n'ait pas varié de grandeur, le pôle ira décrire l'une ou l'autre de ces deux ellipses singulières que nous avons considérées. 43. U n'y a qu'un seul cas où le pôle I, étant écarté du pôle moyen B de l'ellipsoïde, tendrait à y revenir: c'est le cas où le pôle I serait porté sur la circonférence de l'une de ces deux ellipses du côté précis où le sens de la rotation tend à le ramener vers B. S'il est porté sur la même ellipse, mais de l'autre côté de son sommet B, il s'éloignera indéfiniment de ce pôle moyen B , et il ira tomber après un temps infini sur le pôle opposé B' de l'ellipsoïde. Ainsi dans ce cas, qui est unique comme le précédent, l'ellipsoïde, qui, au commencement, touchait le plan fixe par son pôle moyen B, le toucherait à la fin par le pôle moyen opposé B'; de sorte que la position du corps se trouverait entièrement renversée dans l'espace. C'est le plus grand dérangement que l'impulsion d'un petit couple étranger puisse amener dans la position d'un corps qui tourne actuellement sur son axe moyen. Car, si le pôle est déplacé de toute autre manière sur la surface de l'ellipsoïde, il va décrire, comme on l'a vu, un orbe fermé j, soit autour du grand axe, soit autour du petit axe; et, par conséquent, P. 12

90 THÉORIE NOUVELLE s'il s'écarte d'abord du pôle moyen B, il s'en rapproche ensuite, et revient périodiquement passer à la même distance de B sur la surface, et à la même distance du centre fixe P, dans l'espace absolu. 44. Il y a encore une autre variété de la courbe a que le pôle instantané peut décrire dans l'espace ; mais elle n'est plus relative à la position du couple appliqué sur le corps, ou à la valeur particulière qu'on suppose à la ligne donnée h ; elle dépend uniquement de l'espèce de ce corps, c'est-à-dire de la proportion des axes a, b, c de l'ellipsoïde central. 45. Si le corps est un de ceux qui ont deux de leurs trois moments principaux d'inertie égaux, il est alors de révolution, ou ce qu'on appelle un sphéroïde: sphéroïde allongé si l'axe de révolution est plus grand que le diamètre de l'équateur; ou aplati vers les pôles, si cet axe est plus petit. Dans l'un et l'autre cas, il est évident que la route s du pôle, à la surface du sphéroïde, est un cercle autour de l'axe de ce sphéroïde; et, par conséquent, la route o- du pôle sur le plan fixe est aussi un cercle autour de l'axe du couple qui a mis le corps en mouvement. C'est un des cas les plus simples de la rotation des corps, parce que tout y est circulaire et uniforme. Cependant il faut encore remarquer que, si la circonférence du cercle roulant s n'est pas commensurable avec celle du cercle fixe o-, le pôle instantané ne peut jamais revenir au même lieu dans le corps et dans l'espace tout à la fois. 46. Enfin, et c'est ici le cas le plus simple de tous, si les trois moments d'inertie sont égaux, l'ellipsoïde central devient une sphère parfaite, l'axe instantané de rotation se confond avec l'axe même du couple appliqué, les deux courbes a et c se réduisent à deux points qui n'en font qu'un seul, et le pôle instantané I reste immobile, et dans le corps, et dans l'espace absolu. IV. De ce qui fait la mesure de la stabilité pour chacun des deux axes extrêmes de l'ellipsoïde central. 47. Nous avons déjà remarqué (n°42), ce qui distingue l'axe moyen

DE LA ROTATION DES CORPS. 91 des deux axes extrêmes, sous le point de vue de la stabilité que ces deux axes peuvent offrir dans la rotation des corps. Mais pour nous fîsiire une idée nette de cette stabilité j et de ce qui en fait en quelque sorte la mesure, imaginpns la surface de Tellipsoïde central comme coupée en quatre parties ou. iiiseaux elliptiques par les deux ellipses singulières que nous avons considérées, et dont les deux plans, conduits par Taxe moyen a 6, sont également inclinés à Taxe majeur a a (l'un au-Klessus, l'autre au-dessous) d'un angle o dont la tangente est — $K/lt'Z$. » (^** 59). Le pôle moyen B de l'ellipsoïde est donc à l'intersection de ces deux ellipses; le pôle majeur A est au centre du fuseau dont l'ouverture est a o , et le pôle mineur C au centre du fuseau supplémentaire. Or, en premier lieu , si le pôle instantané I de la rotation tombe sur le pôle moyen B de l'ellipsoïde, il est clair que, pour peu qu'on le déplace, il va tomber dans l'un ou l'autre des deux fuseaux dont il s'agit, et décrire son orbe s autour de l'un ou de l'autre pôle principal de l'ellipsoïde. Ou bien , si on le déplaçait sur le contour même de l'une des deux ellipses, il irait décrire la moitié de cette ellipse pour retomber sur le pôle moyen opposé; ou, s'il était porté sur l'autre moitié de la même ellipse, il reviendrait aussitôt au pôle moyen même d'où on l'aurait écarté: d'où il résulte, comme on l'a dit ci-dessus , que, hors de ce cas unique de déplacement, l'axe moyen du corps n'a aucune stabilité. . Mais si le pôle instantané tombe actuellement au pôle majeur A de l'ellipsoïde, il peut être déplacé comme on voudra, dans toute l'étendue du fuseau environnant , sans cesser de décrire son orbe s autour du même pôle majeur. Et si c'est en cela qu'on fait consister la stabilité de la rotation autour de l'axe majeur, on peut dire que la grandeur de ce fuseau en est en quelque sorte là mesure. Et l'on voit de même que l'étendue du fuseau supplémentaire est la mesure de la stabilité de la rotation autour de l'axe mineur. 48. Actuellement, si Ton suppose que l'un de ces deux axes, tel que a, diffère peu de Taxe moyen, le fuseau qui lui répond est très-petit, et le fuseau supplémentaire est très-grand. L'axe peu différent la..

ga THÉORIE NOUVELLE de Taxe moyen a donc très-peu de stabilité, et l'autre axe en a beaucoup. Il n'est donc point exact de dire, comme on le fait d'ordinaire, que si l'axe instantané est un peu écarté de l'axe principal qui répond, soit au plus petit, soit au plus grand moment d'inertie du corps, il s'en éloignera très-peu et ne fera que de petites oscillations pendant toute la durée du mouvement : car si le moment d'inertie relatif à cet axe diffère peu du moment moyen, le pôle instantané, par un petit dérangement, pourra sortir du petit fuseau où il est actuellement, pour tomber dans le fuseau voisin et y aller décrire son orbée autour de l'autre axe; ou même, s'il n'est déplacé que dans l'intérieur du petit fuseau qui lui répond, il peut encore y décrire un orbée étroit et fort allongé, et, par conséquent, faire de très-grandes oscillations départ et d'autre du pôle principal d'où on l'a écarté. Dans les corps où l'un des moments extrêmes d'inertie diffère peu du moment moyen, et, par conséquent, où l'ellipsoïde central du corps est presque de révolution autour de l'un de ses axes, la stabilité de la rotation n'est donc vraiment assurée que pour cet axe. C'est le cas de la terre, dont la rotation est très-stable autour de son axe actuel, et le serait très-peu autour du troisième axe qui, comme on le sait, diffère très-peu de Taxe moyen. Si cette différence est tout à fait nulle, en sorte que l'ellipsoïde central du corps soit exactement de révolution, il n'y aura de stable que l'axe de ce sphéroïde; car il est clair qu'aucun des autres axes principaux (qui sont ici tous les diamètres de l'équateur) ne peut avoir de stabilité. Et en effet, si le pôle instantané tombe actuellement sur l'équateur, et que, par une cause quelconque, il en soit un peu écarté k gauche ou à droite, il ne restera plus immobile; mais il ira décrire sur la surface de l'ellipsoïde un cercle j, parallèle et presque égal à l'équateur : d'où l'on voit que le pôle instantané aura dans le corps un mouvement très-considérable. Mais, d'un autre côté, il est bon de remarquer qu'il n'en aura qu'un très-petit dans l'espace absolu; car le cercle fixe a, qu'il décrira dans l'espace, aura pour rayon la très-petite distance IP de ce pôle I au pied P de la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan tangent en I. Ainsi l'axe instantané OI, qui, dans le corps, décrira la surface d'un cône très-ouvert et presque plan, ne

DE LA ROTATION DES CORPS. 93 décrira dans l'espace qu'un cône de base très*petite , et paraîtra ainsi comme immobile dans l'espace absolu. Il n'y a qu'un seul cas d'exception à cette instabilité d'un axe principal situé dans le plan de l'équateur : c'est celui où le pôle instantané serait porté du point de l'équateur où il est actuellement, en un autre point du même équateur; car alors il y resterait immobile, comme il aurait &it dans sa première position si on ne l'en avait point écarté. 49. Enfin, si les trois axes principaux du corps sont égaux entre eux, et que l'ellipsoïde central devienne ainsi une sphère parfaite, tous les axes sont également stables , ou en quelque sorte indifférents à tout déplacement accidentel qui pourrait survenir. Car, si l'axe instantané est porté du lieu où il est, dans un autre, il y reste, et redevient immobile et dans le corps et dans l'espace absolu. V. Des noms qu'on pourrait donner aux deux courbes s et c décrites par le pôle instantané de fvtation. 50« Si l'on considère un corps pesant, de telle figure qu'on voudra, qui ait été lancé d'une manière quelconque dans l'espace, et qu'on fasse abstraction du mouvement progressif qui l'emporte, pour ne plus voir que la rotation de ce corps sur son centre de gravité, il est clair que cette rotation est exactement la même que si le corps était libre , ou dépourvu de toute pesanteur : car les forces parallèles de la gravité, qui agissent à chaque instant sur les molécules de ce corps, se réduisant toujours à une force unique qui passe par le centre, il n'en résulte aucun couple accélérateur qui puisse altérer la rotation du corps autour de ce point. Il ne reste donc, pour faire varier l'axe instantané, que le seul couple g dû aux forces centrifuges qui naissent de la rotation même, comme dans le cas d'un corps entièrement libre de toute action étrangère. On voit donc que les courbes $\wedge$ et α que le pôle instantané décrit , l'une sur l'ellipsoïde central du corps , ou dans l'espace relatif j l'autre sur le plan fixe du couple , ou dans l'espace absolu j sont deux courbes

The text on this page is estimated to be only 25.91% accurate

94 THÉORIE NOUVELLE remarquables que la nature nous offre à chaque instant dans le mouvement des projectiles; et, par cette raison naturelle, il nous semble que chacune d'elles mériterait d'avoir un nom, aussi bien que la courbe décrite par le centre de gravité du corps, et qui est, comme on le sait, une parabole. Je proposerais donc de donner à Tune et à l'autre le nom de polhodie [*], en appelant la première s la polhodie relative et la seconde a la polhodie absolue. Ou, si l'on voulait distinguer ces deux courbes par leur forme particulière, on donnerait à l'orbe elliptique et fermé s le simple nom de polhodie; et, à la courbe plane et ondulée 0-, celui de herpolhodie[**]y afin de rappeler, avec l'idée du pôle qui la décrit, cette propriété qu'elle a de serpenter en circulant autour d'un centre fixe. VL Équations différentielles de ces courbes. 51. L'équation de la polhodie est facile à trouver : car jc, j^j z étant les coordonnées du pôle qui décrit l'orbe ^ à la surface de l'ellipsoïde central, on a d'abord (n^ 28) ■ ? = »' x^ X^ 2" I ^ " ^ i ^ * ^ 7 " ~ Â " ' et, par hypothèse , jr*4- f^ 4- z' = a*, en désignant par u le rayon vecteur émané du centre. Ou bien, si l'on tire de ces trois équations les valeurs séparées de [*] Route du pôle, de ^•^•s et •^•t [**] Route serpentante du pôle, de \pict». Suivant les rèj^les précises de IVtymologie, il faudrait dire polherpohodic ; mais pour plus de simplicité, et surtout plus d^euphonie, il vaut bien mieux s*en tenir à la première dénomination.

The text on this page is estimated to be only 24.24% accurate

DE LA ROTATION DES œRPS. qS $x^{\wedge}, j^*, z^*j$ on a ces transformées équivalentes: ' $\blacksquare = w^{\wedge\wedge n^{\wedge}, [\ll = - (\ll\blacksquare - *\blacksquare - TA$ Or, qu'on différencie ces équations, et qu'on en tire les valeurs de $dXj dy^{\wedge} dzen u$ et chif pour les substituer dans l'expression $ds = \wedge dx^* 4- dj^{\wedge} -h dz''^{\wedge}, * \bullet$ et l'on aura, emre les. variables $\wedge$ et m , l'équation cherchée de la polhodie $s^{\wedge}$. Si, dans cette équation, on change simplement- $\wedge j$ en- $\wedge o^*$, et. «£? eii if>^ $-\wedge f\wedge y$ ce qui donne $udu:\wedge\backslash>i dsfy$ on aura l'équation de Therpolhodie entre son arc j et le rayon vecteur Vy émané du centre P de cette courbe plane. Enfin , si Ton nomme y l'angle que le rayon vecteur $i^{\wedge}$ fait avec une droite fixe quelconque menée dans le plan de cette courbe, on aura évidemment l'équation de sorte qu'en y mettant, au lieu de d

96 THÉORIE NOUVELLE Remarque L Sur les données de cette analyse. 52. Les trois premières sont les rayons principaux a , b , c de l'ellipsoïde central ; et ces lignes sont toujours données par la nature du corps, puisque ce sont trois lignes réciproques aux bras de l'inertie de ce corps autour de ses trois axes principaux. Nous les supposons toujours rangées dans cet ordre de grandeur $a > b > c$. Il est évident que a est le plus grand de tous les rayons de l'ellipsoïde, et qu'il est unique; que c est le plus petit, et qu'il est unique; qu'enfin b , perpendiculaire au plan de ces deux -là, est un rayon moyen qui est aussi unique, mais seulement par sa position, et non point par sa grandeur : car il est aisé de voir qu'il y a dans l'ellipsoïde une infinité de rayons de même grandeur h , et que ces rayons égaux forment les deux plans singuliers qui donnent les deux sections circulaires de l'ellipsoïde; sections inclinées, au plan (ab) , d'un angle dont la tangente est $Ji - \sqrt{frz} \sim j$ (*" partie, n° 74). Actuellement, par la définition même de l'ellipsoïde central, les trois moments principaux d'inertie du corps sont entre eux comme les trois quantités — a^2, b^2, c^2 — ainsi rangés dans l'ordre $a^2 > b^2 > c^2$. Mais, par la nature des moments d'inertie d'un corps autour de trois axes rectangulaires, il est clair qu'un quelconque de ces moments est toujours plus petit que la somme des deux autres. Or, d'après l'ordre qu'on vient d'établir, cette condition d'inégalité se trouve déjà exprimée pour chacun des deux moments — $a^2 < b^2 + c^2$; $b^2 < a^2 + c^2$; mais elle ne l'est point pour le dernier moment — qui est le plus grand des trois. Il faut donc, indépendamment de la double inégalité $a > b > c$,

DE LA ROTATION DES CORPS. 97 poser encore celle-ci : $-L^{\wedge}$
 $-L$ J. qui revient à $^{\wedge} ab C > 53$. On voit par la géométrie que $-$ est la longueur
de la perpendiculaire abaissée de l'angle droit sur l'hypoténuse, dans un
triangle rectangle dont a et b seraient les deux côtés. L'inégalité précédente
revient donc à dire que l'axe mineur c d'un ellipsoïde central doit toujours
être plus grand que cette perpendiculaire : de sorte que cet axe mineur ne
peut s'étendre que depuis la longueur $-$ de si $a^* H - 6'$ cette
perpendiculaire jusqu'à celle de l'axe moyen b . Il résulte de là que
l'ellipsoïde central peut être un ellipsoïde plus ou moins allongé et même
allongé jusqu'à l'infini auquel cas les deux petits axes 6 et c deviennent
égaux ; mais il ne peut être indéfiniment aplati j puisque l'axe mineur c doit
toujours surpasser $ab : y / a^{\wedge} -^{\wedge} 6^*$. Si l'ellipsoïde est de révolution autour de
son petit axe, ou si l'on a $6 = a$, le sphéroïde central ne peut donc s'étendre
que depuis la sphère 9 jusqu'au sphéroïde aplati dont l'axe est la fraction $-^{\wedge}$
du rayon de l'équateur. 54. Ainsi, quoi qu'il y ait dans la nature, ou qu'on
puisse y concevoir des corps de toutes les constitutions et de toutes les
figures possibles ; il n'y a point d'ellipsoïdes centraux de toutes les formes
possibles , c'est-à-dire qu'il ne serait pas permis de se donner les trois axes
d'un ellipsoïde central dans une proportion arbitraire. On peut bien prendre
à volonté les deux premiers a et b mais une fois qu'ils sont donnés , il faut
que le petit axe c soit pris plus grand que $-^{\wedge} / a' - f. b'$ sans quoi l'ellipsoïde
central qu'on aurait supposé dans l'analyse ne pourrait appartenir à aucun
corps existant ni pouvant exister dans la nature. Cette remarque est
importante, car en la perdant de vue dans P. i3

The text on this page is estimated to be only 29.72% accurate

98 THÉOBIE NOUVELLE l'interprétation des formules analytiques, on s'exposerait à regarder comme réelles des propriétés de mouvement qui n'appartiendraient qu'à des corps imaginaires. 5a. Après les trois rayons principaux a^b , c de reilipsoïde central, vient une quatrième donnée h : c'est la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan du couple impulsif, supposé tangent à la surfeuse de cet ellipsoïde; et la seule chose à remarquer sur cette donnée h y c'est qu'elle est toujours comprise entre les deux rayons extrêmes a et 6^* . Car, étant comparée au rayon u qui va du centre au point de contact, elle est plus courte que ce rayon oblique, et à plus forte raison, que le rayon majeur a qui est le plus grand de tous les rayons possibles. D'un autre côté, comme cette perpendiculaire h a son pied hors de la suriace de l'ellipsoïde, elle est plus grande que le rayon mineur c qui est le plus petit de tous les rayons. Ainsi Ton a toujours cette dotible inégalité $a > h > c$, y4b résolutions analytiques. 56. Pour abrégier les calculs, je ferai $b^* - \langle -c \rangle$ — cr. $\backslash c^* + a^* h' r^s a$ — $-h h' a^b$ — f: où je remarquerai d'abord que les trois quantités désignées par a' , $/5^*$, y^* sont toujours positives. Car, en premier lieu, à cause de h^* toujours $> c^*$, il est clair que a^* et * sont toujours positifs. Ensuite, comme on doit avoir $\{n^{52}\}$, on a, par conséquent, et il en résulte que la troisième quantité $7'$ est aussi positive; car, en

DE LA ROTATION DES CORPS. 99 donnant à $h^\wedge$ une valeur quelconque qu'elle puisse avoir, et que je représente par il vient toujours positif. Ainsi $a, j_3 y$ y seront toujours trois lignes réelles comme les rayons $a, 69 c$ de l'ellipsoïde central : la dernière seule 7 peut devenir nulle $^\wedge$ et le devient dans le cas particulier de $A = a^\wedge$: $yja^\wedge - f - b^\wedge$; ce qui est au fond le cas de $A = c$, puisque c est nécessairement compris entre h et ah : $V \ll * - + - A^*$. 57. Maintenant si l'on prend les différences de la quantité $j_3^\wedge$ à chacune des deux autres $a^\wedge$ et $7'$, on trouve $^\wedge * - / = ^\wedge (*' - c^*) > 0$; d'où l'on voit que j_3 est toujours la plus grande des trois lignes $a, 9$ Si l'on prend ensuite la différence entre a' et $y^\wedge$, on trouve différence qui est positive ou négative, selon que h est plus grand ou plus petit que b . Les trois lignes $a, /_3, 7$ sont donc toujours rangées ainsi qu'il suit : I®. Pour $h > bj$ dans cet ordre : $j_3 > 7 > a; a^{**}$. Pour $h < y$. **Remarque II. Maxima et minima des rayons vecteurs de la polhodie. 58. Les trois lignes $a, p, 7$ ne sont pas seulement propres à simi3..**

100 THÉORIE NOUVELLE plifier les expressions de notre analyse, mais elles ont encore une signification remarquable dans le problème qui nous occupe. Et en effet, par les trois équations précédentes de l'orbe s , entre le rayon vecteur u et chacune des trois coordonnées j^c, j^a, z , il est aisé de voir que j^3 est le plus grand des rayons vecteurs u qui vont du centre à cet orbe ou polhodie s . Car, i^o , en faisant $uz = z^a$ ces trois équations sont satisfaites, et ne conduisent qu'à des valeurs positives de or^* , a^* , z^a ; mais a^o , toute valeur de $w > j^3$ rend V_{jr}^a négatif, et, partant, V_{jr} imaginaire, et ne peut ainsi appartenir comme rayon à l'orbe s . Le rayon $u = j^3$ est donc le rayon maximum; et comme il répond à $j_r = o^a$ on voit qu'il tombe toujours dans le plan principal de l'ellipse moyenne (oc). Quant au rayon minimum u il faut distinguer deux cas : i^a . Si $h > b_j$ ce rayon minimum est la ligne y ; car toute valeur de $f^a < y$ conduirait à z^a négatif, et, partant, à z imaginaire. La ligne y est donc alors le rayon minimum, et comme il répond $k z = o$, on voit qu'il tombe dans le plan de l'ellipse majeure (ab). Enfin, dans ce même cas de $A > 6$, on voit que la troisième ligne a ne peut appartenir comme rayon à aucun des points de l'orbe s : car, en prenant la différence entre h^a et a^* , on trouve $b^a - or = h^a - a^*$; d'où il résulte, à cause de $h > b$ par hypothèse, que la ligne a est alors $< A$, et, par conséquent, ne peut être un des rayons de l'orbe s . 2^a . Si h

The text on this page is estimated to be only 25.97% accurate

DE LA ROTATION DES CORPS. loi excentricités respectives des ellipses principales {ab}j {bc}j (oc), de Tellipsoïde central. Mais, comme les carrés a^2 , b^2 , c^2 sont rangés dans cet ordre $a^2 > b^2 > c^2$, si l'on commence par poser $a^2 - b^2 = e^2$, et puis $b^2 - c^2 = e'^2$, il faut, pour avoir de la symétrie dans les calculs, suivre encore le même ordre, et prendre ainsi, non pas $a^2 - c^2$, mais $c^2 - a^2 = e''^2$. Seulement, comme on a $c^2 < a^2$, il faudra se rappeler que ce n'est point e'^2 , mais bien $-e'^2$, qui représentera le carré de l'excentricité de l'ellipse moyenne [ac). Nous poserons donc, pour la symétrie des expressions, $a^2 - b^2 = e^2$, $b^2 - c^2 = e'^2$, $c^2 - a^2 = e''^2$ et nous ferons le produit $e^2 e'^2 e''^2 = -e^2 e'^2 e''^2$. Relations entre les quantités désignées par a, b, c, e, e', e''. 60. Par les abréviations qui précèdent, les trois équations (A), (B), (C), qui ont lieu entre u et chacune des coordonnées x, y, z à l'orbe s prennent cette forme très-simple: $u^2 - r^2 = e^2$, $u^2 - r'^2 = e'^2$, $u^2 - r''^2 = e''^2$ (tt - a^2), Or ces équations, étant ajoutées ensemble, donnent donc, à cause de $u^2 - f - j^2 - h^2 = a^2$

The text on this page is estimated to be only 28.97% accurate

10a THÉORIE NOUVELLE on a ces deux premières relations ,
 $\hat{u}^* \hat{e}^? a^* - h h^* e'^{\wedge\wedge\wedge} - + . c^* \hat{e}^{\wedge} y^{\wedge} = o$. Si Ton divise respectivement les trois
 mêmes équations (A) , la première par $a^* y$ la seconde par $\hat{6}'$, la troisième
 par c' , et qu'on ajoute, on trouvera donc , à cause de le premier membre se
 réduit à $\hat{f}^{\bullet}$. et, par conséquent, le second membre devant aussi se réduire à
 $\hat{f}^*$, quel que soit Uy il faut qu'on ait ces deux nouvelles relations, $a' e'^{\wedge} a^{\wedge} -$
 $+ - h'' e''^{\wedge\wedge} - i - c^* e^{\wedge} y - = -^{\wedge} c \backslash$ Les mêmes équations étant divisées
 respectivement, la première par $a^* j$ la seconde par $b^* j$ la troisième par $c^{\wedge}$,
 donnent donc , à cause de $^{\wedge} \text{''}^{\wedge} \hat{y}^{\wedge} \text{''}^{\wedge} c > \text{''}^{\wedge} \blacksquare \hat{A} \text{''}^{\wedge}$ ' le premier membre se
 réduit à $t^{\wedge}$; et, par conséquent, le second devant se réduire aussi à $t - ,'$ quel
 que soit Uj on a ces deux nouvelles relations, $a^{\wedge} e' - ' -^{\wedge} / 5 \ll e'' \gg h - yV \gg = - \hat{f}^*$
 : A\ Ainsi, en employant, pour abréger, le signe somme 2, on a les

The text on this page is estimated to be only 15.53% accurate

DE LA ROTATION DES CORPS. io3 six relations suivantes : (i)
 $la^*e'^* = i^*$, $(^{\wedge}) 2 a^* c' \gg a \gg = o$. (3) $2a \gg e' \gg a^* = -6^*$, (4) $2a^*e' \gg = o$, (5)
 $\wedge \ll \bullet \ll ' \bullet = \wedge''$ (6) $2 - 7 \gg) = A \gg - PA^* H - QA \gg - R = A$, ce qui donne $A = rt \gg -h$
 $A \gg + c^0 B = a^* h^* - \setminus - b^* c^* + c' a'$, $Q = a \gg j3 \gg - + - \wedge \gg 7 \gg - | - y^* a \gg$, Et, si l'on
veut exprimer P, Q, R en A, B, G, on trouvera ces relations $_ aA^* ' \text{---} B Q =$
 $R = (A \gg 4 - B) A^* \text{---} (AB - h 3 C) A' - h AC (AB \text{---} C) A^* \text{---} fB'H -$
 $AC)^{\wedge} \ll ^{-2BCA' - C} \gg 62$. Au reste, cpmme on a $A \gg - a^* = A^* - /3 \gg = h^*$

io4 THÉORIE NOUVELLE il en résulte (en faisant le produit) qu'on a entre les deux polynômes désignés par D et A, la relation très-simple $A = D^* : A^*$. Tous ces préliminaires étant posés, passons au développement des calculs indiqués au commencement de ce paragraphe. Equation de la poUiodie entre l'arc s et le rayon vecteur u, 63. Les trois équations (A) du n° 60, étant différenciées, nous donnent on a donc, en ajoutant, ou bien, si l'on réduit au même dénominateur et qu'on ordonne le numérateur suivant les puissances de u', on aura OÙ l'on peut reconnaître à priori que le numérateur doit avoir tous ses termes divisibles par c^* ; car il est facile de voir que chacun des coefficients $la^* e'^y la^* e'^ (/3^* + y^)$, $1 a^* e'^ jS^* 7\%$ s'évanouit en y faisant soit $e^* = 0$ ou $a^* = e^*$, soit $c'^* = 0$ ou $b^* = z c^y$ soit $e''^* = 0$ ou $c^* = a^*$; et que, par conséquent, il est actuellement divisible par le produit Mais il s'agit ici de trouver le quotient sans faire la division.

The text on this page is estimated to be only 22.74% accurate

DE LA ROTATION DES CORPS. io5 Ovf d'après la relation (i), on a d'abord Ensuite , le coefficient (si Ton y met, au lieu de $\int_3^h 7^*$ sa valeur $P - a^*$) prend la forme quantité qui, d'après les relations (i) et (4) se réduit à $\int_3^h 7^*$. Ainsi l'on a Enfin , le dernier coefficient (si l'on y met pour $\int_3^h 7^*$ sa valeur $Q - a^*$ ($\int_3^h 7^*$)) se change d'abord en $Q \ll^{\wedge} c'^{\wedge} - 2a^*e' \gg a^* \{ / 3^{\wedge} H - 7^* \} = 6^* Q - 2aV \gg a \gg (P - a^{\wedge})$, ou y par la relation (4) or, si l'on met, pour $\{ a^{\wedge} a^{\wedge} \}^{\wedge}$ sa valeur $(a \gg a^{\wedge}) = a \gg \hat{o} \gg + a^{\wedge} c \ll^{\wedge} \hat{\wedge} = B -- 6^{\wedge} c \ll - ^{\wedge}$, ce coefficient devient $6^{\wedge} Q - f - (b - J) la^{\wedge} e'^{\wedge} a^{\wedge} - C 2a^*c'^0\%$ d'où, par les relations (3) et (S), on conclut enfin $2a^*e' \gg P^{\wedge} 7^{\wedge} = \int \bullet (q - Bh - i^{\wedge} V$ On aura donc, en substituant ces valeurs, et supprimant le facteur commun $\int^*$, P. 14

The text on this page is estimated to be only 28.13% accurate

io6 THÉOBIB nOUTELLE ou, en tirant la racine carrée, et mettant le dénomiialeur sous la forme «• — Pw* •+- Qu^ — R^ V «•— P«=: 6*(6* -h /5^), l'équation devient) c'est, en effet, entre l'arc et le rayon vecteur émané du centre, l'équation différentielle d'une ellipse aux rayons principaux 6 et j3, ce qui s'aooi^e entièrement avec ce qu'on a vu , et confirme ainsi notre analyse. On a donc, pour l'intégrale de l'équation précédente, s égal à la longueur de Tare correspondant au rayon u dans une ellipse dont les rayons principaux sont 6 et j3 : ce qu'on peut indiquer de cette manière , s = arc (ray = u) (ellipse 6, j3). Équation de Vherpolhodie a. 65. Si dans l'équation précédente on change simplement ds en dcf^ et u^ en p* -h A*, ce qui donne udu = vdv^ on aura sur-le-champ pour l'équation de Therpolhodie entre son arc

DE LA ROTATION DES COUPS. 107

Équation polaire de la même courbe. 66. En nommant θ l'inclinaison du rayon vecteur v sur une droite fixe quelconque menée dans le plan de la courbe, on a évidemment d'où Ton tire $d\theta = \frac{1}{r} \frac{dr}{d\theta}$ Il ne s'agit donc que de mettre dans cette équation, au lieu de dr son expression précédente en θ , pour avoir l'équation de l'hélice polhoïde entre son rayon vecteur v et l'angle θ qu'il décrit autour du centre de cette courbe. Or, si l'on fait cette substitution, qu'on réduise au même dénominateur, et qu'on ordonne le numérateur par rapport aux puissances de v on trouve en changeant à la fois les signes des deux termes de la fraction Q , OU Or je remarque que le numérateur de la fraction soumise au radical est un carré parfait : car, en y mettant, au lieu de P

io8 THÉORIE NOUVELLE 67. Au reste, on peut encore présenter l'équation sous cette autre forme, où Ton ne verrait que le polynôme désigné par A , avec ses dérivées A' , A'' , pris relativement à h . Car, comme on a fait, pour abrégé, si Ton fait de même $A' = 3A^* - aPA^*H - Q$ et $aA'' = a.3A^* - aP$, l'expression précédente de r^2 , en y mettant encore, au lieu de D : A^* , sa valeur v^2A , prendra la forme expression où il faut remarquer qu'il n'y a, au fond, rien d'imaginaire, parce que le polynôme $i^* - hA^*p^* - hA' i^{**} - i - A$, qui est sous le radical, est essentiellement négatif, comme le produit auquel il est équivalent : de sorte que $y / \sqrt{i^* - hA^*p^* - hA' i^{**} - i - A}$ est toujours réel, tant qu'on ne donne à p , comme cela doit être, que des valeurs prises dans les limites où elles sont naturellement renfermées. Si l'on fait $p^* = p$, l'équation précédente prend la forme $(v/\sqrt{4 - Ap})r^2 p \sqrt{v^2 - I V p} \gg H - a^2 p \gg -f - A'p, H - A$ dont l'intégrale se rapporte évidemment aux transcendentes elliptiques. Cas singulier de $h = bj$ où Uherpolhodie défient une spirale. 68. Quand on suppose $A = 6$, la polhodie s devient, comme on l'a vu, une ellipse aux rayons principaux b et $|3$, et dont l'équation

DE LA ROTATION DES CORPS. 109 différentielle est Si l'on fait $ds = da$ et $m = i^2 - 4 - ft^2$, on a donc pour l'équation en apparence plus simple que la première, mais dont l'intégrale exige également la rectification d'un arc d'ellipse, car il est clair qu'on a $7 = \text{arc}(\text{ray} = \sqrt{6 - 4i})$ (ellipse ft, |3). 69. Mais, en y faisant pour avoir l'équation polaire de la même courbe, on trouve l'équation différentielle qui s'intègre par les logarithmes : car, en faisant, pour abrégier, c'est-à-dire en nommant n l'excentricité de l'ellipse roulante s qui produit la courbe a , on a, pour l'intégrale, OÙ l'on suppose que l'angle θ soit nul ou commence quand le rayon vecteur w est égal à n ou $V/3 - b$ qui est sa valeur maximum : ce qui place l'origine au sommet de la courbe. On a donc, en passant des logarithmes aux nombres, $e = e^i$ e désignant ici, suivant l'usage, la base des logarithmes naturels.

110 THÉORIE NOUVELLE Ou bien, si Ton veut tirer t ; en 9, on a 2115 np np ce qui est la forme la plus simple de l'équation polaire de la courbe 7 dans le cas singulier dont il s'agit. 70. Par cette expression de v en ϕ , on voit que le rayon vecteur v ne change point de grandeur quand on change le signe de l'angle ϕ : de sorte que la courbe jette $\wedge$ à gauche et à droite de son sommet, deux branches parfaitement égales. On voit encore que y diminue lorsque ϕ augmente, et que ce rayon v ne peut toutefois devenir nul qu'en supposant $\phi = \pm \infty$: d'où il résulte que la courbe est une spirale double dont les deux branches continues font, en sens contraires, une infinité de révolutions autour du même centre, se rapprochant sans cesse de ce point, et de plus près que tout ce qu'on voudra, sans pouvoir jamais l'atteindre: ce qui confirme tout ce qu'on a dit précédemment sur la nature de cette spirale. Au reste, pour une précision parfaite dans les termes, il faut bien remarquer que le centre n'est pas à la rigueur un point asymptotique; je veux dire, ne pourrait être regardé comme un cercle infiniment petit que la spirale tend sans cesse à venir toucher. Car en nommant θ l'inclinaison de la courbe à au rayon vecteur v qui la décrit, on trouve aisément, par le triangle rectangle formé sur les trois côtés dt , $d\theta$, dv l'équation $\dots$ $b \sin j = \dots$; d'où Ton voit que si la spirale est perpendiculaire au rayon vecteur v lorsque $\theta = p^*$ - 60°, c'est-à-dire au sommet de la courbe, elle y est inclinée partout ailleurs, et même jusqu'au centre, puisque, en faisant $p = 0$, on trouve $\dots$ $\sin p = p$; ce qui répond à un angle différent d'un droit, à cause de $\phi < 90^\circ$.

The text on this page is estimated to be only 26.71% accurate

DE LA ROTATION DES CORPS. 1 1 1 71. Je ne parle point de ces cas particuliers de $a = \infty$, $b = c$, où l'ellipsoïde central du corps est un ellipsoïde de révolution; car si l'on a, par exemple, $b = c$, il s'ensuit que $\frac{a}{b} = \frac{c}{b} = \text{constante}$: et alors il est clair que la polhodie est un cercle décrit autour de l'axe fixe du couple, d'un rayon $\frac{a}{\sin \theta}$. L'herpolhodie est un autre cercle décrit autour de l'axe fixe du couple, d'un rayon $\frac{a}{\sin \theta}$. Idée de la détermination du lieu du corps au bout d'un temps donné, 72. Après avoir reconnu la nature des deux courbes s et a y il est naturel de chercher la vitesse $\dot{\theta}$ ou $\dot{\phi}$ avec laquelle le pôle instantané décrit en même temps l'une et l'autre : et cette recherche, qui mène à celle du lieu du corps au bout d'un temps donné, n'a pas plus de difficulté que les précédentes. Pour nous en faire une idée considérons les variables x, y, z comme des fonctions du temps t . Si aux trois équations précédentes (n° 51) déjà posées entre les variables, on joint l'équation qui exprime la quantité du couple accélérateur dû aux forces centrifuges, il sera facile d'en tirer la valeur $\frac{d^2 \theta}{dt^2}$ ou de $\frac{d^2 \phi}{dt^2}$ en fonction du rayon vecteur u : de sorte qu'on aura d'abord l'équation / désignant une certaine fonction déterminée de u . Mais 9 par les mêmes équations, on trouvera aussi d'une manière facile la valeur de $\dot{\theta}$ en fonction du même rayon u ; et de cette équation

1 12 THÉORIE NOUVELLE tion, qui ne sera qu'entre les variables u et t , on pourra passer, par une simple quadrature, à l'expression de u en t . Si donc on met cette valeur à la place de u dans l'équation précédente 5 =/(«)■ on aura , entre u et t , une équation différentielle de la forme ce qui donnera la vitesse du pôle sur l'arc Sj en fonction du temps <: vitesse="" parfaitement="" la="" avec="" laquelle="" le="" p="" d="" en="" m="" temps="" l="" o="" dans="" absolu="" de="" cette="" derni="" dt="" f="" sera="" une="" fonction="" il="" ne="" restera="" donc="" plus="" qu="" remonter="" par="" seconde="" int="" longueur="" des="" deux="" arcs="" et="" c="" du="" t="" employ="" les="" :=="" car="" sit="" aura="" que="" je="" repr="" on="" pourra="" dire="" probl="" rotation="" corps="" est="" enti="" r="" actuellement="" lieu="" pr="" se="" trouvera="" au="" bout="" quelconque="" donn="" effet="" saura="" ce="" instantan="" doit="" sur="" surface="" central="" s="" qui="" plan="" fixe="" z="" a="" or="" centre="" retenu="" immobile="" hauteur="" h="" au-dessus="" n="" mettre="" cet="" ellipso="" contact="" mani="" touche="" point="" sa="" />

DE LA ROTATION DES CORPS. ii3 miné 1 du plan dont il s'agit : et de cette manière l'ellipsoïde central se trouvera posé dans le lieu précis de l'espace où il arrive par son mouvement naturel au bout du temps donné t. On voit coïlfbien cette analyse est claire et naturelle : on peut encore la simplifier et la varier de plusieurs manières en considérant d'autres quantités relatives à la position du corps; il ne nous reste donc qu'à la développer, et c'est ce qu'on va faire dans la troisième partie de ce Mémoire. Mais auparavant, je crois bon de rapprocher notre méthode de l'analyse ordinaire; de montrer, par exemple, comment le seul théorème ($n^{\wedge}$ IrS) relatif aux forces centrifuges, étant traduit en analyse, donne sur-le-champ les trois équations fondamentales que l'on doit à Euler; et comment, de ces équations, qui étaient connues, on aurait pu tirer notre solution nouvelle, à l'aide de quelques simples transformations analytiques : rapprochement toujours instructif en ce qu'il éclaire à la fois les deux méthodes.

CHAPITRE ra. ou l'on rapproche l'analyse PRÉC[^]DENTE DE CELLE d'eULER. Toute notre analyse est renfermée, comme je l'ai dit, dans le théorème rappelé ci-dessus, par lequel on connsdt à chaque instant l'axe et la grandeur du couple accélérateur g qui vient des forces centrifuges, et fait ainsi varier l'axe et la grandeur du couple acquis G dont le corps est actuellement animé. Il n'y a donc qu'à traduire ce théorème en analyse, pour avoir ce qu'on appelle les équations du mouvement du corps; et cette traduction, comme on va le voir, est extrêmement facile. Équations du mous[^]ement de rotation. 73. Toutes les dénominations précédentes étant conservées, qu'on reprenne un instant les simples lettres A, B, C, pour désigner les trois moments principaux d'inertie du corps. Les trois quantités A/>, B^{^^} Cr seront les trois composants L, M, N P. i5

I 4 THÉORIE NOUVELLE du couple G dont le corps est animé : et les rotations $p^q r$ étant regardées comme des fonctions du temps t , les trois fonctions différentielles ou fluxions $A^{\wedge} \wedge^{\wedge} \wedge T^{\wedge} \wedge^{\wedge} J^{\wedge}$ dénoterai plus simplement par $A/\cdot$, $B\cdot$, $C\cdot$, seront les trois composants du couple accélérateur qui peut faire varier Tax et la grandeur du couple acquis G . Or il n'y a ici d'autre couple accélérateur que celui qui naît des forces centrifuges dues à la rotation même du corps, et notre théorème dit : $\bullet \cdot i'''$. Que l'axe du couple g est perpendiculaire à Tax du couple acquis G , ou, en d'autres termes, que le cosinus de leur inclinaison mutuelle est nul. On a donc, en prenant l'expression de ce cosinus, qui est évidemment $A/\cdot \cdot A/i - \cdot B\cdot \cdot B^{\wedge} - C/\cdot \cdot C\cdot$ et, l'égalant à zéro, (i) $A^{\wedge} p p - h B^{\wedge} 9^{\wedge} - + - C^{\wedge} r r = 0$, ce qui est la première équation du mouvement. 1°. Le même théorème dit que l'axe de ce couple g est aussi perpendiculaire à l'axe instantané de la rotation actuelle Q dont les trois projections sur les axes principaux sont respectivement p , g , r . On a donc, comme ci-dessus, en prenant le cosinus de l'inclinaison mutuelle et l'égalant à zéro, $\bullet \cdot \bullet \ll (2) k p p - h h q q H - C r r = 0$, seconde équation du mouvement. 2°. Enfin, le même théorème dit que l'on a, pour la grandeur du couple g , le produit de G par $d \sin i$; ce qui donne l'équation $g \ll = G^{\wedge} e \ll (I - \cos \ll l)$, i étant l'inclinaison de G à 6. Donc, en mettant au lieu de $G^{\wedge}$, $9^{\wedge}$, $\cos^{\wedge} \{$, leurs valeurs en p , 7 , r , et pour $g^{\wedge}$ son expression générale

DE LA ROTATION DES CORPS. ii5 on aura (3) ... $Ay^4 - Bz^4 - CV^2 = (A - B)y^2 + (B - C)z^2 - (C - A)V^2$ troisième et dernière équation du mouvement. COBOLLAIRE. 74. Si y de ces trois équations, on tire les valeurs séparées de $\dots$ Apj $Bçf$, Cr , on trouve sur-le-champ ces transformées équivalentes : $A > = (B - C)9r$, $Bç:î = (C - A)|ir$, $Cr = (A^2 - B^2)^{1/2}$; ce sont les équations $A^2 Eider$, et qui se trouvent ainsi démontrées de la manière la plus simple. Nous pourrions en donner encore d'autres démonstrations aussi rapides; mais celle-ci me paraît la plus lumineuse , parce qu'on y voit parfaitement ce que ces équations expriment en dynamique. Et en effet, dans la première, par exemple, le premier membre Ay^2 ou A^2 est l'expression générale du couple accélérateur estimé autour de l'axe principal Ox ; et le second membre $(B - C)z^2$ est la valeur du couple provenant des forces centrifuges, estimé autour du même axe , comme il est facile de s'en assurer en cherchant ce couple d'une manière directe. Or, puisque le corps est ici abandonné à lui-même, c'est-à-dire ne reçoit l'action d'aucun couple étranger, il est clair que la quantité $(B - C)z^2$ est ici la seule à laquelle il faille égaler l'expression générale A^2 . Et la même chose se voit pour les deux autres équations toutes semblables , qui se rapportent aux deux autres axes principaux Oy et Oz . Remarque, 75. On peut encore remarquer que cette démonstration nous mène de suite aux équations du mouvement, dans le cas général où le corps i5..

The text on this page is estimated to be only 29.76% accurate

1 1 6 THEORIE NOUVELLE est soumis à Faction de forces accélératrices étrangères; car il est évident qu'il faudrait alors ajouter au second membre le couple qui provient de ces forces accélératrices autour de Taxe que Ton considère. Ainsi y en désignant par X, Y, Z les forces accélératrices qui agissent sur chaque molécule du corps parallèlement aux trois axes principaux, on aurait $\int (Zy - Yz) dm$ pour le couple dû à ces forces autour de Taxe principal Ox : et le premier membre $A \ddot{\theta}$ qui est l'expression générale du couple accélérateur dont le corps est animé, devrait être égalé à la somme des deux couples $(B - C) \ddot{\phi}$ et $\int (Zx - Xz) dm$, l'un dû aux forces centrifuges et l'autre aux forces accélératrices étrangères. D'où Ton voit avec évidence que les équations générales du mouvement de rotation d'un corps sollicité par des forces quelconques, sont
$$\begin{aligned} A \ddot{\theta} &= (B - C) \ddot{\phi} - \int (Zy - Yz) dm, \\ B \ddot{\phi} &= (C - A) \ddot{\theta} - \int (Xz - Zx) dm, \end{aligned}$$
 X, Y, Z étant les forces qui sollicitent chaque molécule du corps, suivant les directions des trois axes principaux. Quand ces forces sont de nature à se réduire à une force unique passant toujours par le centre de la rotation, les trois couples $\int (Zy - Yz) dm$, $\int (Xz - Zx) dm$, $\int (Yx - Xy) dm$ sont nuls, et les équations reviennent aux trois précédentes, comme si le corps était libre de toute action étrangère ; c'est ce premier cas simple et naturel qui bâtit le principal objet de notre analyse. H. CoiFimciU on aurait pu déduire notre théorie des trois équations précédentes. 76. Considérons les trois équations (i), (ii), (iii) et voyons les premiers corollaires qui en découlent.

DE LA ROTATION DES CORPS. 117

Chapitre I. Ou voit d'abord que l'équation différentielle (i) s'intègre immédiatement et donne $A'^2 - h B'^2 - C'' r'^2 = \text{constante} = G^2$ où je fais la constante égale à G^2 , parce qu'il est évident que le premier membre exprime le carré du couple G dont le corps est animé. Ainsi cette intégrale répond au théorème de la conservation de la grandeur du couple d'impulsion. Corollaire II. L'équation (a) s'intègre de même et donne $A/i^2 - h B/y' H - C r'^2 = \text{constante} = F$. Pour savoir à quoi répond la constante F , j'observe que le premier membre étant divisé par $9'$, exprime le moment d'inertie I du corps autour de l'axe de la rotation $d(p^2)$. On a donc la constante F égale à $I d'$ qui est évidemment l'expression des forces vives de toutes les molécules du corps : d'où résulte le théorème de la conservation des forces vives dans tout le cours de la rotation. Corollaire III. Si, au lieu de diviser le premier membre par $9'$, on le divisait par le produit $G 9$, il est clair que ce premier membre exprimerait le cosinus de l'inclinaison ϕ de l'axe G à l'axe 0 . D'où l'on voit que $G \cos \phi$ est encore l'expression de la constante F ; et comme G est constant (corollaire I), il en résulte $\cos \phi = \text{constante}$; ce qui donne le théorème de la conservation de la vitesse angulaire du corps estimée autour de l'axe du couple d'impulsion G .

lao THÉORIE NOUVELLE mêmes équations, qui deviennent, L»
 M» N* -+->;= I. AF • BF CF que le pôle du couple est toujours sur la
 sphère au rayon G, et sur Tellipsoïde aux rayons principaux yjAF^ /BF>
 VCF, directement proportionnels aux racines carrées des trois moments
 d'inertie A, B, C. Le pôle du couple décrit donc, dans l'intérieur du corps,
 Torbe fermé qui résulte de l'intersection de ces deux surfaces ; et Taxe lui-
 même OG trace le cône du second degré représenté par l'équation qu'on
 trouve en retranchant les deux premières l'une de l'autre. Corollaire VIII. Si,
 à la surfscice de Tellipsoïde central, qui est représentée par l'équation on
 conçoit un plan tangent au point dont les coordonnées soient désignées par
 $p > 7$, r, et si Ton nomme /?', q\ r' les coordonnées courantes de ce plan , on
 aura , pour son équation , $Xpp'-hhqq' -^0^'= F$, ou bien $Lp'-hM('/H-Nr'=F$.
 Or il est clair que cette équation est celle d'un plan perpendiculaire à la
 ligne G dont les trois projections sur les axes sont respectivement L, M, N.
 Donc, le plan qui touche l'ellipsoïde central au pôle instantané, est toujours
 parallèle au plan du couple d'impulsion. Et comme sa distance au centre est
 mesurée par $\$ \cos 1$, et que $0 \cos 1$ est constante (corollaire III), on voit
 que ce plan parallèle au plan du couple reste toujours à la même distance du
 centre de l'ellipsoïde.

DE LA ROTATION DES CORPS. Mais ce centre est immobile, et le plan du couple toujours parallèle à lui-même dans l'espace absolu ; donc ce plan tangent au pôle est toujours un seul et même plan fixe , et tout le mouvement de l'ellipsoïde central consiste à rouler, sans glisser, sur ce plan fixe, en tournant sur le rayon mené du centre au point de contact avec une vitesse angulaire ω mesurée par ce rayon; etc., etc. 77. On voit avec quelle facilité on pourrait tirer toute notre théorie des trois équations précédentes, à l'aide de quelques simples transformations. Mais ce n'est qu'une apparente fécondité de cette méthode de pur calcul qu'on appelle assez improprement Vanaljrse. Car si les théorèmes sont déjà connus, on découvre bien vite les transformations à faire pour que les équations y répondent ; mais quand on n'a aucune idée de ces théorèmes , on ne transforme guère qu'au hasard , et le plus souvent on n'arrive à rien. La vraie analyse est dans l'examen attentif du problème à résoudre, et dans ces premiers raisonnements qu'on fait pour le mettre en équations. Transformer ensuite ces équations, c'est-à-dire les combiner ensemble , ou en poser d'autres évidentes que l'on combine avec elles, n'est au fond que de la synthèse ; à moins que l'idée de chaque transformation ne nous soit donnée par quelque vue nouvelle de l'esprit, ou quelque nouveau raisonnement, ce qui nous fait rentrer dans la véritable analyse. Hors de cette voie lumineuse , il n'y a donc plus d'analyse , mais une obscure synthèse de formules algébriques que l'on pose^ pour ainsi dire, l'une sur l'autre, et sans trop prévoir ce que pourra donner cette combinaison. Voilà les idées nettes qu'il faut attacher aux mots : et c'est au fond ce que tout le monde paraît sentir, puisqu'on dit très-bien une heureuse transformation, et qu'on ne dit point un heureux raisonnement, ni une heureuse analyse. P. j6

The text on this page is estimated to be only 21.04% accurate

»»\WWWM^»WW»V»M p^ q^ r^ ^ -. I — -f- T- H — =
constante = -; — * ^ 7^ r» _ X'(/>'4-y'-fT^) — /i^ d'où la lettre m, qui
répond à la masse du corps, et La lettre R, à la P. ij

The text on this page is estimated to be only 26.19% accurate

ra/i THÉORIE NOUVELLE fi^raiideur de rellipsoïfle central^
auront entièrement disparu, comme i ela doit être : car il est évident que les
moments d'inertie du corps A , B, C, \di force vive lô*, le couple
d'impulsion G sont des quantités homogènes qui peuvent toutes être mises
sous cette même forme du produit mR* divisé par le carré d'une ligne ou le
rectangle de deux autres. 2. Et maintenant, si Ton fait les lignes kf)^ kq^ kr
respectivement «égales à X, jr^ 2, il viendra, pour les équations du
mouvement de rotation, les transformées suivantes: (0 ;;;-^*Â^^-.v= ^ a* '
b' ' c' /

The text on this page is estimated to be only 28.08% accurate

DE LA ROTATION DES CORPS. Ensuite, les équations (i) et {n) étant différentiées et combinées avec l'équation différentielle (3), donnent $\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{2}{3} \frac{d\theta}{dt} + \frac{4}{3} \theta = 0$. Si Ton ajoute ces trois dernières équations, et qu'on y mette, au lieu de $JC^{\wedge, \wedge}, z^{\wedge}$ leurs valeurs données par les trois précédentes, on trouvera d'abord $\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{2}{3} \frac{d\theta}{dt} + \frac{4}{3} \theta = s^{\wedge}$ et, réduisant le second membre, exactement de la même manière qu'on Ta fait (seconde partie, n° 65), il viendra $a-b^{\wedge}c^{\wedge}$ OU en employant, pour abréger, les mêmes lettres qu'au n° 61; faisant de plus, $Q \sim B - h \hat{=} C: A^{\wedge} =: H$, et tirant la racine carrée de part et d'autre, on aura Telle est, en fonction du rayon vecteur $u^{\wedge}$ l'expression très-simple de la vitesse $-r$ avec laquelle le pôle instantané décrit son orbe $\wedge$ à la surface de l'ellipsoïde central, et décrit en même temps la courbe 0 sur le plan du couple d'impulsion, qui demeure fixe dans l'espace absolu. 5. Pour avoir cette vitesse $\wedge = 3-$

The text on this page is estimated to be only 24.63% accurate

126 THÉORIE NOUVELLE peut obtenir par un calcul très-
 Éicile. Car, comme on a (à cause de $\leq^* r_z: X^* -f- r^* -4- Z^*$) $UU = XX -h$
 $JJ -4- 3Z$, * * • si Ton met, au lieu de jr, y^2 , jr, /, z, leurs valeurs données
 plus haut, on trouvera $e^S V \ll = -ir--^{\wedge} ({}^{\wedge} -\ll^{\wedge}) ({}^{\wedge} -P^{\wedge}) ({}^{\wedge} -7^{\wedge})$. (roù l'on
 tire, à cause de $2a^*e^* = s^*$, et de $ee'e = g^* \setminus \text{---} i$, et eu se servant des
 dénominations du n° 61, ,,,, du $v\text{---}'' v^{\wedge} \ll^* \text{---} Pa^* -+ -Q \ll^* \text{---} R (L)$ a ou ---
 $=^{\wedge} -r-.-i^{\wedge}$ Telle est, en fonction de m, l'expression de la vitesse avec
 laquelle le pôle instantané se rapproche ou s'éloigne alternativement du
 centre de Fellipsoïde central, et oscille ainsi suivant le rayon vecteur li,
 dami !a partie qui s'étend du maximum au minimum de ce rayon ; partie qui
 est $\wedge \text{---}$ ce quand A est $< /^{\wedge}$, et /S $\text{---} y$ quand h est $> b$, 6. Si, entre «ette
 équation (U)et la précédente (S), on élimine le temps /, ce qui se fait ici
 très-simplement en divisant, membre à îembre, l'une par l'autre, on aura,
 en s et «, l'équation différentielle $f/s u s/u^* \text{---} P' \ll^* -h H^{\wedge} \ll^* ytt \ll^* \text{---} Pw' -$
 $hQ/i' \text{---} -R'$ ce qui est exactement la même équaflon qu'on avait trouvée
 directement pour la polhodie (seconde partie, n°63). On pouvait donc se
 borner ici a calculer l'une des deux expressions -75 -7-'- car, en la
 comparant à celle de --- qui nous était déjà connue, on aurait trouvé l'autre :
 mais il est toujours bon de confirmer les résultats du calcul. 7. Quant à
 l'imaginaire $y \text{---} i$ que l'on voit dans les deux premières expressions, elle
 n'y est qu'en apparence; car les deux polynômes $u' - Pu^{\wedge} -h H$ et $h' - Pw^* H-$
 $Qtt^* - R$

The text on this page is estimated to be only 29.85% accurate

DE LA ROTATION DES CORPS. 127 sont ici essentiellement négatifs, à cause du rayon vecteur u toujours plus petit que la ligne jS , et toujours plus grand que chacune des deux autres a et 7 . II. 8. itoaintenant, l'équation différentielle (U), qui ne renferme que les deux variables u et t , étant mise sous la forme $h \frac{du}{dt} = - \frac{1}{2} (tt^2 - a^2) (p' - u'') (a' - 7)$ se ramène immédiatement aux quadratures. On aura donc en intégrant, et déterminant la constante arbitraire de manière que le temps t commence quand le rayon vecteur u est à son maximum $|3$, $t=f[u]-JW$), j désignant ici une certaine fonction de v ? ; et de là, par la fonction inverse que je désignerai par $u^{\wedge}$, on tirera 011 il est évident que $u^{\wedge}$ sera une fonction périodique du temps t . Ainsi, quoique le temps t croisse à l'infini, la valeur de cette fonction ne peut s'étendre que depuis le maximum de $u^{\wedge}$ qui est toujours $|3^{\wedge}$, jusqu'à son minimum qui est, ou y' , ou $a^{\wedge}$ selon qu'on a $A >$ ou $< h$. En désignant donc par t le temps que le pôle I met à passer d'un sommet de son orbe s au sommet suivant, temps exprimé, dans le premier cas, par t et dans le second, par t' si l'on demande la valeur du rayon u au bout d'un temps quelconque, on pourra commencer par ôter de ce temps donné tous les multiples de $4^{\wedge}$ qui y seraient contenus, et conserver seulement le reste, qui ne

28 THÉORIE WOLVELLE fiotirratt être que de la forme t , on t -
 $^{\wedge}$ - z , ou t - $^{\wedge}$ Zj ou $/-H$ $3t$. selon que le pôle I serait dans le premier, le
 deuxième, le troisième ou le quatrième qunrt de son orbe s . S). Connaissant
 la valeur de $ii^{\wedge}$ eu $/$. si ou la suppose substituée à la phce de $u^{\wedge}$ dans
 Féquation $ds = 7VP'^{*}'^* - f^{\wedge}* - r H$, on aura par une nouvelle intégration , et
 en déterminant la constante arbitraire de manière que l'arc s commence avec
 le temps $\mathfrak{L}$, $s=c = Y[t] -- F(o)$. l'équation où il faut observer qu'on doit
 mettre le temps donné / pris dans toute son étendue, et non pas diminué des
 multiples de $4'^{\wedge}$ qu'il pourrait contenir, comme il était permis de le faire
 dans l'expression précédente de w^* . Ayant ainsi le rayon u et l'arc c en
 fonction de $^{\wedge}$, on en pourra conclure la position du corps au bout d'un temps
 quelconque $/$, comme on Ta fait voir à la fin du chapitre précédent. 10. Mais
 ces intégrations ou quadratures ne peuvent se faire ni algébriquement, ni par
 des arcs de cercle ou des logarithmes; elles demandent essentiellement
 l'emploi des transcendentes elliptiques; de : $M>rte$ que le lieu du corps au
 bout d'un temps quelconque donné ne peut , en général, se calculer que par
 la voie des séries, ou au moyen de certaines Tables qu'on aurait construites
 pour ces fonctions supérieures. Dans certains cas particuliers, relatifs soit à
 la direction du couple d'impulsion, soit à l'espèce du corps, la difficulté
 s'abaisse, et tout se réduit aux règles ordinaires, comme nous le ferons voir
 un peu plus loin.

The text on this page is estimated to be only 18.14% accurate

DE LA ROTATION DES CORPS. lag III. Changement des variables s et u dans les forinides qui précèdent. H. Si, dans les expressions précédentes de $\bullet^\wedge - j -$, on change i m ■ en $0 -$, et $u^\wedge$ en $v^\wedge - h^\wedge$, ce qui donne $uu^\wedge s > Vj$ on aura les formules nouvelles ($7^\wedge = :^\wedge U^\wedge >' + h^\wedge Y - P(i' \gg 4 - h^\wedge) + H J v^\wedge \approx Uv^\wedge + h^\wedge y - P(i'^\wedge + h^\wedge y - h Qli'^\wedge 4 - A^\wedge) - r]$, où V est le rayon vecteur allant du centre de la courbe a au pôle instantané qui la décrit. 12. Or, en nommant y l'angle que ce rayon v fait avec une droite quelconque fixe située dans le plan de cette courbe $o -$, on a évidemment $\bullet \bullet \bullet v^\wedge (p^* = c^* - V^*$, Mettant au lieu de $a^\wedge$ et $sj^\wedge$ leurs valeurs ci-dessus, et multipliant tout par $k^\wedge v^\wedge j$ il vient $h^\wedge v'f^\wedge [(i >^* - h^\wedge h^\wedge y - P \{$ on trouvera "équation

• « i3o THÉORIE NOUVELLE et en posant, pour abréger, comme on l'a déjà fait (seconde partie, n° 61) , $\frac{1}{j} \ll -AA' + B/j^* - C$, ou $\{h^a - a')\{h' - b')(h'' - c^a) = D$, et observant qu'on a, entre D et A, la relation on aura l'équation où il est évident que le second membre est le carré parfait du binôme 13. Ainsi l'on a, en extrayant la racine carrée de part et d'autre, d'où, en dégagant (p et remettant pour D sa valeur on tire " $P^a Tt - k^a I \forall V^a$ " expression très-simple de la vitesse angulaire avec laquelle le pôle instantané de rotation tourne autour du centre de l'herpolhodie c ; cette vitesse, comme on le voit, est composée d'une partie constante, et d'une partie variable qui est réciproque au carré du rayon vecteur t^a , et, par conséquent, périodique comme ce rayon. 14. Si l'on divise cette expression de $-^a$ par celle de $-^9$ donnée plus baut (n° 12), on aura l'expression de $-^a$ çn/onction de v^a c'est-à-dire l'équation différentielle de la courbe plane 9, entre son rayon vecteur v et l'angle y que ce rayon décrit autour du centre de cette

The text on this page is estimated to be only 27.96% accurate

DE LA ROTATION DES CORPS. i3 courbe o*; cette équation sera donc $\rho = V \{ \dots \} - f^y - ?(\dots) - h^y - Q(\dots) - R$ ce qui s'accorde parfaitement avec l'équation polaire de l'herpothermie telle qu'on l'a trouvée directement (seconde partie, n° 66). On peut remarquer que cette équation ne renferme que les quatre constantes a, h, c, eX dont les trois premières sont relatives à l'espèce du corps, et la quatrième A , à la position du couple d'impulsion. Et il est clair que la constante k n'y doit pas entrer, puisque la courbe décrite par le pôle instantané ne peut dépendre de la grandeur $i : hk$ du couple qui a frappé le corps, ni par conséquent de la constante k qui répond aux forces vives: la courbe est décrite plus ou moins vite, mais elle est toujours la même pour les mêmes données a, A, c et A .

15. On peut employer, si l'on veut, ces nouvelles variables v et θ (θ au lieu des précédentes), pour avoir la position du corps au bout d'un temps quelconque t . Car, en intégrant la première équation qui donne $d\theta$ l'expression de θ en fonction de c , et faisant commencer le temps t avec le rayon vecteur on aura, comme plus haut (n° 8), $\theta = \dots$ De cette valeur θ on conclut celles des trois coordonnées x, y, z du pôle instantané à la surface de l'ellipsoïde central, puisque chacune d'elles x, y, z est donnée en «(n° 5), et, par conséquent, en θ : on a donc déjà la position de ce pôle sur l'ellipsoïde central. Mettant ensuite cette valeur de θ en t dans la seconde équation qui donne ρ en fonction de v , et intégrant, en faisant commencer l'intégration avec le temps t on aura $\rho = f(0-f(0))$; p. 18

The text on this page is estimated to be only 26.86% accurate

1 3i mÉORIB WOUVELLE ce qui donnera la position du pôle instantané sur le plan fixe du couple d'impulsion : et de là on pourra conclure la position du corps dans l'espace absolu au bout du temps t . Mais, quelques coordonnées qu'on emploie, l'intégration ramènera toujours, ce qui est ici fort naturel, à la théorie des fonctions elliptiques : théorie aujourd'hui très-connue, et à laquelle je renvoie le lecteur, pour ne pas m'écarter du principal objet de ce Mémoire. Je me bornerai donc à quelques exemples où les quadratures se font par les règles ordinaires. Application des formules à quelques cas particuliers qui n'exigent pas l'emploi des transcendentes elliptiques. I. Cas particuliers relatifs à la position du couple d'impulsion. 16. Il est presque inutile de s'arrêter au cas particulier de $A = r$; car il n'y a, sur la surface de l'ellipsoïde central, qu'un seul point où le plan tangent puisse être à une distance $A = a$ du centre de cet ellipsoïde. On a donc alors $M = r$, et le corps tourne constamment, avec une vitesse angulaire $\omega = a : A$, autour de son axe majeur «, lequel se confond avec l'axe du couple d'impulsion et demeure immobile et dans le corps et dans l'espace absolu. Il n'y a ici qu'une seule remarque à faire : c'est que le pôle instantané I étant immobile, il semble que la vitesse angulaire ω de ce pôle autour de l'axe du couple devrait être nulle, aussi bien que sa vitesse absolue v et non pas égale à la quantité finie ω que donne l'expression générale de ω quand on y fait $h := a$. Mais il faut observer que la vitesse angulaire d'un point autour d'un centre fixe est une quantité qui ne dépend pas de la distance de ce point au centre que l'on considère. Ainsi, quoique le rayon vecteur h du pôle I soit ici égal à zéro et que ce pôle soit réellement immobile, on n'en peut pas conclure que sa vitesse angulaire ω soit aussi égale à zéro ; et

DE LA ROTATION DES CORPS. 133 voilà poiii'qubi ofn la trouve égale à la quantité finie a^2/k . Et Ton peut bien voir d'ailleurs que cette valeur est la véritable; car, dans notre analyse, où la grandeur du couple d'impulsion est exprimée par h et le moment d'inertie du corps par I il est clair que le quotient t exprime la rotation θ , c'est-à-dire la vitesse angulaire d'un point quelconque de ce corps, et, par conséquent, celle du point particulier qui fait le pôle lui-même. On peut dire exactement les mêmes choses dans le cas particulier de $A = c$, c'est-à-dire quand le plan du couple sera donné tangent au pôle mineur de l'ellipsoïde : il n'y a qu'à changer a en c . Mais il n'en est pas de même dans le cas singulier de h égal à l'axe moyen b ; car, outre le pôle moyen B , il y a sur l'ellipsoïde une infinité de points I où le plan tangent du couple peut être à la même distance $h = b$ du centre de cet ellipsoïde ; et cette suite de points forme les deux ellipses singulières dont j'ai précédemment parlé (seconde partie, n°68), et sur l'une desquelles le pôle instantané I peut se mouvoir dans toute la suite du temps. C'est ce qu'il est bon de développer. Soit donc dans le cas singulier de $h = b$.

17. Si l'on suppose $h = b$ on trouve d'abord ces réductions, $a^2 = f^2 = b^2$; et l'équation différentielle du n°8 devient $2dt^2$ « du laquelle s'intègre par logarithmes, et donne, en y faisant, pour abrégé, $\phi = \int \frac{1}{x} dx$ » - h l'équation

18..

i34 THÉORIE NOUVELLE intégrale où l'on a déterminé la constante arbitraire par la supposition que le temps t commence quand le rayon vecteur $u = \wedge$. On a donc, en passant des logarithmes aux exponentielles, l'équation a lit / d'où Ton tire, en résolvant par rapport à a^* , $,-a \text{ — } Aa \cdot 4^\wedge$ pour l'expression du rayon vecteur u en fonction du temps t . Or chacune des coordonnées $X_{jjr}^\wedge z$ du pôle instantané I étant elle-même exprimée en m^* , on en aura la valeur en t_j et, par conséquent, on saura quelle est, sur la surface de l'ellipsoïde central, la position du pôle I au bout d'un temps quelconque t . Pour avoir maintenant sa position sur le plan fixe du couple d'impulsion, au bout du même temps, on prendra, pour les deux coordonnées de ce point 9 le rayon vecteur v émané du centre de l'herpolhodie (7, avec l'angle (f que ce rayon fait avec une droite fixe dans le plan de cette courbe. Or, à cause de $A = 6$, on a $i; \gg = u^\wedge - / \gg$, et l'équation précédente donne sur-le-champ $V = nt \text{ — } ni^* ' \text{ '}$

DE LA ROTATION DES CORPS. 135

Connaissant donc, en fonction de t les deux coordonnées polaires p et θ du pôle I sur le plan fixe du couple d'impulsion, et ayant déjà les trois coordonnées x, y, z du même pôle sur la surface de l'ellipsoïde central on en conclura, comme on l'a dit plus haut, la position que le corps doit occuper dans l'espace au bout du temps t et la question sera ainsi complètement résolue.

18. De l'équation ci-dessus, si l'on tire t en ϕ , et qu'on le mette dans l'expression précédente de $\dot{\phi}$ on a $\frac{2}{7} V = n t \sqrt{1 - \frac{h^2}{b^2}}$ pour l'équation polaire de la double spirale (7 décrite par le pôle F à l'instantané dans l'espace absolu; ce qui s'accorde parfaitement avec ce qu'on avait déjà trouvé dans la seconde partie de ce Mémoire.

II. Cas particuliers relatifs à l'espèce du corps. L'ellipsoïde central du corps peut être un sphéroïde elliptique allongé, ou aplati. Dans les pôles, ce qui convient à tous les corps de révolution, et à une infinité d'autres où le corps a deux de ses trois moments principaux d'inertie égaux entre eux: et enfin, l'ellipsoïde central peut être une sphère parfaite, ce qui convient, non-seulement aux corps sphériques ou réguliers, mais encore à une infinité d'autres.

19. Soit d'abord le cas d'un sphéroïde allongé, c'est-à-dire le cas de $b = c$; on trouve alors $a' = p' = 7^* = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{b^2}{1 - e^2}} = \text{constante}$, et, par conséquent, $i^* = p^* = A^* = s^* = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{b^2}{1 - e^2}} = \text{constante}$.

i36 THÉOFILE NOUVELLE d'où Ton voit d'abord que la vitesse
 angulaire ω du corps autour du rayon instantané $u^\wedge$ et la vitesse angulaire ω
 sin i autour du rayon u , sont toutes deux constantes, et respectivement
 égales à $0 = \omega^5 \sin i = \omega^\wedge - \omega$; k A On trouve ensuite, $i^\wedge$ que la polhodie s est
 un cercle décrit autour de Taxe du sphéroïde, d'un rayon p exprimé par et
 que la circonférence en est parcourue par le pôle instantané I avec ds une
 vitesse uniforme $==$ dont la valeur est dt $7t^\wedge h k h'$ d'où résulte, en divisant
 $^\wedge$ par le rayon p , la valeur Tk pour la vitesse angulaire de ce pôle autour de
 l'axe du sphéroïde, $a^\wedge$. Que l'herpolhodie a est un autre cercle d'un rayon ou
 $P = ^\wedge$, et que la circonférence de ce cercle décrit autour de l'axe fixe du
 couple d'impulsion, est parcourue avec une vitesse uniforme —
 parfaitement égale à la précédente $^\wedge$; d'où résulte, en divisant $^\wedge = ^\wedge$ par le
 rayon $i^\wedge$, le quotient tt pour la vitesse angulaire du pôle I autour de Taxe
 fixe dans l'espace absolu : valeur qui s'accorde parfai

The text on this page is estimated to be only 20.71% accurate

DE LA ROTATION DES CORPS. 1 37 tement, comme cela doit être, avec celle (!^ue donnerait l'expression générale de ■ — si l'on y faisait $b = c$. On voit donc qu'ici tout est uniforme et circulaire, et qu'il n'est pour ainsi dire besoin d'aucune intégration; car on a immédiatement $b' : t : z r = b$ en faisant commencer l'angle f et les arcs $\wedge$ et a avec le temps t , 20. Dans le cas particulier de $b = a$ ce qui répond au cas d'un sphéroïde central aplati vers les pôles on trouverait, moiatis mutandis, des expressions semblables à celles précédentes* 21. Enfin, si l'on avait les axes extrêmes a et c égaux entre eux, ce qui entraînerait l'égalité des trois axes a , b , c et de la ligne A , il n'y aurait plus rien qui ne fût, pour ainsi dire, essentiel de soi-même. Le corps tournerait constamment autour d'un même diamètre ia avec une vitesse angulaire $Q = n \setminus k$. Il faut toutefois se rappeler que ce cas si particulier de $a = b = c$ convient non-seulement aux corps homogènes qui sont sphériques ou réguliers, mais encore à une infinité d'autres de constitution quelconque.

II CHAPITRE DE LA NOUVELLE IMAGE DE LA ROTATION DES CORPS. > 22. Soient toujours O le centre du corps; OG l'axe du couple d'impulsion; OI l'axe instantané de la rotation ϕ , et i l'inclinaison mutuelle de ces deux axes. On peut toujours supposer qu'à chaque instant de la rotation ϕ soit décomposée en deux: l'une autour de l'axe OG du couple, et l'autre autour d'une droite OT perpendiculaire à OG dans le plan des deux axes OG et OI . Or, par la première rotation $\phi \cos i$ autour de OG , cet axe OG reste

i38 THÉORIE NOUVELLE immobile dans le corps et dans l'espace; mais par la seconde Osin / autour de OT, il y a une certaine ligne OG' du corps qui vient se placer sur OG dans l'espace : de sorte que OG , qui est réellement fixe dans l'espace, paraît décrire un angle GOG' dans l'intérieur du corps. Or c'est le plan de cet angle infiniment petit, et dont la valeur $GOG' = \sin i \cdot r$ qui forme l'élément de la surface conique tracée par l'axe OG du couple dans l'intérieur du corps. 25. La ligne OT, qui est perpendiculaire au plan de cet angle, est donc normale à la surface de ce cône. La suite des normales OT correspondantes à toutes les positions de la génératrice OG forme donc, dans l'intérieur du corps, une autre surface conique de même sommet normale, à la première. Et il est évident que ces deux cônes que je représente, pour abrégé, par (OG) et (OT), sont en quelque sorte réciproques l'un de l'autre : car les génératrices de l'un peuvent être regardées comme la suite des normales à la surface de l'autre. 24. On trouve aisément (seconde partie, n° 76, corollaire VII) que la surface conique, décrite par l'axe OG du couple, a pour équation on peut donc en conclure que l'autre surface conique , décrite par OT toujours normale à la première, a pour équation $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. $h^2/a^2 + h^2/b^2 - h^2/c^2 = 0$ 25. On voit donc : Que ces surfaces sont celles de deux cônes droits, à bases elliptiques, autour d'un axe commun qui est, ou le grand axe a, ou le petit axe c, de l'ellipsoïde central , selon qu'on a $a > b$, ou $h < b$] Que , dans le cas singulier de $A = 6$, le premier cône (OG), décrit par l'axe du couple , se réduit à l'un des deux plans représentés par l'équation $V h^2 = c^2$

DE LA ROTATION DES CORPS. iSg et le second cône (OT) , à une simple droite OT perpendiculaire à ce plan ; Et qu'enfin , dans le cas où Tellipsoïde central du corps est de révolution, les deux cônes sont des cônes droits à bases circulaires autour de l'axe du sphéroïde. 26. Voyons maintenant , à l'aide de ces images, comment s'exécute dans l'espace le mouvement d'un corps qui a reçu Timpulsion d'un couple dans une direction quelconque donnée. Pour mieux fixer les idées et simplifier le discours, on peut considérer le plan MON du couple (qui reste fixe dans l'espace) comme étant le plan horizontal ^ et, par conséquent, l'axe OG de ce couple comme la verticale. Cela posé, il est visible que, dans tout le cours du mouvement, la surface du premier cône(OG) doit passer par la verticale OG, et que la surface du second (OT) doit être en contact avec le plan horizontal MN. Car, la ligne OG étant toujours normale à la surface du cône (OT), et perpendiculaire au plan MN , ce plan horizontal MN ne peut être autre chose que le plan tangent à la surface. Donc, penriant le mouvement du corps ^ le cône (OT) demeure perpétuellement en contact avec le plan fixe du couple appliqué, 27. Actuellement, il est bien facile de se représenter le mouvement du corps par celui de ce cône intérieur (OT), qui est attaché au corps et l'entraîne avec soi dans l'espace absolu. En effet, par la rotation ôsini autour de la génératrice OT, ce F'O. 21 cône roule sur le plan horizontal MN et amène en contact , au bout d'un instant dt, une certaine génératrice infiniment voisine OP : par la seconde rotation Q cos i autour de la verticale OG , cette génératrice OV glisse sur ce même plan en tournant d'un certain angle infiniment petit TOT*. Ainsi, par les deux rotations composantes de 6, la génératrice OT, ou la ligne de contact du cône avec le plan MN a décrit sur ce plan, au bout d'un instant dty un angle TOT^ composé des deux angles TOT', TOT' dont on vient de parler. Pour se représenter le mouvement du corps, il faut donc concevoir qu'à chaque instant dtj on fait rouler le cône (OT) sur le plan P. r9

i4o THÉORIE NOUVELLE fixe MN , par l'angle clù à la rotation
 ô sin i autour de la ligne de contact OT; et, ensuite, qu'on le fait glisser, sur
 ce même plan, par Tangle dû à la rotction 9 cosi autour de la verticale OG :
 et par ces deux mouvements, exécutes l'un après l'autre, ori a le lieu du
 corps au bout de cet instant df. 28. Dans la nature , ces deux mouvements
 ne sont pas exécutés l'un après l'autre, ils sont simultanés, ou plutôt ils n'en
 font qu'un seul qui est le composé de ces deux-là. Mais, comme on ne
 considère qu'un temps infiniment petit dt, les deux espaces qu'un point
 quelconque du corps tend à décrire en vertu des deux rotations 6 sin i et
 9cosi, sont censés rectilignes ^ comme les deux côtés d'un parallélogramme
 : et ce point étant porté d'abord le long de l'un de ces côtés, et ensuite sur
 une ligne égale et parallèle à l'autre, se trouve alors au bout de la diagonale,
 c'est-à-dire au même lieu de l'espace où il serait arrivé par son mouvement
 naturel en suivant cette diagonale. Si donc on imagine que cette double
 opération , que je viens de décrire, soit répétée pour chaque partie
 infiniment petite dt du temps t , on aura la suite des lieux où le corps passe
 dans le cours de sa rotation, ou l'image fidèle de son mouvement dans
 l'espace. Mais si l'on demandait simplement de marquer le lieu où se
 trouvera le corps au bout d'un temps quelconque^ sans s'occuper de la route
 que le corps suit pour y arriver, on n'aurait pas besoin de supposer que la
 double opération dont il s'agit soit répétée à chaque instant. On pourrait d'un
 seul coup faire rouler le cône (OT) par un angle fini w égal à la somme de
 tous les angles TOT' que la génératrice OT trace à la surface de ce cône
 pendant le temps donné ^; et, ensuite , le faire glisser en tournant autour de
 la verticale OG par \\x\ angle ^ égal à la somme de tous les angles TOV qui
 sont dus à la rotation du corps autour de cette verticale pendant le même
 temps A Par ces deux opérations, exécutées l'une après l'autre, et dans
 Tordre qu'on voudra, le corps, il est vrai, n'aurait pas suivi le mouvement
 qu'il a dans la nature, mais il se trouverait actuellement posé dans le même

The text on this page is estimated to be only 29.91% accurate

DE LA ROTATION D_tS CORPS. i₄i lieu de l'espace où il arrive par son mouvement naturel au bout du temps t, D*où l'on voit que le problème de déterminer le lieu du corps au bout d'un temps quelconque, se réduit à chercher les deux sommes ou intégrales $G \geq /(\text{Tor})$, $i^{\wedge} /(\text{i'or})$, en fonction du temps t. 29. Quanta la seconde intégrale

i4a THÉORIE NOUVELLE d'où l'on tire $f - J A' B^{\wedge} - h^* C \gg$) —
 Pour avoir w , il faudra donc mettre d'abord, au lieu de 0^* , sa valeur en
 fonction de $\wedge$, et puis intégrer l'expression $\int (A : \hat{o}^* - h^{\wedge})$; mais cette
 intégrale demande encore l'emploi des fonctions elliptiques. 30. Il faut
 remarquer que les lignes $hetk$ étant essentiellement positives, et $d(\wedge)$ étant
 égal $k - dt^{\wedge}$ cet angle $d^{\wedge}$ peut toujours être regardé comme ayant le même
 signe $+$; mais l'angle dt^u a tantôt le signe $-$ et tantôt le signe $-$, selon que
 h est $<$ ou $> A$. Fjg. 21. Si $A < 6$, le cône OT entoure le petit axe c de
 l'ellipsoïde central, et, dans ce cas, l'angle $\wedge o$, de même signe que $dif^{\wedge}$
 s'ajoute à cet angle pour former l'angle $d(f)$ que la projection de l'axe
 instantané décrit autour de l'axe du couple. FiG. 22. Si $h > by$ le cône (OT)
 entoure le grand axe a ; et, dans ce cas, l'angle

DE LA ROTATION DES CORPS. 143 Dans ce cas, on n'a besoin que des règles ordinaires du calcul intégral pour déterminer la position du corps au bout d'un temps donné t . Car, pour amener le corps dans cette position, il suffirait de le faire tourner d'abord autour de l'axe du couple d'un angle et ensuite, de le faire tourner sur son axe singulier OT, d'un angle t égal à $\frac{1}{\sin i} dt$. Or, dans le cas de $A = ft$, nous avons trouvé, pour l'expression de $Q \sin i$ en fonction de t , $nt^* \dots \frac{2}{1} t f^* \frac{7}{2} \sin I = -7 \cdot 5$ OÙ e désigne la base des logarithmes de Néper, et n la valeur du radical $\sqrt[3]{b^* - b^}$. Multipliant donc par dt cette expression de $6 \sin i$, intégrant, et faisant commencer l'arc t avec le temps $^$, on a $a = a$ (arc tang $e^{***} \sim 7$) 32. Les deux cas de $h = a^$ ou $h = c$ n'ont aucune difficulté; car les axes OI, OG se confondent entre eux et avec l'axe a , ou l'axe c du corps; et tout se réduit à une simple rotation constante $h[k]$ autour de cet axe a , ou c , qui demeure immobile dans l'espace absolu. 33. Si l'ellipsoïde central a deux de ses axes égaux entre eux, le cône (OT) est un cône droit à base circulaire autour de l'axe de révolution de ce sphéroïde. Alors $6 \sin i$ est constant, et, par conséquent, $du^>$ est constant, aussi bien que $dt^$ et ^{9} , et l'on a sur-le-champ la valeur de ces angles pour un temps quelconque $/$. Si l'ellipsoïde central a ses trois axes égaux et devient une sphère, tout se réduit à un mouvement simple de rotation autour du diamètre qui fait l'axe du couple appliqué G. Tous ces cas particuliers n'ont aucune espèce de difficulté et se résolvent d'eux-mêmes: il n'y a de remarquable que le cas singulier de $h = b$ qui se résout par l'intégration de la différentielle $fQ \sin i dt$ y laquelle ne dépend que des fonctions exponentielles et circulaires.

i44 THÉORIE NOUVELLE Remarque 1. 54. 3'ai trouvé plus haut l'expression de l'angle r/w par celle de l'angle $d(p)$, qui nous était déjà connue (n** 13), Mais cet angle r/w , que trace le cône (OT) en roulant sur le plan du couple, peut se trouver aussi d'une manière directe, comme on va le voir dans l'article suivant, ce qui servira à confirmer notre analyse. Au point T de la surface de ce cône (OT), la ligne de moindre courbure est évidemment la génératrice OT; et, par conséquent, la ligne de plus grande courbure est perpendiculaire à cette génératrice. Considérons sur cette ligne de courbure l'arc infiniment petit ds qui se couche en un instant dt sur le plan MN quand le cône roule sur ce plan en vertu de la rotation $6 \sin i$ qu'il a sur sa génératrice actuelle OT, Il est évident que $0 \sin i \cdot dt$ est l'angle de contingence, c'est-à-dire l'angle formé par les deux tangentes menées aux extrémités de l'arc ds ou, ce qui revient au même, l'angle formé par les deux normales menées à la surface du cône en ces deux points. Or cet angle est exprimé par $\frac{ds}{R}$ en nommant R le rayon de la courbure. On a donc $6 \sin i \cdot dt = \frac{ds}{R}$ Mais l'angle formé par les deux génératrices voisines OT et OT' qui vont du point O aux deux bouts du même arc ds et que nous avons nommé dt_u , est évidemment exprimé par j (is fis $dt_u = -rr' = OT \wedge \hat{o} \sin i$ / on a donc, pour l'expression de dt_u , $dt_u = \frac{ds}{R} \sin i$ où R désigne le rayon de la plus grande courbure à la surface du cône (OT), au point T extrémité de la génératrice OT = $kesinL$

The text on this page is estimated to be only 21.18% accurate

DE LA BOTATION DES CORPS. i45 Or, l'équation de la surface conique (OT) étant ' -h TZ : = O A»— fl» A»— 6» A»— c» le rayon a de la courbure en un point quelconque dont les coordonnées seraient $x^{jr}z^{esi}$ exprimé par $R = (A' — /; =')(0?' H- ^» H- 3')$ et, comme le point T dont il s'agit n'est pas un point quelconque de la surface du cône (C) mais un point qui doit se trouver en même temps sur la surface de l'ellipsoïde dont l'équation est $7» »' I "+* TTl 177 = ^ TI» (/» — «»))» (A» — *)» > (A' — C»))» (/4> ^2\alpha$ le trinôme qui est sous le radical se réduit ici à la constante — IT''^* En substituant cette valeur, il vient donc pour r, cette expression $(A» \sim fl»)(A^{--6^})(A» — cM$ Or on a $^> -^{^} _ ^ ^2 3^ OT^* = k^6^ \sin» i$; il vient donc, pour l'expression de d/ ' ce qui s'accorde parfaitement avec ce qu'on avait trouvé plus haut par une voie différente. Remarque II. 55. Je ferai encore ici une remarque importante pour montrer com- $i^{iq}, ^3.$ ment, dans le cas de $h> b^$ le mouvement angulaire df du pôle instantané 1 de rotation est égal à la différence $d^ — dtù$ de l'angle $d'^$ par lequel le cône (OT) glisse sur le plan du couple, à l'angle $d(\hat{o}$ par \

i46 THÉOUIE NOUVELLE lequel ce cône roule sur le même plan ; tandis que , dans le cas de $h A$, on sait que le cône décrit par OT a pour axe le grand axe $OA = a$ de l'ellipsoïde central : donc, si l'on mène à ce cône le plan tangent suivant OT , ce qui sera le plan même du couple d'impulsion, le cône (OT) sera situé au-dessus de ce plan du même côté que les points I et P. Si donc, en vertu de la rotation $\dot{\phi}$ autour de OP, ce cône glisse en un instant dt d'un angle $d\phi$ sur ce plan tangent, il est clair qu'en vertu de la rotation $Q \sin \theta$ autour de OT, il roule sur le même plan par un angle $r \cos \theta$ de signe contraire à $r \sin \theta$; de sorte que le mouvement angulaire $d\phi$ de la génératrice OT est exprimé par la différence $d\phi - d\theta$ de ces deux angles. Fig. 21 . Mais si l'on a $A < f$, ce n'est plus autour du grand axe OA , mais autour du petit axe OC, que le cône (OT) se trouve décrit. Et alors ce cône, au lieu d'être situé au-dessus du plan qui le touche en OT, du même côté que le pôle I et le point P, se trouve situé au-dessous, du côté opposé. Si donc ce cône, par la rotation autour de OP, glisse sur le plan d'un angle $d\phi$ il est clair que par l'autre rotation autour de OT, il roule sur ce plan d'un angle $d\theta$ de même signe que $d\phi$: de sorte que, dans ce cas, le mouvement angulaire $d\theta$ du point T est exprimé par la somme $d\phi + d\theta$ de ces deux angles. 36. On voit par là comment il arrive que, dans le cas singulier de $A = 6$, on a simplement $d\theta = d\phi = 0$ car $\cos \theta = 0$: $d\theta = -d\phi$:

DE LA ROTATION DES CORPS. 147 car, le cas de $\alpha = 6$ pouvant être considéré comme appartenant à la fois à l'un et à l'autre des deux cas précédents, l'angle θ devrait avoir également le signe + et le signe — ; ce qui ne peut être ici, à moins qu'on n'ait $\dot{\theta} = 0$: c'est, en effet, ce qui a lieu, et réduit alors $\dot{\theta}$ à $d\alpha$, c'est-à-dire que, dans ce cas singulier, la vitesse angulaire du pôle instantané, autour de l'axe fixe du couple, est constante et mesurée par j dans toute la suite du mouvement. Résumé de notre théorie.

57. On peut donc considérer, dans l'intérieur du corps α trois cônes du second ordre, savoir : 1°. I^{er} cône (OI) décrit par l'axe instantané OI ; 2°. Le cône (OT) décrit par la projection continuelle de OI sur le plan fixe MN du couple d'impulsion ; 3°. I^{er} cône (OG) décrit par l'axe fixe OG de ce couple dans l'intérieur du mobile. Ces trois cônes sont droits, à bases elliptiques, et tous trois décrits autour d'un même axe, qui est, ou le grand axe a , ou le petit axe c de l'ellipsoïde central, selon que A est $>$ ou $<$ que V_{axe} moyen b de cet ellipsoïde. Dans le cas singulier de $A = 6$, le cône (OI) se réduit à un plan passant par l'axe moyen. Le cône (OG) se réduit à un autre plan passant par ce même axe, et le cône (OT) se réduit à une droite perpendiculaire à ce dernier plan. Les surfaces de ces cônes sont toutes trois décrites et achevées dans le même temps. L'axe OG du couple trace la sienne avec une vitesse angulaire $\dot{\theta} = y/e\alpha$. L'axe OT trace la sienne avec une vitesse angulaire $\dot{\theta} = \frac{(A - ii)(A - \&)(A - c)}{dt} \sim A'it(>0' - A'') P. ao$

i48 THÉORIE NOUVELLE L'axe OI trace la sienne avec une vitesse angulaire que Ton trouve «•gale à expression où Ton a $\wedge$ -, 'rr'h'-i-b'c'-hc'a'}/t $\wedge$ —2a'bc' et 38. Mais, au lieu de ces trois cônes, ou peut ne considérer que trois lignes coufbes, et simplifier ainsi les images. Car, I étant le pôle instantané à la surface de Tellipsoïde central , T la projection de ce point sur le plan du couple, et P sa projection sur Taxe OG, on peut considérer les trois orbes elliptiques, à double courbure, 5, t et n décrits par les points I, T et P dans l'intérieur du corps, et regarder ces orbes comme les bases de nos trois surfaces coniques dont le commun sommet est au' centre O. Faisant donc abstraction de tout le reste, pour ne plus voir que ce centre O et l'une de ces trois espèces de roues $\wedge$, t, tt, que je viens de définir, le mouvement du corps pourrait se peindre des trois manières suivantes : Fk;. a/j. I. Si l'on suppose que l'orbe $\wedge$, mis en contact avec le plan fixe MIN parallèle au plan du couple, roule sans glisser sur ce plan, et de manière qu'il tourne sans cesse sur son rayon OI avec une vitesse angulaire 9 proportionnelle à ce rayon , on aura le mouvement précis du corps dans l'espace : c'est l'image la plus claire de ce mouvement. IL Si, sur le plan MON du couple (qu'on suppose ici mené par le centre O), on fait rouler l'orbe t avec la vitesse angulaire -p trouvée ci-dessus, et qu'en même temps on le fasse glisser avec Ja vitesse angulaire constante j9 on aura de mcme la représentation exacte du mouvement du corps : c'est une autre image de ce mouvement, mais un peu moins simple que la précédente. III. Enfin , si l'on imagine que l'orbe tt, dont le rayon OP est constant et de longueur A, glisse le long de sa tangente au point P

DE LA ROTATION DES CORPS. 149 avec une vitesse angulaire
 - — 7 > et tourne sur son rayon OP avec une vitesse angulaire constante t'
 on aura une troisième image du mouvement du corps; mais peut-être encore
 moins simple que la seconde. On pourrait donc écarter l'une et l'autre; mais,
 dans une matière aussi difficile, cette variété de démonstrations ne peut que
 jeter plus de jour sur le fond des choses, et je n'ai pas cru devoir les
 supprimer. Au reste, de toutes ces démonstrations, la meilleure, je veux dire
 celle où l'esprit trouve l'appui le plus naturel et le plus sensible, est celle de
 l'ellipsoïde central, dont on retient le centre immobile au même point de
 l'espace, et qu'on fait rouler sur le plan fixe du couple, sans aucun
 mouvement de rotation sur ce plan. Équations des trois orbes 5, t, tt, que
 nous venons de considérer, 39. On a déjà vu que l'orbe j, décrit à la surface
 de l'ellipsoïde central, par le pôle instantané I, est donné par l'intersection
 de cet ellipsoïde, dont l'équation est $r^2 = 0$; $r^2 + \dots = \dots$ avec la surface d'un
 autre ellipsoïde, dont l'équation est x', y', z' étant les coordonnées du pôle I
 parallèles aux axes respectifs a, h, c de l'ellipsoïde central. On a vu que le
 plan du couple, supposé conduit par le centre O de cet ellipsoïde, a pour
 équation Donc, si du pôle I on abaisse une perpendiculaire IT sur ce plan,
 on aura, pour les équations de cette droite, (4) $a^2 z' \{x - x'\}^2 + c^2 x' \{z - z'\} = 0$,
 (5) $a^2 y \{x - x'\} - b^2 x^2 y - y = 0$. 20..

150 THÉORIE NOUVELLE Or, si de ces trois dernières équations, on tire les valeurs de j , j^z coordonnées du pied T de la perpendiculaire, on trouvera [en faisant les réductions qui proviennent des deux premières équations (i) et (ti)], ces expressions très-simples, d'où l'on tire, à x , b^y , c^z Donc, en mettant ces valeurs de $x' f^z$ dans les équations (i) et (2), on aura en x, f^z les deux équations $a'x \gg b^y c^z \cdot -^I$. — I {h' — a'Y (h' — b^y {h'^c^y -r- , - fTT, -f- tt: TTT — i qui appartiennent à deux nouveaux ellipsoïdes dont l'intersection donne l'orbite t décrite par le point T qui est la projection continuelle du pôle I sur le plan du couple. Remarque I. iO. Si l'on relranche ces deux équations l'une de l'autre, on a $f OT^r \cdot -^r$, At $^{\wedge} \hat{a}^{\wedge} = \wedge / i' — a^{\wedge} // — b^{\wedge} h' —$ équation de la surface conique décrite par la ligne Oi dans l'intérieur du corps. Et c'est ce qui s'accorde parfaitement avec ce que nous avons trouvé d'une autre manière, en cherchant cette surface conique, comme la suite des normales OT à la surface du cône décrit par l'axe OG du couple dans l'intérieur du mobile. Et, en effet, cette dernière surface décrite par OG a pour équation (OG) $(A' - a^{\wedge}) x^4 - (A^* - b^{\wedge}) j r^{\wedge} - h \{h\} - c \gg 2 \gg = 0$. Or il est clair que l'une de ces deux surfaces coniques peut être re

The text on this page is estimated to be only 23.51% accurate

DE LA ROTATION DES CORPS. i5f gardée comme la suite des normales à la surface de l'autre : d'où Ton Voit qu'il suffit d'en connaître une pour les avoir toutes deux. 41. Dans le cas singulier de $h = by$ le cône (OG) se réduit à un plan passant par l'axe moyen bj et dont l'équation est v^2 et le cône ;OT) à une simple ligne droite perpendiculaire à ce plan, et dont l'équation est Par conséquent, l'orbite 7 décrite par le point T ne peut être ici qu'une ligne terminée OT, allant du centre O jusqu'au point T qui répond à la distance maximum $\sqrt{6}$ — 6' de ce point au centre O. 42. Dans les deux cas particuliers de $A = \hat{a}$, ou $A = c$, l'orbite 7 se réduit à un point qui est le centre O de l'ellipsoïde central. Renvoie II. 43. Si Ton ne combinait ensemble que les équations .T. (ri,, ;4 . et S pour en éliminer $x \setminus j \setminus r^0$ et qu'on n'explorât point l'équation Hi]3) du plan du couple, on aurait en $j^r, j^{\wedge}, z$ une équation qui répondrait à la surface tracée par la suite des normales IT que Ton mènerait à la surface de l'ellipsoïde central , le long de l'orbite s décrite par le pôle instantané I ; et si l'on portait ensuite sur chaque normale IT, à partir de son pied I , et du même côté que l'ellipsoïde , une longueur IT égale à la ligne A , la suite des extrémités de toutes ces lignes formerait encore l'orbite 7 décrite par le point T. Au lieu de l'équation (3^ on pourrait donc employer l'équation suivante : $'p: x^{\wedge}x')$ — $hCr-j^{\wedge}/-^{\wedge}.>^{\wedge}xv = A^*$, qui exprime que la ligne IT est de longueur constante h. Mais celle de celle équation exprimerait également que la ligne IT peut être portée

i52 THÉORIE NOUVELLE de l'autre côté du plan tangent, la combinaison des cinq équations (i), (2), (4), (5) et (P) donnerait, non-seulement l'orbite t décrite par le pied de la perpendiculaire IT au plan du couple, mais une autre orbite t' décrite par le point T' situé à la même distance TT' au dehors de l'ellipsoïde : courbe tout à fait différente dans l'espace relatif, et qui est ici étrangère à la question; mais, dans l'espace absolu, la route du point T' serait parfaitement égale et parallèle à la route (lu point T . Remarque III. 44. La combinaison des cinq équations (i), (2), (4), (5) et P est peut-être encore plus facile que celle des quatre premières avec l'équation (3). Car, en tirant des équations (4) et (5) les valeurs de $(z - z')$, $(j - ^j)$ pour les porter dans l'équation (P), on a tout de suite. Il j-i d'où, en mettant pour $— -+—$ sa valeur $^ -^$ tirée de l'équation (2), on a ce qui donne $X' = 7A' \pm r_i''$ et il est évident qu'on aurait de même expressions toutes semblables à celles du $n^{\wedge} 39$, mais où des deux signes $\pm$ il ne faut prendre que le signe $—$, si l'on veut ne considérer, sur la normale IT , que le point T qui tombe du même côté que la surface de l'ellipsoïde central à l'égard du plan tangent en I : car, en prenant les signes $-f-$, on aurait un point T situé de l'autre côté de ce plan tangent, et la ligne OT , menée du centre O , ne serait plus perpendiculaire à la normale IT , comme on le veut dans la question proposée.

The text on this page is estimated to be only 26.14% accurate

DE LA ROTATION DES œRPS. i53 45. Au reste, pour lever toute équivoque, il est évident que les coordonnées du point T qui sont x, y, z doivent être telles, qu'elles satisfassent à l'équation du plan du couple, qui est $— \wedge \blacksquare \% -- + - — = 0$. a} o* c* Or, en y mettant pour $x^j y z$ les doubles valeurs $(A \ll \pm : fl >)^{\wedge'} (A' it^{\wedge} Mr' (h) \pm e) z^* X — , J — j^{\wedge} , Z — : , a' *^{\wedge} o^* \&$ on aurait $^{\wedge'} (A \ll \pm^{\wedge} \ll) +^{\wedge'} (A \ll = t A \gg) +^{\wedge'} (A \gg rt c \ll) = 0$. OU, d'après l'équation $(t^{\wedge}) , y / \gg 2 \gg$ mais celle-ci, à cause de l'équation (f), n'est évidemment possible qu'en adoptant à la fois les trois signes inférieurs $—$, ce qui nous ramène aux expressions simples de $j r^{\wedge} , z$ trouvées par la première analyse. Enfin, quant à l'orbe tt décrit par le point P pris à la distance $OP = h$ sur l'axe OG du couple d'impulsion, il est très-facile d'en trouver les équations. Il est évident que cette courbe n'est autre chose que l'intersection de la sphère dont l'équation est $j c^* - f -^{\wedge} H - z^* = A^*$, avec la surface conique décrite par OG, et dont l'équation est $(/? \gg — \grave{a}') x' -^{\wedge} (A \ll \sim h^{\wedge}) y^{\wedge} + (A \gg - r \ll) z^{\wedge} = 0$. D'où l'on voit que cette courbe tt est un orbe sphérique, à double courbure, comme les orbes elliptiques r et j, et qu'elle est décrite autour du même axe. 46. En considérant les deux cônes (OP) et (OT) terminés par ces orbes tt et t qui leur servent de bases, le mouvement du corps se fait

i54 THÉORIE NOUVELLE de telle manière que le corps tourne, à chaque instant dt sur it s'génératrices OP et OT de ces deux cônes, avec des vitesses angulaire > proportionnelles aux longueurs mêmes de ces génératrices : de sorte que la première vitesse $6 \cos i$ est constante comme la ligne OP, et que la seconde $9 \sin i$ est variable comme la ligne OT.

CHAPITRE m. MOUVEMENTS ANGULAIRES DES AXES

PRINCIPAUX DU CORPS DANS l'ESPACE ABSOLU. L Nous n'avons considéré jusqu'ici que le mouvement de l'axe instantané, parce qu'il suffit de le connaître, et dans le corps et dans l'espace, pour avoir le mouvement du corps lui-même, et, par suite, les mouvements des trois axes principaux que le corps entraîne avec soi dans l'espace absolu. Mais il n'est peut-être pas inutile d'indiquer en peu de mots ces corollaires, et de montrer, à l'égard de chacun de ces axes principaux a, A, 6', le mouvement qu'il a pour tourner autour de l'axe jîxe du couple d'impulsion; pour s'abaisser et se relever alternativement sur W plan de ce couple : ce qui répond aux mouvements qu'on appelle, en Astronomie, la précession des nœuds, la natation de l'axe; quantités analogues à celles qui, dans l'analyse précédente (relative à l'axe et à l'équateur instantanés)^ sont désignées par -? et ~j et dont les valeurs en fonction de $\hat{o}$, et par conséquent, du temps f, sont c"x primées par iii (iB h dt dt e ^A' e« — A' i7« Soient donc ici X, /x, v les trois angles que les rayons principaux a. h j c font avec l'axe fixe du couple d'impulsion, et repre

The text on this page is estimated to be only 25.09% accurate

DE LA ROTATION DES œRPS. i55 nons les lettres $x^{\wedge} y^{\wedge} z$ pour désigner les lignes $kp^{\wedge} kq^{\wedge} kr$; il est aisé de voir qu'on a les trois équations suivantes : / $V^{\wedge} fur hy hz$ (i) $\cos X = c$ — , $\cos ii = f$. $\cos v = -$, et y par conséquent , celles-ci : (a) $8in"A = : \gg \sin'a = , , ? sm' v = ;$ D'où l'on peut conclure en passant , que si Ton prolonge les rayons a, h j c jusqu'aux points A% B% C où ils vont rencontrer le plan du couple d'impulsion (lequel est à la distance h du centre O), on aura, en faisant les lignes variables $OA' = p,,$ $OB' = p,,$ $OC = p,,$ les équations $P-=?' Pi=p' P'=T^{\wedge}'$ ce qui donne ces deux propriétés assez remarquables, III $A^{\wedge}^{\wedge} -r -h -1 -+- -r = \text{constante} = 7-9 \pi$ $\pi i \hat{p} i^{**} -Y -f- -5- -f- -T = \text{constante} = i . i . Fa Pb Pc v^{*}-- .., . 48.$ Maintenant, soient- $^{\wedge} \gg -^{\wedge} > -^{\wedge} >$ ou simplement TTa , $w^{\wedge} i^{\wedge} r^{\wedge}$ les vitesses angulaires des projections des trois axes a, bj c sur le plan du couple, je dis qu'on aura les trois équations suivantes : $\bullet h a- \text{ — } X^{*}$ dont la démonstration directe est très-Êicile. Et 9 en effet , il est clair que Ha dt ne désigne autre chose que l'angle P. ai

i56 THÉORIE NOUVELLE décrit par la projection du rayon a sur le plan du couple pendant l'instant dt . Or la projection de a est $a \sin X$, et, par conséquent, l'expression $a \sin X dt$ représente l'aire décrite par cette projection de a : mais l'aire décrite sur un plan par la projection d'une ligne n'est autre chose que la projection de l'aire décrite dans l'espace par la ligne elle-même. Nous n'avons donc qu'à chercher l'aire que le rayon a décrit dans l'espace, à la projeter sur le plan du couple, et à l'égaliser à l'expression $a \sin X dt$. Or, dans un instant dt le corps tourne autour de a d'un angle $Z dt$; mais, par cette première rotation, la ligne a demeure immobile et ne produit aucune aire dans l'espace : il ne reste donc à considérer que les deux autres rotations (dt qui ont lieu dans le même instant autour des deux autres axes b et c). Par la première, le corps tourne autour de b d'un angle $q dt$ et, par conséquent, le rayon a décrit un secteur $a^2 q dt$ dans un plan perpendiculaire à b , lequel a^2 étant projeté sur le plan du couple, donne l'aire $a^2 q dt \cos \phi$. Par la dernière rotation, le corps tourne autour de c d'un angle $r dt$, et le rayon a décrit un secteur $a^2 r dt$ perpendiculaire à c , lequel a^2 projeté sur le plan du couple, donne l'aire $a^2 r dt \cos V$. On a donc l'équation $a^2 \sin^2 X \cdot \dot{X} dt = \{a^2 q \cos \phi + a^2 r \cos V\} dt$, ou bien, en divisant de part et d'autre par $a^2 dt$, et remettant, au lieu de q et r , leurs valeurs t et $t' \dots$, $\frac{1}{2} h f y^2 z \gg \frac{h}{x^2}$ ce qui est la première de nos trois équations. Et il est évident qu'on aurait de même la seconde, en y changeant a en b et x en y et X en ϕ ; et ensuite la troisième, en y changeant a en c et x en z , et X en V .

DE LÀ ROTATION DES CORPS. 48. Ainsi on aura $h a^{\wedge} x'' (n)$
 $h b^{\wedge} y'$ ce qu'il fallait démontrer. 49. Si Ton multiplie la première de ces
trois équations par $\sin^{\wedge} X$, la deuxième par $\sin' jx$, la troisième par $\sin' v y$
et qu'on les ajoute , il vient $A h \sin^* X.7ra-+- \sin^* fx.7r4+ \sin^* v.7rc = j(3 —$
 $i) = a j$ Or, qu'on prenne sur les axes principaux, et à partir du centre, trois
lignes égales à l'unité, et l'on pourra voir $\sin X$, $\sin /x$, $\sin v$ comme les trois
projections de ces lignes sur le plan fixe du couple ; et $\sin^* X . tt^{\wedge}$, $\sin^* jx .$
 $TT^{\wedge} I \sin^* v . tt^{\wedge}$ comme les fluxions des trois aires décrites par ces
projections sur le même plan. Donc, en considérant la somme de ces trois
aires, on aura, pour cette somme, l'expression très-simple $\gg^{\wedge}$. OÙ l'on peut
remarquer que t est la vitesse angulaire constante $6 \cos i$ du système autour
de l'axe fixe du couple d'impulsion G . 50. Si , en considérant les mêmes
équations (II), on multiplie là première par $— p^{\wedge} >$ la deuxième par $-tt^{\wedge} j$ la
troisième par $— j->$ il vient $I . 2 > *^{\wedge} \wedge \wedge -r \sin \grave{A} . 71^{\wedge} = T— :^{\wedge} "jL \sim : > 1$
. $a h h y \gg^{\wedge} \sin^{\wedge} . 7 : * = jp \sim -jf^{\wedge} - , 1 . \ll h h z^{\wedge} ai..$

158 THÉORIE NOUVELLE d'où, en ajoutant, on tire cette
 équation remarquable, $-\sin U \cdot TT^{\wedge} - f \cdot \sin \theta \gg / * \bullet \wedge^* \wedge^{\wedge} ; ? s^* \wedge^{\wedge} \bullet \wedge^{\wedge} = \wedge^{\wedge} i^{\wedge} ; \wedge^{\wedge} \wedge^{\wedge}$
 $61 \wedge^{\wedge} ? \wedge^{\wedge} \wedge^{\wedge} j' Or - , T > -$ ne sont autre chose que les bras de l'inertie du
 corps autour des axes principaux : si donc, à partir du centre O, on porte sur
 les axes, trois lignes égales aux bras respectifs de y inertie autour des
 mêmes axes, on pourra considérer $-\sin X$, $t \sin /x$, $-\sin v$ comme les trois
 projections de ces lignes sur le plan du couple, et $\wedge^{\wedge} \sin^{\wedge} X \cdot tt^{\wedge}$, $7-$
 $\sin^* |x \cdot 7r^{\wedge}$, $— \sin^{\wedge} v \cdot TTc$ comme les fluxions des trois aires que ces
 projections décrivent sur le même plan pendant le mouvement du corps;
 donc, en multipliant par dt et intégrant, on aura pour la somme de ces aires
 décrites dans le temps t , 51. Voilà donc deux propriétés nouvelles du
 mouvement d'un corps libre qui tourne sur son centre de gravité : 1°. Si j à
 partir de ce centre $\wedge$ on porte sur les axes principaux du corps y trois lignes
 égales entre elles et d'une longueur quelconque r , la somme des aires
 décrites par leurs trois projections sur le plan du couple d'impulsion
 sera proportionnelle au temps; et elle sera exprimée par $a t \bullet R^* \wedge^{\wedge} ; a^{**}$. Si
 l'on porte sur les mêmes axes principaux $\wedge$ trois lignes proportionnelles aux
 trois bras de l'inertie du corps autour des mêmes axes Sj la somme des trois
 aires décrites par leurs projections sur le plan du couple sera aussi
 proportionnelle au temps; et cette somme sera exprimée par y étant le
 commun rapport des trois lignes aux trois bras d'inertie; ce qui forme deux
 théorèmes très-remarquables dans la théorie de la

DE LA ROTATION DES CORPS. iSg rotation d'un corps libre de toute action étrangère : théorèmes en quelque sorte géométriques, et qu'il ne faut pas confondre avec ceux qui regardent le principe ordinaire de la conservation des aires, quoiqu'ils en dépendent au fond, et qu'on puisse en rapprocher les expressionsy comme on peut le voir dans l'article suivant. 52. Et, en effet, si l'on considère tous les rayons vecteurs menés du centre à toutes les molécules égales du corps , et la moyenne de toutes les aires que leurs projections tracent sur le plan fixe du couple, on aura évidemment, pour cette aire moyenne[^] l'expression —\ G étant la grandeur du couple d'impulsion, et m la masse du corps, ou le nombre de toutes ses molécules. Ainsi, comme on a représenté G par [^]» on aura, pour l'expression de cette aire moyenne, décrite dans le temps [^], 53. Si donc on voulait que l'aire précédente 27 - R[^]./, due aux mouvements des trois rayons égaux r, pris sur les trois axes du corps, fut égale à cette aire moyenne tt* / du système de tous les rayons vecteurs menés aux particules du corps, il faudrait choisir la longueur du rayon r de manière qu'on eût ce qui donne, pour r, l'expression I R = Ainsi, en prenant, sur les axes principaux du corps, trois lignes égales à — p? on peut dire que, pendant le mouvement du corps, ces trois lignes projetées sur le plan du couple y décrivent trois aires dont la somme est égale k l'aire moyenne du système : de sorte qu'en multipliant cette aire par la masse m du corps , on a l'aire totale due au couple d'impulsion G.

The text on this page is estimated to be only 27.22% accurate

i6o THÉORIE NOUVELLE 54. On pourrait chercher de même les rayons inégaux $b^{\wedge}$, $R^{\wedge}$ mais proportionnels aux bras respectifs de l'inertie -9 t» -9 qu'il faudrait prendre sur les axes, pour que l'aire décrite fût égale à l'aire moyenne du système. En désignant, comme ci-dessus, par J le rapport inconnu de $r^{\wedge}$ à $r^{\wedge}$ de $r^{\wedge}$ à t^9 de $r^{\wedge}$ à -5 on aurait, pour déterminer/, l'équation $\bullet a^{\wedge} / L, i_{-} . i_{-} L \setminus \text{---} . \text{---}$ d'où Ton tire $J^{\wedge} h^{\wedge}(a^{\wedge} b^{\wedge} h b^{\wedge} c^{\wedge} - h a^{\wedge} c^{\wedge})$ $\text{---} a^{\wedge} b^{\wedge} c^{\wedge}$ et, par conséquent, en faisant $a^{\wedge} b^{\wedge} - h b^{\wedge} c^{\wedge} h a^{\wedge} c^{\wedge} = B$ et $a^{\wedge} b^{\wedge} c^{\wedge} = C$, $b c B \ll = R 6 = B c = s / b a \gg \text{---} C a c V^{\wedge} B A \gg \text{---} C a b V^{\wedge} B A \gg \text{---} C$ Ainsi, en prenant les aires décrites par les projections de ces trois lignes, on aurait en somme une aire égale à l'aire moyenne du système. II. Propriétés des mouvements de nutation des trois axes principaux vers l'axe fixe du couple d'impulsion. 55. Les trois équations (a) du n° 47 donnent : $a^{\wedge} \sin^* X = a' \text{---} A^* \wedge \gg b c^{\wedge} \sin' V = c^{\wedge} \text{---} A^{\wedge} \text{---} ;$

The text on this page is estimated to be only 26.38% accurate

DE LA ROTATION DES CORPS. i6i doDC, en ajoutant, on a l'équation (A) $a^* \sin^* X H - ft^* \sin^* /x - h c^* \sin^* 7 = \hat{u}' - h 6^* - f - c' - A^* =$ constante. Les mêmes équations (a) donnent $\sin^* X = I - A^* - T \gg \sin^* tt = 1 - A^* \wedge \gg s^* \ddot{u}^* v = i - A' -$: donc, en ajoutant, on a (R) $\sin^* X - h \sin^* /x - h \sin^* v = 3 - 1 = 2 =$ constante ^ ce qui revient à l'équation connue $\cos' X - t - \cos^* /x + \cos^* V = I$, comme cela doit être. Donc, si Von considère les trois pôles A, R, C ^ Vellipsoïde central, il résulte de l'équation précédente (A), que la somme des carrés de leurs distances à l'axe fixe du couple d'impulsion est constante dans tout le cours du mouvement. On peut ranger $\sin' X$ comme $a^* \wedge n' X x - \wedge^9$ c'est-à-dire comme le produit du carré de la distance du pôle A à l'axe du couple, multipliée par le carré du bras - de l'inertie du corps. Il résulte donc de l'équation (R) cet autre théorème : La somme des carrés des bras d^ CinerUe du corps respectivement multipliés par les carrés des distances variables des pôles à l'axe du couple, est constante clans tout le cours du mouvement. III. Des courbes $a^{\wedge}$, $a^{\wedge}$, $a^{\ll}$ décrites sur le plan du couple par les projections des trois pôles A, R, C de l'ellipsoïde central. 56. Si l'on considère les trois courbes $a^{\ll}$, $a^{\wedge}$, $a^{\wedge}$ que décrivent les trois pôles A, R, C projetés sur le plan du couple, on voit que ces trois courbes, dont le cours est infini, et qui, en général, ne se fer*

i62 THÉORIE NOUVELLE ment point » sont de même genre que Therpolbodie a décrite sur le même plan par le pôle instantané de rotation. Si A est > 69 par exemple, et que a soit ainsi Taxe que l'orbe elliptique s du pôle instantané entoure comme un essieu, la courbe $a^\wedge$ décrite, sur le plan du couple, par la projection du pôle A , sera, comme Therpolbodie c , formée par une suite d'ondes égales et régulières autour du même centre P . Et même, comme le maximum du rayon vecteur $i^\wedge a = \wedge^\wedge i^\wedge$ répond au minimum de $\wedge$, et ce minimum au minimum du rayon vecteur v de la courbe a , on voit que les sommets supérieurs des ondes de la courbe Qa répondent aux sommets inférieurs de la courbe 7 , et les inférieurs aux supérieurs. 57. Pendant ce temps, les projections des pôles B et C décrivent aussi, autour du même centre P , des courbes $a^\wedge$, de qui ont des sommets alternatifs de maximum et de minimum[^] où ces deux pôles passent aux mêmes époques, mais Tun B passant par un sommet supérieur, quand Tautre C passe à un sommet inférieur, et réciproquement : et cela, à un angle droit de distance entre le rayon vecteur $\wedge^\circ$ de Tun et le rayon vecteur $s^\wedge c$ de Tautre. Si h est < 6 , auquel cas l'orbe elliptique s entoure le petit axe c comme son essieu, on aura les mêmes propriétés pour les courbes décrites par les projections des trois pôles. Ce qu'on peut remarquer dans les deux cas, c'est que la courbe $a^\wedge$, décrite par le pôle moyen B , est la seule dont les sommets répondent toujours à des sommets de même nom dans l'herpolhodie a , et que le contraire a toujours lieu pour les deux autres courbes $a^\wedge$, (r«.. Cas singulier de $h = b$. 58. Enfin si $A = 6$, auquel cas singulier l'orbe s est une ellipse passant par l'axe moyen by et la courbe a une spirale autour du centre P , l[^] le pôle moyen B décrira de même une spirale autour du même centre, se rapprochant sans cesse de ce point comme la spirale a , sans jamais pouvoir l'atteindre; ià? le pôle A décrira aussi une spirale, mais qui ira sans cesse en s'éloignant du même centre, depuis sa distance minimum $a \cdot i / ,^\wedge >$ jusqu'à sa distance maximum a

DE LA ROTATION DES CORPS. 163 qu'elle ne pourra jamais atteindre : cette spirale , décrite par le pôle A, va donc sans cesse en s'épanouissant vers une circonférence de cercle du rayon $a^{\wedge}$ qui' en est comme l'asymptote; 3° enfin, il en sera de même de la spirale décrite par le pôle G, et dont le plus petit rayon sera $= c \cdot \sqrt{-t};^{\wedge} \wedge^* \wedge^{\circledast} P^{\wedge''\wedge}$ grand $= c$. Cas où l'ellipsoïde central est de révolution. 59. Si l'ellipsoïde central est de révolution , l'orbite est un cercle autour de l'axe de révolution, la courbe a est un cercle sur le plan du couple, et la projection du pôle de la figure décrit aussi un cercle concentrique. Dans ce cas, il n'y a point, à proprement parler, d'autre pôle de la figure que celui qui fait l'extrémité de l'axe de révolution. Mais si l'on voulait en marquer arbitrairement deux autres sur l'équateur du sphéroïde, pris à un angle droit de distance l'un de l'autre, et considérer les deux courbes que leurs projections décrivent, on aurait deux courbes parfaitement égales, qui ne seraient point circulaires, mais qui formeraient des ondulations régulières autour du même centre : les sommets de noms différents sur les deux courbes étant toujours à un angle droit de distance angulaire l'un de l'autre. Remarque I. 60. On a trouvé pour la vitesse angulaire $\wedge$ du pôle instantané I autour du centre , de l'axe du couple , de $\wedge k^{\wedge} h^* \hat{A} P^{\wedge ' i^{\wedge}}$ étant le rayon vecteur de l'herpolhode a. Voyons quelle est, en fonction de son rayon vecteur Uaj l'expression de la vitesse angulaire $\wedge$ du pôle A de l'ellipsoïde autour du même axe fixe. Cette vitesse angulaire est exprimée, comme on l'a vu plus haut, par $dva h a^{\wedge} — x' P. 2a$

i64 THÉORIE NOUVELLE Or, $a^2 \sin^2 X$ étant le carré du rayon vecteur Va 1^{e} courbe a^2 , on a d'abord $r \dot{r} = h^2 a^2 - x'^2$ mais, de on tire $\frac{dt}{k} \sqrt{V^2 - 13}$ sur $A = ; 1 a^2 : c^2 = g(i; \langle -l-A \rangle \sim a)$; on a donc , en mettant pour $a^2 - x'^2$ cette valeur, $r/r^2 A Ah . (\frac{1}{2}, 3'$ a d'où l'on voit que l'expression de la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ du pôle A de la figure est semblable à celle de la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ du pôle instantané I, l'une et l'autre se composant d'une partie constante et d'une partie réciproque au carré du rayon vecteur. Et il est évident qu'on peut dire la même chose des deux autres pôles B et C, puisque leurs mouvements angulaires sont donnés par la même expression que la précédente en y changeant simplement a en A, et a en c. Remarque IL 61. Si le corps était de révolution , autour de Taxe principal a par exemple, il est certain que la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ du pôle A serait égale à celle du pôle instantané L On doit donc trouver, dans le cas de $6 = c$, C'est, en effet, ce qui a lieu, car il est aisé de voir que, dans le cas de $fe = c$, le carré du rayon vecteur v de l'herpolhodie q est constant

DE LA ROTATION DES œRPSj i65 et qu'il a pour valeur $(a'-A')$ $(A \gg -t')$. A' ' d'un autre côté, on a, pour le carré du rayon vecteur V_a de la courbe $a^\wedge$, » or y en mettant ces valeurs de $v^\wedge$ et $(^\wedge^\wedge$ dans les expressions respectives de $-r$ et $-\wedge$? on trouve d'abord dt di et ensuite $^\wedge_A h (A^\wedge — g')$ $(A \gg — ^\wedge \gg) _^\wedge _ A A \gg — ^' _$ (6» même valeur que la précédente, comme cela devait être. Remarque III. 62. Comme dans notre analyse la quantité j_r exprime la grandeur du couple d'impulsion 9 on tire de l'expression précédente, $dv, _ b' dt \sim h\hat{A}'$ qui ne renferme que le produit hk et le carré de $b^\wedge j$ cette conséquence remarquable : c est que, dans un corps dont l'ellipsoïde central est de révolution, le mouvement $-\wedge$ des nœuds de l'équateur sur le plan fixe du couple ne dépend que de la grandeur de ce couple, et point du tout de sa direction; que ce mouvement ne dépend pas non plus du moment dH inertie autour de l'axe a du corps, mais du seul moment d'inertie autour du rayon b de l'équateur. Ainsi, quelles que soient la position du couple par rapport à $Taxe$, et la valeur du moment d'inertie $-;$ autour de cet axe, le pôle A du corps tournera toujours avec 22..

The text on this page is estimated to be only 10.78% accurate

LOG THÉOKIE SOUVELLE la $U_i^{\wedge} \tilde{f}_{i\tilde{i}}^{\wedge} > t_{\text{lebbe}}$ angulaire $-^{\wedge}$
autour de J_{axf} fixe du couple $d_{\text{injpui}} t_{\text{OD}}$. Or il uebt pas difficile de
reconnaître que, $\text{mem}^{\wedge}$ sans $c_{\text{Laii}}^{\wedge}$ er la u_i'

The text on this page is estimated to be only 28.02% accurate

DE LA ROTATION DES CORPS. 167 Or on a trouvé
précédemment (n° 8) $\hat{ii}^* = .lv / (\lll - a')(P) - \lll)(\lll - /)$, et Ton a, d'après
l'équation (i) ci-dessus, $" - \ll = -7 - ' ^ . _ , , . ^ liEiiflhiiflzill)$, donc, en substituant
ces valeurs, on aura dv. Maintenant y comme on a pour l'expression de $\text{---}^{\wedge}$
dt $''' hA c$ on aura, en divisant cette équation par la précédente $y ^ . ^ p . \sqrt{K -$
 $''' \gg *) [$

The text on this page is estimated to be only 23.63% accurate

f68 THÉORIE HOUELLE 64. Si, au lieu de la courbe γ , décrite par la projection du pôle A, on voulait considérer la courbe γ^* tracée par le point A' où l'axe a prolongé va rencontrer le plan du couple, il est clair qu'en nommant i^* le rayon vecteur de cette nouvelle courbe γ^* , on aurait d'abord entre a et i^* cette relation : $i^* = a \cdot p$. Or, ces deux rayons vecteurs i^* et a étant toujours dans une même direction, il est évident que le mouvement angulaire du rayon 1 est parfaitement égal à celui du rayon Vat . P^* conséquent, pour avoir la vitesse angulaire $\dot{\gamma}^*$ du rayon v_{jj} il suffit de mettre, dans l'expression précédente de $\dot{\gamma}$ au lieu de i , sa valeur en v_j qui est donnée ci-dessus. On aura donc de suite l'équation A présent, pour obtenir l'équation polaire de cette nouvelle herpolhode Of^* , il faudrait chercher l'expression de $\dot{\gamma}^*$ en fonction de i^{**} . Or l'équation (R) étant différenciée donne d'abord $dp^* = [h^* - i \cdot p] \cdot dt$ $a(v, ' - ap_j - H A') \cdot dt$ il ne reste donc qu'à trouver le facteur $\dot{\gamma}^*$ en fonction du rayon v^* . Mais nous avons trouvé plus haut $\dot{\gamma}$ en fonction du rayon m , et celui-ci, par l'équation (R), est donné en t ; donc, en faisant ces substitutions, on aura l'expression de $\dot{\gamma}^*$ en fonction du rayon vecteur sff^* . Donc enfin, si l'on divise l'expression de $\dot{\gamma}^*$ par celle de $\dot{\gamma}$ il

DE LA ROTATION DES CORPS. 169 viendra $-\wedge =$ fonction de $v^\wedge$, ce qui donnera l'équation polaire de la courbe qj . On trouverait les deux autres courbes $o^\wedge\wedge$ (7c par le simple changement de a en $h^\wedge$ et de a en c dans la précédente. 65. On peut remarquer entre ces nouvelles courbes et les premières une différence assez notable. Chacune des trois premières courbes $a^\wedge$, $a^\wedge$, $o^\wedge$. est, comme Therpolhodie $o^\wedge$, toujours renfermée entre deux cercles de rayons finis, dont elle va toucher alternativement l'une et l'autre circonférences. Mais, des trois courbes $c^\wedge$, $(7^\wedge$, $(Te'$, il n'y en a qu'une seule qui circule ainsi entre deux circonférences finies; et cette courbe est ou $a^\wedge$ ou $a^\wedge$ selon qu'on a $h > b$ ou $h < b$. Pour les deux autres, elles vont porter les sommets supérieurs de leurs ondes sur des circonférences de cercle d'un rayon infini. C'est ce qu'il est facile de reconnaître par la simple comparaison du rayon vecteur $if^\wedge$ au rayon vecteur $if^\wedge$; etc. 66. Par les deux variables $tt^\wedge$ et $t^\wedge\wedge$, déterminées en fonction du temps tj on aurait la projection du pôle A sur le plan fixe, et comme la hauteur de ce point au-dessus du plan est exprimée par $y a^* - s^\wedge$, on connaîtrait la position du pôle A dans l'espace absolu : et ainsi pour les deux autres pôles B et C du corps. Mais l'intégration de ces expressions $-\wedge$ et $-\wedge$ a les mêmes difficultés et demande l'emploi des mêmes fonctions elliptiques que les précédentes $^\wedge9 -\wedge$ relatives au pôle instantané I de la rotation, etc., etc. 67. Mais je n'irai pas plus loin dans ces détails : nous n'avons ici d'autre but principal que de bien démontrer notre théorie nouvelle de la rotation des corps, et de l'élever à un point de clarté où elle devînt, pour ainsi dire, élémentaire: or il me semble que, par les nouveaux théorèmes et les images variées qui précèdent, cet important objet se trouve entièrement rempli.

I70 THÉORIE NOUVELLE DE LA ROTATION DES CORPS.

J'ajouterai seulement, sur la nature du mouvement de rotation d'un corps libre , ce dernier corollaire : c'est que l'ellipsoïde central du corps est perpétuellement coupé par le plan fixe du couple d'impulsion suivant une ellipse dont la forme varie, mais dont l'aire est constante. Cela se, voit presque immédiatement si l'on considère que tous les rhomboïdes construits sur trois diamètres conjugués de l'ellipsoïde sont égaux en volume, et qu'il en est de même de tous les cylindres inscrits à ces rhomboïdes; que, par conséquent, de cette infinité de cylindres égaux, ceux qui ont même hauteur, ont des bases équivalentes. Or cest précisément ce qui a lieu pour les cylindres dont les deux bases parallèles touchent l'ellipsoïde central aux deux bouts de l'axe instantané de rotation. PABIS. — IMPRIMVBIK DE BACHELIER, rue du Jardinets, n[^] 13.

The text on this page is estimated to be only 9.00% accurate

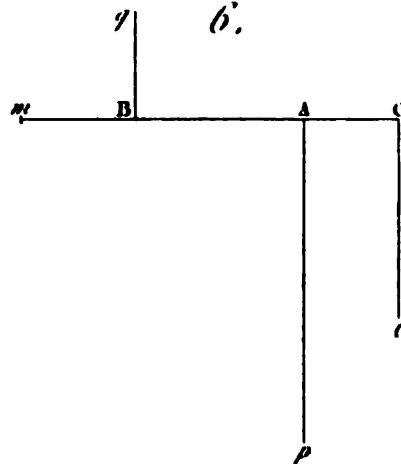
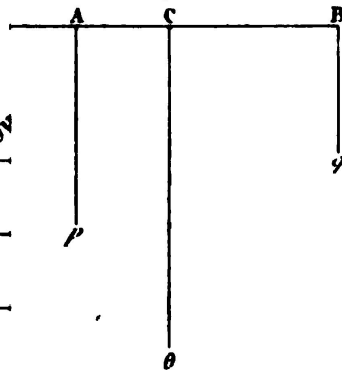
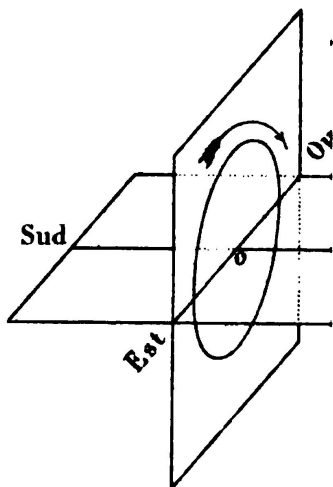
Jûiu^na/ de JfaMMa/iyuskr À ri. I V tlfrm.Xtv .».

par M. Peinset.

1.

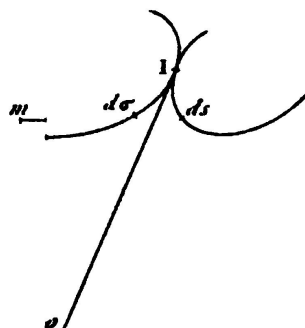
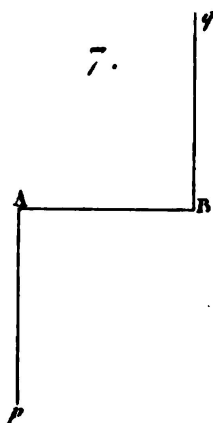
5.

6.

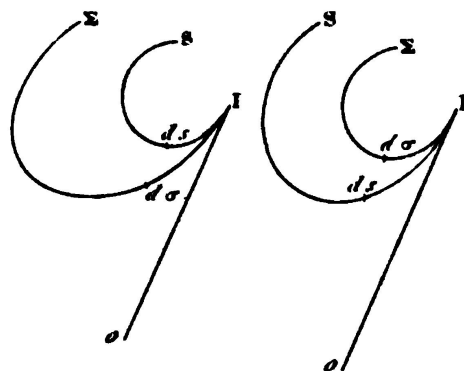


7.

10.

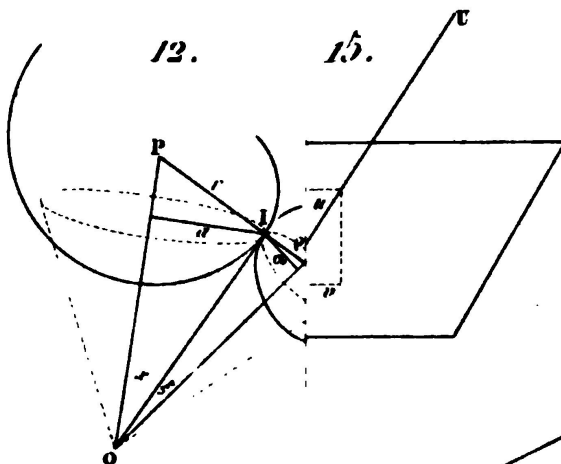


11.

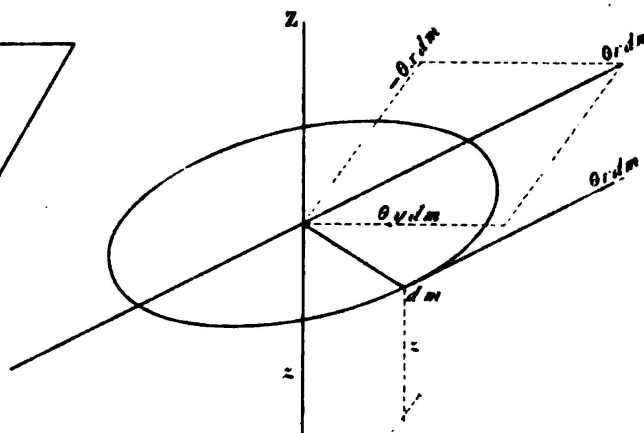


12.

15.



16.



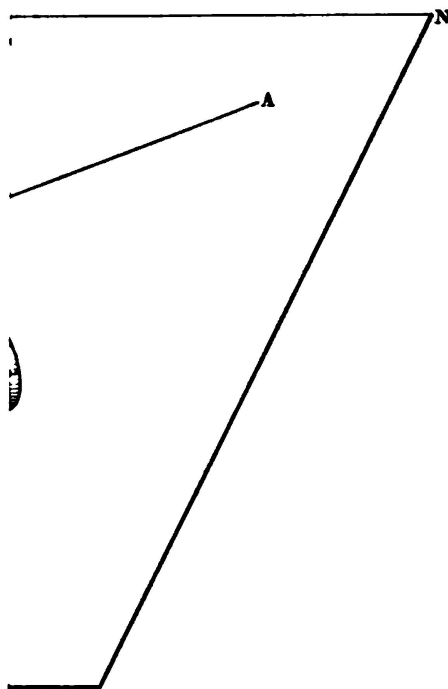
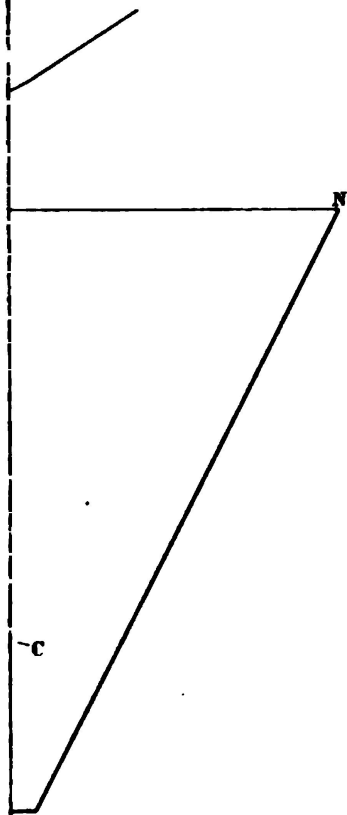
The text on this page is estimated to be only 1.00% accurate

/

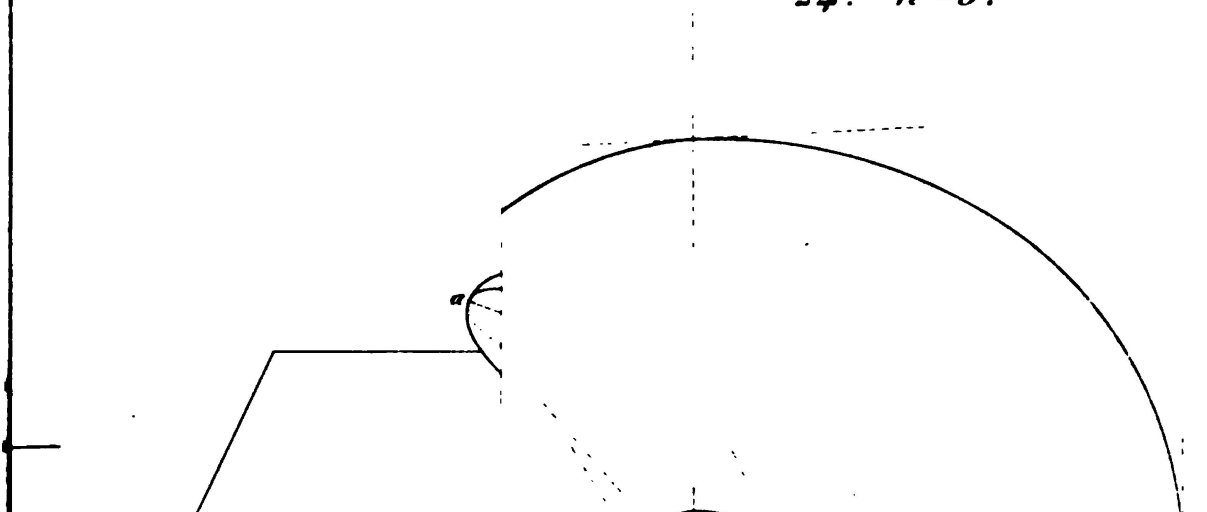
The text on this page is estimated to be only 1.40% accurate

PI. Il '/*/{ f/^' //V' /W" ' "^^/rf/^; 'ormtjrtr jre

nouvelle de la Rotative

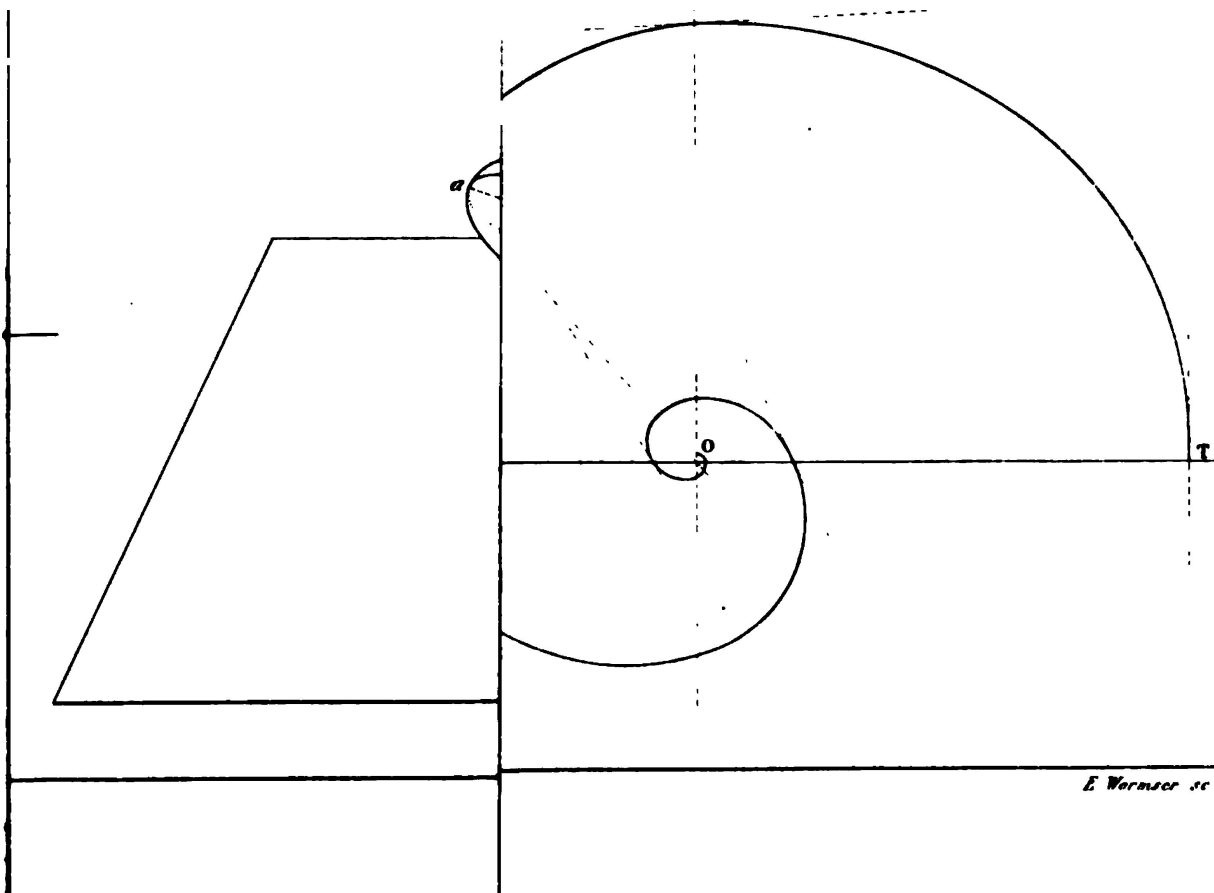


24. h-b.



The text on this page is estimated to be only 1.43% accurate

PI II //"/•>y ?/^' //^î /W' e -^^^/ ^////\ 2^ . A-â. / £ Wirm^cr ,*c



The text on this page is estimated to be only 0.00% accurate